Optimización Sin Cálculo Diferencial

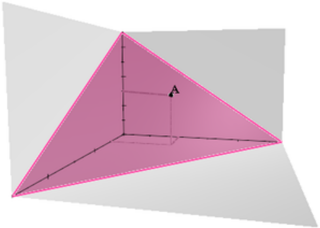
XXXV Reunión de Educación Matemática

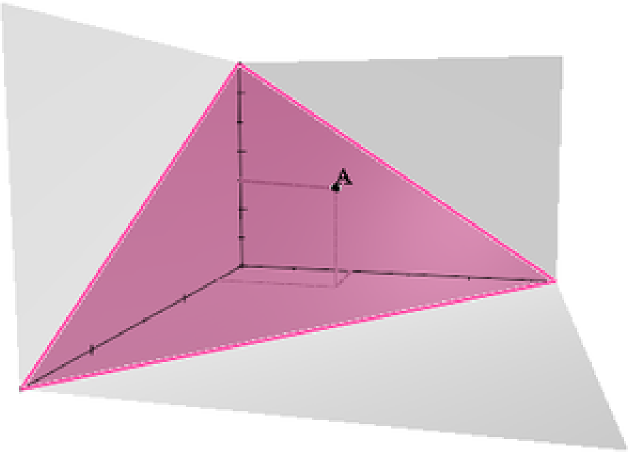
Cristina Egüez   Antonio Sángari

Universidad Nacional de Salta

Agosto, 2012

Sea A un punto del primer octante. Entre todos los tetraedros que tienen al punto A en la cara opuesta al origen, y las caras restantes sobre los planos coordenados, encontrar el de menor área.




A

Proceso

De lo particular a lo general y del plano al espacio

Encontrar el área mínima de:

1. un triángulo con catetos sobre los ejes coordenados y un punto A sobre la hipotenusa.
2. cualquier triángulo conocidos un ángulo y un punto A en el lado opuesto.
3. un tetraedro con tres caras en los planos coordenados y un punto A en la cara opuesta al origen.
4. cualquier tetraedro conocidos un ángulo triedro y un punto A en la cara opuesta.

Encontrar el área mínima de:

1. un triángulo con catetos sobre los ejes coordenados y un punto A sobre la hipotenusa.
2. cualquier triángulo conocidos un ángulo y un punto A en el lado opuesto.
3. un tetraedro con tres caras en los planos coordenados y un punto A en la cara opuesta al origen.
4. cualquier tetraedro conocidos un ángulo triedro y un punto A en la cara opuesta.

Encontrar el área mínima de:

1. un triángulo con catetos sobre los ejes coordenados y un punto A sobre la hipotenusa.
2. cualquier triángulo conocidos un ángulo y un punto A en el lado opuesto.
3. un tetraedro con tres caras en los planos coordenados y un punto A en la cara opuesta al origen.
4. cualquier tetraedro conocidos un ángulo triedro y un punto A en la cara opuesta.

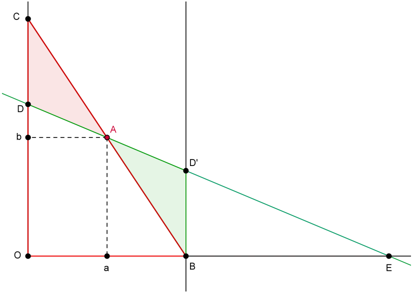
Encontrar el área mínima de:

1. un triángulo con catetos sobre los ejes coordenados y un punto A sobre la hipotenusa.
2. cualquier triángulo conocidos un ángulo y un punto A en el lado opuesto.
3. un tetraedro con tres caras en los planos coordenados y un punto A en la cara opuesta al origen.
4. cualquier tetraedro conocidos un ángulo triedro y un punto A en la cara opuesta.

Encontrar el área mínima de:

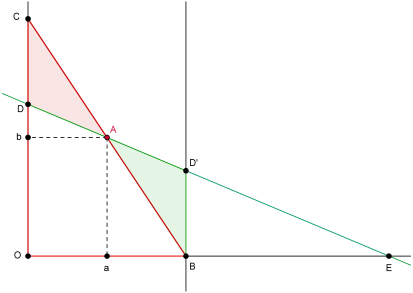
1. un triángulo con catetos sobre los ejes coordenados y un punto A sobre la hipotenusa.
2. cualquier triángulo conocidos un ángulo y un punto A en el lado opuesto.
3. un tetraedro con tres caras en los planos coordenados y un punto A en la cara opuesta al origen.
4. cualquier tetraedro conocidos un ángulo triedro y un punto A en la cara opuesta.

Sea A un punto del primer cuadrante. Entre todos los triángulos que tienen al punto A en uno de sus lados, y los lados restantes sobre los ejes de coordenadas, encontrar el de menor área.



El triángulo de menor área es el que tiene a A como punto medio de la hipotenusa

Sea A un punto del primer cuadrante. Entre todos los triángulos que tienen al punto A en uno de sus lados, y los lados restantes sobre los ejes de coordenadas, encontrar el de menor área.



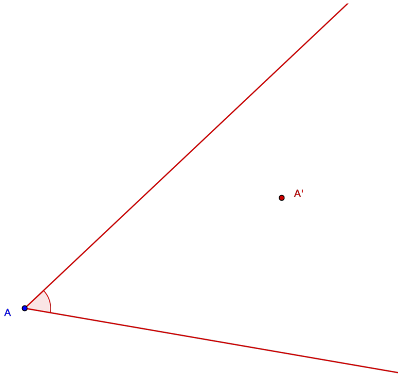
El triángulo de menor área es el que tiene a A como punto medio de la hipotenusa

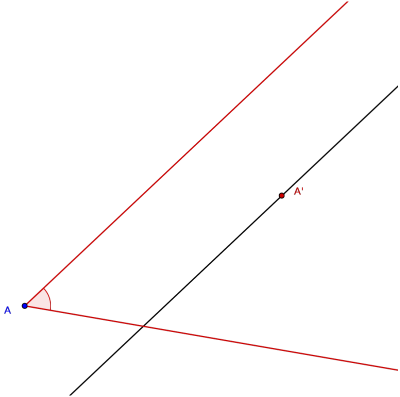
Triángulo de área mínima

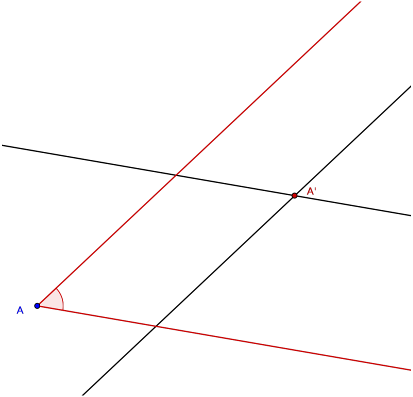
Teorema

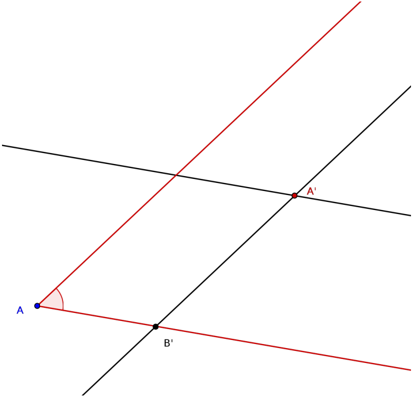
Sea un ángulo A y un punto A' en el interior de A. De todos los triángulos tales que comparten el ángulo A y el lado opuesto BC contiene a A', el de menor área es el que tiene a A' como punto medio de BC.

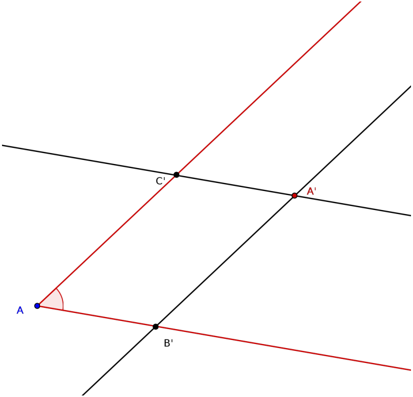
Probamos la existencia

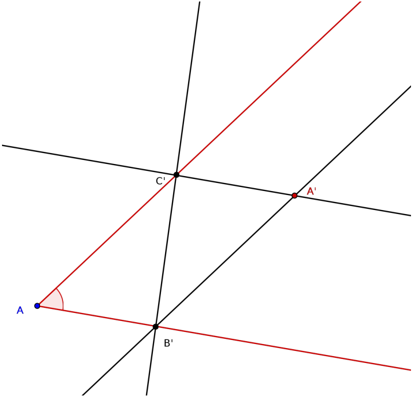


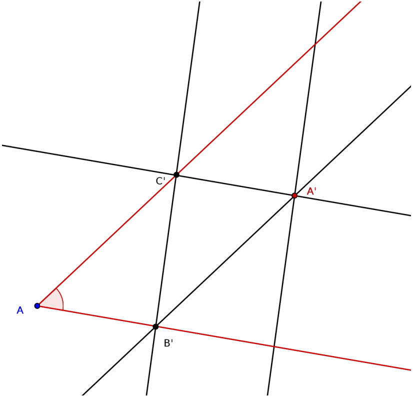

A'
A

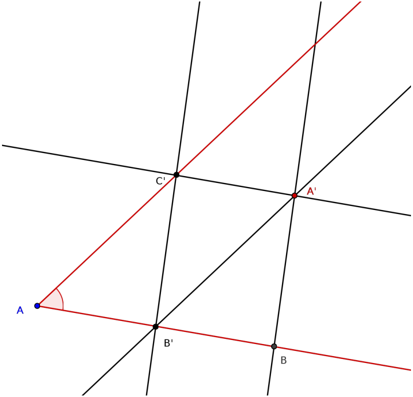

A'
A

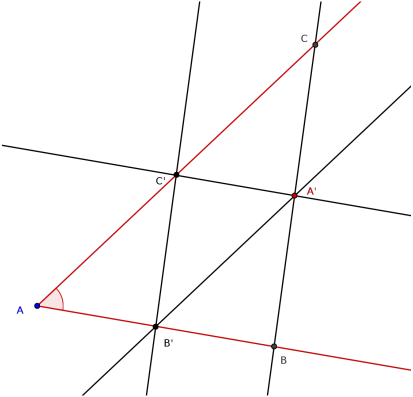

A'
A
B'

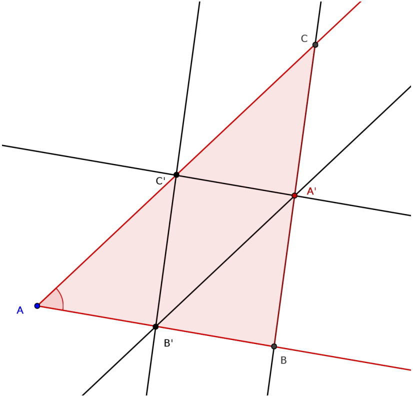

C'
A'
A
B'


C'
A'
A
B'


C'
A'
A
B'


C'
A'
A
B'
B


C
C'
A'
A
B'
B


C
C'
A'
A
B'
B

Por ser $B'C'A'B$ *y* $B'C'CA'$ *paralelogramos,*

$$B'C' \simeq BA'$$

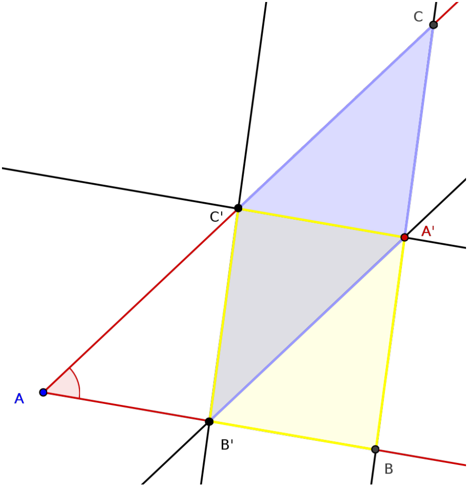
$$B'C' \simeq A'C$$

Luego,

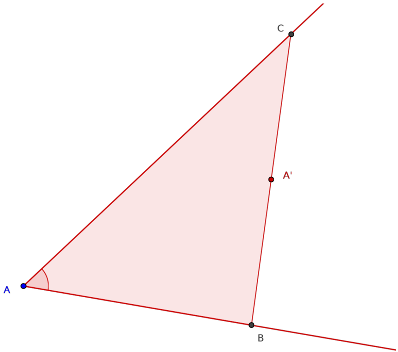
$$BA' \simeq A'C$$

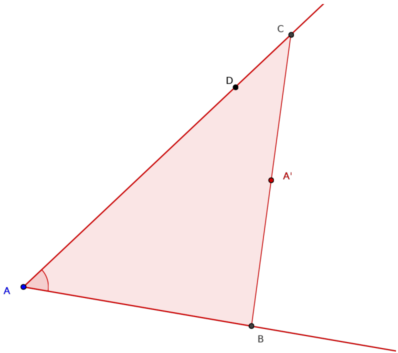
Por tanto:

A' *es punto medio de* BC

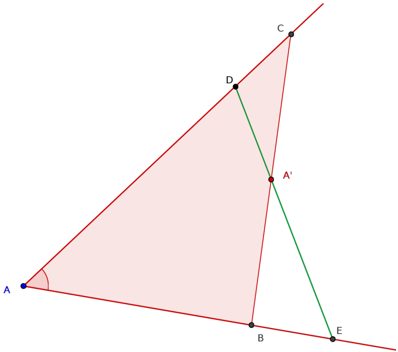


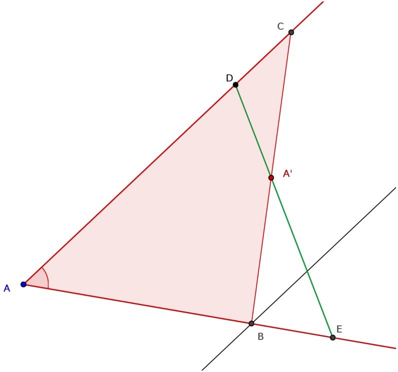
Probamos que es el menor

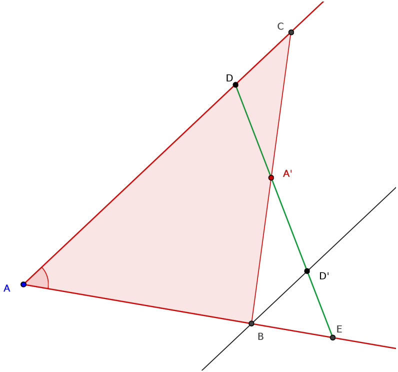


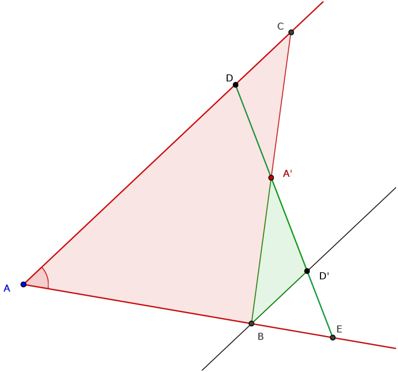

C
D
A'
A
B

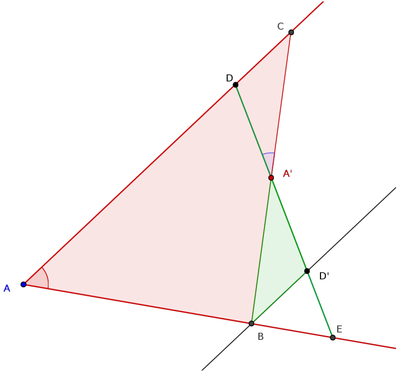
Probamos que es el menor

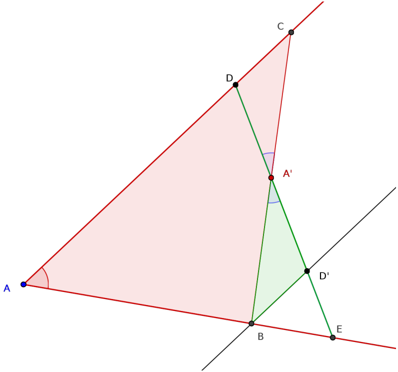


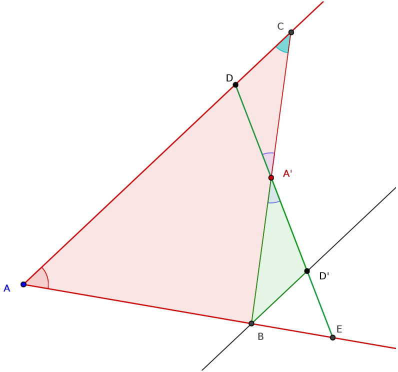

C
D
A'
A
B
E

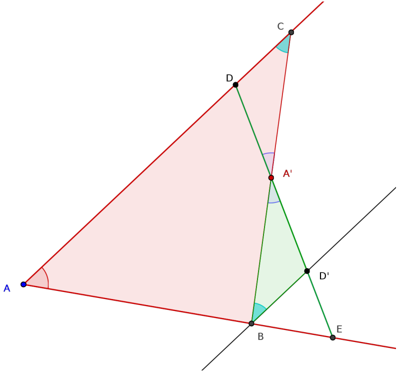

C
D
A'
A
D'
B
E


C
D
A'
A
D'
B
E


C
D
A'
A
D'
B
E


C
D
A'
D'
A
B
E


C
D
A'
A
D'
B
E


C
D
A'
A
D'
B
E

$$DA'C \simeq D'A'B'$$

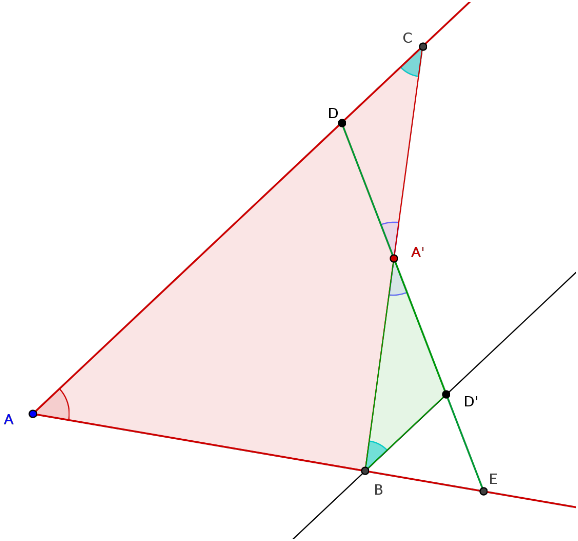
$$B'C' \simeq A'C$$

Luego,

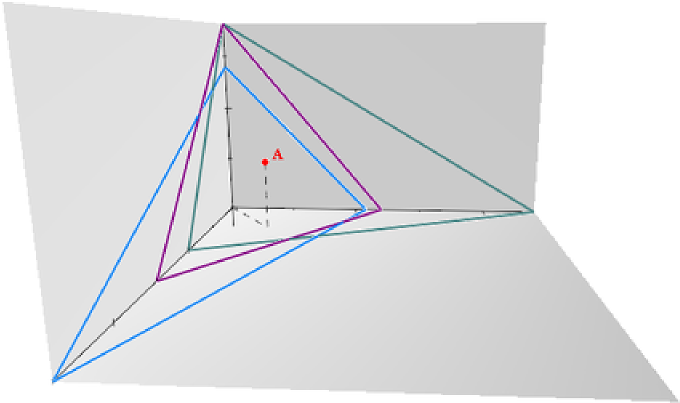
$$DAE - CAB = BD'E$$

Así:

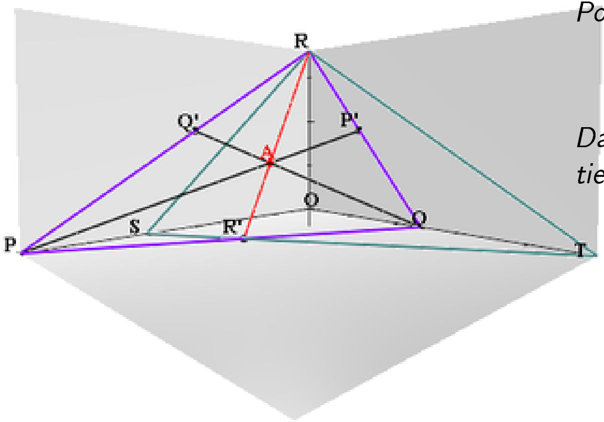
$$CAB < DAE$$



Sea A un punto del primer octante. Entre todos los tetraedros que tienen al punto A en una de sus caras, y los caras restantes sobre los plano coordenados, encontrar el de menor área.



Los tetraedros tienen la misma altura



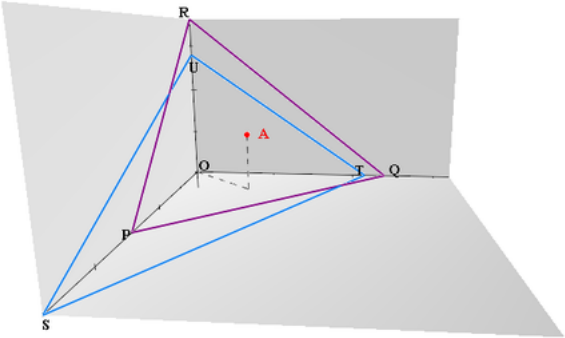
Por el teorema anterior:

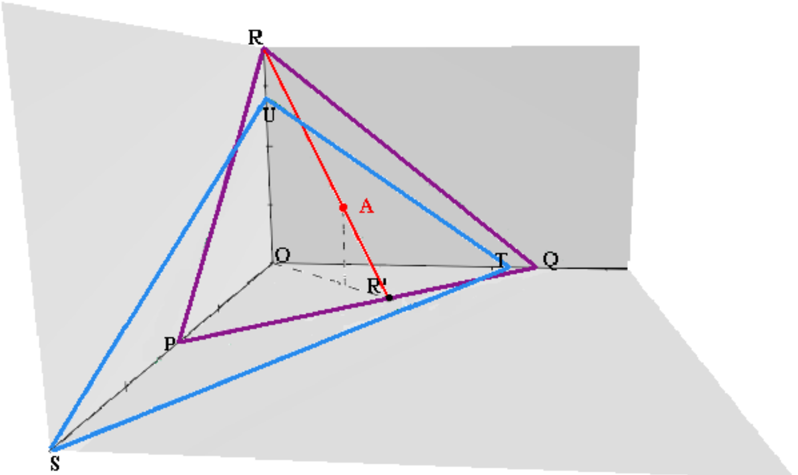
$$OST > OPQ$$

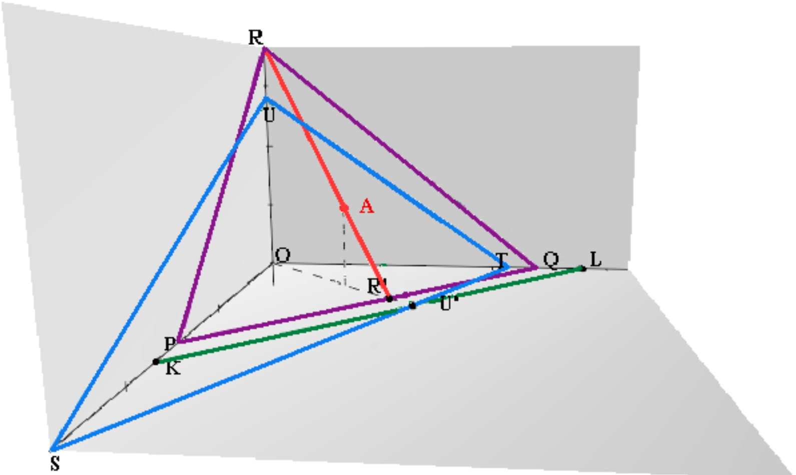
Dado que los tetraedros tienen la misma altura:

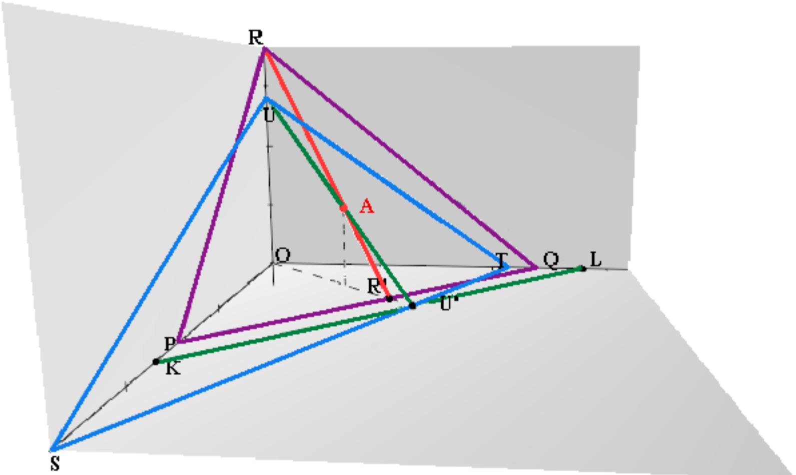
$$OSTR > OPQR$$

Los tetraedros tienen distinta altura

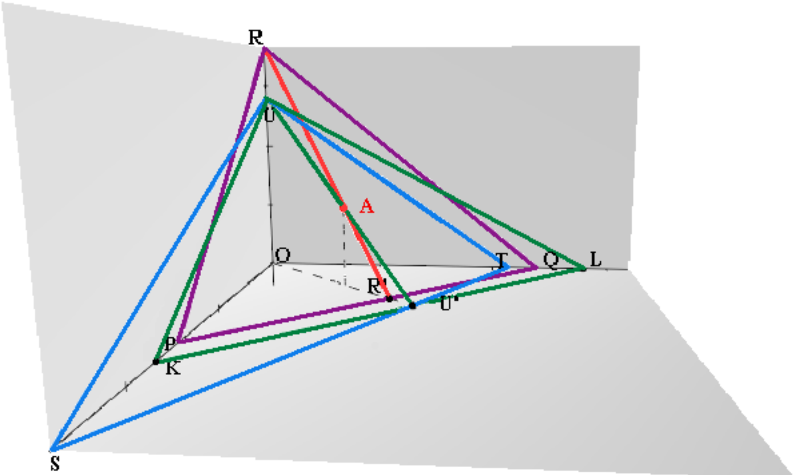


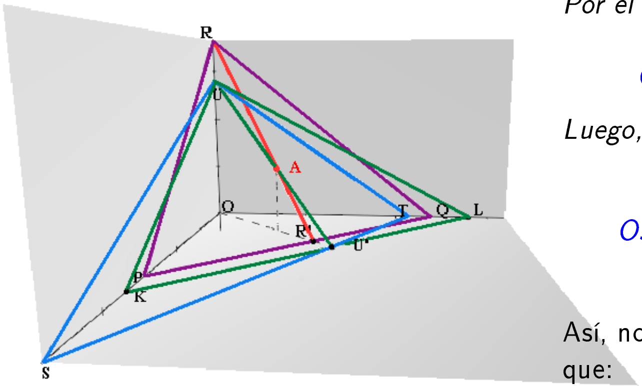

R
U
A
O
T
Q
R'
P
S


R
U
A
O
T
Q
L
R'
U'
P
K
S



R
U
A
O
T
Q
L
R'
U'
P
K
S


R
U
A
O
T
Q
L
R'
U'
P
K
S



Por el teorema anterior:

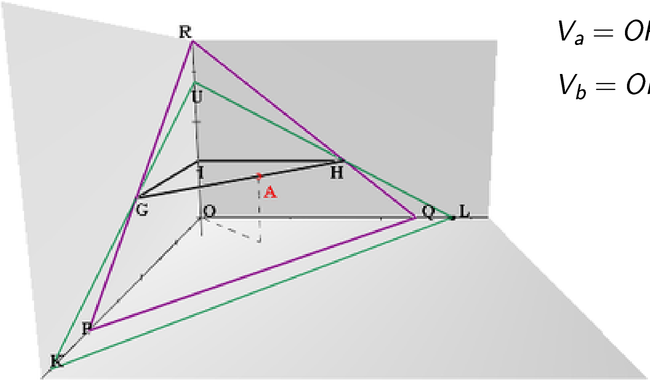
$$OST > OKL$$

Luego,

$$OSTU > OKLU$$

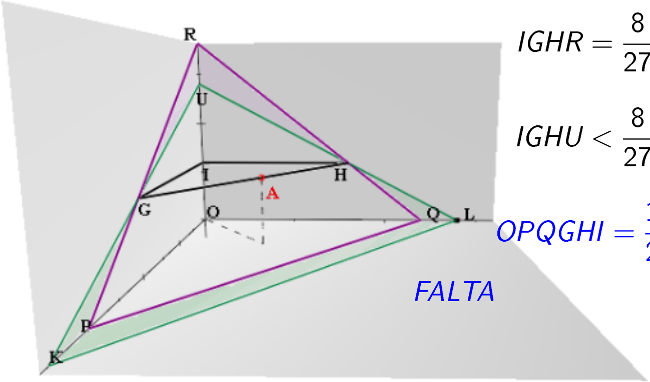
Así, nos resta probar que:

$$OKLU > OPQR$$



$V_a = OPQR$

$V_b = OKLU$



$$IGHR = \frac{8}{27} V_a$$

$$IGHU < \frac{8}{27} V_b$$

$$OPQGHI = \frac{19}{27} V_a$$

FALTA

A. Author.
Handbook of Everything.
Some Press, 1990.

S. Someone.
On this and that.
Journal on This and That. 2(1):50–100, 2000.