OPTIMIZACIÓN SIN CÁLCULO DIFERENCIAL

Cristina Egüez **Antonio Sángari**

Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de Salta

Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta

criseguez2000@gmail.com

Categoría: Reflexiones

Nivel Educativo: Universitario

Palabras claves: tetraedro - área mínima - optimización - triángulo medial

RESUMEN

Los problemas de optimización se pueden, por regla general, reducir al estudio de una función en forma analítica y muchas veces el cálculo se hace tedioso. Aquí presentamos la resolución de problemas de área y volúmen mínimos, en el plano y en el espacio, a través de razonamientos geométricos interesantes que permiten alcanzar el objetivo más rápidamente y formular algunas conjeturas.

1. Fundamentación

En un trabajo anterior[1] enfatizamos la importancia de resolver problemas del cálculo diferencial, siempre que se pueda, de más de una forma. En esta oportunidad, presentamos una serie de pasos para resolver problemas de optimización relacionados con triángulos y prismas sin hacer uso del cálculo diferencial, como se haría habitualmente, y encontrando caminos interesantes a través de la geometría elemental. La aplicación de la condición suficiente para la resolución del problema de minimizar el volumen de un tetraedro apoyado en los planos coordenados y que pase por un punto del primer octante, nos llevó a intentar una resolución por medios geométricos a fin de evitar el tedio de los cálculos pertinentes. Esto a su vez, nos condujo a formular algunas conjeturas y a resolver nuevos planteos.geométricos y de optimización más generales. De esta manera surgió el presente trabajo que muestra resoluciones geométricas de minimización.

[1] Sángari, A. Egüez, C. Una síntesis del cálculo y la geometría: Localización del Punto de Fermat. Revista de Educación Matemática. Vol 27.1 Recuperado de http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/#rev_intro_volumen (2012).

2. Area mínima de un triángulo a partir de un ángulo y un punto del lado opuesto

2.1. Problema 1.

Sea A un punto del primer cuadrante. Entre todos los triángulos que tienen al punto A en uno de sus lados, y los lados restantes sobre los ejes de coordenadas, encontrar el de menor área.

2.1.1. Análisis previo

¿Qué información nos suministra el enunciado?

a. El punto A tiene coordenadas (a, b) con $a, b > 0$.

b. El triángulo es rectángulo y A y está sobre la hipotenusa.

c. Uno de los vértices es el punto $(0, 0)$.y los otros son $(x, 0)$, $(0, y)$.

¿Cuál es el objetivo? Encontrar los vértices $(x, 0)$, $(0, y)$ del triángulo.

2.1.2. Subproblema 1.

A partir de las condiciones a, b y c, mostrar que si A no es punto medio de la hipotenusa, siempre es posible construir otro triángulo de área menor.

Tomemos un punto A de coordenadas (a, b) como en la figura 1. Sea el triángulo OED de tal modo que el segmento AE sea mayor que el segmento AD. Sea D' el simétrico de D con respecto al punto A y B el punto de intersección de la abscisa con su perpendicular desde D. Sea C la intersección de la recta AB con la ordenada. Notemos que los triángulos ACD y ABD' son congruentes y por tanto OBC es menor[2] que OED.

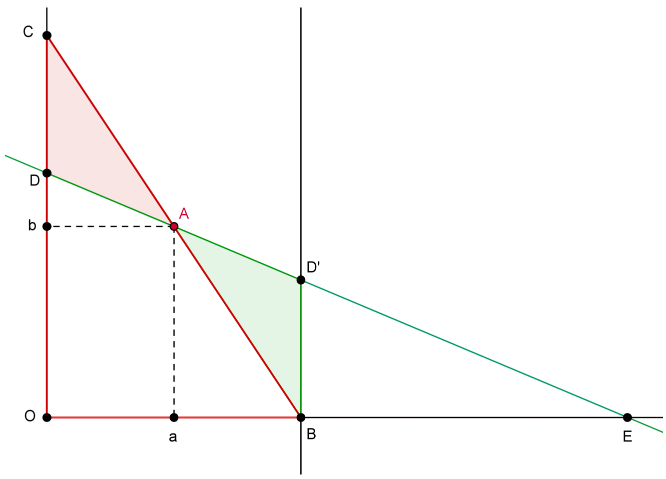


Figura 1

Resumiendo, tenemos un método para construir triángulos menores, que cumplen las condiciones del problema 1, siempre y cuando A no sea el punto medio de la hipotenusa. Si el segmento DA fuera mayor que el AE, el procedimiento sería similar.

[2] Diremos mayor para denotar mayor área o mayor volumen cuando en el contexto esto esté claro. Análogamente para menor.

Hemos probado que si A no es punto medio de la hipotenusa siempre es posible hallar uno menor. Ahora vamos a probar que si A es punto medio de la hipotenusa cualquier otro es mayor.

2.1.3. Subproblema 2.

Sea BOC un triángulo que tiene el ángulo recto en O y el punto A sobre la hipotenusa BC. Mostrar que el triángulo de menor área es el que tiene a A como punto medio de la hipotenusa.

Sea DOE un ángulo recto tal que A está en la hipotenusa DE y no es punto medio. Dado que los segmentos BC y DE se cortan en A, uno de los puntos D o E quedará en el semiplano opuesto al que contiene al triángulo OBC respecto de BC. Si B está entre O y E, y trazamos por B una recta r paralela a OC. Podemos probar que r siempre cortará al segmento AE en un punto D', como observamos en la figura 1. De esta manera siempre es posible obtener un triángulo ABD' congruente con ACD y un triágulo BED' tal que, en relación a las áreas, $DOE - BOC = ACD$. Luego, DOE es mayor que BOC.

Una pequeña digresión Una mirada más cuidadosa al procedimiento usado anteriormente, nos lleva a notar que en ningún momento necesitamos hacer uso del ángulo recto en O, por tanto podemos conjeturar que este resultado es válido para cualquier triángulo. De esto, surge el teorema de la sesión 2.2.

2.1.4. Subproblema 3.

Sea OBC un triángulo que tiene a $A = (a, b)$ como punto medio de uno de sus lados, y los lados restantes sobre los ejes de coordenadas, hallar los vértices $(x, 0)$ e $(0, y)$.

Sean $A_1 = (a, 0)$ y $A_2 = (0, b)$. Por ser A punto medio del segmento BC (figura 1), A_2A es base media de OBC, luego, $x = 2a$ y $B = (2a, c)$, análogamente, usando el punto A_2, obtenemos $C = (0, 2b)$.

2.2. Teorema del triángulo de área mínima

Teorema 1 *Sea un ángulo A y un punto A' en el interior de A. De todos los triángulos que comparten el ángulo A y que el lado opuesto BC contiene a A', el de menor área es el que tiene a A' como punto medio de BC.*

Primero mostraremos la existencia de tal triágulo y luego justificaremos que es el de área mínima.

Prueba de la existencia del triángulo. Sea A el vértice del ángulo dado y A' el punto del lado opuesto, tracemos por A' rectas paralelas a los lados del ángulo y determinemos los puntos C' y B' como en la figura 2.

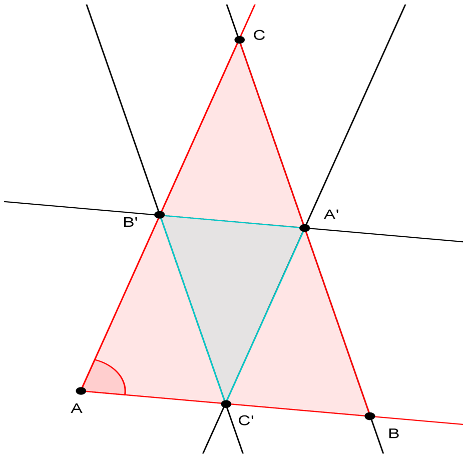
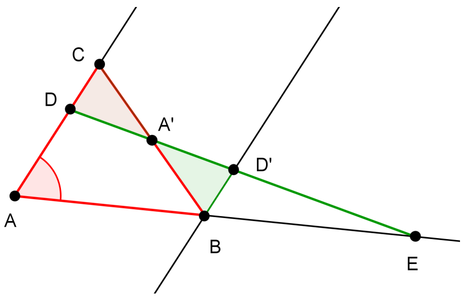


Figura 2

Tracemos por A' una paralela r a $B'C'$. Los puntos B y C del triángulo son la intersección de r con cada uno de los lados del ángulo dado.

De los paralelogramos $A'CB'C'$ y $A'BC'B'$, deducimos que A' es el punto medio de BC. Análogmente se observa para los otros ángulos. Esta es una propiedad de la base media y del triágulo medial.

Prueba del área mínima. Supongamos un triángulo ADE genérico tal que A' está en DE, como en la figura 3. Dado que los segmentos BC y DE se cortan en A', los puntos D y E no estan en el mismo semiplano respecto de la recta BC. Supongamos que B está entre A y E, así, el ángulo $A'BE$ es exterior del triángulo ABC. Si trazamos por B una paralela a AC, podemos probar que esta recta siempre cortará al segmento $A'E$ en un punto D'. De esta manera, siempre es posible obtener el triángulo $A'BD'$ congruente con ACD, y el triángulo $D'BE$, tal que, en relación a las áreas, $ADE - ABC = D'BE$. Luego ADE es mayor que ABC.



Figuara 3

3. Volumen mínimo de un tetraedro apoyado en los planos coordenados

3.1. Problema 2.

Sea A un punto del primer octante. Entre todos los tetraedros que tienen al punto A en una de sus caras, y los caras restantes sobre los plano coordenados, encontrar el de menor área.

3.2. Análisis previo

Observamos que este problema es una extensión del problema 1 al espacio tridimensional. Por tanto podemos realizar un procedimiento análogo al anterior.y utilizar algunos resultados. Ahora, nuestro objetivo es encontrar los vértices $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$ del tetraedro.

3.3. Subproblema 1

A partir de las condiciones del problema 2, mostrar que el tetraedro de menor volumen es que tiene al punto A como baricentro de la cara que lo contiene.

Sea el tetraedro $OPQR$ como en la figura 4, mostremos que A es el baricentro del triángulo PQR.

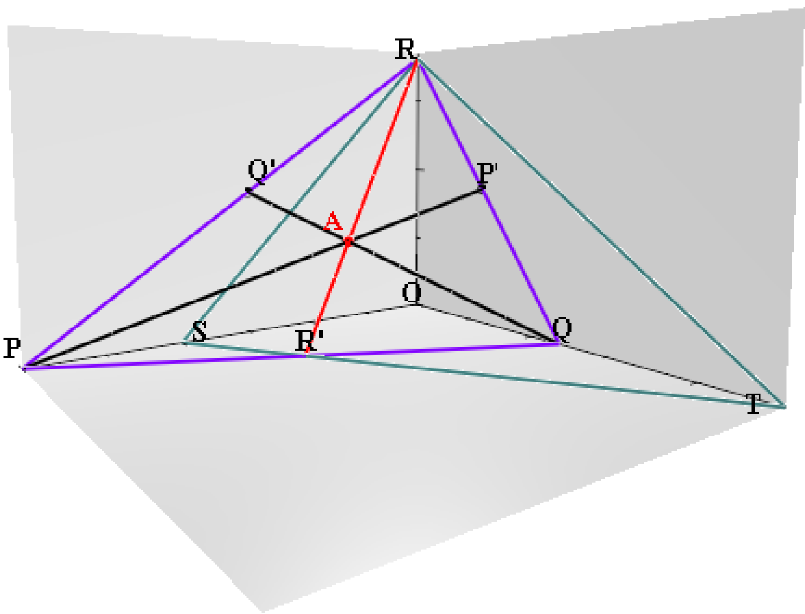


Figura 4

Caso 1. Los tetraedros tienen la misma altura

Consideremos los tetraedros $OPQR$ y $OSTR$ de la figura 4, ambos tienen la misma altura OR y contienen al punto A en la cara opuesta a O y A es el baricentro de PQR. Si R' el punto medio de PQ, el segmento RR' pertenece a ambos tetraedros. Aplicando el teorema anterior, OPQ es menor que OST y por tener la misma altura $OPQR$ es menor que $OSTR$.

Si tres caras se apoyan sobre los panos coordenados y el baricentro está en la opuesta al origen de coordenadas, por propiedad de las medianas, resulta que si A tiene coordenadas (a, b, c) , las coordenadas de los vértices restantes del tetraedro son $(3a, 0, 0)$, $(0, 3b, 0)$ y $(0, 0, 3c)$.

Caso 2. Los tetraedros tienen alturas diferentes

Ahora, consideremos los tetraedros con altura diferente, $OPQR$ y $OSTU$, con U está entre O y R, como en la figura5. Podemos probar que la recta UA corta al plano OPQ en un punto U' que está del otro lado de la recta PQ que O. Tracemos por U' una recta r paralela a PQ. Sean K y L las intersecciones de r con las rectas OP y OQ respectivamente. Como OPQ y OKL son semejantes, U' es punto medio de KL, por estar en la semirrecta OR'. Entonces, por el teorema anterior OST es mayor que OKL, y por tanto $OSTU$ es mayor que $OKLU$.

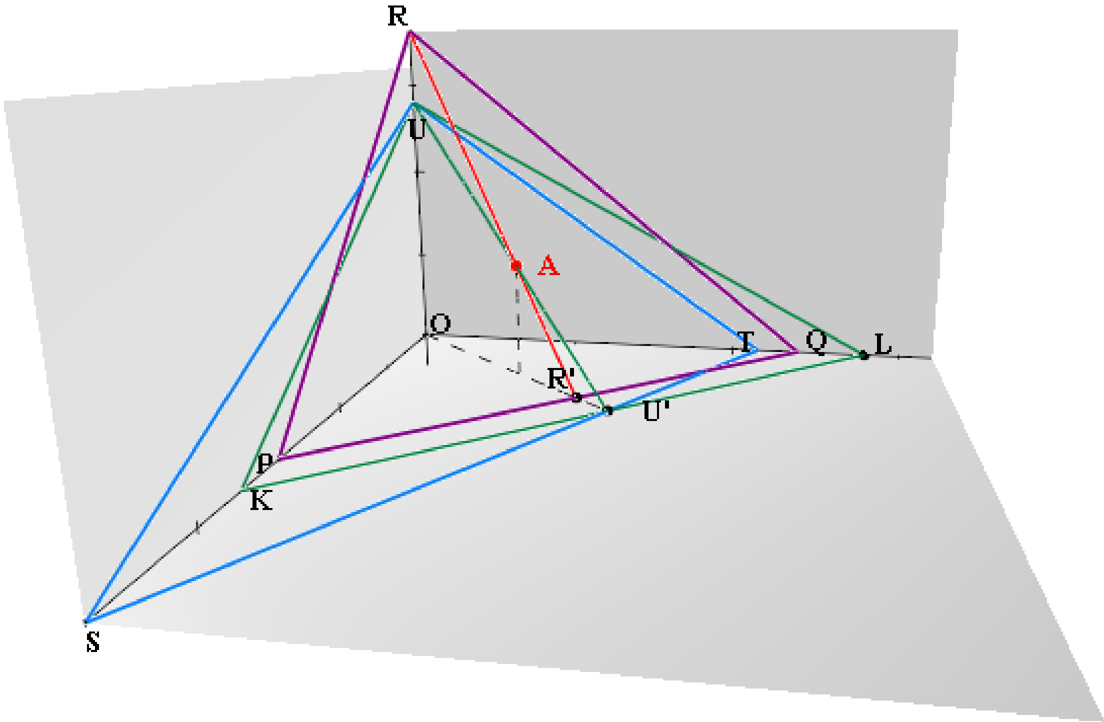


Figura 5

Tendríamos que probar ahora, que $OKLU$ es mayor que $OPQR$, para ello consideremos la figura 6, donde GHI es paralelo a las bases y pasa por A. Sea V_a el volumen de la pirámide $OPQR$ y V_b el volumen de $OKLU$. Dado que A es el baricentro de la cara frontal PQR y considerando que las medianas se cortan en una relación $2:1$, el volumen de $IGHB$ es $\frac{8}{27}V_a$ y el volumen de $IGHU$ es menor que $\frac{8}{27}V_b$, porque el baricentro de la cara UKL se encuentra por debajo de A. Así, la pirámide truncada $ORQGHI$ tiene volumen igual a $\frac{19}{27}V_a$ y la pirámide truncada $OKLGHI$ tiene volumen mayor que $\frac{19}{27}V_b$. De esto deducimos que la diferencia de parte inferior entre las pirámides, $GKPLQH$, tiene volumen mayor que $\left|\frac{19}{27}V_a - \frac{19}{27}V_b\right|$. Así también la diferencia superior entre las pirámides, $RGUH$ tiene volumen menor que $\left|\frac{8}{27}V_a - \frac{8}{27}V_b\right|$. Entonces:

$$OKLGHI > \frac{19}{27}\left|V_a - V_b\right| > \frac{8}{27}\left|V_a - V_b\right| > RGUH$$

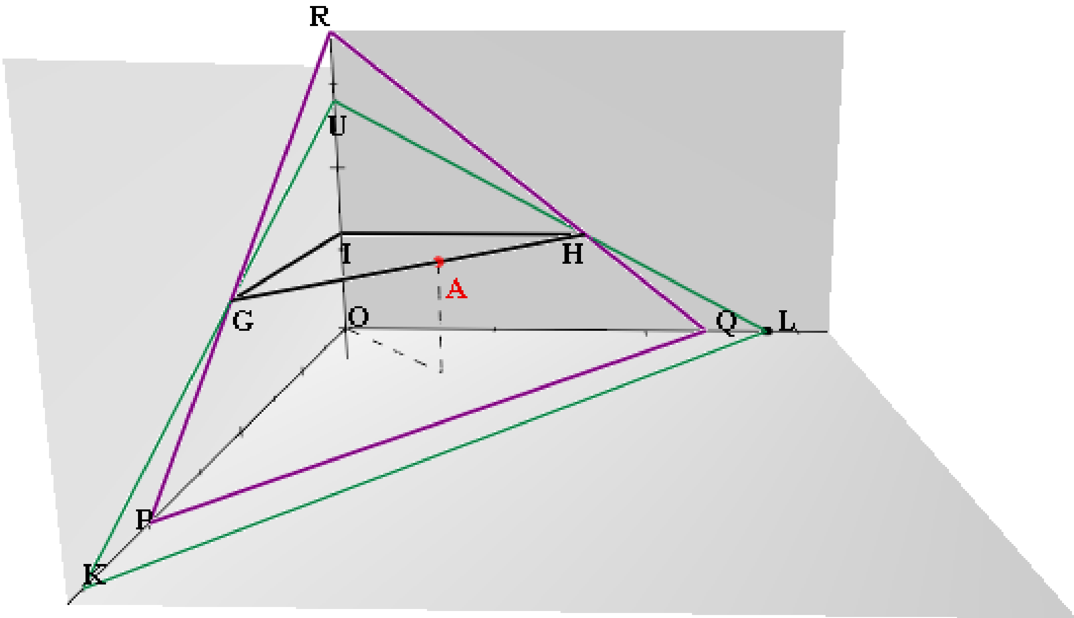


Figura 6

La desigualdad anterior implica que $OKLU$ es mayor que $OPQR$.

Nos quedaría solamente el caso de la pirámide de altura mayor, pero esta se convierte rápidamente el una de altura menor considerando otra de las bases.

3.3.1. Subproblema 2

Hallar los vértices del tetraedro con volumen mínimo, bajo las condiciones del problema 1.

Dado que tres caras se apoyan sobre los panos coordenados y el baricentro está en la opuesta al origen de coordenadas, por propiedad de que las medians se cortan en una relación $2:1$, resulta que si A tiene coordenadas (a, b, c), las coordenadas de los vértices restantes del tetraedro son $(3a, 0, 0)$, $(0, 3b, 0)$ y $(0, 0, 3c)$

3.4. Teorema del tetraedro de volumen mínimo

Esta demostración no requirió del hecho de que las caras estén en los planos coordenados, por tanto tambien puede se puede generalizar mediante el siguiente teorema.

Teorema 2 *Si A es un punto interior de un triedro de vértice O. De todos los tetraedros que comparten este triedro y que la cara opuesta a O contiene a A, el de menor área es el que tiene al punto A como baricentro de la cara opuesta a O.*

4. Conclusión

Los problemas 1 y 2 se enfocan clásicamente en un curso de análisis de varias variables usando el método de los multilpicadores de Lagrange. También son resolubles analíticamente a través de composición de funciones y de curvas de nivel. En este trabajo aprovechamos la naturaleza del problema para intentar su solución por medios geométricos, y, en este intento, no sólo encontramos solución para los mismos, sino que además surgieron planteos más generales que pudimos resolverlos sin hacer uso del cálculo diferencial. Por otra parte, resolverlos analíticamente implica el tedio de cuentas largas y complicadas.

Más allá de encontrar o no las soluciones, aquí lo esencial es promover en los estudiantes una actitud creativa capaz de plantear e intentar resolver problemas, buscar distintos caminos de ataque y agotar todas las instancias. Quizás esto lleve mucho tiempo pero de eso se trata la matemática: de pensar y repensar aunque a veces no se encuentre la solución. Si podemos transmitir esto a nuestros estudiantes estaremos formando personas resolvedoras de problemas", como dice George Polya (1.887-1.985).