Modelos y Demostraciones - Microeconomía

Agustín Sanhueza

Teoría del Consumidor

$$U(X,Y) = X^{\alpha}Y^{\beta}$$

Los precios de los bienes X e Y se denotan P_x y P_y, el ingreso del individuo es I. $\alpha, \beta > 0$

1. Restricción Presupuestaria

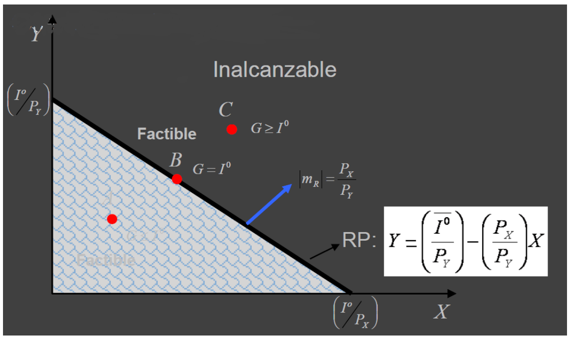
Respuesta

$$\boxed{\underbrace{P_xX + P_yY}_{Gasto} = \underbrace{I}_{Ingreso}}$$

Para poder graficar despejamos Y

$$P_yY = I - P_xX$$

$$\boxed{Y = \frac{I}{P_y} - \frac{P_x}{P_y}X}$$



2. Curva de indiferencia

Respuesta

Denotamos la función de utilidad como un escalar genérico u_0 y luego despejamos Y para poder graficar.

$$u_0 = X^{\alpha}Y^{\beta}$$

$$Y^{\beta} = \frac{u_o}{X^{\alpha}}$$

$$\boxed{Y = \left[\frac{u_o}{X^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\beta}}}$$

3. Demandas Marshallianas

Respuesta

$$\max_{\{X,Y\}} U(X,Y) = X^{\alpha}Y^{\beta}$$
$$s.a : P_x X + P_y Y = I$$

$$L = X^{\alpha}Y^{\beta} + \lambda(I - P_x X - P_y Y)$$

CPO:

$$L_x : \quad \alpha X^{\alpha-1}Y^{\beta} - \lambda P_x = 0$$
$$L_y : \quad \beta X^{\alpha}Y^{\beta-1} - \lambda P_y = 0$$
$$L_\lambda : \quad P_x X + P_y Y = I$$

$$\frac{\alpha X^{\alpha-1}Y^{\beta}}{\beta X^{\alpha}Y^{\beta-1}} = \frac{\lambda P_x}{\lambda P_y}$$
$$\frac{\alpha Y}{\beta X} = \frac{P_x}{P_y}$$
$$\boxed{Y = \frac{\beta P_x}{\alpha P_y} X}$$

Reemplazamos esta relación en la restricción presupuestaria

$$P_x X + P_y \left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y} X\right) = I$$

$$P_x X + \frac{\beta P_x}{\alpha} X = I$$
$$X\left(P_x + \frac{\beta P_x}{\alpha}\right) = I$$
$$X\left(\frac{\alpha P_x + \beta P_x}{\alpha}\right) = I$$
$$\boxed{X^* = \frac{\alpha I}{P_x(\alpha+\beta)}}$$

Si reemplazamos en la relación que encontramos anteriormente llegaremos a que

$$\boxed{Y^* = \frac{\beta I}{P_y(\alpha+\beta)}}$$

4. Función de Utilidad Indirecta

Respuesta

$$FUI \Rightarrow U(X^*, Y^*) \Rightarrow v(P_x, P_y, I)$$

$$v(P_x, P_y, I) = \left(\frac{\alpha I}{P_x(\alpha+\beta)}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta I}{P_y(\alpha+\beta)}\right)^{\beta}$$

$$\boxed{v(P_x, P_y, I) = \frac{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}} \frac{I^{\alpha+\beta}}{P_x^{\alpha}P_y^{\beta}}}$$

Propiedades:

- Homogenea de grado cero en Precios e Ingreso
- Cuasicóncava en Precios e Ingreso
- Estrictamente creciente en Ingreso
- Decreciente en Precios

5. Identidad de Roy

Respuesta

$$\boxed{\frac{\frac{\partial v(P_x,P_y,I)}{\partial P_x}}{\frac{\partial v(P_x,P_y,I}{\partial I}} = -X^*}$$

6. Demandas Hicksianas

Respuesta

$$\min_{\{X,Y\}} P_x X + P_y Y$$

$$s.a: X^{\alpha}Y^{\beta} = u_0$$

$$L = P_x X + P_y Y + \lambda(u_0 - X^{\alpha}Y^{\beta})$$

CPO:

$$L_x: \quad P_x - \lambda\alpha X^{\alpha-1}Y^{\beta} = 0$$
$$L_y: \quad P_y - \lambda\beta X^{\alpha}Y^{\beta-1} = 0$$
$$L_{\lambda}: \quad X^{\alpha}Y^{\beta} = u_0$$

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{\lambda\alpha X^{\alpha-1}Y^{\beta}}{\lambda\beta X^{\alpha}Y^{\beta-1}}$$

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{\alpha X^{\alpha-1}Y^{\beta}}{\beta X^{\alpha}Y^{\beta-1}}$$
$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{\alpha Y}{\beta X}$$
$$\boxed{Y = \frac{\beta P_x}{\alpha P_y}X}$$

Reemplazamos relación en la restricción que define a la curva de indiferencia.

$$X^{\alpha}\left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y}X\right)^{\beta} = u_0$$
$$X^{\alpha+\beta}\left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y}\right)^{\beta} = u_0$$
$$X^{\alpha+\beta} = u_o\left(\frac{\alpha P_y}{\beta P_x}\right)^{\beta}$$

$$\boxed{X^h = u_o^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha P_y}{\beta P_x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}$$

Reemplazando en la relación encontrada anteriormente llegaremos a que

$$\boxed{Y^h = u_o^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}$$

Propiedades:

- Homogenea de grado cero en precios

7. Función de Gasto

Respuesta

$$e(P_x, P_y, u_o) = P_xX^h + P_yY^h$$
$$e(P_x, P_y, u_o) = P_x\left[u_o^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha P_y}{\beta P_x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right] + P_y\left[u_o^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]$$

$$\boxed{e(P_x, P_y, u_o) = u_o^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left[P_x\left(\frac{\alpha P_y}{\beta P_x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + P_y\left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]}$$

Propiedades:

- Homogenea de grado uno en precios
- Creciente y Cóncava en los precios

8. Lema de Shepard

Respuesta

$$\boxed{\frac{\partial e(P_x, P_y, u_o)}{\partial P_x} = X^h}$$

9. Ecuación de Slutsky

Respuesta

$$\boxed{\frac{\partial X^*}{\partial P_x} = \underbrace{\frac{\partial X^h}{\partial P_x}}_{ES} - \underbrace{\frac{\partial X^*}{\partial I}X^*}_{EI}}$$

Teoría de la Firma

10. Lema de Hotelling

Respuesta

$$\boxed{\frac{\partial \pi}{\partial P} = y(P, w, r)}$$

$$\boxed{\frac{\partial \pi}{\partial w} = -L(P, w, r)}$$

$$\boxed{\frac{\partial \pi}{\partial r} = -K(P, w, r)}$$

Modelo Ocio-Consumo

Teoría de Juegos

		Jugador Y	
		L	R
Jugador X	U	(a,b)	(c,d)
	D	(e,f)	(g,h)

1. Equilibrio en Estrategias Puras

Respuesta

$$\begin{aligned} &(U,L) \quad si \;\; a \geq e \;\; \& \;\; b \geq d \\ &(U,R) \quad si \;\; c \geq g \;\; \& \;\; d \geq b \\ &(D,L) \quad si \;\; e \geq a \;\; \& \;\; f \geq h \\ &(D,R) \quad si \;\; g \geq c \;\; \& \;\; h \geq f \end{aligned}$$

2. Estrategia dominante del Jugador X

Respuesta

$$\mathrm{D}^X = \begin{cases} (U) & \text{si } a > e \;\; \& \;\; c > g \\ (L) & \text{si } a < e \;\; \& \;\; c < g \end{cases}$$

3. Función de Reacción del Jugador X

Respuesta

Sea "y" la probabilidad de que el Jugador Y, tome la estrategia L

$$\mathrm{R}^X(y) = \begin{cases} (U) & \text{si } y \cdot a + (1-y)c > y \cdot e + (1-y)g \\ (L) & \text{si } y \cdot a + (1-y)c < y \cdot e + (1-y)g \\ (U,L) & \text{si } y \cdot a + (1-y)c = y \cdot e + (1-y)g \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

Consideramos 2 firmas que compiten en precios, con un costo marginal de "c". Ambas enfrentan una demanda lineal del tipo $P = A - Q$ Consumidores le comprarán a la firma que entregue precio menor.

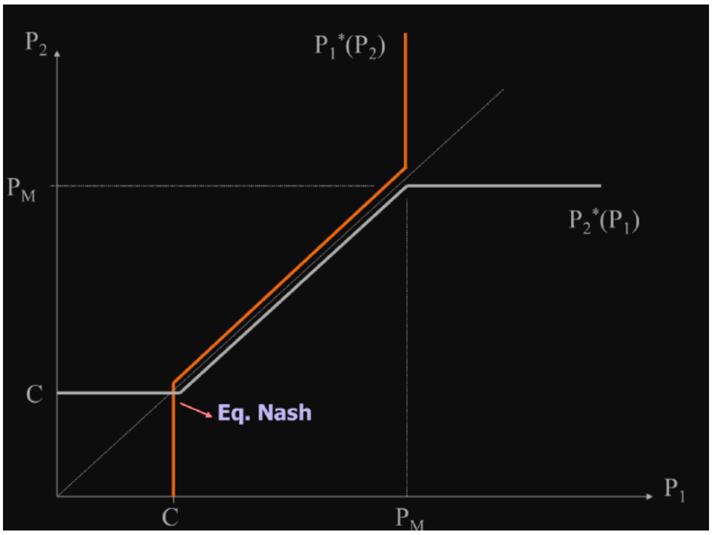
1. Funciones de reacción y equilibrio

Respuesta

$$P_1(P_2) = \begin{cases} P^M = \frac{A+c}{2} & \text{si } P^M < P_2 \\ P_2 - \varepsilon & \text{si } c < P_2 \leq P^M \\ c & \text{si } P_2 \leq c \end{cases}$$

$$P_2(P_1) = \begin{cases} P^M = \frac{A+c}{2} & \text{si } P^M < P_1 \\ P_2 - \varepsilon & \text{si } c < P_1 \leq P^M \\ c & \text{si } P_1 \leq c \end{cases}$$

Gráficamente



En equilibrio:

$$\boxed{P^* = c}$$

$$\boxed{\pi_i^* = 0}$$

$$\boxed{q_i^* = \frac{1}{2}(A - c)}$$

En este caso de dos firmas simétricas en costos, se produce la "Paradoja de Bertrand". Esta paradoja es simplemente que un duopolio llega a un equilibrio de competencia perfecta.

Modelo de Cournout

Consideramos N firmas con las siguientes funciones
$P = A - Q$
$Q = \sum_{i=1}^{N} q_i = \sum_{i=1}^{N-1} q_i + q_j$

Donde "j" es la firma representativa que analizamos en contra de las otras firmas "i". Suponemos que todas las firmas tienen un costo marginal de "c"

1. Cantidades, Precio y utilidad de equilibrio

Respuesta

Planteamos el problema el problema de maximización de la firma j y resolvemos

$$\pi_j = P \cdot q_j - c \cdot q_j$$

$$\pi_j = (P - c)q_j$$

$$\pi_j = (A - \sum_{i=1}^{N-1} q_i - q_j - c)q_j$$

CPO:

$$\frac{\pi_j}{q_j} : A - \sum_{i=1}^{N-1} q_i - 2q_j - c = 0$$

$$q_j = \frac{A - \sum_{i=1}^{N-1} q_i - c}{2}$$

Por simetría tenemos que $q_i = q_j$. Por lo que expresamos la función de reacción anterior como

$$q_i = \frac{A - \sum_{i=1}^{N-1} q_j - c}{2}$$

Usamos propiedad de sumatoria

$$q_i = \frac{A - (N-1)q_j - c}{2}$$

Reemplazamos convenientemente q_j por q_i y luego despejamos la cantidad de equilibrio.

$$q_i = \frac{A - (N-1)q_i - c}{2}$$

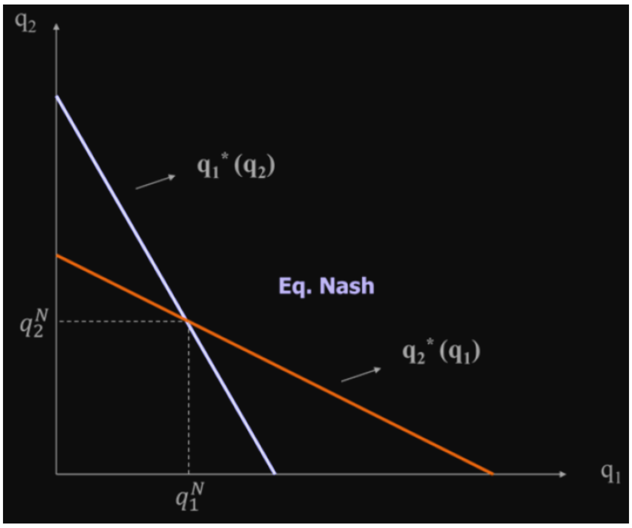
$$2q_i = A - (N-1)q_i - c$$

$$2q_i + (N-1)q_i = A - c$$

$$q_i(2 + N - 1) = A - c$$

$$\boxed{q_i^* = \frac{A-c}{N+1}}$$

Gráficamente



De aquí se deriva que

$$Q^* = \sum_{i=1}^{N} q_i^*$$

$$Q^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{A-c}{N+1}$$

Aplicamos propiedad de sumatoria y obtenemos

$$\boxed{Q^* = \frac{N(A-c)}{N+1}}$$

Reemplazamos lo anterior en la función de demanda y encontramos el precio de equilibrio

$$P^* = A - Q^*$$

$$P^* = A - \frac{N(A-c)}{N+1}$$

$$P^* = \frac{AN + A - AN + NC}{N+1}$$

$$\boxed{P^* = \frac{A+NC}{N+1}}$$

Usamos todo lo obtenido anteriormente para encontrar las utilidades de equilibrio

$$\pi_i^* = P^* \cdot q_i^* - c \cdot q_i^*$$

$$\pi_i^* = (P^* - c) \cdot q_i^*$$

$$\pi_i^* = \left[\frac{A+NC}{N+1} - c\right] \frac{A-c}{N+1}$$

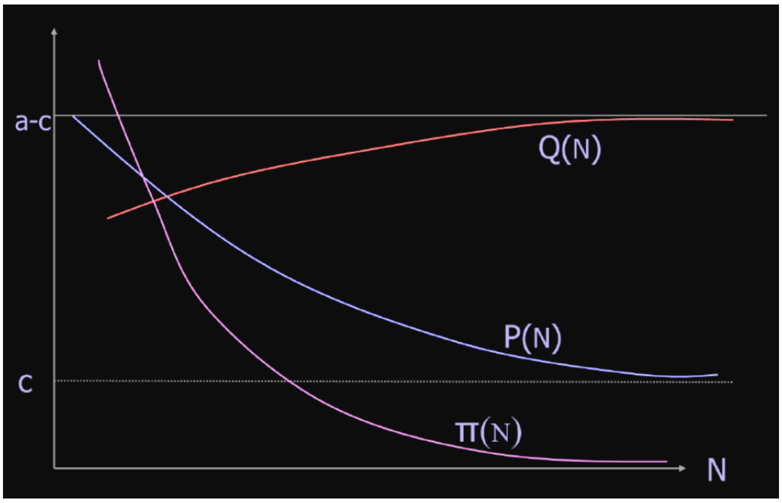
$$\pi_i^* = \left[\frac{A+NC-NC-c}{N+1}\right] \frac{A-c}{N+1}$$

$$\boxed{\pi_i^* = \left[\frac{A-c}{N+1}\right]^2}$$

Resumiendo todo en una tabla tendremos que

	Valor	$\frac{\partial}{\partial N}$	$\underbrace{lim}_{N\to\infty}$
q_i	$\frac{A-c}{N+1}$	$\frac{\partial q_i}{\partial N} < 0$	0
Q	$\frac{N(A-c)}{N+1}$	$\frac{\partial Q}{\partial N} > 0$	A-c
P	$\frac{A+NC}{N+1}$	$\frac{\partial P}{\partial N} < 0$	0
π	$\left[\frac{A-c}{N+1}\right]^2$	$\frac{\partial \pi}{\partial N} < 0$	0

Gráficamente



Modelo de Stackelberg

Modelo de Hotelling