



# Modelos y Demostraciones - Microeconomía

Agustín Sanhueza

## Teoría del Consumidor

$$U(X, Y) = X^\alpha Y^\beta$$

Los precios de los bienes X e Y se denotan  $P_x$  y  $P_y$ , el ingreso del individuo es  $I$ .  $\alpha, \beta > 0$

### 1. Restricción Presupuestaria

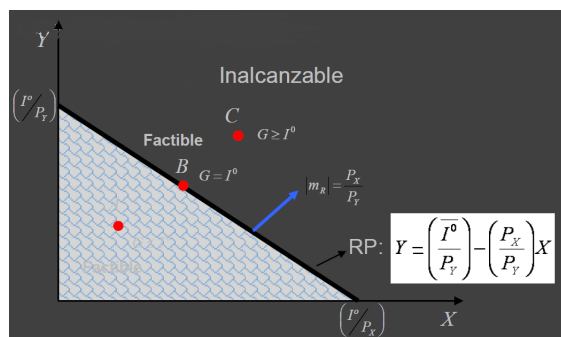
#### Respuesta

$$\underbrace{P_x X + P_y Y}_{\text{Gasto}} = \underbrace{I}_{\text{Ingreso}}$$

Para poder graficar despejamos Y

$$P_y Y = I - P_x X$$

$$Y = \frac{I}{P_y} - \frac{P_x}{P_y} X$$



### 2. Curva de indiferencia

#### Respuesta

Denotamos la función de utilidad como un escalar genérico  $u_0$  y luego despejamos Y para poder graficar.

$$u_0 = X^\alpha Y^\beta$$

$$Y^\beta = \frac{u_0}{X^\alpha}$$

$$Y = \left[ \frac{u_0}{X^\alpha} \right]^{\frac{1}{\beta}}$$



## 3. Demandas Marshallianas

**Respuesta**

$$\max_{\{X,Y\}} U(X,Y) = X^\alpha Y^\beta$$

$$s.a : P_x X + P_y Y = I$$

$$L = X^\alpha Y^\beta + \lambda(I - P_x X - P_y Y)$$

CPO:

$$L_x : \alpha X^{\alpha-1} Y^\beta - \lambda P_x = 0$$

$$L_y : \beta X^\alpha Y^{\beta-1} - \lambda P_y = 0$$

$$L_\lambda : P_x X + P_y Y = I$$

$$\frac{\alpha X^{\alpha-1} Y^\beta}{\beta X^\alpha Y^{\beta-1}} = \frac{\lambda P_x}{\lambda P_y}$$

$$\frac{\alpha Y}{\beta X} = \frac{P_x}{P_y}$$

$$Y = \frac{\beta P_x}{\alpha P_y} X$$

Reemplazamos esta relación en la restricción presupuestaria

$$P_x X + P_y \left( \frac{\beta P_x}{\alpha P_y} X \right) = I$$

$$P_x X + \frac{\beta P_x}{\alpha} X = I$$

$$X \left( P_x + \frac{\beta P_x}{\alpha} \right) = I$$

$$X \left( \frac{\alpha P_x + \beta P_x}{\alpha} \right) = I$$

$$X^* = \frac{\alpha I}{P_x(\alpha + \beta)}$$

Si reemplazamos en la relación que encontramos anteriormente llegaremos a que

$$Y^* = \frac{\beta I}{P_y(\alpha + \beta)}$$

## 4. Función de Utilidad Indirecta

**Respuesta**

$$FUI \Rightarrow U(X^*, Y^*) \Rightarrow v(P_x, P_y, I)$$
$$v(P_x, P_y, I) = \left( \frac{\alpha I}{P_x(\alpha + \beta)} \right)^\alpha \left( \frac{\beta I}{P_y(\alpha + \beta)} \right)^\beta$$

$$v(P_x, P_y, I) = \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{(\alpha + \beta)^{\alpha + \beta}} \frac{I^{\alpha + \beta}}{P_x^\alpha P_y^\beta}$$

Propiedades:

- Homogenea de grado cero en Precios e Ingreso
- Cuasicóncava en Precios e Ingreso
- Estrictamente creciente en Ingreso
- Decreciente en Precios

## 5. Identidad de Roy

**Respuesta**

$$\frac{\frac{\partial v(P_x, P_y, I)}{\partial P_x}}{\frac{\partial v(P_x, P_y, I)}{\partial I}} = -X^*$$

## 6. Demandas Hicksianas

**Respuesta**

$$\min_{\{X, Y\}} P_x X + P_y Y$$
$$s.a : X^\alpha Y^\beta = u_0$$

$$L = P_x X + P_y Y + \lambda(u_0 - X^\alpha Y^\beta)$$

CPO:

$$L_x : P_x - \lambda \alpha X^{\alpha-1} Y^\beta = 0$$

$$L_y : P_y - \lambda \beta X^\alpha Y^{\beta-1} = 0$$

$$L_\lambda : X^\alpha Y^\beta = u_0$$

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{\lambda \alpha X^{\alpha-1} Y^\beta}{\lambda \beta X^\alpha Y^{\beta-1}}$$



$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{\alpha X^{\alpha-1} Y^\beta}{\beta X^\alpha Y^{\beta-1}}$$

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{\alpha Y}{\beta X}$$

$$Y = \frac{\beta P_x}{\alpha P_y} X$$

Reemplazamos relación en la restricción que define a la curva de indiferencia.

$$X^\alpha \left( \frac{\beta P_x}{\alpha P_y} X \right)^\beta = u_0$$

$$X^{\alpha+\beta} \left( \frac{\beta P_x}{\alpha P_y} \right)^\beta = u_0$$

$$X^{\alpha+\beta} = u_0 \left( \frac{\alpha P_y}{\beta P_x} \right)^\beta$$

$$X^h = u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left( \frac{\alpha P_y}{\beta P_x} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

Reemplazando en la relación encontrada anteriormente llegaremos a que

$$Y^h = u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left( \frac{\beta P_x}{\alpha P_y} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

Propiedades:

- Homogenea de grado cero en precios

## 7. Función de Gasto

### Respuesta

$$e(P_x, P_y, u_0) = P_x X^h + P_y Y^h$$

$$e(P_x, P_y, u_0) = P_x \left[ u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left( \frac{\alpha P_y}{\beta P_x} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \right] + P_y \left[ u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left( \frac{\beta P_x}{\alpha P_y} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right]$$

$$e(P_x, P_y, u_0) = u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[ P_x \left( \frac{\alpha P_y}{\beta P_x} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + P_y \left( \frac{\beta P_x}{\alpha P_y} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right]$$

Propiedades:



- Homogenea de grado uno en precios
- Creciente y Cóncava en los precios

8. Lema de Shepard

**Respuesta**

$$\frac{\partial e(P_x, P_y, u_o)}{\partial P_x} = X^h$$

9. Ecuación de Slutsky

**Respuesta**

$$\frac{\partial X^*}{\partial P_x} = \underbrace{\frac{\partial X^h}{\partial P_x}}_{ES} - \underbrace{\frac{\partial X^*}{\partial I} X^*}_{EI}$$

## Teoría de la Firma

10. Lema de Hotelling

**Respuesta**

$$\frac{\partial \pi}{\partial P} = y(P, w, r)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} = -L(P, w, r)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial r} = -K(P, w, r)$$

## Modelo Ocio-Consumo

## Teoría de Juegos

		Jugador Y	
		L	R
Jugador X	U	(a,b)	(c,d)
	D	(e,f)	(g,h)



## 1. Equilibrio en Estrategias Puras

**Respuesta**

$$(U, L) \text{ si } a \geq e \text{ \& } b \geq d$$

$$(U, R) \text{ si } c \geq g \text{ \& } d \geq b$$

$$(D, L) \text{ si } e \geq a \text{ \& } f \geq h$$

$$(D, R) \text{ si } g \geq c \text{ \& } h \geq f$$

## 2. Estrategia dominante del Jugador X

**Respuesta**

$$D^X = \begin{cases} (U) & \text{si } a > e \text{ \& } c > g \\ (L) & \text{si } a < e \text{ \& } c < g \end{cases}$$

## 3. Función de Reacción del Jugador X

**Respuesta**

Sea "y" la probabilidad de que el Jugador Y, tome la estrategia L

$$R^X(y) = \begin{cases} (U) & \text{si } y \cdot a + (1 - y)c > y \cdot e + (1 - y)g \\ (L) & \text{si } y \cdot a + (1 - y)c < y \cdot e + (1 - y)g \\ (U, L) & \text{si } y \cdot a + (1 - y)c = y \cdot e + (1 - y)g \end{cases}$$

## Modelo de Bertrand

Consideramos 2 firmas que compiten en precios, con un costo marginal de "c". Ambas enfrentan una demanda lineal del tipo  $P = A - Q$ . Consumidores le comprarán a la firma que entregue precio menor.

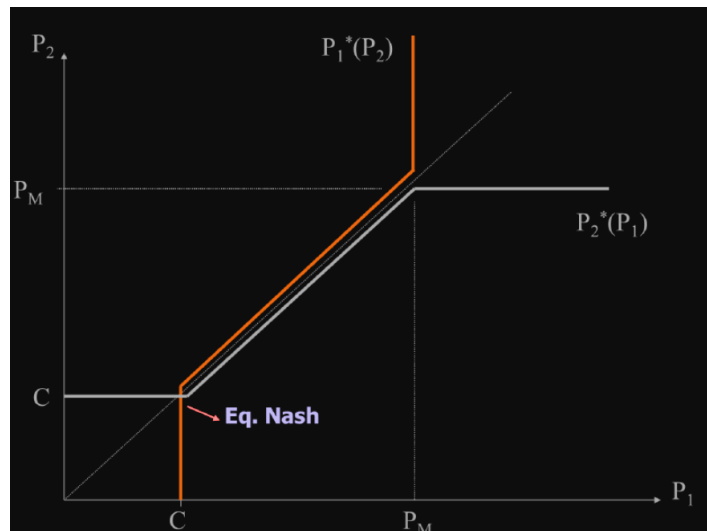
## 1. Funciones de reacción y equilibrio

**Respuesta**

$$P_1(P_2) = \begin{cases} P^M = \frac{A+c}{2} & \text{si } P^M < P_2 \\ P_2 - \varepsilon & \text{si } c < P_2 \leq P^M \\ c & \text{si } P_2 \leq c \end{cases}$$

$$P_2(P_1) = \begin{cases} P^M = \frac{A+c}{2} & \text{si } P^M < P_1 \\ P_1 - \varepsilon & \text{si } c < P_1 \leq P^M \\ c & \text{si } P_1 \leq c \end{cases}$$

Gráficamente



En equilibrio:

$$P^* = c$$

$$\pi_i^* = 0$$

$$q_i^* = \frac{1}{2}(A - c)$$

En este caso de dos firmas simétricas en costos, se produce la "Paradoja de Bertrand". Esta paradoja es simplemente que un duopolio llega a un equilibrio de competencia perfecta.

## Modelo de Cournot

Consideramos N firmas con las siguientes funciones

$$P = A - Q$$

$$Q = \sum_{i=1}^N q_i = \sum_{i=1}^{N-1} q_i + q_j$$

Donde "j" es la firma representativa que analizamos en contra de las otras firmas "i". Suponemos que todas las firmas tienen un costo marginal de "c"

1. Cantidades, Precio y utilidad de equilibrio

### Respuesta

Planteamos el problema de maximización de la firma j y resolvemos

$$\pi_j = P \cdot q_j - c \cdot q_j$$

$$\pi_j = (P - c)q_j$$

$$\pi_j = (A - \sum_{i=1}^{N-1} q_i - q_j - c)q_j$$

CPO:

$$\frac{\pi_j}{q_j} : A - \sum_{i=1}^{N-1} q_i - 2q_j - c = 0$$

$$q_j = \frac{A - \sum_{i=1}^{N-1} q_i - c}{2}$$

Por simetría tenemos que  $q_i = q_j$ . Por lo que expresamos la función de reacción anterior como

$$q_i = \frac{A - \sum_{i=1}^{N-1} q_j - c}{2}$$

Usamos propiedad de sumatoria

$$q_i = \frac{A - (N-1)q_j - c}{2}$$

Reemplazamos convenientemente  $q_j$  por  $q_i$  y luego despejamos la cantidad de equilibrio.

$$q_i = \frac{A - (N-1)q_i - c}{2}$$

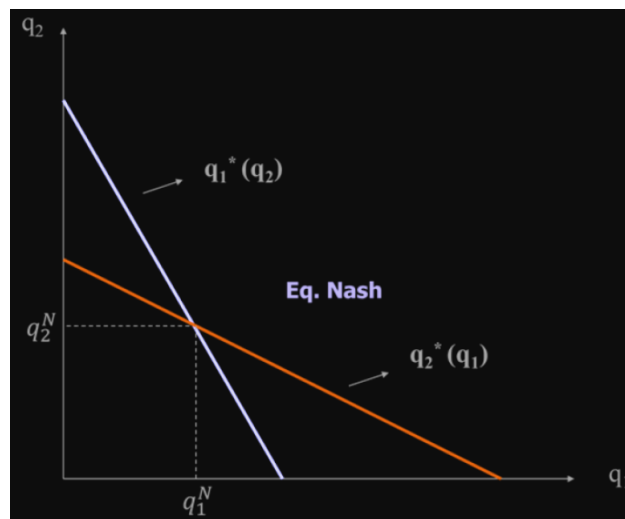
$$2q_i = A - (N-1)q_i - c$$

$$2q_i + (N-1)q_i = A - c$$

$$q_i(2 + N - 1) = A - c$$

$$q_i^* = \frac{A - c}{N + 1}$$

Gráficamente







De aquí se deriva que

$$Q^* = \sum_{i=1}^N q_i^*$$

$$Q^* = \sum_{i=1}^N \frac{A-c}{N+1}$$

Aplicamos propiedad de sumatoria y obtenemos

$$Q^* = \frac{N(A-c)}{N+1}$$

Reemplazamos lo anterior en la función de demanda y encontramos el precio de equilibrio

$$P^* = A - Q^*$$

$$P^* = A - \frac{N(A-c)}{N+1}$$

$$P^* = \frac{AN + A - AN + NC}{N+1}$$

$$P^* = \frac{A + NC}{N+1}$$

Usamos todo lo obtenido anteriormente para encontrar las utilidades de equilibrio

$$\pi_i^* = P^* \cdot q_i^* - c \cdot q_i^*$$

$$\pi_i^* = (P^* - c) \cdot q_i^*$$

$$\pi_i^* = \left[ \frac{A + NC}{N+1} - c \right] \frac{A-c}{N+1}$$

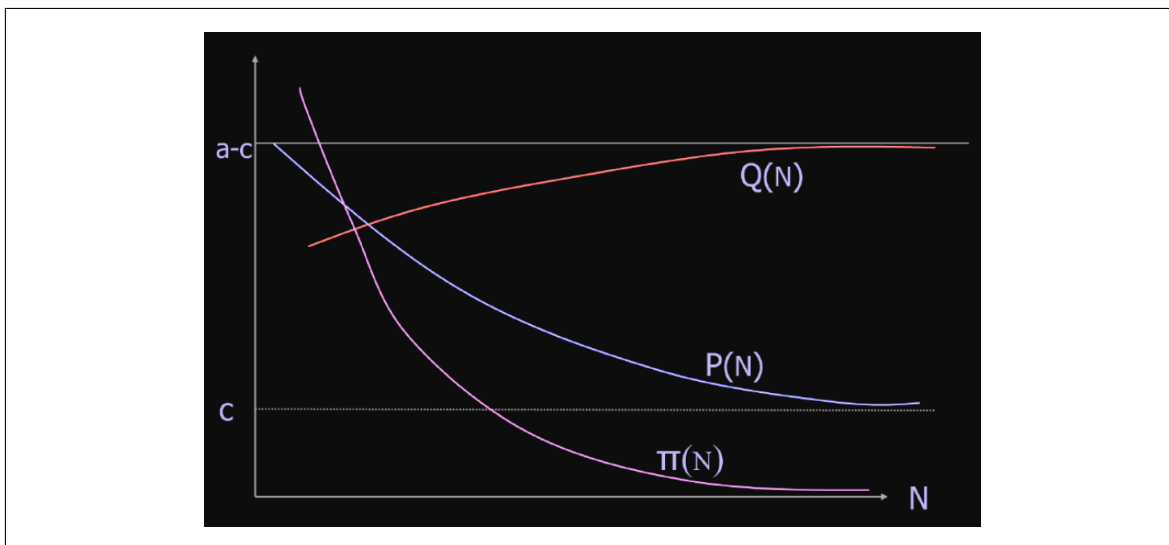
$$\pi_i^* = \left[ \frac{A + NC - NC - c}{N+1} \right] \frac{A-c}{N+1}$$

$$\pi_i^* = \left[ \frac{A-c}{N+1} \right]^2$$

Resumiendo todo en una tabla tendremos que

	Valor	$\frac{\partial}{\partial N}$	$\lim_{N \rightarrow \infty}$
$q_i$	$\frac{A-c}{N+1}$	$\frac{\partial q_i}{\partial N} < 0$	0
Q	$\frac{N(A-c)}{N+1}$	$\frac{\partial Q}{\partial N} > 0$	A-c
P	$\frac{A+NC}{N+1}$	$\frac{\partial P}{\partial N} < 0$	0
$\pi$	$\left[ \frac{A-c}{N+1} \right]^2$	$\frac{\partial \pi}{\partial N} < 0$	0

Gráficamente



## Modelo de Stackelberg

Hay dos empresas, la líder y la seguidora que compiten en cantidades enfrentando una demanda lineal  $P = A - Q$  donde  $Q = q_l + q_s$ . En el primer periodo la empresa líder escoge su nivel de producción. En el segundo periodo la empresa seguidora definirá su nivel de producción dado lo que decidió la líder. Suponemos que ambas empresas tienen el mismo costo marginal "c".

### 1. Cantidades, Precio y utilidad de equilibrio

#### Respuesta

Este es un modelo secuencial donde uno juega primero y el otro después. La manera de resolver el modelo es por inducción hacia atrás.

En el periodo 1 la firma líder escogerá su nivel de producción buscando maximizar sus beneficios. Estos beneficios dependen de lo que haga la firma seguidora en el segundo periodo. La mejor suposición de la líder es que la seguidora tratará de maximizar sus beneficios, dado lo que hizo la líder en el primer periodo.

Por lo tanto, primero sacamos cuál es la función de reacción de la firma seguidora. Planteamos el problema de maximización de beneficios de la firma seguidora.

$$\max_{\{q_s\}} \Pi_s = P \cdot q_s - c \cdot q_s$$

$$\max_{\{q_s\}} \Pi_s = (A - Q) \cdot q_s - c \cdot q_s$$

$$\max_{\{q_s\}} \Pi_s = (A - q_s - q_l) \cdot q_s - c \cdot q_s$$

Sacamos CPO:

$$\frac{\partial \Pi_s}{\partial q_s} : A - 2q_s - q_l - c = 0$$



$$2q_s = A - q_l - c$$

$$q_s = \frac{A - q_l - c}{2} \quad (1)$$

La empresa líder sabe que esta es la mejor estrategia de la firma seguidora, por lo que la incorpora dentro de su función de maximización en el primer periodo quedando de la siguiente forma.

$$\max_{\{q_l\}} \Pi_l = (A - q_s - q_l) \cdot q_l - c \cdot q_l$$

$$s.a : q_s = \frac{A - q_l - c}{2}$$

$$\max_{\{q_l\}} \Pi_l = \left( A - \frac{A - q_l - c}{2} - q_l \right) \cdot q_l - c \cdot q_l$$

$$\max_{\{q_l\}} \Pi_l = \left( A - \frac{A - q_l - c}{2} - q_l - c \right) \cdot q_l$$

$$\max_{\{q_l\}} \Pi_l = \left( \frac{2A - (A - q_l - c) - 2q_l - 2c}{2} \right) \cdot q_l$$

$$\max_{\{q_l\}} \Pi_l = \left( \frac{A - q_l - c}{2} \right) \cdot q_l$$

$$\frac{\partial \Pi_l}{\partial q_l} : \frac{A - c}{2} - q_l = 0$$

$$q_l^* = \frac{A - c}{2} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) llegaremos a la cantidad de equilibrio de la firma seguidora.

$$q_s^* = \frac{A - q_l^* - c}{2}$$

$$q_s^* = \frac{A - c}{2} - \frac{1}{2} q_l^*$$

$$q_s^* = \frac{A - c}{2} - \frac{1}{2} \frac{A - c}{2}$$

$$q_s^* = \frac{A - c}{2} - \frac{A - c}{4}$$

$$q_s^* = \frac{2(A - c) - (A - c)}{4}$$

$$q_s^* = \frac{A - c}{4} \quad (3)$$

La firma líder produce el doble que la firma seguidora. Saquemos entonces la cantidad, el precio y las utilidades de equilibrio.



$$Q^* = q_l^* + q_s^*$$

$$Q^* = \frac{A-c}{2} + \frac{A-c}{4}$$

$$Q^* = \frac{2(A-c) + (A-c)}{4}$$

$$Q^* = \frac{3A-3c}{4}$$

$$Q^* = \frac{3(A-c)}{4}$$

$$P^* = A - Q^*$$

$$P^* = A - \frac{3(A-c)}{4}$$

$$P^* = \frac{4A-3(A-c)}{4}$$

$$P^* = \frac{A+3c}{4}$$

$$\Pi_s^* = P^* q_s^* - c \cdot q_s^*$$

$$\Pi_s^* = (P^* - c) q_s^*$$

$$\Pi_s^* = \left( \frac{A+3c}{4} - c \right) \frac{A-c}{4}$$

$$\Pi_s^* = \left( \frac{A-c}{4} \right) \frac{A-c}{4}$$

$$\Pi_s^* = \frac{(A-c)^2}{16}$$

$$\Pi_l^* = P^* q_l^* - c \cdot q_l^*$$

$$\Pi_l^* = (P^* - c) q_l^*$$

$$\Pi_l^* = \left( \frac{A+3c}{4} - c \right) \frac{A-c}{2}$$

$$\Pi_l^* = \left( \frac{A-c}{4} \right) \frac{A-c}{2}$$

$$\Pi_l^* = \frac{(A-c)^2}{8}$$

Las utilidades de la firma líder es el doble de la firma seguidora.



## Modelo de Hotelling

Dos firmas (A y B) están posicionadas en extremos a lo largo de una calle de largo 1, compiten en precios y en distancias para vender un mismo bien. Estas tienen un costo marginal de producción de "c".

Existe un continuo de personas de masa 1 que están distribuidas uniformemente a lo largo de la calle. Cada persona compra una sola unidad del bien. Los consumidores le comprarán a la firma que le implique el menor costo de compra, que está dado por el precio del producto y el costo de traslado.

Sea:

$t \Rightarrow$  Costo de traslado

$z \Rightarrow$  Distancia que hay a la firma A

$P_A \Rightarrow$  Precio cobrado por la firma A

$P_B \Rightarrow$  Precio cobrado por la firma B

1. Consumidor indiferente y cantidad demandada.

### Respuesta

El consumidor estará indiferente entre comprarle a la firma A o B si el costo de compra es la misma.

$$C_A = C_B$$

$$P_A + tz = P_B + t(1 - z)$$

$$P_A + tz = P_B + t - tz$$

$$2tz = P_B - P_A + t$$

$$z = \frac{P_B - P_A + t}{2t} \Rightarrow \text{Demanda firma A}$$

$$(1 - z^*) = 1 - \frac{P_B - P_A + t}{2t}$$

$$(1 - z^*) = \frac{2t - P_B + P_A - t}{2t}$$

$$(1 - z) = \frac{P_A - P_B + t}{2t} \Rightarrow \text{Demanda firma B}$$

2. Precios, cantidades y beneficios de equilibrio.

### Respuesta

Plantemos el problema de la firma A y B

$$\max_{\{P_A\}} \Pi_A = P_A \cdot z - c \cdot z$$



$$\begin{aligned}\max_{\{P_A\}} \Pi_A &= (P_A - c)z \\ \max_{\{P_A\}} \Pi_A &= (P_A - c) \frac{P_B - P_A + t}{2t} \\ \max_{\{P_A\}} \Pi_A &= \frac{P_A P_B - P_A^2 + P_A t - P_B c + P_A c - tc}{2t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_A}{\partial P_A} : \frac{P_B}{2t} - \frac{P_A}{t} + \frac{1}{2} + \frac{c}{2t} &= 0 \\ P_B - 2P_A + t + c &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{P_A = \frac{P_B + t + c}{2}} \quad (1)$$

Por simetría tendremos que

$$\boxed{P_B = \frac{P_A + t + c}{2}} \quad (2)$$

Reemplazamos (2) en (1)

$$\begin{aligned}P_A^* &= \frac{t+c}{2} + \frac{1}{2}P_B \\ P_A^* &= \frac{t+c}{2} + \frac{1}{2} \frac{P_A + t + c}{2} \\ P_A^* &= \frac{2(t+c) + P_A + t + c}{4} \\ P_A^* &= \frac{P_A + 3t + 3c}{4} \\ 4P_A^* &= P_A + 3t + 3c \\ 3P_A^* &= 3t + 3c \\ \boxed{P_A^* &= t + c} \quad (3)\end{aligned}$$

Reemplazando (3) en (2)

$$\begin{aligned}P_B^* &= \frac{t+c}{2} + \frac{1}{2}P_A^* \\ P_B^* &= \frac{t+c}{2} + \frac{1}{2}(t+c) \\ P_B^* &= \frac{2(t+c)}{2} \\ \boxed{P_B^* &= t + c} \quad (4)\end{aligned}$$

Con (3) y (4) encontramos las cantidades demandadas de equilibrio para la firma A y B

$$\begin{aligned}z^* &= \frac{P_B^* - P_A^* + t}{2t} \\ z^* &= \frac{(t+c) - (t+c) + t}{2t}\end{aligned}$$



$$z^* = \frac{t}{2t}$$

$$z^* = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\therefore (1 - z^*) = \frac{1}{2} \quad (6)$$

Con (3), (4), (5) y (6) calculamos las utilidades de equilibrio

$$\Pi_A^* = (P_A^* - c)z^*$$

$$\Pi_A^* = (t + c - c)\frac{1}{2}$$

$$\Pi_A^* = \frac{t}{2}$$

$$\Pi_B^* = (P_B^* - c)(1 - z^*)$$

$$\Pi_B^* = (t + c - c)\frac{1}{2}$$

$$\Pi_B^* = \frac{t}{2}$$