Modelos y Demostraciones - Microeconomía

Agustín Sanhueza

Teoría del Consumidor

$$U(X,Y) = X^{\alpha}Y^{\beta}$$

Los precios de los bienes X e Y se denotan P_x y P_y, el ingreso del individuo es I. $\alpha, \beta > 0$

1. Restricción Presupuestaria

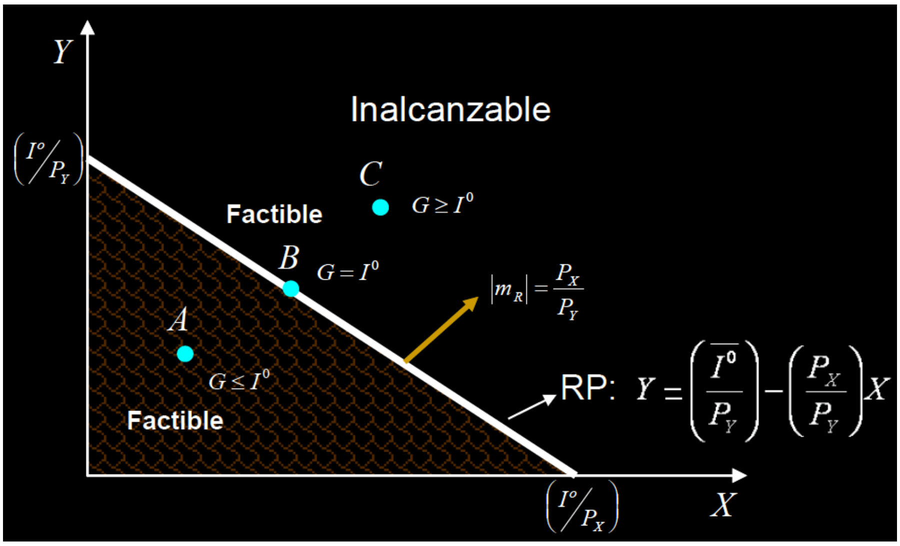
Respuesta

$$\boxed{\underbrace{P_xX + P_yY}_{Gasto} = \underbrace{I}_{Ingreso}}$$

Para poder graficar despejamos Y

$$P_yY = I - P_xX$$

$$\boxed{Y = \frac{I}{P_y} - \frac{P_x}{P_y}X}$$



2. Curva de indiferencia

Respuesta

Denotamos la función de utilidad como un escalar genérico u_0 y luego despejamos Y para poder graficar.

$$u_0 = X^{\alpha}Y^{\beta}$$

$$Y^{\beta} = \frac{u_o}{X^{\alpha}}$$

$$\boxed{Y = \left[\frac{u_o}{X^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\beta}}}$$

3. Demandas Marshallianas

Respuesta

$$\max_{\{X,Y\}} U(X,Y) = X^{\alpha}Y^{\beta}$$

$$s.a: P_xX + P_yY = I$$

$$L = X^{\alpha}Y^{\beta} + \lambda(I - P_xX - P_yY)$$

CPO:

$$L_x: \quad \alpha X^{\alpha-1}Y^{\beta} - \lambda P_x = 0$$

$$L_y: \quad \beta X^{\alpha}Y^{\beta-1} - \lambda P_y = 0$$

$$L_{\lambda}: \quad P_xX + P_yY = I$$

$$\frac{\alpha X^{\alpha-1}Y^{\beta}}{\beta X^{\alpha}Y^{\beta-1}} = \frac{\lambda P_x}{\lambda P_y}$$

$$\frac{\alpha Y}{\beta X} = \frac{P_x}{P_y}$$

$$\boxed{Y = \frac{\beta P_x}{\alpha P_y}X}$$

Reemplazamos esta relación en la restricción presupuestaria

$$P_xX + P_y\left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y}X\right) = I$$

$$P_xX + \frac{\beta P_x}{\alpha}X = I$$

$$X\left(P_x + \frac{\beta P_x}{\alpha}\right) = I$$

$$X\left(\frac{\alpha P_x + \beta P_x}{\alpha}\right) = I$$

$$\boxed{X^* = \frac{\alpha I}{P_x(\alpha+\beta)}}$$

Si reemplazamos en la relación que encontramos anteriormente llegaremos a que

$$\boxed{Y^* = \frac{\beta I}{P_y(\alpha+\beta)}}$$

4. Función de Utilidad Indirecta

Respuesta

$$FUI \Rightarrow U(X^*, Y^*) \Rightarrow v(P_x, P_y, I)$$

$$v(P_x, P_y, I) = \left(\frac{\alpha I}{P_x(\alpha+\beta)}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta I}{P_y(\alpha+\beta)}\right)^{\beta}$$

$$\boxed{v(P_x, P_y, I) = \frac{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}} \frac{I^{\alpha+\beta}}{P_x^{\alpha} P_y^{\beta}}}$$

Propiedades:

- Homogenea de grado cero en Precios e Ingreso
- Cuasicóncava en Precios e Ingreso
- Estrictamente creciente en Ingreso
- Decreciente en Precios

5. Identidad de Roy

Respuesta

$$\boxed{\frac{\frac{\partial v(P_x,P_y,I)}{\partial P_x}}{\frac{\partial v(P_x,P_y,I}{\partial I}} = -X^*}$$

6. Demandas Hicksianas

Respuesta

$$\min_{\{X,Y\}} P_x X + P_y Y$$

$$s.a : X^{\alpha} Y^{\beta} = u_0$$

$$L = P_x X + P_y Y + \lambda(u_0 - X^{\alpha} Y^{\beta})$$

CPO:

$$L_x : \quad P_x - \lambda\alpha X^{\alpha-1} Y^{\beta} = 0$$

$$L_y : \quad P_y - \lambda\beta X^{\alpha} Y^{\beta-1} = 0$$

$$L_{\lambda} : \quad X^{\alpha} Y^{\beta} = u_0$$

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{\lambda \alpha X^{\alpha-1} Y^{\beta}}{\lambda \beta X^{\alpha} Y^{\beta-1}}$$
$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{\alpha X^{\alpha-1} Y^{\beta}}{\beta X^{\alpha} Y^{\beta-1}}$$
$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{\alpha Y}{\beta X}$$
$$\boxed{Y = \frac{\beta P_x}{\alpha P_y} X}$$

Reemplazamos relación en la restricción que define a la curva de indiferencia.

$$X^{\alpha}\left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y} X\right)^{\beta} = u_0$$
$$X^{\alpha+\beta}\left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y}\right)^{\beta} = u_0$$
$$X^{\alpha+\beta} = u_o\left(\frac{\alpha P_y}{\beta P_x}\right)^{\beta}$$

$$\boxed{X^h = u_o^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha P_y}{\beta P_x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}$$

Reemplazando en la relación encontrada anteriormente llegaremos a que

$$\boxed{Y^h = u_o^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}$$

Propiedades:

- Homogenea de grado cero en precios

7. Función de Gasto

Respuesta

$$e(P_x, P_y, u_o) = P_x X^h + P_y Y^h$$
$$e(P_x, P_y, u_o) = P_x\left[u_o^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha P_y}{\beta P_x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right] + P_y\left[u_o^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]$$

$$\boxed{e(P_x, P_y, u_o) = u_o^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left[P_x\left(\frac{\alpha P_y}{\beta P_x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + P_y\left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]}$$

Propiedades:

- Homogenea de grado uno en precios
- Creciente y Cóncava en los precios

8. Lema de Shepard

Respuesta

$$\boxed{\frac{\partial e(P_x, P_y, u_o)}{\partial P_x} = X^h}$$

9. Ecuación de Slutsky

Respuesta

$$\boxed{\frac{\partial X^*}{\partial P_x} = \underbrace{\frac{\partial X^h}{\partial P_x}}_{ES} - \underbrace{\frac{\partial X^*}{\partial I} X^*}_{EI}}$$

Teoría de la Firma

10. Lema de Hotelling

Respuesta

$$\boxed{\frac{\partial \pi}{\partial P} = y(P, w, r)}$$

$$\boxed{\frac{\partial \pi}{\partial w} = -L(P, w, r)}$$

$$\boxed{\frac{\partial \pi}{\partial r} = -K(P, w, r)}$$

Modelo Ocio-Consumo

Una persona debe decidir cuánto consumir y cuántas horas le dedica al ocio. Tiene la siguiente función de utilidad Cobb-Douglas.

$$U(O,C) = O^{\alpha}C^{\beta}$$

Con:
P : Precio del bien de consumo
C : Consumo
W : Salario
Y_{NL} : Ingreso no laboral (seguro de cesantía)
O : Horas de Ocio
L : Horas de Trabajo
T : Número de horas disponibles

1. Restricciones

Respuesta

$$\underbrace{\overbrace{PC}^{Consumo} = \overbrace{WL + Y_{NL}}^{Ingreso}}_{Restricción\ Presupuestaria} \quad (1)$$

$$\underbrace{T = L + O}_{Restricción\ Temporal} \quad (2)$$

Reemplazamos L de (2) en (1)

$$PC = W(T - O) + Y_{NL}$$

$$PC = WT - WO + Y_{NL}$$

$$\boxed{PC + WO = WT + Y_{NL}}$$

2. Consumo, Ocio y Trabajo Óptimo.

Respuesta

$$\max_{[O,C]} U(O,C) = O^{\alpha}C^{\beta}$$

$$s.a: \quad PC + WO = WT + Y_{NL}$$

Planteamos el lagrangeano y sacamos CPO:

$$\mathcal{L} : O^{\alpha}C^{\beta} + \lambda(WT + Y_{NL} - PC - WO)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial O} : \alpha O^{\alpha-1}C^{\beta} - \lambda W = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} : \beta O^{\alpha}C^{\beta-1} - \lambda P = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} : PC + WO = WT + Y_{NL} \quad (3)$$

Dividimos (1) con (2)

$$\frac{\alpha O^{\alpha-1}C^{\beta}}{\beta O^{\alpha}C^{\beta-1}} = \frac{\lambda W}{\lambda P}$$

$$\frac{\alpha C}{\beta O} = \frac{W}{P}$$

$$C = \frac{\beta O W}{\alpha P} \quad (4)$$

Reemplazamos (4) en (3)

$$P\left(\frac{\beta O W}{\alpha P}\right) + WO = WT + Y_{NL}$$

$$\beta WO + \alpha WO = \alpha(WT + Y_{NL})$$

$$WO(\beta + \alpha) = \alpha(WT + Y_{NL})$$

$$\boxed{O^* = \frac{\alpha(WT + Y_{NL})}{W(\beta + \alpha)}}$$

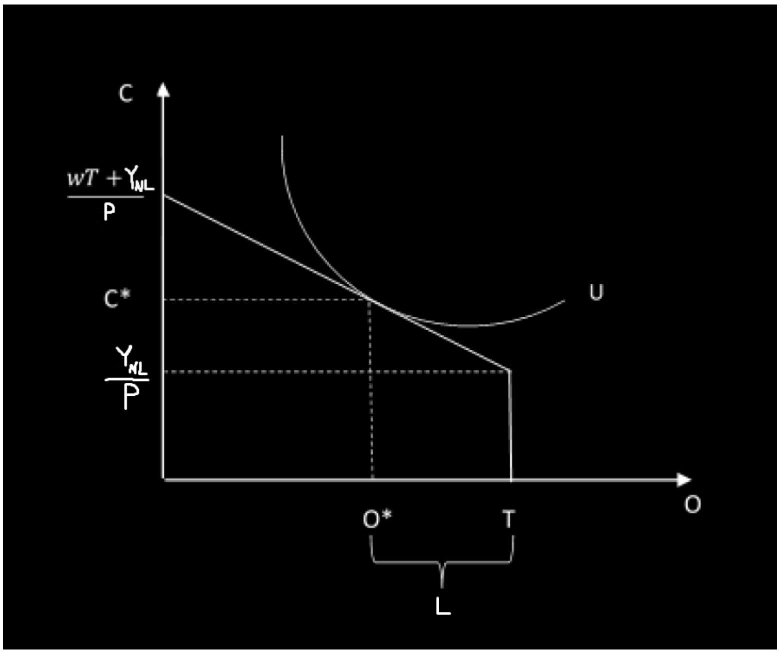
Reemplazando en (4)

$$C^* = \frac{\beta W}{\alpha P} O^*$$

$$C^* = \frac{\beta W}{\alpha P}\frac{\alpha(WT + Y_{NL})}{W(\beta + \alpha)}$$

$$\boxed{C^* = \frac{\beta(WT + Y_{NL})}{P(\beta + \alpha)}}$$

Gráficamente:



3. Oferta Laboral y Salario de Reserva

Respuesta

De la restricción temporal podemos sacar cuánto es la oferta laboral

$$T = L + O$$

$$L^* = T - O^*$$

$$L^* = T - \frac{\alpha(WT + Y_{NL})}{W(\beta + \alpha)}$$

$$L^* = \frac{TW(\beta + \alpha) - \alpha(WT + Y_{NL})}{W(\beta + \alpha)}$$

$$L^* = \frac{TW\beta + TW\alpha - \alpha WT - \alpha Y_{NL}}{W(\beta + \alpha)}$$

$$\boxed{L^* = \frac{\beta TW - \alpha Y_{NL}}{W(\beta + \alpha)}}$$

El salario de reserva es el salario en el que la persona está indiferente entre trabajar o no hacerlo. Para sacar ese salario, hay que despejar cuánto sería el salario cuando las horas de trabajo son 0.

$$0 = \frac{\beta TW - \alpha Y_{NL}}{W(\beta + \alpha)}$$

$$0 = \beta TW - \alpha Y_{NL}$$

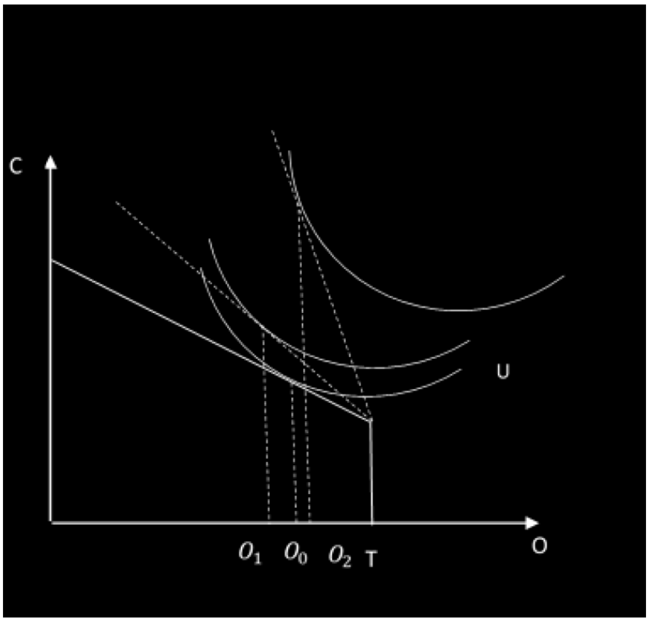
$$\beta TW = \alpha Y_{NL}$$

$$\boxed{W^R = \frac{\alpha Y_{NL}}{\beta T}}$$

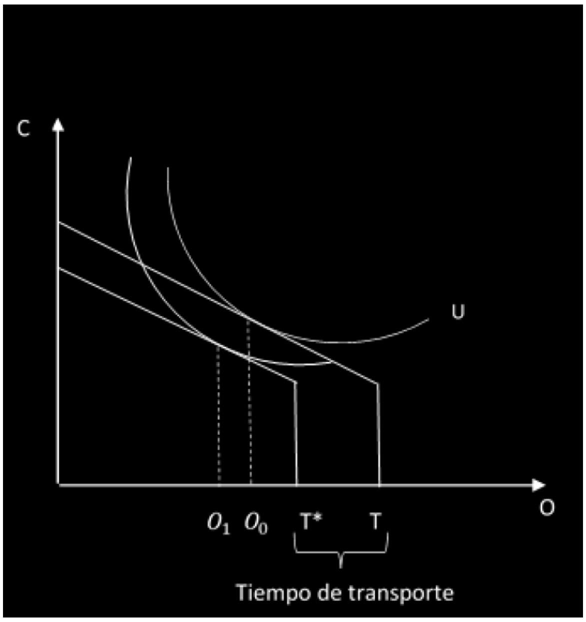
4. Estática Comparativa

Respuesta

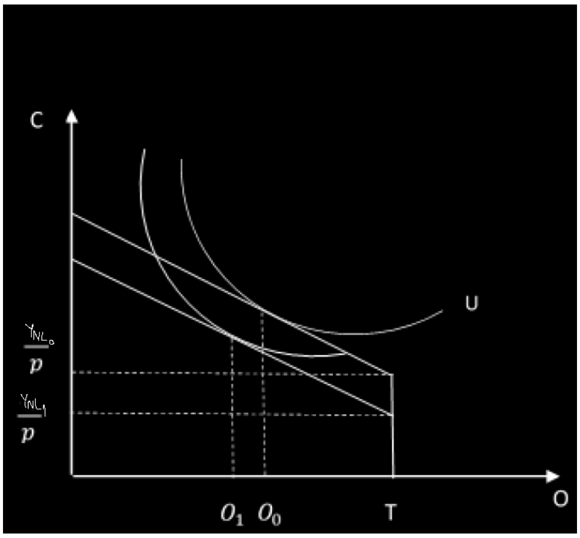
Aumento en el salario



Aumento en el tiempo de transporte (caída en las horas disponibles)



Caída en el ingreso no laboral



Teoría de Juegos

		Jugador Y	
		L	R
Jugador X	U	(a,b)	(c,d)
	D	(e,f)	(g,h)

1. Equilibrio en Estrategias Puras

Respuesta

$$(U, L) \quad si \;\; a \geq e \;\; \& \;\; b \geq d$$
$$(U, R) \quad si \;\; c \geq g \;\; \& \;\; d \geq b$$
$$(D, L) \quad si \;\; e \geq a \;\; \& \;\; f \geq h$$
$$(D, R) \quad si \;\; g \geq c \;\; \& \;\; h \geq f$$

2. Estrategia dominante del Jugador X

Respuesta

$$\mathrm{D}^X = \begin{cases} (U) & \text{si } a > e \;\; \& \;\; c > g \\ (L) & \text{si } a < e \;\; \& \;\; c < g \end{cases}$$

3. Función de Reacción del Jugador X

Respuesta

Sea "y" la probabilidad de que el Jugador Y, tome la estrategia L

$$\mathrm{R}^X(y) = \begin{cases} (U) & \text{si } y \cdot a + (1-y)c > y \cdot e + (1-y)g \\ (L) & \text{si } y \cdot a + (1-y)c < y \cdot e + (1-y)g \\ (U,L) & \text{si } y \cdot a + (1-y)c = y \cdot e + (1-y)g \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

Consideramos 2 firmas que compiten en precios, con un costo marginal de "c". Ambas enfrentan una demanda lineal del tipo $P = A - Q$ Consumidores le comprarán a la firma que entregue precio menor.

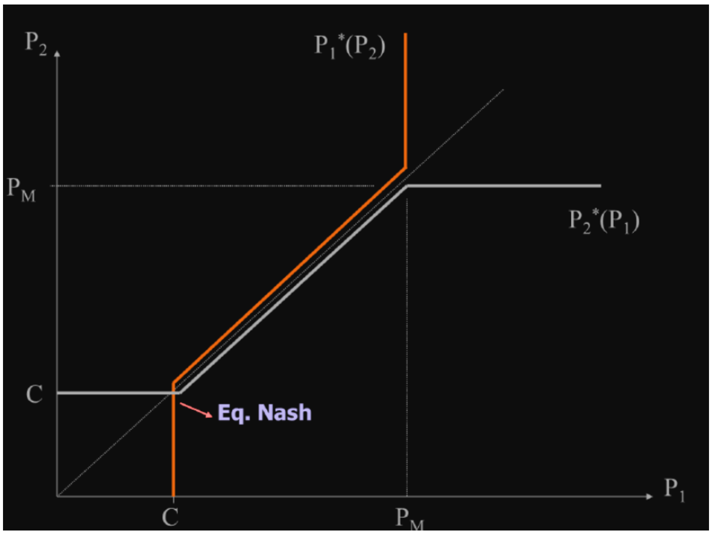
1. Funciones de reacción y equilibrio

Respuesta

$$P_1(P_2) = \begin{cases} P^M = \frac{A+c}{2} & \text{si } P^M < P_2 \\ P_2 - \varepsilon & \text{si } c < P_2 \leq P^M \\ c & \text{si } P_2 \leq c \end{cases}$$

$$P_2(P_1) = \begin{cases} P^M = \frac{A+c}{2} & \text{si } P^M < P_1 \\ P_2 - \varepsilon & \text{si } c < P_1 \leq P^M \\ c & \text{si } P_1 \leq c \end{cases}$$

Gráficamente



En equilibrio:

$$\boxed{P^* = c}$$

$$\boxed{\pi_i^* = 0}$$

$$\boxed{q_i^* = \frac{1}{2}(A - c)}$$

En este caso de dos firmas simétricas en costos, se produce la "Paradoja de Bertrand". Esta paradoja es simplemente que un duopolio llega a un equilibrio de competencia perfecta.

Modelo de Cournout

Consideramos N firmas con las siguientes funciones
$P = A - Q$
$Q = \sum_{i=1}^{N} q_i = \sum_{i=1}^{N-1} q_i + q_j$

Donde "j" es la firma representativa que analizamos en contra de las otras firmas "i". Suponemos que todas las firmas tienen un costo marginal de "c"

1. Cantidades, Precio y utilidad de equilibrio

Respuesta

Planteamos el problema el problema de maximización de la firma j y resolvemos

$$\pi_j = P \cdot q_j - c \cdot q_j$$
$$\pi_j = (P - c)q_j$$
$$\pi_j = (A - \sum_{i=1}^{N-1} q_i - q_j - c)q_j$$

CPO:

$$\frac{\pi_j}{q_j} : A - \sum_{i=1}^{N-1} q_i - 2q_j - c = 0$$
$$q_j = \frac{A - \sum_{i=1}^{N-1} q_i - c}{2}$$

Por simetría tenemos que $q_i = q_j$. Por lo que expresamos la función de reacción anterior como

$$q_i = \frac{A - \sum_{i=1}^{N-1} q_j - c}{2}$$

Usamos propiedad de sumatoria

$$q_i = \frac{A - (N-1)q_j - c}{2}$$

Reemplazamos convenientemente q_j por q_i y luego despejamos la cantidad de equilibrio.

$$q_i = \frac{A - (N-1)q_i - c}{2}$$

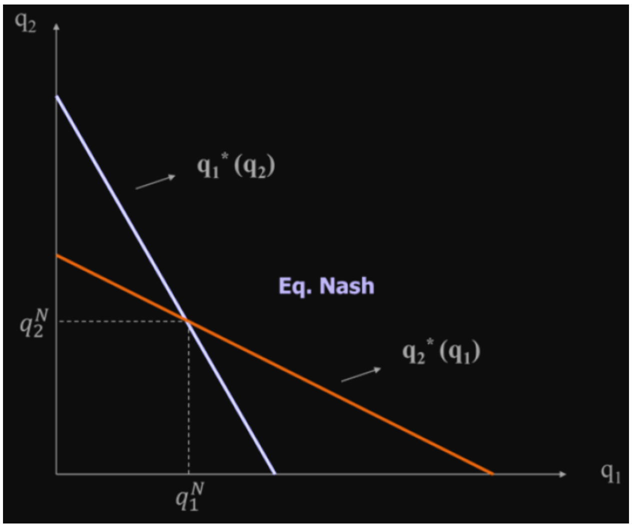
$$2q_i = A - (N-1)q_i - c$$

$$2q_i + (N-1)q_i = A - c$$

$$q_i(2 + N - 1) = A - c$$

$$\boxed{q_i^* = \frac{A - c}{N+1}}$$

Gráficamente



De aquí se deriva que

$$Q^* = \sum_{i=1}^{N} q_i^*$$

$$Q^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{A - c}{N+1}$$

Aplicamos propiedad de sumatoria y obtenemos

$$\boxed{Q^* = \frac{N(A-c)}{N+1}}$$

Reemplazamos lo anterior en la función de demanda y encontramos el precio de equilibrio

$$P^* = A - Q^*$$

$$P^* = A - \frac{N(A-c)}{N+1}$$

$$P^* = \frac{AN + A - AN + NC}{N+1}$$

$$\boxed{P^* = \frac{A+NC}{N+1}}$$

Usamos todo lo obtenido anteriormente para encontrar las utilidades de equilibrio

$$\pi_i^* = P^* \cdot q_i^* - c \cdot q_i^*$$

$$\pi_i^* = (P^* - c) \cdot q_i^*$$

$$\pi_i^* = \left[\frac{A+NC}{N+1} - c\right] \frac{A-c}{N+1}$$

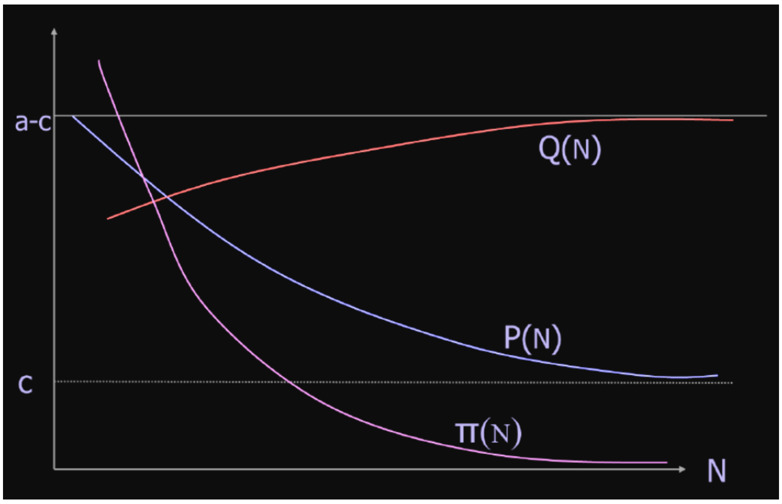
$$\pi_i^* = \left[\frac{A+NC-NC-c}{N+1}\right] \frac{A-c}{N+1}$$

$$\boxed{\pi_i^* = \left[\frac{A-c}{N+1}\right]^2}$$

Resumiendo todo en una tabla tendremos que

	Valor	$\frac{\partial}{\partial N}$	$\underbrace{lim}_{N\to\infty}$
q_i	$\frac{A-c}{N+1}$	$\frac{\partial q_i}{\partial N} < 0$	0
Q	$\frac{N(A-c)}{N+1}$	$\frac{\partial Q}{\partial N} > 0$	A-c
P	$\frac{A+NC}{N+1}$	$\frac{\partial P}{\partial N} < 0$	0
π	$\left[\frac{A-c}{N+1}\right]^2$	$\frac{\partial \pi}{\partial N} < 0$	0

Gráficamente



Modelo de Stackelberg

Hay dos empresas, la lider y la seguidora que compiten en cantidades enfrentando una demanda lineal $P = A - Q$ donde $Q = q_l + q_s$. En el primer periodo la empresa líder escoge su nivel de producción. En el segundo periodo la empresa seguidora definirá su nivel de producción dado lo que decidió la lider. Suponemos que ambas empresas tienen el mismo costo marginal "c".

1. Cantidades, Precio y utilidad de equilibrio

Respuesta

Este es un modelo secuencial donde uno juega primero y el otro después. La manera de resolver el modelo es por inducción hacia atrás.

En el periodo 1 la firma lider escogerá su nivel de producción buscando maximizar sus beneficios. Estos beneficios dependen de lo que haga la firma seguidora en el segundo periodo. La mejor suposición de la lider es que la seguidora tratará de maximizar sus beneficios, dado lo que hizo la lider en el primer periodo.

Por lo tanto, primero sacamos cuál es la función de reacción de la firma seguidora. Planteamos el problema de maximización de beneficios de la firma seguidora.

$$\max_{\{q_s\}} \Pi_s = P \cdot q_s - c \cdot q_s$$

$$\max_{\{q_s\}} \Pi_s = (A - Q) \cdot q_s - c \cdot q_s$$

$$\max_{\{q_s\}} \Pi_s = (A - q_s - q_l) \cdot q_s - c \cdot q_s$$

Sacamos CPO:

$$\frac{\partial \Pi_s}{\partial q_s} : A - 2q_s - q_l - c = 0$$

$$2q_s = A - q_l - c$$

$$\boxed{q_s = \frac{A - q_l - c}{2}} \quad (1)$$

La empresa lider sabe que esta es la mejor estrategia de la firma seguidora, por lo que la incorpora dentro de su función de maximización en el primer periodo quedando de la siguiente forma.

$$\max_{\{q_l\}} \Pi_l = (A - q_s - q_l) \cdot q_l - c \cdot q_l$$

$$s.a : q_s = \frac{A - q_l - c}{2}$$

$$\max_{\{q_l\}} \Pi_l = (A - \frac{A - q_l - c}{2} - q_l) \cdot q_l - c \cdot q_l$$

$$\max_{\{q_l\}} \Pi_l = (A - \frac{A - q_l - c}{2} - q_l - c) \cdot q_l$$

$$\max_{\{q_l\}} \Pi_l = (\frac{2A-(A-q_l-c)-2q_l-2c}{2}) \cdot q_l$$

$$\max_{\{q_l\}} \Pi_l = (\frac{A-q_l-c}{2}) \cdot q_l$$

$$\frac{\partial \Pi_l}{\partial q_l} : \frac{A-c}{2} - ql = 0$$

$$\boxed{q_l^* = \frac{A-c}{2}} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) llegaremos a la cantidad de equilibrio de la firma seguidora.

$$q_s^* = \frac{A-q_l^*-c}{2}$$

$$q_s^* = \frac{A-c}{2} - \frac{1}{2}q_l^*$$

$$q_s^* = \frac{A-c}{2} - \frac{1}{2}\frac{A-c}{2}$$

$$q_s^* = \frac{A-c}{2} - \frac{A-c}{4}$$

$$q_s^* = \frac{2(A-c)-(A-c)}{4}$$

$$\boxed{q_s^* = \frac{A-c}{4}} \quad (3)$$

La firma lider produce el doble que la firma seguidora. Saquemos entonces la cantidad, el precio y las utilidades de equilibrio.

$$Q^* = q_l^* + q_s^*$$

$$Q^* = \frac{A-c}{2} + \frac{A-c}{4}$$

$$Q^* = \frac{2(A-c)+(A-c)}{4}$$

$$Q^* = \frac{3A-3c}{4}$$

$$\boxed{Q^* = \frac{3(A-c)}{4}}$$

$$P^* = A - Q^*$$

$$P^* = A - \frac{3(A-c)}{4}$$

$$P^* = \frac{4A-3(A-c)}{4}$$

$$\boxed{P^* = \frac{A+3c}{4}}$$

$$\Pi_s^* = P^* q_s^* - c \cdot q_s^*$$
$$\Pi_s^* = (P^* - c)q_s^*$$
$$\Pi_s^* = (\frac{A+3c}{4} - c)\frac{A-c}{4}$$
$$\Pi_s^* = (\frac{A-c}{4})\frac{A-c}{4}$$
$$\boxed{\Pi_s^* = \frac{(A-c)^2}{16}}$$

$$\Pi_l^* = P^* q_l^* - c \cdot q_l^*$$
$$\Pi_l^* = (P^* - c)q_l^*$$
$$\Pi_l^* = (\frac{A+3c}{4} - c)\frac{A-c}{2}$$
$$\Pi_l^* = (\frac{A-c}{4})\frac{A-c}{2}$$
$$\boxed{\Pi_l^* = \frac{(A-c)^2}{8}}$$

Las utilidades de la firma lider es el doble de la firma seguidora.

Modelo de Hotelling

Dos firmas (A y B) están posicionadas en extremos a lo largo de una calle de largo 1, compiten en precios y en distancias para vender un mismo bien. Estas tienen un costo marginal de producción de "c".

Existe un continuo de personas de masa 1 que están distribuidas uniformemente a lo largo de la calle. Cada persona compra una sola unidad del bien. Los consumidores le comprarán a la firma que le implique el menor costo de compra, que está dado por el precio del producto y el costo de traslado.

Sea:
$t \Rightarrow$ Costo de traslado
$z \Rightarrow$ Distancia que hay a la firma A
$P_A \Rightarrow$ Precio cobrado por la firma A
$P_B \Rightarrow$ Precio cobrado por la firma B

1. Consumidor indiferente y cantidad demandada.

Respuesta

El consumidor estará indiferente entre comprarle a la firma A o B si el costo de compra es la misma.

$$C_A = C_B$$
$$P_A + tz = P_B + t(1 - z)$$
$$P_A + tz = P_B + t - tz$$
$$2tz = P_B - P_A + t$$
$$\boxed{z = \frac{P_B - P_A + t}{2t}} \Rightarrow Demanda\ firma\ A$$

$$(1 - z^*) = 1 - \frac{P_B - P_A + t}{2t}$$
$$(1 - z^*) = \frac{2t - P_B + P_A - t}{2t}$$
$$\boxed{(1 - z) = \frac{P_A - P_B + t}{2t}} \Rightarrow Demanda\ firma\ B$$

2. Precios, cantidades y beneficios de equilibrio.

Respuesta

Plantemos el problema de la firma A y B

$$\max_{\{P_A\}} \Pi_A = P_A \cdot z - c \cdot z$$
$$\max_{\{P_A\}} \Pi_A = (P_A - c)z$$
$$\max_{\{P_A\}} \Pi_A = (P_A - c)\frac{P_B - P_A + t}{2t}$$
$$\max_{\{P_A\}} \Pi_A = \frac{P_A P_B - P_A^2 + P_A t - P_B c + P_A c - tc}{2t}$$

$$\frac{\partial \Pi_A}{P_A} : \frac{P_B}{2t} - \frac{P_A}{t} + \frac{1}{2} + \frac{c}{2t} = 0$$
$$P_B - 2P_A + t + c = 0$$
$$\boxed{P_A = \frac{P_B + t + c}{2}} \quad (1)$$

Por simetría tendremos que

$$\boxed{P_B = \frac{P_A + t + c}{2}} \quad (2)$$

Reemplazamos (2) en (1)

$$P_A^* = \frac{t+c}{2} + \frac{1}{2}P_B$$

$$P_A^* = \frac{t+c}{2} + \frac{1}{2}\frac{P_A + t + c}{2}$$

$$P_A^* = \frac{2(t+c) + P_A + t + c}{4}$$

$$P_A^* = \frac{P_A + 3t + 3c}{4}$$

$$4P_A^* = P_A + 3t + 3c$$

$$3P_A^* = 3t + 3c$$

$$\boxed{P_A^* = t + c} \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2)

$$P_B^* = \frac{t+c}{2} + \frac{1}{2}P_A^*$$

$$P_B^* = \frac{t+c}{2} + \frac{1}{2}(t+c)$$

$$P_B^* = \frac{2(t+c)}{2}$$

$$\boxed{P_B^* = t + c} \quad (4)$$

Con (3) y (4) encontramos las cantidades demandadas de equilibrio para la firma A y B

$$z^* = \frac{P_B^* - P_A^* + t}{2t}$$

$$z^* = \frac{(t+c) - (t+c) + t}{2t}$$

$$z^* = \frac{t}{2t}$$

$$\boxed{z^* = \frac{1}{2}} \quad (5)$$

$$\therefore \boxed{(1 - z^*) = \frac{1}{2}} \quad (6)$$

Con (3), (4), (5) y (6) calculamos las utilidades de equilibrio

$$\Pi_A^* = (P_A^* - c)z^*$$

$$\Pi_A^* = (t + c - c)\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\Pi_A^* = \frac{t}{2}}$$

$$\Pi_B^* = (P_B^* - c)(1 - z^*)$$
$$\Pi_B^* = (t + c - c)\frac{1}{2}$$
$$\boxed{\Pi_B^* = \frac{t}{2}}$$

Colusión

Hay N firmas que compiten en cantidades a la cournout. La demanda inversa de mercado es $P = A - Q$, y el costo marginal es constante e igual a "c". Si las firmas se coluden reparten de manera equitativa los beneficios, y usan una estrategia de castigo "Gatillo" (Las empresas cooperan mientras las otras también lo hacen, si una se desvía la otras no cooperarán nunca más y seguirán compitiendo). Las firmas tienen una tasa de descuento de $\delta \in [0, 1]$

1. Tasa de descuento teórica que permite la colusión.

Respuesta

Sea:
Π_C =Beneficio de Coludirse (cooperar)
Π_D =Beneficio de Desviarse (traicionar)
Π_{NC} =Beneficio de No Coludirse (competir)

Propiedad de sumatoria importante

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a} \quad \forall a < 1$$

Para que exista la colusión, el valor presente de los beneficios de la colusión deben ser mayores que el valor presente de los beneficios de desviarse.

$$V_C = \Pi_C + \delta\Pi_C + \delta^2\Pi_C + ... + \delta^\infty\Pi_C$$
$$V_C = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \Pi_C$$
$$\boxed{V_C = \frac{\Pi_C}{1-\delta}}$$

$$V_D = \Pi_D + \delta\Pi_{NC} + \delta^2\Pi_{NC} + ... + \delta^\infty\Pi_{NC}$$
$$V_D = \Pi_D + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t \Pi_{NC}$$

$$V_D = \Pi_D + \delta \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \Pi_{NC}$$

$$\boxed{V_D = \Pi_D + \delta \cdot \frac{\Pi_{NC}}{1-\delta}}$$

NOTA 1: Usamos un horizonte de infinitos periodos porque sino en el último periodo la estrategia óptima sería desviarse. Resolviendo por inducción hacia atrás, las firmas nunca se coludirían.

NOTA 2: El valor presente de desviarse son los beneficios de desviarse en el primer periodo, más el valor presente de los beneficios de competir en los próximos periodos porque las firmas usan una estrategia gatillo. Si la estrategia fuera otra, la expresión sería distinta.

$\therefore$ Para que haya colusión

$$V_C > V_D$$

$$\frac{\Pi_C}{1-\delta} > \Pi_D + \delta \cdot \frac{\Pi_{NC}}{1-\delta}$$

$$\Pi_C > \Pi_D(1-\delta) + \delta\Pi_{NC}$$

$$\Pi_C > \Pi_D - \delta\Pi_D + \delta\Pi_{NC}$$

$$\delta(\Pi_{NC} - \Pi_D) < \Pi_C - \Pi_D$$

$$\delta < \frac{\Pi_C - \Pi_D}{\Pi_{NC} - \Pi_D}$$

$$\boxed{\delta > \frac{\Pi_D - \Pi_C}{\Pi_D - \Pi_{NC}}}$$

2. Tasa de descuento que permite la colusión en este problema de Cournout

Respuesta

Si las N firmas se coluden, estas actuarían como monopolistas, tendremos:

$$\max_{[Q]} \Pi_C = PQ - cQ$$

$$\Pi_C = (P-c)Q$$

$$\Pi_C = (A-Q-c)Q$$

$$\frac{\partial \Pi_C}{Q} : A - 2Q - c = 0$$

$$2Q = A - c$$

$$\boxed{Q^M = \frac{A-c}{2}}$$

Por lo tanto, los beneficios serán

$$\Pi_C = (A - Q^M - c)Q^M$$

$$\Pi_C = (A - \frac{A-c}{2} - c)\frac{A-c}{2}$$

$$\Pi_C = (\frac{2A - 2c - A + c}{2})\frac{A-c}{2}$$

$$\Pi_C = (\frac{A-c}{2})\frac{A-c}{2}$$

$$\boxed{\Pi_C = \frac{(A-c)^2}{4}}$$

Dado que las N firmas se reparten la producción y los beneficios en partes iguales, tendremos que

$$\boxed{q_i^M = \frac{A-c}{2N}}$$

$$\boxed{\Pi_{C_i} = \frac{(A-c)^2}{4N}}$$

Si la firma "i" se desvía y las otras "j" firmas siguen cooperando tendremos que la producción total será

$$Q = q_i + \sum_{j \neq i}^{(N-1)} q^M$$

$$Q = q_i + (N-1)q^M$$

$\therefore$ La firma "i" que se desvía resuelve el siguiente problema

$$\max_{[q_i]} \Pi_i = Pq_i - cq_i$$

$$\Pi_i = (P - c)q_i$$

$$\Pi_i = (A - Q - c)q_i$$

$$\Pi_i = (A - (q_i + (N-1)q^M) - c)q_i$$

$$\Pi_i = (A - q_i - (N-1)q^M - c)q_i$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{q_i} : A - 2q_i - (N-1)q^M - c = 0$$

$$2q_i = A - (N-1)q^M - c$$

$$q_i = \frac{A-c}{2} - \frac{1}{2}(N-1)q^M$$

Reemplazamos la cantidad monpólica de cada firma, y escribimos q_i como q^d, la cantidad que produce la firma que se desvía.

$$q^d = \frac{A-c}{2} - \frac{1}{2}(N-1)\frac{A-c}{2N}$$

$$q^d = \frac{A-c}{2} - \frac{(N-1)(A-c)}{4N}$$

$$q^d = \frac{2N(A-c)-(N-1)(A-c)}{4N}$$

$$q^d = \frac{(A-c)(2N-(N-1))}{4N}$$

$$\boxed{q^d = \frac{(A-c)(N+1)}{4N}}$$

$\therefore$ Los beneficios de la firma que se desvía serán

$$\Pi_D = Pq^d - cq^d$$

$$\Pi_D = (P-c)q^d$$

$$\Pi_D = (A-Q-c)q^d$$

$$\Pi_D = (A-(q^d+(N-1)q^M)-c)q^d$$

$$\Pi_D = (A-c-q^d-(N-1)q^M)q^d$$

Reemplazamos con lo que encontramos anteriormente

$$\Pi_D = \left[A-c-\frac{(A-c)(N+1)}{4N}-(N-1)\frac{A-c}{2N}\right]\frac{(A-c)(N+1)}{4N}$$

$$\Pi_D = \left[\frac{4N(A-c)-(A-c)(N+1)-2(N-1)(A-c)}{4N}\right]\frac{(A-c)(N+1)}{4N}$$

$$\Pi_D = \left[\frac{(A-c)(4N-(N+1)-2(N-1))}{4N}\right]\frac{(A-c)(N+1)}{4N}$$

$$\Pi_D = \left[\frac{(A-c)(4N-N-1-2N+2)}{4N}\right]\frac{(A-c)(N+1)}{4N}$$

$$\Pi_D = \left[\frac{(A-c)(N+1)}{4N}\right]\frac{(A-c)(N+1)}{4N}$$

$$\boxed{\Pi_D = \frac{(A-c)^2(N+1)^2}{16N^2}}$$

Si las N firmas no cooperan (compiten una con otra) tendremos que

$$\boxed{q^{NC} = \frac{A-c}{N+1}}$$

$$\boxed{\Pi_{NC} = \frac{(A-c)^2}{(N+1)^2}}$$

NOTA: Estos resultados están derivados del problema de Cournout con N firmas más arriba

$\therefore$ Para que exista colusión en este problema de Cournout con N firmas, el factor de descuento debe ser

$$\delta > \frac{\Pi_D - \pi_C}{\Pi_D - \pi_{NC}}$$

$$\delta > \frac{\frac{(A-c)^2(N+1)^2}{16N^2} - \frac{(A-c)^2}{4}}{\frac{(A-c)^2(N+1)^2}{16N^2} - \frac{(A-c)^2}{(N+1)^2}}$$

$$\delta > \frac{\frac{(A-c)^2(N+1)^2 - 4N^2(A-c)^2}{16N^2}}{\frac{(A-c)^2(N+1)^4 - 16N^2(A-c)^2}{16N^2(N+1)^2}}$$

$$\delta > \frac{(N+1)^2[(A-c)^2(N+1)^2 - 4N^2(A-c)^2]}{(A-c)^2(N+1)^4 - 16N^2(A-c)^2}$$

$$\delta > \frac{(N+1)^2(A-c)^2[(N+1)^2 - 4N^2]}{(A-c)^2[(N+1)^4 - 16N^2]}$$

$$\delta > \frac{(N+1)^2[(N+1)^2 - 4N^2]}{(N+1)^4 - 16N^2}$$

$$\delta > \frac{(N+1)^4 - 4N^2(N+1)^2}{(N+1)^4 - 16N^2}$$