



Modelos y Demostraciones - Microeconomía

Agustín Sanhueza

Teoría del Consumidor

$$U(X, Y) = X^\alpha Y^\beta$$

Los precios de los bienes X e Y se denotan P_x y P_y , el ingreso del individuo es I . $\alpha, \beta > 0$

1. Restricción Presupuestaria

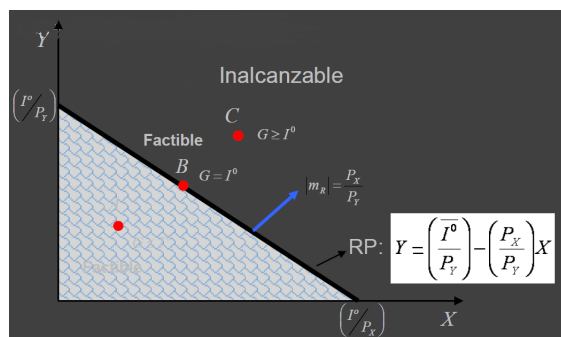
Respuesta

$$\underbrace{P_x X + P_y Y}_{\text{Gasto}} = \underbrace{I}_{\text{Ingreso}}$$

Para poder graficar despejamos Y

$$P_y Y = I - P_x X$$

$$Y = \frac{I}{P_y} - \frac{P_x}{P_y} X$$



2. Curva de indiferencia

Respuesta

Denotamos la función de utilidad como un escalar genérico u_0 y luego despejamos Y para poder graficar.

$$u_0 = X^\alpha Y^\beta$$

$$Y^\beta = \frac{u_0}{X^\alpha}$$

$$Y = \left[\frac{u_0}{X^\alpha} \right]^{\frac{1}{\beta}}$$



3. Demandas Marshallianas

Respuesta

$$\max_{\{X,Y\}} U(X,Y) = X^\alpha Y^\beta$$

$$s.a : P_x X + P_y Y = I$$

$$L = X^\alpha Y^\beta + \lambda(I - P_x X - P_y Y)$$

CPO:

$$L_x : \alpha X^{\alpha-1} Y^\beta - \lambda P_x = 0$$

$$L_y : \beta X^\alpha Y^{\beta-1} - \lambda P_y = 0$$

$$L_\lambda : P_x X + P_y Y = I$$

$$\frac{\alpha X^{\alpha-1} Y^\beta}{\beta X^\alpha Y^{\beta-1}} = \frac{\lambda P_x}{\lambda P_y}$$

$$\frac{\alpha Y}{\beta X} = \frac{P_x}{P_y}$$

$$Y = \frac{\beta P_x}{\alpha P_y} X$$

Reemplazamos esta relación en la restricción presupuestaria

$$P_x X + P_y \left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y} X \right) = I$$

$$P_x X + \frac{\beta P_x}{\alpha} X = I$$

$$X \left(P_x + \frac{\beta P_x}{\alpha} \right) = I$$

$$X \left(\frac{\alpha P_x + \beta P_x}{\alpha} \right) = I$$

$$X^* = \frac{\alpha I}{P_x(\alpha + \beta)}$$

Si reemplazamos en la relación que encontramos anteriormente llegaremos a que

$$Y^* = \frac{\beta I}{P_y(\alpha + \beta)}$$

4. Función de Utilidad Indirecta

**Respuesta**

$$FUI \Rightarrow U(X^*, Y^*) \Rightarrow v(P_x, P_y, I)$$

$$v(P_x, P_y, I) = \left(\frac{\alpha I}{P_x(\alpha + \beta)} \right)^\alpha \left(\frac{\beta I}{P_y(\alpha + \beta)} \right)^\beta$$

$$v(P_x, P_y, I) = \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{(\alpha + \beta)^{\alpha + \beta}} \frac{I^{\alpha + \beta}}{P_x^\alpha P_y^\beta}$$

Propiedades:

- Homogenea de grado cero en Precios e Ingreso
- Cuasicóncava en Precios e Ingreso
- Estrictamente creciente en Ingreso
- Decreciente en Precios

5. Identidad de Roy

Respuesta

$$\frac{\frac{\partial v(P_x, P_y, I)}{\partial P_x}}{\frac{\partial v(P_x, P_y, I)}{\partial I}} = -X^*$$

6. Demandas Hicksianas

Respuesta

$$\min_{\{X, Y\}} P_x X + P_y Y$$

$$s.a : X^\alpha Y^\beta = u_0$$

$$L = P_x X + P_y Y + \lambda(u_0 - X^\alpha Y^\beta)$$

CPO:

$$L_x : P_x - \lambda \alpha X^{\alpha-1} Y^\beta = 0$$

$$L_y : P_y - \lambda \beta X^\alpha Y^{\beta-1} = 0$$

$$L_\lambda : X^\alpha Y^\beta = u_0$$

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{\lambda \alpha X^{\alpha-1} Y^\beta}{\lambda \beta X^\alpha Y^{\beta-1}}$$



$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{\alpha X^{\alpha-1} Y^{\beta}}{\beta X^{\alpha} Y^{\beta-1}}$$

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{\alpha Y}{\beta X}$$

$$Y = \frac{\beta P_x}{\alpha P_y} X$$

Reemplazamos relación en la restricción que define a la curva de indiferencia.

$$X^{\alpha} \left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y} X \right)^{\beta} = u_0$$

$$X^{\alpha+\beta} \left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y} \right)^{\beta} = u_0$$

$$X^{\alpha+\beta} = u_0 \left(\frac{\alpha P_y}{\beta P_x} \right)^{\beta}$$

$$X^h = u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha P_y}{\beta P_x} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

Reemplazando en la relación encontrada anteriormente llegaremos a que

$$Y^h = u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

Propiedades:

- Homogenea de grado cero en precios

7. Función de Gasto

Respuesta

$$e(P_x, P_y, u_0) = P_x X^h + P_y Y^h$$

$$e(P_x, P_y, u_0) = P_x \left[u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha P_y}{\beta P_x} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \right] + P_y \left[u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right]$$

$$e(P_x, P_y, u_0) = u_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[P_x \left(\frac{\alpha P_y}{\beta P_x} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + P_y \left(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right]$$

Propiedades:



- Homogenea de grado uno en precios
- Creciente y Cóncava en los precios

8. Lema de Shepard

Respuesta

$$\frac{\partial e(P_x, P_y, u_o)}{\partial P_x} = X^h$$

9. Ecuación de Slutsky

Respuesta

$$\frac{\partial X^*}{\partial P_x} = \underbrace{\frac{\partial X^h}{\partial P_x}}_{ES} - \underbrace{\frac{\partial X^*}{\partial I} X^*}_{EI}$$

Teoría de la Firma

10. Lema de Hotelling

Respuesta

$$\frac{\partial \pi}{\partial P} = y(P, w, r)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} = -L(P, w, r)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial r} = -K(P, w, r)$$

Modelo Ocio-Consumo

Teoría de Juegos

		Jugador Y	
		L	R
Jugador X	U	(a,b)	(c,d)
	D	(e,f)	(g,h)



1. Equilibrio en Estrategias Puras

Respuesta

$$(U, L) \quad \text{si } a \geq e \text{ \& } b \geq d$$

$$(U, R) \quad \text{si } c \geq g \text{ \& } d \geq b$$

$$(D, L) \quad \text{si } e \geq a \text{ \& } f \geq h$$

$$(D, R) \quad \text{si } g \geq c \text{ \& } h \geq f$$

2. Estrategia dominante del Jugador X

Respuesta

$$D^X = \begin{cases} (U) & \text{si } a > e \text{ \& } c > g \\ (L) & \text{si } a < e \text{ \& } c < g \end{cases}$$

3. Función de Reacción del Jugador X

Respuesta

Sea "y" la probabilidad de que el Jugador Y, tome la estrategia L

$$R^X(y) = \begin{cases} (U) & \text{si } y \cdot a + (1 - y)c > y \cdot e + (1 - y)g \\ (L) & \text{si } y \cdot a + (1 - y)c < y \cdot e + (1 - y)g \\ (U, L) & \text{si } y \cdot a + (1 - y)c = y \cdot e + (1 - y)g \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

Modelo de Cournot

Consideramos N firmas con las siguientes funciones

$$P = A - Q$$

$$Q = \sum_{i=1}^N q_i = \sum_{i=1}^{N-1} q_i + q_j$$

Donde "j" es la firma representativa que analizamos en contra de las otras firmas "i". Suponemos que todas las firmas tienen un costo marginal de "c"

1. Cantidades, Precio y utilidad de equilibrio

Respuesta

Planteamos el problema de maximización de la firma j y resolvemos



$$\begin{aligned}\pi_j &= P \cdot q_j - cq_j \\ \pi_j &= (P - c)q_j \\ \pi_j &= \left(A - \sum_{i=1}^{N-1} q_i - q_j - c\right)q_j\end{aligned}$$

CPO:

$$\begin{aligned}\frac{\pi_j}{q_j} : A - \sum_{i=1}^{N-1} q_i - 2q_j - c &= 0 \\ q_j &= \frac{A - \sum_{i=1}^{N-1} q_i - c}{2}\end{aligned}$$

Por simetría tenemos que $q_i = q_j$. Por lo que expresamos la función de reacción anterior como

$$q_i = \frac{A - \sum_{i=1}^{N-1} q_j - c}{2}$$

Usamos propiedad de sumatoria

$$q_i = \frac{A - (N-1)q_j - c}{2}$$

Reemplazamos convenientemente q_j por q_i y luego despejamos la cantidad de equilibrio.

$$\begin{aligned}q_i &= \frac{A - (N-1)q_i - c}{2} \\ 2q_i &= A - (N-1)q_i - c \\ 2q_i + (N-1)q_i &= A - c \\ q_i(2 + N - 1) &= A - c\end{aligned}$$

$$q_i^* = \frac{A - c}{N + 1}$$

De aquí se deriva que

$$\begin{aligned}Q^* &= \sum_{i=1}^N q_i^* \\ Q^* &= \sum_{i=1}^N \frac{A - c}{N + 1}\end{aligned}$$

Aplicamos propiedad de sumatoria y obtenemos

$$Q^* = \frac{N(A - c)}{N + 1}$$

Reemplazamos lo anterior en la función de demanda y encontramos el precio de equilibrio

$$P^* = A - Q^*$$



$$P^* = A - \frac{N(A-c)}{N+1}$$

$$P^* = \frac{AN + A - AN + NC}{N+1}$$

$$P^* = \frac{A + NC}{N+1}$$

Usamos todo lo obtenido anteriormente para encontrar las utilidades de equilibrio

$$\pi_i^* = P^* \cdot q_i^* - c \cdot q_i^*$$

$$\pi_i^* = (P^* - c) \cdot q_i^*$$

$$\pi_i^* = \left[\frac{A + NC}{N+1} - c \right] \frac{A-c}{N+1}$$

$$\pi_i^* = \left[\frac{A + NC - NC - c}{N+1} \right] \frac{A-c}{N+1}$$

$$\pi_i^* = \left[\frac{A-c}{N+1} \right]^2$$

Resumiendo todo en una tabla tendremos que

	Valor	$\frac{\partial}{\partial N}$	$\lim_{N \rightarrow \infty}$
q_i	$\frac{A-c}{N+1}$	$\frac{\partial q_i}{\partial N} < 0$	0
Q	$\frac{N(A-c)}{N+1}$	$\frac{\partial Q}{\partial N} > 0$	A-c
P	$\frac{A+NC}{N+1}$	$\frac{\partial P}{\partial N} < 0$	0
π	$\left[\frac{A-c}{N+1} \right]^2$	$\frac{\partial \pi}{\partial N} < 0$	0

Modelo de Stackelberg

Modelo de Hotelling