巡回符号の課題

2022 年 7 月 18 日

1　$n = 5$ の巡回符号

生成多項式 $g(x)$ は $1 + x^n$ の因数なので、

$$1 + x^5 = (1 + x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$$

より、$g(x)$ の候補は $1+x$ と $1+x+x^2+x^3+x^4$ である。$g(x) = 1+x$ のときの全ての符号を表 1 に示す。表 1 より、$g(x) = 1+x$ のときの最小ハミング距離は 2 である。$g(x) = 1+x+x^2+x^3+x^4$

表 1　$g(x) = 1 + x$ の符号

00000				
00011	00110	01100	11000	10001
00101	01010	10100	01001	10010
01111	11110	11101	11011	10111

のとき、符号は 00000 と 11111 のみなので、最小ハミング距離は 5 である。

2　$n = 6$ の巡回符号

生成多項式 $g(x)$ は $1 + x^n$ の因数なので、

$$1 + x^6 = (1 + x^3)^2 = (1 + x)^2(1 + x + x^2)^2$$

より、$g(x)$ の候補を k の昇順に並べると表 2 になる。

表 2　$n=6$ の巡回符号の生成多項式

k	$g(x)$
1	$(1+x)(1+x+x^2)^2$
2	$(1+x+x^2)^2$
2	$(1+x)^2(1+x+x^2)$
3	$(1+x)(1+x+x^2)$
4	$1+x+x^2$
4	$(1+x)^2$
5	$1+x$

3　$g(x)=(1+x)(1+x^2+x^3)$ の巡回符号の生成行列

$n=7$ の場合、$g(x)$ の次数が 4 なので、情報源の長さは 3 である。$g(x)$ を展開すると $1+x+x^2+x^4$ となり、生成行列は 1 行目が $x^2g(x)$, 2 行目が $xg(x)$, 3 行目が $g(x)$ になるので、

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0&0&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&0&1&0\\1&1&1&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

となる。これを組織符号に変換すると

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&0&1&0\\1&1&1&0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&1&0\\0&1&0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

4　$g(x)=1+x^2+x^3$ の (7,4) 巡回符号

4.1　符号化回路とその動作

$g(x)=1+x^2+x^3$ の (7,4) 巡回符号の符号化回路を図 1 に示す。この回路に入力情報 $u(x)=1+x^2$ を入れたときの動作を表 3 に示す。情報の長さは 4 なので、入力の順番は 0101 である。

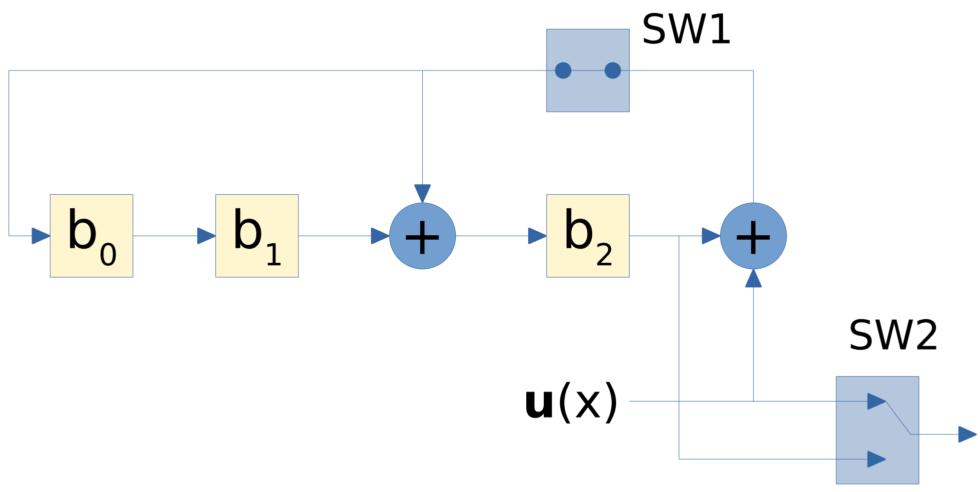

図 1　符号化回路

表 3　$u(x) = 1 + x^2$ を入れたときの動作

	入力	b_0	b_1	b_2	出力
	-	0	0	0	-
	0	0	0	0	0
SW1: 閉	1	1	0	1	1
SW2: 上	0	1	1	1	0
	1	0	1	1	1
SW1: 開	-	0	0	1	1
SW2: 下	-	0	0	0	1
	-	0	0	0	0