

# 巡回符号の課題

2022 年 7 月 18 日

## 1 $n = 5$ の巡回符号

生成多項式  $g(x)$  は  $1 + x^n$  の因数なので、

$$1 + x^5 = (1 + x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$$

より、 $g(x)$  の候補は  $1+x$  と  $1+x+x^2+x^3+x^4$  である。 $g(x) = 1+x$  のときの全ての符号を表 1 に示す。表 1 より、 $g(x) = 1+x$  のときの最小ハミング距離は 2 である。 $g(x) = 1+x+x^2+x^3+x^4$

表 1  $g(x) = 1 + x$  の符号

00000				
00011	00110	01100	11000	10001
00101	01010	10100	01001	10010
01111	11110	11101	11011	10111

のとき、符号は 00000 と 11111 のみなので、最小ハミング距離は 5 である。

## 2 $n = 6$ の巡回符号

生成多項式  $g(x)$  は  $1 + x^n$  の因数なので、

$$1 + x^6 = (1 + x^3)^2 = (1 + x)^2(1 + x + x^2)^2$$

より、 $g(x)$  の候補を  $k$  の昇順に並べると表 2 になる。

表 2  $n = 6$  の巡回符号の生成多項式

$k$	$g(x)$
1	$(1+x)(1+x+x^2)^2$
2	$(1+x+x^2)^2$
2	$(1+x)^2(1+x+x^2)$
3	$(1+x)(1+x+x^2)$
4	$1+x+x^2$
4	$(1+x)^2$
5	$1+x$

### 3 $g(x) = (1+x)(1+x^2+x^3)$ の巡回符号の生成行列

$n = 7$  の場合、 $g(x)$  の次数が 4 なので、情報源の長さは 3 である。 $g(x)$  を展開すると  $1+x+x^2+x^4$  となり、生成行列は 1 行目が  $x^2g(x)$ , 2 行目が  $xg(x)$ , 3 行目が  $g(x)$  になるので、

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。これを組織符号に変換すると

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 4 $g(x) = 1+x^2+x^3$ の (7,4) 巡回符号

#### 4.1 符号化回路とその動作

$g(x) = 1+x^2+x^3$  の (7,4) 巡回符号の符号化回路を図 1 に示す。この回路に入力情報  $u(x) = 1+x^2$  を入れたときの動作を表 3 に示す。情報の長さは 4 なので、入力の順番は 0101 である。

#### 4.2 シンドローム計算回路

シンドローム計算回路を図 2 に示す。受信語が  $r(x) = x^2+x^4+x^5$  の場合の回路の動作を表 4 に示す。シンドロームが最終的に 0 になったので誤りなし。また、 $r(x) = x^2g(x)$  であることから、誤りがないことが分かる。

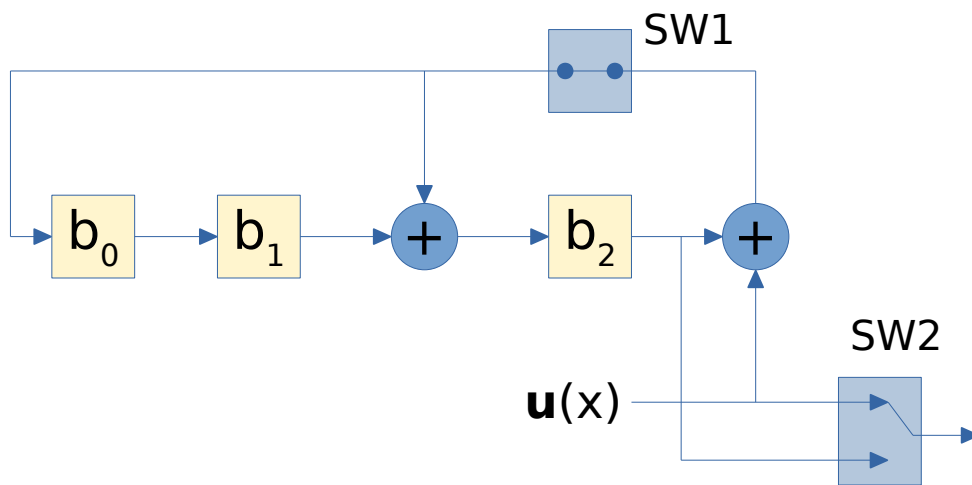


図1 符号化回路

表3  $u(x) = 1 + x^2$  を入れたときの動作

入力	$b_0$	$b_1$	$b_2$	出力
-	0	0	0	-
0	0	0	0	0
SW1: 閉	1	1	0	1
SW2: 上	0	1	1	0
1	0	1	1	1
SW1: 開	-	0	0	1
SW2: 下	-	0	0	1
-	0	0	0	0

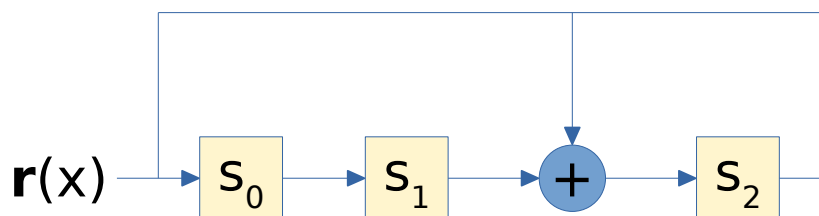


図2 シンドローム計算回路

表 4  $r(x) = x^2 + x^4 + x^5$  を入れたときの動作

入力	$s_0$	$s_1$	$s_2$
-	0	0	0
0	0	0	0
1	1	0	0
1	1	1	0
0	0	1	1
1	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

## 5 $g(x) = 1 + x + x^4$ の (15, 11) ハミング符号

符号化回路を図 3 に示す。

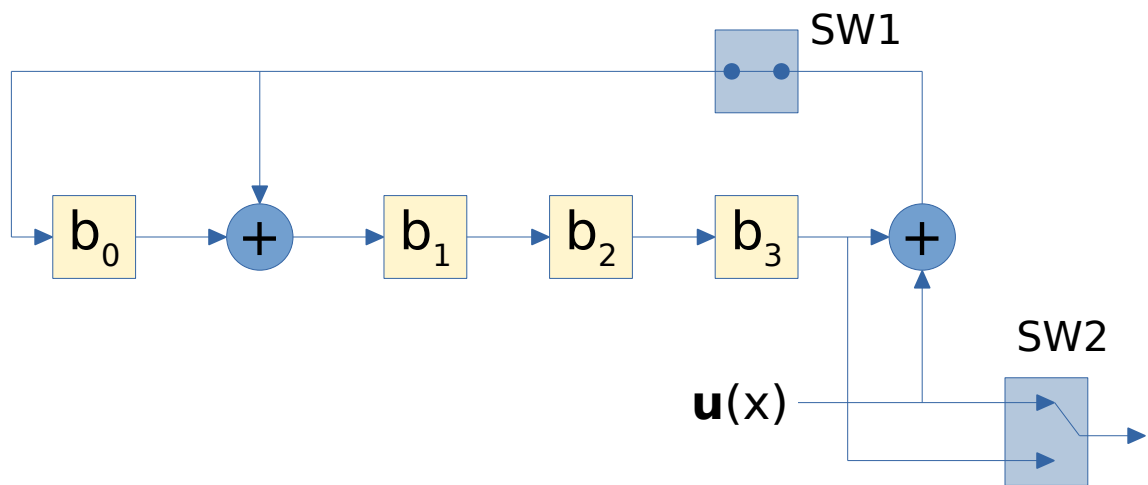


図 3  $g(x) = 1 + x + x^4$  の (15, 11) ハミング符号の符号化回路

復号回路では  $x^{n-1}$  のシンドロームだけ探せばよいので、

$$x^{14} = (1 + x + x^4)(1 + x + x^2 + x^4 + x^6 + x^7 + x^8 + x^{11}) + (1 + x^3)$$

より、 $1 + x^3$  で 1 になる論理回路を使う。復号回路を図 4 に示す。

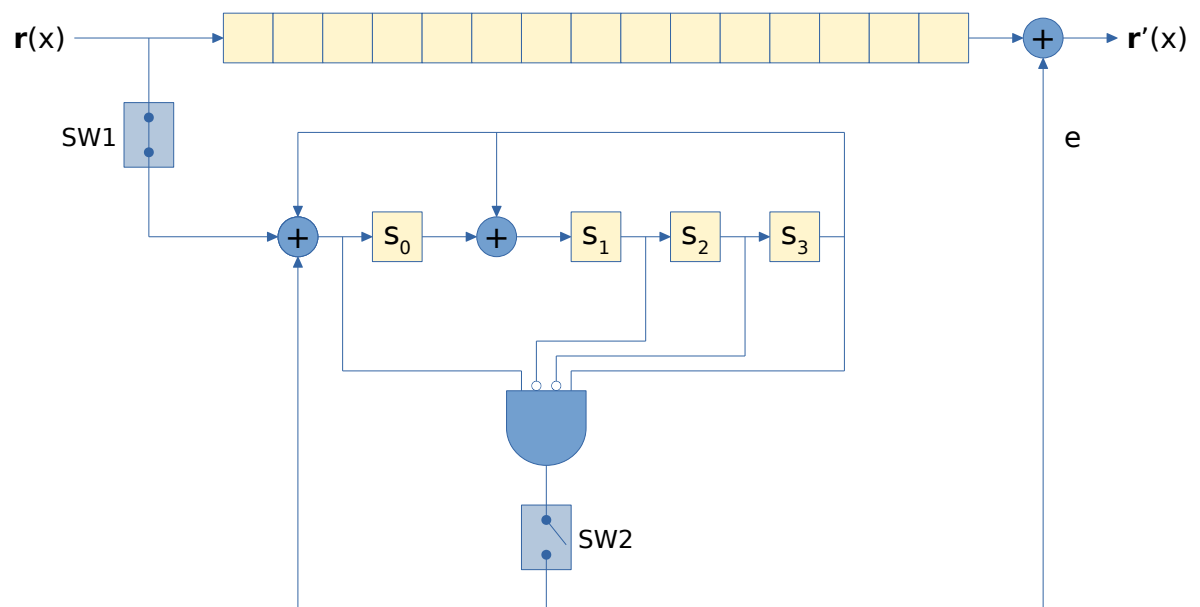


図4  $g(x) = 1 + x + x^4$  の (15, 11) ハミング符号の復号回路