

ブロック符号の課題

2022年7月18日

1 組織符号に変換

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2 標準アレイ

表1 標準アレイ

| | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 000000 | 001111 | 010110 | 011001 | 100100 | 101011 | 110010 | 111101 |
| 000001 | 001110 | 010111 | 011000 | 100101 | 101010 | 110011 | 111100 |
| 000010 | 001101 | 010100 | 011011 | 100110 | 101001 | 110000 | 111111 |
| 001000 | 000111 | 011110 | 010001 | 101100 | 100011 | 111010 | 110101 |
| 010000 | 011111 | 000110 | 001001 | 110100 | 111011 | 100010 | 101101 |
| 100000 | 101111 | 110110 | 111001 | 000100 | 001011 | 010010 | 011101 |
| 101000 | 100111 | 111110 | 110001 | 001100 | 000011 | 011010 | 010101 |
| 100001 | 101110 | 110111 | 111000 | 000101 | 001010 | 010011 | 011100 |

表1より、復号結果は表2になる。

表2 復号結果

| 受信語 | 復号結果 |
|--------|--------|
| 101110 | 001111 |
| 010101 | 111101 |
| 110011 | 110010 |

3 (8, 4) 組織符号

$$p_0 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$p_1 = u_0 + u_1 + u_2$$

$$p_2 = u_0 + u_1 + u_3$$

$$p_3 = u_0 + u_2 + u_3$$

3.1 生成行列

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 パリティ検査行列

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

3.3 最小ハミング距離

表 3 より、0 ベクトル以外の符号の最小ハミング重みが 4 なので、最小ハミング距離は 4 である。

3.4 訂正できる誤りパターン

訂正できる誤りパターン数は、0 誤りを含むと

$$2^{n-k} = 2^{8-4} = 2^4 = 16$$

である。誤りパターンは表 4 のように選択できる。

3.5 符号化回路

図 1 に示す。

3.6 シンドローム計算回路

図 2 に示す。

表 3 情報源と符号の対応

| 情報源 | 符号 |
|------|----------|
| 0000 | 00000000 |
| 0001 | 00011011 |
| 0010 | 00101101 |
| 0011 | 00110110 |
| 0100 | 01001110 |
| 0101 | 01010101 |
| 0110 | 01100011 |
| 0111 | 01111000 |
| 1000 | 10000111 |
| 1001 | 10011100 |
| 1010 | 10101010 |
| 1011 | 10110001 |
| 1100 | 11001001 |
| 1101 | 11010010 |
| 1110 | 11100100 |
| 1111 | 11111111 |

表 4 訂正できる誤りパターンの一例

| | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| 00000000 | 00000001 | 00000010 | 00000100 |
| 00001000 | 00010000 | 00100000 | 01000000 |
| 10000000 | 00000011 | 00000110 | 00001010 |
| 00010010 | 00100010 | 01000010 | 10000010 |

3.7 重み分布と誤りを検出できない確率

表 3 より、重み分布は表 5 となる。

表 5 重み分布

| i | 0 | 4 | 8 |
|-------|---|----|---|
| A_i | 1 | 14 | 1 |

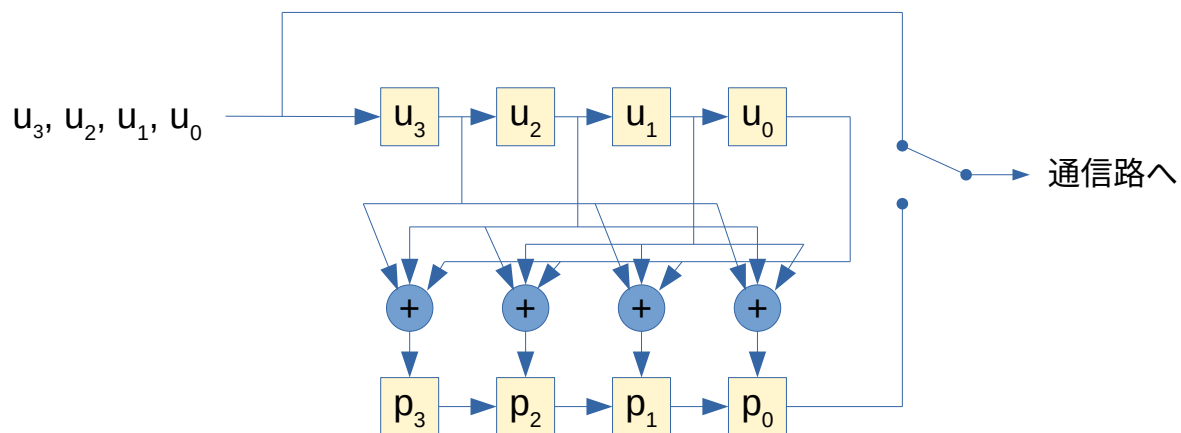


図1 符号化回路

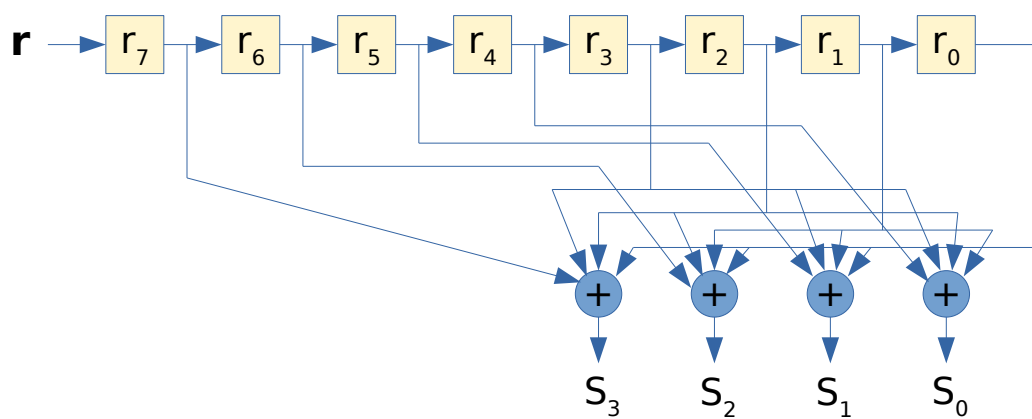


図2 シンドローム計算回路

$p = 0.01$ のとき、誤りを検出できない確率は

$$\begin{aligned}
 P_U(E) &= \sum_{i=1}^n A_i p^i (1-p)^{n-i} \\
 &= 14p^4(1-p)^4 + 1p^8(1-p)^0 \\
 &\simeq 1.345 \times 10^{-7}
 \end{aligned}$$

3.8 双対符号

(1) の検査行列 \mathbf{H} を組織符号に変換すると、

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

より、生成行列 \mathbf{G} と等しくなる。

4 (7,4) ハミング符号の復号誤り率の上限

BSC における復号誤り率の上限は

$$P_{\max}(E) = \sum_{i=t+1}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

なので、(7,4) ハミング符号の場合

$$P_{\max}(E) = \sum_{i=2}^7 \binom{7}{i} p^i (1-p)^{7-i}$$

である。二項定理より、

$$\begin{aligned} 1^n &= ((1-p) + p)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=t+1}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} P_{\max}(E) &= \sum_{i=2}^7 \binom{7}{i} p^i (1-p)^{7-i} = 1 - \sum_{i=0}^1 \binom{7}{i} p^i (1-p)^{7-i} \\ &= 1 - (1p^0(1-p)^7 + 7p^1(1-p)^6) = 1 - (1-p)^6(1-6p) \end{aligned}$$

と簡略化できる。これを $10^{-5} \leq p \leq 10^{-1}$ の範囲でプロットしたものが図 3 である。

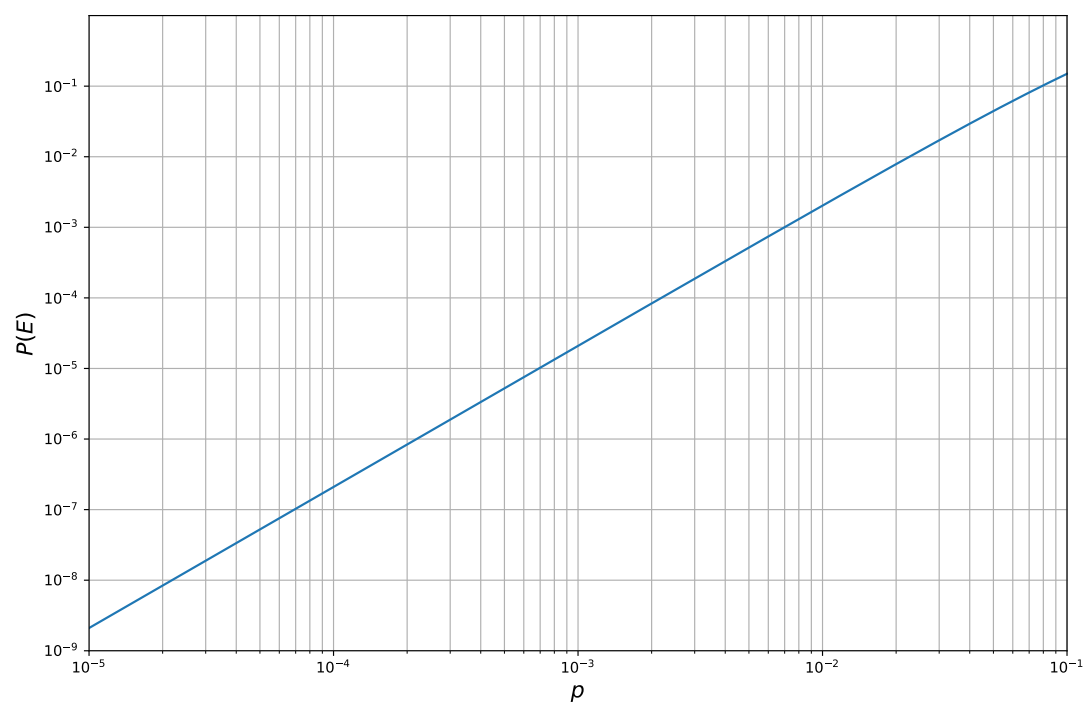


図3 (7,4) ハミング符号の復号誤り率の上限