ブロック符号の課題

2022 年 7 月 18 日

1　組織符号に変換

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&1\\1&1&1&1&0&1\\0&1&1&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

2　標準アレイ

表 1　標準アレイ

000000	001111	010110	011001	100100	101011	110010	111101
000001	001110	010111	011000	100101	101010	110011	111100
000010	001101	010100	011011	100110	101001	110000	111111
001000	000111	011110	010001	101100	100011	111010	110101
010000	011111	000110	001001	110100	111011	100010	101101
100000	101111	110110	111001	000100	001011	010010	011101
101000	100111	111110	110001	001100	000011	011010	010101
100001	101110	110111	111000	000101	001010	010011	011100

表 1 より、復号結果は表 2 になる。

表 2　復号結果

受信語	復号結果
101110	001111
010101	111101
110011	110010

3 (8, 4) 組織符号

$$
\begin{aligned}
p_0 &= u_1 + u_2 + u_3 \\
p_1 &= u_0 + u_1 + u_2 \\
p_2 &= u_0 + u_1 + u_3 \\
p_3 &= u_0 + u_2 + u_3
\end{aligned}
$$

3.1 生成行列

$$
\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
$$

3.2 パリティ検査行列

$$
\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{1}
$$

3.3 最小ハミング距離

表 3 より、0 ベクトル以外の符号の最小ハミング重みが 4 なので、最小ハミング距離は 4 である。

3.4 訂正できる誤りパターン

訂正できる誤りパターン数は、0 誤りを含むと

$$2^{n-k} = 2^{8-4} = 2^4 = 16$$

である。誤りパターンは表 4 のように選択できる。

3.5 符号化回路

図 1 に示す。

3.6 シンドローム計算回路

図 2 に示す。

表 3　情報源と符号の対応

情報源	符号
0000	00000000
0001	00011011
0010	00101101
0011	00110110
0100	01001110
0101	01010101
0110	01100011
0111	01111000
1000	10000111
1001	10011100
1010	10101010
1011	10110001
1100	11001001
1101	11010010
1110	11100100
1111	11111111

表 4　訂正できる誤りパターンの一例

00000000	00000001	00000010	00000100
00001000	00010000	00100000	01000000
10000000	00000011	00000110	00001010
00010010	00100010	01000010	10000010

3.7　重み分布と誤りを検出できない確率

表 3 より、重み分布は表 5 となる。

表 5　重み分布

i	0	4	8
A_i	1	14	1

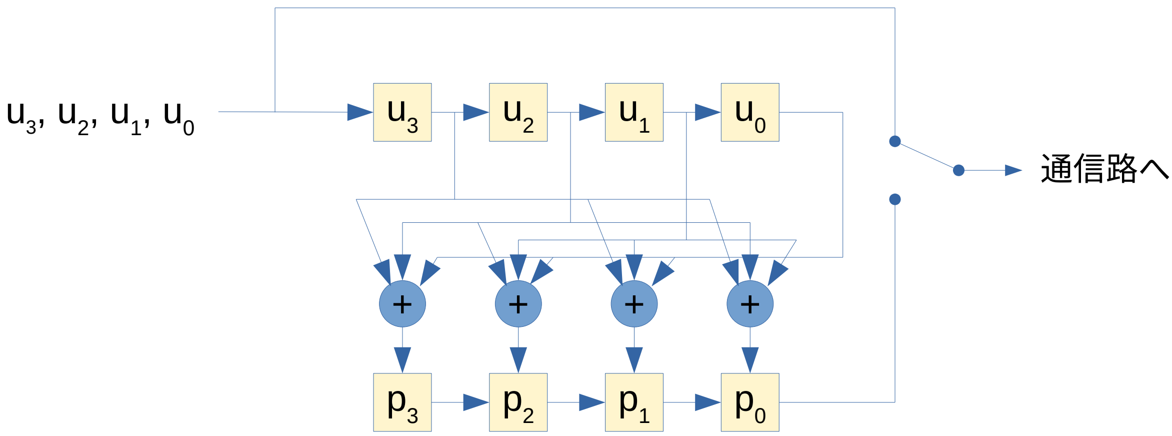

図 1　符号化回路

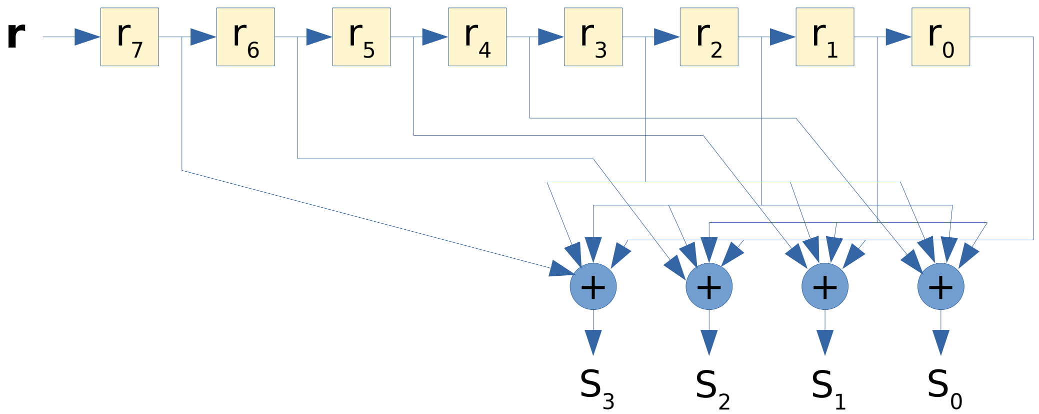

図 2　シンドローム計算回路

$p = 0.01$ のとき、誤りを検出できない確率は

$$
\begin{aligned}
P_U(E) &= \Sigma_{i=1}^{n} A_i p^i (1-p)^{n-i} \\
&= 14p^4(1-p)^4 + 1p^8(1-p)^0 \\
&\simeq 1.345 \times 10^{-7}
\end{aligned}
$$

3.8 双対符号

(1) の検査行列 $\boldsymbol{H}$ を組織符号に変換すると、

$$\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\1&0&1&1&0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&1&1&1&0\\0&0&1&0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1&0&1&1\end{bmatrix}$$

より、生成行列 $\boldsymbol{G}$ と等しくなる。

4 (7,4) ハミング符号の復号誤り率の上限

BSC における復号誤り率の上限は

$$P_{\max}(E)=\Sigma_{i=t+1}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$$

なので、(7,4) ハミング符号の場合

$$P_{\max}(E)=\Sigma_{i=2}^{7}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{7-i}$$

である。二項定理より、

$$\begin{aligned}1^n=((1-p)+p)^n&=\Sigma_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\\&=\Sigma_{i=0}^{t}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}+\Sigma_{i=t+1}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}P_{\max}(E)=\Sigma_{i=2}^{7}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{7-i}&=1-\Sigma_{i=0}^{1}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{7-i}\\&=1-\left(1p^0(1-p)^7+7p^1(1-p)^6\right)=1-(1-p)^6(1-6p)\end{aligned}$$

と簡略化できる。これを $10^{-5}\leq p\leq 10^{-1}$ の範囲でプロットしたものが図 3 である。

5 $d_{\min}\geq 2t+1$ の (n,k) 線形符号の場合

符号長 n の符号で、各誤りビット数の誤りパターン数を整理すると表 6 になる。なお、${}_nC_t$ は $\binom{n}{t}$ と同じ意味なので $\binom{n}{t}$ に統一する。表 6 より、t ビット以下の誤りパターン数は

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots\binom{n}{t}$$

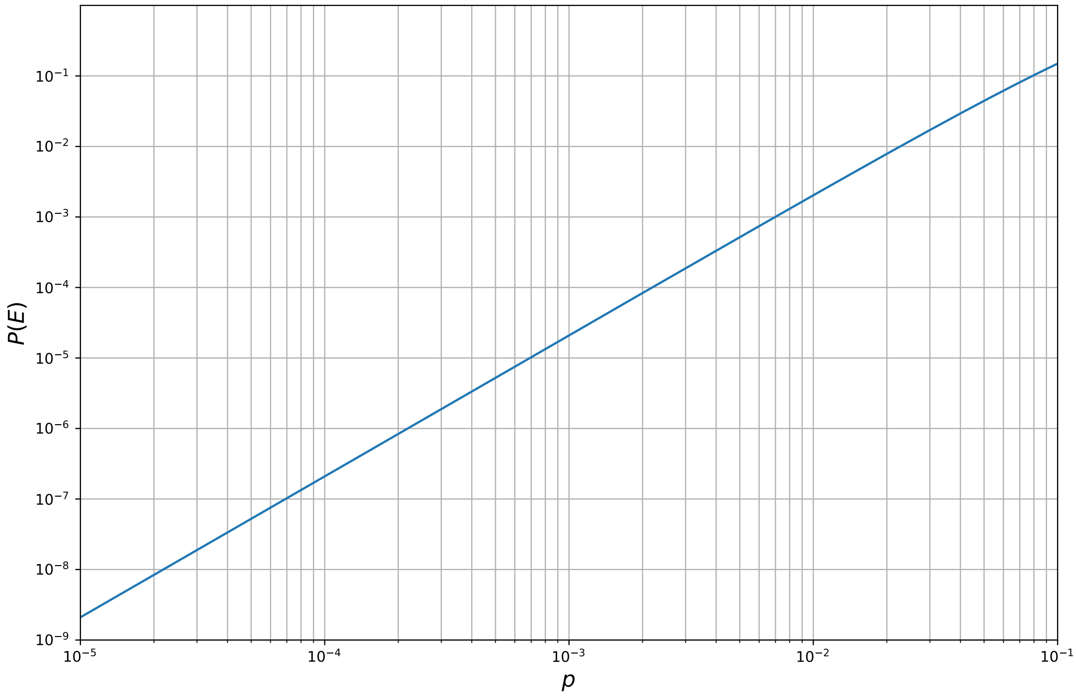

図 3　(7,4) ハミング符号の復号誤り率の上限

表 6　誤りビット数と誤りパターン数

誤りビット数	誤りパターン数
0	$\binom{n}{0}$
1	$\binom{n}{1}$
2	$\binom{n}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
t	$\binom{n}{t}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\binom{n}{n}$

である。$d_{\min} \geq 2t+1$ の符号は t ビット以下の誤りを全て訂正可能であり、(n,k) 線形符号が訂正可能な誤りパターン数は 2^{n-k} なので、

$$2^{n-k} \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{t}$$

$$\therefore n-k \geq \log_2 \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{t} \right)$$