ФИО: Медяков Даниил Олегович

Номер задачи: 66с

Решение:

Не умаляя общности, положим $c_{12} = c_{21} = 1$.
Поскольку матрица штрафов имеет вид

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то риски равны ошибкам первого и второго рода, так как

$$R_1(\delta) = c_{11}p_{11} + c_{21}p_{21} = \alpha$$
$$R_2(\delta) = c_{12}p_{12} + c_{22}p_{22} = \beta$$

Выпишем область, в которой байесовское решающее правило принимает $H_2$:

$$h_1(x) \geqslant \sum_{j=1}^{2} c_{1j}q_1 f_1(x)$$
$$l(x) \geqslant \frac{c_{21} - c_{11}}{c_{12} - c_{22}} \frac{q_1}{q_2} = 1$$

Тогда решающее правило:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, l(x) \geqslant 1 \\ 0, l(x) < 1 \end{cases}$$

$$l(x) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot(x-m_2)^T R^{-1}(x-m_2)\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot(x-m_1)^T R^{-1}(x-m_1)\right)} =$$
$$= \exp(\frac{1}{3}\cdot(2x_1^2 - 2x_1 - x_1x_2 - 2x_1 + 2 + x_2 - x_1x_2 + x_2 + 2x_2^2 -$$
$$-2x_1^2 - 2x_1 + x_1x_2 - 2x_1 - 2 + x_2 + x_1x_2 + x_2 - 2x_2^2)) =$$
$$= \exp\left(\frac{1}{3}\cdot(-8x_1 + 4x_2)\right) = \exp\left(\left(-\frac{8}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2\right)\right)$$

Запишем ошибки первого и второго рода:

$$\alpha = \mathbb{P}_1\left[l\left(x\right) \geqslant 1\right] = \mathbb{P}_1\left[\exp\left(-\frac{8}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2\right) \geqslant 1\right] = \mathbb{P}_1\left[-\frac{8}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 \geqslant 0\right] =$$
$$= \mathbb{P}_1\left[2x_1 - x_2 \leqslant 0\right]$$
$$\beta = \mathbb{P}_2[l(x) < 1] = \mathbb{P}_2[x_2 - 2x_1 < 0]$$

Плотность вероятности нормального распределения может быть записана следующим образом:

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.75}}\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 - 1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right).$$

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.75}}\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + 1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right).$$

Теперь интеграл, который нам нужно вычислить, записывается следующим образом:

$$\int\int_D f(x_1, x_2) d(x_1, x_2),$$

где $D$ - область, где выполняется условие $2x_1 - x_2 \leq 0$. Тогда

$$\alpha = 0.180397$$
$$\beta = 0.0744975$$

Минимальный байесовский риск:

$$r(\delta) = \frac{0.180397 + 0.0744975}{2} = 0,1274$$