ФИО: Медяков Даниил Олегович

Номер задачи: 22

Решение:

$X \in \mathcal{U}[a, a+1]$ - случайная величина, $X_1, \ldots X_n$ - выборка размера n.

1. $A_1^* = \overline{X} - \frac{1}{2}$.

Для начала проверим эту статистику на несмещенность:

$$\mathbb{E}_a \left[\overline{X} - \frac{1}{2}\right] = \mathbb{E}_a \left[\overline{X}\right] - \frac{1}{2} = \frac{1}{n} n \left(a + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = a$$

Получили, что статистика обладает свойством несмещенности. Теперь проверим на состоятельность. Для этого необходимо

$$\forall a \;\; T_n(\mathbf{X}) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}_a} a \Leftrightarrow \forall a \;\; \forall \varepsilon \;\; \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_a \left[|T_n(\mathbf{X}) - a| > \varepsilon\right] = 0$$

Для оценки слагаемого под пределом будем пользоваться неравенством Чебышева, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \mathbb{P}\left[|\xi - \mathbb{E}\xi| > \varepsilon\right] \leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2},$$

где ξ - случайная величина с конечным математическим ожиданием и дисперсией. В нашем случае, для $\mathcal{U}[a, a+1]$ мы получаем:

$$\mathbb{D}_a[A_1^*] = \frac{1}{n^2} \mathbb{D}_a \left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}_a[X_i] = \frac{n}{n^2} \frac{1}{12} = \frac{1}{12n} < +\infty,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \mathbb{P}_a[|A_1^* - a| > \varepsilon] \leqslant \frac{\mathbb{D}[A_1^*]}{\varepsilon^2} = \frac{1}{12\varepsilon^2 n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Получили сходимость по вероятности к нулю, а значит A_1^* состоятельна.

2. $A_2^* = X_{(n)} - \frac{n}{n+1}$. $X_{(n)} - a \in Beta(n, 1)$, где для $\xi \in Beta(\alpha, \beta)$ верно:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \mathbb{D}\xi = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Проверим на несмещенность:

$$\mathbb{E}_a[A_2^*] = \mathbb{E}_a[X_{(n)}] - \frac{n}{n+1} = \mathbb{E}_{Beta(n,1)}[X_{(n)} - a] + a - \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1} + \\ + a - \frac{n}{n+1} = a.$$

Свойство несмещенности выполняется.

Аналогично первому пункту проверим состоятельность:

$$\mathbb{D}_a[A_2^*] = \mathbb{D}_a[X_{(n)} - a] = \mathbb{D}_{Beta(n,1)}[\xi] = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Это значит, что можно ограничить выражение под пределом для сходимости по вероятности с помощью неравенства Чебышева и сам этот предел равен нулю, то есть сходимость по вероятности есть. Значит свойство состоятельности выполняется.

Теперь, для того, чтобы выяснить, какая статистика является наиболее предпочтительной, сравним их дисперсии:

$$\frac{1}{12n} \;\; \textbf{VS} \;\; \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \Leftrightarrow n^3 - 8n^2 + 5n + 2 \;\; \textbf{VS} \;\; 0.$$

Получили, что при $1 \leqslant n < 8$ лучше использовать первую статистику, иначе вторую.