ФИО: Медяков Даниил Олегович

Номер задачи: 11

Решение:

Введем следующие случайные величины.

ξ_1 - случайная величина, принимающая три значения: заниженный размер детали из **первой** партии, точный размер детали из **первой** партии, завышенный размер детали из **первой** партии.

ξ_2 - случайная величина, принимающая три значения: заниженный размер детали из **второй** партии, точный размер детали из **второй** партии, завышенный размер детали из **второй** партии.

Наша цель проверить гипотезу о том, что размер детали не зависит от партии, и это эквивалентно гипотезе H_1: величины ξ_1 и ξ_2 имеют одинаковые распределения. Для этого используем критирей однородности χ^2. Он применим, так как объемы выборки для каждой из партий больше 50 и каждая из частот больше 5. Дополнительно положим уровень значимости $\alpha = 0.05$, так как он не задан по условию задачи.

Для ξ_1 и ξ_2 нам даны следующие выборки с $N = 3$:

$$\begin{cases} \nu_1 = \{25, 50, 25\}, \overline{p}_1 = \{p_{11}, p_{12}, p_{13}\} \\ \nu_2 = \{52, 41, 7\}, \overline{p}_2 = \{p_{21}, p_{22}, p_{23}\} \end{cases}$$

Далее найдем $\hat{P} = \arg\max\limits_{p_j} \prod\limits_j (p_j)^{\nu_{\cdot j}} \Leftrightarrow \hat{P}_j = \frac{\nu_{\cdot j}}{n}$, где $n = n_1 + n_2$.
Причем, $\nu_{\cdot 1} = 25 + 52 = 77, \nu_{\cdot 2} = 50 + 41 = 91, \nu_{\cdot 3} = 25 + 7 = 32$.
Тогда, $\hat{P}_1 = 0.385, \hat{P}_2 = 0.455, \hat{P}_3 = 0.16$.
Теперь мы готовы вычислить статистику критерия:

$$T_{\chi^2} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} \frac{\left(\nu_{ij} - n_i\hat{P}_j\right)^2}{n_i\hat{P}_j} = 10.24 + 10.24 = 20.48.$$

При том, что наша гипотеза H_1 верна, мы получаем сходимость $T_{\chi^2} \xrightarrow[n_1,n_2\to\infty]{H_1,d} \chi^2((N-1)(k-1))$. В тоже время t_α удовлетворяет условию на уровень значимости, то есть $\mathbb{P}(T_{\chi^2} \geq t_\alpha) = \alpha \Rightarrow \mathbb{P}(T_{\chi^2} < t_\alpha) = F_{\chi^2}(t_\alpha) = 1-\alpha$. Тогда t_α суть $(1-\alpha)$ квантиль распределения $\chi^2((N-1)(k-1))$. В нашем случае:

$$t_{0.05} = \chi^2(2)_{0.95} = 5.99.$$

Получили $T_{\chi^2} = 20.48 > 5.99 = t_\alpha$, то есть мы попадаем в критическую область $\Omega_{\text{кр.}} = \{x \in \Omega \mid T_{\chi^2}(x) \geq t_\alpha\}$, а значит гипотезу H_1 отклоняем.

Таким образом, гипотезу о независимости номера партии деталей и размера детали мы отклоняем на уровне значимости $\alpha = 0.05$.