ФИО: Медяков Даниил Олегович

Номер задачи: 1

Решение:

Для начала покажем, что $\mathbb{E}[F_n(x)] = F(x)$:

$$\mathbb{E}[F_n(x)] \overset{def}{=} \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}(X_i < x)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\mathbb{I}(X_i < x)] = \; = \mathbb{P}(X_i < x) = F(x) \tag{1}$$

Теперь получим $\mathbb{D}[F_n(x)]$:

$$\mathbb{D}[F_n(x)] = \frac{1}{n^2}\mathbb{D}\left[\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}(X_i < x)}_{\sim Bi(n, F(x)}\right] = \frac{F(x)(1-F(x))}{n} \tag{2}$$

Тогда, с учетом (1), (2) и центральной предельной теоремы получаем следующую сходимость:

$$\frac{nF_n(x^*) - nF(x^*)}{\sqrt{nF(x^*)(1-F(x^*))}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1) \tag{3}$$

Перепишем в удобном нам виде искомую вероятность и найдем ее:
$\mathbb{P}[|F_n(x^*) - F(x^*)| \leq \frac{t}{\sqrt{n}}] = \mathbb{P}\left[\frac{|F_n(x^*)-F(x^*)|}{\sqrt{F(x^*)(1-F(x^*))}} \leq \frac{t}{\sqrt{nF(x^*)(1-F(x^*))}}\right] =$
$= \mathbb{P}\left[\frac{|nF_n(x^*)-nF(x^*)|}{\sqrt{nF(x^*)(1-F(x^*))}} \leq \frac{t}{\sqrt{F(x^*)(1-F(x^*))}}\right] \underset{(3)}{=}$
$\underset{(3)}{=} \int\limits_{-t/\sqrt{F(x^*)(1-F(x^*))}}^{t/\sqrt{F(x^*)(1-F(x^*))}} \frac{1}{2\pi}\exp^{-\frac{x^2}{2}}dx =$
$= F_{\mathcal{N}(0,1)}(\frac{t}{\sqrt{F(x^*)(1-F(x^*))}}) - F_{\mathcal{N}(0,1)}(-\frac{t}{\sqrt{F(x^*)(1-F(x^*))}})$.