ФИО: Медяков Даниил Олегович

Номер задачи: 52

Решение:

По условию:

$$H_1 : \mathcal{N}(-1, 1)$$
$$H_2 : Exp(2)$$

Для начала запишем риски:

$$R_1 = -1 \cdot \mathbb{P}_1(H_1) + 2 \cdot \mathbb{P}_1(H_2) = 2\alpha - (1-\alpha) = 3\alpha - 1$$
$$R_2 = -1 \cdot \mathbb{P}_2(H_2) + 2 \cdot \mathbb{P}_2(H_1) = 2\beta - (1-\beta) = 3\beta - 1$$

Далее запишем функцию отношения правдоподобия:

$$l(x_1, x_2) = [4\exp(-2(x_1 + x_2))\mathbb{I}(x_1, x_2 > 0)] \cdot$$
$$\cdot \left[\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}((x_1+1)^2 + (x_2+1)^2))\right]^{-1}$$

В случае если $x_i \leqslant 0$ хотя бы для одного из i, то $l(x_1, x_2) = 0$.
В противном случае:
$l(x_1, x_2) = 8\pi \exp\left[\frac{1}{2}((x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 - 4(x_1+x_2))\right]$
Таким образом в функция отношения правдоподобия записывается в следующем виде:

$$l(x_1, x_2) = \begin{cases} 8\pi \exp\left[\frac{1}{2}((x_1-1)^2 + (x_2-1)^2)\right], x_1, x_2 > 0 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Запишем критерий:

$$\pi = \begin{cases} 1, l(x_1, x_2) \geqslant c \\ 0, l(x_1, x_2) < c \end{cases}$$

Согласно лемме Неймана-Пирсона в полной постановке этот критерий является байесовским при $c = \frac{c_{21}-c_{11}}{c_{12}-c_{22}}\frac{q_1}{q_2} = \frac{3}{2}$.

При этом байесовский риск

$$r(\pi) = R_1(\pi)q_1 + R_2(\pi)q_2 = \frac{3}{5}(3\alpha - 1) + \frac{2}{5}(3\beta - 1)$$

Теперь найдем ошибку первого рода:

$$\alpha = \mathbb{P}_1\left[l(x) \geqslant \frac{3}{2}\right] = \mathbb{P}_1\left[x_1, x_2 > 0, (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \geqslant \underbrace{2\ln(\frac{3}{16\pi})}_{<0}\right] =$$

$$= \mathbb{P}_1[x_1 > 0, x_2 > 0] = (1 - F^2_{\mathcal{N}(-1,1)}(0))^2 = 0,025.$$

Теперь найдем ошибку второго рода:

$$\beta = \mathbb{P}_2\left[l(x) < \frac{3}{2}\right] = \mathbb{P}_2\left[(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 < 0\right] +$$

$$+\mathbb{P}_2\left[x_1 < 0 \text{ или } x_2 < 0\right] = 0.$$