ФИО: Медяков Даниил Олегович

Номер задачи: 66а

Решение:

Не умаляя общности, положим $c_{12} = c_{21} = 1$.
Поскольку матрица штрафов имеет вид

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то риски равны ошибкам первого и второго рода, так как

$$R_1(\delta) = c_{11}p_{11} + c_{21}p_{21} = \alpha$$
$$R_2(\delta) = c_{12}p_{12} + c_{22}p_{22} = \beta$$

Выпишем область, в которой байесовское решающее правило принимает H_2:

$$h_1(x) \geqslant \sum_{j=1}^{2} c_{1j} q_1 f_1(x)$$
$$l(x) \geqslant \frac{c_{21} - c_{11}}{c_{12} - c_{22}} \frac{q_1}{q_2} = 1$$

Тогда решающее правило:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, l(x) \geqslant 1 \\ 0, l(x) < 1 \end{cases}$$

Рассматриваем первую компоненту. В этом случае случайная величина имеет одно из двух нормальных распределений: $H_{1a} : \mathcal{N}(1, 1)$, $H_{2a} : \mathcal{N}(-1, 1)$.

$l(x) = \exp(\frac{1}{2}((x-1)^2 - (x+1)^2)) = \exp(-2x)$.

Тогда $\alpha = \mathbb{P}_1(l(x) \geqslant 1) = \mathbb{P}_1(\exp(-2x) \geqslant 1) = \mathbb{P}_1(x \leqslant 0) = F_{\mathcal{N}(1,1)}(0) = 0,1587$.

$\beta = \mathbb{P}_2(l(x) < 1) = \mathbb{P}_2(x > 0) = 1 - F_{\mathcal{N}(-1,1)}(0) = 0,1587$

Тогда минимальный риск:

$r(\delta) = R_1(\delta)q_1 + R_2(\delta)q_2 = \frac{\alpha+\beta}{2} = 0,1587$.