ФИО: Медяков Даниил Олегович

Номер задачи: 54

Решение:

Запишем функцию правдоподобия обеих гипотез:

$$L_1(x) = \frac{1}{9}\mathbb{I}(x \in [0,3]^2)$$
$$L_2(x) = 0,25\exp(-\frac{1}{2}(x_1 + x_2))\mathbb{I}(x_1 \geqslant 0)\mathbb{I}(x_2 \geqslant 0)$$

Тогда

$$l(x) = \frac{0,25\exp(-\frac{1}{2}(x_1 + x_2))\mathbb{I}(x_1 \geqslant 0)\mathbb{I}(x_2 \geqslant 0)}{\frac{1}{9}\mathbb{I}(x \in [0,3]^2)}$$

Рассмотрим несколько случаев:

1. $x \in [0,3]^2$. Тогда $l(x) = \frac{9}{4}\exp(-\frac{1}{2}(x_1 + x_2))$.
2. $x_i \in [0,3], x_j \notin [0,3]$. Тогда, если $x_j \geqslant 0$, то $l(x) = +\infty$.
3. $x_i, x_j \notin [0,3]$. Тогда, если $x_i, x_j \geqslant 0$, то $l(x) = +\infty$.

Таким образом,

$$l(x) = \begin{cases} \frac{9}{4}\exp(-\frac{1}{2}(x_1 + x_2)), x \in [0,3]^2 \\ +\infty, x \in [0,+\infty]^2 \backslash [0,3]^2 \end{cases}$$

$$\pi_{c,p}(x) = \begin{cases} 1, l(x) > c \\ p, l(x) = c \\ 0, l(x) < c \end{cases}$$

$$\mathbb{P}_{H_1}(l(x) > c) + p\mathbb{P}_{H_1}(l(x) = c) = \alpha$$

При $c < 0$, выражение равно 1 и решений уравнения соответствующих критерию Неймана-Пирсона не существует для заданного α.

При $c > 0$:

$$\mathbb{P}_{H_1}(l(x) > c) =$$
$$\mathbb{P}_{H_1}\left(2.25\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right)\right) > c\right) =$$
$$\mathbb{P}_{H_1}\left(l(x) = \frac{9}{4}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right)\right)\right) + P_{H_1}(l(x) = +\infty) =$$
$$= \mathbb{P}_{H_1}\left(\frac{9}{4}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right)\right) > c\right) =$$
$$= \mathbb{P}_{H_1}\left(-\left(x_1 + x_2\right) > 2\ln\left(\frac{4}{9}c\right)\right) =$$
$$= \mathbb{P}_{H_1}\left(x_1 + x_2 < \tilde{c}\right)$$

Последнее выражение геометрически означает площадь под пересечением прямой и квадрата. Так как нас интересует хоть какое то $\tilde{c}$, то ограничемся случаем, когда получившееся фигура – треугольник. То есть:

$$\mathbb{P}_{H_1}\left(x_1 + x_2 < \tilde{c}\right) = \frac{1}{2}\tilde{c}^2$$

Аналогично:

$$\mathbb{P}_{H_1}(l(x) = c) = \mathbb{P}_{H_1}\left(x_1 + x_2 = \tilde{c}\right) = 0,$$

причём $\mathbb{P}_{H_1}\left(x_1 + x_2 = \tilde{c}\right) = 0$, в силу того, что $x_1 + x_2$ распределено непрерывно.

Тогда получим:

$$\frac{1}{2}\tilde{c}^2 = \alpha \Longrightarrow \tilde{c} = 2\sqrt{\alpha}$$

p получилось произвольным, поэтому возьмём $p = 0$.
Получили,

$$\pi(x) = \begin{cases} 1, x_1 + x_2 < 2\sqrt{\alpha}, \text{или} x_1 > 3, \text{ or } x_2 > 3 \\ 0, x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{\alpha} \end{cases}$$

$$\beta(\pi) = 1 - \mathbb{E}_2 \pi(X) = 1 - \mathbb{P}_2\left(x_1 + x_2 < 2\sqrt{\alpha}\right) - \mathbb{P}_2\left(x_1 > 3\right) - \mathbb{P}_2\left(x_2 > 3\right) =$$
$$= 1 - \Gamma(2,2)_{2\sqrt{\alpha}} - \left(1 - 1 + \exp\left(-\frac{3}{2}\right)\right) - \left(1 - 1 + \exp\left(-\frac{3}{2}\right)\right) =$$
$$= 1 - 0.009 - 2 \cdot 0.223 = 0.545$$