ФИО: Медяков Даниил Олегович

Номер задачи: 53

Решение:

Для начала запишем функцию правдоподобия для обеих гипотез:

$$L_1(x) = f_{\mathcal{N}(-1,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x+1)^2}{2}\right)$$

$$L_2(x) = f_{\mathcal{N}(2,4)}(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{8}\right)$$

Теперь мы можем составить функцию отношения правдоподобия:

$$l(x) = \frac{L_2(x)}{L_1(x)} = \frac{\exp\left(-\frac{(x-2)^2}{8}\right)}{2 \cdot \exp\left(-\frac{(x+1)^2}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x+1)^2}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{1}{8} \cdot \left(3x^2 + 12x\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{3}{8} \cdot \left((x+2)^2 - 4\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{3}{8}(x+2)^2\right) \cdot e^{-3/2}$$

Из леммы Неймана-Пирсона следует, что наиболее мощный критерий с уровнем значимости $\alpha \leq \mathbb{P}_1(l(x) > c) \equiv 1$ можно искать среди критериев вида

$$\pi_{c,p}(x) = \begin{cases} 1, l(x) > c \\ p, l(x) = c \\ 0, l(x) < c. \end{cases}$$

Из условия на уровень значимости, а именно

$$\mathbb{P}_1(l(x) > c) + p \cdot \mathbb{P}_1(l(x) = c) = \alpha,$$

найдем конкретные значения $c > 0$ и $p \in [0, 1]$.

Поскольку распределение $N(-1, 1)$ абсолютно непрерывно, то $\mathbb{P}_1(l(x) = c) = 0$. p можно выбрать любым, например, $p = 0$. Условие на c определим из уравнения: $\mathbb{P}_1[l(x) > c] = \alpha$.

$$l(x) > c \Leftrightarrow \frac{\exp\left(\frac{3}{8}(x+2)^2\right)}{2} e^{-3/2} > c \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2 > \frac{8}{3} \ln\left(\frac{2c}{e^{-3/2}}\right) = R^2 > 0$$
$$x \in N(-1, 1) \Rightarrow$$
$$\mathbb{P}_1(l(x) > c) = \mathbb{P}_1\left((x+2)^2 > R^2\right) = \mathbb{P}_1(x > R - 2) + \mathbb{P}_1(x < -2 - R) = \alpha$$

Подставим выражения функций рапсределения для вычисления значения R:

$$\left(1 - \mathcal{F}_{\mathcal{N}(-1,1)}(R-2)\right) + \mathcal{F}_{\mathcal{N}(-1,1)}(-2-R) = \alpha,$$
$$\mathcal{F}_{\mathcal{N}(-1,1)}(R-2) - \mathcal{F}_{\mathcal{N}(-1,1)}(-2-R) = 1 - \alpha.$$

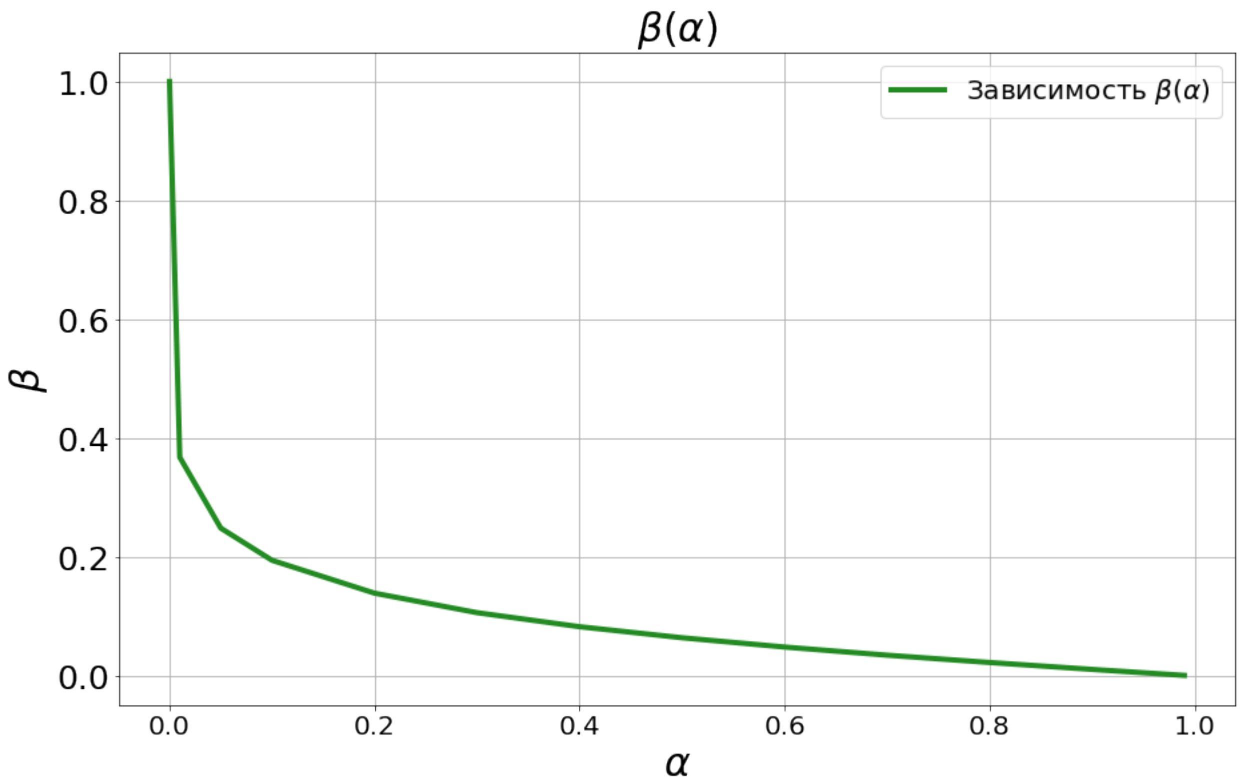
В условии задачи также просят построить зависимость ошибки второго рода от α, подсчитаем чему будет равна β :

$$\mathbb{E}_2[\pi] = 1 \cdot \mathbb{P}_2\left((x+2)^2 > R^2\right) = \mathbb{P}_2(x > R-2) + \mathbb{P}_2(x < -2 - R)$$
$$1 - \mathbb{E}_2[\pi] = 1 - \mathbb{P}_2(x > R - 2) - \mathbb{P}_2(x < -2 - R) = \beta$$
$$\Rightarrow \mathcal{F}_{N(2,4)}(R(\alpha) - 2) - \mathcal{F}_{N(2,4)}(-2 - R(\alpha)) = \beta$$

Ответ:

$$R = 2.2845,$$
$$\pi(x) \begin{cases} 1, \text{ при } x^2 > R^2 \\ 0, \text{ при } x^2 \leqslant R^2. \end{cases}$$

Также построим график зависимости $\beta(\alpha)$:



$\beta(\alpha)$
Зависимость $\beta(\alpha)$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
β
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
α