ФИО: Медяков Даниил Олегович

Номер задачи: 72

Решение:

По гипотезе H_0 все элементы выборки равномерно распределены на отрезке $[0, 2]$, по гипотезе H_1 все элементы выборки равномерно распределены на отрезке $[1, 3]$. Нахождение такого критерия π, что $\max(\alpha, \beta)$ минимально эквивалентно нахождению минимаксного решающего правила, где матрица штрафов имеет вид

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда $R_1(\pi) = \alpha, R_2(\pi) = \beta$.

По лемме Неймана-Пирсона критерий

$$\pi_{c,p} = \begin{cases} 1, l(x) > c \\ p, l(x) = c \\ 0, l(x) < c \end{cases},$$

при $c > 0, p \in [0, 1], R_1(\pi_{c,p}) = R_2(\pi_{c,p})$ определяет минимаксное решающее правило.

Функция правдоподобия:

$$l(x) = \frac{\mathbb{I}(x \in [1,3]^n)}{\mathbb{I}(x \in [0,2]^n)} = \begin{cases} 1, x \in [1,2]^n \\ 0, \exists x_i \in [0,1]; x \in [0,2]^n \\ +\infty, \exists x_i \in [2,3]; x \in [1,3]^n \\ \text{не определена, иначе} \end{cases}$$

Возьмем $c = 1$. Тогда

$\alpha = \mathbb{P}_1(l(x) > c) + p\mathbb{P}_1(l(x) = c) = p\mathbb{P}_1(\forall i \hookrightarrow x_i \in [1, 2]) = \frac{p}{2^n}$,

$\beta = \mathbb{P}_2(l(x) < c) + (1-p)\mathbb{P}_2(l(x) = c) = (1-p)\mathbb{P}_2(\forall i \hookrightarrow x_i \in [1,2]) = \frac{1-p}{2^n}$.

Из требований к лемме Неймана-Пирсона получаем $\frac{p}{2^n} = \frac{1-p}{2^n} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$.

Тогда искомый критерий:

$$\pi = \begin{cases} 1, l(x) > 1 \\ \frac{1}{2}, l(x) = 1 \\ 0, l(x) < 1 \end{cases}.$$