ФИО: Медяков Даниил Олегович

Номер задачи: 3

Решение:

Для начала найдем совместную плотность распределения $F(x, y) = X_{(1)}, X_{(n)}$. Для этого рассмотрим $\mathbb{P}(X_{(1)} < x, X_{(n)} < y) = \underbrace{\mathbb{P}(X_{(n)} < y)}_{P_1} -$

$- \underbrace{\mathbb{P}(X_{(1)} \geq x, X_{(n)} < y)}_{P_2}$.

Рассмотрим отельно вероятности P_1, P_2.

$X_{(i)} \sim \mathcal{U}[a, b] \Rightarrow P_1 = \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^n$

$X_{(i)} \sim \mathcal{U}[a, b] \Rightarrow P_2 = (F(y) - F(x))^n = \left(\frac{y-x}{b-a}\right)^n$

Теперь рассмотрим 2 случая: $x \geq y, x < y$.

x < y: $F(x, y) = P_1 - P_2 = \frac{1}{(b-a)^n}\left[(y-a)^n - (y-x)^n\right] \Rightarrow f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{n(n-1)}{(b-a)^n}(y-x)^{n-2}$.

x ≥ y: $F(x, y) = P_1 = \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^n \Rightarrow f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$

Далее, заметим, что $X_k \sim \mathcal{U}(0, 1) \Rightarrow X_{(k)} \sim \mathcal{B}(k, n-k+1)$, где $\mathcal{B}-$Beta-распределение. Математическое ожидание и дисперсию Beta-распределения мы считаем известными:

$\xi \sim \mathcal{B}(\alpha, \beta) \Rightarrow \mathbb{E}[\xi] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \mathbb{D}[\xi] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

Далее, пользуясь линейностью и переходя к случайной величине на отрезке $[0, 1]$, получаем: $\frac{X_{(1)}-a}{b-a} \sim \mathcal{B}(1, n), \frac{X_{(n)}-a}{b-a} \sim \mathcal{B}(n, 1)$.

Отсюда сразу находим искомые математические ожидания и дисперсии:

$\mathbb{E}[X_{(1)}] = a + \frac{b-a}{n+1}$

$\mathbb{E}[X_{(n)}] = a + \frac{n(b-a)}{n+1}$

$\mathbb{D}[X_{(1)}] = \frac{n(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$

$\mathbb{D}[X_{(n)}] = \frac{n(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$

Перейдем к нахождению коэффициента корреляции.

$\mathbb{E}[X_{(1)}X_{(n)}] = \int\limits_a^b dx \int\limits_a^b x \cdot y \cdot f(x,y) dy =$

$= \int\limits_a^b dx \int\limits_a^b x{\cdot}y{\cdot}(y-x)^{n-2}{\cdot}\frac{n(n-1)}{(b-a)^n} dy \underset{x<y,\text{по частям}}{=} \int\limits_a^b \left[\frac{n(b-x)^{n-1}xb}{(b-a)^n} - \int\limits_x^b \frac{n(y-x)^{n-1}x}{(b-a)^n} dy \right] dx =$

$= \int\limits_a^b \frac{n(b-x)^{n-1}xb}{(b-a)^n} dx - \int\limits_a^b \frac{(b-x)^n x}{(b-a)^n} dx \underset{\text{по частям}}{=} ab + \frac{b(b-a)}{n+1} - \frac{a(b-a)}{n+1} - \frac{(b-a)^2}{(n+2)(n+1)} =$

$= ab + \frac{(b-a)^2}{n+2}$

Тогда $cov(X_{(1)}, X_{(n)}) = ab + \frac{(b-a)^2}{n+2} - (a + \frac{b-a}{n+1})(a + \frac{n(b-a)}{n+1}) = \frac{(b-a)^2}{(n+2)(n+1)^2}$.

Итого: $r = \frac{cov(X_{(1)}, X_{(n)})}{\sqrt{D[X_{(1)}]}\sqrt{D[X_{(n)}]}} = \frac{(b-a)^2}{(n+2)(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^2(n+2)}{(b-a)^2 n} = \frac{1}{n}$.