

ФИО: Медяков Даниил Олегович

Номер задачи: 19

Решение:

$l$  - истинная длина стержня, тогда, с учетом ошибки, измеренная длина имеет распределение  $\mathcal{N}(l, kl)$ . Тогда функция правдоподобия

$$L(x, l) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi kl}} \right)^n \cdot \exp \left( -\frac{1}{2kl} \sum_{i=1}^n (x_i - l)^2 \right)$$

Минимизация  $L$  эквивалентна минимизации  $\ln L$  из-за монотонности логарифма и  $L \geq 0$ .

$$\ln L(x, l) = -\frac{n}{2} \cdot \ln(2\pi kl) - \frac{1}{2kl} \sum_{i=1}^n (x_i - l)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial l} &= -\frac{n}{2} \frac{2\pi k}{2\pi kl} - (-1) \frac{1}{2kl^2} \sum_{i=1}^n (x_i - l)^2 - \frac{1}{2kl} (-2) \sum_{i=1}^n (x_i - l) = 0 \\ &= -\frac{n}{2l} + \frac{1}{2kl^2} \sum_{i=1}^n (x_i - l)^2 + \frac{1}{kl} \sum_{i=1}^n (x_i - l) = 0 \\ &= -nkl + \sum_{i=1}^n (x_i - l)^2 + 2l \sum_{i=1}^n (x_i - l) = 0 \\ &= -nkl + \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i l + l^2) + \sum_{i=1}^n (2lx_i - 2l^2) = 0 \\ &= -nkl + \sum_{i=1}^n (x_i^2 - l^2) = 0; -nkl - nl^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0; l = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4x^2}}{2} \end{aligned}$$

Поскольку  $l$  - длина стержня, то нас интересует только положительный корень. Покажем, что эта точка является глобальным минимумом. Для этого посмотрим на знак второй производной.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 l} &= \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{-nkl - nl^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2}{2kl^2} \right) = \frac{-nk - 2nl}{2kl^2} + \\ &+ \frac{-nkl - 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - nl^2}{2kl^3} = \frac{1}{2kl^3} \left( -nkl - 2nl^2 + 2nkl - 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2nl^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2kl^3} \left( nkl - 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)\end{aligned}$$

Выпуклости вниз на  $l \in (0, +\infty)$  будет достаточно для того, чтобы найденная точка являлась минимумом из-за гладкости  $\ln L$ . То есть,

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 l} < 0 \Leftrightarrow \frac{kl}{2} < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \overline{x^2}.$$

Получили, что при выполнении условия  $kl < 2\overline{x^2}$  ОМП:

$$l = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4\overline{x^2}}}{2}.$$