ФИО: Медяков Даниил Олегович

Номер задачи: 19

Решение:

l - истинная длина стержня, тогда, с учетом ошибки, измеренная длина имеет распределение $\mathcal{N}(l, kl)$. Тогда функция правдоподобия

$$L(x,l) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi kl}}\right)^n \cdot \exp\left(-\frac{1}{2kl}\sum_{i=1}^{n}(x_i - l)^2\right)$$

Максимизация L эквивалентна максимизации $\ln L$ из-за монотонности логарифма и $L \geqslant 0$.

$$\ln L(x,l) = -\frac{n}{2}\cdot\ln(2\pi kl) - \frac{1}{2kl}\sum_{i=1}^{n}(x_i - l)^2$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial l} = -\frac{n}{2}\frac{2\pi k}{2\pi kl} - (-1)\frac{1}{2kl^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - l)^2 - \frac{1}{2kl}(-2)\sum_{i=1}^{n}(x_i - l) = 0$$

$$-\frac{n}{2l} + \frac{1}{2kl^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - l)^2 + \frac{1}{kl}\sum_{i=1}^{n}(x_i - l) = 0$$

$$-nkl + \sum_{i=1}^{n}(x_i - l)^2 + 2l\sum_{i=1}^{n}(x_i - l) = 0$$

$$-nkl + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i l - l^2) + \sum_{i=1}^{n}(2lx_i - 2l^2) = 0$$

$$-nkl + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - l^2) = 0; -nkl - nl^2 + \sum_{i=1}^{n}x_i^2 = 0; l = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4\overline{x^2}}}{2}$$

Поскольку l - длина стержня, то нас интересует только положительный корень. Покажем, что эта точка является глобальным максимумом. Для этого посмотрим на знак второй производной.

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 l} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{-nkl - nl^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{2kl^2}\right) = \frac{-nk-2nl}{2kl^2} +$$

$$+ \frac{-nkl - 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - nl^2}{2kl^3} = \frac{1}{2kl^3}\left(-nkl - 2nl^2 + 2nkl - 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2nl^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2kl^3}\left(nkl - 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

Выпуклости на $l \in (0, +\infty)$ будет достаточно для того, чтобы найденная точка являлась максимумом из-за гладкости $\ln L$. То есть,

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 l} < 0 \Leftrightarrow \frac{kl}{2} < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \overline{x^2}.$$

Получили, что при выполнении условия $kl < 2\overline{x^2}$ ОМП:

$$l = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4\overline{x^2}}}{2}.$$