



清华大学

综合论文训练

拓扑图像语言与量子纠错码

系 别： 数学与应用数学系

专 业： 数学与应用数学

姓 名： 吴 嘉 骏

指导教师： 魏 朝 晖 助理教授

二〇二五年七月

摘 要

量子纠错 (Quantum Error Correction, 简称 QEC) 是量子计算中一个必要且具有挑战性的部分。然而, 由于多种原因, 量子计算中的纠错比经典计算中的纠错复杂得多。设计高效的量子纠错码对于在物理器件中实现实用化的量子计算至关重要。本篇文章引入拓扑量子场论 (Topological Quantum Field Theory, 简称 TQFT) 视角, 使用一种将量子计算过程图像化的运算语言 Quon 来指导设计更有效的量子纠错码。考虑到量子计算中的噪声是复杂的, 有不同的噪声信道, 固定的量子纠错码不能同时在所有错误信道有同样优秀的纠错效果, 我们基于一个固定的量子纠错码的编码电路上增加带有角度参数的旋转门, 使得其成为一个含参量子纠错码。而使用 Quon 语言则可以给出特定设计的含参图量子纠错码 (Variational Graphical Quantum Error Correction, 简称 VGQEC)。实验模拟数据表明, 通过 Quon 语言指导给出的含参图量子纠错码在应对不同错误信道时保真度比原本的固定量子纠错码有明显改善。

关键词: 量子计算; 量子纠错; 拓扑图象语言; Quon 语言; 含参图量子纠错码

Abstract

Quantum error correction (QEC) is an essential but challenging component of quantum computing. For various reasons, error correction in the quantum regime is inherently more complicated and difficult than in classical computing. Designing effective quantum error correction codes is therefore crucial for realizing practical quantum computation on physical machine. In this paper, we introduce a topological quantum field theory (TQFT) perspective, transform the algebraic calculation of quantum computation into the diagram composition of a pictorial topological language Quon. We will use this Quon language to guide us to design better QEC. Since noise in quantum devices is complex and arises from multiple error channels, a fixed QEC code cannot perform optimally across all channels simultaneously. To address this, we augment the encoding circuit of a fixed QEC code with parameterized rotation gates, yielding a variational quantum error-correcting code. Using Quon, we then construct a tailored variational graphical quantum error correction (VGQEC) scheme. Simulation results demonstrate that VGQEC codes designed via the Quon language achieve significantly higher fidelity across diverse noise channels than the original fixed codes.

Keywords: Quantum computation; Quantum error correction; Topological pictorial language; Quon; VGQEC

目 录

第 1 章 前 言.....	1
第 2 章 量子纠错介绍.....	3
2.1 量子计算中的量子比特	3
2.2 作用在量子比特上的算符	3
2.3 纠错	3
2.4 量子纠错码例子 (3 比特重复码)	4
2.5 拓扑量子纠错码 (环面码).....	5
2.5.1 环面码的稳定化子	6
2.5.2 纠错方法	7
第 3 章 图语言的代数运算.....	8
3.1 平面代数 ^[9]	8
3.2 准平面代数 ^[2]	9
3.3 仲费米子代数 ^[2]	11
3.4 PAPP 模型 (Parafermion planar para algebra, 仲费米子平面代数) ^[2]	12
3.4.1 PAPP 中的编辫关系与运算	15
第 4 章 Quon 语言 ^[1]	18
4.1 Quon (qudit).....	18
4.2 量子算符	18
4.3 2 维系统中的编辫关系与合法操作	19
4.4 COPY gate.....	19
4.5 贝尔态	20
第 5 章 量子纠错码对应的 Quon 图.....	22
5.1 3 比特重复码	22
5.2 Shor [9,1,3] 纠错码	23
5.3 K_5 完全图	23
5.4 拓扑量子纠错码的 Quon 图	24
第 6 章 含参图量子纠错码 VGQEC	26
6.1 含参量子纠错码	26
6.2 由 Quon 图给出的含参量子纠错码	26
6.3 3 比特 VGQEC ^[5]	28

6.4 5 比特 VGQEC	29
6.5 7 比特 VGQEC	29
第 7 章 VGQEC 纠错码在错误信道中的保真度模拟实验数据	33
7.1 3, 5 比特 VGQEC.....	33
7.2 7 比特 Steane VGQEC	36
第 8 章 结 论.....	39
第 9 章 后 续.....	40
参考文献.....	42
附录 A 外文资料的调研阅读报告	43
致 谢.....	47

第 1 章 前 言

量子误差校正是实现量子计算过程中一项既困难且必须的工作。在实际的量子计算硬件中，量子比特会受到多种噪声的影响，例如去极化 (depolarizing)、去相干 (dephasing)、振幅阻尼 (amplitude damping) 以及热弛豫 (thermal relaxation) 等。与经典计算中的错误纠正相比，量子错误纠正是一个非平凡且困难的问题：经典计算中的误差仅表现为离散的比特翻转，而量子计算中的误差则是连续且更为复杂，多样的。量子不可克隆定理指出，无法像经典计算纠错一样简单地通过对量子比特进行复制并运用多数法则来纠错；同时，在量子计算中，测量会导致叠加态坍塌，因此量子纠错码不能直接通过测量来纠错，因为需要保护逻辑比特的信息不丢失。针对不同噪声信道设计高效的量子纠错码是量子计算研究中的关键问题。由于噪声信道种类繁多，固定的纠错码往往难以在所有情形下都具有良好性能，这就催生了含参数量子纠错码 (Variational Quantum Error Correction) 的理念：在编码电路中引入可调角度参数的旋转门，将旋转角度作为参数进行优化。然而，旋转门的添加方法非常多，本论文将引入一种拓扑视角的纠错码设计方法——通过量子化图对纠错码进行表示，并据此为旋转门的选取提供指导。

为了图形化地呈现量子计算，我们引入了一种称为 Quon^[1] 的拓扑量子场论语言。Quon 语言在量子计算中的定义来源于 4-弦仲费米子平面代数模型 (4-string-parafermion para planar algebra model, PAPP)^[2] 的结构。我们留意到 X、Y、Z 这三种泡利矩阵之间的乘法规则与仲费米子代数的乘法具有相似的性质，于是我们可以引入仲费米子平面代数模型来把量子计算过程以图像运算来表现^[3]。在 Quon 语言中，比特与量子门的运算被转化为弦的组合，并满足特定的同痕 (isotopy) 及纽结理论 (knot theory) 的运算规则。

我们从 Quon 语言的结构出发，构造了表示量子纠错码编码态的 Quon 图 (4-正则图)^[4]。将纠错码编码的量子电路的运算代入到 Quon 语言中弦的复合运算，可得到代表编码电路运算的 Quon 图表示。进一步将该 Quon 图投影到二维平面后，便获得一个 4-正则图，其边关系给出了量子纠错码的稳定子集合，称此图为一个量子纠错码的 Quon 图。

通过研究纠错码的 Quon 图，可以构建含参数图量子纠错码 (Variational Graphical Quantum Error Correction code, VGQEC)^[5]。在 Quon 语言中弦的编辫 (交叉) 结构上，我们引入了额外的参数；将该参数添加于表示纠错码的 Quon 图的编辫结构，相当于在该纠错码的量子电路中添加特定的旋转门。如此一来，便将原本的固

定纠错码转化成含参数纠错码。模拟实验结果表明，基于 Quon 图所建议的旋转门添加方案在各类误差信道下均表现出比原本固定纠错码更优异的性能。

在第 6 节中，我们分别讨论了基于 3 比特重复码、5 比特 [5,1,3] 完美码和 7 比特 [7,1,3]Steane 码的 VGQEC。本篇文章中我的工作是给出了 7 比特 [7,1,3]Steane 码的 Quon 图，并且根据此 Quon 图选取了特定的旋转门添加在编码电路上，从而设计出 7 比特 VGQEC。模拟实验的数据显示，我设计的此 7 比特 VGQEC 在去极化 (depolarizing)、振幅阻尼 (amplitude damping) 以及热弛豫 (thermal relaxation) 这三个错误信道中的保真度表现比原本的 7 比特 [7,1,3]Steane 码有显著改善。

第 2 章 量子纠错介绍

2.1 量子计算中的量子比特

定义 2.1: (量子比特) 在经典计算中, 一个比特为 $\alpha \in \{0, 1\}$ 。对于量子计算中的一个量子比特 (q-bit), 其码空间是二维复希尔伯特空间。(即是 $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$) 我们标记量子比特为如下: $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

例如, 一个量子比特 (q-bit) 可以表示为: $|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, 其中 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 。对于 n 个量子比特, 其码空间为 $\mathbb{H}^{\otimes n}$, 维数为 2^n 。例如 $\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |100\rangle, |011\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\}$ 是 3 个量子比特的码空间的基。

2.2 作用在量子比特上的算符

在量子力学公理中, 闭合量子系统的演化由幺正变换描述。因此, 我们可以把作用在量子比特 (q-bit) 的操作门描写为一个幺正矩阵作用于该量子态向量, 即是 $U|\varphi\rangle$ 。(U 是幺正矩阵) 以下是三个泡利算符 X,Y,Z 的矩阵: $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 。

2.3 纠错

在物理组件中, 操作过程中可能发生误差。对于经典计算而言, 误差即比特翻转。例如一个 0 比特错误翻转为 1 比特。为了进行纠错, 我们可以将一个逻辑比特编码为三个物理比特。即是将 0 比特编码为 000, 1 比特编码为 111。当在物理比特中发生错误比特翻转, 则可以通过多数法则来修正。

表 2.1 经典纠错

物理比特	纠错后物理比特	对应的逻辑比特
000	000	0
010	000	0
001	000	0
100	000	0
111	111	1
110	111	1
101	111	1
011	111	1

当少于等于一个物理比特发生错误时，我们能正确纠错。但是，这个多数法则的纠错方法并不能在量子计算中使用，因为不存在一个能复制任意量子比特的系统。使用线性代数语言描述则是不存在一个可以复制任意向量的线性变换。

定理 2.1 (量子不可克隆原理): 不存在一个幺正矩阵可以复制任意位置量子态。即是不存在一个幺正矩阵 U 使得 \forall 量子态 $|\varphi\rangle$, 有 $U |\varphi\rangle |0\rangle = |\varphi\rangle |\varphi\rangle$ 。

证明 若有符合条件的幺正矩阵 U , $U(|1\rangle + |0\rangle)|0\rangle = |11\rangle + |10\rangle + |01\rangle + |10\rangle \neq |11\rangle + |00\rangle = U |1\rangle |0\rangle + U |0\rangle |0\rangle$, 矛盾。 ■

直接复制逻辑比特然后使用多数法则来纠错的编码方法不能在量子计算领域中使用。我们需要为了量子计算设计特定的量子纠错码。

2.4 量子纠错码例子 (3 比特重复码)

三比特重复码^[6]最简单的一个量子纠错码的例子，他可以检测并修复发生在一个量子比特上的泡利 X 错误（即是比特翻转）。此纠错码仅作为纠错例子介绍，实际上其性能并不足以成为容错量子计算的纠错码候选，因为它只能纠正泡利 X 这一种错误。由于量子不可克隆原理，在量子计算中，虽然我们不能把 $|\varphi\rangle$ 编码成 $|\varphi\varphi\varphi\rangle$ 我们可以将 $|\varphi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ 编码成 $\alpha |000\rangle + \beta |111\rangle$ 。编码的量子电路为作用 $CNOT$ 门两次。

考虑 σ_x 错误. 这个错误会导致比特翻转，即是 0 比特变为 1 比特。我们使用如下稳定化子来检测错误。

$$\sigma_z^{1,2} = \sigma_z^1 \sigma_z^2, \quad \sigma_z^{2,3} = \sigma_z^2 \sigma_z^3.$$

稳定化子的意义在于当物理比特处于无错误的状态时，其在物理比特上作用

时是恒等变换。所以当稳定化子作用在物理比特上更改了物理比特状态时，便代表侦测到错误发生。当没有误差发生时，上述检测算符的特征值为 +1。当发生一次 σ_x 误差时，该误差将改变上述检测算符的特征值。

表 2.2 3 比特重复码错误对应的稳定化子

发生泡利 X 错误的比特	发生特征值改变的稳定化子
σ_x^1	$\sigma_z^{1,2}$
σ_x^2	$\sigma_z^{1,2}, \sigma_z^{2,3}$
σ_x^3	$\sigma_z^{2,3}$

所以由以上稳定化子，我们可以侦测在哪个比特上发生了 σ_x 错误并且进行纠错。

下一部分我们将介绍另一种量子纠错码环面码 (Toric code)，这是一种拓扑量子纠错码，能够同时纠正三种泡利误差。

2.5 拓扑量子纠错码 (环面码)

定义 2.2: 我们称一个量子纠错码为 $[n,k,d]$ 纠错码，代表着此纠错码以 n 个物理比特编码 k 个逻辑比特。而 d 则代表可以检测到任意少于 $d - 1$ 个泡利错误发生的错误，可以正确纠正任意少于 $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ 个泡利错误发生的错误。

这章节介绍一种特殊类型的量子纠错码——拓扑码^[7]。与其他著名的纠错码 (如 $[5,1,3]$ 完美码或 $[7,1,3]$ Steane 码) 不同，拓扑码的参数 $[n,k,d]$ 并非固定。拓扑码的物理比特可以被视为坐落在诸如莫比乌斯带 (Möbius strip)、环面 (torus)、克莱因瓶 (Klein bottle) 等拓扑空间中。

典型的拓扑码是环面码 (toric code)^[8]。它是一个 $[2n^2, 2, n]$ 码，将 2 个逻辑比特编码到 $2n^2$ 个物理比特中。之所以称之为环面码，是因为这些物理比特可以被看作编码在环面表面。环面码的基本思想是将 2 个逻辑比特编码到坐落于环面的 $2n^2$ 个物理比特中。我们考虑在一个亏格为 1 的环面上构造一个 $n \times n$ 格子，其中格子的边为物理比特，该格子具有两个不可缩的圈。选择环面的原因在于，每条不可收缩回圈都可帮助我们定义一个取值为 ± 1 的拓扑不变量，该不变量即该不可缩回的圈的圈数的奇偶性。这便为物理比特空间 (维度为 $2n^2$) 与逻辑比特空间 (维度为 2) 之间建立了一个群同态映射。

定义 2.3 (物理比特空间): 我们考虑一个 $n \times n$ 个格子的晶格，其中上下边粘合，左右边粘合，从而构成一个环面。令每条边对应一个量子比特 (q-bit)，因此该系统形成一个包含 $2n^2$ 个量子比特的空间。定义 $|1\rangle$ 为有色边， $|0\rangle$ 为无色边。

定义 2.4 (编码): 我们将逻辑比特 $|00\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |11\rangle$ 编码为在环面中的物理比特 $|\phi\rangle$ 如下:

$$|00\rangle \mapsto \sum |\phi\rangle.$$

$|\phi\rangle$ 为其染色边仅构成闭合回路 (在格子上不存在开放路径), 并且在环面的第一和第二 S^1 上所含的不可缩回路数均为偶数的所有量子态的平均和。

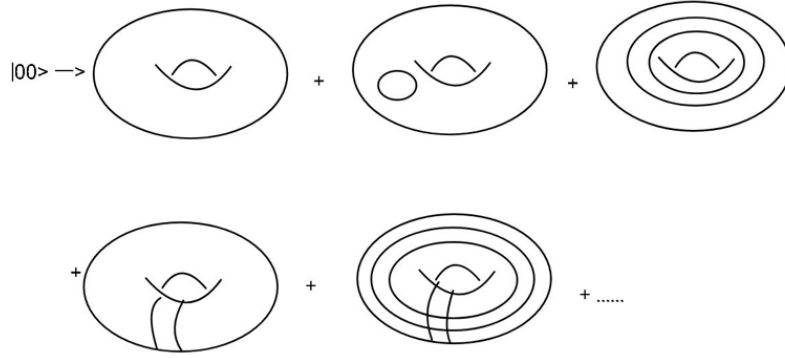


图 2.1 $|00\rangle$ 的编码态

对于其余三个逻辑量子比特, 类似地:

$|01\rangle \mapsto$ 第一 S^1 上环数偶数且第二 S^1 上环数奇数的态之平均和。

$|10\rangle \mapsto$ 第一 S^1 环数奇数且第二 S^1 上环数偶数的态之平均和。

$|11\rangle \mapsto$ 第一和第二 S^1 上环数奇数的回路之平均和。

2.5.1 环面码的稳定化子

定义 2.5: 在每个顶点 a 上定义顶点算符 V_a , 该算符通过对与顶点 a 相邻的四条边同时乘以 ± 1 来作用于这些边: 当这四条边中被着色的边数为偶数时, $V_a = +1$; 当这四条边中被着色的边数为奇数时, $V_a = -1$ 。即是作用 σ_z 在顶点相邻的四边。

定义 2.6: 在每个方块 b 上定义方块算符 P_b , 该算符在与该方块相邻的四条边上施加 σ_x 操作, 即翻转这四条边的着色状态。

命题 2.1: 一个没有发生错误的, 由逻辑比特按照上述编码规则编码成的物理比特时, 上述算符作用时不变, 即上述算符为此 Toric 编码的稳定化子。

证明 由于着色边仅构成封闭回路且不存在开放路径, 每个顶点相邻的被着色边数均为偶数, 因此每个 V_a 的特征均为 $+1$, 即不改变物理比特量子态。由于在方格上施加 σ_x 操作不会改变不可收缩回路的奇偶性 (因为方格构成可收缩回路), 故 P_b 的作用不会改变所有回路的总奇偶性, 同样即不改变物理比特量子态。综上所述, 所有方格和顶点算符构成了 Toric 码的稳定化子。 ■

我们将物理编码的无错误状态定义为上述所有顶点算符 V_a 与方块算符 P_b 的特征值均为 +1 的量子态。一旦在这些算符中观测到任意特征值为 -1，即代表发生了错误，然后执行错误纠正。

2.5.2 纠错方法

命题 2.2： 顶点算符 V_a 可用于检测和纠正 σ_x 误差。 σ_x 操作会将该操作所在边对应的两个顶点算符的特征值变为 -1。

对于一个闭的可收缩回路中的所有点进行 σ_x 操作，物理码仍保持正确态，且不会改变不可收缩回路数的奇偶性。对于一个闭的不可收缩回路中的所有点进行 σ_x 操作，物理码仍保持正确态，但会改变不可收缩回路数的奇偶性。

以下分四种情况讨论：

情况 1： σ_x 错误形成一条开路径。此时路径的起点和终点对应的两个顶点算符 V_a 特征值为 -1。我们寻找连接起点和终点的最短路径，并沿该路径再次施加 σ_x 操作以纠正误差，只要纠正后所形成的回路不是不可收缩回路（例如误差路径长度小于 $n/2$ ），此过程即可成功恢复正确的逻辑态。

情况 2： σ_x 误差形成一个封闭的可收缩回路。在此情形下，无需对物理比特做任何操作，解码结果仍然正确。

情况 3： σ_x 误差形成偶数个封闭的不可收缩回路。同情况 2，无需操作，解码结果正确。

情况 4： σ_x 误差形成奇数个封闭的不可收缩回路。此时无法通过顶点算符检测到任何 -1 特征值，但解码结果会错误——错误纠正失败。

命题 2.3： 方块算符 P_b 可用于检测和纠正 σ_z 错误。

σ_z 操作会使位于该边两侧的两个方块算符的特征值变为 -1。我们考虑对偶格——将边映射为顶点、顶点映射为边——则可将此情形归约为上述顶点算符与 σ_x 误差的情形。四种情况与 σ_x 误差和顶点算符的讨论完全相同。

综上所述，只要连续的错误路径不过长，Toric 纠错码就能正确地纠正任意泡利算符错误。（可以通过利用关系 $\sigma_z\sigma_x = i\sigma_y$ 来纠正 σ_y 错误。）

第 3 章 图语言的代数运算

在本篇文章中，我们需要引入一个用图像来表达量子计算的 TQFT 语言 Quon，以其语言中的图来进行量子计算。最终通过将纠错码以 Quon 中的图来表示，然后以纠错码的 Quon 图来指导如何优化量子纠错码。本章节我们将介绍以图像运算的语言 Quon 的前置模型，如平面代数^[9]，仲费米子代数的运算规则。使得我们了解作为拓扑图像计算语言的 Quon 的运算法则和图对应的代数意义。

3.1 平面代数^[9]

定义 3.1 (带色平面缠结)： 一个平面缠结 T 的信息包含：

1. 一个（输出）圆盘 $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ ；
2. 一组有限的不相交（输入）圆盘 $\{D_i\}_{i>1}$ ，其中 $D_i \subset \mathbb{R}^2$ 且位于 D_0 内部；
3. 每个圆盘边界上均有偶数个标记点；
4. 在 D_0 内的不相交弦须满足以下规则：
 - (a) 弦构成闭合曲线（环）；或
 - (b) 弦为光滑曲线，其两个端点分别位于圆盘边界上的两个不同标记点；
5. 对于每个输入圆盘 D_i ，圆盘边界上的标记点与连接这些标记点的弦在 D_i 外部区域将边界分割为若干弧段，从中选取一段并标记为“*”；
6. 对于输出圆盘 D_0 ，同理：弦与标记点在内部区域将其分割为若干弧段，选取一段并标记为“*”；
7. 对于 $D_0 \setminus \bigcup_i D_i$ 中的每个闭合子区域，将其标记为带色或不带色，且任意相邻两区域的状态必须不同；
8. 为每个圆盘标注 (n_i, ε_i) ：其边界上有 $2n_i$ 个标记点。当“*”所在区域为不带色区域时，取 $\varepsilon_i = -$ ；若所在区域为带色区域，则取 $\varepsilon_i = +$ ；
9. 圆圈参数 δ ：在缠结图中，任何可缩环路均可替换为一个复数 $\delta \in \mathbb{C}$ 的系数。

下图是一个平面缠结的例子：

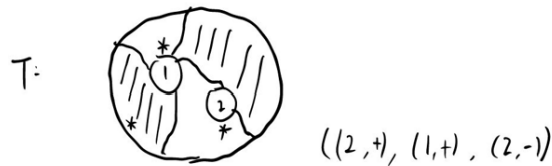


图 3.1 平面缠结例子

平面缠结在同痕变换下等价。

定义 3.2 (平面缠结的乘法规则): 对于两个平面缠结 T_1 与 T_2 , 若 T_2 的输出圆盘在标记点、带色状态及 “*” 所在边界弧段位置等数据上, 与 T_1 的某一输入圆盘 D_i 完全一致, 则可通过将 T_2 插入到 D_i 中来定义复合缠结 $T_1 \circ T_2$:

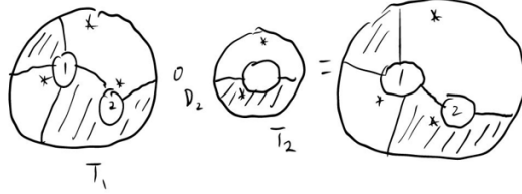


图 3.2 平面缠结的复合例子

将平面缠结视为算筹, 则定义平面代数为平面缠结的表示。

定义 3.3 (带色平面代数): 将平面缠结视为算筹, 则定义平面代数为平面缠结的表示。

1. 一族向量空间 $\{P_n^\pm\}_{n \geq 0}$;
2. 对于每个平面缠结 T , 若其具有 k 个输入圆盘, 标记为:

$$(n_1, \varepsilon_1), \dots, (n_k, \varepsilon_k),$$

以及一个输出圆盘标记为 (n_0, ε_0) , 则存在对应的多重线性变换:

$$Z_T : P_{n_1}^{\varepsilon_1} \otimes \dots \otimes P_{n_k}^{\varepsilon_k} \longrightarrow P_{n_0}^{\varepsilon_0},$$

并满足表示的运算符合交换规则:

$$Z_{T_1 \circ T_2} = Z_{T_1} \circ Z_{T_2}.$$

3.2 准平面代数^[2]

准平面代数是平面代数的推广, 具有附加的信息。

在准平面代数中, 缠结中的圆盘按 Y 轴有序排列。缠结在准同痕 (para-isotopy) 下等价, 准同痕不允许改变圆盘在 Y 轴上的顺序。另一项新增的数据是 grading。对于固定的正整数 N , 考虑一个群 \mathbb{Z}_N 和二元特征函数 $\chi, q = e^{2\pi i/N}$:

$$\chi : \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (i, j) \mapsto q^{ij}.$$

\mathbb{Z}_N 和 χ 可以是任意阿贝尔群与二元特征, 在量子计算的应用中, 我们选择 \mathbb{Z}_N , 其中 $i \in \mathbb{Z}_N$ 表示 “电荷”。

定义 3.4 (准平面缠结): 在平面缠结的定义上, 每个区域增加加上电荷 $m \in \mathbb{Z}_N$ 的信息。

在同样保持表示的交换复合运算规则的同时，以下是准平面代数上的一些新结构：

1. (grading) 表示的线性空间：

$$P_n^\pm := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_N} P_{n,i}^\pm .$$

带电荷缠结对应的多重线性变换：

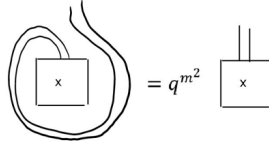
$$Z_T : P_{n_1, i_1}^{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes P_{n_k, i_k}^{\varepsilon_k} \longrightarrow P_{n_0, i_0}^{\varepsilon_0} .$$

2. (旋转) 将一个带电荷 m 的圆盘旋转 2π 等价于乘一个相位系数。

$$q^m = e^{2\pi i m / N} .$$

令 x 的 grading 为 m ：

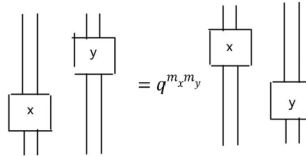
$$\rho_{2\pi}(x) = q^m x .$$



而旋转 $\frac{\pi}{2}$ 代表着傅里叶变换。

3. (准同痕) 在准平面代数中，圆盘在 Y 轴按序排列。与平面代数不一样，更改圆盘的 Y 轴排列顺序会产生相位变化。令 X, Y 带电荷 m_X, m_Y ，则改变他们的 Y 轴排序会产生以下的相位变化：

$$X \otimes_+ Y = q^{m_X m_Y} X \otimes_- Y .$$



4. (共轭，垂直翻转) $*$ -运算对应共轭操作，在图的运算中定义为将图沿垂直方向反射；同时代表着取相反电荷。

$$(X^{(m)})^* = X^{(-m)} .$$

5. (环的相位系数) 对于每个 grading $m \in \mathbb{Z}_N$ ，存在一个常数 $\delta_m \in \mathbb{C}$ ；任何带电荷为 m 的环路均可等价于乘以相位系数 δ_m 。

$$\text{X,m} = \delta_m$$

3.3 仲费米子代数^[2]

对于拓扑量子计算，我们考虑非阿贝尔任意子（例如马约拉纳费米子）。仲费米子的编辫能够模拟量子计算门，尤其是同时作用于多个量子比特上并产生纠缠的。仲费米子代数给出了这些任意子的操作规则。同时泡利矩阵的乘法复合规律符合仲费米子代数的性质。我们可以把泡利矩阵视为仲费米子代数。所以引入仲费米子代数对我们表示量子计算非常重要。

定义 3.5: PF_n^N 是一个有 n 个生成元的仲费米子代数， Z_N -graded。

PF_n^N 的生成元集合为：

$$\psi_m^k, \quad 1 \leq m \leq n, \quad k \in Z_N, \quad \psi_m^N = 1, \quad q = e^{2\pi i/N},$$

$$\zeta = \{ e^{\pi i/N} \text{ } N \text{ 是偶数}; -e^{\pi i/N} \text{ } N \text{ 是奇数} \}.$$

定义 3.6 (运算规则):

1. 准同痕:

仲费米子的乘法是非交换的。生成元之间的乘法关系如下，改变乘法顺序会产生一个相位差。

$$\psi_i^a \psi_j^b = q^{ab} \psi_j^b \psi_i^a, \quad \text{for } i < j.$$

2. 共轭:

一个生成元的共轭定义为电荷取负值。

$$(\psi_i^m)^* = \psi_i^{-m}.$$

以上的运算规则定义与量子计算中的泡利矩阵吻合，这正是我们需要引入仲费米子的原因，因为我们在 Quon 语言中希望以此来定义量子运算。

3.4 PAPP 模型 (Parafermion planar para algebra, 仲费米子平面代数)^[2]

在引入准平面代数和仲费米子代数之后，我们接着通过一种特定的准平面代数对仲费米子代数进行图示化呈现。我们之所以要研究 PAPP 模型的定义和运算法则，是因为本篇文章使用来描述量子计算的拓扑图像语言 Quon 正是基于 PAPP 模型。其中量子计算中的泡利矩阵被视为仲费米子，然后拓扑图像的运算规则则是基于 PAPP 的弦图运算规则。

对于一个 N -grading 的仲费米子代数，我们考虑具有如下环值常数的准平面代数 P ：

$$\delta_m := \begin{cases} \sqrt{N}, & m = N, \\ 0, & m \neq N. \end{cases}$$

并满足以下的等价关系：

$$\forall x \in P_m, \quad (\text{tr}(x y) = 0 \Rightarrow x = 0).$$

$$c_i^m = \left| \begin{array}{c} \cdots m \cdots \\ \text{i th} \end{array} \right|.$$

定义 3.7：

在有 n 个生成元的仲费米子代数中，带有 m 电荷的第 i 个生成元在图像语言 PAPP 中表示为 n 条直线，其中第 i 条直线带有 m 电荷。

定义 3.8 (乘法)：PAPP 的乘法复合规则中， AB 是将图 A 从下方拼到图 B 上。注意在 3.2 准平面代数章节中提到过，这个复合是不交换的，因为不同的弦上的电荷是有 Y 轴排序的， A 拼在 B 下面和 B 拼在 A 下面并不是相等的图。而若果在同一条弦上有两个电荷相邻，且他们的 Y 轴之间没有其他弦有电荷，则他们的电荷量可以相加。图的运算如下：

$$c_i^a c_i^b = \left| \begin{array}{c} \cdots b \cdots \\ a \\ \text{i th} \end{array} \right|.$$

$$c_i^a c_j^b = \left| \begin{array}{c} \cdots b \cdots \\ \cdots a \cdots \\ \text{i th} \quad \text{j th} \end{array} \right|.$$

定义 3.9 (环的常数，迹)：如同在准平面代数的定义，环等于一个相位系数。求 PAPP 中一个元素的迹则是将他的上下端连起来变成一个闭环。

$$\text{Tr}(C_i^a) := \begin{cases} 0 & a \neq N, \\ \sqrt{N} & a = N. \end{cases}$$

$$\bigcirc = \sqrt{N} \quad k \bigcirc = 0 \quad k \neq 0$$

正则化迹: $\text{tr}(x) := \frac{1}{\sqrt{N}^m} \text{Tr}(x)$ 。

定义 3.10 (准同痕): 在复合定义的部分提到, 复合是不交换的因为有 Y 轴序。所以 PAPP 的弦图只满足准同痕不变 (在同痕的基础上额外需要不改变 Y 轴序)。而交换两个在 Y 轴上相邻, 在不同弦上的电荷则会产生一个相位系数。规则如下:

$$C_i^a C_j^b = q^{ab} C_i^b C_j^a \quad (i < j),$$

$$\begin{array}{c} | \\ a \end{array} \begin{array}{c} | \\ b \end{array} = q^{ab} \begin{array}{c} | \\ a \end{array} \begin{array}{c} | \\ b \end{array}$$

定义 3.11 (绞拧复合): 在之前图复和乘法的定义下, 我们再定义一种操作为绞拧复合, 在 PAPP 图像中表示为复合的两个位于不同生成元的电荷处于同一 Y 轴位置, 而不再是一上一下。

$$C_i^a \otimes_t C_j^b = \zeta^{ab} C_j C_i \quad (i < j),$$

$$\begin{array}{c} | \\ a \end{array} \begin{array}{c} | \\ b \end{array} = \zeta^{ab} \begin{array}{c} | \\ a \end{array} \begin{array}{c} | \\ b \end{array}$$

定理 3.1 (单位分解/傅里叶变换^[2]): 在 PAPP 的弦图像语言中, 一对不带电荷的单位生成元, 即是两条没有电荷的直线, 可以分解为如下带电荷的杯, 帽形弦的和。这个关系的成立时基于在 PAPP 中, 消去一个闭环等于一个相位, 加上前面提到的通过迹来定义的等价关系。我们只需要证明任意元素 y 复合到左右两边后, 连上弦的上下端点得到的迹是同一个数值, 就可以证明这个单位分解关系。

这个关系的重要性在于其本质有着傅里叶变换的意义。在准平面代数中, 旋转 $\frac{\pi}{2}$ 视为傅里叶变换操作。所以一对杯帽是一对直线弦的傅里叶变换。此等式给出了 PAPP 中傅里叶变换的关系。在下一章节的 Quon 语言中, 当我们把量子计算用 PAPP 模型来表示, 此等式恰恰代表量子傅里叶变换。

$$\left| \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \begin{array}{c} i \\ -i \end{array} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array}$$

证明 令

$$x = \left| \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right| - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \begin{array}{c} i \\ -i \end{array} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array}$$

通过证明 $\text{tr}(xy) = 0$ 对任意生成元 y 成立即可。

生成元: $\left\{ \begin{array}{c} | \\ i \end{array} \begin{array}{c} | \\ j \end{array}, \begin{array}{c} i \\ -i \end{array} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right\}$

令 $y = \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \end{array} :$

$$\begin{aligned} \text{tr}(xy) &= \frac{1}{N} \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N} \begin{array}{c} a+i \\ -i \end{array} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \\ &= \frac{1}{N} \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} - \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{array}{c} a+b \end{array} \begin{array}{c} \bigcirc \end{array} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{N} \sqrt{N}^2 - \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sqrt{N} = 0 & \text{when } a + b = 0, \\ 0 - 0 = 0 & \text{when } a + b \neq 0. \end{cases}$$

令 $y = \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} :$

$$\text{tr}(xy) = \frac{1}{N} \text{a+b} \bigcirc - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N} \text{b+i} \bigcirc \text{-i}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{N} \sqrt{N} - \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \frac{1}{N} \cdot N = 0 & \text{当 } a + b = 0, \\ 0 - 0 = 0 & \text{当 } a + b \neq 0. \end{cases}$$

所以 $\text{tr}(xy) = 0$ 对任意生成元 y , 因此 $x = 0$. ■

3.4.1 PAPP 中的编辫关系与运算

在本节中, 我们定义并讨论 PAPP 弦的编辫代数结构。在此章节我们会说明编辫的代数关系, 以便知道如何合法地对图进行操作编辫的运算。我们需要研究编辫的原因是编辫运算构成 Quon 语言中量子算符的重要部分, 尤其是给量子态制造纠缠的运算都涉及到编辫。因为要生成纠缠必须要同时对多个量子比特进行运算, 并且让他们之间互相影响, 比如 CNOT 门。下面关于编辫的运算结构在^[2]中给出。

对于 N -graded PAPP, 定义相位:

$$\omega := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \zeta^{j^2}.$$

定义 3.12 (编辫): 需要注意的是, 编辫并不是指两条弦交叉。我们应该把弦视为生活在 3 维流形上的, 不相交的, 固定了两端带你的弦, 然后将其投影在二维上, 则得到了 \pm 编辫。(一根弦在上, 另一根在下。)

$$b_+ = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \begin{array}{c} | \\ i \end{array} \begin{array}{c} -i \\ | \end{array},$$

$$b_- = \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} = \frac{\omega^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \begin{array}{c} i \\ | \end{array} \begin{array}{c} -i \\ | \end{array}.$$

以下我们给出可以对编辫做的操作以及一些在 PAPP 模型中编辫的运算规

则（与纽结理论中的运算规则相似但不完全相同）。编辫的运算规则和纽结理论中的运算有类似之处。

定理 3.2 (Reidemeister 移动 I):

$$\text{Diagram 1} = \omega^{\frac{1}{2}} \mid \quad \text{Diagram 2} = \omega^{-\frac{1}{2}} \mid$$

证明

$$\begin{aligned} \text{Diagram 1} &= \frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \mid \quad \text{Diagram 2} \\ &= \frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{N}} \mid \quad \text{Diagram 3} = \omega^{\frac{1}{2}} \mid \\ \text{Diagram 4} &= \frac{\omega^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \mid \quad \text{Diagram 5} \\ &= \frac{\omega^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{N}} \mid \quad \text{Diagram 6} = \omega^{-\frac{1}{2}} \mid \end{aligned}$$

■

定理 3.3 (Reidemeister 移动 II):

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2}$$

证明

$$\begin{aligned} left = b_- b_+ &= \text{Diagram 1} \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \mid \quad \text{Diagram 2} \right) \left(\sum_{i=0}^{N-1} \mid \quad \text{Diagram 3} \right) \\ &= \frac{1}{N} \mid \quad \text{Diagram 4} \mid \quad \text{Diagram 5} = right \end{aligned}$$

■

定理 3.4 (Reidemeister 移动 III):

在此操作下图是等价的，原因是在编辫下面移动电荷的操作下图是等价的。

定理 3.5 (在编辫下方移动电荷)： 在编辫下方移动电荷时，图示保持不变。

证明

$$left = \frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \begin{matrix} i \\ -i+X \end{matrix} \right| = \frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \begin{matrix} i+X \\ -i \end{matrix} \right| = right$$

■

定理 3.6 (在编辫上方移动电荷)： 一般情况下，我们无法在不改变图示的前提下将电荷移动到编辫的上方。

但在 $N = 2$ 的情况下，我们可以将电荷移动到编辫的上方，且只产生一个 -1 的相位变化。因为这个性质，量子信息系统中 $N=2$ 的情况对此 PAPP 语言更为吸引，因为我们可以合法的将电荷在弦上自由移动，无论电荷在另一个弦上抑或是弦下，移动电荷只产生全局相位，而不影响量子态的系综。

证明

$$\begin{aligned} \text{Diagram 1} &= \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}} \left(\begin{matrix} | & | \\ \bullet & \bullet \end{matrix} + \begin{matrix} | & | \\ \bullet & \bullet \end{matrix} \right) \\ &= \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}} \left(\begin{matrix} | & | \\ \bullet & \bullet \end{matrix} - \begin{matrix} | & | \\ \bullet & \bullet \end{matrix} \right) \\ \text{Diagram 2} &= \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}} \left(\begin{matrix} | & | \\ \bullet & \bullet \end{matrix} + \begin{matrix} | & | \\ \bullet & \bullet \end{matrix} \right) \\ &= \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}} \left(\begin{matrix} | & | \\ \bullet & \bullet \end{matrix} - \begin{matrix} | & | \\ \bullet & \bullet \end{matrix} \right) \\ \text{Diagram 3} &= - \text{Diagram 1} \end{aligned}$$

■

第 4 章 Quon 语言^[1]

在介绍了 PAPP 之后，我们使用一种称为 Quon 语言的四弦 N -graded PAPP 模型来表示 N 维 qudit 的量子计算。

4.1 Quon (qudit)

我们定义 1-Quon 为一个 qudit。

一个 Quon 由一个半球面上的 4 个输出点和 0 个输入点，以及两个帽结构（每个帽结构由连接两个输出点的两条弦组成）构成。

这四个输出点按顺序排列在圆周上，弦则位于该半球面上。

定义 4.1:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{N}|k\rangle_Z &\leftrightarrow \text{Diagram 1}, \text{Diagram 2}, \text{Diagram 3}, \\
 \sqrt{N}|k\rangle_X &\leftrightarrow \text{Diagram 4}, \text{Diagram 5}, \text{Diagram 6}, \\
 \sqrt{N}|k\rangle_Y &\leftrightarrow \text{Diagram 7}, \text{Diagram 8}, \text{Diagram 9}.
 \end{aligned}$$

以上每个 qudit 的不同图示只是从不同角度的二维投影观看。

4.2 量子算符

$\{X, Y, Z, F, G, \text{CNOT}\}$ 为量子电路门的克利福德群的生成元，其中 X, Y, Z 为泡利矩阵， F 是傅里叶变换， G 是高斯门。

$$X|k\rangle = |k+1\rangle, \quad Y|k\rangle = \zeta^{1-2k}|k-1\rangle, \quad Z|k\rangle = q^k|k\rangle,$$

$$F|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} q^{kl} |i\rangle, \quad G|k\rangle = \zeta^{k^2} |k\rangle.$$

当回到 2 维 $N = 2$ 的量子系统时，

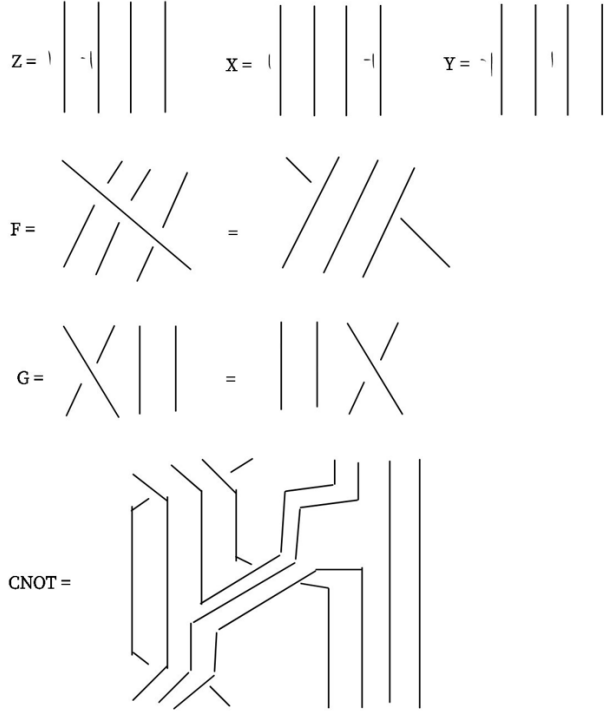
F 是 Hadamard 门;

$$F|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^k|1\rangle),$$

G 是相位门:

$$G|1\rangle = i|1\rangle, \quad G|0\rangle = |0\rangle.$$

以上克利福德群中的算符可由以下 Quon 图表示:



4.3 2 维系统中的编辫关系与合法操作

在 2 维系统中, $q := e^{\pi i} = -1$, $\zeta = e^{\pi i/2} = i$, $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) = e^{\pi i/4}$ 。

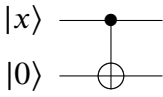
由于我们考虑的是量子计算, 一个量子态的全局相位的变化是可忽略的, 因为它们不会改变量子态的密度矩阵。若忽略全局相位的变化, 则对单一个 Quon 图进行的某些变换, 如 Reidemeister I 变换、沿弦动电荷 (无论电荷在下面的弦还是上面的弦), 均对应恒等操作。因为它们仅引入全局相位。Quon 语言中的, 单一个弦图满足同痕不变性以及 Reidemeister I、II、III 关系。

4.4 COPY gate

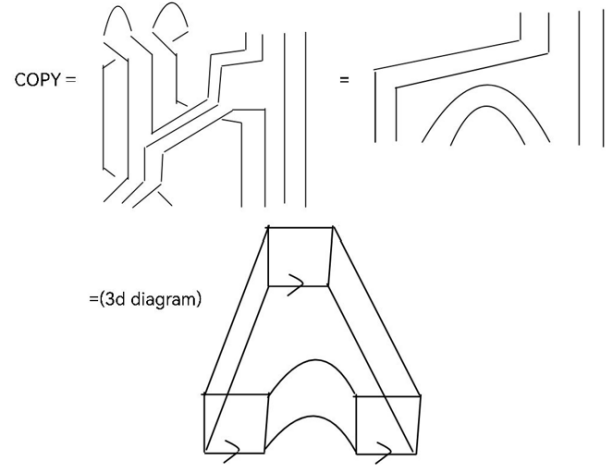
一个需要注意的事实是, 在 Quon 语言中, 等价的 Quon 图 (即经过同痕形变, Reidemeister 移动) 代表相同的量子态和矩阵。然而, 一个量子态可以有非 Quon 语

言中等价的图表示。我们通过在 Quon 语言中计算复制门作用于 $|0\rangle$ 来说明这一点。

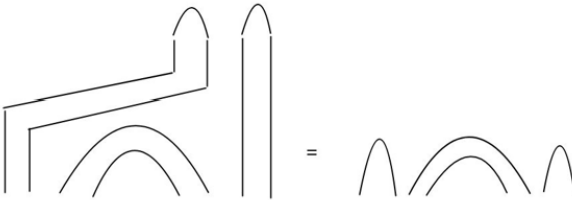
COPY 门的电路:



COPY 门的 Quon 图:



COPY $|0\rangle$:



只需通过计算其与全部基向量的内积，即可确认该 Quon 确实对应 $|00\rangle$ 。该 Quon 与用于表示 $|00\rangle$ 的另一 Quon 并非同痕。

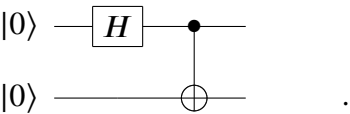


4.5 贝尔态

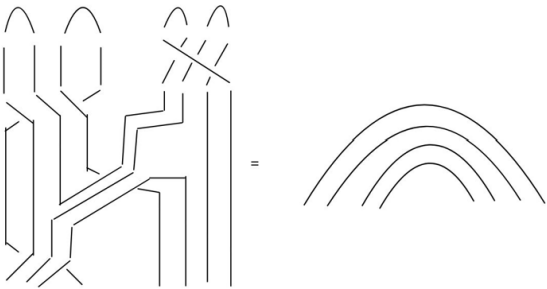
纠缠态是量子计算中的重要资源。只有当量子比特有纠缠的时候，才会出现对经典计算的优越性。贝尔态是 2 比特的一个经典纠缠态。

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) .$$

贝尔态由在 $|00\rangle$ 上作用 Hadamard 门和 CNOT 门来生成。



以下是 Quon 语言下构造贝尔态的图运算：



第 5 章 量子纠错码对应的 Quon 图

在 Quon 语言的章节，我们定义了每一个 Quon 是由四个点，点之间两两连线。所以任意一个 n 比特的量子态，在 Quon 语言中会是一个 n 个点的图，每个顶点有 4 条线相连，构成一个 4-正则图。如此我们获得了一个 4-正则图和量子态之间的一个对应关系^[4]。

对任意一个量子纠错码，我们可以由他对于 0 逻辑比特的编码态定义其 Quon 图。称之为量子纠错码的 Quon 图。本文章的核心工作正是利用纠错码的 Quon 图来指导如何优化纠错码。

在这里我们考虑 2 维的量子信息系统，所以在 Quon 语言中的电荷为 Z_2 ，我们标记电荷为实心黑点。

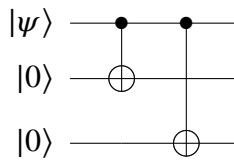
5.1 3 比特重复码

我们首先以 3 比特重复码作为例子，画出其编码运算在 Quon 语言中的图，并给出其对应的 Quon 编码图。

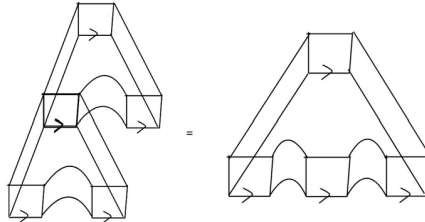
$$|0\rangle_L = |000\rangle, \quad |1\rangle_L = |111\rangle.$$

这个量子纠错码编码是重复逻辑比特三次。

编码电路：



用 Quon 语言表达的编码运算：



将上述编码电路作用在 $|+\rangle$ 比特上，得到如下的 4-正则图：

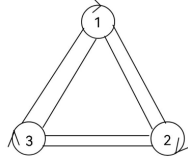
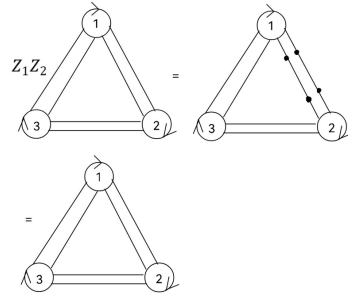


图 5.1 3 比特重复码 Quon 图

Shor 三位重复码的稳定子算符为：

$$\{Z_1 Z_2, Z_2 Z_3, Z_3 Z_1\},$$

上图图在这些算符作用下保持稳定。图的电荷在以下算符作用后保持不变：



5.2 Shor [9,1,3] 纠错码

以下是另一个量子纠错码 Shor[9,1,3] 纠错码的 Quon 图：

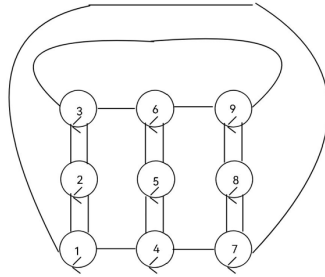


图 5.2 shor[9,1,3] 纠错码 Quon 图

[9,1,3] 纠错码的稳定化子为：

$$\{X_1 X_2, X_2 X_3, X_4 X_5, X_5 X_6, X_7 X_8, X_8 X_9, Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6, Z_4 Z_5 Z_6 Z_7 Z_8 Z_9\}.$$

上图在这些稳定化子作用下不变。

5.3 K_5 完全图

上面提到每一个 4-正则图对在 Quon 语言中对应一个量子态。而 K_5 完全图刚好对应 [5,1,3] 完美码的编码态：

如下算符作用在上图中时，不改变 K_5 图中的电荷。即这些算符是这个 Quon

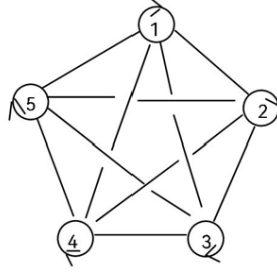


图 5.3 [5,1,3] 完美码 Quon 图

图对应的纠错码的稳定化子:

$$\{X_1 Z_2 Z_3 X_4, X_2 Z_3 Z_4 X_5, X_3 Z_4 Z_5 X_1, X_4 Z_5 Z_1 X_2\}.$$

所以此 Quon 图对应的量子纠错码是 [5,1,3] 完美码。

5.4 拓扑量子纠错码的 Quon 图

对于拓扑量子纠错码（如环面码），其拓扑结构自然地给出编码态的 4-价图表示。以定义在环面上的 4×4 环面码为例，系统中共有 32 条边作为物理比特，每个顶点算符和方块算符均为稳定子。如下是环面码在环上的图：

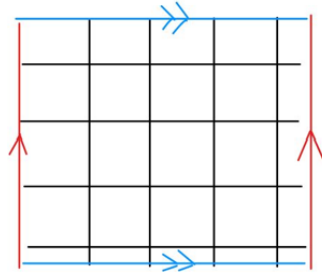


图 5.4 环面码编码态示意图

我们通过将晶格图量子化，得出一个 4-正则图。方法为将环面码编码中作为物理比特的边转换为 Quon，稳定化子则给出 Quon 图中的线关系：

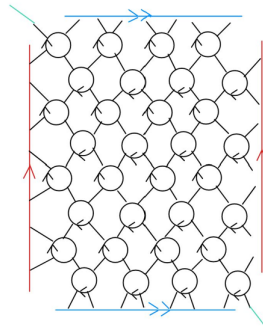
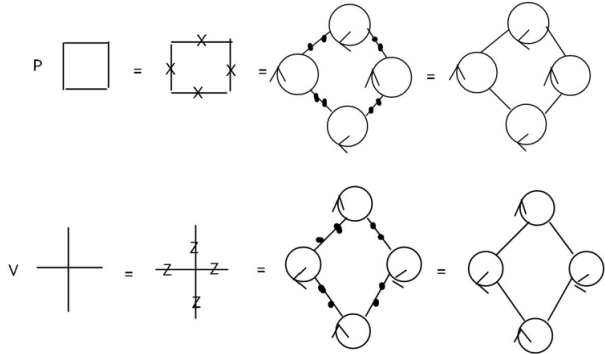


图 5.5 环面码的 Quon 图

可以验证，每个顶点算符（在相邻 Quon 上施加 Z 操作）和方块算符（在相邻

Quon 上施加 X 操作) 均不会改变 Quon 图的电荷。即顶点算符和方块算符确实是此 Quon 图的稳定化子。

证明



■

第 6 章 含参图量子纠错码 VGQEC

6.1 含参量子纠错码

基于特定的量子纠错码，我们可以对其进行参数化，并得到含参量子纠错码。典型的参数化方法是在编码电路中添加旋转门。

例 6.1 (QVector 含参纠错码): 下面给出一个通过施加旋转门对纠错码进行含参化的示例：

在编码电路之后，对每个量子比特施加 R_x 和 R_z ；对每一对量子比特施加控制-Z 门 CZ 。将上述操作重复两次。

6.2 由 Quon 图给出的含参量子纠错码

由于我们可以在任意量子比特上添加任意的旋转门，给定的纠错码存在多种不同的参数化方式。纠错码编码态的 Quon 图为构建含参量子纠错码提供了指导，并且该 Quon 图中蕴含了稳定子的相关信息。我们考虑在 Quon 图的交叉编辫结构上引入一个参数来以此指导如何在编码电路上加旋转门。

定义 6.1 (含参数编辫^[5]): 我们定义如下 Quon 图中的含参数编辫。

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \frac{1 + e^{i\alpha}}{2} \left| \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right| + \frac{1 - e^{i\alpha}}{2} \left| \begin{array}{c} | \bullet \\ | \bullet \end{array} \right|$$

特别地，当 $\alpha = 0$ 时，它对应两条无电荷且无编辫的弦；当 $\alpha = \pi$ 时，它对应两条带电荷且无编辫的弦；当 $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ 时，分别对应正编辫和负编辫。

引理 6.1 (编辫参数对应的量子电路门): 在 Quon 语言章节，我们给出了量子电路门在 Quon 语言中的 4-弦图。根据以上编辫参数的运算规则的定义，一个编辫参数对应一个量子电路中的旋转门。以下是两种带编辫参数的 4-弦算符对应的旋转门：

$$\left| \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right| = R_X(\alpha) \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right|$$

$$\left| \left| \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right| \right| = R_{ZZ}(\alpha) \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right|$$

证明

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right| &= \frac{1 + e^{i\alpha}}{2} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right| + \frac{1 - e^{i\alpha}}{2} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ \bullet \quad \bullet \\ | \end{array} \right| \\ &= \frac{1 + e^{i\alpha}}{2} \text{Id} + \frac{1 - e^{i\alpha}}{2} X \\ &= e^{-i\frac{\alpha}{2}X} = R_X(\alpha) \end{aligned}$$

上述证明中第一，二个等号由含参编辫和 Quon 的定义给出，第三个等号由泰勒展开给出。

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{c} \text{Quon diagram with crossing and parameter } \alpha \end{array} \right| = \frac{1+e^{i\alpha}}{2} \left| \begin{array}{c} \text{Quon diagram with two crossings} \end{array} \right| \\
& \quad + \frac{1-e^{i\alpha}}{2} \left| \begin{array}{c} \text{Quon diagram with two crossings and dots} \end{array} \right| \\
& = \frac{1+e^{i\alpha}}{2} \left(\left| \begin{array}{c} \text{Quon diagram with four vertical lines} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Quon diagram with four vertical lines and dots} \end{array} \right| \right) \\
& \quad + \frac{1-e^{i\alpha}}{2} \left(\left| \begin{array}{c} \text{Quon diagram with four vertical lines and dots} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Quon diagram with four vertical lines and dots} \end{array} \right| \right) \\
& = \frac{1+e^{i\alpha}}{2} \text{Id} + \frac{1-e^{i\alpha}}{2} Z \otimes Z \\
& = e^{-i\frac{\alpha}{2}Z \otimes Z} = R_{ZZ}(\alpha)
\end{aligned}$$

上述第一个等号由含参编辫定义给出，第二个等号由 PAPP 的单位分解等式（定理 3.1）给出。第三个等号是通过删除了上一条式子中两个实际为 0 矩阵的 Quon 图，这个事实可以通过把所有量子比特空间的基作用在其左右，然后得出结果皆为 0，来给出。第四个等号由泰勒展开给出。 ■

上述编辫参数对应的量子门的正确性也可以通过比较等式两边作用在所有基向量来确保。（上述这句话换成矩阵语言，则是两个有限维方阵的相等等价于在左右作用所有基向量组合后得到的广义内积相等）

有了以上编辫参数和旋转门的对应关系，我们便可以通过在 Quon 图中的交叉位置添加编辫参数来构造 VGQEC 纠错码。

6.3 3 比特 VGQEC^[5]

例 6.2 (3 比特 VGQEC): 以下是基于 3 比特重复码的 VGQEC 对应的加上了编辫参数的 Quon 图:

对应的量子电路为作用 $R_x(\alpha)$ 门在第 0 个比特上。

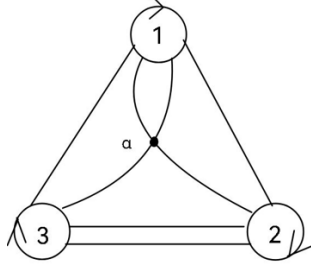


图 6.1 3 比特 VGQEC

6.4 5 比特 VGQEC

例 6.3 (5 比特 VGQEC^[5]): 以下是基于 [5,1,3] 完美码的 VGQEC 对应的加上了编辫参数的 Quon 图:

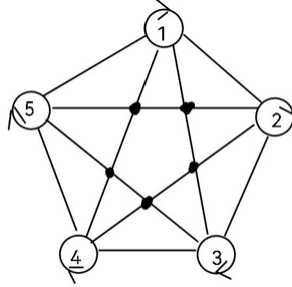
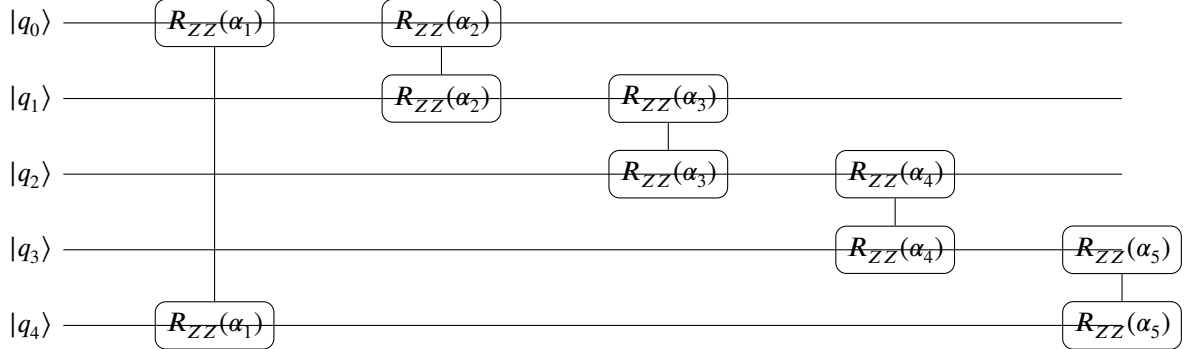


图 6.2 5 比特 VGQEC

对应的量子电路门为 5 个 $R_{ZZ}(\alpha_i)$ 作用在第 $i, i+1$ 个比特。



6.5 7 比特 VGQEC

下面部分是此文章的创新工作部分，内容为基于 7 比特的 Steane 纠错码^[10]来建立 7 比特的 VGQEC。为了建立 VGQEC，我们需要先给出基础编码 Steane 码的 Quon 图。

Steane 纠错码对应的 Quon 图为如下：

留意到，我给出的此 4-正则图为非平面图，Quon 图中的弦有交叉，但是我并没有给出交叉中的 \pm 编辫关系，而是直接把弦交叉起来。我在这图中并没有准确

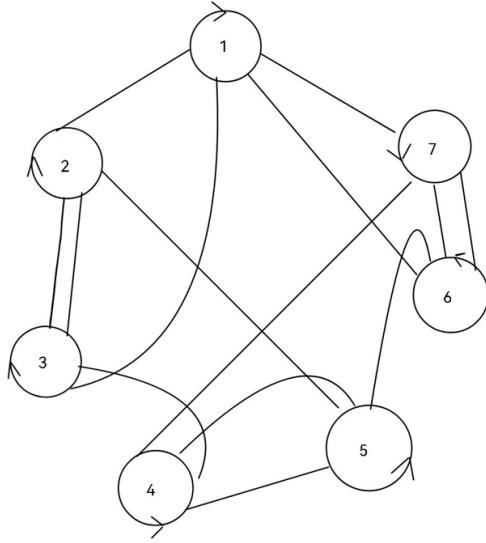
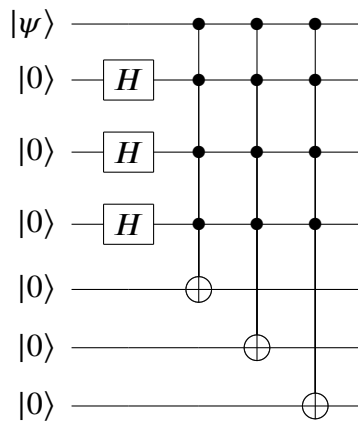


图 6.3 [7,1,3]Steane 纠错码 Quon 图

给出 [7,1,3]Steane 编码态的 Quon 图，因为我省去了编辫的关系。但是我的这种操作是合法，不影响我的目的。首先因为在 PAPP 章节中，提到二维信息系统中，电荷可以在弦上自由移动而仅产生全局相位，所以此图仍然通过线的关系完美给出了稳定化子的集合。其次我希望在编码态的 Quon 图的编辫位置上添加参数来对电路施加对应的旋转门，以此把纠错码转换成 VGQEC，这项工作不需要知道编辫的正负，只需要知道编辫发生的位置，在选取了旋转门后我们则会用程序优化来调整编辫的参数。

与 [5, 1, 3] 完美码或 [32, 2, 4] 环面码不同，Steane 码的编码态 Quon 图并不简单显然，无法通过简单方式推导得到。这是因为 Steane 码不具有拓扑结构，其稳定子也不像 [5, 1, 3] 完美码那样有规律。Steane 码的 4-正则编码图必须在 Quon 语言中通过对编码电路逐门处理来计算。Steane 码的编码电路由多个 Hadamard 门和 CNOT 门按如下方式组成：



在 Quon 语言章节，我们定义了 CNOT 和 Hadamard 量子门代表的 Quon 4 弦图表示，我们将量子电路的运算带入到 Quon 语言中进行图的复合，并将最后结果投影到二维空间，得到上述 Steane 编码态的 4-正则图。可以验证，该 4-正则图满足 Steane 码的稳定化子条件。

在上述 Quon 图中，我们从中选取数个交叉点来添加编辫参数。(如果有足够强的算力的话则可以进行更多参数的模拟，不过在模拟实验数据中表明，仅仅添加 1-3 个参数已经足以令新的 7 比特 VGQEC 纠错码对数种错误信道的表现有显著改善.)

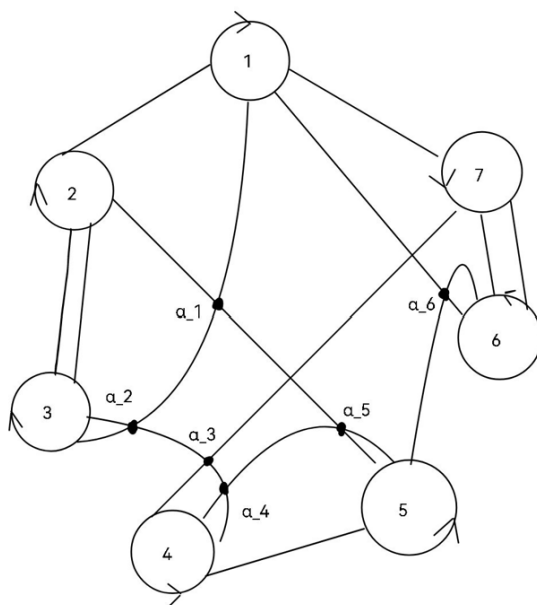


图 6.4 7 比特 VGQEC 含参编辫 Quon 图

如下是这些编辫参数对应的量子电路上的旋转门：

表 6.1 7 比特 VGQEC 含参编辫对应量子门

编辫参数	量子门	作用的量子比特
α_1	$R_{zz}(\alpha_1)$	比特 0,1
α_2	$R_z(\alpha_2)$	比特 3
α_3	$R_x(\alpha_3)$	比特 4
α_4	$R_x(\alpha_4)$	比特 4
α_5	$R_x(\alpha_5)$	比特 5
α_6	$R_z(\alpha_6)$	比特 6

第 7 章

VGQEC 纠错码在错误信道中的保真度模拟实验数据

最后，我们对 VGQEC 在多种量子误差信道上的性能进行了仿真模拟实验，以评估其在各种错误信道对量子态保真度的提升效果。

首先，通过研究基础量子纠错码的 Quon 图，在电路中设置含角度参数的旋转门并引入可调角度参数。针对去极化 (Depolarizing)、振幅阻尼 (Amplitude Damping) 和热弛豫 (Thermal Relaxation) 等各种特定误差信道，我们对该参数进行优化迭代。在程序实现中，首先为参数设定随机初始值，然后反复迭代，直至保真度收敛至最佳值。通过这一过程，我们能够针对不同的噪声信道，获得对应的最优参数的 VGQEC。

7.1 3, 5 比特 VGQEC

这一个小节的 3,5 的 VGQEC 由^[5]设计给出。我们把 5 比特 VGQEC, 3 比特 VGQEC 纠错码和其他固定纠错码如 [5,1,3] 完美码, 5 比特重复码, [7,1,3]Steane 码放进各种特定的噪声错误信道，来测试各纠错码在各信道的保真值和纠错阈值数据，看看 VGQEC 如何表现出对比固定纠错码的优越性。

纠错码存在阈值是量子纠错的一个特点。相比起经典计算中的多数法则纠错中只要正确率在一半以上，量子纠错码的在错误率超过一定大小时，保真度便会比不做保护更差。我们称这一个错误率为该量子纠错码在此错误下的纠错阈值。在下面的各项测试的数据图中我们可以看到，在错误率远低于百分之五十的时候，量子纠错码在错误信道的保真率已经要比不做保护更差。

1. 泡利错误信道：

我们首先在单独的 X, Y, Z 泡利错误信道进行模拟。 η 错误率的泡利信道为有 η 概率出现泡利 X/Y/Z 矩阵作用在物理比特上的信道。

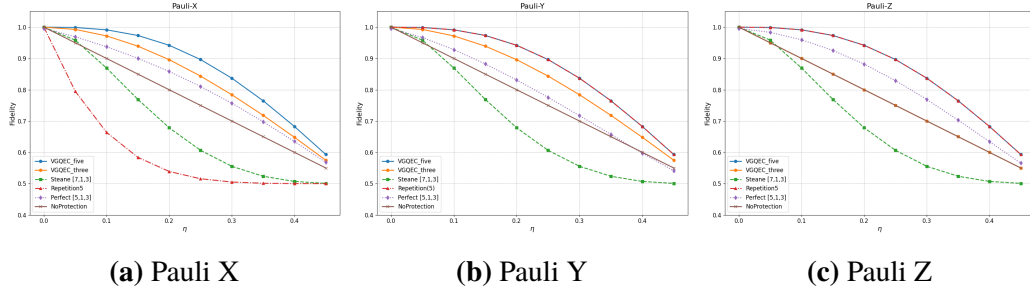


图 7.1 5, 3 比特 VGQEC 在 Pauli 信道的保真率

在 Pauli Y 和 Z 的模拟中，我们发现 5 比特重复码和 [5,1,3] 完美码已经是这两个信道各自的最优 5 比特编码。于是 5 比特 VGQEC 在这两项中取了合适的参数，变成了 5 比特重复码和 [5,1,3] 完美码。

而在 Pauli X 的模拟中，出现了 5 比特，3 比特 VGQEC 的保真度要比固定码显著增强的情况。

2. 去极化 (Depolarizing):

去极化信道中的错误是同时以均等概率发生泡利 X, Y, Z 错误。在下图的实验中，模拟各种 5 比特 VGQEC 和 3 比特 VGQEC 纠错码和其他固定纠错码在总错误率从 0 到 0.4 时的表现。

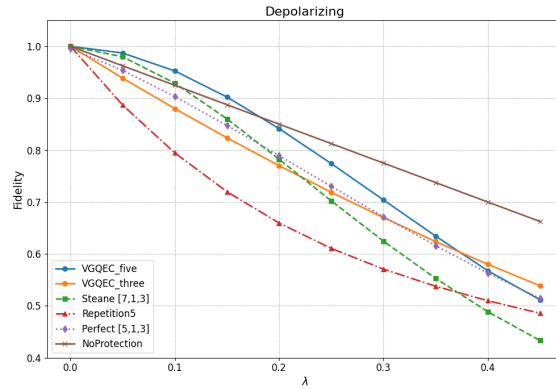


图 7.2 5, 3 比特 VGQEC 在去极化信道的保真率

数据显示 5 比特 VGQEC 在去极化错误信道中表现优秀。对比起作为固定纠错码的其他两个 5 比特纠错码，重复码和 [5,1,3] 完美码，5 比特 VGQEC 在 DP 信道中的保真度和阈值都有所提升。

以下是程序给出的在 DP 信道中，5 比特 VGQEC 的最佳参数：

旋转门角度参数：[1.57, 1.57, 1.57, 1.57, 1.57]。

3. 退相干 (Phase Damping):

退相干信道中的错误是有 γ 概率让量子比特变为 1。

数据显示，VGQEC 在退相干的错误信道上并没有比原本的基础固定码表现

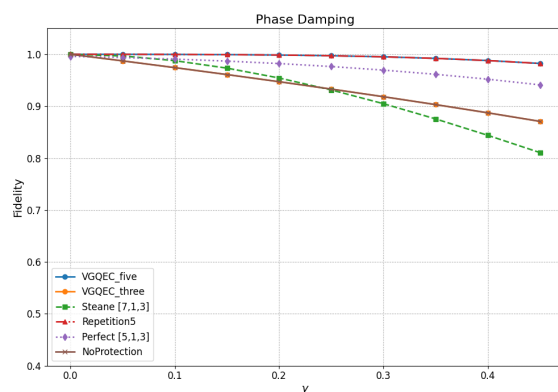


图 7.3 5, 3 比特 VGQEC 在退相干信道的保真率

更好。

4. 热弛豫 (Thermal Relaxation):

热弛豫错误是一种融合了退相干和振幅阻尼错误，并且两者错误概率随时间演化的一种错误信道。

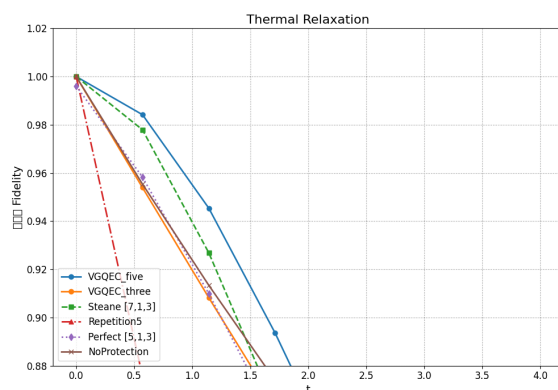


图 7.4 5, 3 比特 VGQEC 在热弛豫信道的保真率

数据显示，5VGQEC 在热弛豫上有突出优势表现。

以下是程序给出的在 DP 信道中，5 比特 VGQEC 的最佳参数：

旋转门角度参数: [1.85, 1.85, 1.85, 1.85, 1.85]。

5. 振幅阻尼 (Amplitude Damping):

错误率为 λ 的振幅阻尼信道代表着有 λ 的概率让量子比特变为 0。

数据显示，5VGQEC 在 AD 上表现最佳，比其他 5 比特固定码如 [5,1,3] 完美码，重复码要好，也比 Steana 码好。而 3VGQEC 虽然效果不如 5VGQEC 好，但比起固定的重复码还是产生了优势。

以下是程序给出的在 DP 信道中，5 比特 VGQEC 的最佳参数：

旋转门角度参数: [1.87, 1.87, 1.87, 1.87, 1.87]。

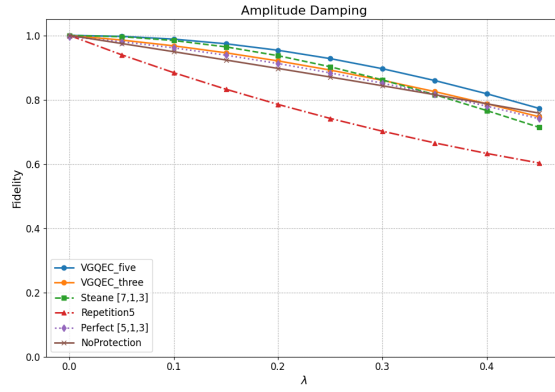


图 7.5 5, 3 比特 VGQEC 在振幅阻尼信道的保真率

7.2 7 比特 Steane VGQEC

我的工作的效果展示如下，这一小节展示了本篇文章工作中设计的 7 比特 VGQEC 中在去极化信道，热弛豫信道和振幅阻尼信道中 7 比特 VGQEC 的效果，并与基本的固定纠错码 [7,1,3]Steane 码进行比较，来展现出 VGQEC 设计的优势。

1. 去极化 (Depolarizing):

以下是模拟 7 比特 VGQEC 和 [7,1,3]Steane 码在去极化信道，三个泡利矩阵合共 3λ 错误率，总错误率从 0 到 0.12 的保真度。

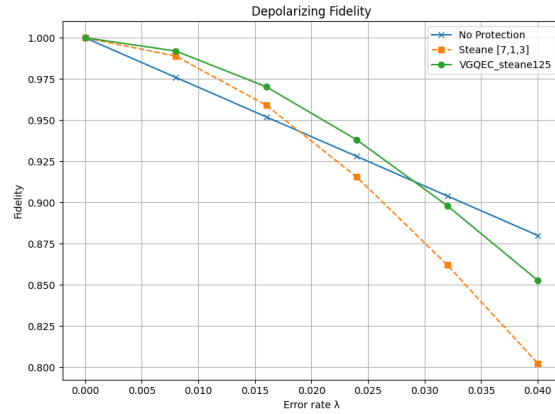


图 7.6 7 比特 VGQEC 在去极化信道的保真率

可以从数据图中观察到，VGQEC 码的保真度全程比基础的 [7,1,3]Steane 码高，纠错阈值也更高，达到了 0.28。

选取的 7VGQEC 参数：

旋转门角度参数: $\alpha_1 = 1.57$, $\alpha_2 = 1.45$, $\alpha_5 = 0.536$ 。

2. 热弛豫 (Thermal Relaxation):

以下是模拟 7 比特 VGQEC 和 [7,1,3]Steane 码在热弛豫错误信道中随着时间变化的保真度实验。

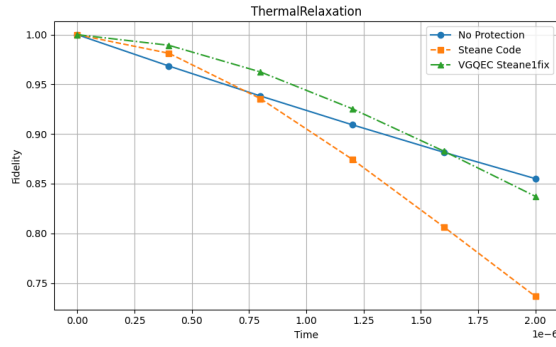


图 7.7 7 比特 VGQEC 在热弛豫信道的保真率

选取的 7VGQEC 参数:

旋转门角度参数: $\alpha_1 = 1.57$ 。

3. 振幅阻尼 (Amplitude Damping):

以下是模拟 7 比特 VGQEC 和 [7,1,3]Steane 码在去振幅阻尼信道, 以 λ 概率将比特变为 0 的错误。

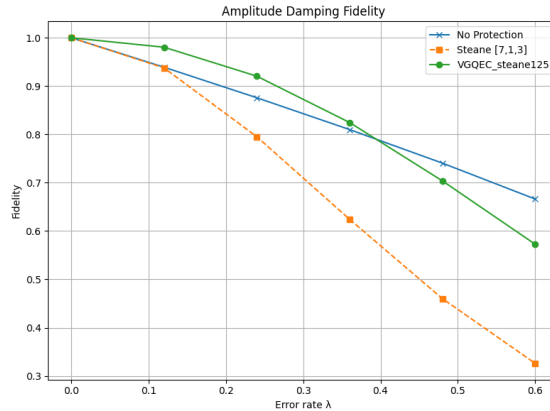


图 7.8 7 比特 VGQEC 在振幅阻尼信道的保真率

可以从数据图中观察到, VGQEC 码的保真度全程比基础的 [7,1,3]Steane 码高, 纠错阈值也更高, 达到了 0.38。

选取的 7VGQEC 参数:

旋转门角度参数: $\alpha_1 = 0.816$, $\alpha_2 = 4.91$, $\alpha_5 = 6.19$ 。

总结: 实验数据表明基于 Steane 纠错码设计的 7 比特 VGQEC 在去极化, 热弛豫, 振幅阻尼错误信道上对比原本的 Steane 纠错码有显著性能改善, 保真度和纠错阈值都显著更高。而在退相干上则没有改善。

由于对 n 位量子电路进行模拟的时间复杂度呈指数级增长, Steane 含参图形量子纠错码 (VGQEC) 的参数优化仍属初步。在有更强算力和更长运行时间的情

况下，我们可以添加更多的参数，并且做更精确的优化，使得优化效果进一步提升。

第 8 章 结 论

通过引入拓扑视角, 使用类似 TQFT 性质的拓扑图像语言 Quon, 量子计算可以表示为弦图的复合, 并应用类似纽结, 同痕的弦运算规则。我们基于各种固定量子纠错码设计了含参量子纠错码。其中含参纠错码的设计方式由纠错码的 Quon 图给出。基于 $[5,1,3]$ 完美码有 5 比特 VGQEC, 而这篇文章我的工作是基于 $[7,1,3]$ Steane 码设计了 7 比特 VGQEC。计算机模拟实验的数据表明, 通过 Quon 语言设计出的含参纠错码 VGQEC 在去极化 (Depolarizing), 热弛豫 (Thermal Relaxation), 振幅阻尼 (Amplitude Damping) 这三个噪声信道中有着明显比原本固定纠错码更好的保真度和更高阈值。

第 9 章 后 续

在 7 比特的 VGQEC 的实验中，在我选取的六个编辫参数位置上，我从实验数据观察到第一个参数位置在错误信道模拟中对保真度的贡献较大。在只设定一个参数的 7 比特 VGQEC 中，选取第一个编辫位置得出的优化结果要比其他五个位置好。这很可能是因为只有第一个位置是针对两个量子比特的旋转门，而其余五个位置都是针对单个比特的旋转门。

由此思路来提供指导，在 $[[7,1,3]]$ Steane 编码中有 3 个交叉位置是给出作用于两个比特的旋转门。再考虑到使用计算机模拟量子电路的指数级时间复杂度，三个参数或许已经是在可以接受的时间内能得出的最多参数优化结果。我选取以下这三个能表示为作用在两个比特上的旋转门的点：

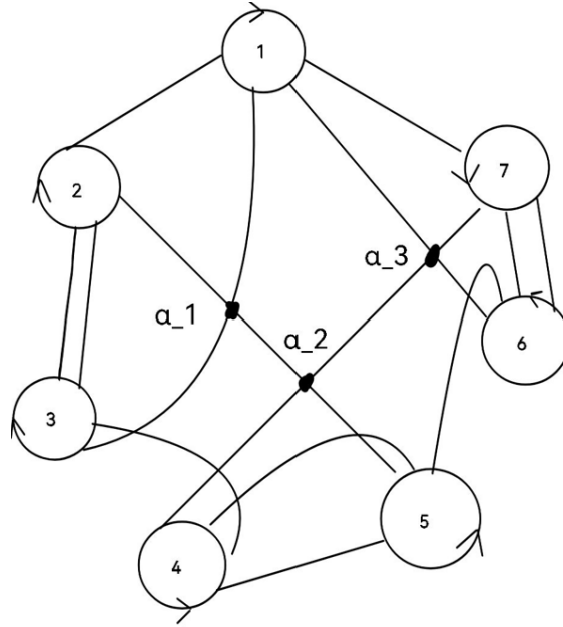


图 9.1 7 比特 VGQEC 的另一种参数选取位置

并且他们对应的量子电路门为：

表 9.1 新 7 比特 VGQEC 含参编辫对应量子门

编辫参数	量子门
α_1	$R_{Z_1 Z_2}(\alpha_1)$
α_2	$R_{Z_5 Y_4}(\alpha_2)$
α_3	$R_{X_7 Z_1}(\alpha_3)$

如此设计的 7 比特 VGQEC，将很有希望得到在所有 7 比特编码中在所有错误信道中都近乎最优的编码方法。

参考文献

- [1] Liu Z, Wozniakowski A, Jaffe A M. Quon 3d language for quantum information[J/OL]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2017, 114(10): 2497-2502. DOI: [10.1073/pnas.1621345114](https://doi.org/10.1073/pnas.1621345114).
- [2] Jaffe A, Liu Z. Planar para algebras, reflection positivity[J/OL]. Communications in Mathematical Physics, 2017, 352(1): 95-133. DOI: [10.1007/s00220-016-2779-4](https://doi.org/10.1007/s00220-016-2779-4).
- [3] Jaffe A, Liu Z, Wozniakowski A. Qudit isotopy[Z]. 2016.
- [4] Liu Z. Quantized graphs and quantum error correction[A]. 2019.
- [5] Shao Y, Li Y C, Wei F, et al. Variational graphical quantum error correction codes: Adjustable codes from topological insights[A]. 2024.
- [6] Peres A. Reversible logic and quantum computers[J/OL]. Physical Review A, 1985, 32(6): 3266-3276. DOI: [10.1103/PhysRevA.32.3266](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.32.3266).
- [7] Bombín H. An introduction to topological quantum codes[M/OL]//Lidar D A, Brun T A. Quantum Error Correction. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2013. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139034807.021>.
- [8] Kitaev A Y. Fault-tolerant quantum computation by anyons[J/OL]. Annals of Physics, 2003, 303(1): 2-30. DOI: [10.1016/S0003-4916\(02\)00018-0](https://doi.org/10.1016/S0003-4916(02)00018-0).
- [9] Jones V F R. Planar algebras, i[Z]. 1999.
- [10] Steane A M. Multiple-particle interference and quantum error correction[J/OL]. Proceedings of the Royal Society of London A, 1996, 452(1954): 2551-2577. DOI: [10.1098/rspa.1996.0136](https://doi.org/10.1098/rspa.1996.0136).

附录 A 外文资料的调研阅读报告

Topological view on quantum computation

Contents

A.1 Topological quantum computation	43
A.1.1 Toric error correction code	43
A.1.2 Hamiltonian of toric code	44
A.2 Topological pictorial representation of quantum computation	45
A.2.1 Parafermion algebra and Pauli matrices	45
A.2.2 String diagram 1	45
A.2.3 String diagram 2	46
参考文献	46

A.1 Topological quantum computation

A.1.1 Toric error correction code

In the paper 'Fault-tolerant quantum computation by anyons'^[1], Kitaev introduced a topological quantum error correction code called toric code, which the physical qubits have a favor of sitting on a torus. Consider a $n \times n$ lattice, attaching the top and the bottom, attaching the left and the right, forming a torus with $2n^2$ edge and n^2 plaque and n^2 vertex. We take this torus as the code space with $2n^2$ dimension, considered each edge as a qubit. We use coloring to represent the spin of qubit. Define $|1\rangle$ be an colored edge, $|0\rangle$ be an un-colored edge.

Then we introduce the plaque and vertex operators, which will be the stabilizers of toric code. For a plaque b in the torus, the plaque operator P_b act as doing Pauli Z transformation on four neighbor edges of the plaque. Diagramly, the P_b plaque operator gives a -1 phase change to the torus while the number of neighbor colored edge is odd, unchange when it is even. For a vertex a , the vertex operator act as doing Pauli X transformation on four neighbor edges. Which is changing their color. It is obvious that the composition of all vertex operator or the composition of all plaque operator is identity. So the dimension of protected subspace is $2^{2n^2-(2n-2)} = 4$, which mean a toric code encode two

logical qubit. We observe that the parity of number of uncontractible loops in torus is an invariant under vertex operator. We can also observe that This gives us the sense of using the parity of degree of uncontractible loops on torus. We define L_{00} as the average sum of state that have even numbers of uncontractible loops on both S^1 s of torus. Define $|01\rangle$ as the average sum of state that have even numbers and odd numbers of uncontractible loops on the second and first S^1 . Similarly to define $|10\rangle, |11\rangle$. We can observe that these are indeed the 4 element in the protected space under vertex and plaquette operators.

A.1.2 Hamiltonian of toric code

Following the construction of toric error correction code, there is another interesting perspective of viewing this torus construction given in chapter 26 of this lecture notes^[2]. We can consider it as a quantum phase of matter. We write the following Hamiltonian:

$$H_{\text{toric}} = -\frac{\Delta_v}{2} \sum_{\text{vertex } a} V_a - \frac{\Delta_p}{2} \sum_{\text{plaquette } b} P_b.$$

Δ_v and Δ_p represent energy. The ground state (lowest energy) is the correct code space in toric code error correction. By this Hamiltonian, we regard an error as excitation since it turns some eigenvalues of plaquette or vertex operator into -1 , raising the hamiltonian. The e_Z and e_X error excites V and P respectively. We can view the V and P defects as e (electric) and m (magnetic) particles. The twisting of e and m is still themselves due to the following fact: applying a loop of V defect starting and ending on an endpoint of a existing V defect, the result remain unchanged. The above fact is same for P defect. According to this properties, we say e, m are bosons.

Now consider the composition of e and m .

$$e \times m = f,$$

f is given by composition of e defect and m defect. By the rules of TQFT calculation (ribbon), the twisting of f itself is equal to the ribbon of e and m . A m defect adding on a loop crossing e defect gives a -1 phase. This means that twisting f itself gives a -1 phase. So f is a fermion.

$$f = \begin{array}{|c|} \hline \text{loop} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline e & m \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{crossing} \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|} \hline \text{parallel lines} \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|} \hline \text{single line} \\ \hline \end{array}$$

Figure A.1 Ribbon relation

A.2 Topological pictorial representation of quantum computation

Given the fact that the multiplication rules of Pauli matrices have the same structure of a parafermion algebra. Also with the tool of para planar algebra, we can try to express quantum computation of qudit in a topological pictorial way using PAPPA(parafermion para planar algebra)^[3]. This paper study how We can transform the calculation of quantum computation on qudit into some sort of composition of string diagram. Linking with the area of braiding, knot theory and isotopy. Also, an idea of comparing quantum gate that cause entanglement in quantum computation with braiding in string diagram rises naturally.

A.2.1 Parafermion algebra and Pauli matrices

A parafermion algebra P_m^d of order d has generators C_j , which satisfy

$$C_j^d = 1,$$

and

$$C_j C_k = q C_k C_j, \quad 1 \leq j < k \leq m, \quad q = e^{2\pi i/d}.$$

This is exactly the multiplication rules of Pauli matrices in a d -dimensional qudit:

$$X^d = Z^d = 1, \quad YX = q XY, \quad ZY = q YZ, \quad XZ = q ZX,$$

with $q = e^{\frac{2\pi i}{d}}$. By solving the additional equation

$$XYZ = \zeta, \quad \zeta^d = q^{-\frac{1}{2}},$$

we can give an example of a string diagram representing m qudit.

A.2.2 String diagram 1

Here is one of the solution :

$$\hat{X} = \zeta C_1^{-1} C_2, \quad \hat{Y} = \zeta C_1 C_3^{-1}, \quad \hat{Z} = \zeta C_1^{-1} C_4.$$

The corresponding 4-string model as follows: we represent m qudit as:



Figure A.2 String diagram of m qubit

A.2.3 String diagram 2

Here is another solution

$$\hat{X} = \zeta C_1^{-1} C_4, \quad \hat{Y} = \zeta C_2 C_4^{-1}, \quad \hat{Z} = \zeta C_3^{-1} C_4.$$

The corresponding 4-string model as follows: we represent m qudit as:



Figure A.3 String diagram of m qubit

参考文献

- [1] Alexei Yu. Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Annals of Physics*, 303(1): 2–30, 2003. doi: 10.1016/S0003-4916(02)00018-0. Published January 2003.
- [2] Steven H. Simon. Topological quantum: Lecture notes and proto-book. Unpublished lecture notes, 2020. URL <https://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/SteveSimon/topological2020/TopoBookOct27hyperlink.pdf>. Accessed June 12, 2025.
- [3] Zhengwei Liu. Quantized graphs and quantum error correction. *arXiv preprint arXiv:1910.12065*, October 2019. Version v1, published October 26, 2019.

致 谢

衷心感谢导师魏朝晖教授在此论文中关于优化含参纠错码的工作方向上的精心指导。

感谢学长邵钰堃和我在关于 VGQEC 内容的讨论。

感谢 BIMSA 提供服务器算力资源来进行数值模拟实验。