画像処理

幾何変換

宮崎大学 工学部 情報システム工学科

３年後期
第 3 回

本日の内容

幾何変換（アフィン変換）

- 平行移動，回転，拡大・縮小，剪断
- 斎次座標（同次座標）表現
- 再配列，内挿法

アフィン変換(p.289, p.124)

アフィン変換の式

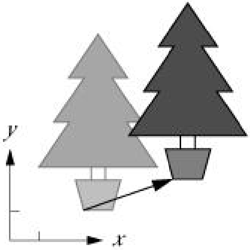
$$
\begin{aligned}
x' &= ax + by + e \\
y' &= cx + dy + f
\end{aligned}
$$

(x, y)： 変換前の座標
(x', y')： 変換後の座標
※平行移動，回転，拡大・縮小，剪断の任意の組み合わせ
性質：($ad - bc \neq 0$)

- (x,y) と (x',y') が１対１対応
- 直線は直線、平行線は平行線に対応
- ２次曲線は２次曲線に対応

平行移動

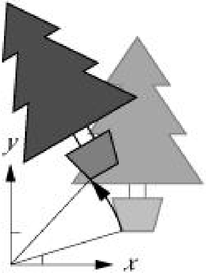
$$\begin{aligned} x' &= x + e \\ y' &= y + f \end{aligned}$$



(a) 平行移動

回転

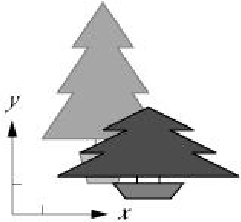
$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\
y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \\
&\quad (a = d, b = -c, a^2 + b^2 = 1)
\end{aligned}
$$



(b)　回転

拡大・縮小

$$
\begin{aligned}
x' &= ax \\
y' &= dy
\end{aligned}
$$



(c)　拡大縮小

反転

$x' = x, y' = -y$

$x' = -x, y' = -y$

$x' = x, y' = y$

$x' = -x, y' = y$

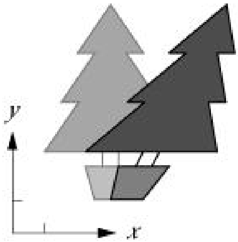
剪断（スキュー）

$$\begin{aligned} x' &= x + y\tan\alpha \\ y' &= y \end{aligned}$$

水平方向

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= x\tan\beta + y \end{aligned}$$

垂直方向



(d)　剪断

アフィン変換の例題(1)

点 A(5, 3), 点 B(2, 6) を以下の手順で変換した場合，各段階での座標値を求めよ.

1. X 軸方向に 2, Y 軸方向に -3 平行移動

   ____
2. 原点を中心に 90° 回転

   ____
3. X 軸方向に 1.5, Y 軸方向に 0.5 拡大

   ____

行列表示(p.125)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}' = A\boldsymbol{u} + \boldsymbol{t}$$

斎次座標（同次座標）

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}' = \bar{A}\bar{\boldsymbol{u}}$$

利点：

一連のアフィン変換を行列の積で表現可能

$\Rightarrow$ あらかじめ計算しておくことで計算量を削減

行列表示(p.125)

斎次座標（同次座標）

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & t_1 \\ a_{10} & a_{11} & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\
\bar{\boldsymbol{u}}' &= \bar{A}\bar{\boldsymbol{u}} \\
\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & s_1 \\ b_{10} & b_{11} & s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \\
\bar{\boldsymbol{u}}'' &= \bar{B}\bar{\boldsymbol{u}}'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & s_1 \\ b_{10} & b_{11} & s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & t_1 \\ a_{10} & a_{11} & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\
\bar{\boldsymbol{u}}'' &= \bar{B}\bar{A}\bar{\boldsymbol{u}} = \bar{C}\bar{\boldsymbol{u}}
\end{aligned}
$$

アフィン変換の例題 (2)

- 以下のアフィン変換を表す斎次行列を示せ.

1. X 軸方向に 2
Y 軸方向に -3
平行移動

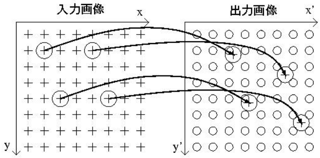
2. 原点を中心に
90° 回転

3. X 軸方向に 1.5
Y 軸方向に 0.5
拡大

- 上記を順番に適用したのと等価な斎次行列を示せ.

再配列

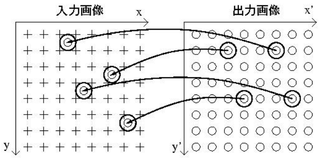
順変換



入力画像の座標値を
出力画像の座標値に変換

$$\bar{\boldsymbol{u}}' = \bar{A}\bar{\boldsymbol{u}}$$

逆変換



出力画像の座標値を
入力画像の座標値に変換

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \bar{A}^{-1}\bar{\boldsymbol{u}}'$$

内挿法

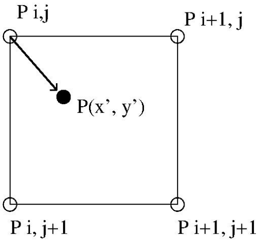
モデル変換の結果は必ずしも格子点上にこない

⇒ 補間（内挿）が必要

- 最近隣内挿法
- 共 1 次内挿法
- 3 次畳み込み内挿法

最近隣内挿法(最近傍法 p.126)

内挿したい点に最も近い格子点の画素値を採用



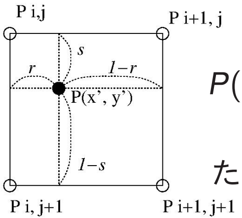
$$
\begin{aligned}
P(x', y') &= P_{i,j} \\
\text{ただし } i &= [x' + 0.5]\,, j = [y' + 0.5]
\end{aligned}
$$

特徴：

- 元の画素値が変化しない
- 拡大では画像がブロック状に見える

共1次内挿法(線形補間法 p.126)

内挿したい点の周囲4点から画素値を線形補間



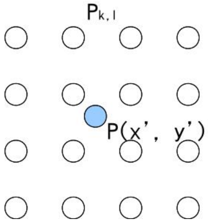
$$
\begin{aligned}
P(x', y') &= (1-r)(1-s)P_{i,j} + r(1-s)P_{i+1,j} \\
&\quad + (1-r)sP_{i,j+1} + rsP_{i+1,j+1} \\
\text{ただし } i &= [x'], j = [y']
\end{aligned}
$$

特徴：

- 元の画素値が変化する
- 平滑化の効果がある

3 次畳み込み内挿法 (3 次補間法 p.127)

内挿したい点の周囲 16 点から画素値を 3 次式補間



$$P(x', y') = \sum_k \sum_l P_{k,l} C(k - x') C(l - y')$$

ただし　$P_{k,l}$　は (x', y') の近傍の点

$$C(d) = \begin{cases} 1 - 2|x|^2 + |x|^3 \\ (0 \le |x| < 1) \\ 4 - 8|x| + 5|x|^2 - |x|^3 \\ (1 \le |x| < 2) \end{cases}$$

特徴：

- 元の画素値が変化する
- $C(d) = \frac{\sin \pi d}{(\pi d)}$ の近似
- 理論上，濃度を完全に復元できる

内挿の効果

原画像

最近隣

共一次

３次