画像処理

２次元フーリエ変換

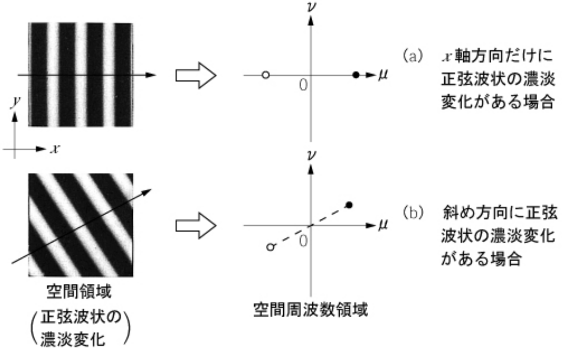
宮崎大学 工学部 情報システム工学科

３年後期

第 5 回

信号の周波数解析

- 任意の信号（画像）を，正弦波の和で表す
- 各正弦波の強さを解析／処理することにより，目的とする情報／効果を得る



【空間周波数】

単位長さあたりの正弦波状の濃淡変化の繰り返し回数

正弦波の表現方法

$$
\begin{aligned}
h_n(t) &= C_n \cos(\omega t + \theta_n) && (0 \leq n \leq \infty) \\
&= A_n \cos(\omega t) + B_n \sin(\omega t) && (0 \leq n \leq \infty) \\
&= G_n exp(j\omega t) = G_n e^{j\omega t} && (-\infty \leq n \leq \infty) \\
&= G_n(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))
\end{aligned}
$$

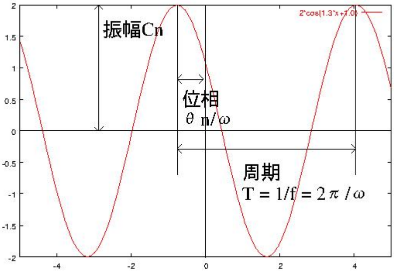
$$
\begin{aligned}
C_n &= \sqrt{(A_n^2 + B_n^2)} \\
\theta_n &= -\tan^{-1} B_n / A_n \\
G_n &= 1/2(A_n - jB_n)
\end{aligned}
$$

C_n: 振幅　θ_n: 位相

ω: 角周波数

f: 周波数　T: 周期

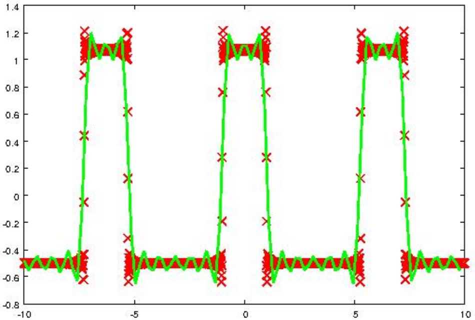
$\omega = 2\pi f = 2\pi / T$



周期関数の表現

例：矩形パルス列

$$g(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{sin(n)}{n} cos(nt)$$



緑：N=8 まで
赤：N=100 まで

項数を増やすと矩形パルス列に近付く

フーリエ級数展開(p.39)

一定周期 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ をもつ信号 $g(t)$ は，基本角周波数 ω_0 の整数倍の周期をもつ正弦波の和により表現できる.

$$
\begin{aligned}
g(t) &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \\
&= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos n\omega_0 t + B_n \sin n\omega_0 t\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n \exp(jn\omega_0 t) \\
G_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt
\end{aligned}
$$

フーリエ変換

任意の有限な信号 $g(t)$ に対して，
　フーリエ変換 $G(\omega)$ が存在し，以下が成り立つ．

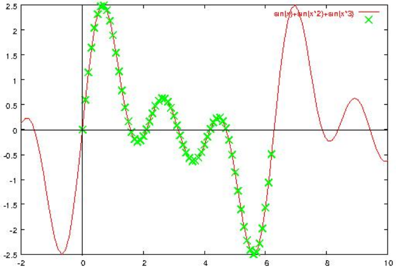
$$
\begin{aligned}
G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\exp(-j\omega t)dt \\
g(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\exp(j\omega t)d\omega
\end{aligned}
$$

任意の信号は，周期信号において，
　　周期 $T \to \infty$
とした極限とみなせる．

観測信号の表現

実際の観測信号

- 離散点のデータのみが得られる
  = 関数が与えられるのではない
- 有限個のデータのみが得られる
  = 周期信号ではない



離散フーリエ変換(DFT)(p.41)

信号 $g(m)$ の値が m=0〜M-1 の M 個の点で与えられる場合，以下が成り立つ

$$
\begin{aligned}
G(k) &= \sum_{m=0}^{M-1} g(m)\exp(-j2\pi mk/M) = \sum_{m=0}^{M-1} g(m)W^{mk} \\
g(m) &= \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} G(k)\exp(j2\pi mk/M) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} G(k)W^{-mk} \\
W &= \exp(-j2\pi/M) = \cos(-2\pi/M) + j\sin(-2\pi/M)
\end{aligned}
$$

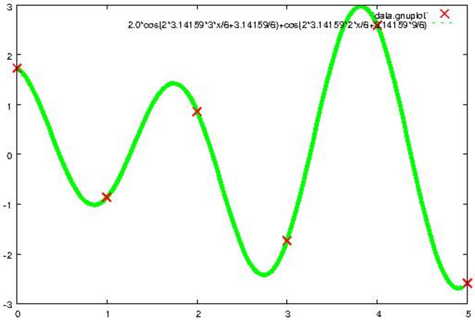
- Δ t 間隔毎のデータのみを利用
- M 個のデータが周期 M Δ t で繰り返されるとみなし，その 1 周期分を考える

離散フーリエ変換の例

データ

$g(0)$	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$	$g(4)$	$g(5)$
$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$	$3\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-3\frac{\sqrt{3}}{2}$

離散フーリエ変換の例



$$g(x) = 2.0\cos(\pi x + \pi/6) + \cos(2\pi x/3 + 3\pi/2)$$

$G(0)$	$G(1)$	$G(2)$	$G(3)$	$G(4)$	$G(5)$
$0 + j0$	$0 + j0$	$0 - j3$	$6\sqrt{3} + j0$	$0 + j3$	$0 + j0$

2 次元離散フーリエ変換(p.41)

x 方向に 1 次元フーリエ変換を行った後，y 方向に 1 次元フーリエ変換を行ったものとみなせる．

$$
\begin{aligned}
G(k,l) &= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} g(m,n) W_1^{mk} W_2^{nl} \\
g(m,n) &= \frac{1}{MN}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{M-1} G(k,l) W_1^{-mk} W_2^{-nl}
\end{aligned}
$$

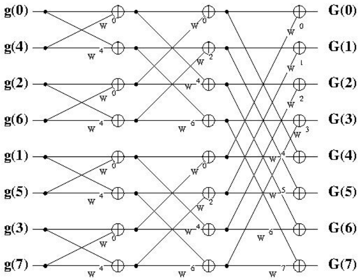
$$
\begin{aligned}
W_1^{mk} &= \exp(-j2\pi mk/M) \\
W_2^{nl} &= \exp(-j2\pi nl/N)
\end{aligned}
$$

DFT プログラム

```
void dft2(K_IMAGE *inp_img, K_IMAGE *out_img)
{
  int xsize = k_xsize(inp_img);
  int ysize = k_ysize(inp_img);
  float ***optr = (float ***)k_data(out_img);
  uchar **iptr  = (uchar **)k_data(inp_img)[0];

  for(int l = 0; l < ysize; l++) {
  for(int k = 0; k < xsize; k++) {

    optr[0][l][k] = optr[1][l][k] = 0.0;
    for(int n = 0; n < ysize; n++) {
    for(int m = 0; m < xsize; m++) {
        double mk = -2.0 * M_PI * m * k / xsize;
        double nl = -2.0 * M_PI * n * l / ysize;

        optr[0][l][k] +=               // 実部
            ___________________________________;
        optr[1][l][k] +=               // 虚部
            ___________________________________;
    } }
  } }
}
```

高速フーリエ変換(FFT)

$$
\begin{aligned}
G(k) &= \sum_{m=0}^{M-1} g(m) W^{mk} = G_0(k) + W^k G_1(k) \\
G_0(l) &= \mathcal{F}\{g(2l)\}, G_1(l) = \mathcal{F}\{g(2l+1)\}
\end{aligned}
$$



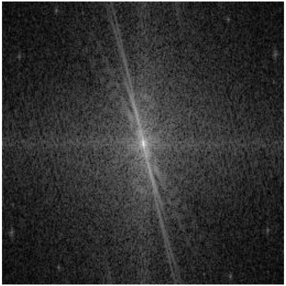
計算量

FFT：$O(MN \log(MN))$

通常：$O((MN)^2)$

パワースペクトル

各周波数成分の波の強さ（振幅）を図示したもの
対数スケールで表示することが多い



原点：直流成分
(k, l)：周波数 k, l