

数值計算法・数值解析

数值積分：台形則

宮崎大学 工学部

第 4 回

数値積分

定積分

$$T = \int_a^b f(x) dx$$

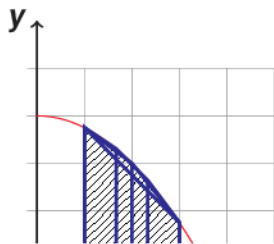
の近似値を数値計算により求める.

- ▶ 区間 $[a, b]$, 被積分関数 $f(x)$ が与えられる
- ▶ $f(x)$ が初等関数で表されていても, その不定積分は初等関数で表現できない場合がある
- ▶ 関数 $f(x)$ ではなく, 観測値の組 $\{(x_i, f(x_i))\}$ からその積分値を計算したい場合もある.

⇒ 数値積分が必要

数値積分：台形則

- ▶ 区間 $[a, b]$ を n 個に分割
- ▶ 各小区間の面積を台形により近似
- ▶ それらを足しあわせて積分値とする



【台形則】

$$h = \frac{b - a}{n}$$

$$T = \left\{ \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i * h) \right\} h$$

例題 1

以下の定積分を分割数 $n = 4$ の台形則で計算

$$\int_1^3 \left(-\frac{x^2}{4} + 4 \right) dx$$

例題 2

以下の定積分を分割数 $n = 10$ の台形則で計算

$$\int_1^3 \left(-\frac{x^2}{4} + 4 \right) dx$$

台形則のプログラム (1/2)

```
int main(int argc, char *argv[])
{
    double      a = 0.0;
    double      b = 1.0;
    int         n = 10;

    printf("%f_ %f_ %d_ %.15f\n",
           a, b, n, trapezoid(func, a, b, n));
    return 0;
}

double func(double x)
{
    return - (x * x) / 4.0 + 4.0;
}
```

台形則のプログラム (2/2)

```
double trapezoid(double (*func)(double),
                 double a, double b, int n)
{
    double      h = (b - a) / n;
    double      s = (func(a) + func(b))/2.0;

    for(int i = 1; i < n; i++) {
        s += func(a + h * i);
    }

    return s * h;
}
```

台形則の誤差

$$T = \int_1^3 \left(-\frac{x^2}{4} + 4 \right) dx = 5.833 \dots$$

n	台形則	誤差	誤差 * n^2
1	5.500000000000000	-0.333333333333333	-0.333333333333333
2	5.750000000000000	-0.083333333333333	-0.333333333333332
4	5.812500000000000	-0.020833333333333	-0.333333333333329
8	5.828125000000000	-0.005208333333333	-0.333333333333314
16	5.832031250000000	-0.001302083333333	-0.333333333333258
32	5.833007812500000	-0.000325520833333	-0.333333333333030
64	5.833251953125000	-0.000081380208333	-0.333333333332121
128	5.833312988281250	-0.000020345052083	-0.3333333333328483
256	5.833328247070312	-0.000005086263021	-0.3333333333313931

※ 一般に台形則の誤差は $1/n^2$ に比例

⇒ 分割数を 2 倍にすると誤差は 1/4 になる