数値計算法・数値解析

方程式の根：２分法

宮崎大学 工学部

第 1 回

方程式の根

方程式 $f(x) = 0$ の近似解を数値的に求める.

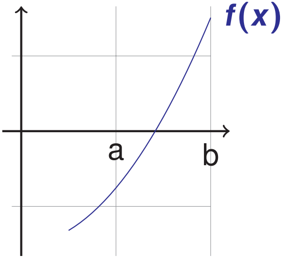
【中間値の定理】
連続な実関数 $f(x)$ と実数 $a < b$ について,

$$f(a)f(b) < 0$$

ならば,

$$f(c) = 0$$

となる実数 $c(a < c < b)$ が必ず存在する.



$f(a) < 0, f(b) > 0$ ならば, $f(x)$ は必ずその間で 0 になる

2 分法

方程式 $f(x) = 0$ の近似解を数値的に求める．

- 連続関数 $f(x)$ と区間 $[a, b]$，解の精度 $\varepsilon > 0$ が与えられる
- 関数 $f(x)$ は，$f(a)f(b) < 0$ を満たす
- 方程式 $f(x) = 0$ は $[a, b]$ 間で根を一つのみ持つものとする
- 得られる近似解は，真の解と誤差 $\pm\varepsilon/2$ 以内とする

2 分法の手順

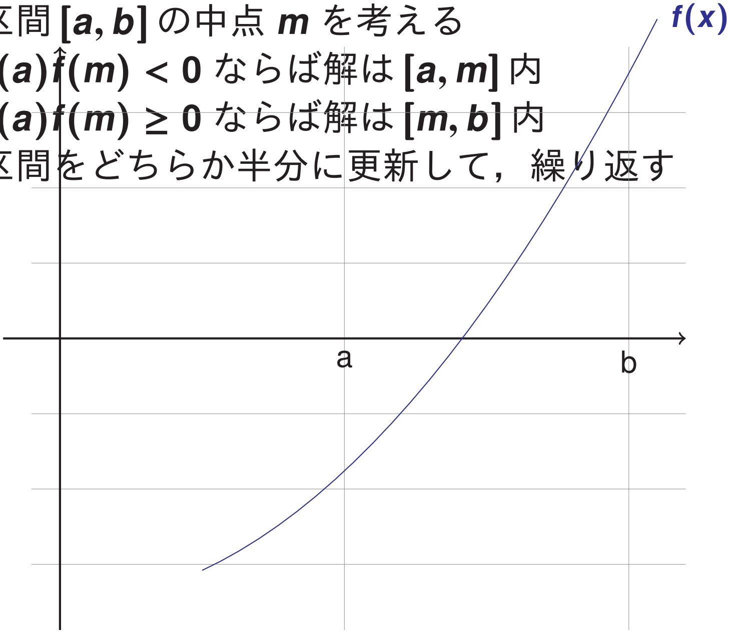
方程式 $f(x) = 0$ の近似解を数値的に求める．

【手順】

1. $|a - b| > \varepsilon$ の間，以下を繰り返す
   1.1 $m := (a + b)/2$ と置く
   1.2 $f(a)f(m) < 0$ ならば $b := m$ とする
   そうでなければ，$a := m$ とする
2. $(a + b)/2$ を解として終了

【考え方】

- 区間 $[a, b]$ の中点 m を考える
- $f(a)f(m) < 0$ ならば解は $[a, m]$ 内
- $f(a)f(m) \geq 0$ ならば解は $[m, b]$ 内
- 区間をどちらか半分に更新して，繰り返す



例題 1

- 方程式 $f(x) = x^2 - 2 = 0$ の近似解を求める
- 区間は $[1, 2]$ 内とする
- $\varepsilon = 0.01$

a	b	m	$\lvert a-b \rvert$	$f(a)$	$f(m)$	$f(a)f(m)$

ans = ______

例題 2

- 方程式 $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ の近似解を求める
- 区間は $[0, 1]$ 内とする
- $\varepsilon = 0.001$

2分法のプログラム

```
int main(int argc, char *argv[])
{
  double      a = 1.0;
  double      b = 2.0;

  printf("%.15lf\n",
         bisection(f, a, b));

  return 0;
}


double f(double x)
{
  return x * x - 2.0;
}
```

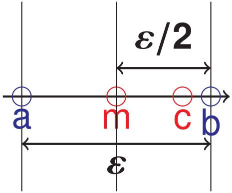
```
#define EPS (1e-10)
double bisection(double (*func)(double),
                 double a, double b)
{
  double      m;

  while(fabs(a-b) > EPS) {
    m = (a + b) / 2.0;
    if (func(a) * func(m) < 0.0) {
      b = m;
    }else{
      a = m;
    }
  }
  return (a+b)/2.0;
}
```

精度 ε

$$|a - b| \le \varepsilon$$

$\Rightarrow$ 真の解を c とすると

$$|c - m| \le \varepsilon/2$$



区間 $[a, b]$ の求め方

- 粗く数値計算して，根の概数を求める
- 全体で連続関数でなくても，根の周辺で連続であれば解が求まる

多元関数の場合

$\boldsymbol{f(x, y, z) = 0}$ など，変数が複数の場合.

- 一般には，解が 1 点ではない
  $\Rightarrow$ 連立方程式の解法