数値計算法・数値解析

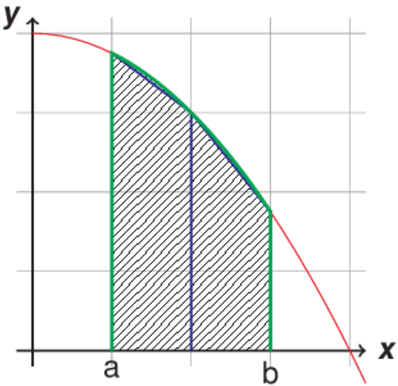
数値積分：シンプソン則

宮崎大学 工学部

第 5 回

数値積分：シンプソン則の導出

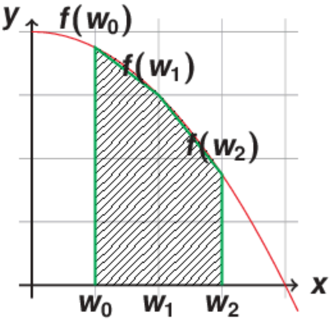
- 台形則は小区間 [p, p+h] を 1 次式で近似
- 3 点が与えられれば，2 次式で近似できる



数値積分：シンプソン則

３点 $(w_0, f(w_0)), (w_1, f(w_1)), (w_2, f(w_2))$ を通る
２次式 $P(x)$ を区間 $[w_0, w_2]$ で積分

$$\int_{w_0}^{w_2} P(x)dx = \frac{h}{3}\{f(w_0) + 4f(w_1) + f(w_2)\}$$



数値積分：シンプソン則

- 関数 f(x), 区間 [a, b], 分割数 n (偶数) が与えられる
- 全体の区間 [a, b] を３点ずつの区間に分け，各区間を２次式で補間
- 補間した範囲の積分値を計算
- それらの和を全体の積分値とする

【シンプソン則】

$$
\begin{aligned}
h &= (b-a)/n \\
S &= \frac{h}{3}\Biggl\{ f(a) + f(b) + 4f(a+h) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n/2-1} \Bigl\{ 2f(a+2kh) + 4f(a+(2k+1)h) \Bigr\} \Biggr\}
\end{aligned}
$$

例題 1

以下の定積分を分割数 n = 4 のシンプソン則で計算

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

例題 2

以下の定積分を分割数 n = 16 のシンプソン則で計算

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

シンプソン則のプログラム (1/2)

```
int main(int argc, char *argv[])
{
  double       a = 1.0;
  double       b = 2.0;
  int          n = 16;

  printf("%f␣%f␣%d␣%.15f\n",
         a, b, n, simpson(func, a, b, n));
  return 0;
}

double func(double x)
{
  return 1.0/x;
}
```

シンプソン則のプログラム (2/2)

```
double simpson(double (*func)(double),
               double a, double b, double n)
{
  double h = (b - a) / n;
  double s = func(a) + func(b) + 4.0*func(a+h);

  for(int k = 1; k < n/2; k++) {
    s += 2.0 * func(a + 2 * k * h)
         + 4.0 * func(a + (2 * k + 1) * h);
  }

  return s * h/3.0;
}
```

シンプソン則の誤差

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right) dx = [\ln x]_1^2 = 0.693147180559945\ldots$$

n	シンプソン則	誤差	誤差 * n^4
2	0.694444444444444	0.001297263884499	0.020756222151984
4	0.693253968253968	0.000106787694023	0.027337649669903
8	0.693154530654531	0.000007350094585	0.030105987421848
16	0.693147652819419	0.000000472259474	0.030949996871641
32	0.693147210289823	0.000000029729878	0.031174036208540
64	0.693147182421455	0.000000001861510	0.031230948865414
128	0.693147180676343	0.000000000116398	0.031245231628418
256	0.693147180567221	0.000000000007276	0.031248092651367

※ 一般にシンプソン則の誤差は $1/n^4$ に比例

⇒ 分割数を 2 倍にすると誤差は 1/16 になる

⇒ 同じ分割数でも台形則よりも精度が高い！

その１：シンプソン則の誤差

$$S = \int_1^3 \left(-\frac{x^2}{4} + 4 \right) dx = 5.833\ldots$$

n	シンプソン則	誤差	誤差 * n^4
2	5.833333333333333	0.000000000000000	0.000000000000000
4	5.833333333333333	0.000000000000000	0.000000000000000
8	5.833333333333333	0.000000000000000	0.000000000000000
16	5.833333333333333	0.000000000000000	0.000000000000000
32	5.833333333333333	0.000000000000000	0.000000000000000
64	5.833333333333333	0.000000000000000	0.000000000000000
128	5.833333333333333	0.000000000000000	0.000000000000000
256	5.833333333333333	0.000000000000000	0.000000000000000

※ f(x) が２次多項式ならば誤差０（当然！！）

その２：高次多項式での近似

台形則：　　　　　２点を１次式で lagurange 補間
シンプソン則：　３点を２次式で lagurange 補間

与えられた n 点を n-1 次式で lagurange 補間すれば ...
⇒ ニュートン・コーツ公式

ニュートン・コーツ公式

n 点 $\{(px_k, py_k)\}$, 区間 [a,b] が与えられる
lagurange 補間

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} L_k(x) py_k, \quad L_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n-1} \frac{x - px_j}{px_k - px_j}$$

ニュートン・コーツ公式

$$\int_a^b P(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} py_k \int_a^b L_k(x)dx$$

※高次多項式による補間は誤差が大きい

その３：台形則とシンプソン則の関係

シンプソン則

$$S = \frac{h}{3}\{f(w_0) + 4f(w_1) + f(w_2)\}$$

台形則１区間

$$T_1 = \frac{h}{2}\{f(w_0) + f(w_2)\}$$

台形則２区間

$$T_2 = \frac{h}{2}\{f(w_0) + 2f(w_1) + f(w_2)\}$$

$S = 4/3T_2 - 1/3T_1$ の関係がある

- 台形則の結果からシンプソン則での値が計算できる
- 誤差は $1/n^2$ に比例から $1/n^4$ に比例に減る

ロンバーグ積分

$S = 4/3T_2 - 1/3T_1$ の関係を一般化

分割数　$n = 2^m (m = 0, 1, \ldots)$
レベル　$k(k = 1, 2, \ldots; k \leq m)$

$$T_m^0 \quad : \quad \text{台形則での結果}$$

$$T_m^k = \frac{4^k T_m^{k-1} - T_{m-1}^{k-1}}{4^k - 1}$$

※急速に誤差を小さくできる