数値計算法・数値解析

方程式の根：ニュートン法

宮崎大学 工学部

第 2 回

第 2 回 方程式の根：ニュートン法

方程式 $f(x) = 0$ の近似解を数値的に求める.

【テーラー展開】

実数 x の周りで無限回微分可能な実数関数 $f(x)$ について,

$$f(x + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \Delta x^n$$

ニュートン法の原理(1/2)

x_0 に対して $c = x_0 + \Delta x$ が $f(x) = 0$ の真の解である時,

$$\begin{aligned} 0 &= f(c) = f(x_0 + \Delta x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x_0)\Delta x^2 + \ldots \end{aligned}$$

x_0 が真の解 c に十分近ければ，Δx^2 は非常に小なので,

$$f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \approx 0$$

この時,

$$\begin{aligned} \Delta x_0 &:= -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x_1 &:= x_0 + \Delta x_0 \end{aligned}$$

とすると，x_1 は x_0 より良い c の近似になっている.

ニュートン法の原理 (2/2)

これより，

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \\ x_{i+1} &= x_i + \Delta x_i \end{aligned}$$

の計算を繰り返すことで，x_n は真の解 c に近づいていく．

ニュートン法

方程式 $f(x) = 0$ の近似解を数値的に求める.

- 連続関数 $f(x)$，その微分関数 $f'(x)$，初期近似解 x_0，精度 $\varepsilon > 0$ が与えられる.
- 方程式 $f(x) = 0$ は，x_0 の近傍で解を持つ

【手順】

1. $i = 0, 1, \ldots$ について以下を繰り返す
   1.1 $\Delta x_i = -f(x_i)/f'(x_i)$
   1.2 $x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$
   1.3 $|\Delta x_i / x_{i+1}| < \varepsilon$ ならばループを抜ける
2. x_{i+1} を解として終了

例題 1

- 方程式 $f(x) = x^2 - 2 = 0$ の近似解を求める
- 初期近似解は $x_0 = 2.0$ とする
- 繰り返し 4 回実行する

ニュートン法の解釈

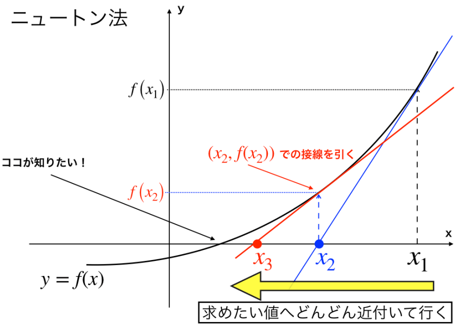
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

x_{i+1} は接線

$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

が x 軸と交わる点

⇒ 収束しない場合もある



例題 2

- 方程式 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$ の近似解を求める
- 初期近似解は $x_0 = 0.0$ とする

ニュートン法のプログラム(1/2)

```
int main(int argc, char *argv[])
{
  double       a = 2.0;
  printf("%.15lf\n", newton(f, fdash, a));
  return 0;
}

double f(double x)
{
  return x * x - 2.0;
}

double fdash(double x)
{
  return 2.0 * x;
}
```

ニュートン法のプログラム (2/2)

```
double newton(double (*func)(double),
              double (*dfunc)(double), double x0)
{
  double      x = x0;
  double      dx;
  int         count = 0;

  do {
    dx = - func(x) / dfunc(x);
    x = x + dx;
    count++;
  } while( fabs(dx / x) > EPS
          && count < MAX_LOOP);

  return x;
}
```

反復で近似解が改良される？

x_{i+1} は x_i より c に近い？

真の解 c，近似解 x_i，誤差 Δx

$x_i - c$ の２乗のオーダーで値が小さくなっていく

cf. ２分法では，$x_i - c$ の１乗のオーダー

収束判定

何回繰り返せば良い？

- $|x_i - c| < \varepsilon$
  × 真の解 c は分からない
- $|\Delta x_i| < \varepsilon$
  △ 近似解の変化が小さいので収束
  × x_i が非常に大きい数の場合，ε 以下にならない
- $|\Delta x_i / x_i| < \varepsilon$
  ◯

※ 真の解が分からない ⇒ 得られた近似解の精度も不明

※ 収束しない場合がある ⇒ 反復回数に上限を設ける