ЗАДАЧИ ПО АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

I ЧАСТ: Линейна зависимост и независимост на вектори.

1 зад. Даден е триъгълник *АВС*, за който . Върху страните *AC* и *BC* са нанесени съответно точките *M* и *N* така, че *CM*:*MA* = 2:3 и *CN*:*NB* = 2:3.

1. Да се изразят векторите чрез и . Да се покаже, че правите *MN* и *АВ* са успоредни;
2. Да се докаже, че правите *AN* и *BM* имат точно една обща точка.

2 зад. Даден е успоредник *ABCD*, за който , точката , а точката *P* е от страната *BC* такава, че *BP*:*PC* = 3:1.

1. Да се изразят векторите чрез и ;
2. Ако точката *Q* е от страната *AD* такава, че *AQ*:*QD* = 1:3, да се докаже, че точките *P*, *Q* и *О* са колинеарни.

3 зад. Даден е успоредник *ABCD*, за който , точката . Точките M и N са медицентровете съответно на триъгълник ABD и триъгълник ABC.

1. Да се изразят векторите чрез и ;
2. Да се покаже, че правите *MN* и *АВ* са успоредни.

4 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който . Точките *А1*, *C1* и *O1* са медицентровете съответно на триъгълниците: *BOC*, *AOB* и *ABC*.

1. Да се изразят медианите на тетраедъра чрез , и ;
2. Да се докаже, че векторите са линейно независими;
3. Да се докаже, че векторите са линейно зависими, т.е. четирите точки *A*, *C*, *А1* и *C1­* лежат в една равнина. От двете подусловия b) и c) следва, че двете прави *AА1* и *СС1* се пресичат в единствена точка *М*;
4. Да се докаже, че намерената по-горе точка *М* лежи и на третата медиана *OO*1 и да се намерят отношенията, в които т. *М* дели всяка от медианите.

5 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който . Точките *М*, *N*, *P* и *Q* са медицентровете съответно на триъгълниците: *AOB,* *BOC*, *ABC* и *АОС*. Да се докаже, че следните прави са две по две успоредни: *MN* и *АС*, *MQ* и *ВС*, *QN* и *AB*, *MP* и *ОС*, *NP* и *ОА*, *PQ* и *ОВ*.

II ЧАСТ: Скаларно произведение на два вектора

1 зад. Даден е триъгълник *АВС*, за който . Нека . Дадени са точките *F* и *D*, съответно от страните *AB* и *CB* на триъгълника, такива че: *AF*:*FB* = 1:3 и *CD*:*DB* = 1:3.

1. Да се изразят векторите и чрез и ;
2. Да се намерят дължините на векторите и ;
3. Да се намери косинусът на ъгъла между векторите и .

2 зад. Даден е триъгълник *АВС*, за който . Нека . Медианите *АА*1 и *ВВ*1 на триъгълника са взаимно перпендикулярни. Да се определи *cos.*

Упътване: Да се изразят векторите и чрез и , и да се пресметне скаларното им произведение.

3 зад. Даден е триъгълник *АВС*, за който . Нека . Отсечката *CH* е височина в триъгълника, т.*H* *AB*. Да се изрази вектора чрез и .

4 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който . Нека и трите вектора са два по два перпендикулярни. Построена е височината *ОH* на тетраедъра, т.*H* (*ABC)* и . Да се изрази вектора чрез , и .

5 зад. Спрямо ОКС *К = Оxy* са дадени точките: . Да се докаже, че трите точки образуват триъгълник. Да се намерят:

1. Координатите на медицентъра *М* на триъгълник *ABC* и разстоянието от т.*М* до върха *C*;
2. Координатите на петите на трите височини на триъгълника, спуснати от върховете *А*, *B* и *C*.

6 зад. Спрямо ОКС *К = Оxyz* са дадени точките: . Да се докаже, че четирите точки не лежат в една равнина. Да се намерят:

1. Да се намерят дължините на страните на триъгълник *ABC*;
2. Косинусите на ъглите на триъгълник *ABC*;
3. Координатите на медицентъра *G* на триъгълник ***ABD*** и дължината на вектора ;
4. Координатите на точката *H*: т.*H* (*ABC)* и .

III ЧАСТ: Векторно и смесено произведение на вектори

1 зад. Спрямо ОКС *К = Оxyz* са дадени векторите Да се намерят координатите на неизвестния вектор от уравненията: .

2 зад. Дадени са векторите . Нека . Да се определи неизвестния вектор от равенствата : .

3 зад. Дадени са векторите . Нека и

.

1. Да се пресметне смесеното произведение и да се докаже, че трите вектора са линейно независими;
2. Нека *OABC* е тетраедър като:). Да се намери обема на тетраедъра *OABC*.

4 зад. Дадени са векторите . Нека . В триъгълника *ОАВ*

), а ).

1. Да се намери лицето на триъгълника;
2. Ако т.*М* е медицентърът на триъгълник *ОАВ*, да се изрази вектора чрез и , и да се пресметне дължината му.

5 зад. Дадени са векторите , като .

Нека , ), ). Да се докаже, че векторите са линейно независими и да се намери обема на тетраедъра *OABC*.

6 зад. Спрямо ОКС *К = Оxyz* са дадени точките: .

1. Да се намери лицето на триъгълник *ABC*;
2. Да се намери обема на тетраедъра *ABCD*.

7 зад. Спрямо ОКС *К = Оxy* в равнината са дадени точките: . Да се намери лицето на триъгълник *ABC*.