ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5.
Применение преобразования Лапласа и Z-преобразования при решении задач: решение рекуррентных соотношений

Найти формулу общего члена последовательности, если $x_0 = 1$, а каждый последующий на 2 больше удвоенного предыдущего.

Имеем рекуррентную формулу:

$$\boxed{x_{n+1} = 2 + 2x_n, x_0 = 1.}$$

Пусть $x(n)$ – неизвестная решетчатая функция. Тогда имеем линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами

$$x(n+1) = 2 + 2x(n), x(0) = 1.$$

С помощью Z-преобразования переведем это уравнение ***из области оригиналов в область изображений***.

Применим Z-преобразование к обеим частям разностного уравнения

$$Z(x(n+1)) = Z(2 + 2x(n)),$$

Учитывая свойство *линейности* Z-преобразования, получим

$$Z(x(n+1)) = 2Z(1) + 2Z(x(n)).$$

Воспользуемся табличными значениями и применим *формулу сдвига*

$$\boldsymbol{f(n+k) \leftrightarrow z^k F(z) - \left(z^k f(0) + z^{k-1} f(1) + \cdots + z f(k-1)\right).}$$

В частности, имеем $Z(x(n)) = F(z),$

$$Z(x(n+1)) = zF(z) - zx(0),$$

$$Z(1) = \frac{z}{z-1},$$

и операторное соотношение относительно $F(z)$ – изображения искомого решения $x(n)$:

$$zF(z) - z \cdot 1 = \frac{2z}{z-1} + 2F(z),$$

или $(z-2)F(z) = \dfrac{2z}{z-1} + 1,$ следовательно, $\boxed{F(z) = \dfrac{z^2 + z}{(z-1)(z-2)}.}$

Восстановим решение $x(n)$, применяя теорию вычетов.

Функция $F(z)$ имеет две особые точки $z_1 = 1$ и $z_2 = 2$ – простые полюсы.

Если $a_1, a_2, ..., a_m$ – особые точки функции $F(z)$, то $x(n) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=a_k} F(z) z^{n-1}.$

Если a – простой полюс, то $\operatorname*{Res}_{z=a} F(z) z^{n-1} = \lim_{z \to a} F(z) z^{n-1} (z-a).$

Если же a – полюс кратности m, то $\operatorname*{Res}_{z=a} F(z) z^{n-1} = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \dfrac{d^{m-1}\left(F(z) z^{n-1} (z-a)^m\right)}{dz^{m-1}}.$

Имеем:

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{z^2+z}{(z-1)(z-2)}z^{n-1}=\lim_{z\to 1}\frac{z^2+z}{(z-2)}z^{n-1}=-2;$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2}\frac{z^2+z}{(z-1)(z-2)}z^{n-1}=\lim_{z\to 2}\frac{z^2+z}{(z-1)}z^{n-1}=6\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^n.$$

Таким образом, искомое решение имеет вид: $\boxed{x_n=3\cdot 2^n-2.}$

Пример 2.

Решить линейное разностное уравнение, используя Z-преобразование:

$$x(n+3)-3x(n+2)+3x(n+1)-x(n)=2^n,$$

$$x(0)=0,$$

$$x(1)=0,$$

$$x(2)=1.$$

Установим соответствие:

$$x(n)\leftrightarrow F(z)$$

$$x(n+1)\leftrightarrow z(F(z)-x(0))=zF(z)$$

$$x(n+2)\leftrightarrow z^2(F(z)-x(0)-\frac{x(1)}{z})=z^2F(z)$$

$$x(n+3)\leftrightarrow z^3(F(z)-x(0)-\frac{x(1)}{z}-\frac{x(2)}{z^2})=z^3F(z)-z$$

$$2^2\leftrightarrow\frac{z}{z-2}$$

Тогда, подставляя в уравнение, получим:

$$z^3F(z)-z-3z^2F(z)+3zF(z)-F(z)=\frac{z}{z-2}.$$

Операторное уравнение имеет вид:

$$F(z)(z^3-3z^2+3z-1)=\frac{z}{z-2}+z$$

$$F(z)=\frac{z+z^2-2z}{(z-2)\left((z-1)(z^2+z+1)-3z(z-1)\right)}=$$

$$=\frac{z^2-z}{(z-2)(z-1)(z^2-2z+1)}=\frac{z}{(z-2)(z-1)^2}.$$

Вычислим вычеты:

$z=2$ – простой полюс: $\operatorname*{Res}_{z=2}F(z)z^{n-1}=\lim_{z\to 2}\frac{z\cdot z^{n-1}}{(z-2)(z-1)^2}\cdot(z-2)=2^n,$

$z=1$ – полюс кратности 2: $\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(F(z)z^{n-1}(z-1)^2\right)=\left(\frac{z^n}{z-2}\right)'=\frac{nz^{n-1}(z-2)-z^n}{(z-2)^2},$

$$\operatorname*{Res}_{z=1}F(z)z^{n-1}=\lim_{z\to 1}\frac{nz^{n-1}(z-2)-z^n}{(z-2)^2}=\frac{-n-1}{(-1)^2}=-n-1.$$

Таким образом,

$$x(n) = \operatorname*{Res}_{z=2} F(z) z^{n-1} + \operatorname*{Res}_{z=1} F(z) z^{n-1} = 2^n - n - 1.$$

Ответ: $x(n) = 2^n - n - 1.$