Лекция

Дифференциальное уравнение Бесселя, функции Бесселя

Большое число самых разнообразных задач, призванных ответить на актуальные технические вопросы, связано с применением функций Бесселя. Это объясняется тем, что решение уравнений математической физики, содержащих оператор Лапласа в цилиндрических координатах, классическим методом разделения переменных приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению (уравнению Бесселя), служащему для определения этих функций.

Основная идея метода разделения переменных состоит в поиске решения задачи в виде суммы (конечной или бесконечной) специальных частных решений дифференциального уравнения. Всякое из частных решений должно иметь специальную структуру – быть произведением функций, каждая из которых зависит только от одной независимой переменной, для определения которых возникают обыкновенные дифференциальные уравнения. Если при формулировке задачи используются полярные или цилиндрические координаты, то одним из упомянутых обыкновенных дифференциальных уравнений оказывается уравнение Бесселя.

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2) y(x) = 0$$

называется ***уравнением Бесселя*** с параметром ν. В общем случае ν может быть комплексным.

Любое нетривиальное решение уравнения Бесселя называется ***цилиндрической функцией***.

Поскольку приведённое уравнение является линейным дифференциальным уравнением второго порядка, фундаментальная система его решений состоит из двух линейно независимых решений. В зависимости от обстоятельств выбираются разные определения этих решений. Находят эти решения различными численными методами, обычно в виде отрезка бесконечного ряда.

Одно из решений – ***функция Бесселя первого рода*** – имеет вид

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \text{ для целых } \nu = n \quad J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Функции Бесселя названы по имени немецкого астронома Фридриха Бесселя, который в работе 1824 года, изучая движение планет вокруг солнца, вывел рекуррентные соотношения для функций Бесселя $J_\nu(x)$, получил для целых ν интегральное представление функции $J_n(x)$, доказал наличие бесчисленного множества нулей функции $J_0(x)$ и составил первые таблицы для функций.

Однако, впервые одна из функций Бесселя $J_0(x)$ была рассмотрена еще в 1732 году Даниилом Бернулли в работе, посвященной колебанию тяжелых цепей. Д. Бернулли нашел выражение функции $J_0(x)$ в виде степенного ряда и заметил (без доказательства), что уравнение $J_0(x) = 0$ имеет бесчисленное множество действительных корней.

Функция $J_{-\nu}(x)$, записанная в виде

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu},$$

также является решением уравнения Бесселя. Причем **при нецелом** ν функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ являются линейно независимыми, т.к. $J_\nu(x)\to 0$, $J_{-\nu}(x)\to\infty$ при $x\to 0$, а ***их линейная комбинация является общим решением уравнения Бесселя***.

Часто в качестве второго фундаментального решения вместо функции $J_{-\nu}(x)$ выбирают функцию Неймана $N_\nu(x)$ (или обозначают $Y_\nu(x)$):

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu},\quad \text{для целых } \nu=n \quad N_n(x)=\lim_{\nu\to n}\frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}.$$

Изучить свойства функций Бесселя и одновременно освоить методы решения уравнений, сводящихся к функциям Бесселя, позволяет свободно распространяемая **программа символьной математики SymPy — библиотеки Python.**

https://habr.com/ru/articles/443628/

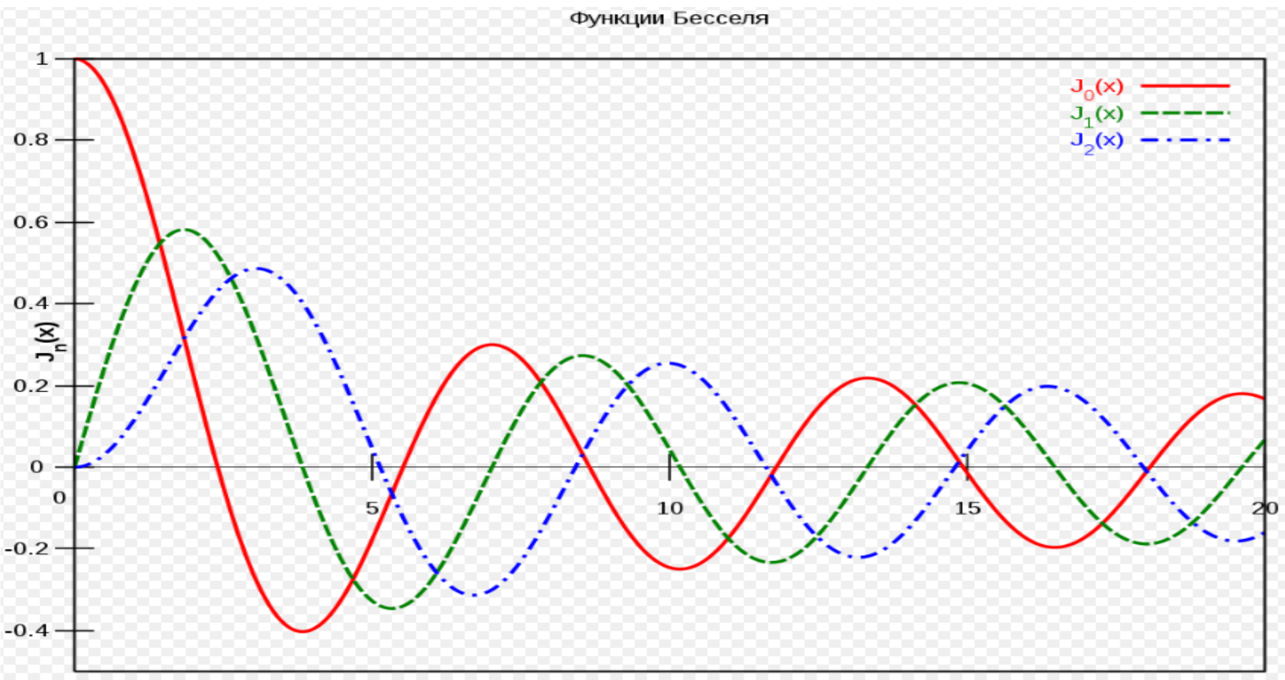
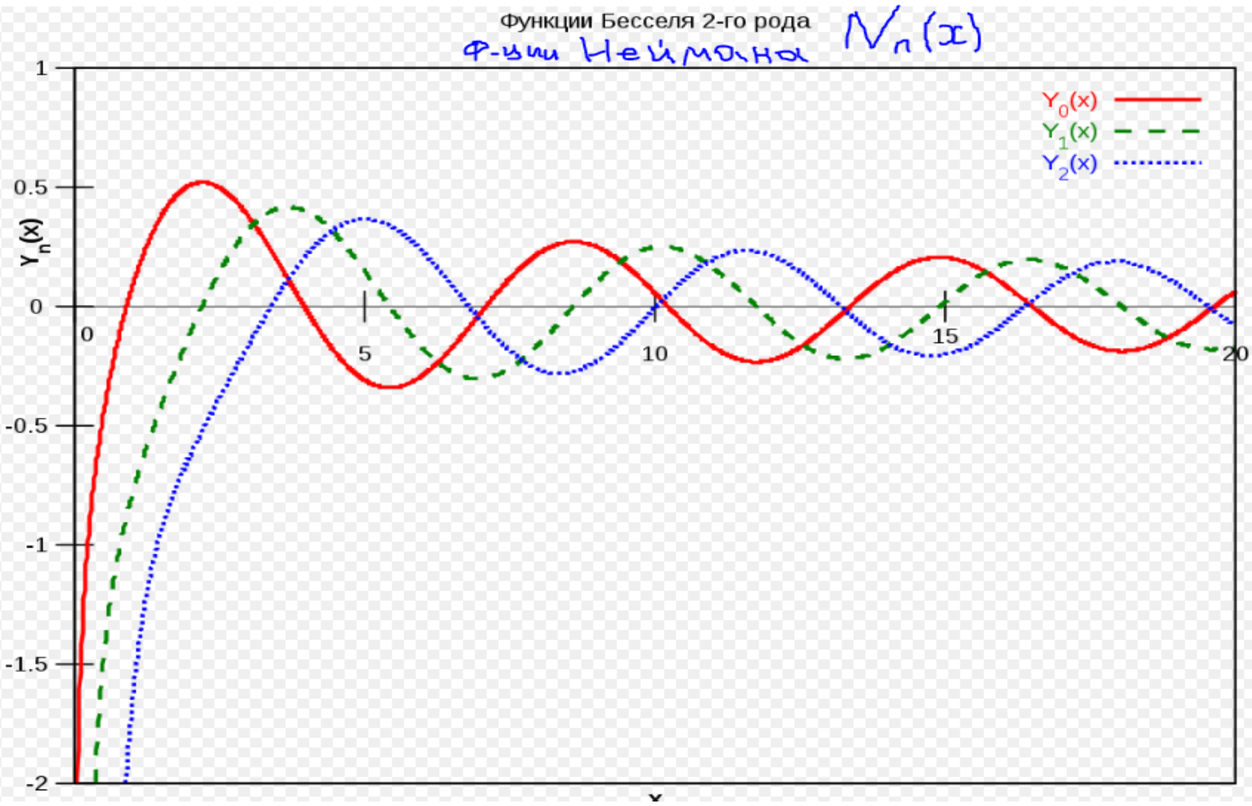
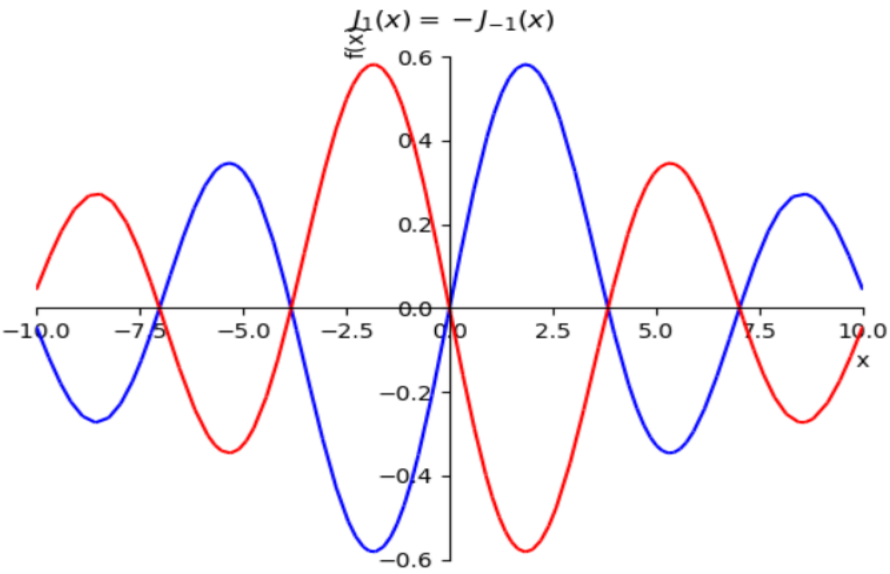


График функции Бесселя для целых положительных n похож на синусоиду, колебания которой затухают пропорционально $1/\sqrt{x}$. Нули функции расположены не периодично.



Справедливо равенство

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$



Некоторые рекуррентные соотношения

1. $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x^{\nu} J_{\nu}(x)\right] = x^{\nu-1} J_{\nu-1}(x)$

2. $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}$

3. $\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)=J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)$

4. $2\frac{d}{dx}\left[J_\nu(x)\right]=J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)$

Аналогичные соотношения справедливы для функций Неймана.

ПРИМЕР 1.

Используя формулу (3) имеем

$$J_2(x)=\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x),$$

$$J_3(x)=\frac{4}{x}J_2(x)-J_1(x)=\frac{4}{x}\left[\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)\right]-J_1(x)=$$
$$=\left(\frac{8}{x^2}-1\right)J_1(x)-\frac{4}{x}J_0(x),$$

$$J_4(x)=\frac{6}{x}J_3(x)-J_2(x)=\left(\frac{48}{x^3}-\frac{8}{x}\right)J_1(x)+\left(-\frac{24}{x^2}+1\right)J_0(x)$$ и

т. д., при этом

$$J_0(x)=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{1!\cdot2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2!\cdot3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\ldots$$

ПРИМЕР 2.

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^{k+1}}{k!\sqrt{\pi}\cdot1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}=$$

$$=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!2k)\cdot1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k+1)}x^{2k+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

Ряд в правой части последнего равенства представляет собой разложение функции $\sin x$. Поэтому оказывается справедливым равенство

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Вспомните свойства гамма-функции Эйлера.

ПРИМЕР 3.

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(-\frac{1}{2}+k+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Принимая во внимание, что

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}+k+1\right)=\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\frac{2k-1}{2}=\sqrt{\pi}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^k},$$

получим

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^k}{k!\sqrt{\pi}\cdot1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!2k)\cdot1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}x^{2k}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}.$$

Ряд, стоящий в правой части последнего равенства, является функцией $\cos x$. Следовательно,

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Замечание. *Функции Бесселя с индексом, равным целому числу с половиной, выражаются через элементарные функции. Доказано, что при других значениях показателя ν функции Бесселя элементарными не являются.*

Замечание. *При решении задач используют разложение в ряд Фурье по ортогональной системе бесселевых функций.*

Ортогональность

Пусть μ_1, μ_2 — нули функции Бесселя $J_\alpha(x)$. Тогда

$$\int_0^1 xJ_\alpha(\mu_1 x)J_\alpha(\mu_2 x)dx=\begin{cases}0 & ;\quad \mu_1\neq\mu_2\\ \frac{1}{2}(J'_\alpha(\mu_1))^2 & ;\quad \mu_1=\mu_2\end{cases}$$