КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ 1-ГО РОДА (ПО ДЛИНЕ ДУГИ)
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1.Вычисление КРИ-1.

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{x}{y} d\ell$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$, заключенная между точками $A(2;2)$ и $B(8;4)$.

Решение. Это КРИ-1. Найдем дифференциал дуги $d\ell$ для кривой $y = \sqrt{2x}$. Имеем: $y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}$, $d\ell = \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}dx$. Следовательно,

$$\int\limits_L \frac{x}{y} d\ell = \int\limits_2^8 \frac{x}{\sqrt{2x}}\sqrt{1 + \frac{1}{2x}}dx = \int \frac{x\sqrt{1+2x}}{2x}dx = \frac{1}{4}\int\limits_2^8 (1+2x)^{\frac{1}{2}} d(1+2x) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+2x)^{3/2}\Big|_2^8 = \frac{1}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}).$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_L \left(x^5 + 8xy\right)d\ell$, где L – дуга кривой $4y = x^4$, заключенная между точками $x = 0, x = 1$.

Решение. Находим дифференциал длины дуги по формуле $d\ell = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}dx$, получим $d\ell = \sqrt{1 + x^6}\,dx$. Тогда

$$\int\limits_L \left(x^5 + 8xy\right)d\ell = \int\limits_0^1 \left(x^5 + 2x^5\right)\sqrt{1 + x^6}\,dx = \int\limits_0^1 3x^5\sqrt{1 + x^6}\,dx =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{6}\int\limits_0^1 \left(1 + x^6\right)^{1/2} d\left(1 + x^6\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(1 + x^6\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

Пример 3. Вычислить КРИ-1 $\int\limits_L (x + y + z)\,d\ell$ вдоль кривой

$$L : \begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin 2t, \;\; t \in [0; 2\pi]. \\ z = t, \end{cases}$$

Решение. Найдем дифференциал длины дуги $d\ell$. Имеем:

$$x'(t)=-2\sin 2t,\ y'(t)=2\cos 2t,\ z'(t)=1,$$
$$d\ell=\sqrt{4\sin^2 2t+4\cos^2 2t+1}\,dt=\sqrt{5}\,dt.$$

Тогда

$$\int\limits_L (x+y+z)\,d\ell=\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos 2t+\sin 2t+t\right)\sqrt{5}\,dt=$$
$$=\left(\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi^2.$$

2.Приложения КРИ-1.

Пример 1. Вычислить длину дуги кривой $y^2=x^3$, заключенной между точками $A(0;0)$ и $B(1;1)$.

Решение. Найдем дифференциал дуги $d\ell$ для кривой $y=x^{\frac{3}{2}}$. Имеем

$$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}},d\ell=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ dx.$$

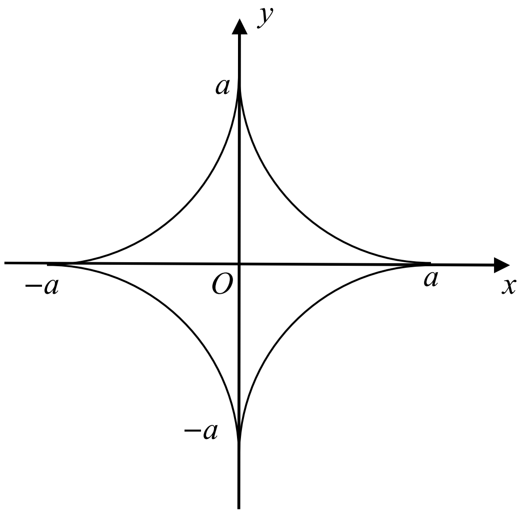
Следовательно,

$$\ell_L=\int\limits_L d\ell=\int\limits_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ dx=\int\limits_0^1\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}\frac{4}{9}d\left(1+\frac{9}{4}x\right)=\frac{4}{9}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{13\sqrt{13}}{27}.$$

Пример 2. Вычислить длину астроиды (см. рис.):

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases},\ t\in\left[0;2\pi\right].$$



Решение. Найдем дифференциал длины дуги $d\ell$. Имеем:

$$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t,\ y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t;$$

$$d\ell = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\,dt = 3a\sin t\cos t dt.$$

Длина четвертой части астроиды, расположенной в первой четверти, будет:

$$\frac{1}{4}\ell_L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin t\cos t\,dt = \left.\frac{3a\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}.$$

Следовательно, длина всей астроиды равна *6a.*

Пример 3. Найти массу m_L участка линии $y = \ln x$ между точками с абсциссами x_1 и x_2, если плотность линии в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.

Решение. В нашем случае плотность $\rho = x^2$. Найдем дифференциал длины дуги $d\ell$ для кривой $y = \ln x$. Имеем

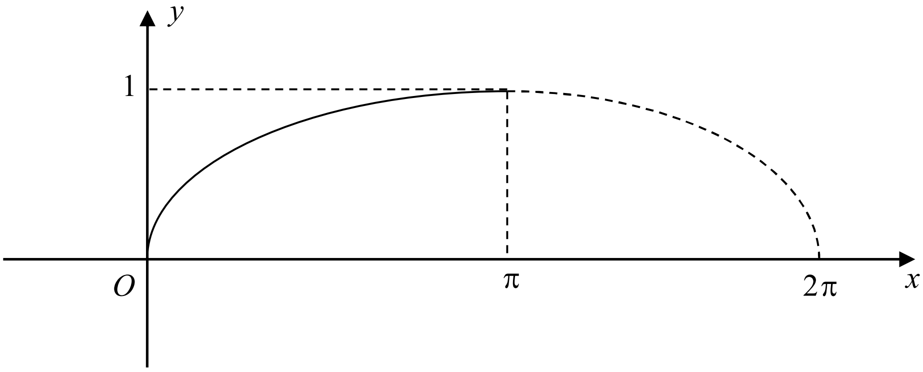
$$y' = \frac{1}{x},\ d\ell = \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}dx = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx.$$

Следовательно:

$$m_L=\int_{x_1}^{x_2} x^2\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=\int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+x^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(1+x\right)^{3/2}\Big|_{x_1}^{x_2}=\frac{1}{3}\left(\left(1+x_2^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1+x_1^2\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Пример 4. Найти координаты центра тяжести однородной дуги циклоиды (см. рис.): $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t,\ t\in[0;\pi]. \end{cases}$



Решение. Поскольку дуга однородна, то плотность $\rho(x;y)$ постоянна и, не ограничивая общности, будем считать $\rho=1$. Тогда масса дуги

$$m_L=\ell_L=\int_L d\ell=\int_0^\pi\sqrt{\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2}\ dt=\int_0^\pi\sqrt{\left(1-\cos t\right)^2+\sin^2 t}\ dt=$$

$$=2\int_0^\pi\sin\frac{t}{2}\,dt=-4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi=4.$$

$$x_c=\frac{M_y}{m_L}=\frac{\int_L x d\ell,}{m_L}=\frac{1}{4}\int_0^\pi\left(t-\sin t\right)2\sin\frac{t}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t\sin\frac{t}{2}-\sin t\sin\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-2t\cos\frac{t}{2}+4\sin\frac{t}{2}+\frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{1}{2}\left(4+\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3},$$

$$y_c = \frac{M_y}{m_L} = \frac{\int\limits_L y d\ell,}{m_L} = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} (1-\cos t) 2\sin\frac{t}{2} dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} dt =$$

$$= -2\int\limits_0^{\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right) d\cos\frac{t}{2} = -2\left(\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{3}.$$