

Теоретический минимум по

1. Введение в математический анализ.

1. Основные элементарные функции.
2. Что называется элементарной функцией?
3. Примеры рациональных функций.
4. Примеры иррациональных функций.
5. Примеры трансцендентных функций.
6. Определение предела функции.
7. Что называется ε -окрестностью точки? Что называется проколотой ε -окрестностью точки?
8. Основные свойства пределов.
9. Связь предела функции в точке и односторонних пределов.
10. Определение и примеры бесконечно малых функций.
11. Определение и примеры бесконечно больших функций.
12. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями.
13. Определение и примеры эквивалентных бесконечно малых функций.
14. Первый замечательный предел.
15. Второй замечательный предел.
16. Виды неопределенностей.
17. Определение непрерывности функции в точке.
18. Свойство непрерывности элементарных функций внутри их области определения.
19. Классификация точек разрыва.
20. Определение точки устранимого разрыва, графическая иллюстрация.
21. Определение точки разрыва 1-го рода, графическая иллюстрация.
22. Определение точки разрыва 2-го рода, графическая иллюстрация.
23. Теорема Вейерштрасса.
24. Как найти наклонные асимптоты графика функции?
25. Как найти вертикальные асимптоты графика функции?

2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

26. Что называется приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0 , отвечающим приращению аргумента Δx ?
27. Определение производной.
28. Геометрический смысл производной.
29. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 .
30. Механический (физический) смысл производной.

31. Основные правила дифференцирования.
32. Производная сложной функции.
33. Таблица производных.
34. Понятие дифференцируемости функции в точке и на промежутке.
35. Связь дифференцируемости функции в точке и существования конечной производной.
36. Связь дифференцируемости и непрерывности функции в точке.
37. Верно ли, что если функция имеет производную в точке, то она дифференцируема в этой точке? Верно ли обратное утверждение?
38. Верно ли, что если функция имеет производную в точке, то она непрерывна в этой точке? Верно ли обратное утверждение?
39. Связь дифференциала и производной.
40. Правило Лопиталя.
41. Определение функции, возрастающей на промежутке.
Определение функции, убывающей на промежутке.
42. Достаточное условие монотонности дифференцируемой функции на интервале.
43. Определение точки локального максимума (минимума) функции.
44. Необходимое условие локального экстремума.
45. Достаточное условие локального экстремума.
46. Алгоритм нахождения точек локального экстремума.
47. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке.

3. Неопределенный интеграл.

48. Что называется первообразной для функции $f(x)$?
49. Что называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$?
48. Основные свойства неопределенного интеграла.
49. Таблица интегралов.
50. Формула интегрирования по частям.
51. Основные классы интегралов, берущихся методом интегрирования по частям.
52. Что называется рациональной дробью?
53. Что называется правильной рациональной дробью? Что называется неправильной рациональной дробью?
54. В каком виде нужно представить неправильную рациональную дробь для того, чтобы ее проинтегрировать?
55. В каком виде нужно представить правильную рациональную дробь для того, чтобы ее проинтегрировать?
56. Четыре типа простейших рациональных дробей.

57. Алгоритм интегрирования рациональных дробей.
 58. Что такое универсальная тригонометрическая подстановка?
 59. Записать формулы понижения степени для $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$.
 60. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n - целые числа.
 61. Интегралы вида $\int R \left(x; (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}; (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}; \dots \right) dx$.
 62. Интегралы вида $\int R \left(x; \sqrt{ax^2 + bx + c} \right) dx$.
 63. Примеры неберущихся интегралов.

3. Функции нескольких переменных.

64. Что называется линиями уровня функции двух переменных?
 Что называется поверхностями уровня функции трех переменных?
 65. Полное приращение функции $z = f(x; y)$. Частные приращения функции $z = f(x; y)$.
 66. Определение частной производной.
 67. Геометрический смысл частных производных функции $z = f(x; y)$.
 68. Определение дифференцируемости функции $z = f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$.
 69. Необходимые условия дифференцируемости функции $z = f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$.
 70. Достаточное условие дифференцируемости функции $z = f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$.
 71. Теорема о независимости смешанной производной от порядка дифференцирования по различным переменным.
 72. Формулы для вычисления частных производных функции двух переменных, заданной неявно.
 73. Как вычислить производную функции $z = f(x; y)$ по направлению вектора \vec{l} ?
 74. Что такое градиент функции $z = f(x; y)$?
 75. Основные свойства градиента.
 76. Определение точки локального максимума (минимума) функции $z = f(x; y)$.
 77. Необходимое условие локального экстремума функции двух переменных.
 78. Достаточное условие локального экстремума дифференцируемой функции двух переменных.

79. Алгоритм нахождения точек локального экстремума функции двух переменных.

Типовые задания по дисциплине Математический анализ

Вариант 1.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{3x - x^2}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 2x}{3x^2 - 1} - \frac{x^2 + 4}{3x - 1} \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg} 5x \sin 7x}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{1}{(x-1)(x-5)}.$$

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2 - 6x)}{3x - x^2}$, используя эквивалентные

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{если } |x| \leq 1, \\ x + 2, & \text{если } |x| > 1; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y = \frac{1}{\cos^2(5x+3)}$; б) $s = \arctg \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{2}} + \operatorname{tg} \alpha \quad (\alpha = \text{const})$; в) $r = e^{\sqrt[3]{\sin \varphi}}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y = \sqrt{5x+3} \quad y'''(x) = ?$; б) $y = \frac{\sin 4x + 2^{3x}}{5} \quad y^{(4)}(x) = ?$.

11. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$ в точке $x = 0$, если $y = \arcsin^2 3x$.

12. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{3}(x^3 + 1)$ в точке его пересечения с осью абсцисс; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}$, используя правило Лопиталья.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$ на отрезке $[0; 3]$.

15. Найти точки экстремума функции $y = \frac{2(x+1)^2}{x-2}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и

изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = x \ln^2 x$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \frac{(\sqrt{x}-9)^2}{\sqrt{x}} dx.$

19. $\int \sqrt{(3x-5)^3} dx.$

20. $\int \frac{dx}{9-4x^2}.$

21. $\int x \sin(x^2) dx.$

22. $\int x^2 5^{x^3} dx.$

23. $\int \frac{x dx}{(9-4x^2)^2}.$

24. $\int \frac{(1-2\operatorname{ctg} x)^3}{\sin^2 x} dx.$

25. $\int \frac{\ln^2(x+2)}{x+2} dx.$

26. $\int \frac{(9-4x)dx}{\sqrt{9-4x^2}}.$

27. $\int x \sin 2x dx.$

28. $\int x 5^{\frac{x}{2}} dx.$

29. $\int \arcsin 4x dx.$

30. $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x-9}}.$

31. $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2-1)} dx.$

31. $\int \frac{dx}{3\sqrt[6]{3x-4} + \sqrt{3x-4}}.$

33. $\int \sin^3 x \cos^8 x dx.$

34. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, если $z = 2x^3 + 3xy^2 - 4x^2y^3 - 5y^7 + 67y + 10$.

35. Исследовать на экстремум функцию $z = (3x+6)y^2 - x^3 + 3x$.

Вариант 2.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + 3x + 5x^2 + 5x^3}{3x^3 + 2x^2 - 1}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{2x^2 - 7x + 3}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x \sin 5x}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+4} \right)^{2x+1}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} 3^x.$$

$$7. \text{ Вычислить предел } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg}(3x - x^2)}, \text{ используя эквивалентные}$$

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x < 0, \\ \sin x, & \text{если } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если } x \geq \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

$$\text{а) } y = e^{3x^2} \sin^2 x; \quad \text{б) } s = 2^{\frac{\arcsin 3}{t}} + \sqrt{2}; \quad \text{в) } w = \frac{\sqrt{\lg z^4}}{6z}.$$

10. Найти производную указанного порядка для функции:

$$\text{а) } y = 2^{3+x^2} \quad y''(x) = ?; \quad \text{б) } y = \frac{3}{\operatorname{tg} 5x} \quad y''(x) = ?.$$

$$11. \text{ Найти } \frac{d^3 r}{d\varphi^3} \text{ в точке } \varphi = \pi/3, \text{ если } r = e^{\sin \varphi}.$$

12. Составить уравнения касательных к графику функции $y = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$, имеющие угловой коэффициент 3.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, используя правило Лопиталья.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 8x + \frac{1}{x^2} - 15$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2 \right]$.

15. Найти точки экстремума функции $y = x \ln^2 x$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{x^2 - 4x - 4}{x + 1}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = e^{-\frac{(x+3)^2}{2}}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \frac{(2 - 3\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx.$

19. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{2 + 3x^2}} dx.$

20. $\int \frac{(1 - x)dx}{8x^2 - 16}.$

21. $\int \frac{(2 - e^{5x})^2 dx}{e^{5x}}.$

22. $\int x^2 e^{7-4x^3} dx.$

23. $\int \frac{\sin x dx}{3\cos^2 x + 4}.$

24. $\int \cos \frac{4}{x} \frac{dx}{x^2}$

25. $\int \frac{\ln 3x dx}{9x}.$

26. $\int \frac{(x - 5)dx}{\sqrt{9 + x^2}}.$

27. $\int x^2 e^{4x} dx.$

28. $\int \ln(1 + x^2) dx.$

29. $\int x \operatorname{arctg} 5x dx.$

30. $\int \frac{7dx}{3x^2 + 5x + 1}.$

31. $\int \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3 + 2x)^2} - \sqrt{3 + 2x}}.$

33. $\int \frac{\sin x}{(1 + \cos x + \sin x)^2} dx.$

34. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = 5x^3 y^2 + 3x^2 y^5 - 4x^5 - 6y^7 + 123$.

35. Исследовать на экстремум функцию $z = 15 - (x - 3)^2 - 4(y + 7)^2$.

Вариант 3.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{3x - x^2}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{2x+1} - 3}$. 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4}{3x^2 - 2x - 1} - \frac{1}{x^2 - x} \right)$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \operatorname{tg} 5x}$. 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{5x-3} \right)^{x-1}$. 6. $\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{2^x + 1}{x}$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x^2}{\operatorname{tg}^2 2x}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ x, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y = (3x - x^3)^5 \left(\frac{1}{2} \right)^{\cos x}$; б) $r = \arccos \frac{1}{\sqrt{\varphi}} + \cos \alpha$ ($\alpha = \text{const}$); в) $w = \operatorname{tg}^2(1 - z^3)$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y = \frac{e^{3+x^2}}{e^{2x}}$ $y''(x) = ?$; б) $y = \sqrt[4]{5x+1}$ $y^{(4)}(x) = ?$.

11. Найти $\frac{d^2 s(-3)}{dt^2}$, если $s = (3t - 2)5^{-\frac{t}{3}}$.

12. В каких точках линии $y = x^3 + x - 9$ касательная к ней параллельна прямой $y = 4x - 1$?

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin 2x} \right)$, используя правило

Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$ на отрезке $[0; 1]$.

15. Исследовать выпуклость графика функции $y = x + \ln(x^2 - 4)$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y = 1 + 5^{\frac{1}{x}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = x(x+1)^2$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int x(\sqrt{x} - 3)^3 dx.$

19. $\int \sqrt[4]{2-13x} dx.$

20. $\int \frac{dx}{2x^2 - 50}.$

21. $\int \frac{27^{5x} + 4^x}{3^{2x}} dx.$

22. $\int \frac{x^3 dx}{\sin^2 x^4}.$

23. $\int (\sin 3x - \cos 3x)^2 dx.$

24. $\int \frac{\sin x}{\cos x + 4} dx.$

25. $\int \frac{dx}{x(4 - 9\ln^2 x)}.$

26. $\int \frac{(9-x)dx}{\sqrt{9+2x^2}}.$

27. $\int (x-3)^2 \cos x dx.$

28. $\int x^2 \log_7^2 x dx.$

29. $\int \arccos \frac{x}{\sqrt{5}} x dx.$

30. $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{2+x-x^2}}.$

31. $\int \frac{x^2 + 2}{(x-3)(x^2 - 4x + 4)} dx.$

32. $\int \frac{dx}{5\sqrt{x} + 2x}.$

33. $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x} dx.$

34. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = y \sin(5x - 8y)$.

35. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y - 12.$$

Вариант 4.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 27}{x^3 - 27}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{\sqrt{2+x} - x}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^4 - 2x}{5x^2 - 3x + 7} - x^2 \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x \operatorname{tg} 3x}{\sin 4x}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3 - 2x^2}{1 - 2x^2} \right)^{x^2}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} 2^{\frac{1}{x-2}}.$$

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x - x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{если } x \leq -1, \\ \frac{3}{x}, & \text{если } x > -1; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

$$\text{а) } y = e^{-x^2} \cos^3(2x + 3); \quad \text{б) } s = \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} 3t}{\sqrt{3}} + \frac{t}{\cos \frac{\pi}{8}}; \quad \text{в) } w = \ln \sqrt{\operatorname{ctg} z^{20}}.$$

10. Найти производную указанного порядка для функции:

$$\text{а) } y = \sqrt{5 - 3x} \quad y'''(x) = ?; \quad \text{б) } y = \lg \frac{7}{x} \quad y^{(4)}(x) = ?.$$

$$11. \text{Найти } \frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} \text{ в точке } \varphi = 2, \text{ если } \rho = \ln(\varphi + \sqrt{5 + \varphi^2}).$$

12. Составить уравнения тех касательных к графику функции $y = x(x - 4)^3$, которые параллельны оси абсцисс; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right)$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sqrt{9 - x^2}$ на отрезке $[-3; 3]$.

15. Исследовать выпуклость графика функции $y = \ln(4 - x^2)$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{x^2 - 3x - 9}{x + 3}$; в случае существования точек разрыва установить их характер.

Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = -2e^{-8x^2-4x}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int x \left(3 + \frac{2}{x} \right)^3 dx.$ **19.** $\int e^x \sqrt[5]{4 + 7e^x} dx.$ **20.** $\int x(2x^2 + 4)^5 dx.$

21. $\int \frac{1-16^x}{3^{2x}} dx.$ **22.** $\int \frac{2dx}{\sin^2 \frac{\pi + 3x}{4}}.$ **23.** $\int \frac{x+2}{25x^2-1} dx.$

24. $\int \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^5} dx.$ **25.** $\int (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 dx.$ **26.** $\int \frac{(1-5x)dx}{\sqrt{16-x^2}}.$

27. $\int (x \cos x)^2 dx.$ **28.** $\int (3-x)e^x dx.$ **29.** $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{7} dx.$

30. $\int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{3-6x-x^2}}.$ **31.** $\int \frac{3x+1}{(x-1)(x^2-x-12)} dx.$

32. $\int \frac{x^2 dx}{(2+5x)\sqrt{2+5x}}.$ **33.** $\int \cos^4 3x dx.$

34. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = \ln(x + e^{-y})$ уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$

35. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = \vec{j} - \vec{k}$ для функции $u = \sqrt{x^2 - yx + 2yz}$ в точке $M(3; -2; 1).$

Вариант 5.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{10 - 25x^4}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5 - 4x} - x}{x - 1}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x \sin 4x}{1 - \cos 4x}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 4}{2x + 8} \right)^{-x}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{x}{(x - 2)^2}.$$

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctg 6x}{3x^4 - x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 3^{-x}, & \text{если } x \leq -1, \\ 2, & \text{если } -1 < x \leq 0, \\ \lg x, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

$$\text{а) } y = \ln^5 \arctg(2^x + 1); \quad \text{б) } r = \sqrt[4]{(1 + \varphi e^{\sqrt{\varphi}})^3}; \quad \text{в) } s = \sqrt[3]{\frac{8}{\sin 4t}}.$$

10. Найти производную указанного порядка для функции:

$$\text{а) } y = e^{2 \cos x} \quad y''(x) = ?; \quad \text{б) } y = \frac{2}{5x - 3} \quad y^{(4)}(x) = ?.$$

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = e^{x^2}$ уравнению $y'' - 2xy' - 2y = 0$.

12. Доказать, что касательные, проведенные к графику функции

$$y = \frac{x - 4}{x - 2} \quad \text{в точках его пересечения с осями координат,}$$

параллельны; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = \sqrt[3]{2(x - 1)^2(x - 7)} \quad \text{на отрезке } [-1; 5].$$

15. Найти точки экстремума функции $y = \frac{4e^{x^2} - 1}{e^{x^2}}.$

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = x^2 - 2\ln x$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \left(\sqrt[4]{x} - \frac{3}{x} \right)^2 dx.$ **19.** $\int \sqrt[5]{(7+4x)^3} dx.$ **20.** $\int \frac{dx}{5x^2 - 1}.$

21. $\int \frac{(5 + e^{6x})dx}{e^{2x}}.$ **22.** $\int \frac{1}{\sin^2(\pi - 6x)} dx.$ **23.** $\int \frac{x^2 dx}{(1 - 2x^3)^4}.$

24. $\int \frac{\operatorname{ctg} 8x}{2} dx.$ **25.** $\int \frac{(\ln 7x + 2)dx}{x}.$ **26.** $\int \frac{x+1}{\sqrt{5x^2 - 1}} dx.$

27. $\int x \cos 4x dx.$ **28.** $\int (2x + 5)e^{-3x} dx.$ **29.** $\int x \operatorname{arctg} x^2 dx.$

30. $\int \frac{7x dx}{\sqrt{2 - 3x - x^2}}.$ **31.** $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$

32. $\int \sqrt{\frac{5+x}{5-x}} dx.$ **33.** $\int (2 + \sin x)^3 dx.$

34. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3 + 2y^3 + z^3 = 3xyz + 2y$.

35. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$ для функции $z = \arcsin \frac{x^2}{y}$ в точке $A(1; 2)$.

Вариант 6.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 2x - 1}{8x^2 + 3x - 3}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{2x - 14} - 2}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{3}{x^3 - 8} \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2^x \sin 3x}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 2}{2x - 3} \right)^{x-1}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 1)2^{\frac{x}{2}}.$$

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 6x - x^2)}{e^{3x - x^2} - 1}$, используя эквивалентные

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{если } x \leq 1, \\ 2 - x, & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ 4 - x^2, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{2x+1}{4} + \operatorname{tg} \frac{1}{4}$. б) $r = \sqrt[4]{\arcsin \sqrt{\theta}}$; в) $s = \sqrt{1+t^2} 2^{\operatorname{arctg} t} + \sin^3 \frac{1}{t}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y = 5^{\frac{1}{t}}$ $y''(x) = ?$; б) $y = \frac{2}{\sqrt{4x-1}}$ $y^{(4)}(x) = ?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = 3e^x \cos x + x^2$ уравнению $y'' - 2y' + 2y = 2x^2 - 4x + 2$.

12. Составить уравнения тех касательных к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 1$, которые перпендикулярны прямой $x + 2y - 1 = 0$.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1-0} x \ln(1-x)$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x-2} + 5$ на отрезке $[-2; 1]$.

15. Найти точки экстремума функции $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{x^2 + 5x + 5}{x + 1}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \frac{(8 - \sqrt{x})^3}{5\sqrt{x}} dx.$

19. $\int \frac{5dx}{\sqrt[3]{(7x-8)^2}}.$

20. $\int \frac{xdx}{7 + 28x^2}.$

21. $\int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{4} dx.$

22. $\int \frac{3^{2x} - 2}{4^x} dx.$

23. $\int \frac{(2-x)dx}{\sqrt{7+28x^2}}.$

24. $\int \cos^4 x \sin 2x dx.$

25. $\int \frac{e^{4\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}.$

26. $\int \sqrt{\frac{3 \arccos x}{1-x^2}} dx.$

27. $\int (x^2 - 1)e^{-x} dx.$

28. $\int x \log_5(2x+3) dx.$

29. $\int \arcsin \frac{x}{5} dx.$

30. $\int \frac{xdx}{5-12x+9x^2}.$

31. $\int \frac{dx}{x^4 - 81}.$

32. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[4]{x}}.$

33. $\int \cos^2 10x dx.$

34. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $x y z = e^z$.

35. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ для функции $u = \frac{xy^2z^3}{6} - \frac{x}{\sqrt{z}}$ в точке $M(-2; 3; 1)$.

Вариант 7.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 4x^2 - 5x^3}{2x^3 + 3x^2 - 5}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2 + \pi x}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-7}{2x} \right)^{-8x}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 4}).$$

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 6x + 10)}{3x - x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ 2x, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

$$\text{а) } y = e^{\arctg x^2} + \arctg 3; \quad \text{б) } s = \arccos 3^t + \sqrt{\frac{t}{tg \frac{\pi}{8}}}; \quad \text{в) } r = \frac{\varphi}{2 + 3 \ln \cos \varphi}.$$

10. Найти производную указанного порядка для функции:

$$\text{а) } y = \frac{9 + \sin^2 3x}{7} \quad y^{(4)}(x) = ?; \quad \text{б) } y = \lg 2x^3 \quad y^{(4)}(x) = ?.$$

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = \frac{1}{2}x^2 e^x$ уравнению

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

12. Составить уравнения тех касательных к графику функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 4, \text{ которые образуют с осью } Ox \text{ угол } 45^\circ.$$

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \frac{x}{2}}{8 - x^3}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = x^2 - 2x + \frac{16}{x-1} - 13 \text{ на отрезке } [2; 5].$$

15. Найти экстремумы функции $y = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = 2 + \frac{1}{\ln x}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = (x-1)x^2$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \left(\frac{2 - \sqrt{x}}{x^2} \right)^3 dx.$

19. $\int (2^x + 5^{2x})^2 dx.$

20. $\int \frac{dx}{2x^2 + 9}.$

21. $\int \operatorname{tg}^2 5x dx.$

22. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x - 25x}.$

23. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2 + 3x^3}}.$

24. $\int \frac{e^x dx}{49 + e^{2x}}.$

25. $\int \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$

26. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{2x^2 + 9}}.$

27. $\int (4 + 5x) \sin 3x dx.$

29. $\int x^3 \ln(x-2) dx.$

29. $\int x \arcsin x^2 dx.$

30. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}.$

31. $\int \frac{x^2 - 3x - 12}{x^3 - 7x^2 + 12x} dx.$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{2x-1}}.$

33. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}.$

34. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = \operatorname{tg}(xy^2)$.

35. Исследовать на экстремум функцию $z = 2(x+y) - x^2 - y^2 - 12$.

Вариант 8.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - 22x^2}{8x^6 + 3x + 5}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt{x+2} - 2}$. 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x \sin x}{1 - \cos 2x}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2x^2 - 3x + 1} - \frac{1}{x^2 - x} \right)$. 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-2x}{1-2x} \right)^x$. 6. $\lim_{x \rightarrow \pm 0} (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.
7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x^2-6x+9} - 1}{3x - x^2}$, используя эквивалентные

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{если } x \leq 0, \\ 2, & \text{если } 0 < x < 2, \\ 4 - x, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y = \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} \ln(x^3 + x)$; б) $r = \frac{\arcsin \frac{4}{\sqrt{\varphi}}}{2 + \cos \alpha}$ ($\alpha = \text{const}$); в) $s = \ln \left(t - \arcsin \frac{1}{t} \right)$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y = \frac{e^{x^2}}{e^{1+3x}}$ $y''(x) = ?$; б) $y = \sqrt[4]{2-5x}$ $y^{(4)}(x) = ?$.

11. Найти $\frac{d^3 y}{dx^3}$ в точке $x = \pi/8$, если $y = \ln \sin 2x$.

12. Найти точку, в которой касательной к графику функции

$y = 0,5x^4 - x$ является прямая $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{32}$.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 - 5e^{x-1}}{\sin(x^2 - 1)}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin 2x - x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

15. Найти точки экстремума функции $y = \frac{(1-x)^3}{(x-2)^2}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \left(7\sqrt{x} - \frac{6}{\sqrt{x}} \right)^2 dx.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x+3)^3}}.$

20. $\int \frac{dx}{16x^2 - 9}.$

21. $\int x^2 \sin x^3 dx.$

22. $\int \frac{\ln 5x}{3x \ln x} dx.$

23. $\int \frac{x^3 dx}{5x^4 + 9}.$

24. $\int \frac{e^{2x}}{(1 + 3e^{2x})^4} dx.$

25. $\int \frac{dx}{\arccos^3 x \sqrt{1-x^2}}.$

26. $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{25-x^2}}.$

27. $\int (x+4)e^{\frac{x}{2}} dx.$

28. $\int \sqrt{x} \ln x dx.$

29. $\int x \operatorname{arccotg} 2x dx.$

30. $\int \frac{(x+1)dx}{4x^2 + 2x - 3}.$

31. $\int \frac{x^3 - x^2 - 2x - 2}{x^2 - 4} dx.$

32. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)dx}{\sqrt[3]{x+1}}.$

33. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos x}.$

34. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = \arcsin(x - y)$

уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$

35. Найти градиент и производную по направлению вектора

$\vec{l} = -\vec{i} - 2\vec{k}$ для функции $u = \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}$ в точке $M(-1; 1; 0).$

Вариант 9.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{3x^2 - 75}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-3x} - 2}{5x - 7x^2}$. 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{8x-3} - \frac{2x^4}{16x^3+5} \right)$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x \sin 2x}{1 - \cos 3x}$. 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+4}{6x+1} \right)^{-2x}$. 6. $\lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} \frac{2x+5}{3-x}$.
7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 1} - 1}{3x - x^2}$, используя эквивалентные

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq -2, \\ \frac{2}{x}, & \text{если } x > -2; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \frac{x}{\sqrt{x^3 - 1}}$; б) $w = \cos \frac{\sqrt{3} + \sqrt{z}}{6z^3}$; в) $\rho = \sqrt[3]{\frac{\sin 5\varphi}{4}} + \sin \frac{\pi}{12}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y = \frac{2^{3x} + 3^{2x}}{4^x}$ $y''(x) = ?$; б) $y = \operatorname{tg} \varphi^5$ $y''(x) = ?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = \frac{x-3}{x+4}$ уравнению $2(y')^2 = (y'-1)y''$.

12. Составить уравнения касательных к кривым $y = 2x^2 + 5$ и $y = -x^2 - 3x + 5$ в точках пересечения этих линий; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 3x}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$ на отрезке $[0; 1]$.

15. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = \frac{2+x}{(x+1)^2}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = 3^{-\frac{2}{x}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и

изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \frac{\sqrt{x} + (4-3x)^3}{5x^2} dx.$ **19.** $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(7x^2-8)^2}}.$ **20.** $\int \frac{(2+x)dx}{\sqrt{7-36x^2}}.$

21. $\int (5^{2x} - 1)(5^{-2x} + 1)dx.$ **22.** $\int (\operatorname{tg} x + 2)^2 dx.$ **23.** $\int \frac{3xdx}{7-6x^2}.$

24. $\int 3\cos^2 \frac{x}{4} dx.$ **25.** $\int \sqrt{\frac{\arccos^7 x}{1-x^2}} dx.$ **26.** $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{3\sqrt{x}}.$

27. $\int x^2 e^{3x} dx.$ **28.** $\int \frac{\log_9 x dx}{\sqrt{x}}.$ **29.** $\int \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} dx.$

30. $\int \frac{6xdx}{5-12x-9x^2}.$ **31.** $\int \frac{4x+5}{x^3+x^2} dx.$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}(1+\sqrt[3]{2x+3})}.$ **33.** $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 4\sin x \cos x}.$

34. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = e^{2x^3+3y^2}.$

35. Исследовать на экстремум функцию $z = 4(x-y) - x^2 - y^2.$

Вариант 10.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x-1} - 2}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cos 2x}{\operatorname{tg} x}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-2x}{4-2x} \right)^{x-5}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{-2x^2+x}.$$

$$7. \text{ Вычислить предел } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-6x^2} - 1}{\sin^2 3x}, \text{ используя эквивалентные}$$

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq -2, \\ 2, & \text{если } -2 < x \leq 0, \\ 2\cos x, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

$$a) y = \frac{e^{-x^2}}{\operatorname{ctg} x} + \sqrt[3]{\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{3}}{\ln 2}}; \quad б) w = \arcsin^3 \frac{2}{z}; \quad в) s = 3^{\sqrt{t}} \sin^2 t + 3^{\sqrt{2}}.$$

10. Найти производную указанного порядка для функции:

$$a) y = \cos(1-3x) \quad y^{(8)}(x) = ?; \quad б) y = 4 \operatorname{arccot} x^2 \quad y''(x) = ?.$$

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = \cos e^x + \sin e^x$ уравнению $y'' - y' + ye^{2x} = 0$.

12. Составить уравнения тех касательных к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$, которые образуют с осью Ox угол 135° ; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{e^{\cos x} - \sqrt{e}}{\sin 3x}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ на отрезке $[-1; 2]$.

15. Найти точки перегиба графика функции $y = x^2 e^{-2x}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{\ln x^2}{x-2}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и

изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = \frac{3x^2 + x + 1}{x + 1}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int 5x \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + 2 \right)^2 dx.$ **19.** $\int \frac{x^2}{6^{1-4x^3}} dx.$ **20.** $\int \frac{(9-3x)dx}{1-16x^2}.$

21. $\int \frac{(3\ln^2 x + 7)dx}{x \ln x}.$ **22.** $\int (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 dx.$ **23.** $\int (5^x + 2)^3 dx.$

24. $\int \frac{\sin x dx}{(1 + 2\cos x)^5}.$ **25.** $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin^2 x} dx.$ **26.** $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{4+49x^2}}.$

27. $\int x^2 \cos 5x dx.$ **28.** $\int (x+1)e^{2x} dx.$ **29.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx.$

30. $\int \frac{(2x-9)dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}.$ **31.** $\int \frac{x^5}{x^3+1} dx.$

32. $\int \frac{(1+\sqrt{x})dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt[6]{x^5}}.$ **33.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \left(t + \frac{\pi}{6} \right) dt.$

34. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = \cos(xy^2)$ уравнению

$$y \frac{\partial z}{\partial y} - xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

35. Найти градиент и производную по направлению вектора

$\vec{l} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$ для функции $u = \ln \sin \left(x - 2y + \frac{z}{4} \right)$ в точке $M(1; 0,5; \pi)$.

Вариант 11.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

$$1. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{10 + 3x - x^2}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - \sqrt{x^2 + 12}}{3x^2 - 5x - 2}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 - x^2}{6x^2 + 1} - \frac{3x^2 - 2}{6x + 1} \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arcsin 2x}{\sin 3x}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 - 2x}{3 + 4x} \right)^{\frac{1}{x}}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(3 + \frac{1}{x} \right)^x.$$

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x, & \text{если } x \leq -1, \\ 5, & \text{если } -1 < x \leq 0, \\ x^2 + 5, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

$$\text{а) } y = 2^{\arccos \sqrt{x}} + \ln \sin \frac{x}{2}; \quad \text{б) } w = \sin^4 \frac{2}{z^3}; \quad \text{в) } s = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{2}} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{10}.$$

10. Найти производную указанного порядка для функции:

$$\text{а) } y = \frac{x^{10} + \cos(1 + 2x)}{4} \quad y^{(6)}(x) = ?; \quad \text{б) } y = \frac{7x + \sqrt[3]{x}}{x^2} \quad y'''(x) = ?.$$

$$11. \text{Найти } \frac{d^2 \rho(-1)}{d\varphi^2}, \text{ если } \rho = \varphi e^{-\varphi^3}.$$

12. Составить уравнения тех касательных к графику функции $y = \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + 6x - 3)$, которые параллельны прямой $3x - y - 5 = 0$.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \ln x$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sqrt[3]{2x^2 + 1}$ на отрезке $[-2; 1]$.

15. Исследовать выпуклость графика функции $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = 3 + \frac{3}{\ln x - 2}$; в случае существования точек разрыва установить их характер.

Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = (x-2)(x+1)^2$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \frac{10}{x} \left(\sqrt[3]{x} - \frac{7}{x^2} + e \right) dx.$ **19.** $\int \sin x e^{3+4\cos x} dx.$ **20.** $\int \frac{(32^x - 2^x) dx}{4^x}.$

21. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x}.$ **22.** $\int x(5+8x^2)^9 dx.$ **23.** $\int \frac{3x dx}{4+9x^4}.$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin^3 x}}.$ **25.** $\int \frac{\cos x}{1+9\cos^2 x} dx.$ **26.** $\int \frac{(x-7) dx}{\sqrt{4+16x^2}}.$

27. $\int (3+x)\sin 5x dx.$ **28.** $\int (x+2)8^{2x} dx.$ **29.** $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx.$

30. $\int \frac{(x-5) dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}.$ **31.** $\int \frac{6x^3 - x - 3}{x^3 - x} dx.$

32. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$ **33.** $\int \sin 2x \cos 6x dx.$

34. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, если $z = e^{2x^3+3xy^2}$.

35. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

Вариант 12.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

$$1. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 15x}{(x-5)^2}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{2 - \sqrt{x^3 - x^2 + 4}}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^4 - 2x}{5x^2 - 3x + 7} - x^2 \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{5x \sin 2x}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4 - 2x}{8 - 2x} \right)^{-3x}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{\ln x - 2}{1 - x}.$$

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{4x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 6 - x, & \text{если } |x| \leq 3, \\ x^2, & \text{если } |x| > 3; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

$$\text{а) } y = \ln^3 \operatorname{arctg} \sqrt{5z}; \quad \text{б) } s = \sqrt[3]{\sin x^5} + \frac{3-x}{\cos x}; \quad \text{в) } r = 3^{\arccos \frac{1}{\psi}} + \psi \cos \frac{\pi}{8}.$$

10. Найти производную указанного порядка для функции:

$$\text{а) } y = x^2 \arcsin \frac{2}{x} \quad y''(x) = ?; \quad \text{б) } y = \frac{7}{\operatorname{ctg} 4x} \quad y''(x) = ?.$$

11. Найти $\frac{d^3 y}{dx^3}$ в точке $x = \pi/6$, если $y = e^{\sin 2x}$.

12. Составить уравнения тех касательных к графику функции $y = x^3 - 11x - 15$, которые перпендикулярны прямой $2x + 2y - 7 = 0$.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sqrt{x(10-x)}$ на отрезке $[0; 10]$.

15. Найти точки экстремума функции $y = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$; в

случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = -3e^{-2x^2-4x}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \frac{2x^3 - 5x + 7\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x}} dx.$ **19.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(3x-5)^5}}.$ **20.** $\int \frac{9}{2^{4x-3}} dx.$

21. $\int x^2 \sin(3-2x^3) dx.$ **22.** $\int \frac{\operatorname{tg} x + 4}{\sin^2 x} dx.$ **23.** $\int \frac{2x dx}{(9-x^2)^3}.$

24. $\int \operatorname{tg} 3x dx.$ **25.** $\int \frac{\sqrt{1+2\ln x}}{3x} dx.$ **26.** $\int \frac{(7x+2)dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

27. $\int (11x+3) \sin 2x dx.$ **28.** $\int \frac{x}{25^{\frac{x}{2}}} dx.$ **29.** $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx.$

30. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2 + x + 2}}.$ **31.** $\int \frac{3x}{(x+1)(x^2-1)} dx.$

32. $\int \frac{\sqrt{2x+9} dx}{x}.$ **33.** $\int \sin^4 5x dx.$

34. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = \operatorname{ctg} \frac{y}{x}.$

35. Исследовать на экстремум функцию $z = 15 - (x-2)^2 - 3(y+7)^2.$

Вариант 13.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 21}{x(x+6)}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 2x - 21}{\sqrt{x+6} - 3}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x^2}{x-1} - \frac{3x^3}{x^2-1} \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x \sin 2x}{1 - \cos 4x}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-2x}{1-2x} \right)^x. \quad 6. \lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} \frac{x}{(x+1)(x+3)}.$$

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x^2}{\ln(1+2x^2)}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & \text{если } x \leq -2, \\ \frac{1}{x-2}, & \text{если } x > -2; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

$$\text{а) } y = e^{3x} \sqrt{4-x^2} + \frac{10}{\operatorname{arctg}(\sin x)}; \quad \text{б) } s = \sqrt[3]{t} \arccos \frac{1}{t} + \sqrt{\pi}; \quad \text{в) } w = \frac{\lg \sqrt{1-z^4}}{z^3}.$$

10. Найти производную указанного порядка для функции:

$$\text{а) } y = \frac{\sqrt[10]{x} - \sin^2 3x}{2} \quad y^{(4)}(x) = ?; \quad \text{б) } y = \frac{1}{\sin 3\varphi} \quad y''(x) = ?.$$

$$11. \text{Найти } \frac{d^3 r}{d\varphi^3} \text{ в точке } \varphi = \pi, \text{ если } r = \ln \cos \frac{\varphi}{3}.$$

12. Составить уравнения тех касательных к графику функции $y = x^2(x-2)^2$, которые параллельны оси абсцисс; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x}{1 - 2 \sin x}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2}$ на отрезке $[0; 3]$.

15. Найти точки перегиба графика функции $y = (x+2)e^{\frac{1-x}{3}}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y = 4^{-x^2 + \frac{1}{x}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и

изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = x^3\sqrt[3]{(x+1)^2}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \frac{(2\sqrt[4]{x}-3)^2 + \sqrt{x}}{x} dx.$ **19.** $\int x^2(3-x^3)^5 dx.$ **20.** $\int \frac{(1-2^x)^2 dx}{8^{2x}}.$

21. $\int \frac{e^x}{8-7e^x} dx.$ **22.** $\int \cos x \sin 2x dx.$ **23.** $\int \frac{1+3x dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$

24. $\int \operatorname{ctg}^2 5x dx.$ **25.** $\int \frac{dx}{(5+\ln^2 x)x}.$ **26.** $\int \frac{3 \sin x dx}{4 \cos^2 x - 81}.$

27. $\int x^2 \cos 4x dx.$ **28.** $\int \ln(5+2x) dx.$ **29.** $\int \operatorname{arctg} 3x dx.$

30. $\int \frac{x^3 dx}{x^2+2x+3}.$ **31.** $\int \frac{6x^2-1}{x^3-4x} dx.$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3} + 2\sqrt[3]{2x+3} + \sqrt[6]{2x+3}}.$ **33.** $\int \operatorname{tg}^5 x dx.$

34. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = y \operatorname{tg}(5xy)$.

35. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = -2\vec{j} - 3\vec{k}$ для функции $u = z \ln(x+y^2)$ в точке $A(5; 2; 3)$.

Вариант 14.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - x^2}{x^2 - 6x + 9}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - 2x} - 2}{3x + 5x^2}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2}{x + 6} - \frac{4x^4}{x^3 - x + 6} \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \operatorname{tg} 3x}{3x^2}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 4}{x + 6} \right)^{-2x}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{3^x + 5}{x(x - 1)}.$$

$$7. \text{Вычислить предел } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2\sin x} - 1}{3x - x^2}, \text{ используя эквивалентные}$$

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq -\pi, \\ \cos x, & \text{если } -\pi < x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

$$\text{а) } y = \sqrt{x-3} \log_2(1 - \sqrt{x-3}); \quad \text{б) } w = \frac{z^5 - \sin^2(2+3z) + \cos^2 \pi}{4z}; \quad \text{в) } s = \sqrt[5]{3^{\operatorname{tg} t} + 3t^3}.$$

10. Найти производную указанного порядка для функции:

$$\text{а) } y = 2^{\sqrt[3]{x}} \quad y''(x) = ?; \quad \text{б) } y = \operatorname{arctg} 4x \quad y''(x) = ?.$$

$$11. \text{Найти } \frac{d^2 \rho(\sqrt{3})}{d\varphi^2}, \text{ если } \rho = \varphi \arcsin \frac{\varphi}{2}.$$

$$12. \text{Составить уравнения касательных к графику функции } y = x - \frac{1}{x}$$

в точках пересечения его с осью абсцисс.

$$13. \text{Вычислить предел } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}, \text{ используя правило Лопиталя.}$$

$$14. \text{Найти наименьшее и наибольшее значения функции } y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2} \text{ на отрезке } [-1; 2].$$

$$15. \text{Найти интервалы возрастания и убывания функции } y = \frac{\ln x}{x}.$$

$$16. \text{Исследовать на непрерывность функцию } y = \frac{4x^2 + 2x + 2}{x + 1}; \text{ в}$$

случае существования точек разрыва установить их характер.

Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = -e^{-\frac{(x+4)^2}{2}}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int 4x \left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right)^2 dx.$ 19. $\int \frac{x dx}{\sqrt[5]{(2x^2 - 3)^3}}.$ 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - x^2}}.$

21. $\int x^2 e^{1-x^3} dx.$ 22. $\int \frac{e^{3x}}{5 - e^{3x}} dx.$ 23. $\int \frac{3x dx}{(4 - 9x^2)^3}.$

24. $\int \frac{3 \sin x dx}{(5 \cos x + 1)^2}.$ 25. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x} dx}{1 + x^2}.$ 26. $\int \frac{5 \sin(\ln x) dx}{4x}.$

27. $\int (x^2 + 2x) \sin x dx.$ 28. $\int x^5 \log_9 x dx.$ 29. $\int \frac{x^6}{x^2 - 1} dx.$

30. $\int \frac{(2x - 1) dx}{2x^2 - 8x + 30}.$ 31. $\int \frac{2x^2 + 1}{x^3(x + 1)} dx.$

32. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$ 33. $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x - \cos^2 x}.$

34. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = \cos(x^2 y^2 - 5)$ уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$

35. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ для функции $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точке $M(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}).$

Вариант 15.*В заданиях 1-6 вычислить предел.*

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^2 - x}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3 - \sqrt{x^2 - 16}}{3x^2 - 10x - 25}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{x-1} - \frac{3x^3}{x^2-1} \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x \sin 2x}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4-3x}{2-3x} \right)^{4-3x}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{x+2}{(x-1)(x-5)}.$$

$$7. \text{ Вычислить предел } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 2x}, \text{ используя эквивалентные}$$

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{если } x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1, \\ \frac{1}{x-1}, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

$$\text{а) } \rho = \log_3(e^{2\varphi} + 1) - \frac{1}{\varphi \arctg 3}; \quad \text{б) } w = \arccos^2 \frac{2}{\sqrt{z}}; \quad \text{в) } y = \operatorname{tg} \sqrt{\cos x^3} + \frac{1}{5x}.$$

10. Найти производную указанного порядка для функции:

$$\text{а) } y = \frac{x^6 - x \cos 3x}{4} \quad y^{(5)}(x) = ?; \quad \text{б) } y = 4 \arcsin \sqrt{x} \quad y''(x) = ?.$$

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ уравнению $4xy'' + 2y' - y = 0$.

12. Составить уравнение той касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 5$, которая перпендикулярна прямой $2x - 6y + 1 = 0$.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \frac{4x}{4 + x^2}$ на отрезке $[-4; 2]$.

15. Найти точки перегиба графика функции $y = \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^2$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2 + 3}{2x^2 + x}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = (2 - x)\ln^2(2 - x)$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int (\sqrt{x} - 3)(2x^2 + \sqrt{2x} + 1)dx.$ **19.** $\int \frac{4xdx}{\sqrt[5]{(x^2 - 3)^3}}.$ **20.** $\int \frac{3^{3x} + 2}{4^x} dx.$

21. $\int x^2 \sin(3x^3 + 4)dx.$ **22.** $\int \frac{2x + 7\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx.$ **23.** $\int \frac{(5 + x)dx}{\sqrt{1 + 9x^2}}.$

24. $\int \frac{10\sin x dx}{\sqrt{5\cos x + 1}}.$ **25.** $\int \frac{dx}{(1 + x^2)\operatorname{arctg} x}.$ **26.** $\int \frac{(x - 13)dx}{4x^2 - 2}.$

27. $\int x \cos(3x + 4)dx.$ **28.** $\int x \ln(2x - 1)dx.$ **29.** $\int (x + 2)\operatorname{arctg} x dx.$

30. $\int \frac{3xdx}{2x^2 + x - 6}.$ **31.** $\int \frac{20 - x}{x^3 + x^2 - 20x} dx.$

32. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5 - 4x}}.$ **33.** $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\sin^2 x - 4\cos^2 x}.$

34. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3 y + 2y^3 z + xz^3 = 3xyz$.

35. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$ для функции $u = \ln(x^3 + \sqrt[3]{y} - z)$ в точке $A(2; 1; 8)$.

Вариант 16.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2}$. 2. $\lim_{u \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{u-1}}{u^2 - 25}$. 3. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{2x}{x^2 - 9} \right)$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 3x$. 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3-x}{3+x} \right)^{\frac{2}{x}}$. 6. $\lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{1}{(x-2)(x+3)}$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(x+2)}{x^2 - 4}$, используя эквивалентные

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x, & \text{если } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{если } x > \pi; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y = \log_2 \sin 2\pi x + \frac{\sqrt{2}}{x}$; б) $\rho = e^{\frac{2}{\varphi-1}} \cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\pi}{5}$; в) $s = \arcsin \sqrt{1 + \cos 4t}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y = x^{10} \ln 3x$ $y^{(8)}(x) = ?$; б) $y = \frac{3^{3x} + 4^x}{9^x}$ $y''(x) = ?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = \operatorname{cose}^x + \operatorname{sine}^x$ уравнению $y'' - y' + ye^{2x} = 0$.

12. Составить уравнение той касательной к графику функции $y = x^2 - 2x + 5$, которая параллельна прямой $6x - 2y + 1 = 0$; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right)$, используя правило

Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^2 \ln x$ на отрезке $[1; 3]$.

15. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = \ln(x^2 + 1)$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{2 + 2^{\frac{1}{x+2}}}$; в

случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = (x-3)(x+1)^2$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{7x} dx.$

19. $\int e^x (e^{2x} + 3)^2 dx.$

20. $\int \frac{5dx}{\sqrt{9x^2-7}}.$

21. $\int \frac{8x}{\sin^2(x^2 + \pi)} x dx.$

22. $\int x^2 5^{x^3} dx.$

23. $\int \frac{x^3 dx}{(16-x^4)^2}.$

24. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x \sqrt{\cos x}} dx.$

25. $\int \frac{x - \sqrt[5]{\ln^2 x}}{3x} dx.$

26. $\int \frac{(4x+5)dx}{81x^2+1}.$

27. $\int x^2 \sin x dx.$

28. $\int \frac{x}{3^x} dx.$

29. $\int \arcsin \frac{x}{7} dx.$

30. $\int \frac{2dx}{\sqrt{10-6x-3x^2}}.$

31. $\int \frac{2x^2-6x-2}{x^3-x^2-2x} dx.$

32. $\int \frac{dx}{3x-4\sqrt{x}}.$

33. $\int \left(\sin \frac{2x}{3} - \cos \frac{2x}{3} \right)^2 dx.$

34. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, если $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1+xy}$.

35. Исследовать на экстремум функцию $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

Вариант 17.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

$$1. \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4 + 3t^2 + 4}{t^3 - 2t^2 + 1}. \quad 2. \lim_{u \rightarrow 2} \frac{2u - 4}{1 - \sqrt{3 - u}}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 - x + 1}{x^2 + 1} - \frac{2x^2 + 3}{x - 1} \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x \sin 5x}{\operatorname{tg} 11x}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 5}{3x} \right)^{-4x}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4} - x \right).$$

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^3 + 8}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x \leq 0, \\ \lg x, & \text{если } 0 < x < 10, \\ 1, & \text{если } x > 10; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

$$\text{а) } y = \sqrt[7]{\frac{2 - x^3}{3^x}} + \sqrt[7]{3}; \quad \text{б) } w = \sqrt{\arcsin^3 z} - \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{z}; \quad \text{в) } r = \frac{\arccos \varphi}{\sqrt{1 - \varphi^2}} + \ln \frac{1}{2}.$$

10. Найти производную указанного порядка для функции:

$$\text{а) } y = \frac{9x + 2 \sin(1 - 5x)}{40} \quad y^{(7)}(x) = ?; \quad \text{б) } y = \log_2(3x + 5) \quad y'''(x) = ?.$$

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = e^{2x} \cdot \sin 5x$ уравнению $y'' - 4y' + 29y = 0$.

12. Составить уравнение касательной к графику функции $y = 2 - \sqrt{x}$ в точке пересечения его с биссектрисой первого координатного угла; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^2 \ln x$ на отрезке $[1; 3]$.

15. Найти точки перегиба графика функции $y = x e^{\frac{x}{2}}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = 5^{\frac{-2}{x}} + 3$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = \frac{2x^2 - 6x + 6}{x - 1}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \frac{(2x+3)^3}{\sqrt{x^5}} dx.$

19. $\int \frac{5x^2}{x^2 + 100} dx.$

20. $\int \frac{(1-2x)dx}{1-2x^2}.$

21. $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x} dx.$

22. $\int \frac{\sin 6x}{\cos^4 6x} dx.$

23. $\int \frac{x^3 dx}{(8+3x^4)^2}.$

24. $\int \frac{\ln^3(1-x)}{1-x} dx.$

25. $\int \frac{\cos 2x + 5}{\cos^2 x} dx.$

26. $\int \frac{(25-4x)dx}{\sqrt{25-4x^2}}.$

27. $\int x \sin \frac{2x}{5} dx.$

28. $\int (2x+1)3^{2x} dx.$

29. $\int \arcsin 5x dx.$

30. $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{3x^2+x-5}}.$

31. $\int \frac{2x^2+12x-6}{(x+1)(x^2+8x+15)} dx.$

32. $\int \frac{x\sqrt{3-x}dx}{7}.$

33. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x} x dx.$

34. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$.

35. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$.

Вариант 18.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{4x + 1}}{8 - x^3}$. 3. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{12x}{x^2 + 2x - 8} - \frac{4}{x - 2} \right)$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg}^2 \frac{2}{3} x \cos 2x}{1 - \cos 4x}$. 5. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{4 - 2t}{4 + 3t} \right)^{\frac{3}{t}}$. 6. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} e^{-3x^2 + x}$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$, используя эквивалентные

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \leq 0, \\ 1 - x, & \text{если } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{x - 1}, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y = \arcsin e^{-x}$; б) $s = 2^{\frac{t^3}{7}} \cdot \operatorname{tg}^2 t + \operatorname{arctg} \frac{t^2 - 1}{t}$; в) $w = \lg(z^2 - \sqrt{z}) + \frac{\sqrt{3}}{6z^2 - 4}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y = \frac{1}{7x + 2}$ $y^{(4)}(x) = ?$; б) $y = \cos^2 \frac{x}{4}$ $y^{(4)}(x) = ?$.

11. Найти $\frac{d^3 y(0)}{dx^3}$, если $y = (x^2 - 1)e^{-2x}$.

12. Составить уравнения той касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 7$, которая образуют с осью Ox угол 135° ; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sqrt[3]{2x^2(x - 6)}$ на отрезке $[-2; 4]$.

15. Найти точки перегиба графика функции $y = \frac{4x}{4 + x^2}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $f(x) = 3^{\frac{1}{1+x}}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int x^2(2x+1)(5x-3)dx.$ **19.** $\int \sqrt{(7x-5)^5} dx.$ **20.** $\int \frac{9}{e^{1-4x}} dx.$

21. $\int x \sin(3-2x^2)dx.$ **22.** $\int \frac{\operatorname{arctg} x + 4}{1+x^2} dx.$ **23.** $\int \frac{x^2 dx}{(9-4x^3)^3}.$

24. $\int \operatorname{ctg}(2-3x)dx.$ **25.** $\int \frac{1+\sqrt{1+3\ln x}}{3x} dx.$ **26.** $\int \frac{(1-4x)dx}{\sqrt{9+x^2}}.$

27. $\int (x+3) \cos \frac{2x}{3} dx.$ **28.** $\int x 8^{\frac{x}{3}} dx.$ **29.** $\int \arccos 4x dx.$

30. $\int \frac{dx}{3x^2-12x-14}.$ **31.** $\int \frac{3x^3+1}{(x+1)(x^2+1)} dx.$

32. $\int \frac{\sqrt{2x-3} dx}{x}.$ **33.** $\int \cos^4 x dx.$

34. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = \frac{2x+3y}{x^2+y^2}.$

35. Исследовать на экстремум функцию $z = xy(12-x-y).$

Вариант 19.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 3x - 4}{2x^2 - 5x + 1}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + 3x}{3x^2 + 2} - \frac{2x^2}{3x + 1} \right).$$

$$4. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\cos 6\alpha - \cos 10\alpha}{5\alpha^2}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x + 4} \right)^{5x-2}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 7 \pm 0} \frac{1}{x^2 - 49}.$$

$$7. \text{Вычислить предел } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{\operatorname{tg}(x - 4)}, \text{ используя эквивалентные}$$

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & \text{если } x \leq 0, \\ \lg x, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

$$\text{а) } y = \left(\frac{1}{3} \right)^{\operatorname{tg} x} \cdot \sqrt{2 - x^3} + \frac{12}{2 - x^3}; \quad \text{б) } s = \arccos \sqrt{1 - t + t^2}; \quad \text{в) } \rho = \frac{2 \cos^2 3\varphi}{\sin \frac{\varphi}{3}}.$$

10. Найти производную указанного порядка для функции:

$$\text{а) } y = \operatorname{arctg} \sqrt{x} \quad y''(x) = ?; \quad \text{б) } y = \sqrt[4]{2x - 11} \quad y^{(4)}(x) = ?.$$

$$11. \text{Найти } \frac{d^3 y}{dx^3} \text{ в точке } x = \pi/3, \text{ если } y = (10x + 11) \cdot \sin \frac{x}{2}.$$

12. Составить уравнение той касательной к графику функции $y = x^2 - 6x + 7$, которая образуют с осью Ox угол 45° ; сделать рисунок.

$$13. \text{Вычислить предел } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x + 3)}{x^3}, \text{ используя правило Лопиталя.}$$

$$14. \text{Найти наименьшее и наибольшее значения функции } y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} \text{ на отрезке } [0; 1].$$

$$15. \text{Найти точки перегиба графика функции } y = 1 - \ln^3 x.$$

$$16. \text{Исследовать на непрерывность функцию } f(x) = \frac{1}{2 + 3^{\frac{1}{x}}}; \text{ в случае}$$

существования точек разрыва установить их характер. Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = 3e^{-2x^2-6x}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \frac{(2\sqrt{x} + 9)^2}{x^2} dx.$

19. $\int \frac{2}{(3x-5)^3} dx.$

20. $\int \frac{dx}{100-4x^2}.$

21. $\int 80x(4x^2-1)^7 dx.$

22. $\int x^5 e^{x^6} dx.$

23. $\int \frac{(5+\sin x)dx}{\cos^2 x}.$

24. $\int \frac{\sqrt{4\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx.$

25. $\int \frac{1+3\ln(x+2)}{x+2} dx.$

26. $\int \frac{(5-4x)dx}{\sqrt{25+4x^2}}.$

27. $\int (x-5)\sin \frac{x}{3} dx.$

28. $\int x 9^{\frac{x}{2}} dx.$

29. $\int \operatorname{arcctg} 4x dx.$

30. $\int \frac{2x dx}{\sqrt{3-6x-x^2}}.$

31. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-1)} dx.$

32. $\int \frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}-4} dx.$

33. $\int \sin^3 7x \cos^6 7x dx.$

34. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

уравнению $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 0.$

35. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = \vec{j} - \vec{k}$ для функции $u = x^3 + 2y^2 - z^4$ в точке $M(3; -2; 1).$

Вариант 20.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

$$1. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{3x^2 - 20x + 12}{2x^2 - 11x - 6}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8+x} - 3}{3x^2 - 3}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x}{x^2 - 25} - \frac{1}{2x^2 - 9x - 5} \right).$$

$$4. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6\alpha}{\operatorname{tg}^2 5\alpha}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x-3}{5x-3} \right)^{-\frac{2}{x}}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(5 + \frac{2}{x} \right)^x.$$

$$7. \text{Вычислить предел } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}, \text{ используя эквивалентные}$$

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{если } x \leq -1, \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x > -1; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

$$\text{а) } y = 2^{\sqrt[3]{x+1}} \cdot \arcsin \frac{1}{x^2}; \quad \text{б) } r = e^{-\frac{\varphi^3}{3}} \cdot \cos^3 \varphi + \sin \sqrt{3}; \quad \text{в) } s = e^{\frac{1}{t+2}} + \ln 3^{\sqrt{2}}.$$

10. Найти производную указанного порядка для функции:

$$\text{а) } y = 7 \cos^2 3x \quad y^{(6)}(x) = ?; \quad \text{б) } y = (\sqrt[5]{5x^2 - 3}) \quad y''(x) = ?.$$

$$11. \text{Найти } \frac{d^2 s}{dt^2} \text{ в точке } t = \pi/4, \text{ если } s = (4t^2 + 1) \operatorname{arctg} 2t.$$

$$12. \text{Составить уравнение касательной к графику функции } y = \frac{x-1}{x^2+1}$$

в точке его пересечения с осью абсцисс.

$$13. \text{Вычислить предел } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}, \text{ используя правило Лопиталя.}$$

$$14. \text{Найти наименьшее и наибольшее значения функции } y = \frac{4}{x^2} - 8x - 15 \text{ на отрезке } \left[-2; -\frac{1}{2} \right].$$

$$15. \text{Найти точки экстремума функции } y = \ln(x^2 - 2x + 6).$$

$$16. \text{Исследовать на непрерывность функцию } f(x) = \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 2x}; \text{ в случае существования точек разрыва установить их характер.}$$

Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = x - \operatorname{arctg} 2x$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

$$18. \int \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{2})^2}{7x} dx. \quad 19. \int x^2 \sqrt{(x^3 - 5)^3} dx. \quad 20. \int \frac{1+x}{16-4x^2} dx.$$

$$21. \int \frac{\cos x}{\sqrt{2+3\sin^2 x}} dx. \quad 22. \int (e^{2x} + 5)^3 e^{2x} dx. \quad 23. \int \sin \frac{3}{x} \frac{dx}{4x^2}.$$

$$24. \int \frac{2 + \cos 2x}{\sin^2 x} dx. \quad 25. \int \frac{\ln^2(2-3x)}{3x-2} dx. \quad 26. \int \frac{(8-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$27. \int (x+2) \sin 7x dx. \quad 28. \int (x+1) 9^{\frac{x}{2}} dx. \quad 29. \int \arccos \frac{x}{2} dx.$$

$$30. \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 6x + 5} dx. \quad 31. \int \frac{x^2}{(x-1)(x^2 + 3x + 2)} dx.$$

$$32. \int \frac{dx}{x\sqrt{4x+9}}. \quad 33. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx.$$

$$34. \text{Найти } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0$$

35. Найти градиент и производную по направлению вектора

$$\vec{l} = 5\vec{i} - 12\vec{j} \text{ для функции } z = (x^2 + y^2) \operatorname{tg} \frac{x}{y} \text{ в точке } A(1; 2).$$

Вариант 21.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

$$1. \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 + 3t + 5t^2 + 4t^3}{3t^5 + 2t^3 + 4}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{4 - \sqrt{5x + 1}}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x + 2} - \frac{12}{x^3 + 8} \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \operatorname{tg} 5x}{1 - \cos 3x}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 4}{x - 3} \right)^{2x+1}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 4 \pm 0} \frac{1}{(x - 4)(x - 5)}.$$

$$7. \text{ Вычислить предел } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x^3)}{2x^3}, \text{ используя эквивалентные}$$

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \leq 0, \\ 2x, & \text{если } 0 < x \leq 3, \\ x^2 + 2, & \text{если } x > 3; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

$$\text{а) } y = \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}; \quad \text{б) } s = \cos(\ln \sqrt{3 \operatorname{tg} e^t}) + \frac{t}{\cos \frac{\pi}{8}}; \quad \text{в) } \rho = \sqrt[3]{1 + \theta \sqrt{\theta + 4}} + \sqrt{3}.$$

10. Найти производную указанного порядка для функции:

$$\text{а) } y = \frac{e^{x^3} + 4}{e^{2x}} \quad y'''(x) = ?; \quad \text{б) } y = \sqrt[4]{2x + 10} \quad y^{(5)}(x) = ?.$$

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = (4 + 14x)e^{-2x}$ уравнению $y'' + 4y' + 4y = 0$.

12. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \ln x$, которая параллельна прямой $y = 2x - 3$; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin 2x - x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

15. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = x \ln^2 x$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{x^2 - 4x - 8}{x + 2}$; в

случае существования точек разрыва установить их характер.

Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} \right)^3 dx.$ **19.** $\int \sqrt[8]{(7-4x)^3} dx.$ **20.** $\int x^2(2x^3 + 4)^3 dx.$

21. $\int \frac{5+4^x}{8^{2x}} dx.$ **22.** $\int \frac{2dx}{\cos^2 \frac{\pi-3x}{4}}.$ **23.** $\int \frac{x}{5x^2-1} dx.$

24. $\int \frac{(1-2\operatorname{ctg} x)^3}{\sin^2 x} dx.$ **25.** $\int \frac{\ln^2(7x+2)}{7x+2} dx.$ **26.** $\int \frac{(1-4x)dx}{\sqrt{1-4x^2}}.$

27. $\int (2x-5)\cos 4x dx.$ **28.** $\int (3-x)e^{3-x} dx.$ **29.** $\int \arccos 8x dx.$

30. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2-2x+1}}.$ **31.** $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2+1)} dx.$

32. $\int \frac{dx}{4\sqrt[4]{2x-3} + \sqrt{2x-3}}.$ **33.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x} dx.$

34. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $x y z = e^x$.

35. Найти градиент и производную по направлению вектора

$\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ для функции $u = \frac{y\sqrt{z}}{4} + \frac{x^2}{z}$ в точке $M(-2; 3; 1)$.

Вариант 22.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 + x - 10}$. 2. $\lim_{v \rightarrow -4} \frac{\sqrt{v+20} - 4}{v^3 + 64}$. 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 3} - x \right)$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 4x \operatorname{ctg} 5x}{3x}$. 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{2-x} \right)^{-3x}$. 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x-1)5^x$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\operatorname{tg} 2x}$, используя эквивалентные

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2 + 2, & \text{если } 0 < x \leq 3, \\ 11, & \text{если } x > 3; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y = (3^{\sin 2x} - \cos^3 x)^4$; б) $w = \arcsin e^{\sqrt{\cos z}}$; в) $s = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1+t^2}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y = \frac{1}{\sin x}$ $y''(x) = ?$; б) $y = \frac{x \ln x^5 + 5}{x^2}$ $y^{(4)}(x) = ?$.

11. Найти $\frac{d^2 \rho(2)}{d\varphi^2}$, если $\rho = \log_4 \sqrt[5]{\varphi^2 + 6\varphi}$.

12. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + 2x - 1$ в точке его пересечения с параболой $y = 2x^2$; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \frac{x}{1+x^2}$ на отрезке $[-2; 0]$.

15. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = x^3 e^{x+1}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = 2^{\frac{1}{(x+2)^2}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и

изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = \frac{\ln(2-x)}{\sqrt{2-x}}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \frac{(x^5 + 2)^2}{\sqrt{x}} dx.$ **19.** $\int \frac{6}{\sqrt[5]{(1-2x)^3}} dx.$ **20.** $\int \frac{dx}{100 - 10x^2}.$

21. $\int \frac{18dx}{e^{1-3x}}.$ **22.** $\int 5x \cos(\pi + x^2) dx.$ **23.** $\int \frac{2 \cos x dx}{\sin^2 x + 3}.$

24. $\int \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$ **25.** $\int \frac{\sqrt[3]{2 + \ln x^7}}{x} dx.$ **26.** $\int \frac{8x^2}{3 - 4x^3} dx$

27. $\int (3x - 1) \sin 2x dx.$ **28.** $\int x e^{3 - \frac{x}{2}} dx.$ **29.** $\int x \operatorname{arctg} x dx.$

30. $\int \frac{(2x + 7) dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}.$ **31.** $\int \frac{x^2}{x^4 - 1} dx.$

32. $\int \frac{dx}{9 + \sqrt{3x - 4}}.$ **33.** $\int \cos^4 x dx.$

34. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = x e^{\frac{y}{x}}.$

35. Исследовать на экстремум функцию $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$

Вариант 23.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-3x^2}{2x^2+7x-2}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x}$. 3. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{5}{x-2} - \frac{3}{x^3-8} \right)$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x$. 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x+5} \right)^{3x+2}$. 6. $\lim_{x \rightarrow 5 \pm 0} \frac{1}{(x-5)(x-2)}$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$, используя эквивалентные

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & \text{если } x \leq 0, \\ x, & \text{если } 0 < x < 1, \\ x^2, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y = (1 + \ln \sin 2x)^2 + \frac{\sqrt{4-3x}}{x+5}$. б) $r = \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{4}}{1 + \cos^2 \frac{\varphi}{4}}$. в) $s = 3^{\operatorname{ctg} \sqrt[4]{5t}} + 3^{\sqrt{2}}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y = \sin^2(1+2x)$ $y^{(5)}(x) = ?$; б) $y = \lg(2x^2+3)$ $y''(x) = ?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = \frac{3}{2}x^2 e^{2x}$ уравнению

$$y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}.$$

12. Составить уравнения касательных к графику функции $y = x^2(x-3)$ в точках его пересечения с осью абсцисс.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

15. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = x + 2 \operatorname{arccctg} x$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{\ln x^4}{x+2}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = -\frac{x^2 + x + 1}{x+1}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \frac{1}{3x} \left(\sqrt[7]{x^2} - \frac{7}{x^2} + 2 \right) dx.$ **19.** $\int e^{3-4x} dx.$ **20.** $\int \frac{3dx}{4+9x^2}.$

21. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{4x-\pi}{3}}.$ **22.** $\int x\sqrt{2-3x^2} dx.$ **23.** $\int \frac{3x^3 dx}{4+9x^4}.$

24. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln^2 x}}.$ **25.** $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x} dx.$ **26.** $\int \frac{(3x+4)dx}{\sqrt{4+9x^2}}.$

27. $\int (3-2x)\sin 2x dx.$ **28.** $\int (x-2)4^{2x} dx.$ **29.** $\int \sqrt[3]{x^2} \ln x dx.$

30. $\int \frac{(x-5)dx}{2x^2+x-4}.$ **31.** $\int \frac{x^3+x+5}{(x-1)(x^2+1)} dx.$

32. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x-9}}.$ **33.** $\int \sin^3 2x dx.$

34. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

35. Найти градиент и производную по направлению вектора

$\vec{l} = -\vec{i} - 2\vec{k}$ для функции $u = \frac{e^{x+y}}{z^2+x}$ в точке $M(-1; 1; 0)$.

Вариант 24.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 8}{3 + 4x - 21x^3}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 + 6x} - 4}$. 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 4} - \frac{2x^2 + x}{2x - 1} \right)$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x \arcsin 2x}{\sin 3x}$. 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6+x}{8+x} \right)^{3x-1}$. 6. $\lim_{x \rightarrow \pm 0} \left(\frac{6+x}{8+x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 4x}$, используя эквивалентные

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{если } x \leq 0, \\ 1 - x, & \text{если } 0 < x < 1, \\ x^2 - 1, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y = \lg^3 \operatorname{tg} \frac{x}{7} + 4^{-\frac{1}{\sqrt{\arcsin x}}}$; б) $w = \cos^5 \frac{3}{z^2}$; в) $s = \operatorname{arctg} \frac{t}{1 + \sqrt{1 - t^2}}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y = x^2 \arccos \frac{5}{x}$ $y''(x) = ?$; б) $y = \frac{2}{\operatorname{tg} 4x}$ $y''(x) = ?$.

11. Найти $\frac{d^3 y(3)}{dx^3}$, если $y = (x^2 - 5x + 7)e^{-x}$.

12. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$

в точке его пересечения с осью абсцисс; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x - 2 \ln x$ на отрезке $[1; e]$.

15. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = \frac{1}{3} \sqrt[3]{x^2} (x - 5)$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{\ln x} - 4$; в случае существования точек разрыва установить их характер.

Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = x(x+1)^2$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

- 18.** $\int \left(\sqrt{x}\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} \right) dx.$ **19.** $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}.$ **20.** $\int \frac{dx}{25x^2+9}.$
- 21.** $\int x \sin 6x^2 dx.$ **22.** $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x - 4)}.$ **23.** $\int \frac{x^3 dx}{(25x^4 + 9)^5}.$
- 24.** $\int \frac{e^{2x}}{2 + e^{4x}} dx.$ **25.** $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x \sqrt{1-x^2}}.$ **26.** $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{25x^2+9}}.$
- 27.** $\int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx.$ **28.** $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}.$ **29.** $\int \arccos \frac{2x}{7} dx.$
- 30.** $\int \frac{(2x+1)dx}{5x^2-2x+10}.$ **31.** $\int \frac{x^3-6x+3}{x^3-x^2-6x} dx.$
- 32.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$ **33.** $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x}.$

34. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = 3ye^{2x+y}.$

35. Исследовать на экстремум функцию $z = xy(6-x-y).$

Вариант 25.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 5x^2 - x^3}{2x^3 - x^2 + 7x}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x^2} - 2}{x}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x^3 - 27} \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x \sin 3x}{5x^2}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5-x}{6-x} \right)^{3x-2}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - 10x).$$

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\operatorname{tg} 2x}$, используя эквивалентные

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{если } x \leq 0, \\ \lg x, & \text{если } 0 < x < 1, \\ x^2 - 1, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y = {}^{15x^2}\sqrt{9} + \operatorname{ctg}^3(3 - 8x)$; б) $s = \sin^2 \frac{\sqrt[5]{t}}{3} + \frac{t}{\cos \frac{\pi}{12}}$; в) $\rho = \lg \operatorname{arctg} \frac{2\varphi - 1}{\sqrt{3}}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y = \frac{2^{5x} - 8^{2x}}{4^x}$ $y'''(x) = ?$; $y = \frac{1}{2x+3}$ $y^{(4)}(x) = ?$.

11. Найти $\frac{d^2 s}{dt^2}$ в точке $t = 3$, если $s = \ln(t^2 + \sqrt{t^4 + 19})$.

12. Составить уравнения касательных к графику функции $y = e^{1-x^2}$ в точках его пересечения с прямой $y = 1$.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right)$, используя правило

Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ на отрезке $[0; 1]$.

15. Найти точки экстремума функции $y = \frac{\ln x}{x}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y = 1 + \frac{e^{-x^2}}{x+1}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и

изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \frac{(4-3x)^2}{x^2} dx.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(7x-8)^2}}.$

20. $\int \frac{6dx}{\sqrt{7-16x^2}}.$

21. $\int x^2 e^{3x^3+4} dx.$

22. $\int 5^{3-4x} dx.$

23. $\int \frac{3xdx}{(7-16x^2)^2}.$

24. $\int \frac{\cos \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}.$

25. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx.$

26. $\int \frac{(4x-3)dx}{7-16x^2}.$

27. $\int 2xe^{3x+4} dx.$

28. $\int \frac{\log_3 x dx}{\sqrt[3]{x}}.$

29. $\int \arcsin \frac{x}{4} dx.$

30. $\int \frac{(x-6)dx}{x^2-8x+17}.$

31. $\int \frac{2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 5}{x^3 + x} dx.$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+4} + 2\sqrt[4]{3x+4}}.$

33. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5 \sin x \cos x}.$

34. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = \ln(x + e^{-y})$

уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$

35. Найти градиент и производную по направлению вектора

$\vec{l} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$ для функции $u = \ln \sin \left(x - 2y + \frac{z}{4} \right)$ в точке $M(1; 0,5; \pi).$

Вариант 26.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{2x - 2}$. 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 + 2} - \frac{x^2}{3x - 5} \right)$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{x \operatorname{tg}(x/3)}$. 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x-2} \right)^{1-2x}$. 6. $\lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} \frac{1}{(x-4)(x-3)}$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}$, используя эквивалентные

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq 0, \\ \lg x, & \text{если } 0 < x < 1, \\ (x-1)^2, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y = 2^{\sin^3 x} + \sqrt{1+x^2} \arccos x$; б) $\rho = \frac{1}{\log_3(2-3\varphi^3)}$; в) $w = \cos \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{1}{z^{20}}}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y = \frac{2}{1-3x}$ $y^{(4)}(x) = ?$; б) $y = \sin 5x^3$ $y'''(x) = ?$.

11. Найти $\frac{d^3 y}{dx^3}$ в точке $x = \pi/9$, если $y = \ln \cos 3x$.

12. Составить уравнение той касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 4$, которая образует с осью Ox угол 45° ; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sqrt{100 - x^2}$ на отрезке $[-6; 8]$.

15. Найти точки перегиба графика функции $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{1-3^x}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и

изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = (x^2 - x + 1)e^{-x}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \frac{(2\sqrt{x} - 3)^3}{\sqrt{x}} dx.$

19. $\int \sqrt[4]{2-3x} dx.$

20. $\int \frac{dx}{9x^2 - 16}.$

21. $\int \frac{(5 + 4^x)^2 dx}{3^{2x}}.$

22. $\int \frac{x^3 dx}{\cos^2 x^4}.$

23. $\int \frac{4x^2 dx}{\sqrt{(9x^3 - 16)^3}}.$

24. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[4]{3\cos x - 4}} dx.$

25. $\int \frac{dx}{x(2\ln x - 3)^2}.$

26. $\int \frac{(9-x)dx}{\sqrt{9+2x^2}}.$

27. $\int (3x+4)\cos x dx.$

28. $\int x^7 \log_7 x dx.$

29. $\int x \cdot \arccos x^2 dx.$

30. $\int \frac{(x+7)dx}{\sqrt{x^2+4x-12}}.$

31. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-1)} dx.$

32. $\int \frac{dx}{3\sqrt{x-2x}}.$

33. $\int \frac{5 + \sin^3 x}{\cos^2 x} dx.$

34. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, если $z = \arcsin \frac{x}{x+y}.$

35. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$

Вариант 27.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^3 + 8}{5 - 3x^2 - 4x^4}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{8 + x^3}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \sin 6x}{1 - \cos 4x}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2} \right)^{-3x+6}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 5} \right).$$

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^3 - 27}$, используя эквивалентные

бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{1}{x-1}, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y = \sqrt[3]{5} + \sqrt{\ln \sin \frac{x}{3}}$; б) $\rho = \sqrt[7]{\frac{2}{3+\varphi}} + \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{\operatorname{ctg}^3 8\varphi}$; в) $s = \arctg \frac{1-t}{2} + \cos^2 \frac{\sqrt{3}}{t}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y = 7^{\sqrt[3]{x}}$ $y''(x) = ?$; б) $y = \log_2(3x^2 - 5)$ $y'''(x) = ?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = \frac{5}{6}(e^{4x} - e^{-2x})$

уравнению $y'' - 2y' - 8y = 0$.

12. Составить уравнения касательных к графику функции $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ в точках его пересечения с осью абсцисс.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin 3x \operatorname{ctg} 2x$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ на отрезке $[-1; 2]$.

15. Найти точки перегиба графика функции $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}(x-5)$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{(x-3)^2}{x+3}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и

изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = 2e^{-\frac{x^2}{8}+x}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}} dx.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(2-5x)^3}}.$

20. $\int \frac{3dx}{16+25x^2}.$

21. $\int x \sin \frac{x^2}{4} dx.$

22. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{2-5x^4}}.$

23. $\int \frac{3x dx}{16+25x^4}.$

24. $\int \sqrt[3]{\ln x} \frac{dx}{x}.$

25. $\int \cos x e^{\sin x} dx.$

26. $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{16+25x^2}}.$

27. $\int x \cos \frac{x}{4} dx.$

28. $\int (x-2)4^{\frac{x}{2}} dx.$

29. $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx.$

30. $\int \frac{x dx}{4x^2+3x-1}.$

31. $\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+1)} dx.$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-7\sqrt[4]{x}}.$

33. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx.$

34. Найти все частные производные 2-го порядка для функции

$$z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}.$$

35. Исследовать на экстремум функцию $z = (x-1)^2 + 2y^2.$

Вариант 28.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{x^2 - 16}$. 3. $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \arcsin 3x}{\sin 6x}$. 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{3x-2}$. 6. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} 7^x$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\operatorname{tg}(x+5)}{x^2 - 25}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \leq 1, \\ x^2, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{(x-7x^2)}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$; б) $w = \operatorname{arctg}^3 \frac{5}{z^2}$; в) $r = \operatorname{tge}^{-\varphi^5} - \log_2 \frac{16\varphi^2}{\sin \varphi}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y = y = \frac{2^{3x} + \sin(1+4x)}{8}$ $y^{(5)}(x) = ?$; б) $y = 4 \arcsin \sqrt{x}$ $y''(x) = ?$.

11. Найти $\frac{d^2 s(0)}{dt^2}$, если $s = 3^{\frac{1+t}{1-t}} + 3^{\frac{1}{4}}$.

12. Составить уравнения касательных к графику функции $y = x^2 - 3x - 5$ в точках пересечения его с биссектрисой первого координатного угла; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x - 4}{x^2 - 11x + 18}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \frac{x^2}{x-1}$ на отрезке $[-2; 0,5]$.

15. Найти точки перегиба графика функции $y = (x-1)e^{4x+2}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = 4^{\frac{1}{(x-3)^2}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер.

Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = (x+2)(x-1)^2$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int (\sqrt{2x}-1)(2x+\sqrt{2x}+1)dx.$ **19.** $\int \sqrt[5]{3-5x}dx.$ **20.** $\int \frac{dx}{4x^2+81}.$

21. $\int x \sin(3x^2-2)dx.$ **22.** $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x+\pi}{3}}.$ **23.** $\int \frac{x^3 dx}{(4x^4+81)^6}.$

24. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx.$ **25.** $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^4 x}}{x} dx.$ **26.** $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{4x^2+81}}.$

27. $\int x e^{3x-2} dx.$ **28.** $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}.$ **29.** $\int \arcsin 3x dx.$

30. $\int \frac{(2x-1)dx}{3x^2-2x+6}.$ **31.** $\int \frac{3x^2-15}{(x+1)(x^2+5x+6)} dx.$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x-9\sqrt{2-5x}}}.$ **33.** $\int \sin^7 x dx.$

34. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = x \cos^2(x+y).$

35. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = -2\vec{j} - 3\vec{k}$ для функции $u = z + \frac{x}{y} - \ln(x+z^2)$ в точке $A(5; 2; 3).$

Вариант 29.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$. 2. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{x + 8}$. 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{5x^2 + 1} - \frac{x^2}{5x - 3} \right)$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x \sin 6x}{1 - \cos 5x}$. 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+2} \right)^{3x-4}$. 6. $\lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{1}{(x-2)(x+3)}$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{2x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 2, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3}} + \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^3}$; б) $\rho = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2\varphi}{\sqrt{1 - 3\varphi^2}}$; в) $s = \sqrt[3]{\cos^2 \frac{t}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{\sin t}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y = \frac{2^{3x} + 3^{2x}}{27^x}$ $y'''(x) = ?$; б) $y = \frac{10}{3x - 3}$ $y^{(4)}(x) = ?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = 3e^{-2x} \sin 5x$ уравнению $y'' + 4y' + 29y = 0$.

12. Составить уравнения тех касательных к графику функции $y = x^3 - 3x + 5$, которые перпендикулярны прямой $x + 9y = 0$.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{x}{2x - 1} - \frac{1}{\ln 2x} \right)$, используя правило

Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на отрезке $[-2; 2]$.

15. Исследовать выпуклость графика функции $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = 2 + 4^{-\frac{1}{x}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер.

Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = \frac{4x^2 + 2x - 4}{x - 2}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \frac{(2x-3)^2}{x^3} dx.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4x-3)^3}}.$

20. $\int \frac{3dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$

21. $\int x \cos(3x^2 + 4) dx.$

22. $\int e^{3x} \sqrt{1 - 2e^{3x}} dx.$

23. $\int \frac{3x dx}{(4-9x^2)^3}.$

24. $\int \frac{3 \sin x dx}{4 \cos x + 9}.$

25. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \arctg^3 x}.$

26. $\int \frac{(5x-3) dx}{4-9x^2}.$

27. $\int x \cos \frac{x}{2} dx.$

28. $\int \frac{\ln x dx}{x^3}.$

29. $\int x^2 \arctg x dx.$

30. $\int \frac{(2x-1) dx}{2x^2 - 8x + 30}.$

31. $\int \frac{5x-8}{x^3 + 4x} dx.$

32. $\int \frac{dx}{5x - 4\sqrt{x}}.$

33. $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x - 5 \cos^2 x}.$

34. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = \sqrt{2xy + y^2}$ уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{z}.$

35. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ для функции $u = \frac{3(z+x)^3}{\sqrt{y}}$ в точке $M(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}).$

Вариант 30.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 8x - 3}{8x^2 + 3x}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$. 3. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{x^2 - 9} - \frac{9}{x^3 - 27} \right)$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x \sin 2x}{1 - \cos x}$. 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x+4} \right)^{-3x}$. 6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq -1, \\ (x-1)^2, & \text{если } -1 < x \leq 1, \\ 0, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y = \frac{1}{2^{-\operatorname{tg}^3 x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(x^2 - 3x)^3}}$; б) $w = \frac{2z-1}{z^4} + \lg^3 \frac{2}{z}$; в) $s = \sqrt[3]{\frac{\sin \frac{t}{3}}{\ln 2}} + 9\sqrt{t}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y = \frac{e^{3+x^4}}{e^{2-x}}$ $y'''(x) = ?$; б) $y = \sqrt{2x^3 + 1}$ $y''(x) = ?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = -\frac{1}{8} \sin 2x - 3x^2 + 7x$ уравнению $y''' - \cos 2x = 0$.

12. Составить уравнения касательных к графику функции $y = x^4 + 3x^2 - 16$ в точках его пересечения с параболой $y = 3x^2$.

13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \frac{x}{2}}{8 - x^3}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sqrt{16 - x^2}$ на отрезке $[-4; 4]$.

15. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = \frac{x^2}{(x+2)^2}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{2-x^2}{x^2-4x}$; в случае существования точек разрыва установить их характер. Найти и изобразить на координатной плоскости асимптоты графика функции.

17. Исследовать функцию $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ и построить ее график.

В заданиях 18-33 найти неопределенные интегралы.

18. $\int \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{x^5} dx.$

19. $\int \sin 11x dx.$

20. $\int \operatorname{tg}^2 8x dx.$

21. $\int x \cos \frac{\pi + 3x^2}{4} dx.$

22. $\int \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

23. $\int \frac{3 \sin x dx}{5 - 2 \cos x}.$

24. $\int \frac{8}{1 + \cos x} dx.$

25. $\int \frac{\sqrt[3]{(6 + \ln x)^7}}{2x} dx.$

26. $\int \frac{e^{2x} + 5}{e^{1-x}} dx.$

27. $\int x \ln(2x + 3) dx.$

28. $\int x^2 \sin 7x dx.$

29. $\int x \operatorname{arcctg} x dx.$

30. $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{5x^2+3x+2}}.$

31. $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2+4)} dx.$

32. $\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx.$

33. $\int \operatorname{ctg}^5 x dx.$

34. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4$.

35. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$ для функции $u = \ln(x^2 - y^2)$ в точке $A(2; 1; 8)$.