ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ: ВЫЧИСЛЕНИЕ
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_1^2 \left(2x^3 + x + 1\right)dx.$

Решение. Используем свойства определенного интеграла и формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_1^2 \left(2x^3 + x + 1\right)dx = 2\int\limits_1^2 x^3 dx + \int\limits_1^2 x dx + \int\limits_1^2 dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2 + \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2 + x\Big|_1^2 = \left(8 - \frac{1}{2}\right) + \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(2 - 1\right) = 10.$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{ctgx}{\sin^2 x} dx.$

Решение. Применяем внесение множителя под знак дифференциала и формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{ctgx}{\sin^2 x} dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ctgx\, d(ctgx) = -\frac{ctg^2 x}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Пример 4. Вычислить $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

Решение. Введем замену переменной. Положим $\ln x = t$, $\frac{dx}{x} = dt$. Если $x = 1$, то $t = 0$; если $x = e$, то $t = 1$. Тогда

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Пример 5. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$.

Решение. Применяем формулу интегрирования по частям в ОИ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \left[\begin{array}{c} u = x, du = dx \\ \sin x dx = dv, v = -\cos x \end{array} \right] = \left[-x \cos x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx =$$

$$= \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Пример 6. Вычислить $\int_0^2 x e^{-x} dx$.

Решение. Интегрируем по частям. Имеем

$$\int_0^2 x e^{-x} dx = -x e^{-x}\Big|_0^2 + \int_0^2 e^{-x} dx = -2e^{-2} - e^{-x}\Big|_0^2 = -2e^{-2} - e^{-2} + 1 = -3e^{-2} + 1.$$

Пример 7. Вычислить $\int_0^1 arctg\, 2x \, dx$.

Решение. Применяем интегрирование по частям в ОИ:

$$\int_0^{1/2} \operatorname{arctg} 2x \, dx = \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} 2x, du = \dfrac{2}{1+4x^2} dx \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right] = \left[x \cdot \operatorname{arctg} 2x\right]\Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{2x dx}{1+4x^2} = \frac{\pi}{8} -$$

$$-\frac{1}{4} \ln\left|1+4x^2\right|\Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\ln 1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.$$

Пример 8. Вычислить $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Воспользуемся заменой переменной в ОИ:

$$\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \begin{bmatrix} x=t^2, & dx=2tdt \\ 1=t_0^2, & 4=t_1^2 \\ t_0=1, & t_1=2 \end{bmatrix} = \int_1^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_1^2 \frac{t+1-1}{1+t}dt = 2\int_1^2 \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt =$$

$$= 2\left[t-\ln|1+t|\right]\Big|_1^2 = 2\left(2-\ln 3-1+\ln 2\right) = 2\left(1+\ln\frac{2}{3}\right).$$

Пример 9. Вычислить $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx.$

Решение. Воспользуемся заменой переменной в ОИ:

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x=2\cos t,\ dx=-2\sin t\,dt \\ 0=\cos t_0,\ 1=\cos t_1 \\ t_0=\pi/2,\ t_1=0 \end{bmatrix} = -\int_{\pi/2}^{0} 4\sin^2 t\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \left[2t\right]\Big|_0^{\pi/2} - \left[\sin 2t\right]\Big|_0^{\pi/2} = \pi - 0 = \pi.$$