ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1.Вычисление двойных интегралов.

Пример 1. Вычислить повторный интеграл $I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{x^2}(2x-y)dy$.

Решение. Вначале вычисляется внутренний интеграл и подставляются пределы интегрирования. Затем вычисляется внешний интеграл:

$$I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{x^2}(2x-y)dy=\int\limits_1^2\left(2xy-\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_x^{x^2}dx=$$

$$=\int\limits_1^2\left(2x^3-\frac{1}{2}x^4-2x^2+\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{2}x^3\right)\Bigg|_1^2=0,9.$$

Пример 2. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_1^3 dy\int\limits_y^{y^2}(y-x)dx$.

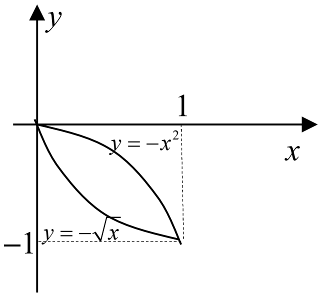
Решение. Имеем

$$\int\limits_1^3 dy\int\limits_y^{y^2}(y-x)dx=\int\limits_1^3\left(yx-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_y^{y^2}dy=\int\limits_1^3\left(y^3-\frac{y^4}{2}-y^2+\frac{y^2}{2}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{y^4}{4}-\frac{y^5}{10}-\frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_1^3=\frac{81}{4}-\frac{243}{10}-\frac{9}{2}=-8,55.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\iint\limits_D(x+2y)dxdy$, где область D ограничена линиями $y=-x^2,\quad y=-\sqrt{x}$.

Решение. Построим область интегрирования D и перейдем к повторному интегралу:



$$\iint\limits_D (x+2y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{-x^2} (x+2y)dy =$$

$$= \int_0^1 (xy+y^2)\Big|_{-\sqrt{x}}^{-x^2} dx = \int_0^1 ((-x\cdot x^2 + x^4) -$$

$$-(-x\cdot\sqrt{x} + x))dx = \int_0^1 (-x^3 + x^4 + x\sqrt{x} - x)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

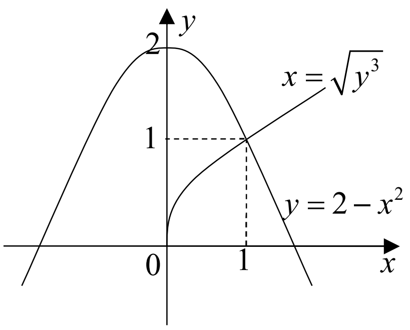
$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{5} - \frac{3}{4} = -\frac{3}{20}.$$

Пример 4. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y^3}} f(x;y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x;y)dx.$$

Решение. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле — это значит перейти от одного повторного интеграла к другому. В данном случае нужно перейти от внешнего интегрирования по y и внутреннего по x к внешнему интегрированию по x и внутреннему по y.

Строим область $D: x=0, x=\sqrt{y^3}, x=\sqrt{2-y}$.



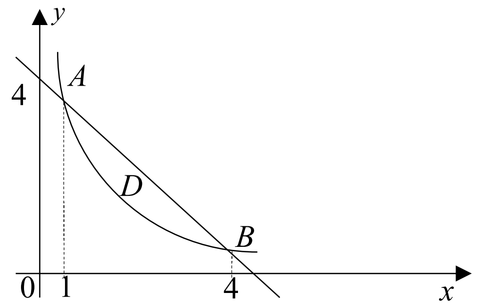
$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y^3}} f(x;y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x;y)dx =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{\sqrt[3]{x^2}}^{2-x^2} f(x;y)dy.$$

2.Геометрические и физические приложения двойных интегралов.

Пример 1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $xy = 4, \quad x + y - 5 = 0.$

Решение. Изобразим область D и найдем координаты точек пересечения кривых. Для этого решим систему уравнений:



$$\begin{cases} xy = 4, \\ x + y - 5 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5 - x, \\ x(5 - x) = 4. \end{cases}$$

$$-x^2 + 5x = 4, \quad x^2 - 5x + 4 = 0,$$

Получим точки $A(1;4)$, $B(4;1)$.

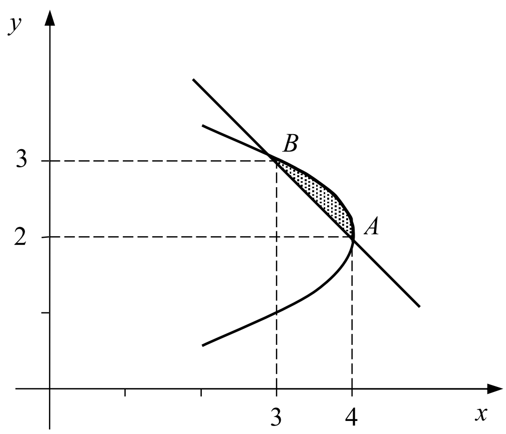
$$S = \iint_D dxdy = \int_1^4 dx \int_{4/x}^{5-x} dy = \int_1^4 dx\, y\Big|_{4/x}^{5-x} = \int_1^4 (5 - x - \frac{4}{x})dx =$$

$$= \left(5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln|x|\right)\Bigg|_1^4 = 20 - 8 - 4\ln 4 - 5 + \frac{1}{2} + 4\ln 1 =$$

$$= 7 + \frac{1}{2} - 4\ln 4 = 7{,}5 - 4\ln 4 = 7{,}5 - 8\ln 2.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 4y - y^2$, $x + y = 6$.

Решение. Область D образована параболой $x = 4y - y^2$ (или $x - 4 = -(y - 2)^2$) и прямой $y = 6 - x$ (см. рис.).



Находим точки пересечения этих линий:

$$\begin{cases} x = 4y - y^2, \\ y = 6 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 4(6 - x) - (6 - x)^2, \\ x^2 - 7x + 12 = 0, \end{matrix}$$

откуда $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Значит, координаты точек пересечения $A(4;\,2)$, $B(3;\,3)$. Площадь фигуры вычисляем следующим образом:

$$S = \iint_D dxdy = \int_2^3 dy \int_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int_2^3 \left(x \Big|_{6-y}^{4y-y^2} \right) dy = \int_2^3 (4y - y^2 - 6 + y)dy =$$

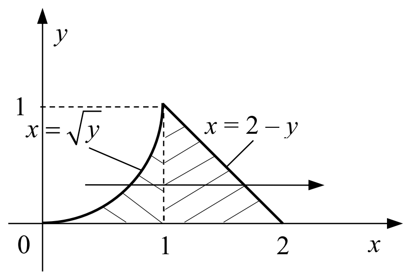
$$= \int_2^3 (5y - y^2 - 6)dy = \left(\frac{5}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - 6y \right)\Big|_2^3 = \frac{1}{6}.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ при $0 \le x \le 1$, $y = 2 - x$ при $1 \le x \le 2$ и $y = 0$.

Решение. Данная фигура изображена на рисунке. Если внешний интеграл вычислять по *x,* то искомая площадь будет вычисляться с помощью двух слагаемых

$$S = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy\,.$$

Иногда при вычислении двойного интеграла бывает целесообразно изменить порядок интегрирования. В данном случае для упрощения вычислений внешний интеграл удобнее вычислять по переменной *y*, его пределы интегрирования будут изменяться от $y = 0$ до $y = 1$. Чтобы найти пределы по *x*, нужно провести стрелку, параллельную оси *Ox*. Тогда нижним пределом будет кривая, через которую стрелка входит в область интегрирования, в данном случае $x = \sqrt{y}$. Верхним пределом будет кривая, через которую стрелка выходит из области интегрирования, это прямая $x = 2 - y$. Значит, искомая площадь равна

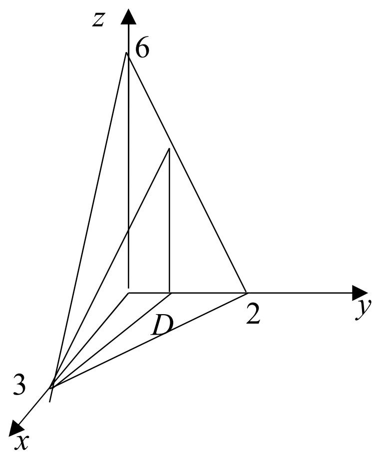


$$S = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} dx = \int_0^1 (2 - y - \sqrt{y})dy = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{2y^{3/2}}{3} \right) = \frac{5}{6}.$$

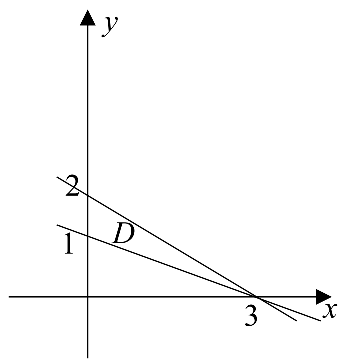
Пример 4. С помощью двойного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$2x + 3y + z - 6 = 0,\ x + 3y = 3,\ x = 0,\ z = 0.$$

Решение. Изобразим данное тело в системе координат *Oxyz*.



Уравнение $2x+3y+z-6=0$ определяет плоскость, которая на координатных осях *Ox*, *Oy*, *Oz* отсекает соответственно отрезки 3, 2, 6. Уравнение $x+3y=3$ на плоскости *Oxy* определяет прямую, а в пространстве – плоскость, параллельную оси *Oz*. Тело ограничено сверху плоскостью $2x+3y+z-6=0$, а снизу - плоскостью $z=0$. Проекция данного тела на плоскость *Oxy* изображена далее.



Для вычисления объема V воспользуемся формулой для вычисления объема цилиндрического тела:

$$V=\iint_D f(x;y)dxdy\,.$$

$$V=\iint_D (6-2x-3y)dxdy=$$

$$=\int_0^3 dx\int_{3-x/3}^{6-2x/3}(6-2x-3y)dy=\int_0^3\left((6-2x)y-\frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_{3-x/3}^{6-2x/3}dx=$$

$$=\int_0^3\left(\frac{(6-2x)^2}{3}-\frac{3(6-2x)^2}{18}-(6-2x)\frac{3-x}{3}+\frac{3}{2}\left(\frac{3-x}{3}\right)^2\right)dx=$$

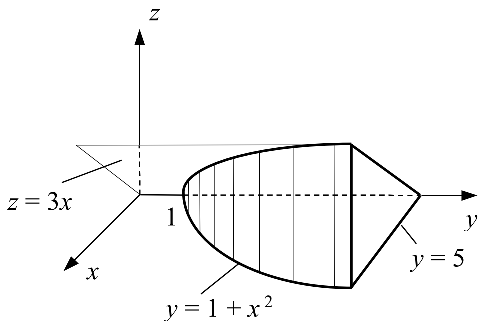
$$=\frac{1}{6}\int_0^3(3-x)^2dx=-\frac{1}{6}\int_0^3(3-x)^2d(3-x)=-\frac{1}{6}\frac{(3-x)^3}{3}\Bigg|_0^3=\frac{1\cdot 3^3}{6\cdot 3}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

Пример 5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y = 1 + x^2, \; z = 3x, \; y = 5, \; z = 0$$

и расположенного в первом октанте.

Решение.



Тело ограничено параболическим цилиндром $y = 1 + x^2$ с образующей, параллельной оси z, плоскостью $z = 3x$, проходящей через ось y, и плоскостями $y = 5$ и $z = 0$ (см. рис.). Следовательно, нужно найти объем цилиндра, расположенного под плоскостью $z = 3x$ и ограниченного плоскостями $y = 5$ и $z = 0$.

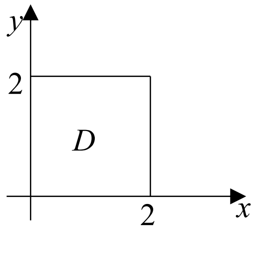
$$\begin{cases} y = 1 + x^2, \\ y = 5, \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

Для нахождения объема тела вычислим

$$V = \int_0^2 dx \int_{1+x^2}^{5} 3xdy = \int_0^2 \left(3xy \Big|_{1+x^2}^{5} \right) dx = 3\int_0^2 (5x - x - x^3) dx = 3\left(2x^2 - \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^2 = 3(8-4) = 12.$$

Пример 6. Найти массу плоской пластинки: $D: 0 \le x \le 2, \; 0 \le y \le 2$, поверхностная плотность которой $\gamma(x; y) = x + y$.

Решение.



$$m = \iint_D (x+y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^2 (x+y)dy =$$

$$= \int_0^2 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 dx = \int_0^2 (2x + 2)dx =$$

$$= \left(2\frac{x^2}{2} + 2x \right)\Bigg|_0^2 = 4 + 4 = 8.$$

Пример 7. Найти координаты центра масс плоской пластинки, масса которой найдена в предыдущем примере.

Решение.

$$S_x = \iint\limits_D y(x+y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^2 y(x+y)dy = \int\limits_0^2 \left(x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^2 dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(2x + \frac{8}{3} \right) dx = \left(2\frac{x^2}{2} + \frac{8}{3}x \right)\Bigg|_0^2 = 4 + \frac{16}{3} = 9\frac{1}{3}.$$

$$S_y = \iint\limits_D x(x+y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^2 x(x+y)dy = \int\limits_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + x\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 dx =$$

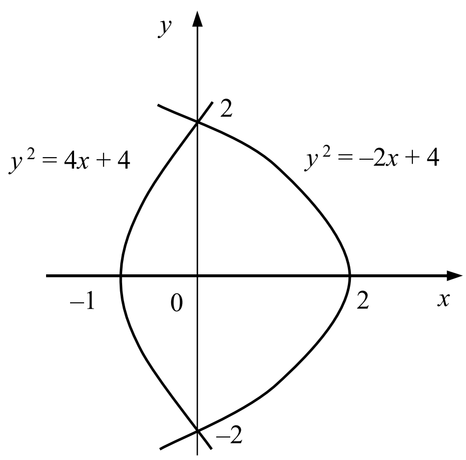
$$= \int\limits_0^2 \left(\frac{8}{3} + 2x \right) dx = \left(\frac{8}{3}x + 2\frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3} + 4 = 9\frac{1}{3}.$$

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{9\frac{1}{3}}{8} = \frac{28}{24} = 1\frac{1}{6}, \quad y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{9\frac{1}{3}}{8} = \frac{28}{24} = 1\frac{1}{6}.$$

Пример 8. Найти координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$ и $y^2 = -2x + 4$.

Решение. Данная фигура симметрична относительно оси Ox (см. рис.), поэтому $y_c = 0$. Значит, нужно найти только x_c. Совместное решение уравнений дает координаты точек пересечения кривых:

$$\begin{cases} y^2 = 4x + 4, \\ y^2 = -2x + 4 \end{cases} \Rightarrow x = 0, \; y^2 = 4, \; y = \pm 2.$$



Так как по условию фигура однородная, то принимаем ее плотность равной $\gamma = 1$ в каждой точке, поэтому при вычислении площади фигуры используем свойство симметрии относительно оси x области интегрирования:

$$S=\iint\limits_{D} dxdy = 2\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} dx = 2\int\limits_{0}^{2}\left(\frac{4-y^2}{2}-\frac{y^2-4}{4}\right)dy =$$

$$=2\int\limits_{0}^{2}\left(3-\frac{3y^2}{4}\right)dy = 6\left(y-\frac{1}{12}\;y^3\right)\Bigg|_0^2 = 8.$$

Тогда координата x_c будет равна:

$$x_c=\frac{1}{8}\iint\limits_{D} xdxdy=\frac{1}{8}\cdot 2\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} xdx = \frac{1}{8}\int\limits_{0}^{2}\left(\frac{1}{4}(4-y^2)^2-\frac{1}{16}(y^2-4)^2\right)dy =$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_{0}^{2}\left(3-\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{16}y^4\right)dy=\frac{1}{8}\left(3y-\frac{y^3}{2}+\frac{3y^5}{80}\right)\Bigg|_0^2=\frac{2}{5}.$$