Обобщенный гипергеометрический ряд $F\left(\begin{matrix}a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_n\end{matrix}\middle| z\right)$ – это степенной ряд от z с $m+n$ параметрами, которые определяются через возрастающие факториальные степени следующим образом:

$$F\left(\begin{matrix}a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_n\end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^{\overline{k}} \dots a_m^{\overline{k}}}{b_1^{\overline{k}} \dots b_n^{\overline{k}}} \frac{z^k}{k!}.$$

Чтобы избежать деления на ноль, ни одно b не может быть нулем или целым отрицательным. В остальном все a и b могут быть любыми. Может быть использована однострочная запись $F(a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n; z)$, вместо F также записывают ${}_mF_n$.

Напомним, ***убывающий факториал*** определяется как

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1),$$

возрастающий факториал определяется

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1).$$

Значение обоих факториалов принимается равным 1 для $n = 0$, т.е. $\boldsymbol{x^{\underline{0}} = 1}$, $\boldsymbol{x^{\overline{0}} = 1}$.

Также обозначают $\boldsymbol{x^{\overline{n}} = (x)_n}$ – **символ Похгаммера**.

Факториальные степени можно расширить на вещественные (комплексные) значения n с помощью гамма-функции:

$$x^{\underline{n}} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)} \quad \text{и} \quad x^{\overline{n}} = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}.$$

Вопросы сходимости бесконечных гипергеометрических рядов рассматриваются в теории функции комплексного переменного. Для исследования сходимости ряда можно применить, например, признак Даламбера.

Многие важные функции представляют собой частные случаи гипергеометрического ряда. Например,

$$F\left(\begin{matrix}1 \\ 1\end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

-геометрический ряд

$$F\left(\begin{matrix}1, 1 \\ 1\end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{k\geqslant 0} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad \text{где } 1^{\overline{k}} = k!;$$

$$F\left(\begin{matrix}a, 1 \\ 1\end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{k\geqslant 0} a^{\overline{k}} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k} \binom{a+k-1}{k} z^k = \frac{1}{(1-z)^a}$$

Ряд вида

$$F\left(\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{a^{\overline{k}} b^{\overline{k}} z^k}{c^{\overline{k}}\, k!}$$

называется **гауссовым гипергеометрическим рядом** ($c \neq 0, -1, -2, \ldots 0$).

Если $\boldsymbol{c = -m - l}$, где $m, l = 0,1,2, \ldots$, то имеем **конечную сумму**

$$\boxed{F\left(\begin{matrix}-m, b\\ -m-l\end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-m)^{\overline{k}} b^{\overline{k}}}{(-m-l)^{\overline{k}}} \frac{z^k}{k!}.}$$

Отрицательное целое число в качестве верхнего параметра превращает бесконечный ряд в конечный, поскольку

$\boldsymbol{(-m)^{\overline{k}}} = -m(-m+1)\ldots(-m+m-1)(-m+(m+1)-1)\ldots(-m+k-1) = \mathbf{0}$ при $\boldsymbol{k} > m \geq 0$.

Гипергеометрическая теорема Гаусса.

$$F\left(\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}\middle| 1\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \qquad c \neq 0, -1, -2, \ldots, \mathrm{Re}c > \mathrm{Re}(a+b). \quad (1)$$

Формула (1) справедлива и при некоторых более слабых ограничениях на параметры.

Некоторые соотношения, содержащие биномиальные коэффициенты

Определим зависящий от x многочлен $\binom{x}{k}$ (или C_x^k) при помощи равенства

$$\binom{x}{k} = (-1)^k \frac{\Gamma(k-x)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-x)} = \begin{cases} 1, \\ \dfrac{1}{k!} x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1), \end{cases}$$

k=1,2,3,…

Справедливы соотношения

$$\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)}{k!} =$$

$$= (-1)^k \frac{-x(-x+1)(-x+2)\ldots(-x+k-1)}{k!} = (-1)^k \frac{(-x)^{\overline{k}}}{k!}$$

$$F\left(\begin{matrix}1, -x\\ -y\end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^{\overline{k}}(-x)^{\overline{k}}}{(-y)^{\overline{k}}} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \frac{(-x)^{\overline{k}}}{k!}}{(-1)^k \frac{(-y)^{\overline{k}}}{k!}} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{x}{k}}{\binom{y}{k}} z^k. \quad (2)$$

Гипергеометрические ряды могут быть использованы для того, чтобы **вычислить в замкнутом виде некоторые суммы**, содержащие биномиальные коэффициенты. При этом используются следующие методы:

- придание специальных значений z,
- выбор в качестве a или b отрицательных целых чисел,
- сравнение коэффициентов при одинаковых степенях z в различных выражениях для гипергеометрического ряда.

Из (2) при z=1 в силу формулы (1) имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{x}{k}}{\binom{y}{k}} = \frac{\Gamma(-y)\Gamma(x-y-1)}{\Gamma(-y-1)\Gamma(x-y)} = \frac{y+1}{y-x+1}.$$

Формула Куммера.

$$F\left({a, b \atop 1+a-b}\middle| -1\right) = \frac{2^{-a}\Gamma(1+a-b)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1-b+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{-a}{k}\binom{-b}{k}}{\binom{b-a-1}{k}}. \qquad (3)$$

Если положить $a=-m$, где m – целое число, то получим

$$F\left({-m, -x \atop 1-m+x}\middle| -1\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}\binom{x}{k}}{\binom{m-x-1}{k}} = \frac{2^m\Gamma(1-m+x)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+x-\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{2}\right)}.$$

Для формул параллельного суммирования и свертки Вандермонда справедливы соотношения

$$\binom{r+n}{n} F\left({1, -n \atop -n-r}\middle| 1\right) = \binom{r+n+1}{n},$$

$$\binom{s}{n} F\left({-r, -n \atop s-n+1}\middle| 1\right) = \binom{r+s}{n}.$$

Свертка Вандермонда – сумма (по всем целым k) произведения двух биномиальных коэффициентов, у которых верхние индексы постоянны, а нижние при любом k имеют одну и ту же сумму, представляет собой биномиальный коэффициент, получающийся суммированием нижних и верхних индексов.

Применение специальных чисел в задачах пересчета

Задача пересчета – исследование вопроса о числе элементов, принадлежащих конечному множеству и обладающих некоторым свойством или совокупностью свойств. В теории вероятностей при решении задач рассматривали вопросы, связанные с числом перестановок, размещений и сочетаний элементов данного множества.

???????Количество неупорядоченных способов разбиений множества из n элементов на k непустых подмножеств? *(числа Стирлинга второго рода)*

???????Количество перестановок порядка n с k циклами? (числа Стирлинга первого рода (без знака))

Напомним понятие производящей функции. Пусть $\{a_n\}$, $n \in N$, – последовательность. Этой последовательности поставим в соответствие ряд по целым степеням z:

$$f^*(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots.$$

Предположим, что всегда существует неотрицательное α, для которого $|a_n| < \alpha^n$, и в этом случае всякой последовательности a_n однозначно соответствует ряд $f^*(z)$ по целым степеням z, который является аналитической функцией в области $|z| < \frac{1}{\alpha}$. Соответствие между последовательностью $\{a_n\}$ и функцией $f^*(z)$ в этом случае взаимно однозначное. **Функция $f^*(z)$ называется производящей функцией последовательности $\{a_n\}$.**

ЧИСЛА СТИРЛИНГА. Рассмотрим производящую функцию – убывающий факториал (здесь $x^{\underline{n}} = (x)_n$ – символ Похгаммера)

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1),$$

которая для начальных значений nимеет следующий вид:

$$(x)_0 = 1, (x)_1 = x, (x)_2 = x(x-1) = x^2 - x,$$

$$(x)_3 = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x,$$

$$(x)_4 = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x.$$

Обозначим через $s(n,k)$ коэффициент при x^k в разложении

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k, \quad s(0,0) = 1.$$

Целые числа $s(n,k)$ называются *числами Стирлинга первого рода (со знаком)*. Как видно из определения, числа имеют чередующийся знак. Их абсолютные значения, называемые ***числами Стирлинга первого рода без знака***, задают количество перестановок множества, состоящего из n элементов с k циклами, и обозначают $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

Первые числа Стирлинга со знаком: $s(n,k)$

n\k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	−1	1				
3	0	2	−3	1			
4	0	−6	11	−6	1		
5	0	24	−50	35	−10	1	
6	0	−120	274	−225	85	−15	1

Рекуррентные формулы для чисел Стирлинга первого рода:

$$\boldsymbol{s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k)} \text{ для } \boldsymbol{0} < k < n,$$

$$\boldsymbol{s(0,0) = 1}, \quad \boldsymbol{s(n,0) = 0} \text{ для } \boldsymbol{n} > 0, \qquad \boldsymbol{s(0,k) = 0} \text{ для } \boldsymbol{k} > 0.$$

Например, $s(4{,}3) = s(3{,}2) - 3s(3{,}3) = -3 - 3 = -6$.

Выразим степени x^n через убывающие факториалы:

$$x^0 = 1, x^1 = x, x^2 = x(x-1) + x,$$

$$x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x,$$

$$x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-1)(x-2) + 7x(x-1) + x, \qquad \text{и т. д.}$$

Обозначим через $S(n,k)$коэффициент при $(x)_k$ в разложении x^n такого вида

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k, \quad S(0{,}0) = 1.$$

Целые числа $\boldsymbol{S(n,k)}$ называются *числами Стирлинга второго рода*. Также обозначают $\left\{ n \atop k \right\}$. В комбинаторике – количество неупорядоченных способов разбиений множества из n элементов на k непустых подмножеств.

S(n, k) Треугольник Стирлинга для числа подмножеств

n	$\left\{ n \atop 0 \right\}$	$\left\{ n \atop 1 \right\}$	$\left\{ n \atop 2 \right\}$	$\left\{ n \atop 3 \right\}$	$\left\{ n \atop 4 \right\}$	$\left\{ n \atop 5 \right\}$	$\left\{ n \atop 6 \right\}$	$\left\{ n \atop 7 \right\}$	$\left\{ n \atop 8 \right\}$	$\left\{ n \atop 9 \right\}$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Рекуррентные формулы для чисел Стирлинга второго рода:

$$\boldsymbol{S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)} \text{ для } \boldsymbol{0} < k \le \boldsymbol{n},$$

$$\boldsymbol{S(n,k) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} S(j,k-1)},$$

$$\boldsymbol{S(0,0) = 1}, \quad \boldsymbol{S(n,0) = 0} \text{ для } \boldsymbol{n} > 0, \qquad \boldsymbol{S(j,k) = 0} \text{ для } \boldsymbol{k > j}.$$

Например, $S(5{,}3) = S(4{,}2) + 3S(4{,}3) = 7 + 3 \cdot 6 = 25$.

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} S(n,k) = B_n} -$$

– число Белла – число **всех** неупорядоченных разбиений n-элементного множества.

Экспоненциальная производящая функция чисел Белла имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1}.$$

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ЧИСЛА. В математике n-м гармоническим числом называется сумма обратных величин первых n последовательных чисел натурального ряда:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Несколько первых значений H_n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H_n	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{363}{140}$	$\frac{761}{280}$	$\frac{7129}{2520}$	$\frac{7381}{2520}$

Гармонические числа являются частичными суммами гармонического ряда. Эти числа ***возникают в процессе анализа алгоритмов*** и тесно связаны с ***дзета-функцией Римана*** и рядом Дирихле

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-x}.$$

Частичные суммы этого ряда определяют гармонические числа x-го порядка (обобщенные гармонические числа)

$$H_n^{(x)} = H_{n,x} = \sum_{k=1}^{n} k^{-x}.$$

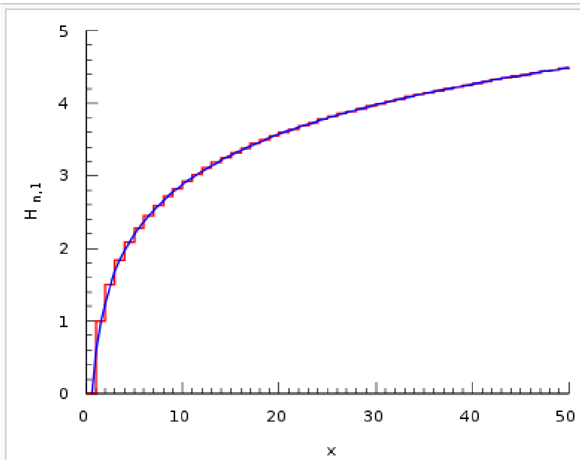
Известно, что гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится и для его частичных сумм справедливы оценки

$$\ln n < H_n < \ln n + 1 \text{ при } n > 1.$$

Гармонические числа растут до бесконечности, но делают они это лишь логарифмически, т.е. крайне медленно. Доказано, что

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\varepsilon_n}{120n^4},$$

где $0 < \varepsilon_n < 1, \gamma = 0{,}5772156649\ldots$ – постоянная Эйлера.



Гармоническое число $H_{n,1}$, где $n = \lfloor x \rfloor$ (красная линия) и его асимптотический предел $\gamma + \ln(x)$ (синяя линия).

Эта формула позволяет, не прибегая к сложению миллиона дробей, заключить, что миллионное гармоническое число есть

$$H_{1000000} \approx \mathbf{14{,}39}272672286572363138112\,75.$$

Производящая функция

$$-\frac{\ln(1-z)}{1-z}=\sum_{k=1}^{\infty} H_k z^k.$$

ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ– последовательность рациональных чисел B_0, B_1, B_2, …, найденная Якобом Бернулли (1654 – 1705) в связи с вычислением сумм одинаковых степеней натуральных чисел

$$1^m+2^m+\dots+(n-1)^m=\sum_{k=0}^{n-1} k^m=\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k}.$$

Коэффициентами разложения некоторых элементарных функций в степенные ряды часто служат числа Бернулли. Например:

Экспоненциальная производящая функция для чисел Бернулли

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k,\ |x|<2\pi.$$

$$x\mathrm{ctg}x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k B_{2k}\frac{2^{2k}}{(2k)!}x^{2k},\ |x|<\pi.$$

Эйлер указал на связь между числами Бернулли и значениями дзета-функции Римана $\zeta(x)$ при четных $x=2k$

$$B_{2k}=2(-1)^{k+1}\frac{\zeta(2k)(2k)!}{2\pi^{2k}}.$$

Рекуррентная формула для чисел Бернулли

$$B_n=\frac{-1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k+1}B_{n-k},n\in\mathbf{N}.$$

Числа Бернулли являются значениями при $x=0$ многочленов Бернулли $B_n=B_n(0)$.

Все числа Бернулли с нечетными номерами, кроме B_1 , равны нулю, знаки B_{2n} чередуются.

Производящей функцией для многочленов Бернулли является

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(x)}{k!}t^k.$$

Несколькими первыми многочленами Бернулли являются:

$$B_0(x)=1,$$

$$B_1(x)=x-\frac{1}{2},$$

$$B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},$$

$$B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,$$

$$B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30},$$

$$B_5(x)=x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x,$$

$$B_6(x)=x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42}.$$