Гамма-функция Эйлера относится к числу самых простых и значимых специальных функций, знание свойств которой необходимо для изучения многих других специальных функций, например, цилиндрических (функций Бесселя), гипергеометрических и др. Эйлеровы интегралы представляют собой хорошо изученные неэлементарные функции. Задача считается решенной, если она приводится к вычислению эйлеровых интегралов.

Часть 1. Применение интегралов Эйлера к вычислению определенных интегралов

Интегральное представление *гамма-функции* $\Gamma(x)$ задается формулой

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\ ,\quad x>0. \tag{1}$$

Свойства и основные соотношения.

1. Значения $\Gamma(1)=\int\limits_0^\infty e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^\infty=1.$ (2)

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\left|\begin{array}{c}\sqrt{t}=s, dt=2sds\\ t=0\Rightarrow s=0\\ t=\infty\Rightarrow s=\infty\end{array}\right|=2\int\limits_0^\infty e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}\,,$ (3)

т.к. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ – интеграл Пуассона.

3. $\boldsymbol{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)}$ ***(формула приведения)***, (4)

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)(n-2)\dots1\cdot\Gamma(1)=n! \tag{5}$$

$$0!=\Gamma(1)=1 \tag{6}$$

$$\Gamma(x+n)=(x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)x\Gamma(x) \tag{7}$$

$$\Gamma(1-x)=-x\Gamma(-x),\quad x\in(0,1) \tag{8}$$

4. $\boldsymbol{\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}}$ ***(формула дополнения)***, (9)

$$\boldsymbol{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right)=\frac{\pi}{\cos\pi x}} \tag{10}$$

ПРИМЕР. Найти $\boldsymbol{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}$

По формуле приведения имеем $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$

Эйлер ввел и исследовал и ***бета-функцию*** $B(x,y)$, связанную с гамма-функцией соотношением

$$\boldsymbol{B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}}. \tag{11}$$

При $x>0,\ y>0$ для бета-функции справедливо интегральное представление

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt. \tag{12}$$

Некоторые интегралы могут быть вычислены с помощью следующих формул:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha}x\cos^{\beta}x\,dx=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}, \tag{13}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{14}$$

ПРИМЕР. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2}\sin^5 x\cos^3 x\,dx.$

Решение. Применим формулу (13) и формулы приведения

$$\int_0^{\pi/2}\sin^5 x\cos^3 x\,dx=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5+3}{2}+1\right)}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(2)\Gamma(3)}{\Gamma(5)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{24}.$$

ПРИМЕР. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx.$

Решение. Применим формулу (14) и формулу дополнения

$$\int_0^{\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx=\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{5}{4}-1}}{(1+x)^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}}dx=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)}=\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(2)}=$$

$$=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Часть 2. Биномиальные коэффициенты как целозначные многочлены

Определим зависящий от x многочлен $\binom{x}{k}$ (или C_x^k) при помощи равенства

$$\binom{x}{k}=(-1)^k\frac{\Gamma(k-x)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-x)}=\begin{cases}1,\\ \frac{1}{k!}x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1),\end{cases}$$

k=1,2,3,…

Биномиальные коэффициенты $\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \binom{x}{2}, \ldots$ являются ***целозначными многочленами*** от x, то есть принимают целые значения при целых x. Более того, они образуют базис целозначных многочленов, в котором все целозначные многочлены степени n выражаются как линейные комбинации $\binom{x}{k}$, $k=0,1,\ldots,n$, с целыми коэффициентами.

Запишием несколько первых элементов этого базиса.

$$\binom{x}{0} = 1, \qquad \binom{x}{1} = x, \quad \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2!} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2},$$

$$\binom{x}{3} = \cdots, \binom{x}{4} = \cdots.$$

Например, $3x^3 - 5x^2 + 7x - 1 = -1 \cdot \binom{x}{0} + 5 \cdot \binom{x}{1} + 8 \cdot \binom{x}{2} + 18 \cdot \binom{x}{3}$

Указание. 1) Данный многочлен записали в виде линейной комбинации с неопределенными коэффициентами

$$3x^3 - 5x^2 + 7x - 1 = \alpha_1 \cdot \binom{x}{0} + \alpha_2 \cdot \binom{x}{1} + \alpha_3 \cdot \binom{x}{2} + \alpha_4 \cdot \binom{x}{3}$$

2) Представили биномиальные коэффициенты в виде многочленов.
3) Сравнили коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства. Получили систему линейных алгебраических уравнений.
4) Решили систему линейных алгебраических уравнений.
5) Записали ответ.

Часть 3. Применение специальных чисел в задачах пересчета

Задача пересчета – исследование вопроса о числе элементов, принадлежащих конечному множеству и обладающих некоторым свойством или совокупностью свойств. В теории вероятностей при решении задач рассматривали вопросы, связанные с числом перестановок, размещений и сочетаний элементов данного множества.

Сочетанием из n элементов по k $(0 \le k \le n)$ элементов называется любое подмножество, которое содержит k элементов данного множества.

Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

??????Количество неупорядоченных способов разбиений множества из n элементов на k непустых подмножеств? *(числа Стирлинга второго рода)*

Например, четырехэлементное множество $\{1,2,3,4\}$можно разбить на два непустых подмножества 7 способами:

$$\{1,2,3\}\{4\},\quad \{1,2,4\}\{3\},\quad \{1,3,4\}\{2\},\quad \{2,3,4\}\{1\},$$
$$\{1,2\}\{3,4\},\quad \{1,3\}\{2,4\},\quad \{1,4\}\{3,2\}$$

???????Количество перестановок порядка n с k циклами? (числа Стирлинга первого рода (без знака))

Рассмотрим перестановку, которая переводит строку цифр 123456789 в 384729156. Каждая перестановка эквивалентна некоторому множеству циклов.

Для наглядности представим перестановку в виде двух строк

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 4 & 7 & 2 & 9 & 1 & 5 & 6 \end{matrix}$$

Возникает циклическая структура: [1,3,4,7], т.е. $1\to3\to4\to7\to1$. Другим циклом в данной перестановке является: [2,8,5] , еще один цикл – [6,9]. Таким образом, перестановка 384729156 эквивалентна циклическому представлению

[1,3,4,7][2,8,5][6,9].

Существует одиннадцать различных способов составления двух циклов из четырех элементов:

$$[1,2,3][4],\quad [1,2,4][3],\quad [1,3,4][2],\quad [2,3,4][1],$$
$$[1,3,2][4],\quad [1,4,2][3],\quad [1,4,3][2],\quad [2,4,3][1],$$
$$[1,2][3,4],\quad [1,3][2,4],\quad [1,4][2,3].$$

Отметим, например, $[1,3,4][2] = [3,4,1][2] = [4,1,3][2]$, здесь 2 – неподвижная точка.

ЧИСЛА СТИРЛИНГА. Рассмотрим производящую функцию – убывающий факториал (здесь $x^{\underline{n}} = (x)_n$ – символ Похгаммера)

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1),$$

которая для начальных значений nимеет следующий вид:

$$(x)_0 = 1, (x)_1 = x, (x)_2 = x(x-1) = x^2 - x,$$
$$(x)_3 = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x,$$
$$(x)_4 = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x.$$

Обозначим через $s(n,k)$ коэффициент при x^k в разложении

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k, \quad s(0,0) = 1.$$

Целые числа $s(n,k)$ называются *числами Стирлинга первого рода (со знаком)*. Как видно из определения, числа имеют чередующийся знак. Их абсолютные значения, называемые ***числами Стирлинга первого рода без знака***, задают количество перестановок множества, состоящего из n элементов с k циклами, и обозначают $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

Первые числа Стирлинга со знаком: $s(n,k)$

n\k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	−1	1				
3	0	2	−3	1			
4	0	−6	11	−6	1		
5	0	24	−50	35	−10	1	
6	0	−120	274	−225	85	−15	1

Рекуррентные формулы для чисел Стирлинга первого рода:

$$\boldsymbol{s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k)} \text{ для } \boldsymbol{0} < k < n,$$

$$\boldsymbol{s(0,0) = 1}, \quad \boldsymbol{s(n,0) = 0} \text{ для } \boldsymbol{n} > 0, \qquad \boldsymbol{s(0,k) = 0} \text{ для } \boldsymbol{k} > 0.$$

Например, $s(4{,}3) = s(3{,}2) - 3s(3{,}3) = -3 - 3 = -6.$

Выразим степени x^n через убывающие факториалы:

$$x^0 = 1, x^1 = x, x^2 = x(x-1) + x,$$

$$x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x,$$

$$x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-1)(x-2) + 7x(x-1) + x, \qquad \text{и т. д.}$$

Обозначим через $S(n,k)$коэффициент при $(x)_k$ в разложении x^n такого вида

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k, \quad S(0{,}0) = 1.$$

Целые числа $S(n,k)$ называются *числами Стирлинга второго рода*. Также обозначают $\left\{ n \atop k \right\}$. В комбинаторике – количество неупорядоченных способов разбиений множества из n элементов на k непустых подмножеств.

Рекуррентные формулы для чисел Стирлинга второго рода:

$$\boldsymbol{S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)} \text{ для } \boldsymbol{0} < k \leq \boldsymbol{n},$$

$$\boldsymbol{S(n,k) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} S(j,k-1),}$$

$$\boldsymbol{S(0,0) = 1},\ \ \boldsymbol{S(n,0) = 0} \text{ для } \boldsymbol{n} > 0, \qquad \boldsymbol{S(j,k) = 0} \text{ для } \boldsymbol{k > j}.$$

Например, $S(5{,}3) = S(4{,}2) + 3S(4{,}3) = 7 + 3 \cdot 6 = 25.$

Треугольник Стирлинга для числа подмножеств

n	$\left\{{n \atop 0}\right\}$	$\left\{{n \atop 1}\right\}$	$\left\{{n \atop 2}\right\}$	$\left\{{n \atop 3}\right\}$	$\left\{{n \atop 4}\right\}$	$\left\{{n \atop 5}\right\}$	$\left\{{n \atop 6}\right\}$	$\left\{{n \atop 7}\right\}$	$\left\{{n \atop 8}\right\}$	$\left\{{n \atop 9}\right\}$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Треугольник Стирлинга для числа циклов

n	$\left[{n \atop 0}\right]$	$\left[{n \atop 1}\right]$	$\left[{n \atop 2}\right]$	$\left[{n \atop 3}\right]$	$\left[{n \atop 4}\right]$	$\left[{n \atop 5}\right]$	$\left[{n \atop 6}\right]$	$\left[{n \atop 7}\right]$	$\left[{n \atop 8}\right]$	$\left[{n \atop 9}\right]$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1