ОСНОВЫ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Многие явления окружающего нас мира обладают следующим свойством: если наблюдать явление один раз, то нельзя точно предсказать, как оно будет проткать. Но если это явление наблюдать многократно и при неизменных условиях, то окажется, что протекание этого явления можно описать количественно, то есть с помощью чисел. Например, подбрасывание монеты, игральной кости и так далее. Строя модель какого-либо опыта, например, подбрасывание монеты, учитывают только наиболее существенные особенности изучаемого явления и отбрасывают второстепенные (бросая монету, не рассматривают «встанет на ребро», «зависнет в воздухе», либо «закатится куда-то»).

Можно рассматривать и модели другой природы – из сельского хозяйства, военного дела, экономики, техники и так далее. Но окажется, что многие выводы не зависят от формы рассматриваемого явления. Другими словами: ***теория вероятностей – это математический анализ случайных явлений*** или ***наука, занимающаяся выявлением и изучением закономерностей случайных массовых явлений, независимо от их природы, и дающая методы количественной оценки влияния случайных факторов на различные явления***.

§ 1. Пространство элементарных событий. Классификация случайных событий

Первичным понятием теории вероятностей является ***событие*** или ***опыт***. ***Случайное событие*** – это событие, которое при создании определенного комплекса условий ***S*** может произойти, а может и не произойти. Например, – получение урожая, включение прибора, получение дивидендов и так далее. Комплекс условий ***S*** тождественен понятию опыт.

Элементарными событиями, связанными с некоторым опытом, называются такие события, что:

1. при осуществлении комплекса условий ***S*** одно и только одно из них обязательно происходит;
2. все они различны.

Совокупность всех элементарных событий обозначают U или Ω и называют ***пространством (множеством) элементарных событий***. Если элементарные события обозначить ω_i, то $\Omega = (\omega_{1,\,...,}\, \omega_n)$.

Например, при бросании игральной кости пространство элементарных событий состоит из элементарных событий ω_i = (выпало i очков), i=1,2,3,4,5,6.

Случайное событие, которое не является элементарным, называется ***составным случайным событием.*** Например, событие, состоящее в выпадении четного числа очков при однократном бросании игральной кости: $(\omega_2, \omega_4, \omega_6)$. Формально, всякое случайное событие можно определить, как объединение элементарных событий. Обозначают составные случайные события обычно большими буквами латинского алфавита A, B, C… (возможны индексы).

Элементарные события из пространства элементарных событий Ω, входящие в состав случайного события A, называются ***благоприятствующими***

для появления события А. Число элементов пространства элементарных событий Ω обозначается $N(\Omega)$. Число элементарных событий, благоприятствующих появлению события A – $N(A)$. Оно может быть конечно, счетно, бесконечно.

Два или несколько событий, связанных с одним и тем же опытом, называют ***равновозможными***, если все эти события имеют одинаковые шансы для своего появления и нет оснований утверждать, что какое-то событие имеет больше шансов появиться, чем другие. Например, выпадение какого-либо числа очков на правильной игральной кости.

Если из того, что произошло событие A, следует, что произошло и событие B, то говорят, что A ***влечет за собой*** B и обозначают $A\subset B$. Например, событие A заключается в попадании в 10 при одном выстреле, а событие B - в попадание в мишень. Тогда событие A влечет за собой событие B: $A\subset B$.

Если одновременно $A\subset B$. и $A\supset B$, то ***события A и B называют равносильными*** и обозначают $A=B$. То есть в результате опыта оба появляются или не появляются одновременно. Очевидно, что равносильные события состоят из одних и тех же элементарных событий.

Событие, которое при осуществлении комплекса условий **S** всегда наступает, называется ***достоверным***, которое никогда не наступает – ***невозможным***.

Событие, состоящее в том, что произойдет хотя бы одно из двух событий A и B связанных с одним и тем же опытом – называется ***суммой*** этих ***событий*** $C=A+B$. Например, событие A заключается в том, что при бросании двух игральных костей на первой выпало 2 очка, а на второй – выпало 4 (событие B). Тогда сумма этих событий $C=A+B$=(либо 2 очка на первой, либо 4 очка на второй, либо 2 очка на первой и 4 очка на второй).

Событие C, состоящее в одновременном наступлении события A и события B, связанных с одним и тем же опытом, называется ***произведением*** этих ***событий*** и обозначается $C=AB$. Например, событие A состоит в том, что изделие произведено тракторным заводом, а событие B заключается в том, что это изделие – высшего сорта. Тогда произведение этих событий $C=AB$ заключается в том, что изделие высшего сорта произведено тракторным заводом.

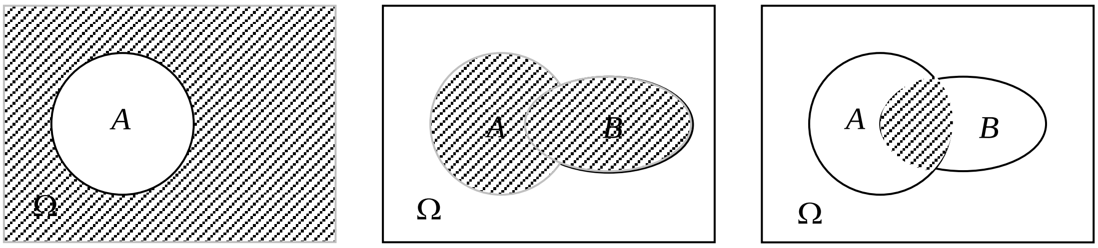
События A и B, связанные с одним и тем же опытом, называются ***несовместными***, если в результате каждого опыта, появление одного из них исключает появление другого, то есть их произведение есть событие невозможное: $AB=\varnothing$. Например, событие A состоит в выпадении трех очков при однократном бросании правильной игральной кости, а событие B – в выпадение четного числа очков при этом бросании. Так как это одновременно произойти не может, то это несовместные события.

Множество событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***несовместными в совокупности***, если любые два события A_i являются несовместными, то есть они попарно несовместны.

Множество событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, связанных с одним и тем же опытом, образуют ***полную группу несовместных событий***, если они попарно несовместны и в результате опыта обязательно происходит одно и только одно из них.

Событие называется ***противоположным (дополнением) к событию*** A, если оно наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A. Обозначается $\overline{A}$. Очевидно, что $A\overline{A} = \emptyset$ и одновременно $A + \overline{A} = \Omega$. Например, событие A – хотя бы одно попадание в мишень при трех выстрелах. Противоположное к нему $\overline{A}$ – ни одного попадания при трех выстрелах. Так как пространство элементарных событий Ω всегда наступает, то оно является достоверным событием и $\overline{\Omega} = \varnothing$ – невозможное событие.

Ниже приводится геометрическая интерпретация событий $\overline{A}, A+B, AB$.



$\overline{A}$ $\quad$ $A+B$ $\quad$ AB

Введенные операции над событиями обладают следующими свойствами:

$A+B=B+A$	$AB=BA$
$A+A=A$	$AA=A$
$A+\Omega=\Omega$	$A\Omega=A$
$A+\overline{\Omega}=A$	$\overline{\Omega}A=\overline{\Omega}$

Если $A\subset B$, то $A+B=B$, а $AB=A$.

Так же для операций над событиями выполняются ***законы двойственности (правило де Моргана)*** $\overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B}$ и $\overline{A\cdot B} = \overline{A}+\overline{B}$.

Разностью двух событий A и B называется событие C (обозначается $C=A–B$), которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A и не происходит событие B: $A - B = A\cdot\overline{B}$.

§2. Вероятность события

§2.1. Статистическое определение вероятности

Пусть некоторый опыт, связанный с событием A повторяется в неизменных условиях N раз, и событие A наступило M раз. ***Относительной частотой (частостью) события*** A называется отношение числа опытов, в которых появилось событие A, к числу всех проведенных опытов:

$$P^*(A) = \frac{M}{N}.$$

Таким образом, относительная частота события A есть числовая характеристика, которая выражает степень правдоподобия наступления события A. Недостатком частоты, как количественной характеристики события A, является то, что частота события изменяется от серии к серии опытов. Желательно иметь характеристику, лишенную этого недостатка.

Вероятностью события A (обозначается $P(A)$) называется постоянное число, около которого группируются относительные частоты события A при неограниченном увеличении числа опытов, производимых в одних и тех же условиях

$$P^*(A) = \frac{M}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} P(A).$$

Непосредственно из этого определения следует, что если событие A является невозможным (в этом случае M=0), то вероятность события $P(A)$=0. Обратное в общем случае неверно, то есть из того, что вероятность события равна нулю, не следует что это событие невозможное (при подбрасывании монеты она стала на ребро – возможное, но очень редкое).

Данное определение вероятности не является рабочим, так как не дает практического правила вычисления вероятности события. Для вычисления вероятности по этому определению необходимо проводить бесконечное число опытов в неизменных условиях, а это связано либо с большими материальными затратами, либо с разрушением объекта. Во многих практических задачах частоту события принимают за ее вероятность, что приводит к ошибке, но если ее (ошибку) можно оценить, то это позволяет прибегать к такой замене.

§2.2. Классическое определение вероятности

Пусть с некоторым опытом можно связать **конечное** пространство элементарных событий $\Omega = (\omega_1,..\omega_n)$, $N(\Omega)=n$, причем элементарные события ω_n – равновозможны. Рассмотрим далее некоторое событие $A = (\omega_{k_{11}},...,\omega_{k_m})$, связанное с этим опытом. Если исходы опыта являются равновозможными и их конечное число, то ***вероятность события A***, связанного с таким опытом, равна отношению числа благоприятствующих исходов для события A к числу всех возможных исходов опыта:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{m}{n}.$$

К достоинствам этого определения стоит отнести то, что вероятность события может быть вычислена не производя опытов, а пользуясь лишь логическими рассуждениями и формулами комбинаторики при расчете чисел m и n. ***Комбинаторика*** изучает, сколькими различными способами можно составить из элементов заданного множества подмножества (комбинации), удовлетворяющие определенным условиям.

Число P_n всех возможных способов переставить n различных элементов – число ***перестановок*** из n различных элементов равно

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Число A_n^m ***размещений*** (упорядоченных комбинаций) из n различных элементов по m элементам (местам), различающихся либо самими элементами, либо их порядком, равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).$$

Число C_n^m ***сочетаний*** (неупорядоченных комбинаций) из n различных элементов по m элементам (порядок выбранных элементов не учитывается) равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m},$$

причем $0!=1$. Отметим также, что: $C_n^m = C_n^{n-m}$; $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

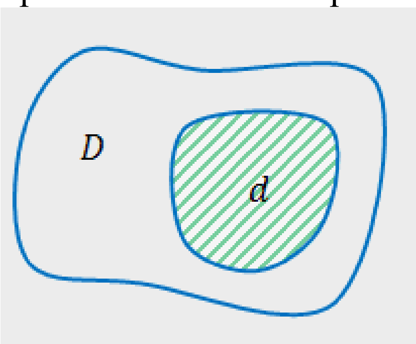
Пример. Сколько существует способов распределения 3 наград между 10 участниками соревнования, если: а) награды различные, б) все награды одинаковые?

Решение. Число способов распределения 3 наград между 10 участниками соревнования равно числу способов выбрать трех участников из десяти и разместить их по трем местам, то есть числу размещений $A_{10}^3 = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$ (порядок важен) в случае а) и числу $C_{10}^3 = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$ (порядок не учитывается) в случае б).

К недостаткам классического определения вероятности следует отнести то, что, во-первых, опыт должен иметь конечное число исходов, и во-вторых, исходы должны быть равновозможны, что на практике не всегда имеет место.

§2.3. Геометрическое определение вероятности

Если пространство элементарных исходов Ω становится бесконечным, то предыдущие определения вероятностей уже не работают. Если оно счетно и бесконечно, то можно ввести вероятность, отказавшись от равновозможности элементарных исходов, но оставив аддитивность. Если же Ω бесконечно и не является счетным, то можно воспользоваться геометрическим определением вероятности. Рассмотрим его подробнее.



Пусть в некоторой области *D* на плоскости наудачу бросается некоторая материальная точка. Причем, она гарантированно попадает в эту область *D*. Внутри области *D* рассмотрим некоторую область *d*, целиком лежащую в *D*, и вычислим вероятность того, что брошенная точка попадет в область *d* (событие *A*).

Очевидно, что чем больше область *d*, тем больше вероятность попасть в эту область. То есть искомая вероятность тесно связана с площадью области *d* – S_d: $P(A)=k\,S_d$. Здесь *k* – коэффициент пропорциональности. Если в качестве области d выбрать все множество D, то попадание в нее (согласно первоначальных предположений) будет событием достоверным: $P(\Omega) = kS_D = 1$:

$$k = \frac{1}{S_D} \Rightarrow P(A) = \frac{S_d}{S_D}.$$

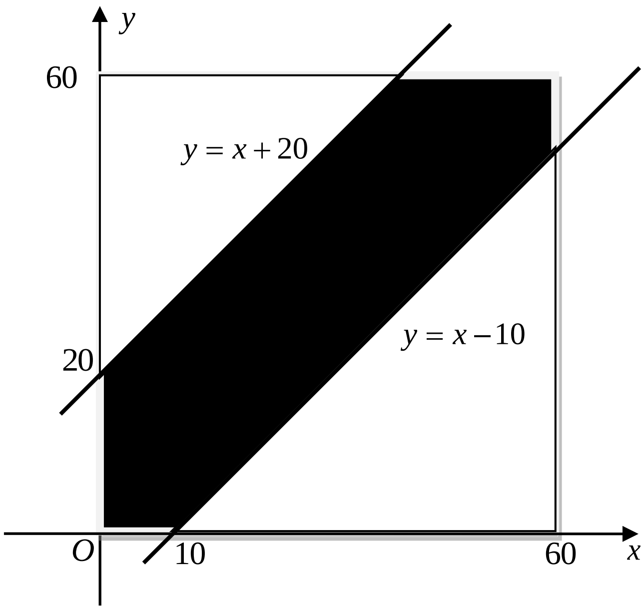
Вероятность, вычисленную по последней формуле, называют ***геометрической вероятностью***. Используя эту формулу, можно показать, что вероятность попадания на некоторый отрезок, целиком лежащий в области D, будет, вообще говоря, равна нулю (так как отрезок площади не имеет), хотя это событие не является невозможным, просто это событие маловероятное или, как говорят в теории вероятностей, практически невозможное. Еще раз подтвердили следующий факт: *если событие невозможное, то вероятность его равна нулю, обратное в общем случае неверно*.

Пример. ***Задача о встрече***. Два лица: И. и М. договорились встретиться в течение часа, в пределах которого они приходят случайным образом (наудачу), причем И. ждет 20, а М. – 10 минут. Найти вероятность того (*событие* A), что они встретятся.

Решение. Пусть x – время прихода И., а y – время прихода М. Тогда $(x;y)$ – точка, которая наудачу появляется во множестве
$\Omega = \{(x; y)|0 \le x \le 60, 0 \le y \le 60\}$ с геометрической мерой – площадью S=60·60=3600. Чтобы встреча состоялась, нужно, чтобы каждое лицо пришло не позже, чем ушло после ожидания другое, что равносильно геометрическому условию:

$$((x; y) \in A) = \{(x; y)|x \le y + 10, y \le x + 20, 0 \le x \le 60, 0 \le y \le 60\},$$

причем площадь S_A благоприятствующей событию A области равна площади S квадрата Ω за вычетом площадей двух прямоугольных треугольников с катетами по 40 и 50 единиц.



Тогда

$$P(A)=\frac{S_A}{S}=\frac{60\cdot 60-\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 40-\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 50}{60\cdot 60}=\frac{31}{72}\approx 0,43.$$

Достоинства геометрической вероятности:

1. зная площади множеств можно вычислить вероятность;
2. показывает наглядно, что вероятность события – это число, которое показывает, какую часть единицы (вероятность достоверного события) составляет вероятность события.

Недостатки:

1. предположение равновозможности всех элементарных исходов;
2. предположение конечности площади пространства элементарных событий.

Геометрическую вероятность можно распространить как на пространственные области, так и на числовую ось. Главное в ней измеримость: на отрезке – это длина, на плоскости – площадь, в пространстве – объем.

§2.4. Аксиоматическое построение теории вероятности

Предыдущие определения вероятности (статистическое, классическое, геометрическое) имеют свои достоинства и недостатки. При этом каждое из них вводились с некоторыми ограничениями. Хотелось бы ввести такое определение, чтобы охватить все предыдущие случаи и при этом сохранить общие стороны этих определений. Единственный выход – ввести аксиоматическое определение вероятности события. Другими словами, определим ***вероятность события A*** как функцию *P(A)* удовлетворяющую следующими аксиомам:

Аксиома 1. Каково бы ни было событие *A*, $0\le P(A)\le 1$.

Аксиома 2. Вероятность достоверного события равна 1: $P(\Omega)=1$.

Аксиома 3. Если *A* и *B* – несовместные события, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Из аксиоматического определения вероятности вытекают следующие свойства:

1. $P(\overline{\Omega})=0$.
2. $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Отсюда вероятность невозможного события равна нулю (в некоторых книгах этот факт принимается за аксиому).

3. Если $A\subset B$, то $P(A)\le P(B)$.
4. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ (теорема сложения).

Она вытекает из представлений событий $A+B$ и B посредством суммы несовместных событий: $A+B=A+\overline{A}B,\ B=AB+\overline{A}B$ и применением аксиомы 3 сложения вероятностей.

5. Каковы бы ни были события *A* и *B*: $P(A+B)\le P(A)+P(B)$.

§3. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.

Рассмотрим несложный пример. Пусть из партии в 6 изделий, среди которых два изделия бракованных, выбираются два изделия. Событие *A* заключается в том, что первое наудачу выбранное изделие является бракованным, а событие *B* – второе наугад выбранное изделие - бракованное. Тогда *P(A)*=2/6. Ответить однозначно на вопрос о том, чему равна вероятность события *B* не представляется возможным, так как если событие *A* имело место, то *P(B)*=1/5, если же не имело (то есть первое из выбранных изделий оказалось годным) то *P(B)*=2/5. Другими словами, вероятность события *B* зависит от условий реализации события *A*. Приходим к понятию условной вероятности.

Пусть с некоторым комплексом условий *S* связаны два случайных события *A* и *B*. Вероятность события *A*, вычисленная при условии, что событие *B* имело место, называется ***условной вероятностью события A по отношению к событию B*** и обозначается *P(A/B)*. В вышеприведенном примере:

$$P(B/A) = \frac{1}{5},\ P(B/\bar{A}) = \frac{2}{5}.$$

Теорема (умножения вероятностей). Вероятность совместного наступления двух событий равна произведению одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое уже произошло: *P(AB)=P(A)P(B/A)= P(B)P(A/B)*.

Часто формулу умножения вероятностей используют в виде $P\left(A/_B\right) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

Два ***события A и B называются независимыми***, если появление одного из них не влияет на вероятность появления другого: *P(A/B)=P(A)*. В противном случае они называются зависимыми. Очевидно, что независимость является свойством взаимным, то есть если *A* не зависит от *B*, то и *B* не зависит от *A*. Можно доказать, что если *A* и *B* независимы, то независимы и следующие пары событий: $\bar{A}$ и B, A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Для независимых событий теорема умножения имеет вид: *P(AB)=P(A)P(B)*.

Рассмотрим далее несовместные события *A* и *B* и пусть *P(A)*≠0. В силу несовместности событий (то есть таких, что появление одного из них исключает появление другого) *A* и *B* событие *A/B* является невозможным, поэтому *P(A/B)*=0 и *P(A)≠P(A/B)*. Следовательно, ***несовместные события всегда зависимы***.

Теорему умножения вероятностей можно распространить на случай трех событий: *P(ABC)=P(A)P(B/A)P(C/AB)*.

Пример. Из коробки, в которой 8 красных и 12 черных карандашей, трижды наугад извлекают по одному карандашу. Найти вероятность того, что все три раза будут извлечены черные карандаши, если выборка: а) без возвращения; б) с возвращением.

Решение. Обозначим события: *A*={извлекли три раза черный карандаш}; A_1={первый раз извлекли черный карандаш}; A_2={второй раз извлекли черный карандаш}; A_3={третий раз извлекли черный карандаш}. Тогда $A=A_1 A_2 A_3$.

а) По теореме умножения вероятностей получаем:

$$P(A) = P(A_1)P\left(A_2/_{A_1}\right)P\left(A_3/_{A_1A_2}\right).$$

Используя классическое определение вероятности, вычисляем: $P(A_1)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$; $P\left({}^{A_2}/_{A_1}\right)=\frac{11}{19}$, так как после первого извлечения в коробке оставалось n=19 карандашей, из которых (когда произошло событие A_1) m=11 черных карандашей; $P\left({}^{A_3}/_{A_1A_2}\right)=\frac{10}{18}$, так как после второго извлечения оставалось n=18 карандашей, из которых m=10 черных (когда произошли события A_1 и A_2). Следовательно,

$$P(A)=\frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}\cdot\frac{10}{18}=\frac{11}{57}\approx 0{,}193.$$

б) В случае выборки с возвращением события A_1, A_2 и A_3 независимы, поскольку при каждом извлечении в коробке оказывается n = 20 карандашей, из которых m =12 черных. Поэтому

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5},$$

$$P(A)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}=0{,}216.$$

Можно распространить и теорему сложения на сумму трех событий:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC),$$

хотя наиболее разумно пользоваться законами двойственности:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}).$$

При решении задач с применением теорем сложения и умножения вероятностей полезно выразить событие A, вероятность которого ищется, и противоположное ему событие $\overline{A}$ через более простые события (из которых состоит искомое событие), вероятности которых известны, а затем вычислить $P(A)$ непосредственно или по формуле $P(A)=1-P(\overline{A})$ в зависимости от того, что удобнее.

Пример. Студент должен сдать за неделю три зачета (независимо друг от друга). Вероятность сдачи этим студентом зачета по первому предмету равна 0,8, по второму – 0,6, по третьему – 0,5. Найти вероятность того, что студент сдаст: а) один (<u>только один</u>) зачет, б) хотя бы один зачет, в) по крайней мере два зачета.

Решение. Обозначим события A = {студент сдаст один зачет}, B={студент сдаст хотя бы один зачет}, C = {студент сдаст по крайней мере два зачета}. Известны вероятности событий A_i={студент сдаст зачет по i-му предмету} (i=1, 2, 3): $P(A_1)$=0,8; $P(A_2)$=0,6; $P(A_3)$=0,5.

В результате сдачи зачета может произойти одно из четырех несовместных событий B_i={студент сдаст ровно i зачетов} (i=0, 1, 2, 3). Представим события A, B, C и/или $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ через эти события.

а) Событие A означает, что студент сдаст ровно один зачет, а два не сдаст, и совпадает с событием B_1, то есть $A=B_1$. Выразим событие A через события A_1, A_2, A_3:

$$A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

(либо студент сдаст только первый зачет (произойдет $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$), либо студент сдаст только второй зачет (произойдет $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$), либо студент сдаст только третий зачет (произойдет $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$)). Поскольку слагаемые попарно несовместны, а события A_1, A_2, A_3 независимы и $P(\overline{A}_1)=1–P(A_1)=0,2$; $P(\overline{A}_2)=1–P(A_2)=0,4$; $P(\overline{A}_3)=1–P(A_3)=0,5$, то, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, получаем

$$P(A)=0,8\cdot0,4\cdot0,5+0,2\cdot0,6\cdot0,5+0,8\cdot0,6\cdot0,5=0,46.$$

б) Событие $B=B_1+B_2+B_3$ означает, что студент сдаст либо только один зачет, либо только два зачета, либо все три зачета. Для вычисления вероятности этого события удобнее перейти к противоположному событию $\overline{B}=B_0$ –студент не сдаст ни одного зачета. Тогда

$$P(B)=1–P(\overline{B})=1–P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=1-0,2\cdot0,4\cdot0,5=0,96.$$

в) Событие C произойдет в том случае, если студент сдаст ровно 2 зачета (осуществится событие B_2) или все 3 зачета (осуществится событие B_3), то есть $C=B_2+B_3$. Событие $\overline{C}$ означает, что студент сдаст только один зачет (осуществится событие B_1) или не сдаст ни одного зачета (осуществится событие B_0), то есть $\overline{C}=B_0+B_1$. Выразим эти события через A_1, A_2, A_3:

$$C=B_2+B_3=\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1A_2A_3,$$

$$\overline{C}=B_0+B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3,$$

откуда убеждаемся в равносильности использования событий C или $\overline{C}$. Поэтому

$$P(C)=0,2\cdot0,6\cdot0,5+0,8\cdot0,4\cdot0,5+0,8\cdot0,6\cdot0,5+0,8\cdot0,6\cdot0,5=0,7.$$

§4. Формула полной вероятности

Пусть с некоторым опытом связана полная группа несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, то есть:

1. $\sum_{i=1}^{n}H_i=\Omega$ – событие достоверное: $P\left(\sum_{i=1}^{n}H_i\right)=1$;
2. $H_iH_j=\varnothing$, $(i\neq j)$.

Эту группу событий часто называют ***гипотезами***. Так как события H_i образуют полную группу, то событие $A\in\Omega$ можно представить в виде

$$A=AH_1+AH_2+\ ....\ +AH_n$$

суммы несовместных событий AH_i. По теоремам сложения и умножения имеем

$$P(A)=P(AH_1+AH_2+...+AH_n)=\sum_{i=1}^{n}P(AH_i)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P\left(A/H_i\right).$$

Другими словами: $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P\left(A/H_i\right)$. Это и есть ***формула полной вероятности***. Она применяется для вычисления вероятности сложного события *A*, если известны вероятности других, более простых событий, с одним из которых может наступить событие *A*. Очевидно, что при применении формулы полной вероятности можно использовать не все гипотезы, составляющие полную группу, а только те из них, при которых возможно событие *A*, то есть те, при которых $P\left(A/H_i\right)\neq 0$.

Пример. В цех поступила продукция с двух станков автоматов. Причем, среди 300 деталей первого завода – 2% бракованных, а среди 200 деталей второго – 3% брака. На предсборочном контроле наудачу из общей партии были взяты 2 детали. Какова вероятность того, что среди выбранных деталей хотя бы одна – бракованная?

Решение. Обозначим искомое событие *A*={хотя бы одна среди выбранных двух деталей бракованная}. Перейдем к противоположному событию $\overline{A}$={ни одной бракованной среди выбранных деталей}. До опыта (то есть до того, как будут выбраны до контроля детали) можно выдвинуть следующие гипотезы:

H_1={обе детали произведены на первом станке};

H_2={обе детали произведены на втором станке};

H_3={одна деталь произведена на первом станке, а другая - на втором}.

Соответствующие вероятности гипотез будут равны:

$$P(H_1)=\frac{C_{300}^2}{C_{500}^2}=\frac{897}{2495},\ P(H_2)=\frac{C_{200}^2}{C_{500}^2}=\frac{398}{2495},\ P(H_3)=\frac{C_{300}^1\cdot C_{200}^1}{C_{500}^2}=\frac{1200}{2495}.$$

Условные вероятности противоположного к исходному события равны

$$P(\overline{A}/H_1)=0.98^2,\ P(\overline{A}/H_2)=0.97^2,\ P(\overline{A}/H_3)=0.98\cdot 0.97$$

и вероятность противоположного события равна $P(\overline{A})=0.95259$, а вероятность исходного события $P(A)=1-P(\overline{A})=0.047405$.

§5. Формула Байеса

При получении формулы полной вероятности рассматривали вероятность события до испытания, то есть до опыта, то есть в условии задачи не фигурировал результат проведенного опыта. Естественно, возникает вопрос: как изменится вероятность гипотез H_i в связи с появлением события *A*, то есть интересно $P\left(H_i/A\right)$. Вероятности гипотез $P(H_i)$ – доопытные (априорные), а $P\left(H_i/A\right)$ – послеопытные (апостериорные) вероятности.

По теореме умножения вероятностей имеем

$$P(AH_i)=P(A)P(H_i/A)=P(H_i)P(A/H_i)$$

откуда непосредственно получается $P\left(H_i/A\right)=\dfrac{P(H_i)P\left(A/H_i\right)}{P(A)}$ или применяя формулу полной вероятности

$$P\left(H_i/A\right)=\frac{P(H_i)P\left(A/H_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P\left(A/H_i\right)}.$$

Последняя ***формула называется формулой Байеса*** (Bayes, 1702 –176) или ***формулой гипотез.*** Она связывает послеопытную (левая часть формулы) и доопытные вероятности (правая часть формулы) и служит основанием для принятия решений после эксперимента. В частности, эта ***формула устанавливает правило, по которому перераспределяются вероятности гипотез после того, как произошел опыт***. Доопытные вероятности гипотез на практике могут полагаться равными (если нет возможности их найти), а затем пересчитываются и пользуются уточненной информацией.

Пример 1. Прибор собирается из деталей завода X, либо завода Y. Причем 30% деталей поступает с завода X, а 70 % - с завода Y. Надежность деталей завода X (вероятность безотказной работы в течение заданного времени T) равна 0.9, завода Y – 0,85. В течение времени T прибор отработал безотказно. Какова вероятность, что он собран из деталей завода X.

Решение. Рассмотрим событие A={прибор безотказно работал T часов}. Введем следующие гипотезы:
H_1={прибор собрали из деталей завода X}, $P(H_1)$=0,3;
H_2={прибор собрали из деталей завода Y}, $P(H_2)$=0,7.
Соответствующие условные вероятности $P\left(A/H_1\right)=0{,}9$, $P\left(A/H_2\right)=0{,}85$.
Тогда вероятность исходного события $P(A)$=0,3·0,9 + 0,7·0,85=0,865.
По формуле гипотез

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{P(H_1)P\left(A/H_1\right)}{P(A)}=\frac{0.3\cdot 0.9}{0.865}=0.312.$$

Пример 2. В урну, содержащую 2 шара, опущен белый шар, после чего шары перемешали и из урны наудачу извлечен один шар. Этот шар оказался белого цвета. Сколько скорее всего белых шаров находилось в урне.

Решение. Из-за недостатка первоначальной информации примем, что все возможные предположения о первоначальном числе белых шаров в урне равновозможны. Обозначим событие A={извлечен белый шар}. Возможны следующие гипотезы о первоначальном составе шаров в урне: H_1={0 белых шаров}, H_2={1 белый шар}, H_3={2 белых шара}. Эти гипотезы образуют полную группу событий. Поскольку всего имеется 3 гипотезы, причем по предположению они равновероятны, и сумма вероятностей гипотез равна единице, то вероятность каждой из гипотез равна $\frac{1}{3}$, то есть $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$.

Находим условные вероятности $P\left({}^{A}/_{H_i}\right)$, используя классическое определение вероятности. Число элементарных исходов равно n=2+1=3 (изначально в урне было два шара, затем добавили еще один). В случае гипотезы H_1 в урну, в которой не было белых шаров, опустили один белый шар, поэтому m=1, $P\left({}^{A}/_{H_1}\right)=\frac{1}{3}$. При выполнении гипотезы H_2 в урне имеется m=1+1=2 белых шара, $P\left({}^{A}/_{H_2}\right)=\frac{2}{3}$. При выполнении гипотезы H_3 имеется m=2+1=3 белых шара, $P\left({}^{A}/_{H_3}\right)=\frac{3}{3}=1$.

Зная вероятности гипотез и условные вероятности, вычисляем вероятность события A по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

Используя формулу Байеса, пересчитаем послеопытные вероятности гипотез:

$$P\left({}^{H_1}/_{A}\right)=\frac{P(H_1)P\left({}^{A}/_{H_1}\right)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{6}\,,P\left({}^{H_2}/_{A}\right)=\frac{P(H_2)P\left({}^{A}/_{H_2}\right)}{P(A)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\,,P\left({}^{H_3}/_{A}\right)=\frac{P(H_3)P\left({}^{A}/_{H_3}\right)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}.$$

То есть, наиболее вероятно, что в урне находилось два белых шара.

§6. Повторение независимых опытов. Формула Бернулли

Пусть некоторый комплекс условий S воспроизводится n раз и событие A может наступить в каждом опыте с одной и той же вероятностью p, независимо от результатов предыдущих опытов. В этом случае говорят о повторных независимых испытаниях или о ***схеме Бернулли***. Тогда вероятность того, что событие A появится ровно m раз (безразлично в каком порядке) вычисляется по ***формуле Бернулли***

$$P_n(m)=P_{m,n}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}\quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Пример. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут ровно четыре.

Решение. Имеем схему Бернулли с n=5 испытаниями (посеяно пять семян). Событие A={семя взошло}. По условию задачи p=$P(A)$=0,9. Искомую вероятность $P_{4,5}$ находим по формуле Бернулли:

$$P_{4,5}=C_5^4\cdot 0{,}9^4\cdot 0{,}1^1=5\cdot 0{,}9^4\cdot 0{,}1^1=0{,}32805.$$

Разность (1–p) часто обозначается q=1–p и формулу Бернулли записывают в виде:

$$P_n(m) = P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Рассмотрим частные случаи этой формулы:

1. Вероятность того, что событие A не появилось ни разу: $P_{0,n}=q^n$.

2. Вероятность того, что событие A *появилось* ровно 1 раз: $P_{1,n} = npq^{n-1}$.

3. Вероятность того, что событие A появилось хотя бы один раз равна:

$$P_{1,n} + P_{2,n} + \ldots + P_{n,n}$$

или переходя к противоположному событию: {событие A не появилось ни разу} равна (1–q^n).

4. Вероятность того, что событие A в схеме Бернулли появится не менее m_1 раз и не более m_2 раз, равна $P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k}$.

Пример. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4. По мишени производится шесть независимых выстрелов. Найти вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

Решение. Пусть событие B – хотя бы одно попадание. Задачу удобнее решать при помощи нахождения вероятности противоположного события, то есть события $\overline{B}$ – ни одного попадания в мишень. В данном примере n=6; p=0,4; q=1–p=0,6. Применяя формулу Бернулли, получаем

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P_{0,6}=1-0,6^6 \approx 0,953.$$

Среди вероятностей $P_{1,n}$, $P_{2,n}$, …., $P_{n,n}$ есть наибольшее число. Число m_0 при котором вероятность $P_{m,n}$ - наибольшая, называется ***наивероятнейшим числом наступления события*** A. Оно определяется из двойного неравенства $np - q \le m_0 \le np + p$. Число m_0 – целое, поэтому если $np+p$ – целое, то наивероятнейших чисел два: $np-q$, $np+p$.

При больших значениях чисел m и n пользоваться формулой Бернулли нереально. Если $p \approx q$ (они близки к $\frac{1}{2}$), то целесообразно использовать асимптотическую формулу, опирающуюся на ***локальную теорему Муавра-Лапласа:***

$$P_n(m) = P_{m,n} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где значения функции Гаусса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

берется из таблиц, причем $\varphi(-x)=\varphi(x)$ и на практике обычно полагают $\varphi(x)\approx 0$ при $x\geq 4$. Условиями применимости локальной формулы Муавра-Лапласа являются выполнения соотношений: $npq>9$ и $\frac{1}{n+1}<p<\frac{n}{n+1}$.

Если в схеме Бернулли вероятность p существенно отличается от 0 и 1, а n достаточно велико, то вероятность $P_n(m_1\leq m<m_2)$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит не менее m_1 раз, но более m_2 раз, вычисляется по ***интегральной формуле Муавра-Лапласа*** (*интегральная теорема Муавра-Лапласа*):

$$P_n(m_1\leq m<m_2)\approx\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

называется функцией Лапласа, причем $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, и на практике обычно полагают $\Phi(x)\approx 0,5$ при $x\geq 5$. Для функции $\Phi(x)$ составлены таблицы значений.

Пример. Вероятность появления события A в каждом из 600 независимых испытаний равна 0,6. Найти вероятность того, что событие A в этих испытаниях наступит: а) ровно 330 раз; б) не менее 330 и не более 375 раз.

Решение. а) По условию задачи n=600 – велико; p=0,6 – не очень мало; q=1–p=0,4; m=330. Применим локальную формулу Муавра-Лапласа. Определяем значение x:

$$x=\frac{330-600\cdot 0,6}{\sqrt{600\cdot 0,6\cdot 0,4}}=-\frac{30}{12}=-2,5.$$

По таблице значений функции $\varphi(x)$ находим $\varphi(-2,5)=\varphi(2,5)\approx 0,0175$. По локальной формуле Муавра-Лапласа найдем искомую вероятность:

$$P_{600}(330)\approx\frac{1}{\sqrt{600\cdot 0,6\cdot 0,4}}\cdot 0,0175=\frac{1}{12}\cdot 0,0175\approx 0,0015.$$

б) В этом случае применима интегральная формула Муавра-Лапласа. По условию задачи n=600; p=0,6; m_1=330; m_2=375. Находим x_1 и x_2:

$$x_1=\frac{330-600\cdot 0,6}{\sqrt{600\cdot 0,6\cdot 0,4}}=-2,5;\quad x_2=\frac{375-600\cdot 0,6}{\sqrt{600\cdot 0,6\cdot 0,4}}=1,25.$$

По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ находим, что

$$\Phi(-2,5)=-\Phi(2,5)\approx -0,4938;\ \ \Phi(1,25)\approx 0,3944.$$

По интегральной формуле Муавра-Лапласа искомая вероятность

$$P_{600}(330\leq m\leq 375)\approx\Phi(1,25)-\Phi(-2,5)\approx 0,3944-(-0,4938)=0,8882.$$

Если же вероятность p мала (речь идет о "редком" событии), а число испытаний n достаточно велико, то используют ***асимптотическую формулу Пуассона***

$$P_{m,n} = P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = P_m(\lambda), \text{ где } \lambda = np.$$

Условия применимости этой формулы: p одного порядка с $1/n$ или $p<0{,}1$.

Пример. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение одной минуты позвонят: а) ровно три абонента, б) менее трех абонентов, в) более трех абонентов; г) хотя бы один абонент.

Решение. По условию n=100, p=0,01. Поскольку число n велико, вероятность p мала, рассматриваемые события (звонки абонентов) независимы, то применима формула Пуассона. Найдем $a=np=100\cdot 0{,}01=1$.

а) Найдем вероятность того, что позвонят ровно 3 (m=3) абонента:

$$P_{100}(3) \approx \frac{1^3}{3!}e^{-1} \approx 0{,}0613.$$

б) Найдем вероятность того, что позвонят менее трех абонентов, то есть либо два, либо один, либо ни одного:

$$P_{100}(m<3)=P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) \approx \frac{1^0\cdot e^{-1}}{0!} + \frac{1^1\cdot e^{-1}}{1!} + \frac{1^2\cdot e^{-1}}{2!} =$$

$$= e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} = \frac{5}{2}e^{-1} \approx \frac{5}{2}\cdot 0{,}36788 = 0{,}9197.$$

в) Найдем вероятность $P_{100}(m>3)$ того, что позвонят более трех абонентов. События $\{m > 3\}$ = {позвонят более трех абонентов} и $\{m \le 3\}$={позвонят не более трех абонентов} – противоположные, поэтому

$$P_{100}(m>3)=1-P_{100}(m\le 3)=1-(P_{100}(0)+P_{100}(1)+P_{100}(2)+P_{100}(3)).$$

Пользуясь результатами пунктов а) и б), получим

$$P_{100}(m>3) \approx 1-(0{,}9197+0{,}0613)=0{,}019.$$

г) Найдем вероятность $P_{100}(m\ge 1)$ того, что позвонит хотя бы один абонент. События $\{m\ge 1\}$={позвонит хотя бы один абонент} и $\{m<1\}$={ни один абонент не позвонит} – противоположные, поэтому

$$P_{100}(m\ge 1)=1-P_{100}(m<1)=1-P_{100}(0) \approx 1-e^{-1} \approx 0{,}6321.$$

Если в схеме Бернулли вероятность p появления события A близка к 1**,** а число испытаний n велико, для вычисления вероятности $P_n(m)$ также можно использовать формулу Пуассона (считая успехом событие $\bar{A}$).

На практике часто встречаются случаи, когда повторные независимые опыты проводятся в неодинаковых условиях (стрельба по мишени, подналадка станков автоматов в процессе работы и так далее) и событие A в k опыте наступает с вероятностью p_k (k=1, 2, …, n). Это так называемая ***обобщенная схема***

Бернулли. Тогда вероятность того, что событие A появится в n опытах ровно m раз можно вычислить с помощью теорем сложения и умножения событий, но проще воспользоваться производящей функцией

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i z),\ \text{где}\ q_i = 1 - p_i.$$

Искомая вероятность $P_{m,n}=P_n(m)$ равна коэффициенту при z^m в разложении производящей функции по степеням z.

Пример. Стрелок производит три выстрела по движущейся мишени. Вероятность попадания при первом выстреле p_1=0,4, при втором – p_2=0,7, при третьем – p_3=0,5. Найти вероятность того, что в мишени будет m попаданий (m=0,1,2,3).

Решение. Три независимых выстрела производятся в неодинаковых условиях, то есть имеем обобщенную схему Бернулли. Составим производящую функцию для этого опыта

$$\varphi_3(z) = (0{,}6 + 0{,}4z)(0{,}3 + 0{,}7z)(0{,}5 + 0{,}5z) =$$
$$= \underbrace{0{,}09}_{P_3(0)} + \underbrace{0{,}36}_{P_3(1)}z + \underbrace{0{,}41}_{P_3(2)}z^2 + \underbrace{0{,}41}_{P_3(3)}z^3.$$

Искомые вероятности

$P_3(0)$=|ноль попаданий при трех выстрелах |=0,09;

$P_3(1)$=|одно попадание при трех выстрелах|=0,36;

$P_3(2)$=|два попадания при трех выстрелах|=0,41;

$P_3(3)$=|три попадания при трех выстрелах|=0,14

равны коэффициенту при соответствующей степени z в разложении производящей функции. Так как искомые вероятности – это вероятности полной группы несовместных событий, то сумма их вероятностей должна равняться единице (вероятности достоверного события). В этом можно непосредственно убедиться самостоятельно.

Несложно убедиться, что для схемы Бернулли производящая функция имеет вид $\varphi_n(z) = (q + pz)^n$, а формула Бернулли получается применением формулы бинома Ньютона

$$(q + pz)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} z^k,$$

где C_n^k – число сочетаний из n по k.

ТЕМА 2. Случайные величины

§ 1. Закон распределения дискретной случайной величины

Случайные события, с которыми имели дело до сих пор, являются качественной характеристикой случайного результата опыта. Естественно желание охарактеризовать опыт количественно. Например, число вызовов на АТС в течение часа; количество деталей высокого качества, сошедших с конвейера в течение смены; размер вознаграждения, выпавшего на лотерейный билет; результат измерения длины, объема и так далее. В этих примерах имеем дело с величиной, которая может принимать любые значение, вообще говоря, случайные.

Определение. ***Случайной величиной*** (СВ) называют такую величину, которая в результате опыта может принимать то или иное значение (но только одно), причем до опыта неизвестно какое именно. СВ будем обозначать буквами греческого алфавита $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ (либо большими буквами латинского алфавита $X, Y, Z, \ldots$). Значения, которые могут принимать СВ в результате опыта, будем называть ***возможными значениями СВ*** и обозначать малыми буквами латинского алфавита x, y, z … (возможны индексы). Таким образом, ***СВξ – это функция $\xi:\Omega \to R$, ставящая каждому возможному значению в соответствие некоторое число.***

Число принимаемых возможных значений может быть конечным, счетным (возможные значения можно занумеровать), бесконечным несчетным (множество меры континуум). Если число принимаемых возможных значений счетно или конечно, то такую СВ называют ***дискретной случайной величиной*** (обозначают обычно ДСВ). Если возможных значений конечное число, то такая ***ДСВ называется конечнозначной.***

Для полного описания СВ необходимо задать не только ее возможные значения, но и указать вероятности того, что СВ приняла то или иное значение. ***Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и соответствующими им вероятностями, называется законом распределения СВ***. Знание закона распределения до опыта позволяет судить о том, какие значения СВ будут появляться чаще, а какие реже. Способы и формы представления закона распределения могут быть различными.

Пусть ξ – дискретная случайная величина с возможными значениями $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ События $\{\xi=x_1\}$, $\{\xi=x_2\}$, …, $\{\xi=x_n\}$, … несовместны, так как (по определению) случайная величина ξ в результате опыта должна принять одно значение, и, более того, в результате опыта произойдет только одно из них. То есть эти события образуют полную группу несовместных событий, и поэтому

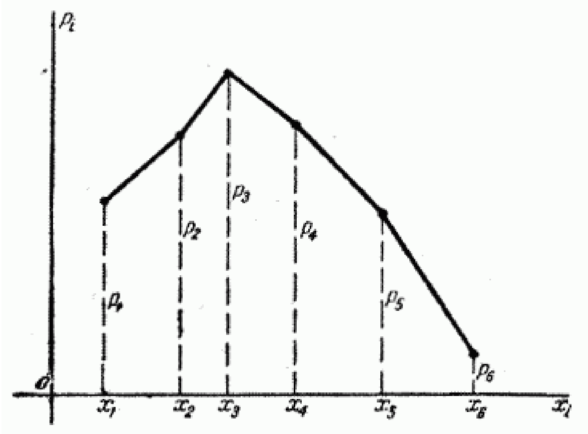
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = 1, \text{ где } p_i = P(\xi = x_i).$$

Условие $\sum_i P(\xi = x_i) = 1$ иногда называется ***условием нормировки*** либо ***условием корректности задания распределения***.

Чаще всего закон распределения дискретной случайной величины задают в виде таблицы, в первой строке которой выписывают все возможные значения дискретной случайной величины, а во второй – соответствующие им вероятности

ξ	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

Такую таблицу называют ***рядом*** (или ***таблицей***) ***распределения дискретной случайной величины*** ξ. Сумма элементов второй строки таблицы должна равняться единице (условие нормировки).



Для наглядности, закон распределения дискретной случайной величины можно задать графически. В прямоугольной системе координат все возможные значения откладывают по оси абсцисс, а по оси ординат – соответствующие им вероятности. Вершины полученных ординат соединяют отрезками.

Такая фигура называется ***полигоном*** (или ***многоугольником***) ***распределения случайной величины*** ξ. Они могут иметь различную форму, но общее присущее им свойство – сумма ординат равна 1 (условие нормировки). Вершины соединяют ломаной только для наглядности, так как случайная величина ξ между возможными значениями x_i и x_{i+1} значений не принимает.

Пример. Описать закон распределения СВ ξ – числа выстрелов до первого попадания, если вероятность попадания при любом выстреле постоянна и равна p.

Решение. Возможные значения этой случайной величины есть множество натуральных чисел 1, 2, 3, …Так как их счетное число, то это дискретная случайная величина. Вероятности возможных значений равны:

$$P(\xi = 1) = p, P(\xi = 2) = qp, P(\xi = 3) = q^2p, \dots, P(\xi = n) = q^{n-1}p,$$

где q=1-p. Тогда ряд распределения СВ имеет вид

x_i	1	2	3	…………..	n	………..
p_i	p	qp	q^2p	…………..	$q^{n-1}p$	………..

Так как

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p + qp + q^2p + \dots + q^{n-1}p + \dots = p(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots) =$$

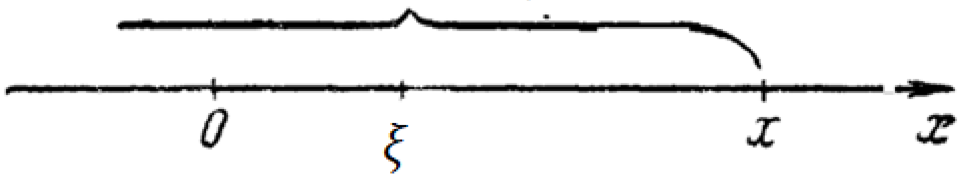
$$= \left| \begin{array}{c} \text{сумма членов бесконечной геометрической} \\ \text{прогрессии со знаменателем } q < 1 \end{array} \right| = p\frac{1}{1-q} = p\frac{1}{p} = 1,$$

то условие нормировки для построенного ряда распределения СВ выполнено.

§2. Функция распределения случайной величины и её свойства

Если возможные значения СВ ξ заполняют всю числовую ось или некоторую ее часть, то ряд распределения для нее построить невозможно. Введем универсальный способ задания СВ ξ, который включал бы и такие типы СВ.

Функцией распределения СВ ξ называется функция $F(x)$, которая определяется равенством $F(x)=P(\xi<x)$, где x – любое действительное число, то есть функция, равная вероятности того, что СВ ξ примет значение, меньше, чем x. Она полностью характеризует СВ с вероятностной точки зрения, то есть *функция распределения является одной из форм закона распределения случайной величины*.



Определение функции распределения имеет простую геометрическую интерпретацию. Если рассматривать случайную величину как случайную точку ξ оси Ox, которая в результате опыта может занять то или иное положение, то функция распределения $F(x)$ есть вероятность того, что случайная точка ξ в результате опыта попадет левее точки x.

Рассмотрим связь между функцией распределения и рядом распределения дискретной случайной величины ξ, принимающей конечное число возможных значений. Пусть дискретная случайная величина ξ задана рядом распределения

ξ	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Построим для нее функцию распределения. Для этого отложим на числовой оси все возможные значения случайной величины ξ и рассмотрим возможные варианты:

при $x\le x_1$ вероятность $P(\xi<x)=0$,
при $x_1<x\le x_2$ вероятность $P(\xi<x)=p_1$,
при $x_2<x\le x_3$ вероятность $P(\xi<x)=p_1+p_2$,
…………………………………………………………..
при $x_{n-1}<x\le x_n$ вероятность $P(\xi<x)=p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}$,
при $x_n<x$ вероятность $P(\xi<x)=1$.

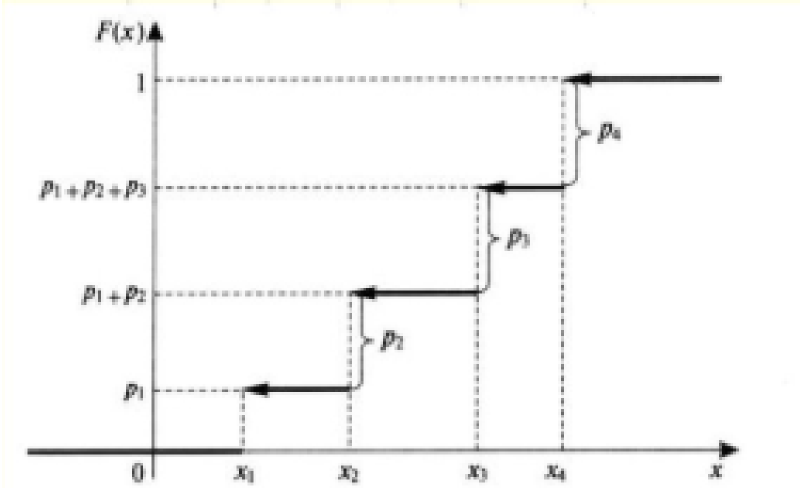
То есть функция распределения будет иметь вид

$$F(x)=\sum_{x_i<x} P(\xi=x_i),$$

где символ $x_i<x$ под знаком суммы обозначает, что суммирование распространяется на все возможные значения случайной величины, которые меньше аргумента x. Или в виде составной функции

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le x_1\\ p_1, & x_1<x\le x_2\\ p_1+p_2, & x_2<x\le x_3\\ \text{..................................} & \\ p_1+p_2+...+p_{n-1}, & x_{n-1}<x\le x_n\\ 1, & x>x_n\end{cases}$$

Таким образом, для дискретной случайной величины функция распределения разрывна и возрастает скачками при переходе через точки ее возможных значений x_i. Между возможными значениями она постоянна. То есть это ступенчатая функция с величиной скачков равной вероятности соответствующих возможных значений.



<u>Свойства функции распределения случайной величины.</u>

1. Функция распределения есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей $0\le F(x)\le 1$, так как *F(x)* – это вероятность события.
2. *F(x)* – неубывающая функция на всей числовой оси: то есть для любых $x_1<x_2$ имеем $F(x_1)\le F(x_2)$.
3. Для любых $x_1<x_2$ имеет место равенство $P(x_1\le\xi<x_2)=F(x_2)-F(x_1)$.

Докажем два последних свойства. Рассмотрим три события: $A=(\xi<x_1)$, $B=(\xi<x_2)$ и $C=(x_1\le\xi<x_2)$. Очевидно, что *B=A+C* и *AC=*$\varnothing$. По аксиоме сложения двух несовместных событий: *P(B)=P(A+C)=P(A)+P(C)*. Вспоминая определение функции распределения получаем равенство

$$F(x_2)=F(x_1)+P(x_1\le\xi<x_2)$$

из которого непосредственно и следует второе и третье свойство.

4. Функция распределения непрерывна слева: $\lim\limits_{x\to x_0-0}F(x)=F(x_0)$.
5. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

Всякая функция, удовлетворяющая выше сформулированным свойствам, является функцией распределения некоторой случайной величины. Однако, если для всякой случайной величины функция распределения единственна, то по некоторой функции с заданными свойствами можно построить сколь угодно много случайных величин, для которых эта функция будет функцией распределения.

Пример. Задан закон распределения СВ ξ:

ξ	20	30	40	50
P	0,1	0,6	0,1	0,2

Найти функцию распределения и построить ее график.

Решение. Найдем значение функции распределения $F(x)=P(\xi < x)$ для каждого действительного x. Из ряда распределения видно, что СВ ξ может принимать значения 20, 30, 40, 50. Для вычисления вероятностей $P(\xi< x)$ нужно определить, какие значения x_m СВ ξ удовлетворяют неравенству $x_m < x$, и просуммировать их вероятности. В зависимости от значения x получим:

при $x \le 20$ имеем $F(x)=0$, так как ни одно из значений 20, 30, 40, 50 не удовлетворяет указанному неравенству;

при $20 < x \le 30$ получим $F(x)=P(\xi = 20)=0,1$ (условию $x_m <x$ удовлетворяет только значение $x_m = 20$);

при $30 < x \le 40$: $F(x)=P(\xi=20) + P(\xi=30)=0,1 + 0,6=0,7$ (значения 20 и 30 удовлетворяют неравенству $x_m < x$);

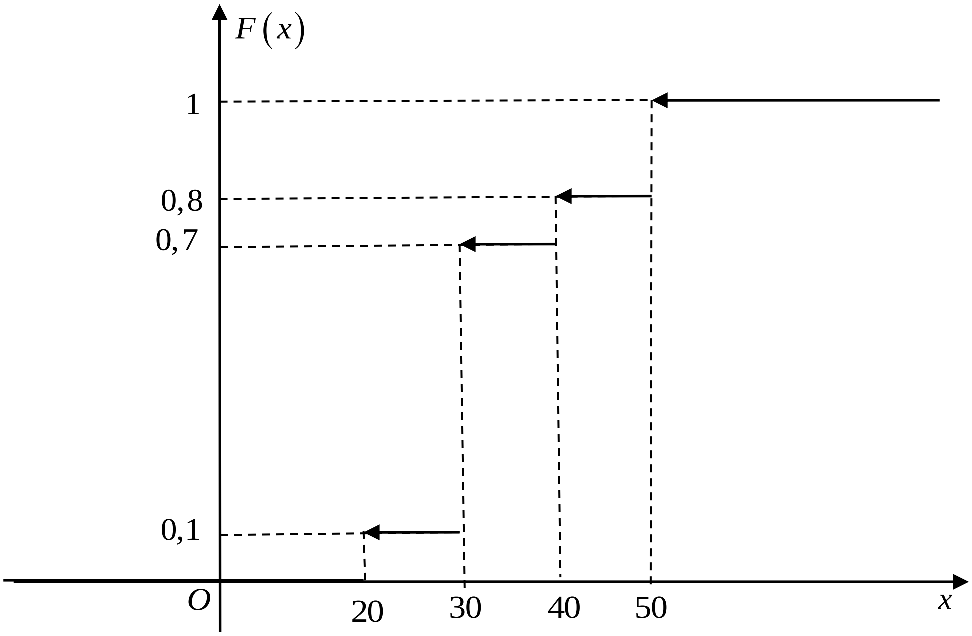
при $40 < x \le 50$: $F(x)=P(\xi=20) + P(\xi=30) + P(\xi=40)=0,1 + 0,6 + 0,1=0,8$;

при $x >50$: $F(x)=P(\xi=20)+P(\xi=30)+P(\xi=40)+P(\xi=50)=0,1+0,6+0,1+0,2=1$.

Получаем:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 20, \\ 0,1 & \text{при } 20 < x \le 30, \\ 0,7 & \text{при } 30 < x \le 40, \\ 0,8 & \text{при } 40 < x \le 50, \\ 1 & \text{при } x > 50. \end{cases}$$

График функции распределения представлен на рисунке.



Аналогичным способом (но в обратном порядке) можно по функции распределения ДСВ построить её таблицу распределения.

§3. Плотность вероятностей и её свойства

Случайная величина ξ называется непрерывной случайной величиной (НСВ) если её функция распределения при любом x непрерывна и, кроме того, имеет производную $F'(x)$ всюду, кроме может быть конечного числа изолированных точек. Функция распределения случайной величины является полной вероятностной суммарной характеристикой случайной величины. Она характеризует случайную величину в целом, однако о ее поведении в некоторой малой окрестности точки *x* она информации не дает.

Рассмотрим непрерывную случайную величину ξ с функцией распределения *F(x)*. Из области ее возможных значений выберем полуинтервал $[x, x+\Delta x)$ и рассмотрим отношение

$$\frac{P(x \le \xi < x+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}.$$

Эту величину называют ***средней плотностью распределения вероятностей*** на полуинтервале $[x, x+\Delta x)$. Перейдем в этом отношении к пределу при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x \le \xi < x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x)$$

Функцию f(x) называют плотностью распределения вероятностей случайной величины ξ в точке *x*. Во многих учебниках ее обозначают *p(x)*. Так как эта функция является производной от функции распределения, то ее иногда называют дифференциальной функцией распределения, а функцию *F(x)* - интегральной функцией распределения случайной величины.

Свойства плотности вероятностей:

1. Для всех значений x плотность вероятностей $f(x) \geq 0$.
Это свойство непосредственно следует из определения, так как функция распределения есть производная от неубывающей функции.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$ (условие нормировки).

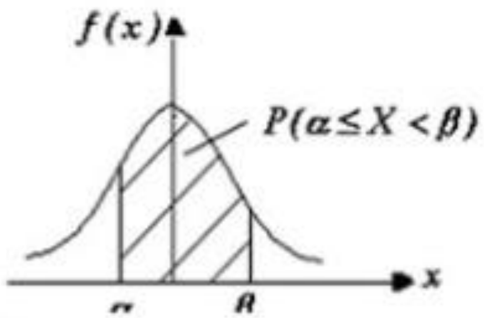
3. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

4. $P(a \leq \xi < b) = \int_{a}^{b} f(t)dt$

Из последнего свойства следует, что для непрерывной случайной величины $P(\xi=x)=0$ (то есть вероятность попасть в точку для НСВ равна нулю), поэтому

$$P(a \leq \xi < b) = P(a < \xi \leq b) = P(a \leq \xi \leq b) = P(a < \xi < b).$$

График функции y=f(x) называется кривой плотности распределения вероятностей случайной величины ξ или просто кривой распределения, кривой вероятностей. Геометрически свойство нормировки означает, что площадь под графиком кривой вероятностей равна 1. Эта кривая всегда лежит в верхней координатной полуплоскости. Вероятность того, что случайная величина ξ примет значение $(\alpha \leq \xi < \beta)$ равна площади соответствующей заштрихованной криволинейной трапеции.



Вероятность попадания в интервал

Любая функция, удовлетворяющая свойствам 1-4 является плотностью вероятностей некоторой случайной величины. НСВ принимает все значения из некоторого интервала или системы интервалов на числовой оси. Однако, следует отметить, что не все случайные величины, возможные значения которых заполняют непрерывно некоторый интервал, являются непрерывными случайными величинами. Если функция распределения случайной величины на некоторых интервалах непрерывно возрастает, а в отдельных точках имеет разрывы, то такая случайная величина называется ***смешанной случайной величиной.*** Смешанные СВ возникают, например, в задачах обнаружения полезного сигнала в шумах.

В тех случаях, когда плотность вероятностей содержит некоторый параметр, то его значение определяется из условия нормировки. Если параметр содержится в функции распределения непрерывной случайной величины, то находим его из условия непрерывности функции распределения.

Пример. Найти a, $P(1<\xi\leq 2{,}5)$ и $f(x)$ если дана функция распределения непрерывной случайной величины

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 1;\\ a(x^2-1), & 1<x\leq 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Построить графики функции распределения и плотности распределения.

Решение. Для нахождения коэффициента a можно использовать свойства функции распределения. Так как функция распределения непрерывной СВ непрерывна в любой точке, следовательно, $F(x_0+0)=F(x_0-0)$ в любой точке x_0, в частности в точках, где меняется аналитическое задание функции, то есть при $x=1$ и $x=3$:

$F(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0} F(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} a(x^2-1)=a\cdot 0=0;$

$F(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0} F(x)=\lim\limits_{x\to 1-0} 0=0=F(1+0)$ – верно для всех a;

$F(3+0)=\lim\limits_{x\to 3+0} F(x)=\lim\limits_{x\to 3+0} 1=1;$

$F(3-0)=\lim\limits_{x\to 3-0} F(x)=\lim\limits_{x\to 3-0} a(x^2-1)=a\cdot 8=8a.$

Из непрерывности функции распределения $1=8a$, поэтому $a=\dfrac{1}{8}$.

Значение параметра a может быть получено и из условия нормировки для плотности вероятностей. Вначале найдем плотность вероятностей $f(x)$ как производную от функции распределения $F(x)$:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\leq 1;\\ 2ax, & 1<x\leq 3;\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Вычислим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_1^3 2axdx=ax^2\Big|_1^3=8a,$$

То есть $8a=1$. Следовательно, $a=\dfrac{1}{8}$.

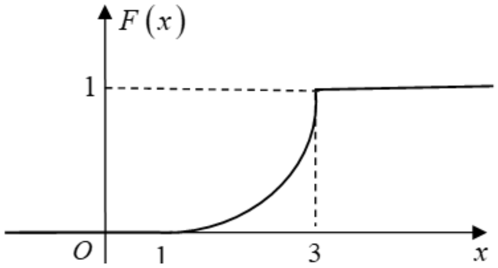
Подставляя найденное a, получим следующие выражения для функции распределения и плотности распределения данной СВ:

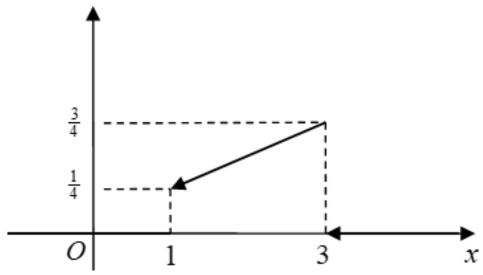
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 1;\\ \frac{1}{8}(x^2-1), & 1<x\leq 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}\quad f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 1;\\ \frac{x}{4}, & 1<x\leq 3;\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Вычислим вероятность с помощью функции распределения:

$$P(-1<\xi\leq 2{,}5)=F(2{,}5)-F(-1)=\frac{1}{8}\cdot((2{,}5)^2-1)-0=\frac{21}{32}.$$

Графики функции распределения и плотности вероятностей имеют вид





§4. Числовые характеристики случайной величины

Знание закона распределения дает полное, с вероятностной точки зрения, представление о случайной величине. Однако при решении ряда практических задач нет необходимости характеризовать случайную величину полностью. Достаточно указать некоторые характерные черты закона распределения. Для этих целей используют числовые характеристики случайной величины. Условно их делят на числовые характеристики положения и числовые характеристики разброса

§4.1. Числовые характеристики положения случайной величины.

К наиболее важной числовой характеристике положения относится математическое ожидание случайной величины. Предположим, что произведено N испытаний, в которых дискретная случайная величина ξ приняла значения $x_1, x_2, ..., x_n$ соответственно $m_1, m_2, ..., m_n$ раз ($\sum_{i=1}^{n} m_i = N$). Тогда среднее арифметическое всех значений, которые приняла случайная величина, выразится равенством

$$x_{cp}=\frac{x_1m_1+x_2m_2+...+x_nm_n}{N}=x_1\frac{m_1}{N}+x_2\frac{m_2}{N}+...+x_n\frac{m_n}{N}.$$

Коэффициенты $\frac{m_i}{N}$ являются относительной частотой (частостью) события, заключающегося в том, что случайная величина ξ приняла значение x_i, поэтому

$$x_{cp}=x_1p_1^*+x_2p_2^*+...+x_np_n^*,$$

где $p_i^*=\frac{m_i}{N}$ относительные частоты.

Из статистического определения вероятности следует, что при достаточно большом числе испытаний, то есть при $N\to\infty$, относительная частота события мало отличается от вероятности события: $p_i^*\approx p_i$. Поэтому

$$x_{cp}\approx x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n,$$

то есть среднему значению около которого группируются все возможные значения случайной величины.

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины называют сумму произведений всех возможных значений случайной величины ξ на соответствующие им вероятности:

$$M(\xi) = m_\xi = \langle \xi \rangle = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Исходя из смысла математического ожидания, его часто называют ***центром рассеивания либо центром распределения случайной величины***.

Если множество возможных значений случайной величины ξ счетно, то математическое ожидание определяют как сумму числового ряда

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

если этот ряд абсолютно сходится. В противном случае считают, что математического ожидания у случайной величины нет.

Пример. При штамповке любого изделия станок может остановиться с вероятностью p. Число изготовленных деталей до остановки станка – случайная величина ξ. Найти среднее число изготовленных изделий до остановки станка.

Решение. Обозначим через q=1–p, а через A_i – событие, состоящее в остановке станка при производстве i-го изделия. Тогда

$$P(\xi = 0) = P(A_1) = p,\ P(\xi = 1) = P(\overline{A}_1 \cdot A_2) = q \cdot p,\ \ldots,\ P(\xi = k) = q^k p,\ \ldots$$

и ряд распределения вероятностей этой ДСВ имеет вид

x_i	0	1	2	…	k	…
p_i	p	qp	q^2p	…	q^kp	…

Проверим условие нормировки

$$p + qp + q^2 p + \ldots + q^k p + \ldots = p(1 + q + q^2 + \ldots + q^k + \ldots) = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Математическое ожидание этой случайной величины равно

$$m_\xi = qp + 2q^2 p + 3q^3 p + \ldots = qp(1 + 2q + 3q^2 + \ldots) = qp(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots)' =$$

$$= qp\left(\frac{1}{1-q}\right)' = qp\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{qp}{p^2} = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1.$$

Для непрерывной случайной величины с плотностью вероятностей *f(x)* вводится понятие математического ожидания по формуле

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

где несобственный интеграл первого рода понимается в смысле главного значения. Если этот несобственный интеграл расходится (в смысле главного значения), то считается, что математическое ожидание не существует. Если возможные значения случайной величины заполняют не всю числовую ось, а лишь промежуток (a,b), то

$$M(\xi)=\int_a^b xf(x)dx\,.$$

Сформулируем далее основные ***свойства математического ожидания:***

1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной: $M(C)=C$ (C – const).

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(C\xi)=CM(\xi)$ (C – const).

3. Математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий. В частности, для двух случайных величин: $M(\xi\pm\eta)=M(\xi)\pm M(\eta)$.

4. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания всегда равно нулю: $M(\xi-m_\xi)=0$.

5. Если ξ и η независимые случайные величины (закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения приняла другая), то $M(\xi\eta)=M(\xi)\,M(\eta)$.

Если ξ – непрерывная случайная величина с известной плотностью вероятностей $f(x)$, а $\varphi(t)$ – некоторая непрерывная детерминированная (неслучайная) функция, то можно рассмотреть случайную величину $\varphi(\xi)$. Для математического ожидания этой случайной величины имеет место равенство

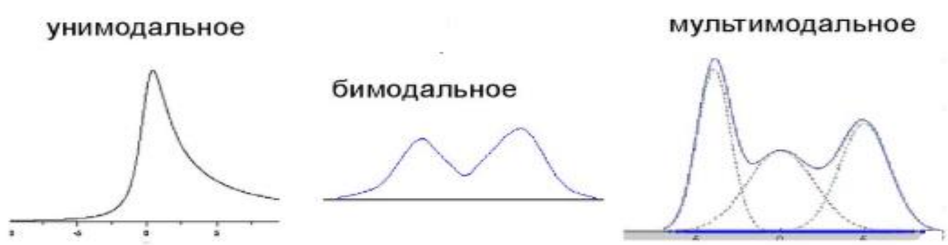
$$M[\varphi(\xi)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,f(x)dx.$$

Это математическое ожидание в литературе часто обозначают $<\varphi(\xi)>$ и называют ***вероятностным усреднением*** функции $\varphi(\xi)$. Если ξ – дискретная случайная величина, то

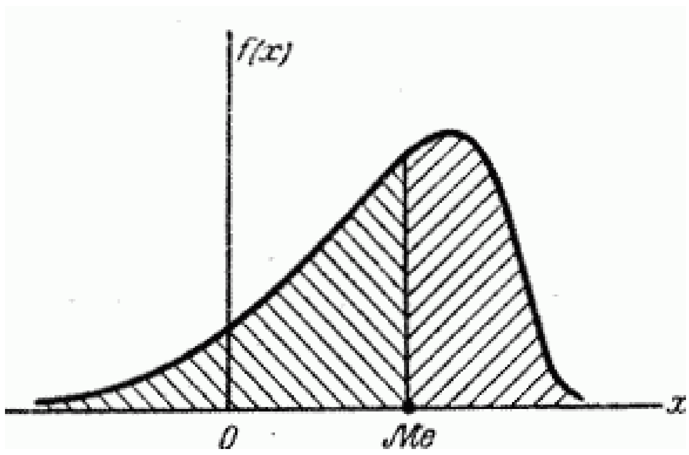
$$M[\varphi(\xi)]=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\,p_i\,.$$

Математическое ожидание – основная числовая характеристика положения случайной величины ξ. К недостаткам ее как характеристики случайной величины можно отнести то, что она является фиктивной характеристикой случайной величины. То есть математическое ожидание, например, дискретной случайной величины не всегда совпадает с одним из возможных значений этой случайной величины, что, вообще говоря, не всегда удобно либо приводит к парадоксальным выводам (в среднем за год выпущено 16,3 корабля) если подходить к математическому ожиданию слишком конкретно. Поэтому на практике применяют и другие характеристики положения, которые являются структурными (а не счетными, как математическое ожидание) характеристиками положения. Другими словами, эти числовые характеристики не требуют дополнительных вычислений, а совпадают с одним из возможных значений. К ним, в частности, относятся мода и медиана случайной величины.

Модой *Mo(ξ)* дискретной случайной величины называют такое её возможной значение, при котором полигон распределения имеет максимум. Для непрерывной случайной величины мода – это такое значение случайной величины, при котором ее плотность вероятностей имеет максимум (локальный!). Если такой максимум один, то распределение называют ***унимодальным*** (или ***одномодальным***), в противном случае – ***мультимодальным*** (или ***многомодальным***):

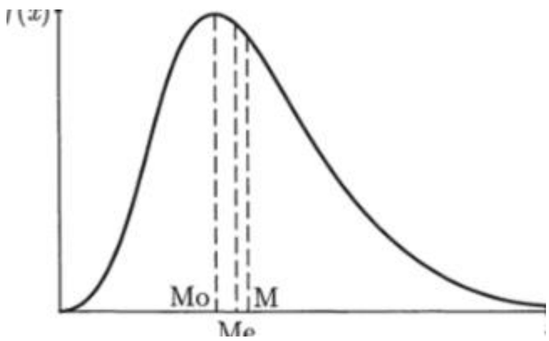


Медианой *Me*(*ξ*) случайной величины *ξ* называют такое ее возможное значение, при котором выполняется равенство $P(\xi < Me) = P(\xi > Me)$, то есть функция распределения в медиане *F(Me)*=0,5. Медиана делит площадь под кривой на две равные части.



Медиана случайной величины является частным случаем квантиля распределения случайной величины. ***Квантилем (квантилью) распределения случайной величины ξ порядка s*** называется такое действительное число t_s для которого выполняется равенство $F(t_s)=s$. Квантиль порядка 0,5 является медианой. Квантили порядка 0,25; 0,5; 0,75 носят название ***квартилей*** (квартили делят распределение на четыре равные части) и второй квартиль (порядка 0,5) совпадает с медианой. Квантили порядка 0,1; 0,2; …; 0,9 называют ***децилями.***

В случае унимодального распределения медиана находится между математическим ожиданием и модой случайной величины *ξ*.



Если распределение случайной величины ξ – унимодальное и симметрическое относительно математического ожидания, то математическое ожидание, мода и медиана – совпадают.

§4.2. Числовые характеристики рассеивания

Знание числовых характеристик положения недостаточно для того, чтобы охарактеризовать случайную величину достаточно полно. Рассмотрим, например, дискретную случайную величины ξ, имеющую следующий закон распределения

x_i	0,1	0	–0,1
p_i	0,4	0,2	0,4

и случайную величину η с законом распределения

y_i	–400	0	400
p_i	0,1	0,8	0,1

Очевидно, что $M(\xi)=M(\eta)=0$, однако, случайные величины ξ и η сильно отличаются друг от друга. Их возможные значения распределены около математического ожидания совершенно различным образом. Значит, надо ввести числовую характеристику, отвечающую за разброс возможных значений случайной величины.

Дисперсией случайной величины ξ называют математическое ожидание квадрата отклонения этой случайной величины от её математического ожидания: $D(\xi)=D_\xi=M(\xi-m_\xi)^2$.

Если воспользоваться определением математического ожидания, то

$$D(\xi)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m_\xi)^2 p_i \quad \text{для ДСВ}\,\xi,\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_\xi)^2 f(x)dx \quad \text{для НСВ}\,\xi.\end{cases}$$

Дисперсия, как характеристика рассеивания, лишена наглядности, так как имеет размерность квадрата размерности случайной величины (например, рост некоторой совокупности людей имеет рассеивание в 5 см^2). Поэтому вводится еще одна числовая характеристика рассеивания, совпадающая с размерностью случайной величины. Такой характеристикой является ***среднее квадратическое отклонение*** случайной величины, определяемое как положительный квадратный корень из дисперсии случайной величины: $\sigma_\xi=\sqrt{D_\xi}$.

Если для случайной величины ξ математическое ожидание равно $\boldsymbol{m}$, а среднее квадратическое отклонение - равно σ_ξ, то безразмерная случайная величина $\xi_N = \dfrac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}$ называется ***стандартизированной*** (или ***нормированной***) случайной величиной. Для нее математическое ожидание всегда рано нулю, а дисперсия (и среднее квадратическое отклонение) равна единице. Использование стандартизированной случайной величины оправдано при сравнении случайных величин и является аналогом приведения к общему масштабу.

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю.

2. Постоянная величина выносится за знак дисперсии в квадрате: $D(C\xi)=C^2D(\xi)$.

3. Дисперсия алгебраической суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(\xi \pm \eta)= D(\xi)+ D(\eta).$$

4. Дисперсия случайной величины равна математическому ожиданию квадрата случайной минус квадрат её математического ожидания: $D_\xi = M\xi^2 - m_\xi^2$.

Доказательство этой формулы получается непосредственно из свойств математического ожидания. Фактически, это свойство дает расчетную формулу для вычисления дисперсии

$$D_\xi = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_\xi^2 & \text{для ДСВ } \xi, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - m_\xi^2 & \text{для НСВ } \xi. \end{cases}$$

Из этого свойства непосредственно следуют соотношения:

a) $M(\xi^2)\neq(M(\xi))^2$;

b) $M(\xi^2)=D(\xi)+ (M(\xi))^2$.

Пример. В результате проведения серии опытов в неизменных условиях некоторое событие A может появиться в каждом опыте с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q=1–p$. Бинарную случайную величину $\chi_A(\omega)$, состоящую в появлении события A называют ***индикатором события** A*. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Индикатор события является дискретной случайной величиной и закон ее распределения имеет вид:

x_i	0	1
p_i	q	p

Математическое ожидание этой случайной величины $M(\chi_A(\omega))=0\cdot q+1\cdot p=p$. Для вычисления дисперсии необходимо найти математическое ожидание квадрата случайной величины. Квадрат случайной величины $\chi^2_A(\omega)$ имеет следующий закон распределения

x_i	0^2	1^2
p_i	q	p

и математическое ожидание $M(\chi^2_A(\omega))=0^2\cdot q+1^2\cdot p=p$. Тогда дисперсия равна

$$D(\chi_A(\omega)) = M(\chi_A^2(\omega)) - M^2(\chi_A(\omega)) = p - p^2 = p(1-p) = pq\,.$$

При решении практических задач для оценки дисперсии случайной величины используют безразмерный ***коэффициент вариации*** $v_\xi = \dfrac{\sigma_\xi}{m_\xi}\cdot 100\%$ ***случайной величины***, который выражает в процентах долю среднего квадратического отклонения в среднем значении случайной величины. Для индикатора события, например, коэффициент вариации $v_{\chi_A(\omega)} = \sqrt{\dfrac{q}{p}}100\%$.

§4.3. Моменты случайных величин. Асимметрия и эксцесс

Пусть задана случайная величина ξ. ***Моментом n-го порядка $M_n(a)$*** случайной величины ξ по отношению к значению a называется математическое ожидание n-ой степени отклонения случайной величины ξ от a: $M_n(a) = M(\xi - a)^n$. Если a=0, то момент называется начальным

$$v_m = M_n(0) = M\xi^n = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^n p_i & \text{для ДСВ } \xi, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)dx & \text{для НСВ } \xi. \end{cases}$$

Если $a=m_\xi$, то момент называется центральным

$$\mu_n = M(\xi - m_\xi)^n = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (x - m_\xi)^n p_i & \text{для ДСВ } \xi, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi)^n f(x)dx & \text{для НСВ } \xi. \end{cases}$$

Из определения моментов очевидным образом следует, что первый начальный момент совпадает с математическим ожиданием случайной величины, а второй центральный момент – с дисперсией. Из определения также следует, что центральные моменты случайной величины можно выразить через начальные моменты

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2,\ \mu_3 = v_3 + 3v_2v_1 + 2v_1^2 \text{ и так далее.}$$

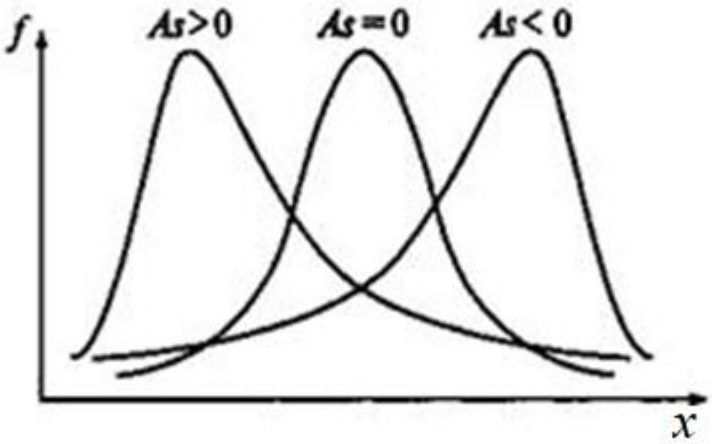
Свойства моментов:

1. Первый центральный момент μ_1 всегда равен нулю.

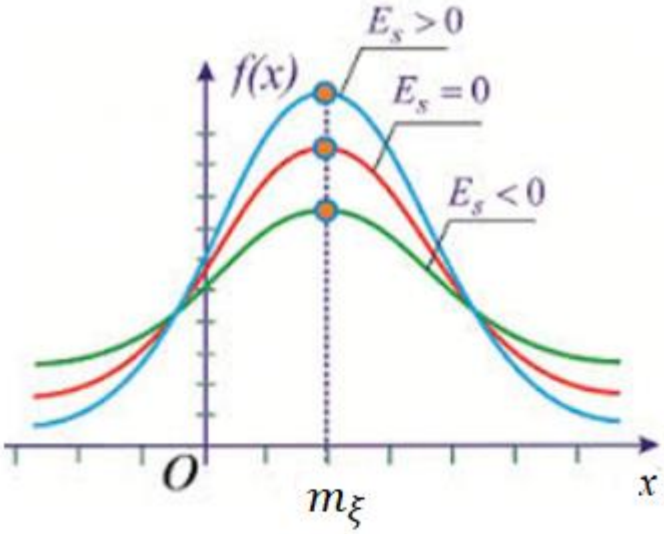
2. Центральный момент не изменяет своей величины от прибавления к случайной величине любой постоянной величины.

3. Если случайная величина распределена симметрично относительно своего математического ожидания, то все ее центральные моменты нечетного порядка равны нулю.

Безразмерная величина $A_S = \dfrac{\mu_3}{\sigma_\xi^3}$ называется ***коэффициентом асимметрии*** и принимается за меру отклонения распределения случайной величины ξ от симметрии. Если $A_S > 0$, то имеет место ***правосторонняя (***или ***положительная) асимметрия***, если $A_S < 0$ – то ***левосторонняя (***или ***отрицательная) асимметрия***. **Если коэффициент асимметрии равен нулю, то распределение симметрично относительно своего математического ожидания.**



Четвертый центральный момент служит для характеристики крутости (островершинности) распределения. За меру крутости берут безразмерный ***коэффициент эксцесса*** $E_\xi = \dfrac{\mu_4}{\sigma_\xi^4} - 3$. Кривая, для которой $E_\xi = 0$, то есть $\dfrac{\mu_4}{\sigma_\xi^4} = 3$ выбрано в качестве эталона для сравнения.



Более островерхие кривые имеют положительный эксцесс, а более пологие – отрицательный.

§5 Характеристическая функция

Характеристическая функция является одним из способов описания случайной величины, удобным для решения задач. Пусть ξ – случайная величина с действительным множеством возможных значений. Образуем комплексную случайную величину $Y = e^{-it\xi}$, где $t \in R$, а $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Характеристической функцией (ХФ) $g_\xi(t)$ случайной величины ξ называют математическое ожидание комплексной случайной величины $Y = e^{-it\xi}$, то есть

$$g_\xi(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} p_k e^{-itx_k} & \text{для ДСВ}, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(x)dx & \text{для НСВ}. \end{cases}$$

Другими словами, характеристическая функция – это интегральное преобразование Фурье функции $f(x)$. По характеристической функции можно однозначно определить плотность распределения случайной величины

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g_\xi(t)dt,$$

поэтому характеристическая функция – это одна из форм закона распределения случайной величины.

Зная характеристическую функцию можно найти начальный момент k-го порядка

$$\nu_k = i^k \left. \frac{d^k g_\xi(t)}{dt^k} \right|_{t=0},$$

что позволяет найти математическое ожидание $M\xi = \nu_1 = i g_\xi^{/}(0)$ и дисперсию

$$D_\xi = \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = g_\xi^{/2}(0) - g_\xi^{//}(0)$$

случайной величины ξ по ее характеристической функции с помощью операции дифференцирования.

Рассмотрим частный случай. Пусть ξ – дискретная случайная величина принимающая счетное число целых положительных значений

0	1	2	…	k	…
p_0	p_1	p_2	…	p_k	…

Ее характеристическая функция имеет вид

$$g_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{-ikt}$$

или вводя обозначение $z=e^{-it}$

$$\varphi_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k.$$

Эта функция называется ***производящей функцией***. Если возможных значений конечное число, то ряд в производящей функции превращается в конечную сумму.

Несложно доказать, что математическое ожидание и дисперсия для такого вида случайной величины вычисляются по формулам

$$m_\xi = \varphi'(1),\ D_\xi = \varphi''(1) + \varphi'(1) - \varphi'^2(1).$$

§6. Биномиальный закон распределения и его числовые характеристики

Конечнозначная дискретная случайная величина ξ, которая принимает целые неотрицательные значения 0, 1, 2, …, n называется распределенной по ***биномиальному закону***, если соответствующие вероятности возможных значений этой случайной величины вычисляются по формуле Бернулли. Очевидно, что всякая случайная величина, выражающая число появлений некоторого события A при n независимых опытах (схема Бернулли) подчиняется биномиальному закону распределения.

Ряд распределения биномиальной случайной величины можно представить в виде

x_i	0	1	2	………	n
p_i	q^n	npq^{n-1}	$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}p^2q^{n-2}$	………	p^n

а функция распределения биноминального закона

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ P_{0,n}, & 0 < x \le 1 \\ P_{0,n} + P_{1,n}, & 1 < x \le 2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 1, & x > n \end{cases}$$

Производящая функция биноминального распределения $\varphi_n(z) = (q + zp)^n$.

Используя свойства производящей функции, математическое ожидание биномиального распределенной случайной величины $m_\xi = \varphi_n'(1) = np$, а дисперсия $D_\xi = \varphi_n''(1) + \varphi_n'(1) - \varphi_n'^2(1) = npq$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi = \sqrt{npq}$.

Если дискретная случайная величина выражает вероятности появления m раз некоторого события A при n независимых опытах в случае обобщенной схемы Бернулли, то закон ее распределения часто называют ***обобщенным биномиальным распределением***. Используя производящую функцию этого распределения $\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i z)$, свойства производящей функции и логарифмическое дифференцирование, числовые характеристики для обобщенного биномиального распределения:

$$m_\xi = \sum_{k=0}^{n} p_k,\ D_\xi = \sum_{k=0}^{n} p_k q_k,$$

где p_k – вероятность появления события A в k-ом опыте, а q_i=1–p_i.

Пример. Производится 15 независимых выстрелов по цели. Вероятность попадания при каждом выстреле p=0,6. Определить среднее число попаданий и степень разброса.
Решение. Случайная величина подчиняется биномиальному распределению. Ее возможные значения 0, 1, …, 15. Среднее число попаданий – это математическое ожидание этой случайной величины $m_\xi = np = 15 \cdot 0{,}6 = 9$. Степень разброса попаданий при 15 выстрелах –дисперсия $D_\xi = npq = 15 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}4 = 3{,}6$.

§7.1. Закон распределения Пуассона

Дискретная случайная величина ξ с возможными значениями 0, 1, 2, …, m,… называется ***распределенной по закону Пуассона*** с параметром a $(a > 0)$, если вероятности ее возможных значений вычисляются по формуле

$$P_m(a) = P(\xi = m) = \frac{a^m e^{-a}}{m!}.$$

В отличие от биномиально распределенной случайной величины, пуассоновская случайная величина принимает не конечное, а счетное число возможных значений. Ее ряд распределения имеет вид

x_i	0	1	2	…	m	…
p_i	e^{-a}	ae^{-a}	$\frac{a^2e^{-a}}{2!}$	…	$\frac{a^me^{-a}}{m!}$	…

Проверим условие нормировки

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = e^{-a} + \frac{a}{1!}e^{-a} + \cdots + \frac{a^m}{m!}e^{-a} + \cdots = e^{-a}\left(1 + \frac{a}{1!} + \cdots + \frac{a^m}{m!} + \cdots\right) = e^{-a}e^{a} = 1.$$

Рассмотрим, далее, событие $\{0 \le \xi \le m_0\}$. Оно может быть представлено в виде суммы событий

$$\{0 \le \xi \le m_0\} = \{\xi = 0\} + \{\xi = 1\} + \cdots + \{\xi = m_0\}.$$

Так как события несовместны, то

$$P\left(0 \le \xi \le m_0\right)e^{-a}\left(1 + \frac{a}{1!} + \cdots + \frac{a^{m_0}}{m_0!} + \cdots\right).$$

Определим вид производящей функции случайной величины, распределенной по закону Пуассона

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_m(a) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \frac{a^m}{m!}e^{-a} = e^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(az)^m}{m!} = e^{-a}e^{az} = e^{a(z-1)},$$

Искомая производящая функция имеет вид $\varphi(z) = e^{a(z-1)}$. Очевидно, что условие нормировки $\varphi(1)=1$ выполнено. Используя свойства производящей функции несложно получить, что $m_\xi = D_\xi = a$. ***Характерной чертой распределения Пуассона является то, что математическое ожидание и дисперсия численно равны между собой и совпадают с параметром закона распределения Пуассона***. Другими словами, для описания закона распределения случайной величины, распределённой по закону Пуассона, достаточно знать параметр a – ее среднее значение.

Пример. На АТС в течение часа в среднем поступает 120 вызовов. Определить вероятность того, что за одну минуту поступит ровно три вызова.
Решение. Введем в рассмотрение случайную величину ξ, которая выражает число вызовов, поступивших на АТС в течение минуты. Это случайная величина распределена по закону Пуассона с параметром a=2. Поэтому

$$P_3(2) = P(\xi = 3) = \frac{a^3 e^{-a}}{3!} = \frac{4}{3}e^{-2}.$$

§7.2. Простейший поток событий

Последовательность однородных событий, которые появляются одно за другим в какие-то случайные моменты времени, называется ***потоком событий.*** Например: последовательность поступающих на АТС вызовов; последовательность сбоев на вычислительной машине; последовательность машин, едущих по улице с односторонним движением и так далее. Геометрически, поток событий можно изображать последовательностью случайных точек на временной оси. Введем некоторые характеристики потока:

– среднее число событий потока, появляющихся в единицу времени, называется ***интенсивностью потока*** (часто обозначается λ);

– ***поток событий называется стационарным***, если его интенсивность постоянна $(\lambda = const)$. *Стационарность потока означает*, что вероятность появления того или иного числа событий потока за промежуток времени τ зависит лишь от длины этого промежутка и не зависит от того, где расположен этот промежуток на числовой оси Ot. Если рассмотреть в случае стационарного потока случайную величину ξ, выражающую число событий стационарного потока, появившихся на временном промежутке $[t, t+\tau]$, то математическое ожидание такой случайной величины равно $m_\xi = \lambda\tau$, где λ – интенсивность стационарного потока.

– ***поток событий называется ординарным***, если появление двух и более событий на временном промежутке достаточно малой длины ничтожна мала по сравнению с появлением одного события. Практически ординарность означает, что события в потоке появляются поодиночке, а не группами. Если рассмотреть случайную величину η, выражающую число событий ординарного потока, появляющихся на временном, достаточно малом промежутке $[t, t+\Delta t]$, то $P(\eta=2)\approx 0,\ \ P(\eta=3)\approx 0,\ldots$ Следовательно,

$$m_\eta = 0\cdot P(\eta=0)+1\cdot P(\eta=1)+2\cdot P(\eta=2)+\cdots \approx P(\eta=1)$$

и, из того, $m_\eta \approx P(\eta=1)$ для стационарного ординарного потока верно, что

$$P(\eta=1)\approx \lambda\cdot\Delta t \text{, а } P(\eta=0)\approx 1-\lambda\cdot\Delta t.$$

– поток событий называется ***потоком без последействия***, если для любых временных промежутков, не пересекающихся между собой, число событий, появившихся на каждом из них, не зависит от того сколько событий появилось на других промежутках. *Отсутствие последействия означает*, что события, образующие поток, появляются в те или иные моменты времени независимо друг от друга.

– поток событий, который является стационарным, ординарным и не имеет последействия, называется ***простейшим потоком событий*** или ***пуассоновским потоком***.

<u>Поставим следующую задачу</u>: для простейшего потока событий с интенсивностью λ определить закон распределения случайной величины ξ, выражающей число событий потока, появляющихся на временном промежутке $[t,t+\tau]$. Очевидно, что случайная величина ξ – это дискретная случайная величина с возможными значениями 0, 1, 2,…

Для решения поставленной задачи разобьем промежуток $[t,t+\tau]$ на n равных частей длины $\Delta t=\dfrac{\tau}{n}$ и введем новую случайную величину η, выражающую число событий потока, появившихся на временном промежутке Δt. Если промежуток Δt мал, то для дискретной величины η в силу ординарности потока имеют место формулы $P(\eta=1)\approx\lambda\cdot\Delta t$ и $P(\eta=0)\approx 1-\lambda\cdot\Delta t$. Так как поток не имеет последействия, то случайная величина ξ примет значение равное $\approx m$, если из n участков m участков будут содержать по одному событию (аналог: *m* попаданий при *n* выстрелах). Используя формулу Бернулли, можно записать, что

$$P(\xi=m)\approx C_n^m\left[P(\eta=1)\right]^m\cdot\left[P(\eta=0)\right]^{n-m}\approx C_n^m\left[\frac{\lambda\tau}{n}\right]^m\cdot\left[1-\frac{\lambda\tau}{n}\right]^{n-m}.$$

Эта приближенная формула станет точной при $n\to\infty$, то есть

$$P(\xi=m)=\lim_{x\to\infty}C_n^m\left[\frac{\lambda\tau}{n}\right]^m\cdot\left[1-\frac{\lambda\tau}{n}\right]^{n-m}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\left[\frac{\lambda\tau}{n}\right]^m\cdot\left[1-\frac{\lambda\tau}{n}\right]^{n-m}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\cdot\frac{(\lambda\tau)^m}{n^m}\cdot\left[1-\frac{\lambda\tau}{n}\right]^{n-m}=$$

$$=\frac{(\lambda\tau)^m}{m!}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n^m}\cdot\left[1-\frac{\lambda\tau}{n}\right]^{n}\cdot\left[1-\frac{\lambda\tau}{n}\right]^{-m}=$$

$$\frac{(\lambda\tau)^m}{m!}\cdot\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n^m}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left[1-\frac{\lambda\tau}{n}\right]^{n}}_{e^{-\lambda\tau}}\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left[1-\frac{\lambda\tau}{n}\right]^{-m}}_{=1}=\frac{(\lambda\tau)^m}{m!}\cdot e^{-\lambda\tau}$$

Или, окончательно, $P(\xi=m)==\dfrac{(\lambda\tau)^m}{m!}\cdot e^{-\lambda\tau}\ \ (m=0,1,2,\ldots)$.

Проанализировав эту формулу видим, что она сильно напоминает формулу для распределения Пуассона. Следовательно, ***всякая дискретная случайная величина, которая выражает число появлений события простейшего потока событий на том или ином промежутке времени, подчинена закону распределения Пуассона с параметром*** $a=\lambda\tau$. Так как закон Пуассона получился их биномиального при $n\to\infty$ и $p=\dfrac{\lambda\tau}{n}\to 0$, то в тех случаях, когда для биномиального закона *n* достаточно велико, а вероятность *p* достаточно мала (то есть математическое ожидание np приближенно равно дисперсии npq: $m \geq 100,\ p \leq 0,01$) вместо формулы Бернулли

$$P\left(\xi = m\right) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

можно использовать формулу

$$P\left(\xi = m\right) \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}.$$

Это было сформулировано при рассмотрении формулы Бернулли в виде асимптотической теоремы Пуассона. Из вышесказанного следует, что ***распределение Пуассона является предельным случаем биномиального распределения, когда*** n ***достаточно велико, а вероятность*** p ***– мала***.

§8. Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина, которая принимает значения на отрезке $[a,b]$ с постоянной плотностью вероятностей, называется ***распределенной по равномерному закону.*** Непосредственно из определения следует, что плотность распределения вероятностей для этого закона имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} C, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}.$$

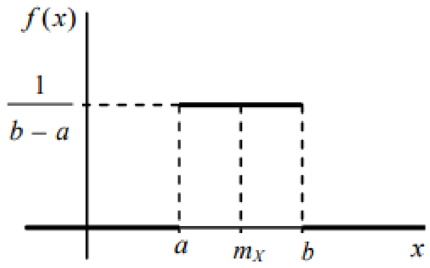
Так как плотность вероятностей величина неотрицательная, то $C \geq 0$. Подберем далее этот параметр таким образом, чтобы удовлетворялось условие нормировки

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^b Cdx = C(b-a).$$

Следовательно, параметр распределения $C = \dfrac{1}{b-a}$.

Окончательно для распределения вероятностей равномерного закона имеем

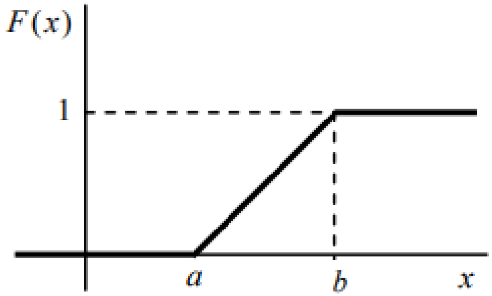
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$



Тогда функция распределения

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \int\limits_a^x \dfrac{dt}{b-a} = \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

А ее график имеет вид

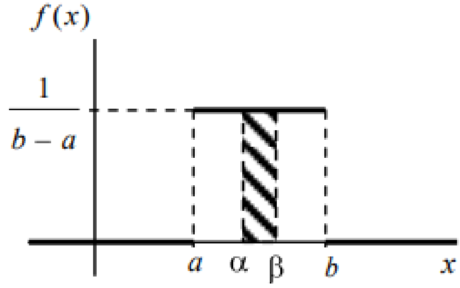


Для непрерывной случайной величины одной из основных задач является вычисление вероятности попадания случайной величины в заданный интервал. Из свойств плотности вероятностей

$$P(\alpha \le \xi < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Если интервал $[\alpha,\beta]$ целиком содержится в $[a,b]$, то

$$P(\alpha \le \xi < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$



то есть отношению длин отрезков.

Числовые характеристики равномерного распределения проще найти по определению, нежели посредством характеристической функции. По определению математического ожидания

$$m_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_a^b \frac{xdx}{b-a} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

что совпадает с серединой отрезка равномерного распределения. Для дисперсии равномерного распределения имеет место формула

$$D_\xi = \frac{(b-a)^2}{12},$$

а среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_\xi = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

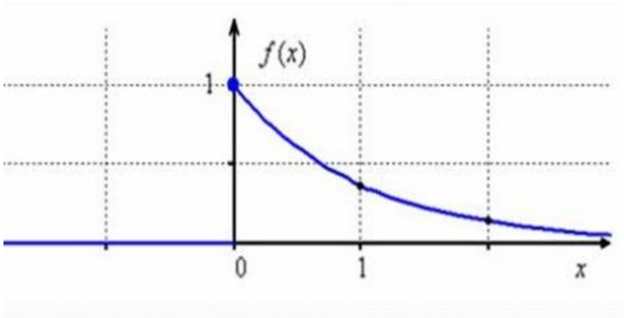
Пример. Интервал прибытия между поездами метрополитена распределен по равномерному закону на временном отрезке [0,5]. Определить вероятность того, что подошедшему к перрону пассажиру придется ждать от одной до трех минут.

Решение. Непосредственно из условия задачи имеем, что a=0, b=5, α=1, β=3 и поэтому $P(0 \le \xi < 3) = \dfrac{3-1}{5-0} = 0{,}4$.

§9. Показательный закон распределения

Непрерывная случайная величина называется ***распределенной по показательному закону с параметром λ*** (λ>0) если ее плотность распределения вероятностей определяется формулой

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

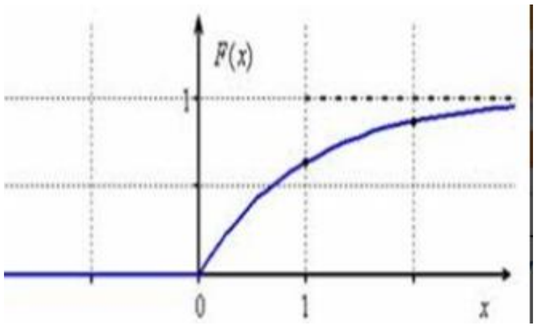


Проверим условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt = -e^{-\lambda t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty} = 1.$$

Функция распределения для показательного закона

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$



и вероятность попадания в интервал [α, β] (0≤α<β)

$$P(\alpha \leq \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Непосредственно по определению найдем характеристическую функцию

$$g_\xi(t) = Me^{-it\xi} = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{-itx}dx = \lambda \int_0^\infty e^{-x(\lambda+it)}dx = \frac{\lambda}{\lambda + it}.$$

Ее производные в нулевой точке равны

$$g'_\xi(o) = -\frac{i}{\lambda},\ g''_\xi(o) = -\frac{2}{\lambda^2}$$

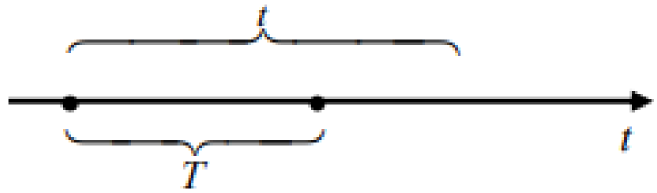
и, следовательно, математическое ожидание $m_\xi = \dfrac{1}{\lambda}$, дисперсия $D_\xi = \dfrac{1}{\lambda^2}$, среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi = \dfrac{1}{\lambda}$.

Отличительной чертой показательного закона является то, что математическое ожидание совпадает со средним квадратическим отклонением и равно величине обратной параметру показательного закона λ.

Выясним далее в каких ситуациях возникают случайные величины, распределенные по показательному закону. Рассмотрим простейший поток событий с интенсивностью λ. События потока появляются одно за другим в случайные моменты времени. Пусть t_i – момент наступления i-го события простейшего потока событий, а t_{i+1} – момент наступления (i+1) события потока. Введем в рассмотрение случайную величину $T = t_{i+1} - t_i$, которая выражает промежуток времени между появлениями двух соседних событий простейшего потока событий. Очевидно, что T – неотрицательная непрерывная случайная величина. Найдем функцию распределения введенной случайной величины T

$$F_T(t) = P(T < t) = 1 - P(T \geq t)$$

Всякий простейший поток событий можно интерпретировать последовательностью случайных точек на временной оси.



Тогда событие $(T \geq t)$ означает, что за i-м событием потока следующее событие (i+1) наступит позже момента времени t или в момент времени t. Это равно тому, что на временном интервале (0,$\underline{t}$) событие потока не появится. Если ввести в рассмотрение дискретную случайную величину η выражающую число событий, появившихся на промежутке (0,$\underline{t}$), то по формуле Пуассона

$$P(\eta = 0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}.$$

Но события $(T \geq t) = (\eta = 0) \Rightarrow P(T \geq t) = P(\eta = 0) = e^{-\lambda t}$ формула функции распределения $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0$. Если $t < 0$, то событие $(T < t)$ невозможное. Таким образом, для введенной в рассмотрение непрерывной случайной величины T функция распределения имеет вид

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$$

То есть функция распределения введенной случайной величины T совпадает с функцией распределения показательного закона распределения.
Вывод: Любой временной промежуток между появлениями двух соседних событий в простейшем потоке событий подчиняется показательному закону с параметром λ, равным интенсивности потока событий.

Показательный закон находит применение в теории массового обслуживания. По нему распределено время ремонта, время простоя в очереди, время обслуживания и так далее. Также показательный закон играет применяется в теории надежности.

Пример. Среднее время обслуживания покупателя 15 минут. Чему равна вероятность простоя в очереди от 20 до 30 минут, если оно распределено по показательному закону.
Решение. Среднее время обслуживания – это математическое ожидание. Следовательно, параметр показательного закона равен обратной величине: λ=1/15. Поэтому искомая вероятность

$$P(10 \le \xi < 30) = e^{-\frac{1}{15}\cdot 20} - e^{-\frac{1}{15}\cdot 30} = e^{-\frac{4}{3}} - e^{-2}.$$

§10. Нормальный закон распределения (закон Гаусса)

Случайная величина ξ называется ***распределенной по нормальному закону***, если ее плотность вероятностей равна

$$f(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

где b>0, $a \in \mathrm{R}$ – называют ***параметрами распределения***. Более кратко тот факт, что случайная величина распределена по нормальному закону с соответствующими параметрами, записывают $\xi \in N(a,b)$.

Используя интеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$, найдем характеристическую функцию нормального распределения

$$g_\xi(t) = Me^{-it\xi} = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} e^{-itx} dx = \left| u = \frac{x-a}{b} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2+2it(ub+a)}{2}} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2b^2+2ita}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(u+itb)^2}{2}} du = e^{-\frac{t^2b^2+2ita}{2}}$$

Для случая $\xi \in N(0,1)$ характеристическая функция имеет вид $g_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Найдем числовые характеристики $\xi \in N(a,b)$. Для этого необходимо найти значения первой и второй производных характеристической функции.

$$g_\xi^{/}(t) = -\frac{2tb^2 + 2ia}{2} e^{-\frac{t^2b^2+2ita}{2}}, \; g_\xi^{/}(0) = -ia, \; m_\xi = ig_\xi^{/}(0) = a,$$

$$g_\xi^{//}(t) = -b^2 e^{-\frac{t^2b^2+2ita}{2}} + (tb^2 + ia)^2 e^{-\frac{t^2b^2+2ita}{2}}, \; g_\xi^{//}(0) = -b^2 - a^2,$$

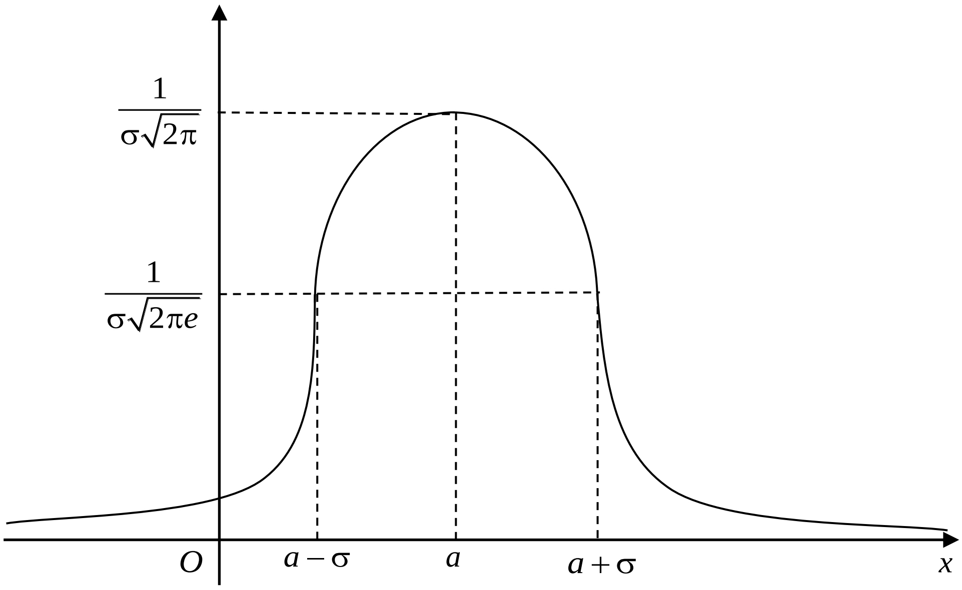
$$D_\xi = g_\xi^{/\,2}(0) - g_\xi^{//}(0) = b^2.$$

То есть выяснили смысл параметров нормального распределения: $a = m_\xi$ – математическое ожидание, а $b = \sigma_\xi$ – среднее квадратическое отклонение. С учетом этого имеем для плотности распределение Гаусса

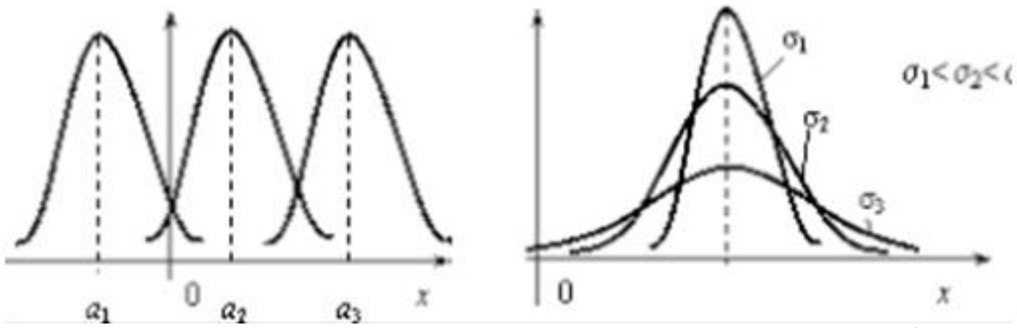
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

В теории вероятностей нормальное распределение играет весьма важную роль. Очень многие эмпирический случайные величины подчиняются этому распределению. Более того, оно являются предельным для большинства распределений.

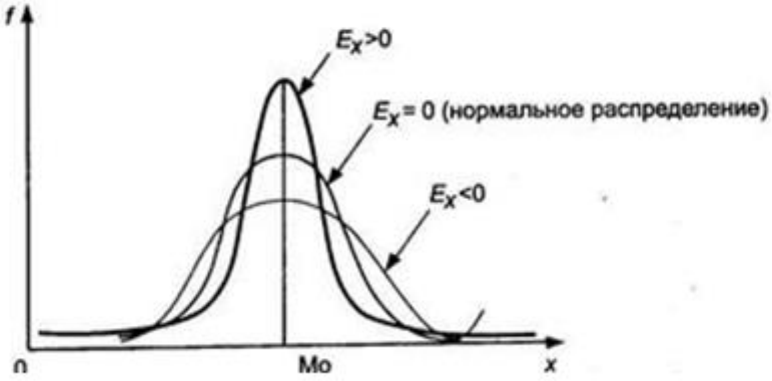
График нормального распределения называется ***кривой Гаусса*** или ***нормальной кривой.*** Из вида плотности распределения следует, что график расположен выше оси абсцисс и прямая $x=m$ является его осью симметрии. На интервале $(-\infty;m)$ функция возрастает, а на $(m,+\infty)$ убывает. При $x=m$ функция принимает максимальное значение $y_{\max} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. На промежутках $(-\infty;m-\sigma)$, $(m+\sigma;+\infty)$ график вогнутый, а на $(m\text{-}\sigma;m+\sigma)$ – выпуклый. Ордината точек перегиба $y_{пер} = f(m \pm \sigma) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-0,5}$. Суммируя вышесказанное, нормальная кривая имеет вид



Форма нормальной кривой не изменяется при изменении математического ожидания m, а происходит лишь ее сдвиг вправо или влево. Изменение среднего квадратического отклонения σ изменяет форму нормальной кривой: с уменьшением σ нормальная кривая вытягивается вдоль прямой $x=m$; с увеличением становится более пологой.



Для нормальной распределенной случайной величины $\mu_4 = 3\sigma^4$, поэтому коэффициент эксцесса равен нулю, то есть эталоном сравнения крутизны распределения служит нормальное.



§ 11. Функция Лапласа

Одной из основных задач теории вероятностей является определение вероятности попадания случайной величины ξ на заданный интервал $(\alpha;\beta)$: P $(\alpha \le \xi < \beta)$. Для решения этой задачи в случае нормально распределенной случайной величины введем в рассмотрение новую функцию.

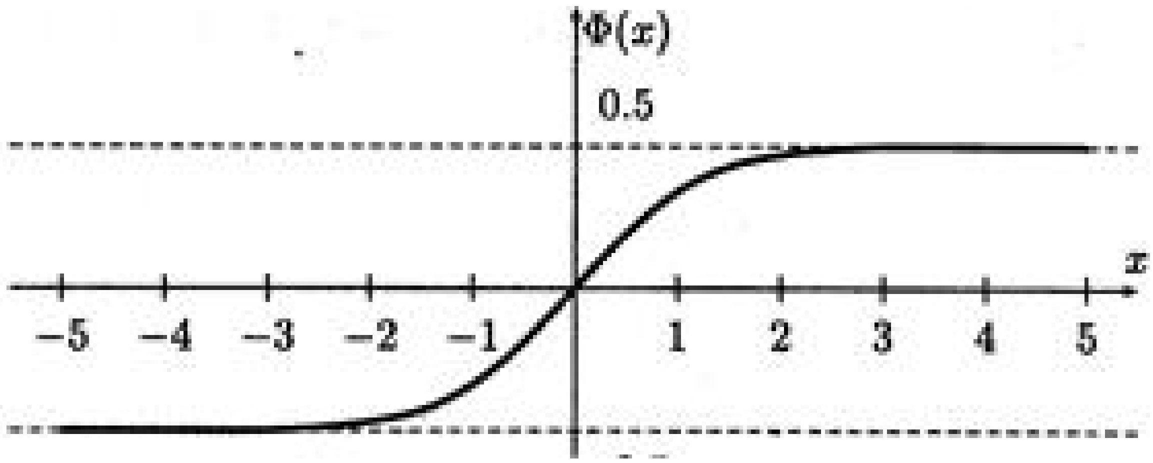
Функция $\Phi(x)$ действительной переменной x

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

называется ***функцией Лапласа*** или ***интегралом вероятности***. Она обладает следующими свойствами:

1. $\Phi(0)=0$.
2. $\Phi(-x)= -\Phi(x)$, то есть нечетная функция.
3. $\Phi(+\infty)=½$, $\Phi(-\infty)= -½$.
4. $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ для всех конечных значений x, следовательно,

функция монотонно возрастает на всей числовой оси.



Особенностью функции Лапласа является быстрое стремление к своим асимптотам. Поэтому таблицы составлены только для $x \in [0,5]$.

Выразим функцию распределения нормального закона через функцию Лапласа.

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt=\left|\frac{t-m}{\sigma}=u\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}}du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}}du+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Окончательно, для нормального распределения

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

По свойствам функции распределения

$$P(\alpha\le\xi<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\varPhi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\varPhi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right).$$

Если рассмотреть интервал, симметричный относительно математического ожидания m, то в силу нечетности функции Лапласа

$$P(|\xi-m|<\delta)=2\varPhi(\frac{\delta}{\sigma}).$$

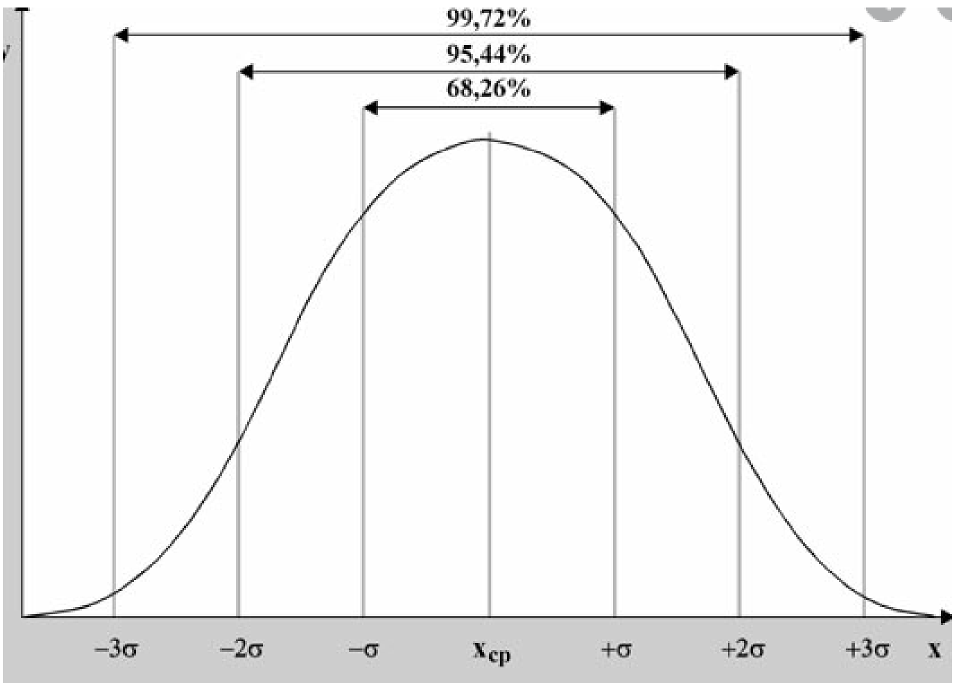
Если в качестве выбирать $\delta=\sigma$, 2σ, 3σ, то получим

$$P(|\xi-m|<\sigma)=\ 2\varPhi(1)\approx 0{,}6827$$

$$P\big(|\xi-m|<2\sigma\big)=2\varPhi(2)\approx 0{,}9545$$

$$P\big(|\xi-m|<3\sigma\big)=2\varPhi(3)\approx 0{,}9973$$

То есть, для нормально распределенной случайной величины $\xi\in N(m,\sigma)$ ее возможные значения почти достоверно расположены на интервале (m–3σ, m+3σ) и выход их за пределы указанного интервала – событие маловероятное. В этом заключается ***правило трех сигм***, широко используемое в статистике.



Следует иметь в виду, что функция Лапласа в некоторых учебных пособиях определяется иначе, исходя из этого, формула попадания случайной величины в интервал и таблицы функции Лапласа отличаются. Поэтому необходимо при использовании формул, содержащих эту функцию, и таблиц исходить из конкретного пособия.

Пример. СВ ξ распределена по нормальному закону с параметрами $M\xi=5$ и $D\xi=0,64$. Требуется найти:

а) вероятность попадания этой СВ в интервал (4;7);

б) вероятность того, что СВ примет значение, большее чем 3;

в) вероятность того, что СВ примет значение, равное ее математическому ожиданию.

Решение. **а)** Так как $a=M\xi=5$; $\sigma=\sqrt{D\xi}=0,8$, то

$$P(4<\xi<7)=\Phi\left(\frac{7-5}{0,8}\right)-\Phi\left(\frac{4-5}{0,8}\right)=$$

$$=\Phi(2,5)-\Phi(1,25)\approx 0,4938-(-0,3944)=0,8882.$$

б) Найдем

$$P(\xi>3)=P(3<\xi<+\infty)=\Phi\left(\frac{+\infty-5}{0,8}\right)-\Phi\left(\frac{3-5}{0,8}\right)=$$

$$=\Phi(+\infty)-\Phi(-2,5)\approx 0,5-(-0,4938)=0,9938.$$

в) Поскольку нормальное распределение является непрерывным распределением, то вероятность того, что СВ ξ примет конкретное значение, равна 0, то есть $P(\xi=M\xi)=P(\xi=5)=0$.

Нормальное распределение имеет большое теоретическое и прикладное значение. В частности, считается, что погрешности измерения различных физических величин, ошибки, порожденные большим количеством случайных причин, распределены по нормальному закону. Кроме того, нормальный закон распределения является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях, что делает нормальное распределение исключительным в теории вероятностей и ее приложениях.