НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ или доказать его расходимость.

Решение. Несобственный интеграл 1-го рода (несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования) вычисляется как предел определенных интегралов, взятых по конечным промежуткам интегрирования:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, интеграл сходится.

Пример 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{2x}{1+x^2}dx$ или доказать его расходимость.

Решение. Имеем:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{2x}{1+x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{b}\frac{2x}{1+x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\ln(1+x^2)\Big|_0^b=\ln\infty-\ln 1=\infty.$$

Интеграл расходится.

Пример 3. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ или доказать его расходимость.

Решение. Имеем: $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{-1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{A\to-\infty}\left(-2\sqrt{1-x}\Big|_A^{-1}\right)=$

$=\lim\limits_{A\to-\infty}(-2\sqrt{2}+2\sqrt{1-A})=+\infty,$ интеграл расходится.

Пример 4. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$ или доказать его расходимость.

Решение. Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования вычисляется как предел определенных интегралов, взятых по конечным промежуткам интегрирования, когда верхний и нижний пределы интегрирования стремятся независимо друг от друга соответственно к $+\infty$ и $-\infty$. Имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\int_A^B\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{A\to-\infty}\int_A^0\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{B\to+\infty}\int_0^B\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{0}+$$

$$\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{0}+\operatorname{arctg}x\Big|_{0}^{+\infty}=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}-0=\pi,$$ интеграл сходится и равен π.

Пример 5. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n}$.

Решение. Имеем: $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n}=\lim_{B\to+\infty}\int_1^B\frac{dx}{x^n}=\lim_{B\to+\infty}\begin{cases}\left.\dfrac{x^{-n+1}}{1-n}\right|_1^B, & n\neq1,\\ \ln|x|\Big|_1^B, & n=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{n-1}, & n>1,\\ +\infty, & n\le 1.\end{cases}$$

Таким образом, интеграл сходится, если $n>1$, и расходится, если $n\le 1$.

Пример 6. Исследовать интеграл $\int_1^{\infty}\frac{x^3}{x^5+1}dx$ на сходимость.

Решение. Подынтегральная функция удовлетворяет неравенству

$$0<\frac{x^3}{x^5+1}<\frac{1}{x^2}$$

следовательно,

$$\int_1^{\infty}\frac{x^3}{x^5+1}dx<\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty}=1\ .$$

Интеграл от функции $\frac{1}{x^2}$ сходится. Тогда, в силу непредельного признака сравнения несобственных интегралов, заданный интеграл тоже сходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^n}$.

Решение. Подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки $x = 0$, т.е. на нижнем пределе интегрирования. Следовательно, заданный интеграл является несобственным интегралом второго рода. Найдем его по определению, отступив от нижнего предела интегрирования $x = 0$ внутрь отрезка интегрирования на малое ε и вычислив предел определенного интеграла по промежутку $[\varepsilon;1]$ при $\varepsilon \to +0$. Имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon\to+0} \begin{cases} \left.\frac{x^{-n+1}}{1-n}\right|_\varepsilon^1, n \neq 1, \\ \ln|x|\Big|_\varepsilon^1, n = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-n}, \ n < 1, \\ +\infty, \ n \geq 1. \end{cases}$$

Таким образом, интеграл сходится, если $n < 1$, и расходится, если $n \geq 1$.

Пример 8. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение. Заданный интеграл является несобственным интегралом второго рода, поскольку подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки $x = 1$, т.е. на верхнем пределе интегрирования. Найдем несобственный интеграл по определению, отступив от верхнего предела интегрирования $x = 1$ внутрь отрезка интегрирования на малое ε и вычислив предел определенного интеграла по промежутку $[0;1-\varepsilon]$ при $\varepsilon \to +0$. Имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left[-2\sqrt{1-x}\,\right]\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(-\sqrt{\varepsilon} + 2\right)\Big|_0^1 = 2,$$

интеграл сходится и равен 2.

Пример 9. Вычислить $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 - 1}$.

Решение. Подынтегральная функция имеет разрыв 2-го рода в точке $x = -1$. Найдем несобственный интеграл, отступив от нижнего предела интегрирования $x = -1$ внутрь отрезка интегрирования на малое ε и вычислив предел определенного интеграла по промежутку $[-1+\varepsilon;0]$ при $\varepsilon \to +0$. Имеем:

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2-1}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{x^2-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{-1+\varepsilon}^{0}=\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}(\ln|2-\varepsilon|-\ln|\varepsilon|)=-\infty,$$

интеграл расходится.

Пример 10. Исследовать на сходимость $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение. Подынтегральная функция имеет разрыв 2-го рода внутри промежутка интегрирования в точке $x = 0$. Следовательно, нужно данный отрезок [–1; 1] разбить на промежутки $[-1;0]$ и $[0;1]$ и вычислить несобственный интеграл как сумму двух несобственных интегралов по этим промежуткам. Таким образом,

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\left(\int_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}+\int_{0+\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}dx\right)=$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\left(\left[3\sqrt[3]{x}\right]\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1}+\left[3\sqrt[3]{x}\right]\Big|_{\varepsilon_2}^{1}\right)=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\left(-3\sqrt[3]{\varepsilon_1}\,[\ \ ]\big|+3+3-\sqrt[3]{\varepsilon_2}\right)=6,$$

интеграл сходится и равен 6.

Пример 11. Исследовать на сходимость $\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt[5]{x^7}}$.

Решение. Как и в предшествующем примере, интервал интегрирования разбивается на два промежутка. Тогда

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt[5]{x^7}}=-\frac{5}{2}x^{-\frac{2}{5}}\Big|_{-1}^{0}+\frac{5}{2}x^{-\frac{2}{5}}\Big|_{0}^{1}=-\frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\Big|_{-1}^{0}+\frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\Big|_{0}^{1}=\infty\ .$$

Интеграл расходится.