ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример. Найти изображение оригинала t^n, $n \in N$.

Решение:

Известно, что $1 \div \frac{1}{p}$. Тогда по правилу дифференцирования изображения находим: $-t \cdot 1 \div \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{p^2}$, т.е. $t \div \frac{1}{p^2}$, $-t \cdot t \div \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{2}{p^3}$, т.е. $t^2 \div 2/p^3$.

Так как $\frac{d^{(n)}}{dp^n}\left(\frac{1}{p}\right) = (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}}$, то $t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Пример. Найти изображение оригинала $f(t) = t\cos 2t$.

Решение:

Зная изображение $f(t)$, из теоремы о дифференцировании изображения получаем:

$$\cos 2t \div \frac{p}{p^2+4}, -t\cos 2t \div \frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+4}\right) = \frac{4-p^2}{(p^2+4)^2}, \text{ т.е. } t\cos 2t \div \frac{4-p^2}{(p^2+4)^2}.$$

Пример. Найти изображение оригинала $f(t) = t^2 e^{3t}$.

*Решение***:**

$$e^{3t} \div \frac{1}{p-3}, \; te^{3t} \div -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p-3}\right) = \frac{1}{(p-3)^2}, \; t^2e^{3t} = t(te^{3t}) =$$

$$= -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{(p-3)^2}\right) = \frac{2}{(p-3)^3}.$$

Восстановление оригиналов по изображению – *обратное преобразование Лапласа* (символическая запись $F(p) \div f(t)$).

1 Восстановление оригиналов с помощью таблиц.

Этот способ является самым простым, но удобен в применении только, если изображение легко сводится к табличному виду элементарными преобразованиями.

Фрагмент таблицы

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

4	$t^n e^{at}$ ·	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
5	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
6	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
7	$\mathrm{sh}\,\beta t$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$

Пример. Найти оригинал изображения $F(p)=5/(p^2-4)$.

Решение.

Приведем $F(p)$ к табличному виду

$$F(p)=5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2-4}=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{p^2-4}\Rightarrow \text{ по таблице } f(t)=2.5sh2t.$$ у

Пример. Найти оригинал изображения $F(p)=\dfrac{3p+2}{p^2-10p+26}$

Решение.

Приведем $F(p)$ к табличному виду

$$F(p)=\frac{3p+2}{p^2-10p+26}=\frac{3(p-5)+17}{(p-5)^2+1}=3\cdot\frac{p-5}{(p-5)^2+1}+17\cdot\frac{1}{(p-5)^2+1}$$

Учитывая свойство линейности, по таблице получаем, что

$$f(t)=3e^{5t}\cos t+17e^{5t}\sin t.$$

Пример. Найти оригинал изображения $F(p)=\dfrac{9-p}{(p-3)^3}$

Решение. Приведем $F(p)$ к табличному виду:

$$F(p)=\frac{9-p}{(p-3)^3}=\frac{3-p+6}{(p-3)^3}=\frac{3-p}{(p-3)^3}+\frac{6}{(p-3)^3}=-\frac{1}{(p-3)^2}+3\cdot\frac{2!}{(p-3)^3}=$$

$$=3\cdot\frac{2!}{(p-3)^2}-\frac{1}{(p-3)^3}\Rightarrow \text{ по таблице } f(t)=(3t^2-t)e^{3t}.$$

2 Восстановление оригиналов с помощью свертки

Напомним, ***сверткой*** двух функций-оригиналов $f_1 * f_2$ называется интеграл

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau.$$

Теорема об изображении свертки.

Если $f_1(t)\div F_1(p)$ и $f_2(t)\div F_2(p)$, то $f_1(t)*f_2(t)\div F_1(p)F_2(p)$.

Примеры. Восстановить оригинал, используя теорему об изображении свертки.

1) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p-1)}$

Решение.

$$\frac{1}{p^2(p-1)}=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-1}\div t*e^t;$$

$$t*e^t=\int_0^t \tau e^{t-\tau}d\tau=-\tau e^{t-\tau}\Big|_0^t+\int_0^t e^{t-\tau}d\tau=-t-e^{t-\tau}\Big|_0^t==e^t-t-1=f(t).$$

2) $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$

Решение.

$$\frac{1}{(p^2+1)^2}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\div\sin t*\cos t;$$

$$\sin t*\cos t=\int_0^t\sin\tau\cos(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t(\sin t+\cos(2\tau-t)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\tau\sin t-\frac{1}{2}\cos(2\tau-t)\right)\Big|_0^t=\frac{1}{2}\left(t\sin t-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\cos t\right)=\frac{t}{2}\sin t=f(t).$$

3 Нахождение оригиналов с помощью разложения дроби на сумму простейших.

Если изображение является правильной дробью, то методом неопределенных коэффициентов эту дробь можно представить в виде суммы простейших дробей I-IV типов так, как это делалось при интегрировании рациональных дробей.

При этом дробь 1-го типа $1/(p-\alpha)$ соответствуют оригиналу $e^{\alpha t}$, дробь 2-го типа $1/(p-\alpha)^k$ соответствует оригиналу $t^{k-1}e^{\alpha t}/(k-2)!$, дробь 3-го типа сначала преобразовывается к виду:

$$\frac{M(p-\alpha)+N}{(p-\alpha)^2+\omega^2}=\frac{M(p-\alpha)}{(p-\alpha)^2+\omega^2}+\frac{N}{\omega}\cdot\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2},$$

а затем по таблице определяется оригинал: $f(t)=Me^{\alpha t}\cos\omega t+\dfrac{N}{\omega}e^{\alpha t}\sin\omega t$.

Выполнив аналогичные преобразования для дробей 4-го типа, можно найти для них оригиналы или по таблицам, или с помощью свертки.

Пример. Найти оригинал следующего изображения: $F(p)=\dfrac{2p^2-4p+8}{(p-2)^2(p^2+4)}$

Решение.

Представим эту дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2p^2-4p+8}{(p-2)^2(p^2+4)}=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{(p-2)^2}+\frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Найдем A, B, C, D методом неопределенных коэффициентов.

$2p^2-4p+8=A(p-2)(p^2+4)+B(p^2+4)+(p-2)^2(Cp+D)$

При

$p=2$ $\quad 8=8B$,т.е. $B=1$

p^3: $\quad 0=A+C$

p^2: $\quad 2=-2A+B+D-4C$

p^1: $\quad -4=4A+4C-4D \qquad D=1 (A+C=0)$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -2A-4C=0 \end{cases} \qquad A=0,\ C=0$$

Имеем $F(p)=\dfrac{1}{(p-2)^2}+\dfrac{1}{p^2+4}$. Применяя теоремы линейности и затухания, находим оригинал: $f(t)=te^{2t}+0.5\sin 2t$.

Пример. Найти оригинал следующего изображения: $F(p)=\dfrac{p^2+14}{(p^2+4)(p^2+9)}$

Решение.

Представим $F(p)$ в виде суммы простейших дробей:

$\dfrac{p^2+14}{(p^2+4)(p^2+9)}=\dfrac{Ap+B}{p^2+4}++\dfrac{Cp+D}{p^2+9}$, т.е.

$p^2+14=(Ap+B)(p^2+9)+(Cp+D)(p^2+4)$.

Приравниваем коэффициенты при равных степенях:

p^0: $\quad 14=9B+4D$

p^1: $\quad 0=9A+4C$

p^2: $\quad 1=B+D$

p^3: $\quad 0=A+C$. Решая соответствующие системы, получаем, что

$A=0;\ C=0;\ B=2;\ D=-1$.

$F(p)=\dfrac{2}{p^2+4}-\dfrac{1}{p^2+9}$, т.е. $f(t)=\sin 2t-\dfrac{1}{3}\sin 3t$.

При решении этих задач использовались теоремы единственности, линейности, затухания, таблица оригиналов и изображений.

4. Нахождение оригиналов с помощью теоремы запаздывания.

Если изображение имеет вид рациональной дроби, умноженной на $e^{-p\tau}$, где $\tau>0$, то сначала находят оригинал от рациональной дроби, а затем применяют теорему запаздывания.

Пример. Найти оригинал следующего изображения: $F(P)=\dfrac{e^{-2p}}{(p-3)(p^2-25)}$

Найдем сначала оригинал для дроби $\dfrac{1}{(p-3)(p-5)(p\quad+5)}$.

Разложим эту дробь на простейшие и найдем коэффициенты методом неопределенных коэффициентов

$$\frac{1}{(p-3)(p-5)(p\quad+5)}=\frac{A}{p-3}+\frac{B}{p-5}+\frac{C}{p\quad+5}$$

$$1=A(p-5)(p^2+5)+B(p-3)(p\quad+5)+C(p-3)(p-5)$$

При $p=3$ получим $1=-16A\;A=-1/16$

При $p=5$ получим $1=20B\;B=\frac{1}{20}$

При $p=5$ получим $1=80C\;C=1/80$

$$\frac{1}{(p-3)(p-5)(p\quad+5)}=-\frac{1/16}{p-3}+\frac{1/20}{p-5}+\frac{1/80}{p\quad+5},$$

оригинал равен $-\frac{1}{16}e^{3t}+\frac{1}{20}e^{5t}+\frac{1}{80}e^{-5t}$, а оригинал данного

$$f(t)=-\frac{1}{16}e^{3(t-2)}+\frac{1}{20}e^{5(t-2)}+\frac{1}{80}e^{-5(t-2)}.$$