ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Операционное исчисление относится к символическим исчислениям, в основе которых лежат построение математического анализа как системы формальных операций над искусственно введенным символом. Эта искусственность возникла из потребностей прикладных физических задач. В 20-ом веке в наибольшей степени развитию этих методов способствовал английский инженер–электрик О.Хевисайд, который использовал символическое исчисление в электротехнических расчетах.

Суть операционного исчисления состоит в том, что функции $f(t)$ действительного переменного t ставится в соответствие определенная функция $F(p)$ комплексного переменного p. При выполнении некоторых условий, накладываемых на функцию $f(t)$, такое соответствие является взаимнооднозначным, то есть каждой функции $f(t)$, удовлетворяющей таким условиям, соответствует единственная функция $F(p)$, и наоборот, каждой функции $F(p)$ соответствует единственная функция $f(t)$.

При этом оказывается, что операциям дифференцирования и интегрирования функций соответствуют операции умножения и деления функций $F(p)$ на переменную p. В результате этого становится возможным свести решение, скажем, системы дифференциальных уравнений для функций $f(t)$ к решению системы алгебраических уравнений для функций $F(p)$. Затем, по найденным решениям $F(p)$ алгебраической системы, можно найти соответствующие им функции $f(t)$, которые и будут решениями исходной системы дифференциальных уравнений. Таким образом, мы сводим более сложную задачу отыскания решений системы дифференциальных уравнений к более простой задаче отыскания решений алгебраической системы уравнений.

1. Оригинал и его изображение

Действительную переменную будем обозначать буквой t. Рассмотрим функцию (в общем случае комплекснозначную) действительной переменной t. Обозначим ее $f(t)$.

Определение. Функция $f(t)$ называется ***оригиналом*** или ***начальной функцией,*** если она удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $f(t)$ определена на всей числовой оси и $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) на любом конечном интервале оси Ot функция $f(t)$ или непрерывна, или имеет лишь конечное число точек разрыва и при том только первого рода, т. е. функция $f(t)$ кусочно-непрерывна на любом конечном интервале оси Ot. (Это условие можно заменить требованием локальной интегрируемости функции $f(t)$, т. е. интегрируемости на любом конечном интервале оси Ot.);

3) существуют такие числа $M > 0$ и $s_0 \geq 0$, что $\forall t \ (0 \leq t < \infty) \ |f(t)| \leq Me^{s_0 t}$,

т. е. модуль этой функции с ростом t возрастает не быстрее некоторой показательной функции.

Наименьшее число s_0, при котором выполнено условие (3), называется **показателем роста функции** $f(t)$. Говорят, что функция, удовлетворяющая условию (3), имеет ограниченный рост. (Показатель роста s_0 может быть, в общем случае, и отрицательным, т. е. необязательно требовать, чтобы $s_0 \geq 0$.)

Замечание 1 Рассматривая функции, определенные и при отрицательных значениях t (и отличные от тождественного нуля при этих значениях), в качестве оригиналов, мы будем предполагать, что условие (1) всегда выполнено, то есть, говоря, что функция $f(t)=\sin t$ является оригиналом, мы будем иметь в виду функцию $f(t)=\begin{cases}\sin t, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$, не оговаривая в дальнейшем этого специально (в целях упрощения записи оригиналов).

Замечание 2 Условие (3) требуется для существования некоторых несобственных интегралов, рассматриваемых в дальнейшем. В частности, условию (3) удовлетворяют все ограниченные функции (в этом случае, очевидно, $s_0=0$), а также степенные функции $f(t)=t^k\,(k>0)$.

Определение Функция $F(p)$ комплексной переменной $p=s+i\sigma$, связанная с оригиналом $f(t)$ равенством

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\,,\ (*)$$

называется ***изображением*** оригинала $f(t)$.

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, носит название *интеграла Лапласа* для функции $f(t)$. Преобразование, ставящее в соответствие оригиналу $f(t)$ его изображение $F(p)$, называется ***преобразованием Лапласа***. Теория преобразования Лапласа называется *операционным исчислением*. Функцию $F(p)$ называют часто *лапласовым изображением*, или *изображением по Лапласу*, или L-изображением.

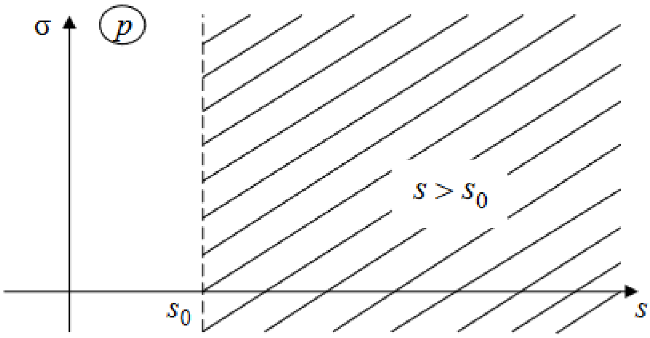
Тот факт, что $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, обозначают следующим образом:

$$L\{f(t)\}=F(p) \text{ или } F(p)\xrightarrow{\ \vdots\ } f(t) \text{ или } f(t)\xrightarrow{L} F(p) \text{ или } f(t)\doteqdot F(p)$$

Вывод. Операционное исчисление основано на преобразовании Лапласа, формула которого имеет вид: $F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$, где $f(t)$, в общем, комплексная функция вещественного аргумента *t*, $(0\leq t<\infty)$, а $F(p)$ – ее *Лаплас-образ* от комплексного переменного *p*. Эта формула, определяющая преобразование Лапласа, представляет собой оператор специального вида, для которого $f(t)$ является *оригиналом (прообразом)*, а функция $F(p)$ – *изображением (образом)*.

Теорема существования Для всякого оригинала $f(t)$ существует изображение $F(p)$, определенное в полуплоскости $s=\operatorname{Re} p>s_0$, где s_0 – показатель роста оригинала. В этой полуплоскости функция $F(p)$ является аналитической, имеет производную любого порядка в каждой точке полуплоскости и, кроме того, если $\operatorname{Re} p = s \to +\infty$, то $F(p) \to 0$

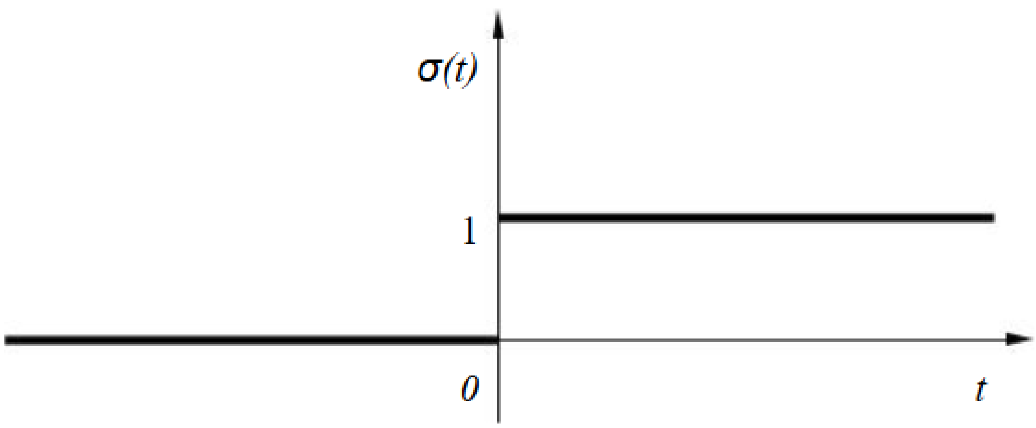
Замечание В дальнейшем всегда будем предполагать, что $\operatorname{Re} p > s_0$, то есть рассматривать изображение $F(p)$ лишь для тех значений *p*, для которых обеспечено существование этого изображения



Теорема единственности Если $F(p)$ является изображением двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают во всех точках, в которых они непрерывны.

Примеры образов простых функций

1. Найти изображение единичной функции Хевисайда.



$$1(t) = H(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}.$$

Поэтому $1 \leftarrow\!\!\!:\!\!\!- \dfrac{1}{p}$.

Единичная функция Хевисайда находит широкое применение в технических приложениях математики (в частности, в электротехнике).

2. Найти изображение показательной функции $f(t) = e^{at}$

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int\limits_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt}dt=\int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-a)t}dt=-\frac{1}{p-a}e^{-(p-a)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-a}$$

2. Свойства преобразования Лапласа

Для практического применения преобразования Лапласа необходимо знать не только изображения отдельных функций, но и правила отображения выполняемых над ними операций. Эти правила формулируются в виде многочисленных теорем, объединяемых общим названием "свойства преобразования Лапласа". Рассмотрим некоторые основные из них.

1.Теорема линейности. Если $f_1(t)\doteqdot F_1(p)$, $f_2(t)\doteqdot F_2(p)$ то для любых постоянных α,β и линейной комбинации оригиналов соответствует такая же линейная комбинация изображений, то есть $\alpha f_1(t)\pm\beta f_2(t)\doteqdot\alpha F_1(p)\pm\beta F_2(p)$.

2.Теорема подобия. Если $f(t)\doteqdot F(p)$, то $f(at)\doteqdot\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$то есть умножение аргумента оригинала на некоторое число *a* приводит к делению аргумента изображения и самого изображения на то же число (к подобному изменению изображения).

3. Теорема смещения изображения. Если $f(t)\doteqdot F(p)$, то для любого числа *a* (действительного или комплексного) $e^{at}f(t)\doteqdot F(p-a)$, то есть умножение оригинала на e^{at} приводит к смещению аргумента изображения на *a*.

4. Теорема запаздывания. Если $f(t)\doteqdot F(p)$, то для любого положительного τ $f(t-\tau)\doteqdot e^{-pt}F(p)$, то есть "включение" оригинала с запаздыванием на время τ равносильно умножению изображения на e^{-pt} .

5. Теорема дифференцирования оригинала. Если $f(t)\doteqdot F(p)$, и $f'(t), f''(t),\ldots$ – оригиналы, то $f'(t)\doteqdot pF(p)-f(0)$, то есть дифференцирование оригинала сводится к умножению его изображения на *p* и вычитанию начального значения функции

$$f''(t)\doteqdot p^2F(p)-p\,f(0)-f'(0)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f'''(t)\doteqdot p^3F(p)-p^2f(0)-p\,f'(0)-f''(0)$$

….

$$f^{(n)}(t)\doteqdot p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$$

В частности, если все начальные значения функции и ее производных равны нулю, то $f^{(n)}(t)\doteqdot p^nF(p)$.

Для практических приложений эта теорема является самой важной. Из нее следует, что дифференцирование в пространстве оригиналов заменяется существенно более простой операцией – умножением изображения на степень аргумента. Эта теорема лежит в основе операционного метода решения дифференциальных уравнений.

6. *Интегрирование оригинала.* Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то $\int_0^{\tau} f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}$.

Операции интегрирования в пространстве оригиналов соответствует операция деления в пространстве изображений.

7. Дифференцирование изображения

$$\text{Если } F(p) \xrightarrow{\cdot\cdot} f(t), \text{ то } F'(p) \xrightarrow{\cdot\cdot} (-t) f(t),$$

$$F''(p) \xrightarrow{\cdot\cdot} (-t)^2 f(t), \ldots, F^{(n)}(p) \xrightarrow{\cdot\cdot} (-t)^n f(t)$$

Дифференцированию в пространстве изображений соответствует операция умножения оригинала на аргумент с отрицательным знаком в пространстве оригиналов

8. Интегрированиеизображения

Если $f(t) \doteqdot F(p)$, $\frac{f(t)}{t}$ – оригинал, а интеграл $\int_p^{\infty} F(z)\,dz$ сходится, то

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^{\infty} F(z)\,dz$$

Операции деления на аргумент в пространстве оригиналов соответствует операция интегрирования в пределах от p до ∞ в пространстве изображений.

Свертка. Изображение свертки.

Определение*. *Сверткой двух функций-оригиналов $f_1 * f_2$ называется интеграл $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau$.

Свертки обладают следующими свойствами:

1. $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$
2. $(f_1 + f_2) * f_3 = f_1 * f_3 + f_2 * f_3$
3. $(\lambda f_1) * f_2 = \lambda (f_1 * f_2)$

Теорема об изображении свертки.

Если $f_1(t) \div F_1(p)$ и $f_2(t) \div F_2(p)$, то $f_1(t) * f_2(t) \div F_1(p) F_2(p)$.

Примеры. Восстановить оригинал, используя определение свертки.

1) $F(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}$

Решение.

$$\frac{1}{p^2(p-1)} = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p-1} \div t * e^t;$$

$$t*e^{t}=\int_{0}^{t}\tau e^{t-\tau}d\tau=-\tau e^{t-\tau}\Big|_{0}^{t}+\int_{0}^{t}e^{t-\tau}d\tau=-t-e^{t-\tau}\Big|_{0}^{t}=e^{t}-t-1=f(t).$$

2) $F(p)=\dfrac{p}{(p^{2}+1)^{2}}$

Решение.

$$\frac{1}{(p^{2}+1)^{2}}=\frac{1}{p^{2}+1}\cdot\frac{p}{p^{2}+1}\div\sin t*\cos t;$$

$$\sin t*\cos t=\int_{0}^{t}\sin\tau\cos(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_{0}^{t}(\sin t+\cos(2\tau-t)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\tau\sin t-\frac{1}{2}\cos(2\tau-t)\right)\Big|_{0}^{t}=\frac{1}{2}\left(t\sin t-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\cos t\right)=\frac{t}{2}\sin t=f(t).$$

Восстановление оригиналов по изображению.

Заключительный шаг схемы применения операционного исчисления состоит в нахождении оригинала по полученному изображению, этот шаг или эту операцию называют *обратным преобразованием Лапласа* и символически записывают следующим образом: $F(p)\div f(t)$.

Рассмотрим основные способы восстановления оригиналов по изображениям.

1 Восстановление оригиналов с помощью таблиц.

Этот способ является самым простым, но удобен в применении только, если изображение легко сводится к табличному виду элементарными преобразованиями.

Пример. Найти оригинал изображения $F(p)=5/(p^{2}-4)$.

Решение.

Приведем $F(p)$ к табличному виду

$F(p)=5\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{p^{2}-4}=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{2}{p^{2}-4}\Rightarrow$ по таблице $f(t)=2.5sh2t$.

2 Восстановление оригиналов с помощью свертки

3 Нахождение оригиналов с помощью разложения дроби на сумму простейших.

Если изображение является правильной дробью, то методом неопределенных коэффициентов эту дробь можно представить в виде суммы простейших дробей I-IV типов так, как это делалось при интегрировании рациональных дробей. При этом дробь 1-го типа $1/(p-\alpha)$ соответствуют оригиналу $e^{\alpha t}$, дробь 2-го типа $1/(p-\alpha)^{k}$ соответствует оригиналу $t^{k-1}e^{\alpha t}/(k-2)!$, дробь 3-го типа сначала преобразовывается к виду:

$\dfrac{M(p-\alpha)+N}{(p-\alpha)^{2}+\omega^{2}}=\dfrac{M(p-\alpha)}{(p-\alpha)^{2}+\omega^{2}}+\dfrac{N}{\omega}\cdot\dfrac{\omega}{(p-\alpha)^{2}+\omega^{2}}$, а затем по таблице определяется оригинал: $f(t)=Me^{\alpha t}\cos\omega t+\dfrac{N}{\omega}e^{\alpha t}\sin\omega t$.

Выполнив аналогичные преобразования для дробей 4-го типа, можно найти для них оригиналы или по таблицам, или с помощью свертки.

Пример. Найти оригинал следующего изображения: $F(p)=\dfrac{2p^2-4p+8}{(p-2)^2(p^2+4)}$

Решение.

Представим эту дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2p^2-4p+8}{(p-2)^2(p^2+4)}=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{(p-2)^2}+\frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Найдем A , B, C, D методом неопределенных коэффициентов.

$2p^2-4p+8=A(p-2)(p^2+4)+B(p^2+4)+(p-2)^2(Cp+D)$

При

$p=2$ $\quad 8=8B$,т.е. $B=1$

p^3: $\quad 0=A+C$

p^2: $\quad 2=-2A+B+D-4C$

p^1: $\quad -4=4A+4C-4D \qquad D=1(A+C=0)$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -2A-4C=0 \end{cases} \qquad A=0,\ C=0$$

Получили, что $F(p)=\dfrac{1}{(p-2)^2}+\dfrac{1}{p^2+4}$. Применяя теоремы линейности и затухания, находим оригинал: $f(t)=te^{2t}+0.5\sin 2t$.

4. Нахождение оригиналов с помощью теоремы запаздывания.

Если изображение имеет вид рациональной дроби, умноженной на $e^{-p\tau}$, где $\tau>0$, то сначала надо найти оригинал от рациональной дроби, а затем применить теорему запаздывания.

Пример. Найти оригинал следующего изображения: $F(P)=\dfrac{e^{-2p}}{(p-3)(p^2-25)}$

Найдем сначала оригинал для дроби $\dfrac{1}{(p-3)(p-5)(p\ \ +5)}$.

Разложим эту дробь на простейшие и найдем коэффициенты методом неопределенных коэффициентов

$$\frac{1}{(p-3)(p-5)(p\ \ +5)}=\frac{A}{p-3}+\frac{B}{p-5}+\frac{C}{p\ \ +5}$$

$1=A(p-5)(p^2+5)+B(p-3)(p\ \ +5)+C(p-3)(p-5)$

При $p=3$ получим $1=-16A\ A=-1/16$

При $p=5$ получим $1=20B\ B=\frac{1}{20}$

При $p=5$ получим $1=80C\ C=1/80$

$$\frac{1}{(p-3)(p-5)(p+5)}=-\frac{1/16}{p-3}+\frac{1/20}{p-5}+\frac{1/80}{p+5},$$

оригинал равен $-\frac{1}{16}e^{3t}+\frac{1}{20}e^{5t}+\frac{1}{80}e^{-5t}$, а оригинал данного

$$f(t)=-\frac{1}{16}e^{3(t-2)}+\frac{1}{20}e^{5(t-2)}+\frac{1}{80}e^{-5(t-2)}.$$

Рассмотрим две теоремы, называемые ***теоремами разложения***, позволяющие по заданному изображению $F(p)$ находить соответствующий ему оригинал $f(t)$.

Первая теорема разложения. Если разложение функции $F(p)$ в ряд по степеням $\frac{1}{p}$ имеет вид $F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+1}}$, то оригиналом является функция $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{t^n}{n!}$, где $t\geq 0$, ($f(t)=0$ при $t<0$).

Вторая теорема разложения. Если $F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}$ – рациональная функция, где $A(p)$ и $B(p)$ – многочлены, причем 1) степень многочлена $A(p)$ меньше степени многочлена $B(p)$, 2) $A(p)$ и $B(p)$ не имеют общих корней, т.е. дробь $\frac{A(p)}{B(p)}$ несократима. Тогда оригинал $f(t)$, соответствующий функции $F(p)$, имеет вид

$$f(t)=\sum_k\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to a_k}\left[(p-a_k)^{n_k}\frac{A(p)e^{pt}}{B(p)}\right]^{(n_k-1)}, \qquad (1)$$

где a_k - нули знаменателя $B(p)$, а n_k - их кратность. В правой части вычисляется предел от производной порядка (n_k-1) по комплексной переменной p при постоянном t.

В том случае, когда знаменатель $B(p)$-многочлен степени имеет только простые корни формула (1) упрощается

$$f(t)=\sum_k\frac{A(a_k)}{B'(a_k)}e^{a_k t} \qquad (2)$$

Теорема об умножении оригиналов: если $f(t)$ и $g(t)$ являются оригиналами с показателями роста α_0 , β_0 соответственно и $f(t)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\longleftarrow}}F(p)$, $g(t)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\longleftarrow}}G(p)$, то произведение $f(t)g(t)$ является оригиналом с показателем роста $\alpha_0+\beta_0$ и справедливо соотношение

$$f(t)g(t)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\longleftarrow}}\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}F(v)G(p-v)dv \qquad (3)$$

где $x>\alpha_0$, $\operatorname{Re}p>\alpha_0+\beta_0$.