ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2
ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА:
метрические пространства, метод итераций решения СЛАУ

ЗАДАНИЕ.

1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом простой итерации. Продолжать итерации до тех пор, пока расстояние между последовательными приближениями не станет меньше $\varepsilon = 10^{-2}$

А) в равномерной метрике $\rho_c(\overline{x},\overline{y}) = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i - y_i|$,   (1)

Б) в метрике Минковского $\rho_1(\overline{x},\overline{y}) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$.   (2)

2. Оценить погрешность приближенных значений в указанных метриках .

3. Методом Зейделя найти приближенное решение системы.

Пример и указания к выполнению задания.

Дана система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4. \end{cases} \qquad AX = b \qquad (3)$$

Утверждение. Для системы (3) метод итерации сходится, если

$$|a_{ii}| > \sum_{j\ne i}|a_{ij}| \text{ для всех } i \, ,$$

т.е. если модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы больше суммы модулей всех остальных коэффициентов (не считая свободных членов).

Алгоритм метода простых итераций

1. Привести систему $AX = b$ к виду

$$\begin{cases} x_1 = d_1 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4, \\ x_2 = d_2 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4, \\ x_3 = d_3 + c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + c_{34}x_4, \\ x_4 = d_4 + c_{41}x_1 + c_{42}x_2 + c_{43}x_3 + c_{44}x_4, \end{cases} \qquad X = D + CX \qquad (4)$$

Доказано, что если норма матрицы $\|C\| < 1$, то процесс итерации сходится к точному решению системы X^* при любом начальном векторе $X^{(0)}$.

Достаточные условия сходимости процесса итерации для норм матриц, согласованных с нормами векторов, порожденных метриками (1) и (2) соответственно

$$\|C\|_c = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}| \le \alpha_c < 1 \qquad \text{для равномерной метрики } (1),$$

или

$$\|C\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|c_{ij}| \le \alpha_1 < 1 \qquad \text{для метрики Минковского (2).}$$

2. Задать начальное приближение решения $X^{(0)}$ произвольно (на основании каких-либо предположений или грубой прикидки решения) или положить $X^{(0)} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$, Положить k=1.

3. Вычислить следующее приближение $X^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)}\right)$, где

$$\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= d_1 + c_{11}x_1^{(k-1)} + c_{12}x_2^{(k-1)} + c_{13}x_3^{(k-1)} + c_{14}x_4^{(k-1)},\\
x_2^{(k)} &= d_2 + c_{21}x_1^{(k-1)} + c_{22}x_2^{(k-1)} + c_{23}x_3^{(k-1)} + c_{24}x_4^{(k-1)},\\
x_3^{(k)} &= d_3 + c_{31}x_1^{(k-1)} + c_{32}x_2^{(k-1)} + c_{33}x_3^{(k-1)} + c_{34}x_4^{(k-1)},\\
x_4^{(k)} &= d_4 + c_{41}x_1^{(k-1)} + c_{42}x_2^{(k-1)} + c_{43}x_3^{(k-1)} + c_{44}x_4^{(k-1)}.
\end{aligned} \qquad (5)$$

4. Если выполнено условие $\rho\left(X^{(k-1)}, X^{(k)}\right) < \varepsilon$, процесс завершить и в качестве приближенного решения задачи принять $X^* \approx X^{(k)}$. Иначе положить k=k+1и перейти к пункту 3 алгоритма.

В частности,

$$\rho_c\left(X^{(k-1)}, X^{(k)}\right) = \max_{i=\overline{1,n}}\left|x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon,$$

$$\rho_1\left(X^{(k-1)}, X^{(k)}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon.$$

Оценка погрешности этого приближения дается одной из следующих формул:

$$\rho\left(X^*, X^{(k)}\right) \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\,\rho\left(X^{(k-1)}, X^{(k)}\right), \qquad (6)$$

$$\rho\left(X^*, X^{(k)}\right) \le \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\,\rho\left(X^{(0)}, X^{(1)}\right).$$

Значение множителя α определяется выбором метрики, в которой проверяется сходимость итерационной последовательности.

Модификацией метода простой итерации является **метод Зейделя**. Он заключается в том, что при вычислении (k)-го приближения неизвестного x_i при i >0 используются уже вычисленные ранее (k)-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$.

$$\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= d_1 + c_{11}x_1^{(k-1)} + c_{12}x_2^{(k-1)} + c_{13}x_3^{(k-1)} + c_{14}x_4^{(k-1)},\\
x_2^{(k)} &= d_2 + c_{21}x_1^{(k)} + c_{22}x_2^{(k-1)} + c_{23}x_3^{(k-1)} + c_{24}x_4^{(k-1)},\\
x_3^{(k)} &= d_3 + c_{31}x_1^{(k)} + c_{32}x_2^{(k)} + c_{33}x_3^{(k-1)} + c_{34}x_4^{(k-1)},\\
x_4^{(k)} &= d_4 + c_{41}x_1^{(k)} + c_{42}x_2^{(k)} + c_{43}x_3^{(k)} + c_{44}x_4^{(k-1)}.
\end{aligned} \qquad (7)$$

Указанные выше условия сходимости для метода простой итерации остаются верными и для метода Зейделя. Обычно метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации, хотя это бывает не всегда.

Пример 1. Методом простой итерации ε=0,01 решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+10x_3=14, \\ 10x_1+x_2+x_3=12, \\ 2x_1+10x_2+x_3=13 \end{cases}$$

1. Уравнения, входящие в систему, переставим так, чтобы выполнялось условие преобладания диагональных элементов (для той же цели можно использовать другие элементарные преобразования)

$$\begin{cases} 10x_1+x_2+x_3=12, \\ 2x_1+10x_2+x_3=13, \\ 2x_1+2x_2+10x_3=14. \end{cases}$$

где $|10|>|1|+|1|$, $|10|>|2|+|1|$, $|10|>|2|+|2|$, то есть диагональные элементы преобладают.

Выражая x_1 из первого уравнения, x_2 – из второго, а x_3 – из третьего, приводим систему к виду $X=CX+D$:

$$\begin{cases} x_1=-0,1x_2-0,1x_3+1,2 \\ x_2=-0,2x_1-0,1x_3+1,3 \\ x_3=-0,2x_1-0,2x_2+1,4 \end{cases}, \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}, \ D=\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}.$$

Заметим, $$\alpha_c=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|=\max\{0,2;0,3;0,4\}=0,4<1,$$

$$\alpha_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|c_{ij}|=\max\{0,4;0,3;0,2\}=0,4<1,$$

следовательно, условие сходимости выполнено.

2. Зададим $X^{(0)}=\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}$.

3. Выполним расчеты по формуле

$$X^{(k)}=\begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} x_1^{(k)}=-0,1x_2^{(k-1)}-0,1x_3^{(k-1)}+1,2 \\ x_2^{(k)}=-0,2x_1^{(k-1)}-0,1x_3^{(k-1)}+1,3 \\ x_3^{(k)}=-0,2x_1^{(k-1)}-0,2x_2^{(k-1)}+1,4 \end{cases}$$

до выполнения условия окончания по метрике $\rho\left(X^{(k)},X^{(k-1)}\right)<\varepsilon=0,01$ и результаты занесем в таблицу

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\rho_c\left(X^{(k-1)},X^{(k)}\right)= =\max\limits_{i=1,3}\left\|x_i^{(k-1)}-x_i^{(k)}\right\|$	$\rho_1\left(X^{(k-1)},X^{(k)}\right)= =\sum\limits_{i=1}^{3}\left\|x_i^{(k-1)}-x_i^{(k)}\right\|$
0	1,2000	1,3000	1,4000	–	–
1	0,9300	1,9200	0,9000	0,5	1,15
2	1,0180	1,0240	1,0300	0,13	0,322
3	0,9946	0,9934	0,9916	0,0384	0,0924
4	1,0015	1,0020	1,0024	0,0108	0,0263
5	0,9996	0,9995	0,9993	0,0031 < ε	0,0075 < ε

Расчет закончен, поскольку выполнено условие окончания

$$\left\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right\| = \rho\left(X^{(k)}, X^{(k-1)} \right) < \varepsilon = 0,01.$$

Приближенное решение задачи: $X^* \approx (0,99960; 0,99950; 0,9993)^T$.

Погрешность этих вычислений оценим по формуле (6):

$$\rho_c\left(X^*, X^{(k)}\right) \le \frac{\alpha_c}{1-\alpha_c}\ \rho_c\left(X^{(k-1)}, X^{(k)}\right) < \frac{0,4}{1-0,4} \cdot 0,0031 = 0,0021,$$

$$\rho_1\left(X^*, X^{(k)}\right) \le \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\ \rho_1\left(X^{(k-1)}, X^{(k)}\right) < \frac{0,4}{1-0,4} \cdot 0,0075 = 0,005.$$

Точное решение: $X^* = (1;1;1)^T$.

Пример 2. Методом Зейделя с точностью ε=0,001 решим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = -0,1x_2 - 0,1x_3 + 1,2 \\ x_2 = -0,2x_1 - 0,1x_3 + 1,3 \\ x_3 = -0,2x_1 - 0,2x_2 + 1,4 \end{cases}$$

Зададим $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1,2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$. В поставленной задаче ε=0,001.

Выполним расчеты по формуле

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0,1x_2^{(k)} - 0,1x_3^{(k)} + 1,2 \\ x_2^{(k+1)} = -0,2x_1^{(k+1)} - 0,1x_3^{(k)} + 1,3 \\ x_3^{(k+1)} = -0,2x_1^{(k+1)} - 0,2x_2^{(k+1)} + 1,4 \end{cases} \qquad (k=0,1,\ldots)$$

и результаты занесем в таблицу

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_c$
0	1,2000	0	0	–
1	1,2000	1,0600	0,9480	1,0600
2	0,9992	1,0054	0,9991	0,1008
3	0,9996	1,0002	1,0000	0,0052
4	1,0000	1,0000	1,0000	$0,0004 < \varepsilon$

Найденное решение $X^* = \begin{pmatrix} 1,0000 & 1,0000 & 1,0000 \end{pmatrix}^T$ является точным. Расчет завершен, поскольку выполнено условие окончания

$$\left\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \right\| = 0,0004 < \varepsilon = 0,001.$$