# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

## *ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ*

*Пример 1.* Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = x + 2$.

*Решение.* Фигура изображена на рис. 1.

Чтобы найти ее площадь, нужно найти точки пересечения параболы и прямой. Для этого решаем систему, составленную из уравнений этих линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 = x + 2,\ x^2 - x - 2 = 0, \\ x_1 = -1,\ x_2 = 2. \end{array}$$

Тогда площадь будет равна

$$S = \int_{-1}^{2} ((x+2) - x^2)dx = \left( \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{2} = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 4\frac{1}{2}.$$

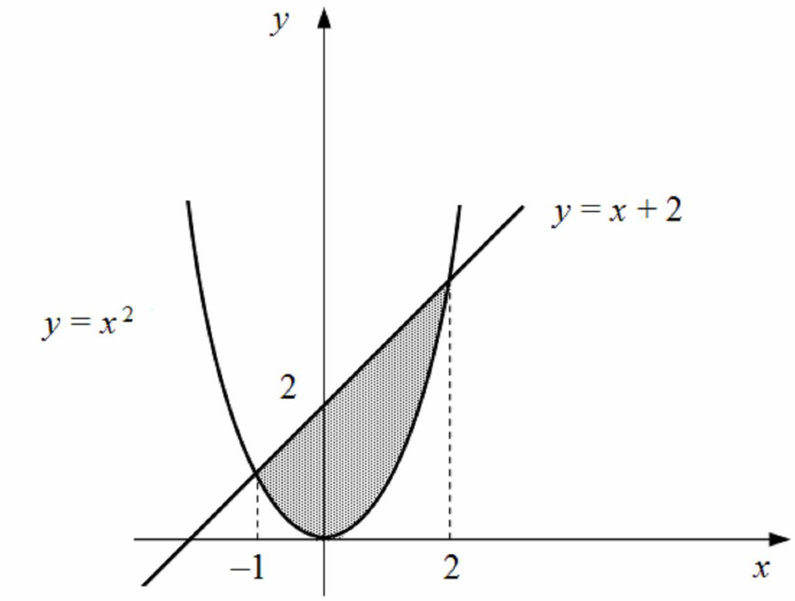
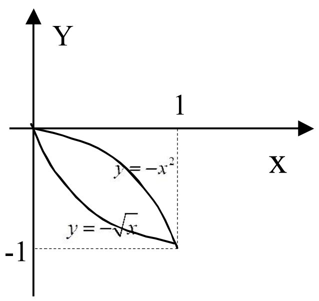



Рис. 1.

*Пример 2.* Вычислить площадь области, ограниченной линиями: $y = -x^2, \quad y = -\sqrt{x}$ (см. рис.2).

*Решение.* Точки пересечения указанных линий: $x = 0, \quad x = 1$. Одна из линий лежит не ниже другой. Площадь, ограниченная линиями, может быть вычислена следующим образом:




$$\int_0^1 ((-x^2) - (-\sqrt{x}))dx =$$

$$= \left. \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \right|_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Рис. 2.

*Пример 3*. Вычислить площадь фигуры (см. рис. 3) $D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1, a > 0, b > 0 \right\}$, ограниченной эллипсом.

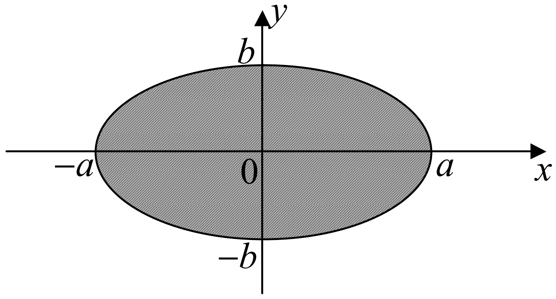



Рис. 3. Фигура, ограниченная эллипсом.

*Решение*. Фигура $D$ симметрична относительно координатных осей. Поэтому можно вычислить площадь части фигуры (расположенной в первой четверти) – криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, x \in [0, a]$. Имеем:

$$S_D = |D| = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \begin{bmatrix} x = a\sin t, & dx = a\cos t\, dt \\ 0 = a\sin t_1, & a = a\sin t_2 \\ t_1 = 0, & t_2 = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = 4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt =$$

$$= 2ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)dt = 2ab\left[t+\tfrac{1}{2}\sin 2t\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab\left(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{1}{2}\sin\pi - 0 - \tfrac{1}{2}\sin 0\right) =$$

$$= ab\pi.$$

*Пример 4*. Вычислить площадь фигуры $D$, ограниченной линиями $x = 2y^2$, $x = 3y^2 - 1$ (см. рис. 4).

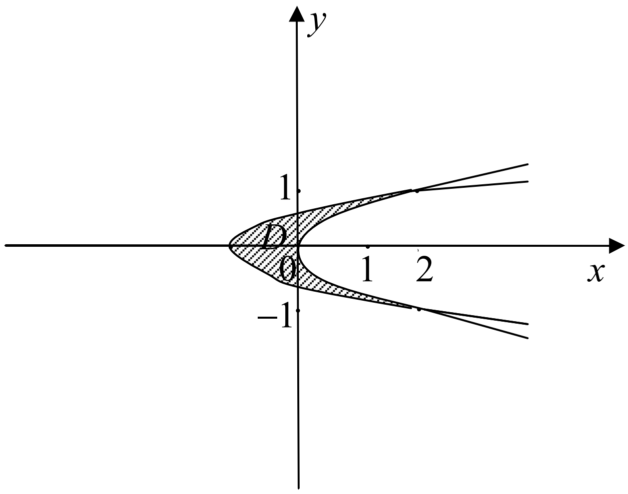



Рис.4.

*Решение.* Найдем точки пересечения парабол

$$\begin{cases} x = 2y^2, \\ x = 3y^2 - 1; \end{cases} \Rightarrow 2y^2 = 3y^2 - 1, \Leftrightarrow y^2 = 1,\ y_1 = -1,\ y_2 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 2.$$

Так как $D$ симметрична относительно оси $Ox$, то площадь найдем при изменении $y$ от 0 до 1 и результат умножим на 2.

$$S_D = |D| = 2\int\limits_0^1 \left|3y^2 - 1 - 2y^2\right| dy = 2\int\limits_0^1 \left(2y^2 - 3y^2 + 1\right) dy = 2\int\limits_0^1 \left(1 - y^2\right) dy =$$

$$= 2\left[y - \frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

*Пример 5*. Найти длину дуги кривой $y^2 = x^3$ от $x = 0$ до $x = 1$ ($y \geq 0$).

*Решение.* Запишем уравнение линии в явном виде: $y = x^{\frac{3}{2}}$. Найдем производную: $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ и подставим ее в формулу длины дуги:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}xdx} = \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2} \cdot \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(1+\frac{9}{4}\right)^{3/2} \cdot \frac{8}{27} - \frac{8}{27} = \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} \cdot \frac{8}{27} - \frac{8}{27} = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13}-1\right).$$

*Пример 6*. Найти объем тела, образованного вращением дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, отсекаемой прямой $x = 1$ (см. рис. 5).

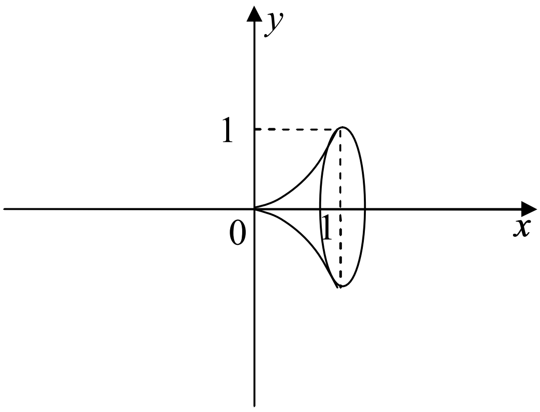



Рис. 5. Тело вращения.

*Решение*. Имеем: $V_x = \pi\int_a^b y^2\left(x\right)dx = \pi\int_0^1 x^3 dx = \pi\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

*Пример 7.* Найти объем тела $G$, ограниченного эллипсоидом: $G = \{(x,y,z): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{c^2} \le 1, a>0, b>0, c>0\}.$

*Решение*. Тело $G$ можно рассматривать расположенным вдоль оси $Ox$ между плоскостями $x=-a$ и $x=a$ (см. рис. 6). Площадь $S(C)$ поперечного сечения тела $G$ плоскостью $x=C$ - это площадь фигуры, ограниченной линией

$$\frac{C^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Преобразовав уравнение этой линии, получим:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{C^2}{a^2};$$

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{C^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{C^2}{a^2}\right)}=1,$$

т.е. уравнение эллипса с полуосями $b\sqrt{1-\frac{C^2}{a^2}}$ и $c\sqrt{1-\frac{C^2}{a^2}}$. Поэтому площадь $S(C)$ поперечного сечения тела $G$ плоскостью $x=C$ выражается формулой: $S(C)=\pi bc\left(1-\frac{C^2}{a^2}\right)$, $C\in[-a,a]$. Тогда объем $V=V_G=|G|$ тела $G$ можно вычислить следующим образом:

$$V_G=|G|=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi bc\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi bc\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]\Bigg|_0^a=$$

$$=2\pi bc\left(a-\frac{a^3}{3a^2}\right)=2\pi bc\frac{2a}{3}=\frac{4abc\pi}{3}.$$

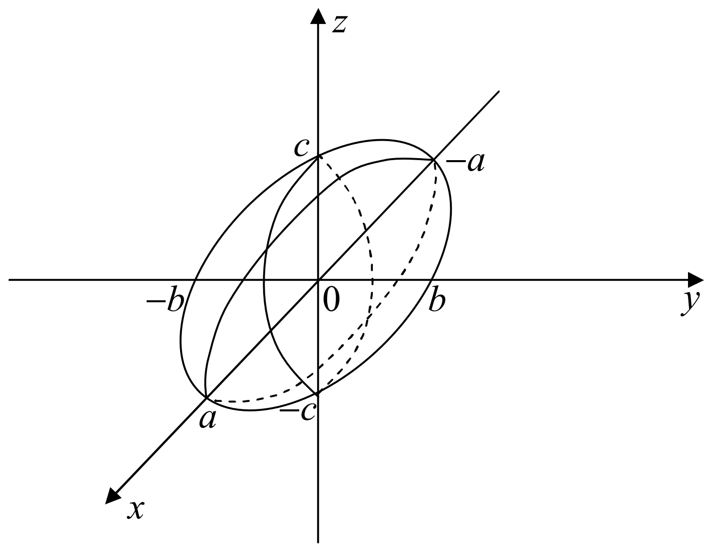



Рис. 6. Трехосный эллипсоид.