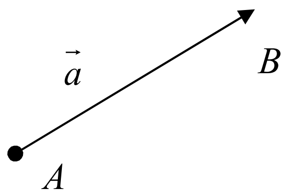
ВЕКТОРЫ

1. **Понятие вектора.**
2. **Линейные операции над векторами.**
3. **Векторный базис, координаты вектора.**
4. **Скалярное произведение двух векторов.**
5. **Векторное произведение двух векторов.**
6. **Смешанное произведение трех векторов.**

1. Понятие вектора

Вектор – это математический объект, характеризующийся величиной и направлением. Геометрической интерпретацией вектора служит направленный отрезок, который можно переносить параллельно самому себе (свободный вектор).

Вектор обозначается следующим образом: $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ (если вектор задан началом в точке A и концом в точке B). Длина вектора называется его модулем и обозначается $|\vec{a}|$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.



Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным*** вектором или ортом, а длина которого равна нулю – ***нулевым*** или нуль-вектором (обозначается $\vec{0}$, направление его произвольно).

Векторы, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой, называются ***коллинеарными*** и обозначаются $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют ***равными***, если их модули и направления совпадают.

Два коллинеарных вектора называются ***противоположными***, если их модули равны, а направления противоположны. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $(-\vec{a})$.

Векторы, лежащие в параллельных плоскостях (или в одной плоскости) называются ***компланарными***.

2. Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называют их сложение, вычитание, умножение вектора на число.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ отложен из конца вектора $\vec{a}$.

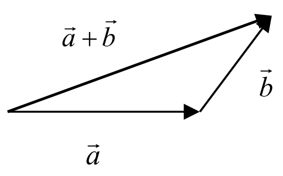
Вектор $\vec{a}+\vec{b}$ можно построить по правилу треугольника или параллелограмма.

Чтобы сложить несколько векторов, нужно перенести их параллельно самим себе так, чтобы начало каждого последующего вектора совпадало с концом предыдущего. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом первого, а конец – с концом последнего, представляет сумму слагаемых векторов (правило замыкания ломаной).

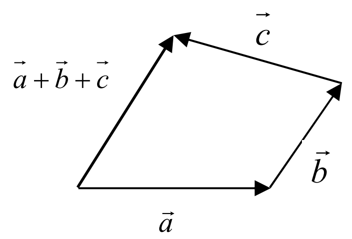
Разностью векторов $\vec{a}-\vec{b}$ называется вектор, равный сумме векторов $\vec{a}$ и $(-\vec{b})$, т. е. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, где $(-\vec{b})$ – вектор, противоположный $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}-\vec{b}$ можно построить по правилу параллелограмма.

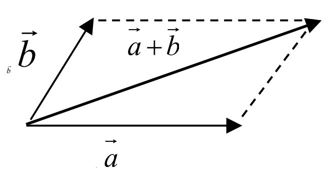
Правило треугольника

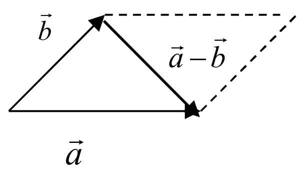


Правило замыкания ломаной



Правило параллелограмма





Произведением вектора $\vec{a}$ ***на число*** λ называется вектор $\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}$, модуль $|\vec{b}|$ которого равен $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda<0$.

Отсюда – условие коллинеарности двух векторов:

$$\boxed{\vec{a}\,\|\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{b}=\lambda\cdot\vec{a} \text{ или } \vec{a}=\lambda\vec{b}}$$

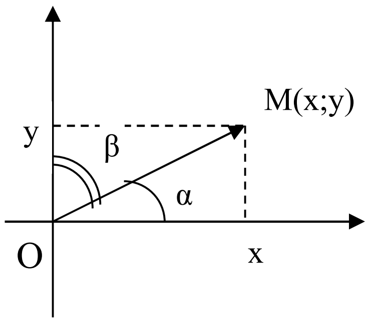
Основные свойства линейных операций над векторами:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; 2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$; 3) $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$; 4) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\cdot\mu)\vec{a}$; 5) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a}$;	6) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$, $\vec{a}\cdot 0=\vec{0}$; 7) $-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}$; 8) $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$; 9) $\vec{a}\cdot 1=\vec{a}$; 10) если $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, то $\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$ и $\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$.

3. Векторный базис, координаты вектора

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy и $\vec{a}$ – произвольный вектор, лежащий в этой плоскости.

Переместим $\vec{a}$, сохраняя его длину и направление так, чтобы его начало совпало с началом координат. Получим вектор $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$.



Обозначим через $(x;y)$ координаты точки M, через α и β – углы, которые образует вектор $\overrightarrow{OM}$ с положительными направлениями осей Ox и Oy; $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ называются ***направляющими косинусами*** вектора $\overrightarrow{OM}$.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется число, равное произведению модуля вектора на косинус угла между вектором и осью; обозначается $np_l\vec{a}$.

Тогда $\text{np}_{Ox}\overrightarrow{OM}=\left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\alpha=x$, $\text{np}_{Oy}\overrightarrow{OM}=\left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\beta=y$.

Координатами вектора на плоскости Oxy называются его проекции на координатные оси.

Следовательно, x и y – координаты вектора $\overrightarrow{OM}$. Записывают $\overrightarrow{OM}=\{x;y\}$.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ называют радиус-вектором точки М. Точка и ее радиус-вектор имеют одинаковые координаты. Из $\triangle OMP$ получаем $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

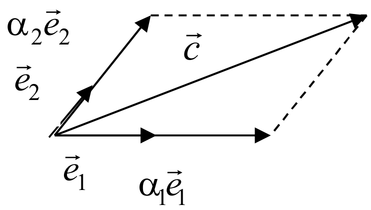
Исходный вектор $\vec{a}$ имеет ту же длину, образует такие же углы с осями координат, что и $\overrightarrow{OM}$, поэтому вектор $\vec{a}$ имеет такие же координаты: $\vec{a} = \{x, y\}$ и $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Т. к. $x = |\vec{a}|\cos\alpha$, $y = |\vec{a}|\cos\beta$, то имеем

$\cos\alpha = \frac{x}{\lvert\vec{a}\rvert} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos\beta = \frac{y}{\lvert\vec{a}\rvert} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ – направляющие косинусы вектора $\vec{a} = \{x, y\}$

Вектор $\vec{e}_a = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$ является единичным вектором направления вектора $\vec{a}$.

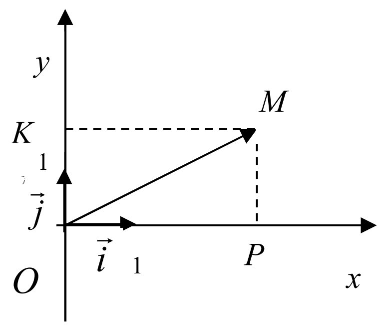
Базис на плоскости – это два произвольных неколлинеарных вектора на этой плоскости.



Пусть векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ образуют базис на плоскости. Тогда произвольный вектор $\vec{c}$ этой плоскости может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ (разложен по векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$):

$$\boxed{\vec{c} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2}$$

Здесь α_1 и α_2 – координаты вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.



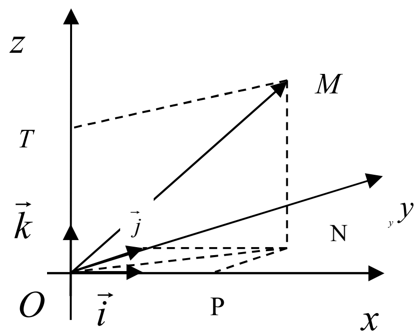
Единичные векторы $\vec{i} = \{1, 0\}$ и $\vec{j} = \{0, 1\}$ образуют базис на плоскости Oxy, их называют декартовыми ортами на плоскости.

Т. к. $\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OK} = x\vec{i} + y\vec{j}$,

то $\{x, y\}$ – координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}$.

Аналогично пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ и точка $M(x; y; z)$.

Любые три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве.



Введем базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, где $\vec{i} = \{1; 0; 0\}, \vec{j} = \{0; 1; 0\}, \vec{k} = \{0; 0; 1\}$ – декартовы орты на осях Ox, Oy, Oz соответственно.

Для радиус-вектора точки M имеет место разложение $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Следовательно, $\{x, y, z\}$ - координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

В дальнейшем для удобства координаты вектора $\vec{a}$ будем обозначать $\{x_a, y_a, z_a\}$. Пусть α, β, γ – углы, образованные вектором $\vec{a}$ с осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно. Тогда имеют место формулы

$$x_a = |\vec{a}|\cos\alpha,\ y_a = |\vec{a}|\cos\beta,\ z_a = |\vec{a}|\cos\gamma,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2},\ \vec{e}_a = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

$$\cos\alpha = \frac{x_a}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{y_a}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{z_a}{|\vec{a}|},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

В дальнейшем будем считать, что в пространстве задана декартова прямоугольная система координат.

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ заданы своими координатами в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$, $\vec{b} = \{x_b; y_b; z_b\} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$. Тогда

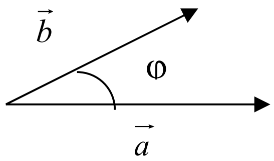
$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a} + \vec{b} = \{x_a + x_b;\ y_a + y_b;\ z_a + z_b\} \\ \vec{a} - \vec{b} = \{x_a - x_b;\ y_a - y_b;\ z_a - z_b\} \\ \lambda\vec{a} = \{\lambda x_a;\ \lambda y_a;\ \lambda z_a\} \\ \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_a}{x_b} = \dfrac{y_a}{y_b} = \dfrac{z_a}{z_b} \\ \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_a = x_b,\ y_a = y_b,\ z_a = z_b \end{array}}$$

Т.к. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, то для каждого вектора $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(x_A; y_A; z_A)$ и концом в точке $B(x_B; y_B; z_B)$ его координаты равны

$$x_d = x_B - x_A;\ y_d = y_B - y_A;\ z_d = z_B - z_A.$$

4. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется ***число*** (скаляр), равное произведению модулей этих векторов на косинус угла $\vec{a} \hat{\ } \vec{b} = \varphi$ между ними:



$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \widehat{\vec{a}\vec{b}}.}$$

Если векторы заданы в прямоугольной декартовой системе координат координатами $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$, $\vec{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$, то

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}$$

Свойства скалярного произведения:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1.\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}; & 2.\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}; \\ 3.\ \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2; & 4.\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}. \end{array}}$$

Некоторые приложения скалярного произведения:

1) условие ортогональности (перпендикулярности) ненулевых векторов:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0;$$

2) косинус угла между двумя ненулевыми векторами равен:

$$\cos \widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}};$$

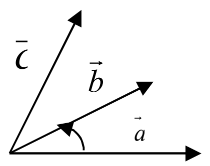
3) проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ равна:

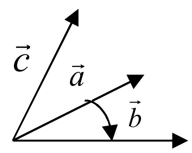
$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}};$$

4) работа A постоянной по величине и направлению силы $\vec{F}$ по перемещению материальной точки на вектор $\vec{s}$ равна $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$ (физический смысл скалярного произведения).

5. Векторное произведение двух векторов

Три некомпланарных, упорядоченных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, приведенные к общему началу, называют ***правой*** тройкой векторов, если кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ против хода часовой стрелки.





Если же этот поворот виден по ходу часовой стрелки, то тройка векторов называется ***левой***.

Декартов базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образует правую тройку.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется ***вектор*** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, обладающий свойствами:

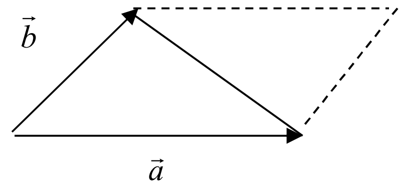
1) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;

2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку;

3) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$.

Свойства векторного произведения

<table>
<tr><td colspan="2">1. Если $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$, $\vec{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$, то
$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}$.</td></tr>
<tr><td>2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$</td><td rowspan="2">5. Площади параллелограмма и треугольника
$S_{\square} = |\vec{a} \times \vec{b}|$ $S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$</td></tr>
<tr><td>3.
$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$</td></tr>
</table>

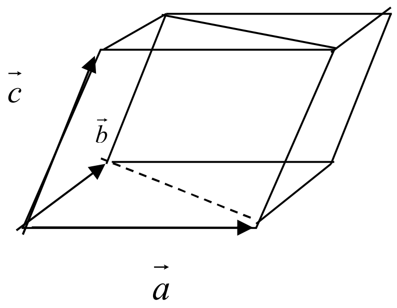
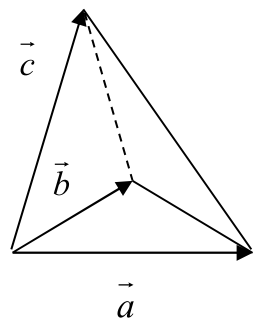
4. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$ при $\lvert\vec{a}\rvert\neq 0, \lvert\vec{b}\rvert\neq 0$	

6. Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ и вектора $\vec{c}$.

По определению $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Свойства смешанного произведения

<table>
<tr><td colspan="2">1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Если $\vec{a}=\{x_a;\, y_a;\, z_a\}$, $\vec{b}=\{x_b;\, y_b;\, z_b\}$, $\vec{c}=\{x_c;\, y_c;\, z_c\}$, то
$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}=x_a\begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{vmatrix}-y_a\begin{vmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{vmatrix}+z_a\begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix}$</td></tr>
<tr><td>3. Объем параллелепипеда, треугольной призмы

$V_{\text{пар}}=\lvert\vec{a}\vec{b}\vec{c}\rvert$ $\quad V_{\text{призмы}}=\frac{1}{2}\lvert\vec{a}\vec{b}\vec{c}\rvert$</td><td>4. Объем пирамиды

$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\lvert\vec{a}\vec{b}\vec{c}\rvert$</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны</td></tr>
</table>