ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1.Интегрирование ЛНДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Пример 1. Найти общее решение ЛНДУ $y''-6y'=36x$.

Решение. Общее решение ЛНДУ равно $y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$.

Найдем $y_{оо}$ - общее решение ЛОДУ

$$y''-6y'=0,$$

соответствующего данному ЛНДУ. Составляем характеристическое уравнение ЛОДУ:

$$\lambda^2-6\lambda=0$$

и находим его корни: $\lambda_1=6,\lambda_2=0$. Общее решение ЛОДУ имеет вид $y_{OO}=C_1+C_2e^{6x}$.

Найдем $y_{чн}$. Поскольку многочлен в правой части ЛНДУ имеет степень $n=1$ и контрольная постоянная $\alpha+\beta i=0+0i=0$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения, частное решение ЛНДУ ищем в виде многочлена 1-ой степени общего вида, умноженного на x:

$$y_{чн}=x(Ax+B)=Ax^2+Bx.$$

Тогда

$$y'=2Ax+B,\ y''=2A.$$

Подставляя в исходное ЛНДУ, имеем:

$$2A-6\left(2Ax+B\right)=36x\Rightarrow-12Ax+\left(2A-6B\right)=36x.$$

Приравниваем коэффициенты при x и свободные члены, получим

$$\begin{cases}-12A=36\\2A-6B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-3\\B=-1\end{cases}\Rightarrow\quad y_{чн}=-3x^2-x.$$

Тогда общее решение ЛНДУ имеет вид $y_{он}=C_1+C_2e^{6x}-3x^2-x$.

Пример 2. Найти общее решение ЛНДУ $y''+5y'+6y=18x^2-1$.

Решение. Общее решение ЛНДУ равно $y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$.

Найдем $y_{оо}$ - общее решение ЛОДУ

$$y''+5y'+6=0,$$

соответствующего данному ЛНДУ. Составляем характеристическое уравнение ЛОДУ:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

и находим его корни: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$. Общее решение ЛОДУ имеет вид $y_{oo} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$.

Найдем $y_{чн}$. Поскольку многочлен в правой части ЛНДУ имеет степень 2 и контрольная постоянная $\alpha + \beta i = 0 + 0i = 0$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, частное решение ЛНДУ ищем в виде многочлена 2-ой степени общего вида (умножать не надо):

$$y_{чн} = y = Ax^2 + Bx + C.$$

Подставляя в исходное ЛДУ, имеем:

$$y'' + 5y' + 6y = 2A + 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = 18x^2 - 1.$$

Приравнивая коэффициенты при различных степенях x, для нахождения коэффициентов A, B и C, получаем систему

$$\begin{cases} 6A = 18, \\ 10A + 6B = 0, \\ 2A + 5B + 6C = -1, \end{cases}$$

решая которую, получаем $A = 3, B = -5, C = 3$ и $y_H = 3x^2 - 5x + 3$.

Общее решение ЛНДУ имеет вид $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + 3x^2 - 5x + 3.$

Пример 3. Найти общее решение ЛНДУ $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}$.

Решение. Общее решение ЛНДУ равно $y_{он} = y_{oo} + y_{чн}$.

Найдем y_{oo} - общее решение ЛОДУ

$$y'' - 6y' + 9 = 0,$$

соответствующего данному ЛНДУ. Составляем характеристическое уравнение ЛОДУ:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

и находим его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3$. Общее решение ЛОДУ имеет вид $y_{OO} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.

Найдем $y_{чн}$. Поскольку многочлен в правой части ЛНДУ имеет степень $n = 0$ и контрольная постоянная $\alpha + \beta i = 3 + 0i = 3$ совпадает ни с двумя корнями характеристического уравнения, частное решение ЛНДУ ищем в виде

$$y_{чн} = Ax^2 e^{3x}.$$

Тогда $y' = 2Axe^{3x} + 3Ax^2e^{3x}$, $y'' = 2Ae^{3x} + 12Axe^{3x} + 9Ax^2e^{3x}$. Подставляя в исходное ЛНДУ, имеем:

$$2Ae^{3x} + 12Axe^{3x} + 9Ax^2e^{3x} - 6\left(2Axe^{3x} + 3Ax^2e^{3x}\right) + 9Ax^2e^{3x} = 4e^{3x} \Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow A = 2$$

. Следовательно $y_{хн} = 2x^2e^{3x}$. Тогда общее решение ЛНДУ имеет вид $y_{он} = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + 2x^2e^{3x}$.

Пример 4. Найти общее решение ЛНДУ $y'' + y' - 2y = -20\sin(2x)$.

Решение. Общее решение ЛНДУ равно $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$.

Найдем $y_{оо}$ - общее решение ЛОДУ

$$y'' + y' - 2y = 0,$$

соответствующего данному ЛНДУ. Составляем характеристическое уравнение ЛОДУ:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

и находим его корни: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$. Общее решение ЛОДУ имеет вид $y_{оо} = C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

Найдем $y_{чн}$. Поскольку в правой части ЛНДУ контрольная постоянная $\alpha + \beta i = 0 + 2i = 2i$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного ЛДУ ищем в виде

$$y = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Подставляя в исходное ЛНДУ, имеем:

$$y'' + y' - 2y = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) - 2A\sin(2x) +$$
$$+2B\cos(2x) - 2(A\cos(2x) + B\sin(2x)) \equiv -20\sin(2x).$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$, для нахождения коэффициентов A и B, получаем систему

$$\begin{cases} -4A + 2B - 2A = 0, \\ -4B - 2A - 2B = -20, \end{cases}$$

решая которую, получаем $A = 1, B = 3$ и $y_H = \cos(2x) + 3\sin(2x)$.

Общее решение неоднородного ЛДУ имеет вид $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \cos(2x) + 3\sin(2x)$.

Пример 5. Найти общее решение ЛНДУ $y'' + 4y = 2\cos 3x$.

Решение. Общее решение ЛНДУ равно $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$.

Найдем $y_{оо}$ - общее решение ЛОДУ

$$y'' + 4y = 0,$$

соответствующего данному ЛНДУ. Составляем характеристическое уравнение ЛОДУ:

$$\lambda^2+4=0$$

и находим его корни: $\lambda_1=2i, \lambda_2=-2i$. Общее решение ЛОДУ имеет вид $y_{oo}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

Найдем $y_{чн}$. Поскольку в правой части ЛНДУ контрольная постоянная $\alpha+\beta i=0+3i=3i$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, частное решение ЛНДУ ищем в виде

$$y_{чн}=A\cos 3x+B\sin 3x.$$

Тогда $y'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x,\ y''=-9A\cos 3x-9B\sin 3x$. Подставляя в исходное ЛНДУ, имеем:

$$-9A\cos 3x-9B\sin 3x+4A\cos 3x+4B\sin 3x=2\cos 3x$$

$$-5A\cos 3x-5B\sin 3x=2\cos 3x$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos 3x$ *и* $\sin 3x$, получим

$$\begin{cases}-5A=2\\-5B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-0,4\\B=0\end{cases}\Rightarrow\quad y_{чн}=-0,4\cos 3x.$$

Тогда общее решение ЛНДУ имеет вид $y_{он}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-0,4\cos 3x$.

Пример 6. Найти частное решение уравнения с начальными условиями

$$\begin{cases}y''-2y'+y=(x-1)e^x,\\y(0)=1,\\y'(0)=3.\end{cases}$$

Решение. Общее решение ЛНДУ равно $y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$.

Найдем $y_{оо}$ - общее решение ЛОДУ

$$y''-2y'+y=0,$$

соответствующего данному ЛНДУ. Составляем характеристическое уравнение ЛОДУ:

$$\lambda^2-2\lambda+1=0$$

и находим его корни: $\lambda_1=\lambda_2=1$. Общее решение ЛОДУ имеет вид $y(x)=C_1e^x+C_2xe^x$.

Найдем $y_{чн}$. Поскольку многочлен, стоящий при e^x в правой части ЛНДУ, имеет степень $n=1$ и контрольная постоянная

$\alpha+\beta i=1+0\cdot i=1$ совпадает с двумя корнями характеристического уравнения, частное решение ЛНДУ ищем в виде многочлена 1-ой степени общего вида, умноженного на e^x и на x^2:

$$y_{чн}=x^2(Ax+B)e^x=(Ax^3+Bx^2)e^x.$$

Тогда его производные

$$y'=(3Ax^2+2Bx)e^x+(Ax^3+Bx^2)e^x=(Ax^3+(3A+B)x^2+2Bx)e^x,$$

$$y''=(3Ax^2+2(3A+B)x+2B)e^x+(Ax^3+(3A+B)x^2+2Bx)e^x=$$

$$=(Ax^3+(6A+B)x^2+(6A+4B)x+2B)e^x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$(Ax^3+(6A+B)x^2+(6A+4B)x+2B)e^x-$$
$$-2(Ax^3+(3A+B)x^2+2Bx)e^x+(Ax^3+Bx^2)e^x=(x-1)e^x$$

Вынесем за скобку в левой части равенства множитель $e^x\neq 0$ и сократим на него обе части равенства. Коэффициенты при степенях x будут:

$$x^3(A-2A+A)+x^2(6A+B-2(3A+B)+B)+x(6A+4B-4B)+2B=x-1$$

или

$$6Ax+2B=x-1.$$

Совершенно закономерно, что при старших степенях, в данном случае при x^3 и x^2, коэффициенты обращаются в нуль.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений

$$\begin{cases}6A=1,\\ 2B=-1;\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}A=\dfrac{1}{6},\\ B=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид $y_{чн}=\left(\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}\right)e^x$, а общее решение неоднородного уравнения –

$$y_{он}=C_1e^x+C_2xe^x+\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}\right)e^x.$$

Для определения постоянных нужно найти производную общего решения:

$$y' = C_1e^x + C_2e^x + C_2xe^x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^x + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}\right)e^x.$$

Тогда, подставляя значение $x = 0$ и используя начальные условия, получим систему уравнений

$$\begin{cases} y(0) = 1 = C_1, \\ y'(0) = 3 = C_1 + C_2. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ и частное решение неоднородного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, будет иметь вид:

$$y = e^x + 2xe^x + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}\right)e^x.$$

2.Вид частного решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Пример 7. Указать общий вид (с неопределенными коэффициентами) частного решения ЛНДУ $y'' + y = f(x)$, если:

а) $f(x) = x^3$, б) $f(x) = \dfrac{x}{e^{2x}}$, в) $f(x) = (x+1)\cos x + x^2 \sin x$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ соответствующего ЛОДУ и находим его корни: $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Тогда:

а) поскольку контрольная постоянная $\alpha + \beta i = 0 + 0i = 0$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, частное решение ЛНДУ ищется в виде $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$;

б) поскольку контрольная постоянная $\alpha + \beta i = -2 + 0i = -2$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, частное решение ЛНДУ ищется в виде $y = e^{-2x}(Ax + B)$;

в) поскольку $\nu = \max\{m; n\} = \max\{1; 2\} = 2$ и контрольная постоянная $\alpha + \beta i = 0 + 1 \cdot i = i$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного ЛДУ ищется в виде $y = x[(A_1x^2 + A_2x + A_3)\cos x + (B_1x^2 + B_2x + B_3)\sin x]$.

Пример 8. Определить общий вид частных решений неоднородного дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 3y = f(x)$ при различных правых частях:

а) $e^{3x}(x^3 - 1)$; б) $e^{-3x}\sin 2x$; в) $xe^{-3x} - e^{3x}(x^2 + x)$;

г) $x^2 e^{-3x} + xe^{-x}$; д) $2e^{-3x} + \cos 3x$.

Решение. Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$.

а) Так как многочлен, стоящий при e^{3x} в правой части ЛНДУ, имеет степень 3 и контрольная постоянная $\alpha + \beta i = 3 + 0 \cdot i = 3$ не равняется ни одному из корней характеристического уравнения, то частное решение ЛНДУ ищется в виде многочлена 3-ой степени общего вида, умноженного на e^{3x}:

$$y^* = e^{3x}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3).$$

б) Комплексное число, характеризующее правую часть $\alpha + \beta i = -3 + 2i$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение будет:

$$y^* = e^{-3x}(A_0 \cos 2x + B_0 \sin 2x).$$

в) Правая часть уравнения состоит из двух слагаемых, соответственно частное решение ЛНДУ

$$y^* = y_1^* + y_2^*,$$

где y_1^* – частное решение, которое соответствует первому слагаемому, а y_2^* – второму слагаемому правой части. Для первого слагаемого $\alpha + \beta i = -3 + 0 \cdot i = -3 = \lambda_1$, поэтому в частном решении следует домножить на x:

$$y_1^* = x(A_0 + A_1 x)e^{-3x}.$$

Для второго слагаемого контрольная постоянная $\alpha + \beta i = 3 + 0 \cdot i = 3$ не равная ни одному из корней характеристического уравнения, поэтому решение будет:

$$y_2^* = (B_0 + B_1 x + B_2 x^2)e^{3x}.$$

Следовательно, $y^* = y_1^* + y_2^* = x(A_0 + A_1 x)e^{-3x} + (B_0 + B_1 x + B_2 x^2)e^{3x}$.

г) Решение имеет вид:

$$y^* = y_1^* + y_2^*,$$

где для первого слагаемого y_1^* величина $\alpha+\beta i=-3+0\cdot i=-3=\lambda_1$ и частное решение будет:

$$y_1^* = x(A_0 + A_1x + A_2x^2)e^{-3x} ,$$

для второго слагаемого y_2^* величина $\alpha+\beta i=-1+0\cdot i=-1=\lambda_2$ и частное решение:

$$y_2^* = x(B_0 + B_1x)e^{-x} .$$

Тогда $y^* = y_1^* + y_2^* = x(A_0 + A_1x + A_2x^2)e^{-3x} + x(B_0 + B_1x)e^{-x}$.

д) Снова $y^* = y_1^* + y_2^*$. Для y_1^* число $\alpha+\beta i=-1+0\cdot i=-1=\lambda_2$. Тогда $y_1^* = xA_0e^{-x}$.

Для y_2^* комплексное число, характеризующее правую часть, $\alpha+\beta i=0+3\cdot i=3i$ не совпадает с корнями характеристического уравнения. Значит, $y_2^* = B_0\cos 3x + D_0\sin 3x$.

Следовательно, $y^* = y_1^* + y_2^* = xA_0e^{-x} + B_0\cos 3x + D_0\sin 3x$.

Пример 9. Найти общий вид частных решений ЛНДУ $y''' + 4y' = f(x)$ при различных правых частях:

а) $3x + 5$; б) $x\cos 2x$; в) $x^2\sin x$.

Решение. Характеристическое уравнение данного ЛНДУ 3-го порядка имеет вид

$$\lambda^3 + 4\lambda = 0 ,$$

его корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 2i$. Общее решение будет:

$$y(x) = C_1 + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x .$$

а) $f(x) = 3x + 5$. Так как величина $\alpha+\beta i=0+0\cdot i=0=\lambda_1$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения, то частное решение будет:

$$y^* = (A_0 + A_1x)x .$$

б) $f(x) = x\cos 2x$, так как число $\alpha+\beta i=0+2\cdot i=2i$, характеризующее правую часть, равно одному из корней характеристического уравнения, то частное решение будет:

$$y^* = x((A_0 + A_1x)\cos 2x + (B_0 + B_1x)\sin 2x) .$$

в) $f(x)=x^2\sin x$, так как $\alpha+\beta i=0+1\cdot i=i$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, то частное решение будет:

$$y^*=(A_0+A_1x+A_2x^2)\cos x+(B_0+B_1x+B_2x^2)\sin x\,.$$

3.Метод вариации произвольных постоянных

Пример 10. Найти общее решение ЛНДУ $y''+y=\operatorname{tg}x$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение соответствующего ЛОДУ: $\lambda^2+1=0$ и находим его корни: $\lambda_1=i,\lambda_2=-i$. Определяем фундаментальную систему

$$y_1(x)=\sin x,\ y_2(x)=\cos x$$

и общее решение ЛОДУ:

$$y_{OO}(x)=C_1\sin x+C_2\cos x\,.$$

В соответствии с методом вариации произвольных постоянных, ищем частное решение неоднородного ЛДУ в виде

$$y_H(x)=C_1(x)\sin x+C_2(x)\cos x\,,$$

где

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot\sin x+C_2'(x)\cdot\cos x=0,\\ C_1'(x)\cdot\cos x+C_2'(x)\cdot(-\sin x)=\operatorname{tg}x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_1'(x)=\sin x,\\ C_2'(x)=-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}, \end{cases}$$

откуда

$$C_1(x)=-\cos x,\ C_2(x)=\sin x+\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|.$$

Тогда

$$y_H(x)=C_1(x)\sin x+$$

$$+C_2(x)\cos x=(-\cos x)\sin x+\left(\sin x+\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|\right)\cos x=\cos x\cdot\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|$$

и общее решение исходного ЛДУ имеет вид

$$y=y_{OO}(x)+y_H(x)=C_1\sin x+C_2\cos x+\cos x\cdot\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|.$$