ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Решить ДУ первого порядка: $y' = xe^{-x}$.

Решение. Интегрируем: $y = \int xe^{-x}dx$. Интегрируем по частям:

$$y = \int xe^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = x, du = dx \\ e^{-x}dx = dv, v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Пример 2. Решить ДУ второго порядка: $y'' = \sin x$.

Решение. Интегрируем: $y' = \int \sin x dx = -\cos x + C_1$. Интегрируем повторно: $y = -\int (\cos x + C_1)dx = -\sin x + C_1 x + C_2$.

Пример 3. Найти общее решение ДУ $y''' = \dfrac{2}{x^3}$.

Решение. Трижды интегрируя: $y'' = 2\int x^{-3}dx = -x^{-2} + C_1 \Rightarrow$ $y' = -\int (x^{-2} + C_1)dx = x^{-1} + C_1 x + C_2$, получаем общее решение в виде $y = \ln|x| + \dfrac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3$.

Пример 4. Решить начальную задачу Коши для ДУ второго порядка: $y'' = 6x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. Интегрируем: $y' = 3x^2 + C_1$. Интегрируем повторно: $y = x^3 + C_1 x + C_2$. Получено общее решение (общий вид всех решений) данного ДУ. Здесь C_1, C_2 - произвольные постоянные, при любых их значениях полученная функция удовлетворяет данному уравнению. Определим значения произвольных постоянных C_1, C_2, при которых полученная функция удовлетворяет заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} 0 = y(0) = 0 + C_1 \cdot 0 + C_2, \\ 1 = y'(0) = 0 + C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_2 = 0, \\ C_1 = 1, \end{matrix}$$

откуда $y = x^3 + x$ – искомое решение.