Линейное пространство, его базис и размерность

Опр. ***Линейным*** (или ***векторным***) ***пространством*** называется множество L элементов произвольной природы, *условно называемых векторами*,

$$L = \{\overline{x}, \overline{y}, \dots, \overline{z}, \dots\},$$

над которыми определены две операции –

- ***сложение элементов***: каждой паре элементов $\overline{x}, \overline{y} \in L$ соответствует единственный элемент $\overline{x} + \overline{y} \in L$,
- ***умножение элемента на число***: каждому элементу $\overline{x} \in L$ и каждому числу $\alpha \in \boldsymbol{P}$ ($\boldsymbol{P}$ – некоторое числовое множество) соответствует единственный элемент $\alpha \cdot \overline{x} \in L$,

Причем справедливы следующие аксиомы:

для любых $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in L$ и любых $\alpha, \beta \in \boldsymbol{P}$

1. $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$ (***коммутативность* сложения**);

2. $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$ (***ассоциативность сложения***);

3. существует ***нейтральный (нулевой) элемент*** $\overline{0} \in L$ такой, что $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$ для всех $\overline{x} \in L$;

4. для каждого $\overline{x} \in L$ существует ***противоположный элемент*** $-\overline{x} \in L$ такой, что $\overline{x} + (-\overline{x}) = \overline{0}$;

5. умножение на единицу $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$;

6. $\alpha \cdot (\overline{x} + \overline{y}) = \alpha \cdot \overline{x} + \alpha \cdot \overline{y}$ (***дистрибутивность*** умножения на число относительно сложения элементов);

7. $(\alpha + \beta) \cdot \overline{x} = \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{x}$ (***дистрибутивность*** умножения элемента на число относительно сложения чисел);

8. $\alpha \cdot (\beta \cdot \overline{x}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \overline{x}$ (***ассоциативность*** умножения на число).

Примеры.

1. Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

2. Множество всех векторов на плоскости или в пространстве.

3. Множество $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ всех матриц фиксированного размера $m \times n$.

4. Множество $\mathbb{R}_n[x]$ всех многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами.

5. Множество $\mathbf{C}[a, b]$ всех непрерывных функций, определенных на некотором отрезке либо на $\mathbb{R}$.

Вопрос? **Можно ли в линейном пространстве L найти такой набор элементов (говорят базис) $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}, \dots\}$, через линейные комбинации которых $\alpha_1\overline{e_1} + \dots + \alpha_n\overline{e_n} + \dots$ выражается любой элемент этого пространства.**

Опр. ***Линейной комбинацией*** элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n} \in L$ с числовыми коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называется элемент

$$\overline{y} = \alpha_1\overline{x_1} + \alpha_2\overline{x_2} + \dots + \alpha_n\overline{x_n} \in L.$$

Опр. Система (множество) элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n} \in L$ называется ***линейно зависимой***, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, из которых хотя бы одно не равно 0, что

$$\alpha_1\overline{x_1} + \alpha_2\overline{x_2} + \dots + \alpha_n\overline{x_n} = \overline{0}.$$

Опр. Система (множество) элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n} \in L$ называется ***линейно независимой***, если равенство

$$\alpha_1\overline{x_1} + \alpha_2\overline{x_2} + \dots + \alpha_n\overline{x_n} = \overline{0}$$

возможно только в случае, когда **все** коэффициенты линейной комбинации равны 0, т. е. $\boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.}$

Т (критерий линейной зависимости системы элементов). Система элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n} \in L$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных.

Опр. ***Размерностью*** линейного пространства L называется такое число $\boxed{\dim L = n,}$ что:

1) в L существует n линейно независимых элементов;

2) любая система из $n+1$ элемента линейно зависима.

Таким образом, размерность линейного пространства – это максимальное число линейно независимых элементов этого пространства.

Опр. Линейное пространство L называется ***бесконечномерным*** $(\dim L = \infty)$, если при любом натуральном n существует система n линейно независимых элементов этого пространства.

В курсе линейной алгебры рассматриваются линейные пространства конечной размерности.

Опр. ***Базисом*** линейного пространства L называется такая *упорядоченная* система $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \ldots; \overline{e_n}\}$, состоящая из n линейно независимых элементов этого пространства, что любой элемент $\overline{x} \in L$ может быть представлен в виде линейной комбинации базисных элементов:

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + \ldots + x_n\overline{e_n}. \tag{1}$$

Опр. Представление (1) называется ***разложением элемента*** $\overline{x}$ ***по базису*** $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \ldots; \overline{e_n}\}$, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – ***координатами элемента*** $\overline{x}$ ***в базисе*** $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \ldots; \overline{e_n}\}$; в этом случае пишут

$$\boxed{\overline{x} = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}.}$$

Теорема. Координаты любого элемента $\overline{x} \in L$ в данном базисе $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \ldots; \overline{e_n}\}$ определяются однозначно.

!!!! Операции сложения и умножения элементов линейного пространства на числа при задании базиса сводятся к соответствующим операциям над координатами элементов.

Теорема. Пусть в линейном пространстве L задан базис $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \ldots; \overline{e_n}\}$.

Тогда:

1) все координаты нулевого элемента равны 0;

2) два элемента равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты в данном базисе;

3) при сложении двух элементов складываются их соответствующие координаты;

4) при умножении элемента на число все координаты умножаются на это число.

Арифметическое ***пространство*** $\mathbb{R}^n$ – ***пространство*** n***-мерных векторов*** – множество всех упорядоченных комбинаций n действительных чисел (*числовых последовательностей*):

$$\mathbb{R}^n = \{\overline{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n\},$$

Сложение и умножение на число выполняют поэлементно:
если $\overline{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $\overline{y} = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$\bar{x} = \bar{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2, \\ \ldots, \\ x_n = y_n; \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1;\, x_2 + y_2; \ldots;\, x_n + y_n); \\ &\alpha\bar{x} = (\alpha x_1;\, \alpha x_2; \ldots;\, \alpha x_n). \end{aligned}$$

Если $L = \mathbb{R}^n$, то $\dim L = n$; *стандартный базис в пространстве* $\mathbb{R}^n$:

$$\bar{e}_1 = (1;\, 0;\, 0; \ldots;\, 0);\ \bar{e}_2 = (0;\, 1;\, 0; \ldots;\, 0);\ \ldots;\ \bar{e}_n = (0;\, 0;\, 0; \ldots;\, 1), \qquad (2)$$

для любого $\bar{x} = (x_1;\, x_2; \ldots;\, x_n) \in \mathbb{R}^n$ справедливо представление

$$\boxed{\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n.}$$

Преобразование координат вектора при изменении базиса

В линейном пространстве все базисы равноправны. Тот или иной базис выбирают исходя из конкретных обстоятельств, а может быть, и вообще произвольно. Иногда удобно использовать для представления элементов линейного пространства несколько базисов, но тогда естественным образом возникает задача преобразования координат векторов, которое связано с изменением базиса.

Пусть $\mathcal{E} = \{\bar{e}_1;\, \bar{e}_2; \ldots;\, \bar{e}_n\}$ – базис линейного пространства L; $\mathcal{E}' = \{\bar{e}_1{}';\, \bar{e}_2{}'; \ldots;\, \bar{e}_n{}'\}$ – новый базис линейного пространства L, причем

$$\begin{aligned} &\bar{e}_1{}' = t_{11}\bar{e}_1 + t_{21}\bar{e}_2 + \ldots + t_{n1}\bar{e}_n, \\ &\bar{e}_2{}' = t_{12}\bar{e}_1 + t_{22}\bar{e}_2 + \ldots + t_{n2}\bar{e}_n, \\ &\ldots, \\ &\bar{e}_n{}' = t_{1n}\bar{e}_1 + t_{2n}\bar{e}_2 + \ldots + t_{nn}\bar{e}_n. \end{aligned}$$

Опр. Матрица $T = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}$

называется ***матрицей перехода от базиса*** $\mathcal{E}$ ***к базису*** $\mathcal{E}'$.

Согласно данному определению, *i-й столбец матрицы перехода есть столбец координат i-го вектора нового базиса в старом*.

Теорема. Если $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $X' = \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ \ldots \\ x_n{}' \end{pmatrix}$ – столбцы координат элемента $\bar{x} \in L$ в базисе $\mathcal{E}$ и в базисе $\mathcal{E}'$ соответственно, то $\boxed{X = TX'.}$

Следствие 1. $\boxed{X' = T^{-1}X,}$

Следствие 2. Матрица перехода от базиса $\mathcal{E}'$ к базису $\mathcal{E}$ – это матрица, обратная матрице перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$:

$$\boxed{T_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}} = T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}.}$$

Евклидово пространство

Опр. ***Евклидовым пространством*** называется *действительное* линейное пространство L, в котором определена операция скалярного умножения элементов: каждой паре элементов $\overline{x}, \overline{y} \in L$ ставится в соответствие *действительное* число $(\overline{x}, \overline{y})$, называемое ***скалярным произведением*** элементов $\overline{x}$ и $\overline{y}$, и выполняются аксиомы: для любых $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in L$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x})$;
2) $(\overline{x} + \overline{y}, \overline{z}) = (\overline{x}, \overline{z}) + (\overline{y}, \overline{z})$;
3) $(\alpha\overline{x}, \overline{z}) = \alpha(\overline{x}, \overline{z})$;
4) $(\overline{x}, \overline{x}) \ge 0$, причем $(\overline{x}, \overline{x}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$.

Аксиомы 2 и 3 указывают на линейность этой операции (скалярного произведения) по каждому аргументу.

Евклидовым пространством является пространство $\mathbb{R}^n$, в котором скалярное произведение элементов задается формулой

$\boxed{(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,}$ где $\overline{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $\overline{y} = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$.

Опр. Два вектора $\overline{x}$ и $\overline{y}$ называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю: $(\overline{x}, \overline{y}) = 0$.

Замечание. Считается, что нулевой вектор ортогонален любому вектору.

Теорема. Если ненулевые векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_k}$ попарно ортогональны, то они линейно независимы.

В декартовой системе координат в трехмерном векторном пространстве $\mathbf{R}^3$ скалярное произведение векторов $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\overline{b}(b_x, b_y, b_z)$ может быть найдено по формуле:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\left(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}\right).$$

С помощью скалярного произведения для каждого вектора $\overline{a}$ естественным образом находят длину (модуль)

$$|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

и для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определяют угол φ между ними

$$\varphi = \arccos\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}.$$

Норма вектора $\bar{x}$ в евклидовом пространстве (норма является аналогом модуля (длины) вектора в пространстве$\mathbf{R}^3$):

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x},\bar{x})}.$$

Процесс ортогонализации Грама – Шмидта

Процесс ортогонализации Грама– Шмидта используется для построения в евклидовом пространстве ортонормированного базиса на основании произвольного базиса этого пространства.

Пусть $\mathcal{F}=\left\{\overline{f_1};\ \overline{f_2};\ldots;\ \overline{f_n}\right\}$ – исходный базис n-мерного евклидова пространства. Ортонормированный базис $\mathcal{E}=\left\{\overline{e_1};\ \overline{e_2};\ldots;\ \overline{e_n}\right\}$ получается с помощью следующей процедуры:

1) $\overline{e_1}=\dfrac{\overline{f_1}}{\left\|\overline{f_1}\right\|}$;

2) $\overline{g_2}=\overline{f_2}-(\overline{f_2},\overline{e_1})\overline{e_1};\ \overline{e_2}=\dfrac{\overline{g_2}}{\left\|\overline{g_2}\right\|}$;

3) $\overline{g_3}=\overline{f_3}-(\overline{f_3},\overline{e_1})\overline{e_1}-(\overline{f_3},\overline{e_2})\overline{e_2};\ \overline{e_3}=\dfrac{\overline{g_3}}{\left\|\overline{g_3}\right\|}$;

…;

n) $\overline{g_n}=\overline{f_n}-(\overline{f_n},\overline{e_1})\overline{e_1}-(\overline{f_n},\overline{e_2})\overline{e_2}-\ldots-(\overline{f_n},\overline{e_{n-1}})\overline{e_{n-1}};\ \overline{e_n}=\dfrac{\overline{g_n}}{\left\|\overline{g_n}\right\|}$.

Координаты вектора евклидова пространства в ортонормированном базисе

Пусть $\{\overline{e_1},\overline{e_2},\ldots,\overline{e_n}\}$ – *ортонормированный базис* в n-мерном евклидовом пространстве, $\bar{x}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ – координаты вектора $\bar{x}$ в этом базисе, т. е.

$$\bar{x}=x_1\overline{e_1}+x_2\overline{e_2}+\ldots+x_n\overline{e_n}.$$

Умножая обе части равенства скалярно на $\overline{e_1}$, получим

$$(\bar{x},\overline{e_1})=x_1(\overline{e_1},\overline{e_1})+x_2(\overline{e_2},\overline{e_1})+\ldots+x_n(\overline{e_n},\overline{e_1})=x_1\cdot 1+x_2\cdot 0+\ldots+x_n\cdot 0=x_1.$$

Аналогично, $(\bar{x},\overline{e_2})=x_2;\ldots;(\bar{x},\overline{e_n})=x_n$.

Таким образом, ***координаты вектора в ортонормированном базисе равны скалярным произведениям вектора на базисные векторы***.

Задачи линейной алгебры являются самыми распространенными с прикладной точки зрения. Выделяют основные задачи линейной алгебры:

- решение систем линейных алгебраических уравнений;
- вычисление определителей и обращение матриц;
- вычисление собственных значений и собственных векторов матриц.