Основные понятия теории уравнений математической физики. Аналитические и численные методы решения.

Математическая физика – теория математических моделей физических явлений.

Любое физическое явление или процесс представляет собой изменение каких-либо физических величин в пространстве и во времени. Возникает задача – исследовать поле физических величин. При этом под физическим полем понимают область пространства, в каждой точке которой задана функция – скалярная, векторная, тензорная. Классические физические поля, вообще говоря, описываются функциями четырех независимых переменных x, y, z, t. Методы составления и решения уравнений, содержащих такого рода функции, изучаются в разделе математической физики – теория дифференциальных уравнений в частных производных. Эти уравнения исторически получили название **уравнения математической физики**.

Основная задача математической физики состоит в нахождении распределения некоторой физической величины в заданной области пространства, если известны условия (дополнительные условия), в которых находится физический объект.

Такими дополнительными условиями чаще всего являются ***граничные условия***, т.е. *условия, заданные на границе рассматриваемой среды*, и ***начальные условия***, *относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления*. Совокупность граничных и начальных условий называют ***краевыми условиями задачи***.

Большинство физических полей описывается дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка или их системами. Более того, если процессы не слишком интенсивны, то при их описании ограничиваются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с четырьмя переменными x, y, z, t. Причем, с помощью соответствующей замены независимых переменных уравнение может быть приведено к одному из следующих трех типов.

1. **Гиперболические**:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + f \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \operatorname{div} \operatorname{grad} U + f. \tag{1}$$

К этому типу сводятся уравнения для физических полей, описывающих ***волновые процессы*** – распространение звука, электромагнитные волны, поле вероятностей в квантовой физике. Уравнение (1) называют ***уравнением Даламбера*** или неоднородным волновым уравнением.

2. **Параболические:**

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+f \quad \text{или} \quad \frac{\partial U}{\partial t}=\operatorname{div}\operatorname{grad} U+f. \tag{2}$$

К этому типу сводятся уравнения для физических полей, описывающих ***диссипативные процессы***: теплопроводность – поле температуры, диффузия – поле концентрации. Уравнение (2) называют ***уравнением теплопроводности*.**

3. **Эллиптические** (*описывают стационарные процессы*):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=f \quad \text{или} \quad \operatorname{div}\operatorname{grad} U=f. \tag{3}$$

К этому типу сводятся уравнения для многих физических полей: электростатические и магнитностатические поля, установившиеся поле температуры и поле концентрации и др. Уравнение (3) называют ***уравнением Пуассона*,** если $\boldsymbol{f=0}$ ***– уравнением Лапласа***.

Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными в окрестности точки

Рассмотрим линейное уравнени

$$a(x,y)u''_{xx}+2b(x,y)u''_{xy}+c(x,y)u''_{yy}=F\left(x,y,u,u'_x,u'_y\right), \tag{4}$$

где $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ дважды дифференцируемые функции в некоторой области D, предполагаем, что $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ не обращается одновременно в нуль и функция $u(x,y)$ имеет нпрерывные частные производные до второго порядка включительно в этой области.

Классификация уравнения (4) производится по знаку дискриминанта

$$\boxed{\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)}.$$

ДУ (4) принадлежит:

гиперболическому типу (1), если $\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)>0$,

параболическому типу (2), если $\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)=0$,

эллиптическому типу (3), если $\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)<0$.

Замечание. Может оказаться, что в различных частях области D уравнение (4) принадлежит различным типам. Например, уравнение Трикоми $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. При $y>0$ — эллиптический тип, при $y<0$ — гиперболический тип.

Замечание. Уравнению (4) с постоянными коэффициентами соответствует квадратичная форма с матрицей $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. В этом случае ДУ (4) является уравнением:

гиперболического типа (1), если собственные значения λ_1 и λ_2 не равны нулю и имеют противоположные знаки;

параболического типа (2), если одно из собственных значений λ_1 или λ_2 равно нулю;

эллиптического типа (3), если собственные значения λ_1 и λ_2 отличны от нуля и имеют одинаковые знаки.

На практике приведение уравнения с постоянными коэффициентами к каноническому виду линейной заменой осуществляется по схеме диагонализации матрицы A квадратичной формы ортогональным преобразованием.

Дифференциальные уравнения в частных производных имеют, как правило, бесчисленное множество решений, зависящих от некоторых произвольных функций. Для полного описания решения, как правило, необходимо задать ***начальные условия (условия Коши)***, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления, и ***граничные условия***, т.е. условия, заданные на границе рассматриваемой среды.

Различают (в зависимости от способа задания граничных условий) три типа краевых задач математической физики.

1. ***Краевая задача Дирихле***. На границе Г задаются значения искомой функции: $u|_\Gamma = f(\Gamma)$.

2. ***Краевая задача Неймана***. На границе Г задается значение $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = f(\Gamma)$, где n – нормаль к Г.

3. ***Смешанная краевая задача***. На границе Г задается условие

$$\left.\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_\Gamma = f(\Gamma).$$

Задача математической физики считается поставленной корректно по Адамару, если:

1) решение задачи существует;

2) задача имеет единственное решение;

3) решение устойчиво, т.е. малые изменения любого из исходных данных задачи вызывают соответственно малое изменение решения (*решение непрерывно зависит от исходных данных*). Это важно с той точки зрения, что функции, входящие в начальные и краевые условия, в физических задачах определяются из экспериментальных данных и могут считаться известными лишь приближенно. Поэтому мы должны быть уверены, что решения задачи при приближенных исходных данных будут близки к тем решениям, которые получились бы при точных исходных данных.

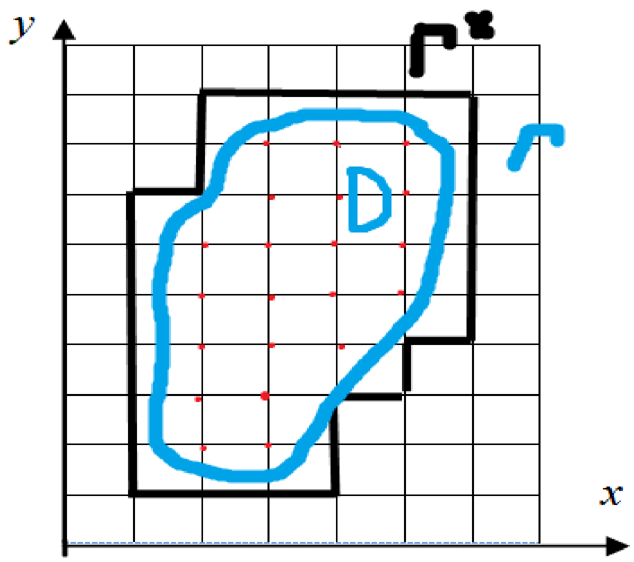
Большое количество различных постановок задач привело к тому, что теория дробится на большое число направлений. Использование численных методов с применением ЭВМ расширило возможности в исследовании подобных задач. Разработаны алгоритмы, которые дают возможность решать с приемлемой затратой машинного времени подавляющее большинство краевых задач уравнений математической физики.

Замечания о численных и аналитических решениях. *Под аналитическими решениями подразумеваются такие, в которых неизвестная функция и выражена посредством независимых переменных и параметров уравнения виде формул, рядов, интегралов и т.д. Под численным решением понимается такое решение, которое получено численно после приближенной замены уравнения другим, более простым уравнением или системой уравнений. Результатом такой замены обычно является таблица значений решения* u_{ij} *при некоторых значениях независимых значениях независимых переменных.*

Аналитическое решение, записанное в виде формулы, более информативно. Оно позволяет проследить влияние параметров задачи, начальных и граничных условий на характер рашения. Найти, однако, аналитическое решение удается лишь в простейших задачах.

Численные методы решения задачи не выявляют этих закономерностей, поскольку они позволяют находить решение только при заданных параметрах, начальных и граничных условиях. Главное преимущество их состоит в том, что численное решение можно получить даже в том случае, когда аналитическое решение получить невозможно.

Метод сеток, или метод конечных разностей, является одним из самых распространенных методов численного решения уравнений математической физики. В его основе лежит идея замены производных конечно-разностными выражениями.



Пусть в плоскости xOy имеется некоторая область D с ганицей Г. Построим на плоскости два семейства параллельных прямых:

$$x = x_0 + ih \ \ (i = 0, \pm1, \pm2, \dots),$$

$$y = y_0 + kl \ \ (k = 0, \pm1, \pm2, \dots)$$

Точки пересечения прямых называются ***узлами***. Два узла называются *соседними*, если они удалены друг от друга в направлении оси Ox или Oy на расстояние, равное шагу сетки h или l соответственно.

Выделим узлы, принадлежащие области D + Г, а также некоторые узлы, не принадлежащие этой области, но расположенные на расстоянии, меньшем чнм шаг, от границы Г. Узел называется ***внутренним***, если он принадлежит области D. Узел считается ***граничным***, если он не является внутренним. Каждый граничный узел должен иметь среди четырех соседних узлов хотя бы один внутренний, иначе он исключается из сетки. Заменяем область D сеточной областью, а границу области Γ замкнутой ломаной линией Γ^*.

Наиболее простой вид решения задачи, если $\boxed{x = ih, \quad y = kh,}$ $\boxed{l = h.}$

Значения неизвестной функции $U(x, y)$ в узлах сетки обозначим

$$U_{i,k} = U(x_i, y_k) = U(ih, kh).$$

В каждом узле границы Γ^* зададим значение функции, равное значению функции в ближайшей точке границы Γ. Значения неизвестной функции рассматривают только в узлах сетки, которые принадлежат $D + \Gamma^*$.

В каждом внутреннем узле заменяют частные производные конечно-разностными выражениями. Например, частные производные второго порядка

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=ih,\, y=kh} = \frac{U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}}{h^2};$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_{x=ih,\, y=kh} = \frac{U_{i,k+1} - 2U_{i,k} + U_{i,k-1}}{h^2}.$$

Указанные замены производных в узлах сетки позволяют свести решение уравнения с частными производными к решению системы разностных уравнений.

Широко распространенным **аналитическим методом решений уравнений с частными производными является метод Фурье** или метод разделения переменных.

Рассмотрим ***задачу о свободных колебаниях струны***, закрепленной в точках $x = 0$ и $x = l$. Математическая постановка: найти решение $u = u(x,t)$ волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 \le x \le l, t > 0) \tag{5}$$

при граничных условиях

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)\big|_{x=l} = 0 \quad (t \ge 0) \tag{6}$$

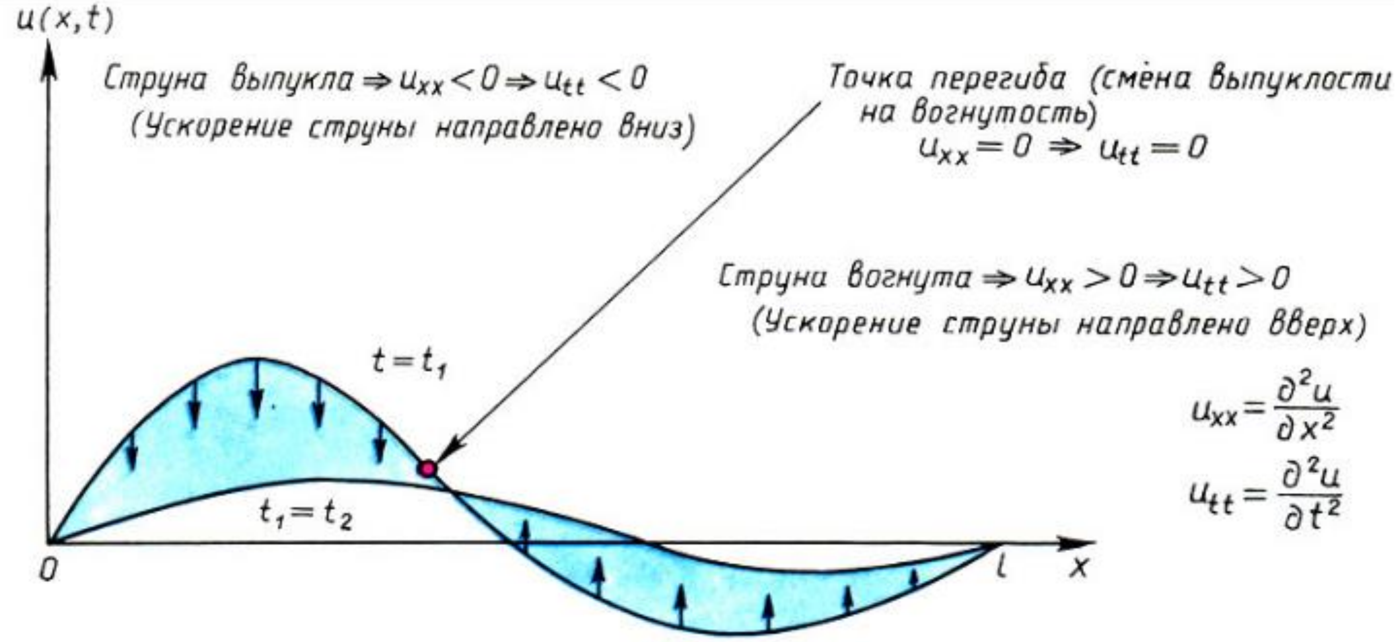
и начальных условиях

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \qquad (0 \le x \le l) \tag{7}$$

($\varphi(x)$ и $\psi(x)$— заданные функции, определенные на отрезке $[0,l]$).

Это уравнение описывает свободные колебания в одномерной среде. Например, звуковые колебания в стержне из упругого материала, распространение света вдоль стекловолокна, электромагнитные колебания вдоль провода и др. Впервые оно было получено и исследовано для описания колебаний в струне (например, гитарной), поэтому и получило название уравнения колебания струны. Для этого случая $u = u(x,t)$

функция интерпретируется как отклонение гибкой, упругой натянутой струны от положения равновесия $u = 0$ в момент времени $t > 0$ в точке $0 < x < l$. В виду натяжения струны, при ее отклонении от положения равновесия возникает сила, стремящаяся вернуть струну в исходное состояние. Ввиду наличия массы струна каждый раз по инерции проскакивает положение равновесия и отклоняется в противоположную сторону. В результате наблюдается сложный процесс колебаний, который определяется как начальным отклонением, так и физическими параметрами струны.



!!!! В виду линейности уравнения (5) множество его решений является линейной комбинацией базисных элементов $\{u_1, \dots, u_n, \dots\}$, представляющих частные независимые решения задачи.

По методу Фурье частные решения уравнения (5), не равные тождественно нулю, удовлетворяющие граничным условиям (6), будем искать в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{8}$$

Подстановка (8) в уравнение (5) приводит к *задаче Штурма – Лиувилля*: найти нетривиальное решение ДУ

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{9}$$

при краевых условиях

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0 \tag{10}$$

Т.е. найти такие значения параметра λ, при которых уравнение (9) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющие граничным условиям (10).

Эти значения параметра λ называются ***собственными значениями***, а соответствующие решения $X(x)$ — ***собственными функциями*** краевой задачи.

ПОКАЗАНО, что нетривиальные решения этой задачи возможны лишь при значениях $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. В этом случае системой собственных функций задачи Штурма – Лиувилля (9) – (10) является система

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l},$$

а общим решением уравнения (5) ряд –

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

Начальные условия (7) дают

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\quad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

ПРИМЕР. Решить краевую задачу $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\quad u(x,0) = \frac{1}{8}\sin\frac{3\pi x}{l},\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = 0.$$

$$u(x,0) = \frac{1}{8}\sin\frac{3\pi x}{l},\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = 0$$

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = 0$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{1}{8}\sin\frac{3\pi x}{l}\sin\frac{\pi kx}{l}dx =$$

$$= \frac{1}{4l}\int_0^l \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{3-k}{l}\pi x\right) - \cos\left(\frac{3+k}{l}\pi x\right)\right)dx = \begin{cases}\frac{1}{8}, \text{если } k = 3\\ 0, \text{если } k \neq 3\end{cases}$$

решение краевой задачи

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} = \frac{1}{8}\cos\left(\frac{3\pi}{l}at\right)\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right)$$

Решение задачи Коши для уравнений свободных колебаний однородной струны методом Даламбера

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\quad x \in R,\ t > 0. \tag{11}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x),\ x \in R \tag{12}$$

Решение задачи Коши методом Даламбера имеет следующий алгоритм:

- Нахождение общего решения уравнения (11)
- Постановка найденного решения в начальные условия.

I этап. Заменой

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$$

волновое уравнение (11) преобразуется в уравнение вид $u''_{\xi\eta} = 0$ или $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$, имеющее общее решение $u = \int w(\xi)d\xi + h(\eta) = g(\xi) + h(\eta)$, где $g(\xi)$ и $h(\eta)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Возвращаясь к старым переменным, находим

$$u(x,t) = g(x+at) + h(x-at)$$

общее решение однородного уравнения (11), его также называют *решением Даламбера*, а метод получения этого решения *методом Даламбера* или *методом характеристик*, или *методом бегущих волн*. Здесь $h(x-at)$ характеризует прямую волну (кривая $h(x)$ смещается вправо со скоростью a), а $g(x+at)$ характеризует обратную волну (кривая $g(x)$ смещается влево со скоростью a).

II этап. По заданным начальным условиям (12) определяются функции $g(x)$ и $h(x)$ и искомое решение

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)d\tau \qquad (13)$$

Формула (13) дает решение задачи Коши (11), если $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\psi(x)$ — до первого. Задача Коши (11), (12) поставлена корректно.

ПРИМЕР. Решить задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = \sin x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = x + \cos x.$$

Решение.

$$\varphi(x+at) = \sin(x+at) = \sin x\cos at + \cos x\sin at,$$

$$\varphi(x-at) = \sin(x-at) = \sin x\cos at - \cos x\sin at,$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right) = \sin x\cos at$$

$$\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)d\tau = \int_{x-at}^{x+at} (\tau + \cos\tau)\, d\tau = \dots = 2axt + 2\cos x\sin at$$

В силу формулы (13) решение задачи Коши имеет вид

$$u(x,t) = \sin x \cos at + xt + \frac{1}{a} \cos x \sin at.$$