ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Прямая на плоскости
2. Кривые второго порядка
3. Прямая и плоскость в пространстве
4. Поверхности второго порядка

1. Прямая на плоскости

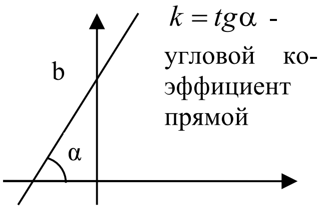
Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy, то уравнение первой степени относительно x и y

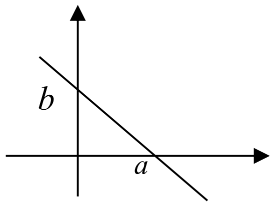
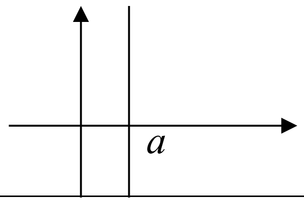
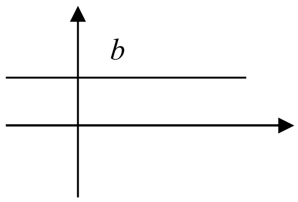
$$Ax + By + C = 0, \left(A^2 + B^2 \neq 0 \right)$$

является уравнением прямой, лежащей в плоскости Oxy. Это уравнение называется ***общим уравнением прямой***.

И наоборот, всякая прямая в плоскости Oxy определяется уравнением первой степени относительно x и y. В зависимости от особенностей (используемой информации) расположения прямой эти уравнения имеют разный вид. Их вид и характеристика приведены ниже в таблице.

Виды уравнений прямой на плоскости

Данные, определяющие прямую	Уравнение прямой
	$y = kx + b$
Прямая с угловым коэффициентом проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$	$y - y_0 = k(x - x_0)$
Прямая проходит через две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

Прямая отсекает на осях Ox и Oy отрезки a и b 	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
Общее уравнение прямой	$Ax+By+C=0,\ A^2+B^2\neq 0$, $k=-\frac{A}{B}$, $\vec{n}=\left(A,\,B\right)$ - нормальный вектор прямой
Прямая параллельна оси Oy и проходит через точку $(a;\,0)$ 	$x=a$
Прямая параллельна оси Ox и проходит через точку $(0;\,b)$ 	$y=b$

Рассмотрим прямые l_1 и l_2, которые заданы уравнениями:

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0 \qquad l_2: A_2x+B_2y+C_2=0,$$

или $l_1: y=k_1x+b_1$, $\qquad l_2: y=k_2x+b_2$.

Взаимное расположение прямых l_1 и l_2 на плоскости

Расположение	Условия
Прямые l_1 и l_2 совпадают	$\begin{cases} k_1=k_2, \\ b_1=b_2 \end{cases}$ или $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$
Прямые параллельны: $l_1 \parallel l_2$	$k_1=k_2$ или $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$

Прямые l_1 и l_2 перпендикулярны: $l_1 \perp l_2$	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ или $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$
Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке $M_0(x_0; y_0)$ под углом $\varphi, 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$	$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0, \end{cases}$ $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \left\lvert \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right\rvert$
Расстояние $d = d(M_0, l)$ от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $l: Ax + By + C = 0$	$d = d(M_0, l) = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

2. Кривые второго порядка

Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат Oxy. Линии на плоскости, определяемые алгебраическими уравнениями второго порядка относительно переменных x и y, т. е. уравнениями вида

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0, \ (A^2 + B^2 \neq 0),$$

называются ***линиями (кривыми) второго порядка***.

Линиями второго порядка являются окружность, эллипс, гипербола, парабола. В настоящем параграфе рассматриваются уравнения этих линий в наиболее простом (каноническом) виде, который достигается определенным выбором системы координат.

Окружностью называется множество всех точек плоскости, удаленных от заданной точки $N\ (a;b)$ (центра) на одно и тоже расстояние R (радиус).

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная (большая, чем расстояние между фокусами).

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная (меньшая, чем расстояние между фокусами).

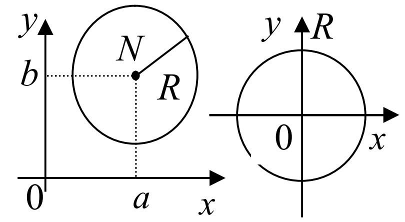
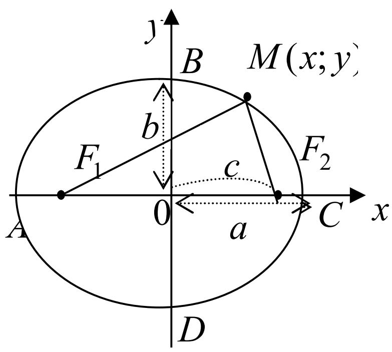
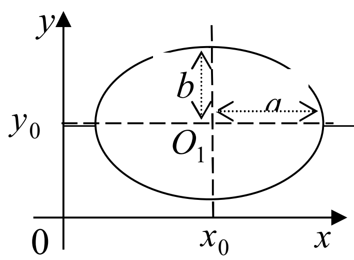
Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от данной точки, называемой ***фокусом*** F, и данной прямой, называемой ***директрисой*** l.

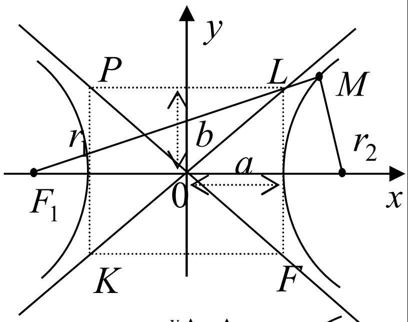
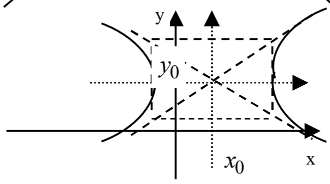
Канонический вид уравнения эллипса, гиперболы и параболы принимают в канонической системе координат, которая строится следующим образом:

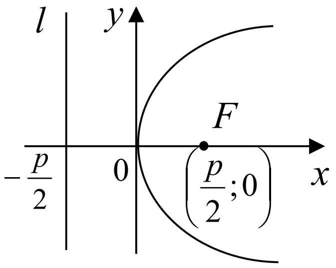
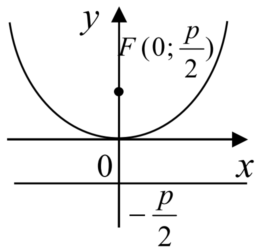
а) для эллипса и гиперболы: ось абсцисс *Ox* проводится через фокусы с направлением от одного фокуса F_1 к другому, ось ординат *Oy* – через середину отрезка F_1F_2 с направлением вверх (если F_1 слева, а F_2 – справа);

б) для параболы: ось *Ox* – через фокус F перпендикулярно директрисе с направлением от директрисы к фокусу, ось Oy – через середину перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису перпендикулярно *Ox* с направлением вверх (если директриса слева, а фокус – справа от оси *Oy*).

Кривые второго порядка

	Название	Вид кривой	Аналитическое представление
1.	Окружность		$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ $N\ (a;b)$ - центр, R – радиус $x^2+y^2=R^2$ $O\ (0;0)$ – центр, R – радиус
2.	Эллипс	 	Каноническое уравнение: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, a>0, b>0$ a – **большая**, b – **малая полуоси** эллипса; $(a,0),(-a,0),(0,b),(0,-b)$ – вершины эллипса $c^2=a^2-b^2$. $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ $(\varepsilon<1)$ – **эксцентриситет** эллипса

			$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – уравнение эллипса с осями, параллельными координатным, и центром симметрии $O_1(x_0;y_0)$
3.	Гипербола		Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, a – **действительная**, b – **мнимая полуоси**; $(a,0),(-a,0)$ – вершины гиперболы; $c^2=a^2+b^2$, $\varepsilon=\frac{c}{a}$ $(\varepsilon>1)$ $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – уравнение гиперболы с осями, параллельными координатным осям

4.	Парабола	 	Каноническое уравнение: $y^2 = 2px$, $p > 0$ – расстояние от фокуса до директрисы – **параметр** параболы. Вершина параболы – точка $O(0;0)$, ось Ox – ось симметрии. Уравнение директрисы l параболы: $x = -\frac{p}{2}$. Парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси Oy, имеет уравнение $x^2 = 2py$

3. Прямая и плоскость в пространстве

Если в пространстве задана прямоугольная декартова система координат, то всякое уравнение первой степени относительно x, y, z

$$Ax + By + Cz + D = 0, \ \left(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\right)$$

определяет плоскость в пространстве и называется ***общим уравнением плоскости***. Вектор $\vec{n} = \{A; B; C\}$ будет перпендикулярен этой плоскости. Он называется ***вектором нормали (нормалью)*** к плоскости.

Расположение плоскости в зависимости от значений коэффициентов A, B, C, D.

Расположение плоскости	Ее уравнение
Плоскость проходит через начало координат $(0;0;0)$	$D = 0$: $Ax + By + Cz = 0$
Плоскость параллельна Ox $\vec{n} \perp Ox \Rightarrow A = 0$	$A = 0$: $By + Cz + D = 0$
Плоскость проходит через Ox	$A = 0$, $D = 0$: $By + Cz = 0$

Плоскость параллельна осям Ox и Oy	$A=0$, $B=0$: $Cz+D=0$
Координатная плоскость Oxy	$A=0$, $B=0$, $D=0$: $z=0$
Координатная плоскость Oyz	$x=0$
Координатная плоскость Oxz	$y=0$

Кроме общего уравнения, плоскость может быть задана и другими уравнениями. Они приведены ниже.

Уравнения плоскости в пространстве

Данные, определяющие плоскость	Уравнение плоскости
Три точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)\in Q$, $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)\in Q$, $M_3(x_3;\, y_3;\, z_3)\in Q$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$
Точка $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)\in Q$ и вектор $\vec{n}=\{A;\, B;\, C\}\perp Q$	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
Плоскость Q отсекает отрезки a, b, c на осях Ox, Oy и Oz соответственно	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Взаимное расположение плоскостей Q_1 и Q_2 в пространстве

Пусть две плоскости Q_1 и Q_2 заданы общими уравнениями:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

$$Q_1:\quad Q_1\perp \vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\} \qquad Q_2:\quad Q_2\perp \vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$$

Рассмотрим их взаимное расположение.

Расположение	Условия

Плоскости Q_1 и Q_2 параллельны $Q_1 \parallel Q_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
Плоскости Q_1 и Q_2 совпадают	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$
Плоскости Q_1 и Q_2 перпендикулярны $Q_1 \perp Q_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
Плоскости Q_1 и Q_2 пересекаются под углом φ	$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\lvert\vec{n}_1\rvert \cdot \lvert\vec{n}_2\rvert}$
Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Q: Ax + By + Cz + D = 0$	$d = d(M_0, Q) = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz + D\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Прямая в пространстве

Ниже приведены различные виды уравнения прямой l в пространстве в зависимости от данных, однозначно определяющих эту прямую.

Виды уравнений прямой l в пространстве

Данные, определяющие прямую	Уравнения прямой l
Две пересекающиеся плоскости	$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$ – прямая как пересечение двух плоскостей
Точка $M_1(x_1; y_1; z_1) \in l$ и вектор $\vec{s} = \{m; n; p\} \parallel l$ – направляющий вектор прямой	$l: \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$ – каноническое уравнение прямой

Точка $M_1(x_1; y_1; z_1) \in l$ и направляющий вектор прямой $\vec{s} = \{m; n; p\} \parallel l$	$l: \begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \\ z = z_1 + pt, \end{cases}$ – параметрическое уравнение прямой, $t \in R$
Две точки $M_1(x_1; y_1; z_1) \in l$, $M_2(x_2; y_2; z_2) \in l$	$l: \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ – уравнение прямой по двум заданным точкам

Взаимное расположение прямых l_1 и l_2 в пространстве

Пусть заданы две прямые l_1 и l_2 каноническими уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \qquad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

l_1: $l_1 \parallel \vec{s}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ $\qquad$ l_2: $l_2 \parallel \vec{s}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$

Расположение	Условия
Прямые параллельны (или совпадают):	$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{s_1} \parallel \vec{s_2} \Leftrightarrow \quad \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$
Прямые перпендикулярны	$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s_1} \perp \vec{s_2} \Leftrightarrow$ $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$
Расположены под углом φ $\left(0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\varphi = \widehat{\vec{s_1}\,\vec{s_2}}$.	$\cos\varphi = \dfrac{\left\lvert \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \right\rvert}{\left\lvert \vec{s}_1 \right\rvert \cdot \left\lvert \vec{s}_2 \right\rvert}$

Отметим, что в последних двух случаях часто дополнительно требуется, чтобы прямые l_1 и l_2 лежали в одной плоскости.

Пусть заданы плоскость Q общим уравнением и прямая l каноническим уравнением:

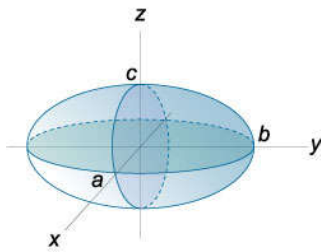
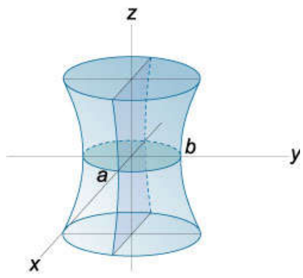
$$Q: \; Ax + By + Cz + D = 0 \qquad\qquad l: \; \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

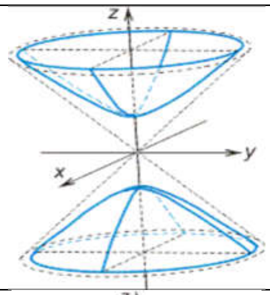
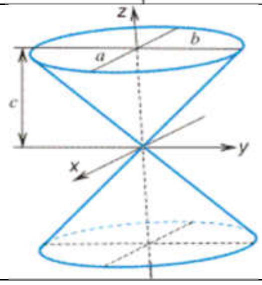
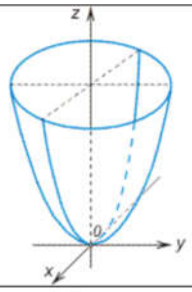
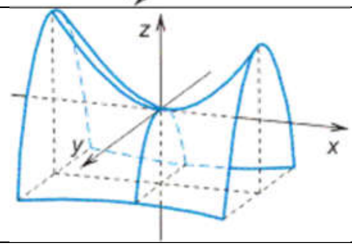
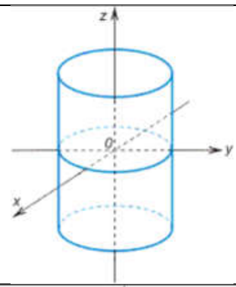
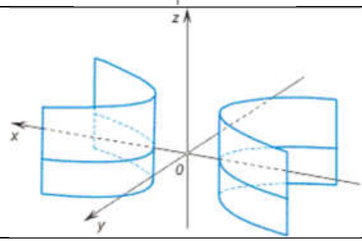
$\vec{n} = \{A; B; C\} \perp Q$ $\qquad\qquad$ $\vec{s} = \{m; n; p\} \parallel l$

Взаимное расположение прямой l и плоскости Q

Расположение	Условия
l параллельна плоскости Q (лежит в плоскости)	$l \parallel Q \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$
Прямая l перпендикулярна плоскости Q	$l \perp Q \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$
Прямая l образует с плоскостью Q угол φ	$\sin\varphi = \cos(\vec{s} \hat{\ } \vec{n}) = \frac{\lvert \vec{s} \cdot \vec{n} \rvert}{\lvert \vec{s} \rvert \cdot \lvert \vec{n} \rvert}$

4. Поверхности второго порядка

1. Поверхности эллиптического типа	
Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$	
2. Поверхности гиперболического типа	
Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$	

Двуполостный гиперболоид $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$	
Коническая поверхность $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$	
3. Поверхности параболического типа	
Эллиптический параболоид $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z.$$	
Гиперболический параболоид $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-z.$$	
4. Цилиндрические поверхности 2-го порядка (с образующими, параллельными оси Oz)	
Эллиптический цилиндр $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$	
Гиперболический цилиндр $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$	

Параболический цилиндр $y^2 = 2px$