Примеры решения задач по теме «Линейное пространство, его базис и размерность»

Даны векторы

$\overline{e_1}=(1;0;1;0);\ \overline{e_2}=(0;1;0;1);\ \overline{e_3}=(1;1;1;0);\ \overline{e_4}=(0;1;1;1).$

1) Докажем, что система векторов $\{\overline{e_1};\overline{e_2};\overline{e_3};\overline{e_4}\}$ образует базис в $\mathbb{R}^4$.

По определению *базиса* линейного пространства L *размерности n:*

упорядоченная система векторов $\{\overline{e_1};\overline{e_2};\dots;\overline{e_n}\}$, состоящая из n линейно независимых элементов этого пространства, является базисом пространства L, кроме того любой элемент $\overline{x}\in L$ может быть представлен в виде линейной комбинации базисных элементов:

$$\overline{x}=x_1\overline{e_1}+x_2\overline{e_2}+\dots+x_n\overline{e_n}.$$

Покажем, что векторы $\overline{e_1};\overline{e_2};\overline{e_3};\overline{e_4}$ линейно независимы, т.е. равенство $\alpha_1\overline{e_1}+\alpha_2\overline{e_2}+\alpha_3\overline{e_3}+\alpha_4\overline{e_4}=\overline{0}$ возможно только в случае, когда все коэффициенты линейной комбинации равны 0, т. е. $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0.$

Запишем элементы пространства $\mathbb{R}^4$. Тогда

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Выполнив линейные операции и приравняв соответствующие элементы двух матриц, получим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_3=0,\\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0,\\ \alpha_1+\alpha_3+\alpha_4=0,\\ \alpha_2+\alpha_4=0.\end{cases}$$

Решив систему, убеждаемся, что векторы $\overline{e_1};\overline{e_2};\overline{e_3};\overline{e_4}$ линейно независимы.

Какими способами можно решить эту систему?

Предложите другие способы доказательства линейной независимости системы векторов.

2) Найдем координаты вектора $\overline{x}=(1;2;3;4)\in\mathbb{R}^4$ в базисе $\overline{e_1}=(1;0;1;0);\ \overline{e_2}=(0;1;0;1);\ \overline{e_3}=(1;1;1;0);\ \overline{e_4}=(0;1;1;1).$

Найдем коэффициенты разложения элемента $\overline{x}$ по базису $\{\overline{e_1};\overline{e_2};\overline{e_3};\overline{e_4}\}$, т. е. такие числа x_1, x_2, x_3, x_4, что $\overline{x}=x_1\overline{e_1}+x_2\overline{e_2}+x_3\overline{e_3}+x_4\overline{e_4}$. Тогда

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix};$$

Это равносильно системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}x_1+x_3=1,\\ x_2+x_3+x_4=2,\\ x_1+x_3+x_4=3,\\ x_2+x_4=4.\end{cases}$$

Решив систему, получим $\overline{x}=3\overline{e_1}+2\overline{e_2}-2\overline{e_3}+2\overline{e_4}$.

3) Используя процесс ортогонализации Грама – Шмидта, построим ортонормированный базис $\left\{\overline{h_1};\overline{h_2};\overline{h_3};\overline{h_4}\right\}$ на основании базиса $\left\{\overline{e_1};\overline{e_2};\overline{e_3};\overline{e_4}\right\}$.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение элементов $\overline{x}=(x_1;x_2;...;x_n)$ и $\overline{y}=(y_1;y_2;...;y_n)$ задается формулой

$$(\overline{x},\overline{y})=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n.$$

Опр. ***Нормой*** вектора $\overline{x}$ евклидова пространства называется *положительное* число

$$\left\|\overline{x}\right\|=\sqrt{(\overline{x},\overline{x})}.$$

Для обычных векторов в трехмерном пространстве норма совпадает с длиной вектора.

Опр. Если $\left\|\overline{x}\right\|=1$, то вектор $\overline{x}$ называется ***нормированным***.

Опр. Система векторов $\overline{e_1},\overline{e_2},...,\overline{e_n}$ называется ***ортонормированной***, если все ее векторы нормированы и попарно ортогональны.

Т. Во всяком конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Пусть $\left\{\overline{e_1};\overline{e_2};...;\overline{e_n}\right\}$ – исходный базис n-мерного евклидова пространства. Ортонормированный базис $\left\{\overline{h_1};\overline{h_2};...;\overline{h_n}\right\}$ получается с помощью следующей процедуры:

1) $\overline{h_1}=\dfrac{\overline{e_1}}{\left\|\overline{e_1}\right\|}$;

2) $\overline{g_2}=\overline{e_2}-(\overline{e_2},\overline{h_1})\overline{h_1}$; $\quad\overline{h_2}=\dfrac{\overline{g_2}}{\left\|\overline{g_2}\right\|}$;

3) $\overline{g_3}=\overline{e_3}-(\overline{e_3},\overline{h_1})\overline{h_1}-(\overline{e_3},\overline{h_2})\overline{h_2}$; $\quad\overline{h_3}=\dfrac{\overline{g_3}}{\left\|\overline{g_3}\right\|}$;

…

;

n) $\overline{g_n}=\overline{e_n}-(\overline{e_n},\overline{h_1})\overline{h_1}-(\overline{e_n},\overline{h_2})\overline{h_2}-\ldots-(\overline{e_n},\overline{h_{n-1}})\overline{h_{n-1}}; \qquad \overline{h_n}=\dfrac{\overline{g_n}}{\|\overline{g_n}\|}.$

Построим ортонормированный базис по системе векторов
$\overline{e_1}=(1;0;1;0);\ \overline{e_2}=(0;1;0;1);\ \overline{e_3}=(1;1;1;0);\ \overline{e_4}=(0;1;1;1).$

Решение. 1. Найдем норму вектора $\overline{e_1}$ и вектор $\overline{h_1}=\dfrac{\overline{e_1}}{\|\overline{e_1}\|}$:

$$\|\overline{e_1}\|=\sqrt{1^2+0^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}; \quad \overline{h_1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}};0\right).$$

2. Поскольку $(\overline{e_2},\overline{h_1})=0$, то $\overline{g_2}=\overline{e_2}-(\overline{e_2},\overline{h_1})\overline{h_1}=\overline{e_2}-0\cdot\overline{h_1}=\overline{e_2}$,

$$\|\overline{g_2}\|=\sqrt{2}; \quad \overline{h_2}=\frac{\overline{g_2}}{\|\overline{g_2}\|}=\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

3. Вычислим $(\overline{e_3},\overline{h_1})=1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+1\cdot0+1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+0\cdot0=\sqrt{2}; \quad (\overline{e_3},\overline{h_2})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, получим

$$\overline{g_3}=\overline{e_3}-(\overline{e_3},\overline{h_1})\overline{h_1}-(\overline{e_3},\overline{h_2})\overline{h_2}=\overline{e_3}-\sqrt{2}\,\overline{h_1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{h_2}=\left(0;\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2}\right),$$

$$\|\overline{g_3}\|=\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \overline{h_3}=\frac{\overline{g_3}}{\|\overline{g_3}\|}=\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}};0;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

4. Вычислим $(\overline{e_4},\overline{h_1})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \quad (\overline{e_4},\overline{h_2})=\sqrt{2}; \quad (\overline{e_4},\overline{h_3})=0,$ получим

$$\overline{g_4}=\overline{e_4}-(\overline{e_4},\overline{h_1})\overline{h_1}-(\overline{e_4},\overline{h_2})\overline{h_2}-(\overline{e_4},\overline{h_3})\overline{h_3}=\overline{e_4}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\overline{h_1}-\sqrt{2}\cdot\overline{h_2}-0\cdot\overline{h_3}=\left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2};0\right),$$

$$\|\overline{g_4}\|=\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \overline{h_4}=\frac{\overline{g_4}}{\|\overline{g_4}\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}};0\right).$$

4) **Контроль**. Докажем, что векторы $\{\overline{h_1};\overline{h_2};\overline{h_3};\overline{h_4}\}$ образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^4$. В этом убедимся, вычислив нормы векторов и попарно скалярные произведения векторов.

Опр. Векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ евклидова пространства называются ***ортогональными***, если $(\overline{x},\overline{y})=0$.

Т. Если ненулевые векторы $\overline{e_1},\overline{e_2},\ldots,\overline{e_k}$ попарно ортогональны, то они линейно независимы.

5) Найдем координаты вектора $\overline{x}=(1;2;3;4)\in\mathbb{R}^4$ в базисе $\{\overline{h_1};\overline{h_2};\overline{h_3};\overline{h_4}\}$.

Пусть $\{\overline{h_1}, \overline{h_2}, ..., \overline{h_n}\}$ – *ортонормированный базис* в n-мерном евклидовом пространстве, $\overline{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – координаты вектора $\overline{x}$ в этом базисе, т. е.

$$\overline{x} = x_1\overline{h_1} + x_2\overline{h_2} + ... + x_n\overline{h_n}.$$

Умножая обе части равенства скалярно на $\overline{e_1}$, получим

$$(\overline{x}, \overline{h_1}) = x_1(\overline{h_1}, \overline{h_1}) + x_2(\overline{h_2}, \overline{h_1}) + ... + x_n(\overline{h_n}, \overline{h_1}) =$$

$$= x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + ... + x_n \cdot 0 = x_1.$$

Аналогично, $(\overline{x}, \overline{h_2}) = x_2; ...; (\overline{x}, \overline{h_n}) = x_n$.

Таким образом, ***координаты вектора в ортонормированном базисе равны скалярным произведениям вектора на базисные векторы.***

Для рассматриваемого примера $\overline{x} = 2\sqrt{2}\overline{h_1} + 3\sqrt{2}\overline{h_2} - \sqrt{2}\overline{h_3} - \sqrt{2}\overline{h_4}$.

Составим матрицу, столбцами которой являются базисные векторы $\overline{h_1}; \overline{h_2}; \overline{h_3}; \overline{h_4}$

$$A = \left[\overline{h_1}; \overline{h_2}; \overline{h_3}; \overline{h_4}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6) Докажем, что матрица A является ортогональной. Воспользуемся определением

Опр. Матрица A называется ***ортогональной***, если $A^T A = E$.

7) Проверим свойство ортогональной матрицы: если A–ортогональная матрица, то $A^{-1} = A^T$.

Для нахождения обратной матрицы воспользуемся методом Гаусса, т.е. с помощью элементарных преобразований матрицу $\left[A|E\right]$ приведем к виду $\left[E|A^{-1}\right]$.

$$\left[A|E\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{array}\right]$$

8) Проверим свойство ортогональной матрицы: если A–ортогональная матрица, то $\det A = \pm 1$.

$$\det A = \det\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1.$$