

## ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: ФУНКЦИЯ, ПРЕДЕЛ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ

1. Понятие множества. Основные числовые множества. Логическая символика. Операции над множествами
2. Понятие функции. Способы задания функций одной переменной
3. Свойства функций одной переменной
4. Элементарные функции
5. Окрестность конечной и бесконечно удаленной точек
6. Понятие предела функции. Односторонние пределы. Арифметические свойства пределов
7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции
8. Вычисление пределов. Раскрытие некоторых видов неопределенностей
9. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке
10. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций непрерывных на отрезке
11. Точки разрыва функции и их классификация

### 1. Понятие множества. Основные числовые множества. Логическая символика. Операции над множествами

Понятие множества является одним из основных математических понятий. Под **множеством** понимается совокупность объектов произвольной природы. Эти объекты называются **элементами** множества.

Множества обозначаются обычно заглавными латинскими буквами:  $A, B, C$  и т.д., а их элементы – строчными:  $a, b, c, \dots$

При описании множеств их элементы, как правило, заключаются в фигурные скобки, например запись

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

означает, что множество  $A$  состоит из элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

В случае, когда объект  $a$  является элементом или объект  $b$  не является элементом множества  $A$ , то используются соответствующие обозначения  $a \in A, b \notin A$ , что читается: элемент  $a$  принадлежит множеству  $A$ , элемент  $b$  не принадлежит множеству  $A$ , например  $1 \in \{-1, 0, 1\}, 5 \notin \{-1, 0, 1\}$ .

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом  $\emptyset$ .

Множества обычно задают перечислением или описанием свойств его элементов. Например,  $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  - множество цифр;  $S$  - множество студентов первого курса.

При описании множеств, состоящих из элементов  $x$  некоторого множества  $X$ , обладающих определенным общим для этих элементов свойством  $F(x)$ , часто используются обозначения

$$\{x \mid F(x), x \in X\} \text{ или } \{x : F(x), x \in X\},$$

например,  $\{x \mid x^2 > 2, x \in \mathbf{R}\}$ .

Множества  $A$  и  $B$  называются **равными**, что обозначается  $A = B$ , если они состоят из одних и тех же элементов.

**Основные числовые множества:**

$\mathbf{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$  – множество **натуральных** чисел;

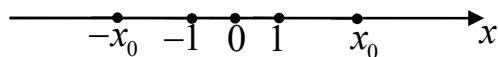
$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$  – множество **целых** чисел;

$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$  – множество **рациональных** чисел, т.е.

множество обыкновенных дробей вида  $\frac{m}{n}$ , где  $m$  – целое,  $n$  – натуральное; или, что равносильно, множество конечных и периодических десятичных дробей;

$\mathbf{I}$  – множество **иррациональных** чисел, т. е. множество бесконечных непериодических десятичных дробей;

$\mathbf{R}$  – множество **действительных** чисел, т. е. периодических и непериодических десятичных дробей (изображаются точками на числовой прямой (оси):



$\mathbf{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x > 0\}$  – множество положительных действительных чисел;

$\mathbf{R}_- = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x < 0\}$  – множество отрицательных действительных чисел.

Если мы будем рассматривать часть числовой оси, то получим следующие множества: ограниченные промежутки, а именно

$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$  – **интервал** (открытый числовой промежутки);

$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$  – **отрезок** (замкнутый числовой промежутки);

$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$  и  $(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$  – **полуинтервалы** соответственно замкнутый слева и открытый справа и наоборот;

а также неограниченные промежутки - интервалы и полуинтервалы вида  $(-\infty; +\infty)$ ;  $(a; +\infty)$ ;  $(-\infty; b)$ ;  $[a; +\infty)$ ;  $(-\infty; b]$

Если множество состоит из *конечного* числа элементов, оно называется **конечным**, в противном случае – **бесконечным**.

Если элементы бесконечного множества можно пересчитать – пронумеровать, т. е. однозначно сопоставить с элементами множества натуральных чисел, то такое множество называется **счетным**. Можно показать, что множества целых и рациональных чисел являются счетными, а множество действительных чисел не является счетным.

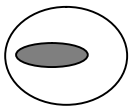
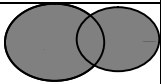
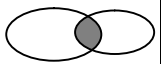
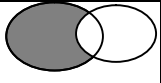
Важнейшее свойство действительных чисел – свойство непрерывности (принцип вложенных промежутков): если имеется множество замкнутых промежутков, каждый последующий из которых является подмножеством предыдущего, то найдется по крайней мере одно действительное число, принадлежащее всем промежуткам.

### Логическая символика

Символ	Название	Пример применения	Читается
$\wedge$	конъюнкция	$A \wedge B$ истинно, когда $A$ и $B$ истинны	« $A$ и $B$ »
$\vee$	дизъюнкция	$A \vee B$ истинно, когда $A$ или $B$ , или $A$ и $B$ истинны	« $A$ или $B$ »
$\Rightarrow$	импликация, следование	$A \Rightarrow B$ (если $A$ истинно, то истинно $B$ )	«из $A$ следует $B$ », « $B$ – следствие $A$ »
$\Leftrightarrow$	эквивалентность, равносильность	$A \Leftrightarrow B$ ( $A$ равносильно $B$ )	« $A$ тогда и только тогда, когда $B$ », « $A$ эквивалентно $B$ »
$\forall$	квантор общности	$\forall x: A(x)$	«Для любого $x$ справедливо $A(x)$ »
$\exists$	квантор сущности	$\exists x: A(x)$	«Существует такое $x$

	ствования		(хотя бы одно), что справедливо $A(x)$ »
--	-----------	--	--

### Операции над множествами

<p><b>1.</b> Множество <math>A</math> называется <b>подмножеством</b> множества <math>B</math> (обозначается <math>A \subset B</math>), если каждый элемент множества <math>A</math> является элементом множества <math>B</math>. В этом случае также говорят, что множество <math>A</math> <i>содержится</i> во множестве <math>B</math> (или множество <math>B</math> <i>содержит</i> множество <math>A</math>).</p> <p><i>Пример:</i> <math>\{1, 7\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}</math>.</p> <p><i>Замечание.</i> Считается, что пустое множество является подмножеством любого множества.</p>	
<p><b>2. Объединение (сумма)</b> множеств <math>A</math> и <math>B</math> – это множество <math>A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}</math>, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (часто читается <math>A</math> или <math>B</math>).</p>	
<p><b>3. Пересечение (произведение)</b> множеств <math>A</math> и <math>B</math> – это множество <math>A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}</math>, состоящее из элементов, одновременно принадлежащих и множеству <math>A</math>, и множеству <math>B</math> (часто читается <math>A</math> и <math>B</math>).</p>	
<p><b>4. Разность</b> множеств <math>A</math> и <math>B</math> называется множество <math>A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}</math>, состоящее из элементов принадлежащих <math>A</math>, но не принадлежащих <math>B</math>.</p>	

*Замечание.* Если множество  $B \subset A$ , то разность  $A \setminus B$  называется **дополнением** множества  $B$  до множества  $A$  и обозначается  $\bar{B}$ , тогда  $B \cup \bar{B} = A$ ,  $B \cap \bar{B} = \emptyset$ .

*Пример.* Для множеств  $X = \{1, 2, 3, 0, 9\}$  и  $Y = \{1, 3, 4, 5, 7\}$  имеем:  $X \cup Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$ ,  $X \cap Y = \{1, 3\}$ ,  $X \setminus Y = \{2, 0, 9\}$ .

*Определение.* **Декартовым произведением**  $X \times Y$  множеств  $X$  и  $Y$  называется множество упорядоченных пар их элементов:

$$X \times Y = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y \}.$$

*Замечание.* Аналогично определяется декартово произведение любого конечного числа множеств:

$$X_1 \times \dots \times X_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i, i = 1, \dots, n \}.$$

*Примеры.*

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  – множество упорядоченных пар действительных чисел- числовая плоскость;

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$  – множество упорядоченных троек действительных чисел – трехмерное пространство;

$\underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_n = \mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n \}$  –  $n$ -мерное число-  
вое (евклидово) пространство.

Множество  $A \subset \mathbb{R}$  считается **ограниченным сверху**, если существует число  $b \in \mathbb{R}$ , называемое **верхней границей множества  $A$** , такое, что  $a \leq b$  для всех  $a \in A$ .

Очевидно, что существует бесконечное множество верхних границ, т. к. любое число  $b_1 > b$  тоже является верхней границей множества  $A$ . Наименьшая среди верхних границ ограниченного сверху множества называется **точной верхней гранью** множества  $A$  и обозначается  $\sup A$  (от лат. *supremum* – наивысшее). Например, множество  $A$  правильных дробей ограничено сверху числом единица, причем  $\sup A = 1$ .

Аналогично определяется множество, **ограниченное снизу**, а также его нижняя и точная нижняя грани. Обозначается точная нижняя грань  $\inf A$  (от лат. *infimum* – наинизшее).

Множество называется **ограниченным**, если оно ограничено и снизу, и сверху.

Если множество  $A$  не ограничено сверху, то, по определению, полагаем, что  $\sup A = +\infty$ ; если множество  $A$  не ограничено снизу, то полагаем  $\inf A = -\infty$ . Эти понятия можно ввести и формальным образом как формальные символы, удовлетворяющие следующим условиям (постулатам):

- 1)  $-\infty < x < +\infty, \forall x \in \mathbb{R}$ ;
- 2)  $x + (\pm\infty) = \pm\infty; x - (\pm\infty) = \mp\infty$ ;
- 3)  $x \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & 0 < x < +\infty, \\ \mp\infty, & -\infty < x < 0; \end{cases}$
- 4)  $\frac{x}{\pm\infty} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Аналогично вводится формально символ  $\infty$  как удовлетворяющий условиям:

- 1)  $\frac{x}{\infty} = 0, \forall x \in \mathbb{R};$
- 2)  $x \cdot \infty = \infty, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$
- 3)  $\frac{x}{0} = \infty, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Выражения  $\infty - \infty$  (разность бесконечностей одного знака),  $0 \cdot \infty$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$  считаются неопределенными (**неопределенностями**) и обычно обозначаются  $[\infty - \infty]$ ,  $[0 \cdot \infty]$ ,  $\left[\frac{0}{0}\right]$  и т. д.

Иногда бывает удобно расширить числовую прямую, рассматривая в качестве ее элементов наряду с числами (конечными точками) и символы  $+\infty$ ,  $-\infty$ ,  $\infty$  (вместе или по отдельности) – несобственные (бесконечные точки). Все такие числовые множества объединяются под общим названием **расширенной числовой прямой**.

## 2. Понятие функции. Способы задания функций одной переменной

**Определение.** Пусть даны два непустых числовых множества  $X$  и  $Y$ . Если каждому элементу  $x$  множества  $X$  поставлен в соответствие (по некоторому закону  $f$ ) единственный элемент  $y$  множества  $Y$ , то говорят, что на множестве  $X$  задана **функция**  $y = f(x)$  со значениями из множества  $Y$ .

Остановимся на функции одной действительной переменной  $y = f(x)$ , где  $x \in X \subset \mathbb{R}$ . Здесь:

$x$  – **независимая переменная (аргумент)**;

$y$  – **зависимая переменная (функция)**;

множество  $X = D_f = D(y)$  – **область определения функции**;

множество  $Y = E_f = E(y) = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$  – **область значений функции**.

Если множество  $X$  специально не оговорено, то под областью определения понимают **естественную область определения**, т. е. множество всех действительных значений  $x$ , для которых функция

имеет смысл.

$$\text{Примеры. 1) } y = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}, D(y) = (0; 2).$$

$$2) y = \arctg x, D(y) = R, E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Функция  $y = y(n) = y_n, n \in \mathbf{N}$ , натурального аргумента, т. е. функция, определенная на множестве натуральных чисел, называется **последовательностью** и записывается  $\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$  или кратко  $\{y_n\}$ . Элементы  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  этого множества называются **членами последовательности**. Если значения  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  — числа, то такая последовательность называется **числовой**.

Примеры:

$$1) \{-1, 1, -1, \dots, -1, 1, \dots\} \text{ или } y_n = (-1)^n, n \in \mathbf{N};$$

$$2) y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbf{N}.$$

Зачастую функция задается только зависимостью  $y = f(x)$ . Тогда под ее множеством определения понимают *естественную область определения*  $D_f^E$ , т. е. множество всех тех действительных  $x$ , для которых  $f(x)$  имеет смысл.

Задать функцию — это, по существу, указать множество ее определения и правило, при помощи которого по данному значению независимой переменной находятся соответствующие ему значения функции. Распространены три основных **способа задания функции**:

1) **табличный** — с помощью таблицы, при котором перечисляются значения независимой переменной и соответствующие им значения функции, например

$x$	-1	0	1	2	3	4	5
$y$	1	0	1	4	9	3,14	2010

Правило  $f$ : каждому  $x \in X = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  соответствует, согласно таблице, единственное число  $y$  из  $\{1, 0, 4, 9, 3,14, 2010\}$ .

Такие функции часто получаются в результате записи эмпирических исследований.

2) **графический** – с помощью графика, при котором непосредственно задают график функции в соответствующей системе координат и по значению независимой переменной находят значение функции (рис. 1)

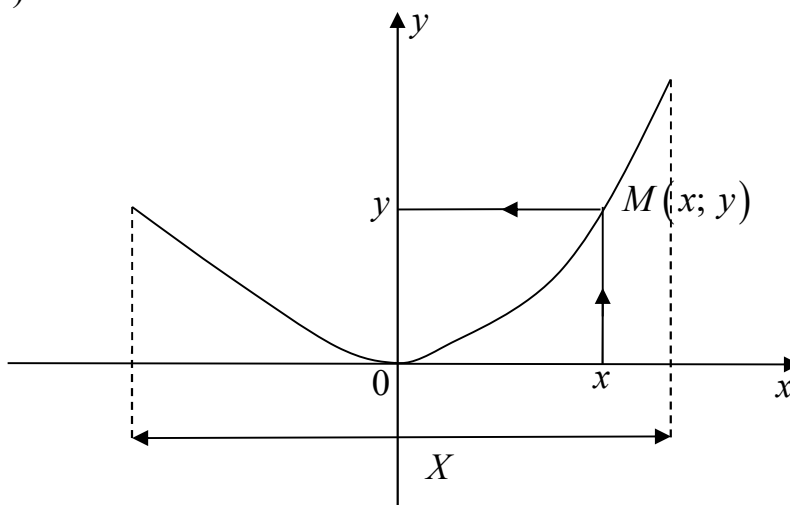


Рис. 1. Графический способ задания функции

В этом способе правило  $f$  заключается в следующем: на оси  $Ox$  берется любая точка с абсциссой  $x \in X$ , через которую параллельно оси  $Oy$  проводится прямая до пересечения с графиком функции в точке  $M$ , через точку  $M$  параллельно оси  $Ox$  проводится прямая до пересечения с осью  $Oy$  в точке с координатой  $y$ , в результате получаем зависимость  $y = y(x)$ ,  $x \in X \subset \mathbb{R}$ .

3) **аналитический**, т.е. с помощью формулы. Можно выделить следующие три разновидности аналитического способа задания функции:

– **явный** (способ задания) – с помощью одного или нескольких аналитических выражений  $y = y(x)$ ,  $x \in X \subset \mathbb{R}$ , например

$$1) y = \sqrt{1-x^2}, x \in X = [0, 1]; \quad 2) y = |x| = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R};$$

$$3) y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases} \quad 4) y = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

– **неявный**, т. е. с помощью уравнения  $F(x, y) = 0$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , решая которое относительно  $y$  или  $x$ , получим неявно заданную функцию  $y = y(x)$ , или  $x = x(y)$  соответственно, например,



1)  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ,  $x \in X = [0, 1]$ ,  $y \in Y = [0, 1]$  (задает  $y = y(x)$  как неявную функцию  $x$  и  $x = x(y)$  как неявную функцию  $y$ );

2)  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x \in X = [-1, 1]$ ,  $y \in Y = [-1, 0]$  (задает  $y = y(x)$  как неявную функцию  $x$ );

3)  $x + y^2 = 1$ ,  $x \in X = [0, 1]$ ,  $y \in Y = [0, 1]$  (задает  $y = y(x)$  как неявную функцию  $x$  и  $x = x(y)$  как неявную функцию  $y$ ).

– **параметрический** – с помощью системы  

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in T = [t_0, t_1],$$
содержащей переменные  $x$ ,  $y$  и параметр  $t$ ,  
исключая который, получаем  $y = y(x)$  как функцию  $x$  или  $x = x(y)$  как функцию  $y$ , например,

$$1) \begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{1-t^2}, \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad (y = \sqrt{1-x^2} - \text{функция } x, x \in [0, 1]);$$

$$2) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [\pi, 2\pi] \quad (y = -\sqrt{1-x^2} - \text{функция } x, x \in [-1, 1]);$$

$$3) \begin{cases} x = t^4 + 1, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (x = y^2 + 1 - \text{функция } y, y \in [0, +\infty)).$$

*Замечание 1.* От явного способа задания функции всегда можно перейти к неявному:

$$y = 16 + x^2 \Rightarrow y - 16 - x^2 = 0$$

или параметрическому:

$$y = 16 + x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = 16 + t^2. \end{cases}$$

Обратный переход возможен далеко не всегда.

*Замечание 2.* Отметим, что выражение  $y = \sqrt{1-x^2}$ ,  $x \in [0, 1]$  и  $x^2 + y^2 = 1$  для  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in [0, 1]$ , а также  $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , равносильны и задают одну и ту же функцию, но в первом случае явно, во втором – неявно, в третьем – параметрически.

Рассмотрим далее выражение  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,  $y \in [-1, 1]$ . В этом (общем) случае оно не определяет ни  $y$  как неявную функцию  $x$ , ни  $x$  как неявную функцию  $y$ . Существует бесконечное число

функций вида  $y = y(x)$  таких, что  $x^2 + (y(x))^2 = 1$ ,  $x \in [-1, 1]$ , в частности  $y = \sqrt{1-x^2}$ ,  $y = -\sqrt{1-x^2}$ ,  $x \in [-1, 1]$ ;  $y = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \in [-1, 0], \\ -\sqrt{1-x^2}, & x \in (0, 1]. \end{cases}$

Встречается также *словесный* способ задания функции, например,

$f(x) = [x]$  - целая часть действительного числа  $x$ ;

$g(x) = \{x\}$  - дробная часть действительного числа  $x$ ;

$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$  - функция Дирихле, которая задается следующим

образом: функция равна 1 для всех рациональных значений аргумента  $x$  и 0 - для всех иррациональных значений  $x$ . Такая функция не может быть задана ни табличным способом (так как она определяется на всей числовой оси и множество значений ее аргумента бесконечно), ни графическим.

*Определение.* Пусть функция  $y = \varphi(x)$  отображает числовое множество  $X = D_\varphi$  в множество  $Y = E_\varphi$ , а функция  $z = f(y)$  отображает множество  $R_\varphi = D_f$  в множество  $E_f$ . Тогда функция

$$z = f(\varphi(x))$$

называемая *сложной* функцией, или *суперпозицией (композицией)* функций  $\varphi$  и  $f$ , определена на множестве  $X$  и отображает его в множество  $E_f$ . При этом функция  $y = \varphi(x)$  считается промежуточным аргументом (переменной) для функции  $z = f(\varphi(x))$ .

Например, функцию  $z = \sin 2x$  можно рассматривать как сложную, образованную суперпозицией функций  $y = 2x$  и  $z = \sin y$ .

*Определение.* Пусть функция  $y = f(x)$  задает взаимно однозначное соответствие между множеством определения  $D_f$  и множеством значений  $E_f$ , т. е. каждому числу  $x \in D_f$  соответствует единственное число  $y \in E_f$ , и наоборот. Т. к. при этом каждому числу  $y \in E_f$  ставится в соответствие единственное число  $x \in D_f$ , то можно говорить, что на множестве  $R_f$  определена функция  $x = f^{-1}(y)$ , *обратная* по отношению к данной функции  $y = f(x)$ ,  $x \in D_f$ .

Поскольку графики функций  $y = f(x)$  и  $x = f^{-1}(y)$  совпадают, то графики функций  $y = f(x)$  и  $y = f^{-1}(x)$  симметричны относительно прямой  $y = x$ , т. к. при переходе от прямой функции к обратной оси абсцисс и ординат меняются местами.

Например, функция  $y = x^2$ ,  $D_f = [-2, 0]$ ,  $E_f = [0, 4]$  на отрезке  $[-2, 0]$  имеет обратную функцию  $y = -\sqrt{x}$ ,  $D_f = [0, 4]$ ,  $E_f = [-2, 0]$  (рис. 2).

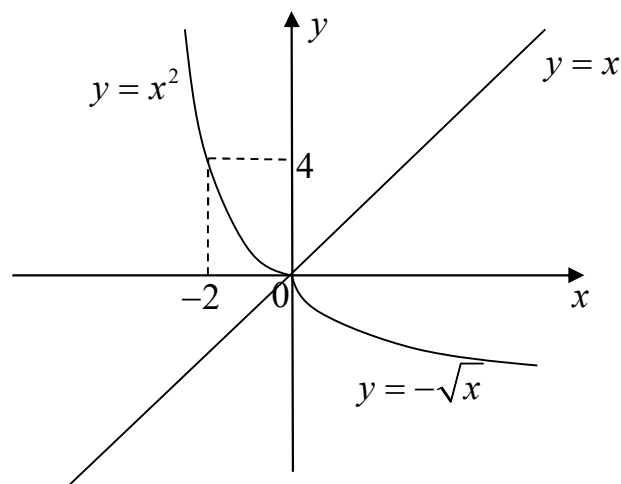


Рис. 2. Взаимное расположение графиков прямой и обратной функций

Отметим, что функция  $y = x^2$  на промежутке  $[-2, 2]$  не имеет обратной, т. к., например, значению  $y = 1,8$  соответствуют два значения  $x = \pm\sqrt{1,8}$ , что нарушает однозначность соответствия между множествами  $D_f$  и  $E_f$ .

### 3. Свойства функций одной переменной

1. **Четность и нечетность функции.** Пусть область определения  $D_f$  функции  $f$  симметрична относительно начала отсчета. Если при этом

$$f(-x) = f(x), \forall x \in D_f,$$

то функция называется **четной**, если же

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f,$$

то функция называется *нечетной*.

Из определения четности функции следует, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а нечетной – относительно начала координат.

Например, функция  $y = x^2$ ,  $x \in [-1, 1]$ , является четной (см. ее график на рис. 3).

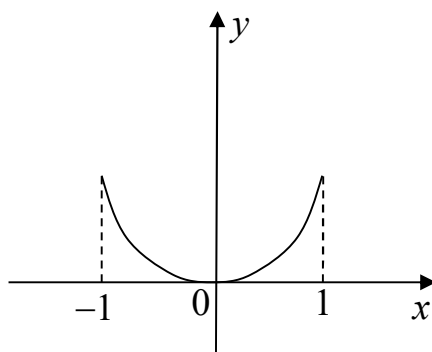


Рис. 3. График функции  $y = x^2$ ,  $x \in [-1, 1]$

Функция  $y = x^3$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , является нечетной (см. ее график на рис. 4); функция  $y = x^2 + 2x + 1$ ,  $x \in [-1, 1]$ , не является ни четной, ни нечетной.

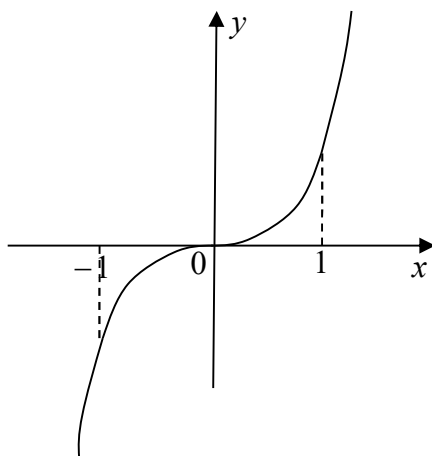


Рис. 4 График функции  $y = x^3$ ,  $x \in \mathbf{R}$

*Замечание 1.* Произвольная функция  $f : [-M; M] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  может быть единственным образом представлена в виде суммы нечётной и чётной функций:  $f(x) = g(x) + h(x)$ ,

$$\text{где } g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

*Замечание 2.* Функция  $f(x) \equiv 0$  — единственная функция, одновременно являющаяся нечётной и чётной.

**2. Периодичность функции.** Функция  $y = f(x)$  называется периодической, если для нее существует такое число  $T > 0$ , называемое **периодом функции**, что при любых  $x$  из области определения функции числа  $x + T$  и  $x - T$  также принадлежат этой области и выполняется равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Примерами периодических функций являются тригонометрические функции  $y = \sin x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$  с наименьшими периодами  $2\pi$  и  $\pi$  соответственно (см. рис. 5, 6).

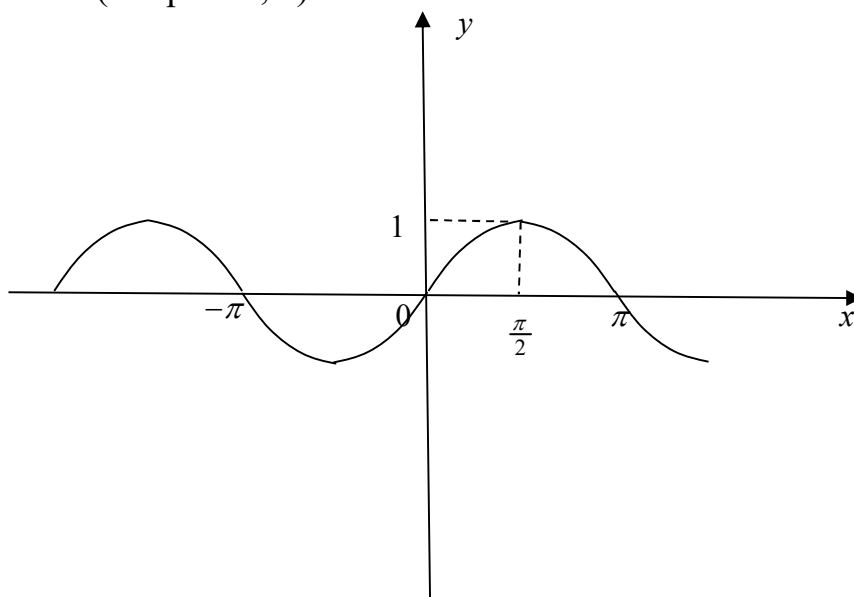


Рис. 5. График функции  $y = \sin x$

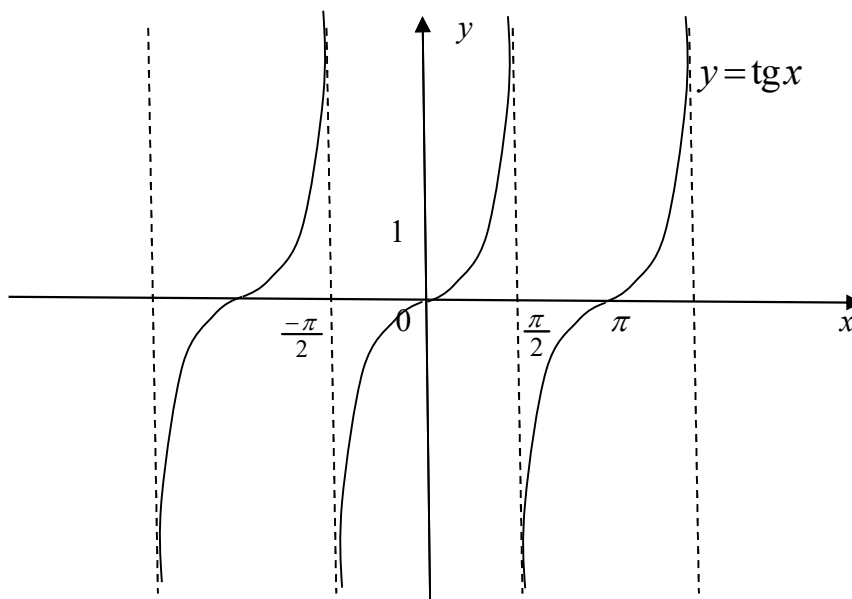


Рис. 6. График функции  $y = \operatorname{tg} x$

### 3. Монотонность функции.

Функция  $y = f(x)$  на некотором множестве  $X \subset D(y)$  называется **возрастающей** (пишут  $f \nearrow$ ), если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции (см. рис. 7а), т. е.

$$f \nearrow \text{ на } X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

Функция  $y = f(x)$  на некотором множестве  $X \subset D(y)$  называется **убывающей** (пишут  $f \searrow$ ), если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции (см. рис. 7б), т. е.

$$f \searrow \text{ на } X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

Аналогично вводятся понятия неубывающей и невозрастающей функций (см. рис. 8):

$$y = f(x) - \text{неубывающая на } X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1);$$

$$y = f(x) - \text{невозрастающая на } X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1).$$

Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие функции называются **монотонными**, причем возрастающие и убывающие - **строго монотонными**.

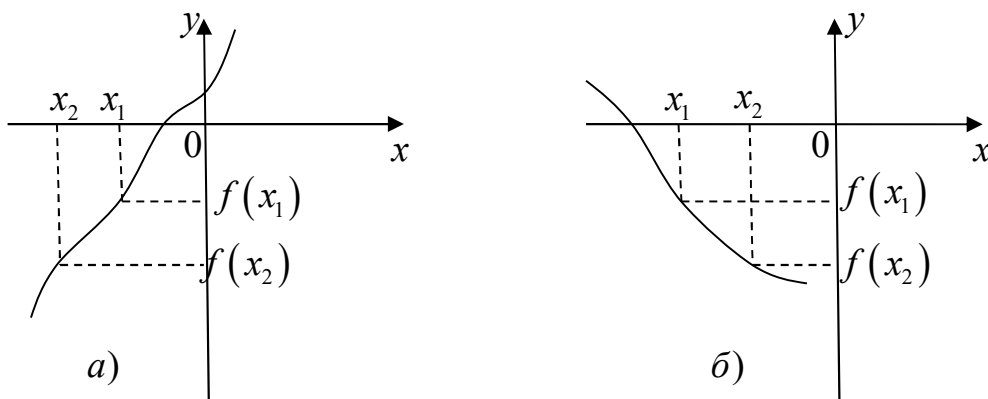


Рис. 7. Возрастающая а) и убывающая б) функции

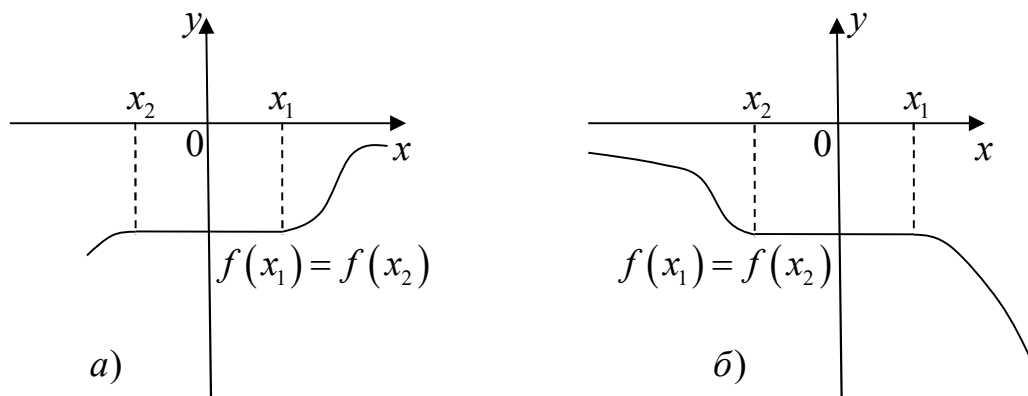


Рис. 8. Неубывающая а) и невозрастающая б) функции

4. **Ограниченность функции.** Функция  $y = f(x)$  называется **ограниченной сверху (снизу)** на множестве  $X \subset D_f$ , если существует такое число  $M$ , что для любых  $x$  из этого множества выполняется условие

$$f(x) \leq M \quad (f(x) \geq M).$$

Функция  $y = f(x)$  считается **ограниченной** на множестве  $X \subset D_f$ , если существует положительное число  $M$ , что

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in X.$$

Функция, не являющаяся ограниченной, называется **неограниченной**.

*Примеры:*

- 1) функция  $y = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ограничена снизу на всей числовой оси;
- 2)  $y = x$  ограничена сверху на множестве  $(-\infty, 0]$ ;
- 3)  $y = \sin x$  ограничена на множестве  $\mathbb{R}$ .

## 4. Элементарные функции

Основные элементарные функции:

1) **степенная функция**  $y = x^\alpha$ ,  $x \in D_f^E$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$  (см. рис. 9);

2) **показательная функция**  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$  (см. рис. 10);

3) **логарифмическая функция**  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x \in \mathbf{R}_+$  (см. рис. 11);

4) **тригонометрические функции**  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ ,  $x \in D_f^E$  (см. рис. 12);

5) **обратные тригонометрические функции**  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = \operatorname{arcctg} x$ ,  $x \in D_f^E$  (см. рис. 13).

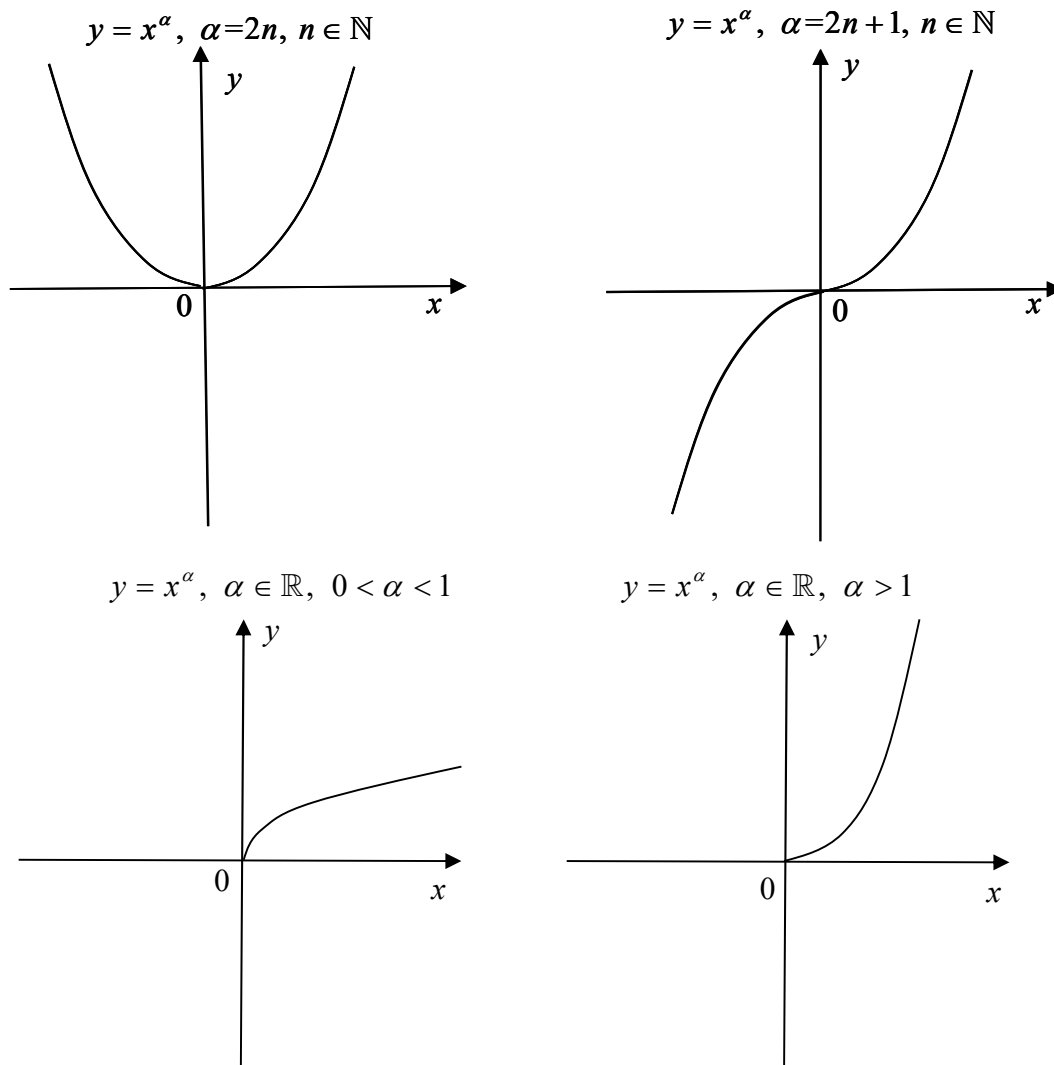


Рис. 9. График степенной функции



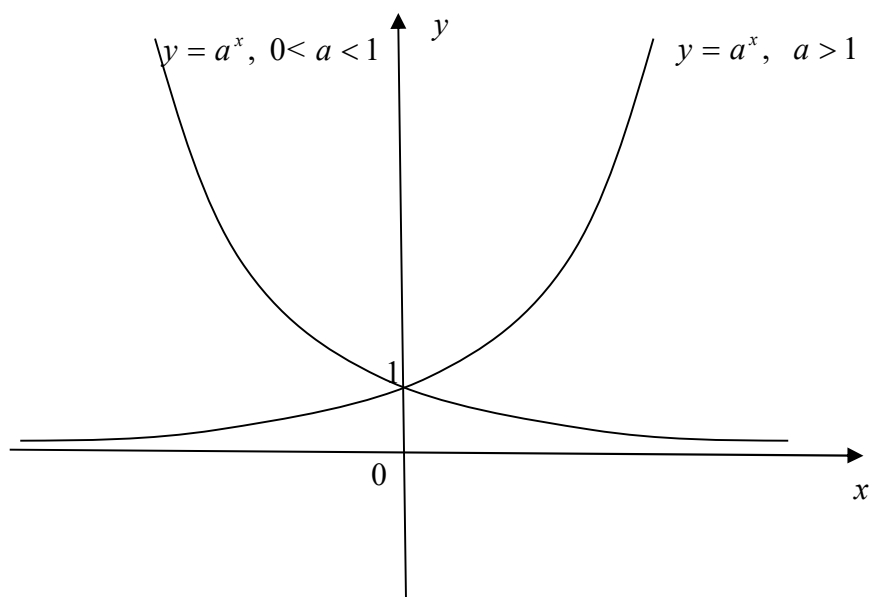


Рис. 10. График показательной функции

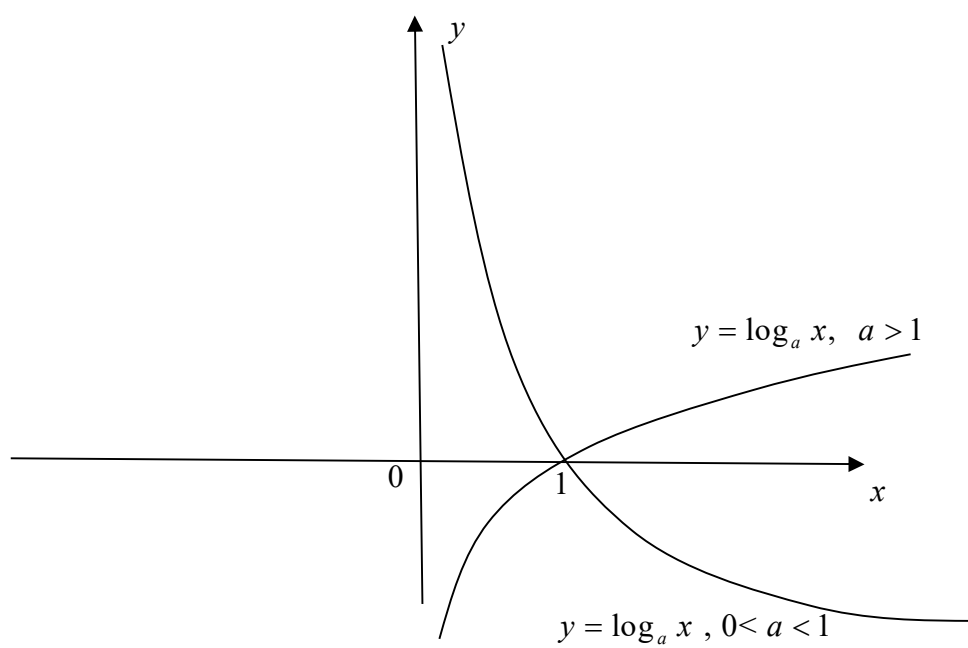
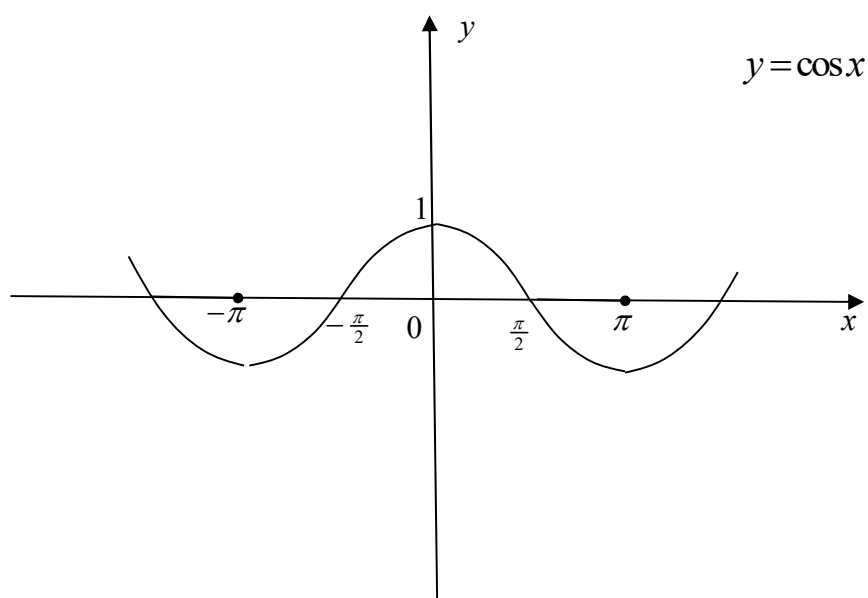
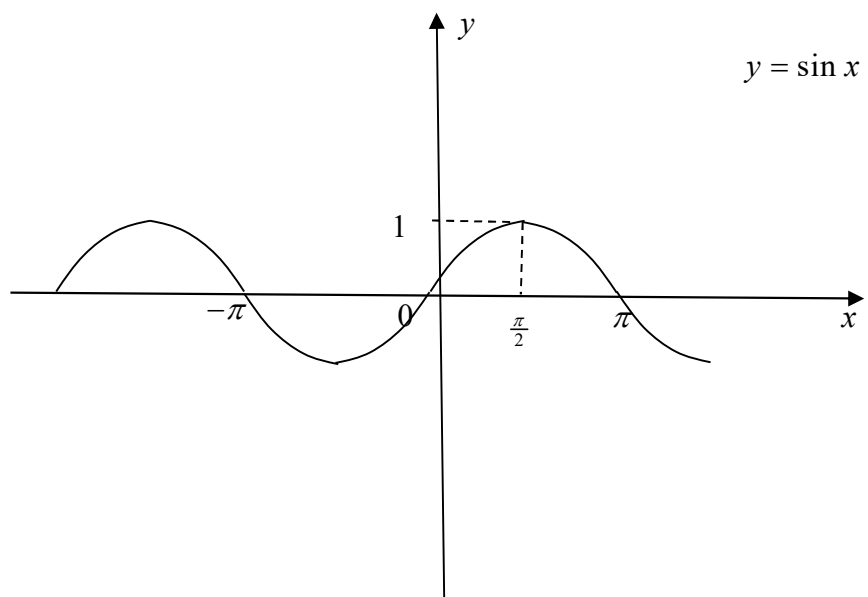


Рис. 11. График логарифмической функции



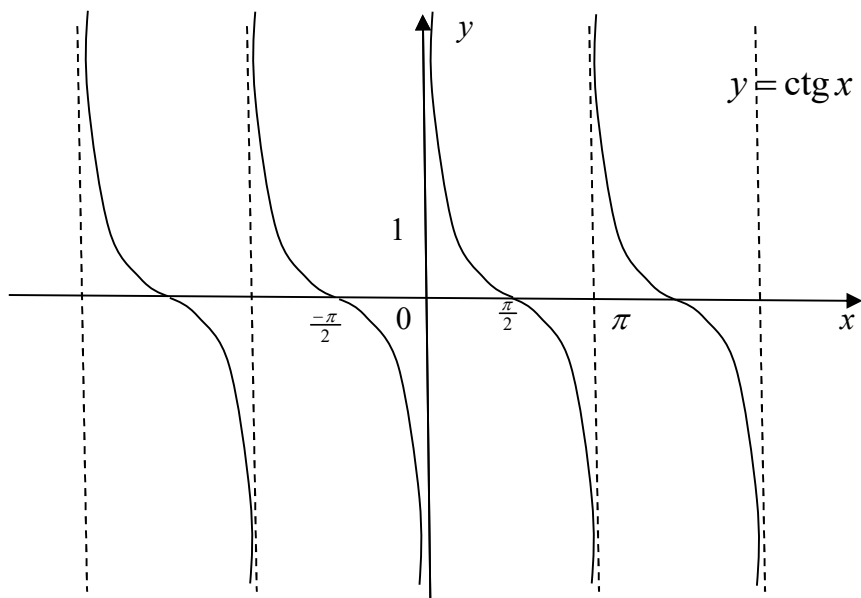
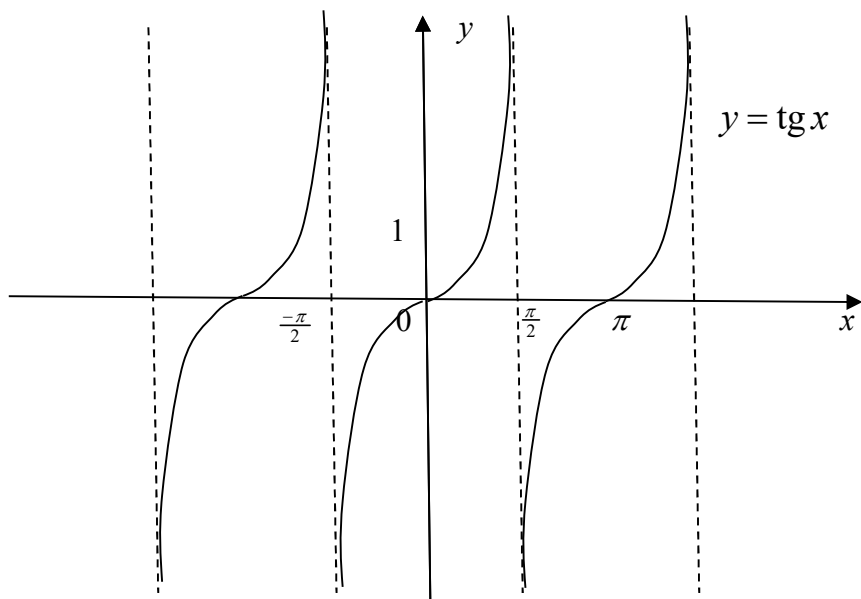


Рис. 12. Графики тригонометрических функций

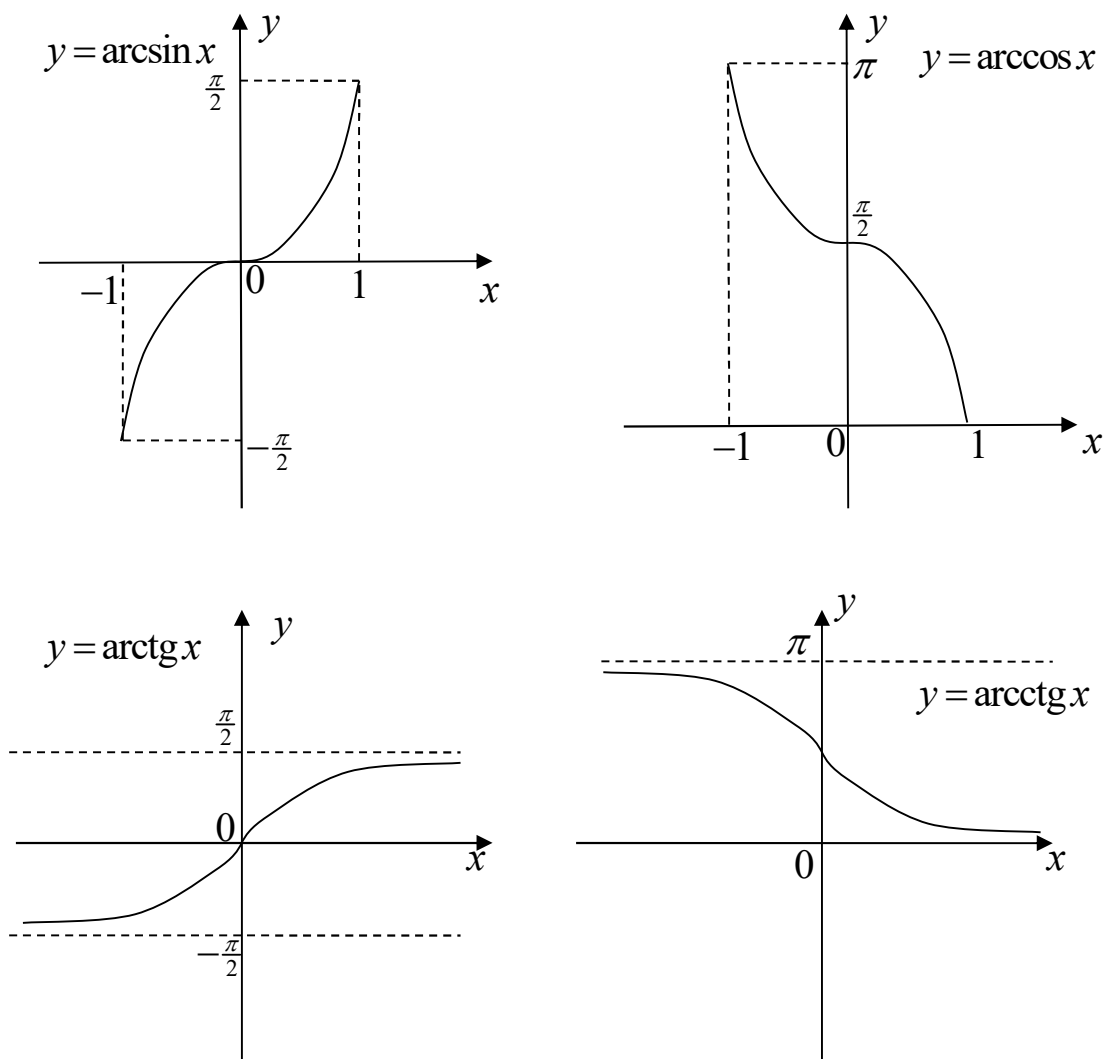


Рис. 13. Графики обратных тригонометрических функций

**Элементарными функциями** называются все функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления) с применением действительных коэффициентов и образования сложной функции.

Некоторые важные элементарные функции:

1) **линейная функция**  $y = ax + b$ .

2) **квадратичная функция**  $y = ax^2 + bx + c$ .

3) многочлены с действительными коэффициентами (**целые рациональные функции**)  $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ .

4) **дробно-рациональные функции** (рациональные дроби) – отношение многочленов:  $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ .

5) **иррациональные функции** – функции, в которых используется операция извлечения корня.

Некоторые неэлементарные функции:

$$1) \text{ функция } \textbf{сигнум} - \text{функция знака} - y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

2) дробная часть  $y = \{x\} = x - [x]$ , где  $[x]$  означает целую часть  $x$ .

$$3) \text{ функция Дирихле } D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное,} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное.} \end{cases}$$

### **Классификация элементарных функций :**

1) **алгебраические** функции, которые делятся на:

1.1) **рациональные** функции, которые делятся на:

$$1.1.1) \text{многочлены } P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0;$$

$$1.1.2) \text{дробные рациональные функции } R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)};$$

1.2) **иррациональные** функции (содержащие корень любой степени).

2) **трансцендентные** – функции, не являющиеся алгебраическими. Примерами трансцендентных функций являются: тригонометрические и обратные тригонометрические, показательные и логарифмические функции.

## **5. Окрестность конечной и бесконечно удаленной точек**

**Окрестностью**  $O(a)$  конечной точки  $a$  называется любой интервал, содержащий эту точку:  $O(a) = (\alpha, \beta)$ , если  $a \in (\alpha, \beta)$ .

$\varepsilon$ -**окрестностью**  $O_\varepsilon(a)$  точки  $a$  при  $\varepsilon > 0$  называется интервал вида  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , т. е. множество точек  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - a| < \varepsilon$ . (рис. 14).

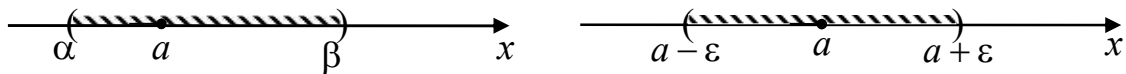


Рис. 14. Окрестности точки  $a$

Если из окрестности  $O(a)$  саму точку  $a \in \mathbf{R}$  удалить, то получим соответственно *проколотую*  $\overset{\circ}{O}(a)$  *окрестность* этой точки. Таким образом, проколотая окрестность точки  $a$  - это множество точек  $x$ , удовлетворяющих двойному неравенству  $0 < |x - a| < \varepsilon$ .

Интервалы вида  $(a - \varepsilon, a)$  и  $(a, a + \varepsilon)$  называются соответственно *левосторонней* и *правосторонней* окрестностями точки  $a$ .

**Окрестность бесконечно удаленной точки:**

$O(+\infty) = (p, +\infty) = \{ \forall x \in \mathbf{R} : x > p \}$ , где  $p$  - любое действительное число (рис. 15.а);

$O(-\infty) = (-\infty, q) = \{ \forall x \in \mathbf{R} : x < q \}$ , где  $q$  - любое действительное число (рис. 15.б);

$O(\infty) = (-\infty, q) \cup (p, +\infty)$ ,  $q > p$  - любые действительные числа (рис. 15.в);

$O_\varepsilon(\infty) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty) = \{ \forall x \in \mathbf{R} : |x| > \varepsilon \}$ , где  $\varepsilon > 0$ , т.е. множество точек, удовлетворяющих неравенству  $|x| > \varepsilon$  (рис. 15.г).

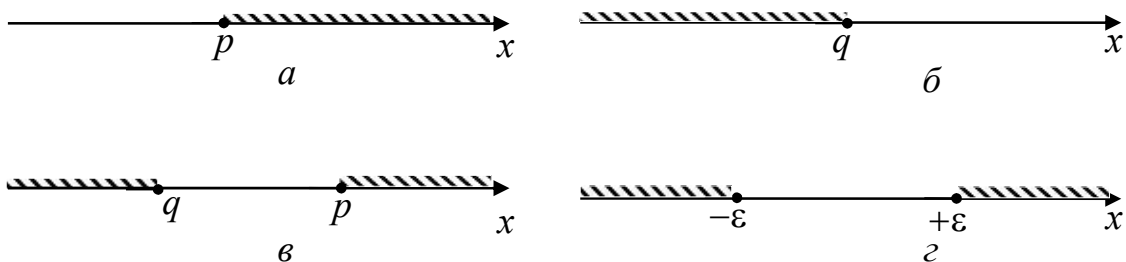


Рис. 15. Окрестности бесконечно удаленной точки

## 6. Понятие предела функции. Односторонние пределы. Арифметические свойства пределов

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой проколотой окрестности  $\overset{\circ}{O}(a)$  точки  $a$ .

**Определение.** Число  $b$  называется *пределом функции*  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если для любой окрестности  $O(b)$  точки  $b$  найдется такая проколотая окрестность  $\overset{\circ}{O}(a)$  точки  $a$ , что как только  $x \in \overset{\circ}{O}(a)$ , то  $f(x) \in O(b)$ , что обозначается  $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  или  $f(x) \rightarrow b$  при  $x \rightarrow a$  ( $f(x)$  стремится к  $b$  при  $x$ , стремящемся к  $a$ ).

Здесь точки  $a, b$  могут быть как конечные, так и бесконечные.

Следует отметить, что для существования предела функции при  $x \rightarrow a$  не требуется, чтобы функция была определена в точке  $a$ . При нахождении предела рассматриваются значения функции в точках из окрестности точки  $a$ , отличные от  $a$ .

**Определение.** Если значения функции  $y = f(x)$  стремятся к пределу  $b_1$  при  $x \rightarrow a$ , причем  $x$  принимает только значения меньше  $a$ , то записывают  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b_1$  и  $b_1$  называют *пределом слева* в точке  $a$ .

Если  $x$  принимает только значения большие чем  $a$ , то записывают  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_2$  и  $b_2$  называют *пределом справа* в точке  $a$ .

Значения односторонних пределов обычно записывают следующим образом: предел слева –  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$  и предел справа –

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0).$$

Для существования конечного предела  $b$  функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow a$  необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны оба односторонние пределы  $f(a-0)$  и  $f(a+0)$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow f(a-0) = f(a+0) = b.$$

### **Арифметические свойства пределов**

Предположим, что существуют конечные пределы функций  $f(x)$  и  $g(x)$  при  $x \rightarrow a$ , тогда:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x), \text{ где } c = \text{const} - \text{постоянная};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

Для всех элементарных функций  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , если  $a$  – внутренняя точка области определения. Если  $a$  – граничная точка области определения, то равенство верно для односторонних пределов.

*Лемма о сжатой переменной (двух «милиционеров»).* Если в некоторой окрестности  $\overset{\circ}{O}(a)$  для функций  $f(x), u(x), g(x)$  выполняется неравенство  $f(x) \leq u(x) \leq g(x)$  и существуют (конечные) пределы  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ , то существует  $\lim_{x \rightarrow a} u(x)$ , также равный  $b$ .

*Предельный переход в неравенствах:* если в некоторой окрестности  $\overset{\circ}{O}(a)$  для функций  $f(x)$  и  $g(x)$  выполняется неравенство  $f(x) \leq g(x)$  и существуют (конечные) пределы, то  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

Следует отметить, что строгое неравенство может переходить в равенство: если в некоторой окрестности  $\overset{\circ}{O}(a)$  для функций  $f(x)$  и  $g(x)$  выполняется неравенство  $f(x) < g(x)$  и существуют (конечные) пределы, то  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

*Пример.* Рассмотрим две функции  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  и  $g(x) = \frac{1}{x}$ . При  $x \rightarrow \infty$  имеем строгое неравенство  $f(x) < g(x)$ . Однако  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ .

Предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

называется *первым замечательным пределом*.



Следует иметь в виду и не путать с первым замечательным пределом следующие пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = \left[ \frac{1}{0} \right] = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{x} = \left[ \frac{\infty}{0} \right] = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \left[ \frac{\text{огр.}}{\infty} \right] = 0.$$

**Вторым замечательным пределом называется предел вида:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

где  $e = 2,718281828459045\dots$

Число  $e$  играет важную роль в математическом анализе. Показательная функция с основанием  $e$ ,  $y = e^x$  называется **экспонентой**. Логарифм по основанию  $e$  называется **натуральным (или неперовым) логарифмом** и обозначается  $\ln x$ :

$$\ln x = \log_e x.$$

Из второго замечательного предела вытекают пределы  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ , которые широко применяются для раскрытия неопределенностей.

## 7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция  $y = \alpha(x)$  называется **бесконечно малой (бмф)** при  $x \rightarrow a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ .

*Пример.* Функция  $y = 4 - x$  является бмф при  $x \rightarrow 4$ , т. к.  $\lim_{x \rightarrow 4} (4 - x) = 0$ , а функция  $y = \frac{1}{x^2}$  является бмф при  $x \rightarrow \infty$ , т. к.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ .

Основная теорема о (конечном) пределе: для того чтобы при  $x \rightarrow a$  существовал (конечный) предел функции  $y = f(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы в некоторой (достаточно малой) проколотой окрестности  $\overset{\circ}{O}(a)$  предельной точки  $a$  выполнялось равенство  $f(x) = b + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  – бмф при  $x \rightarrow a$ ,  $x \in \overset{\circ}{O}(a)$ , т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = b + \alpha(x).$$

**Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции.** Сравнение бесконечно малых функций производится путем нахождения предела их отношения.

Пусть  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  – бмф при  $x \rightarrow a$ , причем  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = A$ . Тогда

если:

- 1)  $A = 1$ , то  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются **эквивалентными бмф** при  $x \rightarrow a$ , что записывается в виде  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ;
- 2)  $A \neq 0$  и  $A \neq \infty$ , то  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  – **бмф одного порядка малости** при  $x \rightarrow a$ ;
- 3)  $A = 0$ , то  $\beta(x)$  есть **бмф более высокого порядка малости**, чем  $\alpha(x)$  при  $x \rightarrow a$  что записывается в виде  $\beta(x) = o(\alpha(x))$ ;
- 4)  $A = \infty$ , то  $\alpha(x)$  есть **бмф более высокого порядка малости**, чем  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow a$  что записывается в виде  $\alpha(x) = o(\beta(x))$ .

**Свойства бесконечно малых функций:**

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.
2. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть функция бесконечно малая.
3. Если  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , то  $\beta(x) \sim \alpha(x)$ .
4. Если  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  и  $\beta(x) \sim \gamma(x)$ , то  $\alpha(x) \sim \gamma(x)$ .
5. Если  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , то  $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)) = o(\beta(x))$ .
6. Если  $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$  и  $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)}$ .

Последнее свойство часто используется при нахождении пределов. Бесконечно малые множители, стоящие в числителе и знаменателе, удобно заменять им эквивалентными.

Следует отметить, что частное от деления бмф не обязательно бесконечно малая функция.

**Пример.** Рассмотрим функции:  $\alpha(x) = \frac{1}{x}$ ,  $\beta(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $\gamma(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ . Тогда  $\alpha(x)$  – бмф при  $x \rightarrow \infty$ ,  $\beta(x)$  – бмф при  $x \rightarrow \infty$ ,  $\gamma(x)$  – бмф при  $x \rightarrow \infty$ .

Частное  $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = x$  есть функция бесконечно большая при  $x \rightarrow \infty$ ;  
 частное  $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{1}{x}$  есть бмф при  $x \rightarrow \infty$ ; частное  $\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 1 + \frac{1}{x}$  есть  
 функция, имеющая конечный предел при  $x \rightarrow \infty$ .

Функция  $y = \beta(x)$  называется **бесконечно большой (ббф)** при  $x \rightarrow a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = \infty$  или  $\lim_{x \rightarrow a} |\beta(x)| = +\infty$ .

*Пример.* Функция  $y = 4 - x$  является ббф при  $x \rightarrow \infty$ , т. к.  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (4 - x) = \infty$ , а функция  $y = \frac{1}{x^2}$  является ббф при  $x \rightarrow 0$ , т. к.  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ .

### **Свойства бесконечно больших функций.**

1. Если в некоторой проколотой окрестности точки  $a$  функция  $\alpha(x) \neq 0$  и является бмф при  $x \rightarrow a$ , то  $\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$  есть ббф при  $x \rightarrow a$  и наоборот.

Эти свойства символически записываются  $\left[ \frac{1}{0} \right] = \infty$  и  $\left[ \frac{1}{\infty} \right] = 0$ .

2. Произведение ббф на функцию  $|f(x)| > M \neq 0$  есть ббф. В частности, произведение бесконечно больших функций есть ббф.

3. Сумма бесконечно большой и ограниченной функций есть ббф.

4. Сумма двух ббф одинакового знака есть ббф.

Следует отметить, что разность двух ббф одинакового знака не обязательно бесконечно большая функция.

*Пример.* Рассмотрим ббф при  $x \rightarrow \infty$ :  $\alpha(x) = x^2$ ,  $\beta(x) = x^2 + x$ ,  
 $\gamma(x) = x^2 + 3$ ,  $\mu(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ ,  $\nu(x) = x^3$ .

Тогда разность  $\beta(x) - \alpha(x) = x$  есть ббф при  $x \rightarrow \infty$ ; разность  
 $\mu(x) - \alpha(x) = \frac{1}{x}$  есть б.м.ф. при  $x \rightarrow \infty$ ; разность  $\gamma(x) - \alpha(x) = 3$  есть  
 постоянная функция.

Частное  $\frac{v(x)}{\alpha(x)} = x$  есть ббф при  $x \rightarrow \infty$ ; частное  $\frac{\alpha(x)}{v(x)} = \frac{1}{x}$  есть бмф при  $x \rightarrow \infty$ ; частное  $\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 1 + \frac{3}{x^2}$  есть функция, имеющая конечный предел при  $x \rightarrow \infty$ .

## 8. Вычисление пределов. Раскрытие некоторых видов неопределенностей

Отметим некоторые общие методы вычисления пределов.

1. Использование основных теорем о пределах. Поскольку для основных элементарных функций во всех точках их области определения (для элементарных функций во всех точках из интервала их области определения) имеет место свойство

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)},$$

то при вычислении пределов прежде всего вместо  $x$  подставляем предельное значение (обычно это записывается в квадратных скобках) и, если значение  $f(a)$  определено, применяем основные теоремы о пределах.

*Пример.* Вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 1}{2^x + 3}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( 3^{2x} (\cos 2x + 2x^2) \right).$$

*Решение.*

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 1}{2^x + 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2^x + 3)} = \left[ \frac{1^2 + 2 \cdot 1 - 1}{2^1 + 3} \right] = \frac{2}{5};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( 3^{2x} \cdot (\cos 2x + 2x^2) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 3^{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x^2) = \\ = \left[ 3^0 \cdot (\cos 0 + 2 \cdot 0) \right] = 1 \cdot 1 = 1.$$

Однако часто при подстановке в  $f(x)$  вместо  $x$  предельного значения  $a$  получаются выражения вида:  $\left[ \frac{0}{0} \right]; \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]; [0 \cdot \infty]; [1^\infty]; [\infty - \infty]$

и другие, которые называются неопределенностями и которые нужно «раскрывать» специальными методами, например, учитывая характер стремления к пределу отдельных функций, составляющих (входящих) функцию  $f(x)$  (см. ниже: раскрытие некоторых видов неопределенностей).

2. При вычислении пределов иногда удобно воспользоваться односторонними пределами.

Пример . Вычислить  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , если  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{при } |x| < 1 \text{ и } x \neq 0, \\ x^2 & \text{при } |x| \geq 1, \end{cases}$

при: а)  $x_0 = 1$ , б)  $x_0 = 0$ , в)  $x_0 = -1$ .

Решение.

$$\text{а) } f(x_0 - 0) = f(1 - 0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 1-0} 1 = 1,$$

$$f(x_0 + 0) = f(1 + 0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} x^2 = 1.$$

Таким образом,  $f(1 - 0) = f(1 + 0) = 1$ , следовательно,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ .

$$\text{б) } f(x_0 - 0) = f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow -0} (-1) = -1,$$

$$f(x_0 + 0) = f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} 1 = 1.$$

Таким образом,  $f(-0) \neq f(+0)$ , следовательно,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  не существует.

$$\text{в) } f(x_0 - 0) = f(-1 - 0) = \lim_{x \rightarrow -1-0} x^2 = 1,$$

$$f(x_0 + 0) = f(-1 + 0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow -1+0} (-1) = -1.$$

Таким образом,  $f(-1 - 0) \neq f(-1 + 0)$ , следовательно,  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  не существует.

3. Использование эквивалентных бесконечно малых функций в произведениях и частном. При нахождении пределов бесконечно ма-

лые множители, стоящие в числителе и знаменателе, удобно заменять им эквивалентными.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot p(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x) \cdot \gamma(x)}{\beta(x)}, \text{ если } f(x) \sim \alpha(x), g(x) \sim \beta(x), p(x) \sim \gamma(x).$$

### Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Пусть  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ . Тогда:

1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ .	2. $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ .
3. $1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$ .	4. $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ .
5. $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ .	6. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$ .
7. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$ .	8. $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$ .

*Пример.* Вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1 + 4x)}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin 4x}.$$

*Решение.*

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1 + 4x)} = \left| \frac{\sin 5x \sim 5x}{\ln(1 + 4x) \sim 4x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin 4x} = \left| \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1 \sim \frac{x + x^2}{2}}{\sin 4x \sim 4x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x + x^2}{2}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + x)}{8x} = \frac{1}{8}.$$

В следующей таблице приведены соотношения пределов суммы, произведения, частного двух функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$
$b$	$c$	$b + c$	$bc$	$\frac{b}{c}$ , если $c \neq 0$
$b \neq \infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ , если $b \neq 0$	$\left[ \frac{b}{\infty} \right] = 0$
$\infty$	$c \neq \infty$	$\infty$	$\infty$ если $c \neq 0$	$\left[ \frac{\infty}{c} \right] = \infty$
$0$	$0$	$0$	$0$	Неопределенность $\left[ \frac{0}{0} \right]$
$b$	$0$	$b$	$0$	$\left[ \frac{b}{0} \right] = \infty$ , если $b \neq 0$
$0$	$\infty$	$\infty$	Неопределенность $[0 \cdot \infty]$	$\left[ \frac{0}{\infty} \right] = 0$
$\infty$	$0$	$\infty$	Неопределенность $[\infty \cdot 0]$	$\left[ \frac{\infty}{0} \right] = \infty$
$\pm\infty$	$\mp\infty$	Неопределенность $[\infty - \infty]$	$-\infty$	Неопределенность $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$

Рассмотрим основные методы раскрытия некоторых неопределенностей.

**Неопределенность вида  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ .**

1. Использование первого замечательного предела. При вычислении предела дроби, содержащей тригонометрические функции, в случае, когда предел и числителя, и знаменателя равен нулю, можно использовать первый замечательный предел или эквивалентные бесконечно малые.

2. При нахождении  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$  отношения двух многочленов  $P(x)$  и  $Q(x)$ , если  $P(a) = Q(a) = 0$ , следует числитель и знаменатель дроби

разделить на разность  $(x - a)$  один или несколько раз, пока не исчезнет неопределенность.

3. При раскрытии неопределенности  $\left[\frac{0}{0}\right]$  в случае иррациональных выражений в числителе и (или) знаменателе следует избавиться от иррациональности путем умножения на соответствующее сопряженное выражение или производя замену переменных.

**Неопределенность вида  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ .**

1. При нахождении предела  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$  отношения двух многочленов  $P(x)$  и  $Q(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  числитель и знаменатель дроби целесообразно разделить на  $x^n$ , где  $n$  – высшая степень этих многочленов.

2. При раскрытии неопределенности  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$  в случае иррациональных выражений в числителе и знаменателе дроби выделяются множители  $x^m, x^n$ , где  $m, n$  – максимально возможные показатели степеней  $((m, n) \in \mathbb{Q})$ . Затем производится сокращение на  $x^p$  ( $p = \min(m, n)$ ).

**Неопределенность вида  $[1^\infty]$ .**

Для раскрытия неопределенности вида  $[1^\infty]$  часто используется второй замечательный предел и следствия из него:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{nx} = e^{kn}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{n/x} = e^{kn}.$$

**Неопределенности вида  $[\infty - \infty]$ ,  $[0 \cdot \infty]$ .**

Неопределенности таких видов раскрываются сведением с помощью преобразований к неопределенностям  $\left[\frac{0}{0}\right]$ ,  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$  и другим.



## 9. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке

Функция  $y = f(x)$  называется **непрерывной в точке**  $x_0$ , если:

- 1)  $f(x)$  определена в точке  $x_0$  и некоторой ее окрестности;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Т. к.  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ , то второе условие определения непрерывности функции в точке можно записать в виде

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0).$$

Это означает, что для непрерывной функции знаки предела и функции можно переставлять.

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Придадим аргументу  $x_0$  приращение  $\Delta x$ . Тогда функция  $y = f(x)$  получит приращение  $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  (рис. 16).

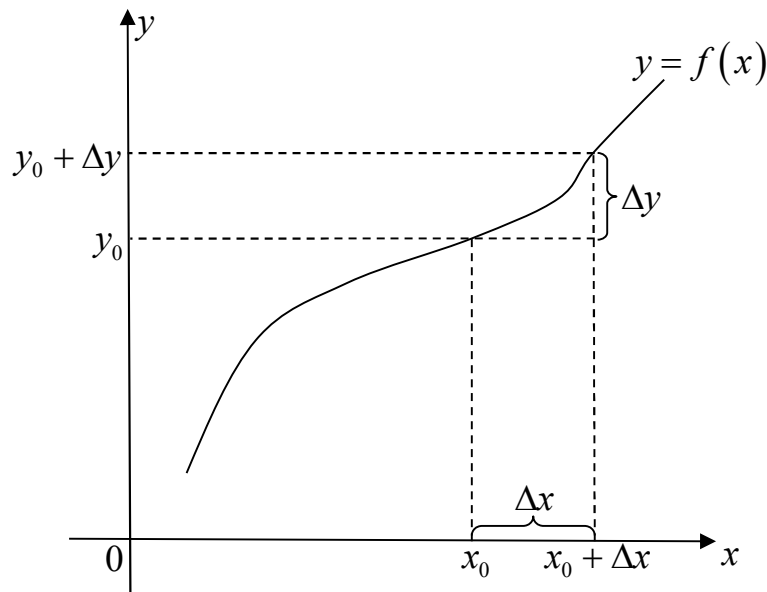


Рис. 16. Приращение функции

Из второго условия определения непрерывности функции в точке вытекает, что для непрерывной в точке  $x_0$  функции  $f(x)$  предел

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  существует и конечен. Это равносильно существованию предела  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta y = 0$ . Таким образом, второе условие в определении означает, что  $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0$ , т. е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции (определение непрерывности на языке приращений).

С помощью определения непрерывности на языке приращений доказывается непрерывность основных элементарных функций.

*Пример.* Доказать, что функция  $y = x^3$  непрерывна в любой точке области определения, т. е. в любой точке  $x_0 \in \mathbf{R}$ .

*Решение.* Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$  в точке  $x_0$  и найдем приращение функции  $\Delta y$ :

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = \\ &= x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) = 3x_0^2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + 3x_0 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^2 + \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^3 = 3x_0^2 \cdot 0 + 3x_0 \cdot 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ , а это и означает, что функция  $y = x^3$  непрерывна в точке  $x_0 \in \mathbf{R}$ .

Если функция  $y = f(x)$  определена в левосторонней (или правосторонней) окрестности точки  $x_0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$  (аналогично  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ ), то функция  $y = f(x)$  называется **непрерывной в точке  $x_0$  слева** (соответственно **справа**).

Таким образом, функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , тогда и только тогда, когда она непрерывна в ней слева и справа.

Отсюда получаем удобный на практике **критерий (условия)** непрерывности.

$f(x)$  непрерывна при  $x = x_0$  в том и только том случае, если

- 1) функция определена в точке  $x_0$ ;
- 2) односторонние пределы  $f(x_0 - 0)$ ,  $f(x_0 + 0)$  функции в точке  $x_0$  существуют, равны между собой и равны значению функции в этой точке:  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ .

***Свойства функций, непрерывных в точке:***

1. Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны в точке  $x_0$ , то их арифметические комбинации:  $f(x) \pm g(x)$ ,  $c \cdot f(x)$  ( $c$  – постоянная),  $f(x) \cdot g(x)$  и  $\frac{f(x)}{g(x)}$  (при условии что  $g(x_0) \neq 0$ ) также непрерывны в точке  $x_0$ .
2. Если функция  $u = \phi(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , а функция  $y = f(u)$  непрерывна в точке  $u_0 = \phi(x_0)$ , то сложная функция  $y = f(\phi(x))$  непрерывна в точке  $x_0$ .

**10. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке**

Функция  $y = f(x)$  называется непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , если она непрерывна в каждой точке интервала  $(a, b)$  в точке  $a$  непрерывна справа, а в точке  $b$  непрерывна слева.

***Свойства функций, непрерывных на отрезке***

1. Основные элементарные функции непрерывны в области их определения;
2. Элементарные функции непрерывны на каждом из интервалов, целиком лежащих в области определения;
3. Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она ограничена на этом отрезке (***первая теорема Вейерштрасса***);
4. Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то на этом отрезке она достигает своего наименьшего значения  $f_{\text{нм}}$  и наибольшего значения  $f_{\text{нб}}$  (***вторая теорема Вейерштрасса***) (рис. 17).

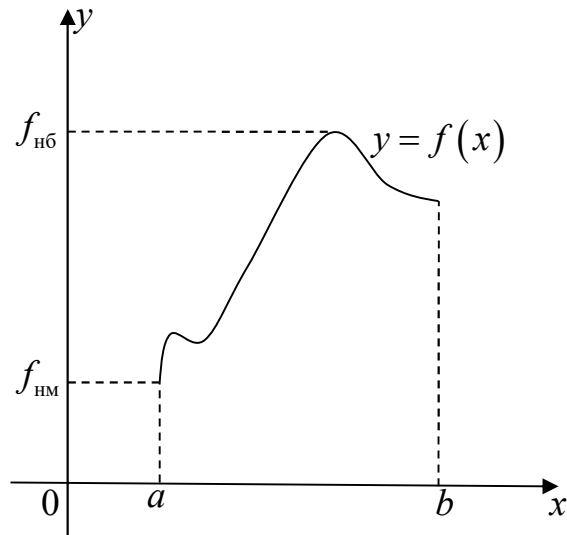


Рис. 17. Наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке функции

5. Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и  $f(a) = A, f(b) = B$ , то для любого числа  $C$ , заключенного между  $A$  и  $B$ , найдется такая точка  $c \in [a, b]$ , что  $f(c) = C$  (**теорема Больцано-Коши о промежуточном значении**) (рис. 18);

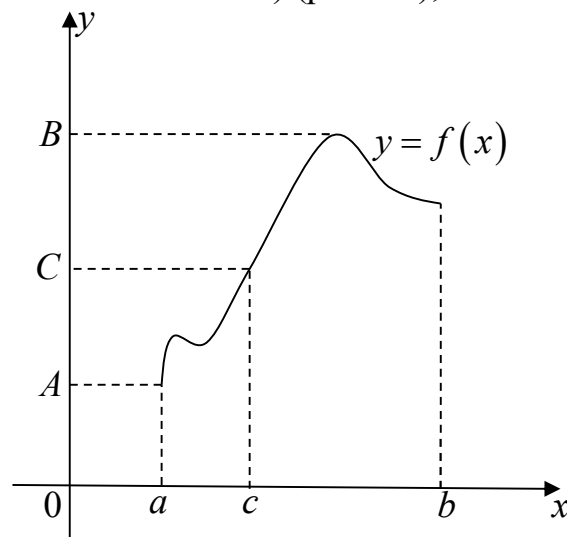


Рис. 18. Промежуточные значения непрерывной на отрезке функции

## 11. Точки разрыва функции и их классификация

Если для функции  $y = f(x)$ , определенной по крайней мере в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$ , не выполняется хотя бы одно из условий критерия непрерывности, то точка называется **точ-**

### **кой разрыва функции.**

Точки разрыва функции классифицируются следующим образом.

*Точка  $x_0$  называется точкой:*

1) **устранимого разрыва** функции  $y = f(x)$ , если в этой точке существуют односторонние конечные пределы  $f(x_0 - 0)$  и  $f(x_0 + 0)$ , они равны между собой:  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ , но сама функция  $y = f(x)$  не определена в точке  $x_0$ , или определена, но ее значение не равно односторонним пределам:  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ ;

2) **конечного разрыва (скачка)** функции  $y = f(x)$ , если в этой точке существуют конечные односторонние пределы  $f(x_0 - 0)$  и  $f(x_0 + 0)$ , но они не равны между собой:  $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ ;

3) **бесконечного разрыва (скачка)** функции  $y = f(x)$ , если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов бесконечен;

4) **несуществования**, если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов не существует.

Если в точке устранимого разрыва функцию доопределить или значение сделать равным односторонним пределам, то функция в этой точке станет непрерывной.

Точки устранимого и конечного разрывов называют **точками разрыва I рода**.

Функция, которая на любом конечном интервале имеет конечное число разрывов I рода, называется **кусочно-непрерывной** (на этом интервале).

Если хотя бы один из односторонних пределов  $f(x_0 - 0)$  или  $f(x_0 + 0)$  не существует или равен бесконечности, то точки разрыва называют **точками разрыва II рода**.