ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти общее решение ДУ $xy' + y = 0$.

Решение. Полагаем $y' = \frac{dy}{dx}$. Тогда уравнением запишется в виде

$$\frac{xdy}{dx} + y = 0.$$

Разделяем переменные: $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$.

Интегрируем: $\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right| \Rightarrow y = \frac{C}{x}$.

Заметим, что общее решение $y = \frac{C}{x}$ данного ДУ задает семейство гипербол.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$(1 + x^2)dy + ydx = 0$$

при начальном условии $y(1) = 1$.

Решение. Вначале найдем общее решение дифференциального уравнения. Это уравнение с разделяющимися переменными. Чтобы разделить переменные, поделим обе части уравнения на произведение $y(1 + x^2)$:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{1 + x^2} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1 + x^2}.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1 + x^2} + C,$$

или

$$\ln|y| = -\operatorname{arctg} x + C.$$

Это общий интеграл данного уравнения.

Найдем произвольную постоянную C в соответствии с начальными условиями:

$$\ln 1 = -\operatorname{arctg} 1 + C,$$

откуда $C = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, частный интеграл имеет вид:

$$\ln y = -\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}.$$

Частное решение будет $y = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}$.

Пример 3. Найти общее решение ДУ $xy' + y = 1$.

Решение. 1 способ. Это ДУ с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем:

$$x\frac{dy}{dx} = 1 - y \Rightarrow \frac{dy}{1-y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y-1| = -\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y - 1 = \frac{C}{x},$$

откуда получаем $y = \frac{C}{x} + 1$ – общее решение.

2 способ. Заметим, что данное ДУ можно записать в виде

$$xy' + y = (xy)' = 1,$$

откуда, интегрируя обе части, получаем

$$xy = x + C.$$

Выражая переменную *y*, получаем $y = 1 + \frac{C}{x}$ – общее решение.

Пример 4. Найти общее решение ДУ $y' = \frac{x+2y}{x}$.

Решение. Проверим условие однородности. Обозначим через $f(x;y) = \frac{x+2y}{y}$ правую часть ДУ. Поскольку

$$f(tx;ty) = \frac{tx+2ty}{ty} = \frac{t(x+2y)}{ty} = \frac{x+2y}{y} = f(x;y),$$

то условие однородности выполняется.

Следовательно, это однородное ДУ, которое решается с помощью подстановки $y = ux$. Тогда $y' = u'x + u$, и исходное дифференциальное уравнение примет вид

$$u'x + u = 1 + 2u.$$

Учитывая, что $u' = \frac{du}{dx}$, можно преобразовать уравнение к виду

$$\frac{du}{dx}x = 1 + u$$

и разделить переменные:

$$\frac{du}{1+u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем каждую часть равенства:

$$\int \frac{du}{1+u} = \int \frac{dx}{x},$$

откуда

$$\ln|1+u| = \ln|x| + C_1,$$

где C_1 - произвольная постоянная, которую можно записать в виде $C_1 = \ln|C|$ с новой произвольной постоянной C. Тогда

$$\ln|1+u| = \ln|x| + \ln|C|;$$

$$\ln|1+u| = \ln|Cx|;$$

$$1 + u = Cx;$$

$$u = Cx - 1.$$

Делаем обратную подстановку и получаем общее решение

$$y = C\,x^2 - x.$$

Пример 5. Найти общее решение ДУ $y' = -\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$.

Решение. Проверим условие однородности. Обозначим через $f(x;y) = -\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$ правую часть ДУ. Поскольку

$$f(tx;ty) = -\frac{tx+\sqrt{(tx)^2+(ty)^2}}{ty} = f(x;y),$$

то условие однородности выполняется и, следовательно, мы имеем однородное ДУ. Применяя подстановку $y = ux$ и интегрируя, получаем:

$$xu' + u = -\frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u} \Rightarrow xu' = -\frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u} - u = -\frac{1+u^2+\sqrt{1+u^2}}{u} \Rightarrow$$

$$\int \frac{udu}{1+u^2+\sqrt{1+u^2}} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{1+\sqrt{1+u^2}} \cdot \frac{udu}{\sqrt{1+u^2}} = -\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\ln\left|1+\sqrt{1+u^2}\right| = \ln\left|\frac{C}{x}\right| \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{1+u^2}\right)^2 = \left(\frac{C}{x} - 1\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{x^2} = \frac{C^2}{x^2} - 2\frac{C}{x}$$

$\Rightarrow$ $y^2 = C^2 - 2Cx$ – общий интеграл данного ДУ.

Заметим, что семейство интегральных кривых данного ДУ– семейство парабол.

Пример 6. Найти общее решение ДУ $x^2 y' = (y - x)\, y$.

Решение. Выразим y' : $y' = \dfrac{(y-x)\,y}{x^2}$. Обозначим правую часть этого ДУ через $f(x;y) = \dfrac{(y-x)y}{x^2}$ и проверим условие однородности:

$$f(tx;ty) = \frac{(ty - tx)ty}{(tx)^2} = \frac{(y-x)t^2 y}{t^2 x^2} = \frac{(y-x)\,y}{x^2} = f(x;y).$$

Условие выполняется, это однородное ДУ. Применяя подстановку $y = ux$, $y' = xu' + u$ и интегрируя, получаем:

$$xu' + u = \frac{(ux - x)ux}{x^2} = (u-1)u \Rightarrow xu' = (u-1)u - u = u^2 - 2u$$

$$\Rightarrow \frac{xdu}{dx} = u^2 - 2u \Rightarrow$$

$$\frac{xdu}{u^2 - 2u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{xdu}{u^2 - 2u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{u^2 - 2u + 1 - 1} = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\int \frac{du}{(u-1)^2 - 1} = \ln|Cx| \Rightarrow \ \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right| = \ln|Cx| \Rightarrow \ \Rightarrow \frac{u-2}{u} = Cx^2 \Rightarrow$$

$u\left(1 - Cx^2\right) = 2 \Rightarrow u = \dfrac{2}{1 - Cx^2} \Rightarrow y = \dfrac{2x}{1 - Cx^2}$ - общее решение ДУ.

Пример 7. Найти общее решение ДУ $x\,y' - 2y = 2x^4$.

Решение. Это линейное ДУ. Применяем метод u на v : пусть $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим эти выражения в исходное уравнение и сгруппируем следующим образом:

$$xu'v + xuv' - 2uv = 2x^4;$$
$$xu'v + u(xv' - 2v) = 2x^4.$$

Приравнивая выражение в скобках к нулю, получим систему:

$$\begin{cases} xv' - 2v = 0, \\ xu'v = 2x^4. \end{cases}$$

Для решения первого уравнения системы

$$x\frac{dv}{dx} - 2v = 0$$

разделим переменные:

$$\frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}$$

и проинтегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x},$$

получим:

$$\ln|v| = 2\ln|x|, \text{ или } v = x^2.$$

Подставляем значение v во второе уравнение системы:

$$x\,u'\,x^2 = 2x^4.$$

Тогда $u' = 2x,$ или $\dfrac{du}{dx} = 2x$. Разделяем переменные

$$du = 2xdx$$

и интегрируем

$$\int du = \int 2\,xdx + C.$$

Функция u будет равна $u = x^2 + C$.

Решение дифференциального уравнения примет вид:

$$y = u \cdot v = (x^2 + C)x^2 = x^4 + C\,x^2.$$

Пример 8. Найти общее решение ДУ $xy' + y = x^2 + 1$.
Решение. Это ДУ линейное. Применяем метод u на v: $y = u \cdot v$; $y' = u'\,v + u\,v'$. Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получим:

$$x(u'v + uv') + uv = x^2 + 1 \Rightarrow xu'v + u\underbrace{\left(xv' + v\right)}_{=0} = x^2 + 1$$

Тогда
$$\begin{cases} xv' + v = 0, \\ xu'v = x^2 + 1, \end{cases}$$

Решаем первое уравнение: $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|x| \Rightarrow v = \dfrac{1}{x}$.

Подставляя это выражение во второе уравнение системы, получаем: $u' = x^2 + 1 \Rightarrow du = \left(x^2 + 1\right)dx \Rightarrow u = \int\left(x^2 + 1\right)dx \Rightarrow u = \dfrac{x^3}{3} + x + C$.

Тогда $y = u \cdot v = (\frac{x^3}{3} + x + C) \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x} + 1$ – общее решение ДУ.

Пример 9. Найти общее решение ДУ $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли. Применим подстановку такую же, как при решении линейного уравнения

$$y = uv \Rightarrow y' = u' v + u v' .$$

Получим

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = x^2 u^4 v^4 ;$$

$$u' v + u(v' + \frac{v}{x}) = x^2 u^4 v^4 .$$

Приравнивая выражение в скобках к нулю, получим систему:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0, \\ u' v = x^2 u^4 v^4 . \end{cases}$$

Для решения первого уравнения системы разделим переменные:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{x} dx$$

и проинтегрируем это равенство

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = -\ln x \Rightarrow v = \frac{1}{x} .$$

Подставим вместо v его выражение во второе уравнение системы:

$$u' \frac{1}{x} = x^2 \frac{1}{x^4} u^4 \Rightarrow u' = \frac{u^4}{x} .$$

Разделим переменные $\frac{du}{u^4} = \frac{dx}{x}$ и проинтегрируем это соотношение

$$\int \frac{du}{u^4} = \int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow \frac{u^{-3}}{-3} = \ln|x| + \ln C$$

или $\frac{1}{u^3} = -3 \ln C|x|$, или $u = -\frac{1}{\sqrt[3]{3 \ln C|x|}}$. Следовательно, искомая функция будет равна:

$$y = uv = -\frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{3 \ln C\,|\,x\,|}}\,.$$

Пример 10. Найти общее решение ДУ $xy' - y + 4x^3y^2 = 0$.
Решение. *1 способ*. Это ДУ Бернулли: $a(x) = x, b(x) = -1,\ c(x) = 4x^3$, $m = 2$. Применяем метод u на v: $y = u \cdot v$; $y' = u'v + uv'$.

Тогда

$$x(u'v + uv') - uv + 4x^3u^2v^2 = 0 \Rightarrow$$

$$xu'v + u\underbrace{(xv' - v)}_{=0} = -4x^3u^2v^2 \Rightarrow \begin{cases} xv' - v = 0, \\ xu'v = -4x^3u^2v^2, \end{cases}$$

откуда $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = \ln|x| \Rightarrow v = x$.

Подставляя это выражение во второе уравнение системы, получаем:

$$u' = -4x^3u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2} = -4x^3dx \Rightarrow -\frac{1}{u} = -x^4 - C.$$

Тогда $y = u \cdot v = \frac{1}{x^4 + C} \cdot x = \frac{x}{x^4 + C}$ – общее решение.

2 способ. Заметим, что

$$xy' - y = -4x^3y^2 \Rightarrow \frac{y - xy'}{y^2} = 4x^3 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)' = 4x^3.$$

Интегрируя, получаем: $\frac{x}{y} = x^4 + C \Rightarrow y = \frac{x}{x^4 + C}$ – общее решение.