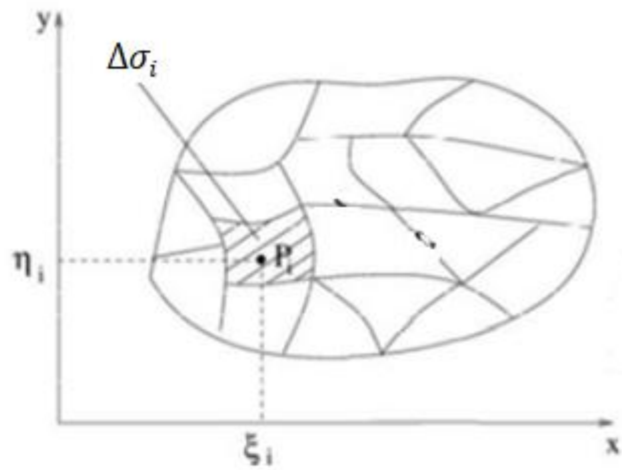
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§1. Определение двойного интеграла

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой замкнутой области D плоскости xOy (то есть вместе с границей). Предположим далее, что эта функция ограничена в этой области. Более того, предположим, что граница области ***кусочно-гладкая***, то есть имеет касательные почти во всех точках и их положение (касательных) меняется непрерывно при переходе от одной точки границы к другой за исключением конечного числа точек. К тому же функция $z = f(x, y)$ непрерывна или имеет конечное число гладких кусков.

Проделаем следующие операции:

P. Разобьем область D на конечное число элементарных областей (ячеек) D_1, $D_2, \dots,$ D_n не имеющих общих внутренних точек. Площади этих ячеек обозначим $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. Максимальное расстояние между любыми двумя точками на границе ячейки обозначим d_1, $d_2, \dots, d_n$ назовем диаметром ячейки. Через d обозначим число $d = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{d_i\}$, называемое ***диаметром разбиения***.



B. Выберем в каждой из элементарных ячеек D_i произвольным образом точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ и вычислим значение функции $f(\xi_i, \eta_i)$, $i = \overline{1, n}$.

C. Составим сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i,$$

называемую ***интегральной суммой функции*** $z = f(x, y)$ ***по области D***.

Определение. Если существует *конечный* предел интегральных сумм при *диаметре разбиения, стремящемся к нулю*, не зависящий от *способа разбиения* области D на элементарные области D_i и *выбора точек* (ξ_i, η_i) в них, то этот предел называется ***двойным интегралом*** от функции $z = f(x, y)$ по области D и обозначается

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

Если область D разбивать на ячейки линиями, параллельными осям координат, то все элементарные области, за исключением может быть граничных, имеют вид прямоугольников, и, следовательно, $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$ и интегральная сумма имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i.$$

Переходя к пределу при $d \to 0$ также получим двойной интеграл, который обозначают

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta x_i \Delta y_i\,.$$

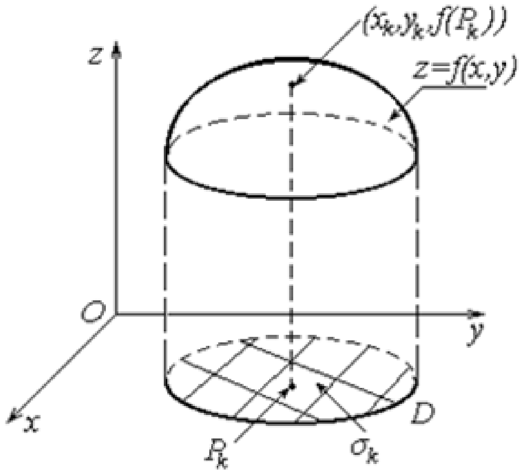
В дальнейшем проделанную операцию будем называть **Р.В.С.** произведенной относительно области D и функции $z = f(x,y)$

Если предел интегральных сумм существует и конечен, то $z = f(x,y)$ называют ***подынтегральной функцией,*** *D* ***– областью интегрирования,*** *x* ***и*** *y* ***– переменными интегрирования,*** $d\sigma = dxdy$ – ***элементом площади.*** При этом функцию $z = f(x,y)$ называют ***интегрируемой в области D.***

Геометрический смысл двойного интеграла:

Пусть функция $z = f(x,y)$ непрерывная неотрицательная функция в некоторой замкнутой области *D*. Тогда двойной интеграл численно равен объему *V* цилиндрического тела, ограниченного:

1. сверху поверхностью *z=f(x,y)*;
2. снизу областью *D* на плоскости *xOy*;
3. сбоку цилиндрической поверхностью с образующей параллельной оси *Oz* и направляющей линией, являющейся границей области *D*.



Из геометрического смысла двойного интеграла следует, что при *f(x,y)*=1

$$S_D = \iint\limits_D dxdy$$

– площадь области *D*.

Физический смысл двойного интеграла

1. Если D – плоская материальная пластинка с поверхностной плотностью $\rho(x,y)$, то масса пластинки находится по формуле

$$m = \iint\limits_{D} \rho(x,y)\,dx\,dy\,.$$

2. Статические моменты пластинки относительно осей *Ox* и *Oy* находят по формулам

$$S_x = \iint\limits_{D} y\rho(x,y)\,dx\,dy,\ S_y = \iint\limits_{D} x\rho(x,y)\,dx\,dy.$$

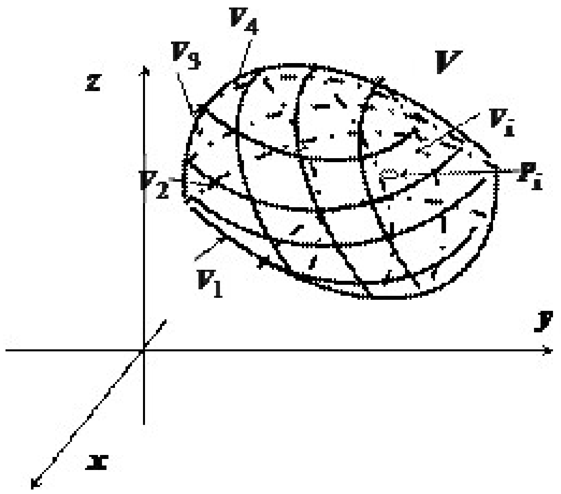
3. Координаты центра масс: $x_c = \frac{S_x}{m}$, $y_c = \frac{S_x}{m}$.

4. Моменты инерции I_x, I_y, I_o относительно осей *Ox*, *Oy* и начала координат *O(0,0)*

$$I_x = \iint\limits_{D} y^2\rho(x,y)\,dx\,dy, I_y = \iint\limits_{D} x^2\rho(x,y)\,dx\,dy\,, I_o = I_x + I_y\,.$$

§2. Определение тройного интеграла

Пусть функция $u = f(x,y,z)$ определена в некоторой замкнутой пространственной области *V*, ограниченной некоторыми гладкими поверхностями.



Если относительно области *V* и функции $u = f(x,y,z)$ произвести действия аналогичные **Р.В.С.**, то получим в результате сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i,$$

где *n* – число элементарных пространственных областей $V_1, V_2, \ldots, V_n$;

Δv_i – их объемы;

(x_i,y_i,z_i) – координаты произвольным образом выбранной точки в области V_i $(i=1,n)$.

Полученная сумма называется ***интегральной суммой для функции*** $f(x,y,z)$ **по пространственной области** *V*. Если интегральная сумма имеет конечный предел при диаметре разбиения $d \to 0$, не зависящий от способа разбиения области *V* на элементарные области $V_1, V_2, \ldots, V_n$ и выбора точек (x_i,y_i,z_i) в них, то он называется ***тройным интегралом по области*** *V* ***от функции*** $u = f(x,y,z)$ ***и обозначается***

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i \,.$$

Если область V разбивается на элементарные области V_i плоскостями, параллельными координатным плоскостям, то для всех них, кроме может быть граничных, выполняется $\Delta v_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ и тройной интеграл имеет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i,$$

где:
$f(x,y,z)$ – ***подынтегральная функция***;
$dxdydz, dv$ – ***элемент объема***;
x, y, z – ***переменные интегрирования.***
Из определения тройного интеграла следует, что объем области *V* получим при $f(x,y,z) = 1$. Следовательно,

$$v = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_V dv \,.$$

Поэтому тройной интеграл часто называют объемным. В общем случае тройной интеграл геометрического смысла не имеет, так как функция трех переменных не может быть геометрически интерпретирована.
Физический смысл тройного интеграла. Пусть в пространственной области *V* распределена некоторая масса с известной переменной плотностью $\rho(x,y,z)$. Тогда масса неоднородного материального тела численно равна тройному интегралу от этой функции по области *V*

$$m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz.$$

С помощью тройного интеграла можно также вычислять статические моменты тела относительно координатных плоскостей, моменты инерции, координаты центра масс.

§3. Основные свойства двойных и тройных интегралов

Тройной интеграл, как следует из определения, является полным аналогом двойного, поэтому все свойства сформулируем для двойного и они аналогичны свойствам тройного интеграла.

Если существует двойной интеграл, то функция называется интегрируемой в области *D*. Очевидно, что если на ограниченной, замкнутой, связной области *D* функция *f(x,y)* непрерывна, то интеграл по этой области от функции *f(x,y)* существует. Рассмотрим далее основные свойства, присущие двойному интегралу, считая рассматриваемые функции интегрируемыми.

Основные свойства двойного интеграла.

1. ***Линейность*:** если функции *f(x,y)* и *g(x,y)* интегрируемы в области *D,* а

C_1 и C_2 – произвольные постоянные, то

$$\iint\limits_D \big(C_1 f(x,y) + C_2 g(x,y)\big)dxdy = C_1 \iint\limits_D f(x,y)dxdy + C_2 \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

(интеграл от линейной комбинации интегрируемых функций равен линейной комбинации от этих функций).

2. ***Аддитивность***: если область интегрирования D разделена на области D_1 и D_2 не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

3. ***Знакопостоянство***: если функция $f(x,y)$ в области D не меняет свой знак, то двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

сохраняет тот же знак, что и функция. В частности, если для $\forall(x,y) \in D$ $f(x,y) \geq 0$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0.$$

4. ***Монотонность:*** если $f(x,y) \leq g(x,y)$ для $\forall(x,y) \in D$, то имеет место неравенство

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

5. ***Оценка двойного интеграла***: для непрерывной на замкнутой области D функции $f(x,y)$ имеет место неравенство

$$mS_D \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq MS_D,$$

где m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y)$ на множестве D, S_D – площадь области D.

6. Теорема о среднем. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D, то в этой области найдется по крайней мере одна такая точка (ξ,η), такая, что

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)S_D.$$

При этом число

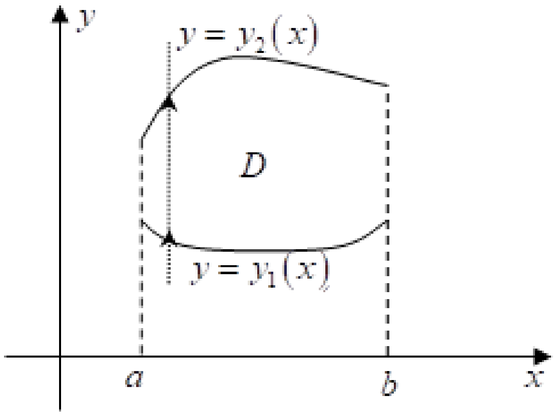
$$\delta = \frac{1}{S_D} \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

называют ***интегральным средним значением функции** f(x,y) **в области*** D.

§4. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах

Пусть требуется вычислить двойной интеграл по замкнутой области $D \subset xOy$ от функции $z = f(x,y)$. Как и ранее, предположим, что граница области является кусочно-гладкой кривой. Введем понятие *стандартной* (*правильной*) области. Область $D = \{(x,y)|a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, где $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ – взаимно однозначные, непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, называется ***стандартной (правильной)*** относительно оси Oy.

Другими словами, область является стандартной относительно оси Oy, если она расположена между прямыми $x=a$, $x=b$ и ограничена снизу линией $y=y_1(x)$, а сверху $y=y_2(x)$.



Особенности стандартной области относительно оси Oy:

1. Всякая прямая, параллельная оси Oy и проходящая через точку с абсциссой x ($a<x<b$) пересекает границу области только в двух точках $M_1(x_1,y_1)$ – «точке входа» и $M_2(x_2,y_2)$ – «точке выхода», как их иногда называют. При этом нижнюю линию $y=y_1(x)$ часто называют ***«линией входа»***, а верхнюю $y=y_2(x)$ – «***линией выхода***».
2. Линия выхода (входа) задается одним уравнением в явном виде.

Теорема. Если функция $z = f(x,y)$ интегрируема в стандартной области $D = \{(x,y)|a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ относительно оси Oy, то двойной интеграл по этой области от функции $f(x,y)$ вычисляется по формуле

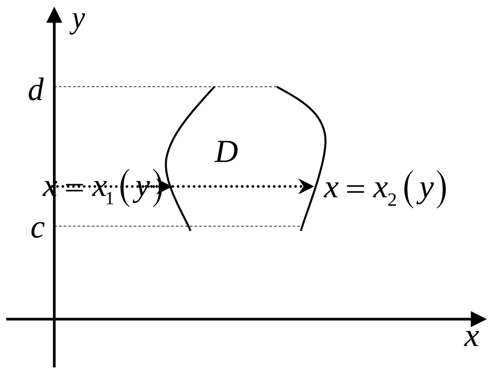
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Правую часть этой формулы называют ***повторным*** или (***двукратным***) ***интегралом***. Интеграл

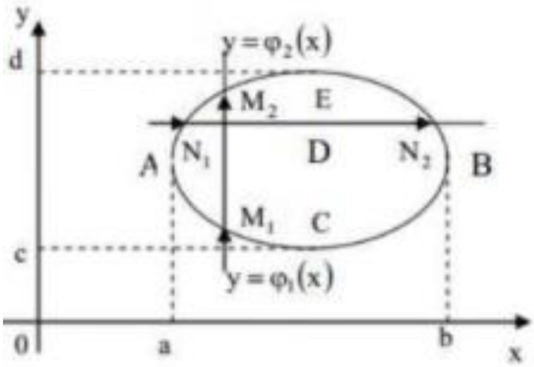
$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

называют ***внутренним***, а интеграл по dx – внешним интегралом. В процессе вычисления вначале находится внутренний интеграл (в общем случае функция от x), а затем – внешний.

Аналогичным образом, ***областью стандартной (правильной) относительно оси Ox*** называют область $D = \{(x,y)|c \leq x \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$,
где функции $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$ являются непрерывными и однозначными функциями на отрезке [c,d].



Область, стандартную как относительно оси *Ox,* так и относительно оси *Oy* называют ***стандартной областью.***



Если область *D* не является стандартной ни относительно оси *Ox,* ни относительно оси *Oy,* то ее разбивают на конечное число областей D_1, D_2, …, D_n, не имеющих общих внутренних точек, стандартных относительно одной из координатных осей, и используют свойство аддитивности двойного интеграла.

Двойной интеграл по области стандартной в направлении оси *Ox* вычисляется через повторный интеграл аналогично

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

Разница только в том, что внутренний интеграл вычисляется по переменной *x,* а внешний – по переменной y. Процесс расстановки пределов интегрирования для внутреннего и внешнего интегралов называют ***приведением двойного интеграла к повторному***, а переход от одного повторного интеграла ко второму – ***изменением порядка интегрирования.*** Следует помнить, что

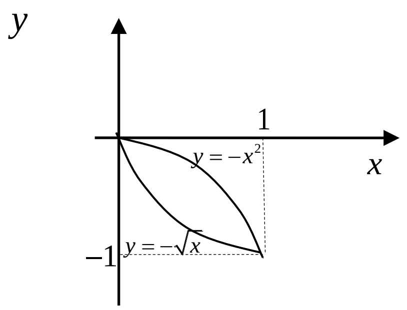
1***. Пределы интегрирования в повторных интегралах зависят только от вида области интегрирования и не зависят от подынтегральной функции.***

2***. В повторных интегралах сначала вычисляются внутренние интегралы, как обычные определенные интегралы, а затем – внешние. Пределы у внешних интегралов всегда постоянны, а пределы внутреннего интеграла в общем случае переменные (некоторые функции).***

3***. Внутренние и внешние пределы в повторных интегралах (в декартовых координатах) постоянны тогда и только тогда, когда область D является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат.***

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, где область D ограничена линиями $y=-x^2, \quad y=-\sqrt{x}$.

Решение. Построим область интегрирования D и перейдем к повторному интегралу:



$$\iint\limits_D (x+2y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{-x^2} (x+2y)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 (xy+y^2)\Big|_{-\sqrt{x}}^{-x^2} dx = \int\limits_0^1 ((-x\cdot x^2+x^4)-$$

$$-(-x\cdot\sqrt{x}+x))dx = \int\limits_0^1 (-x^3+x^4+x\sqrt{x}-x)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^{5/2}}{5/2}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3}{5}-\frac{3}{4}=-\frac{3}{20}.$$

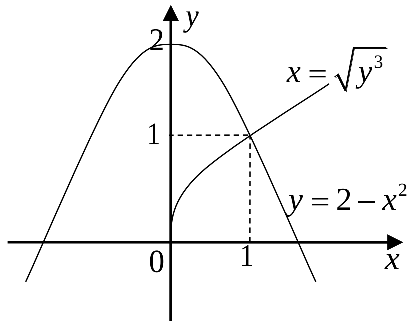
Пример. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y^3}} f(x;y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x;y)dx .$$

Решение. Строим область $D: x_1 = 0, x_2 = \sqrt{y^3}$ для $0 \le y \le 1$ и $D: x_1 =$

$0, x_2 = \sqrt{2-y}$ для $1 \le y \le 2$, то есть область не является стандартной в направлении оси *Ox*. В направлении же оси *Oy* – она стандартная:

$$D = \left\{(x,y)\,\middle|\,0 \le x \le 1, \sqrt[3]{x^2} \le x \le 2 - x^2)\right\}.$$



$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y^3}} f(x;y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x;y)dx =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{\sqrt[3]{x^2}}^{2-x^2} f(x;y)dy.$$

§5. Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах

По аналогии с двумерной стандартной областью вводится понятие стандартной трехмерной области. Область *V*, ограниченную снизу и сверху однозначными непрерывными поверхностями $z=z_1(x,y)$ и $z=z_2(x,y)$ будем называть ***стандартной (правильной) относительно оси Oz***. Ее свойства:

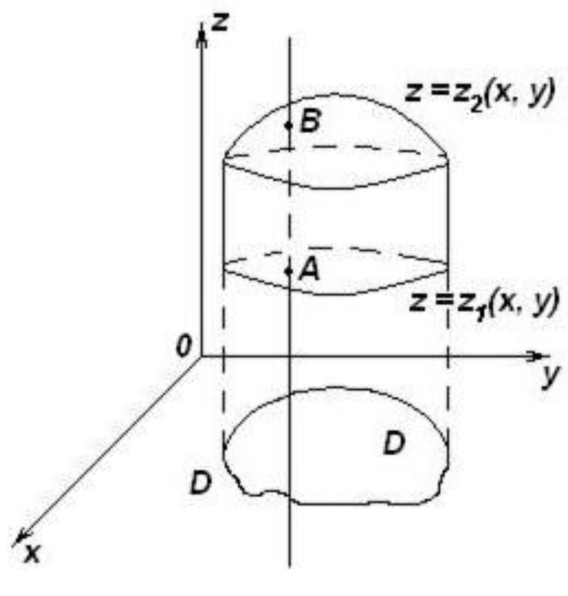
1. Всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку области *V* параллельно оси *Oz* пересекает границу области ровно в двух точках.

2. Область *V* проецируется на плоскость *xOy* на двумерную область D_{xy}. Тогда пространственную область можно записать в виде

$$V = \left\{(x,y,z)\middle|(x,y) \in D_{xy}, z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\right\}$$

Аналогично вводится понятие стандартной (правильной) области относительно осей *Ox* и *Oy*.

Тройные интегралы вычисляются *сведением* к *повторным* путем вычисления трех однократных интегралов.



$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz =$$

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Пределы интегрирования в двух внутренних интегралах в общем случае переменны, а внешнего – всегда постоянны. Пределы интегрирования во всех интегралах величины постоянные тогда и только тогда, когда область интегрирования является параллелограммом с гранями параллельными координатным плоскостям.

Схема вычисления тройного интеграла.

1. По заданным уравнениям построить область V. Допустим, что она является стандартной относительно оси Oz.
2. Определить поверхности входа z_1 и выхода z_2 из области.
3. Спроецировать область V на плоскость xOy и изобразить ее отдельно.
4. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле

$$\iint\limits_{D_{xy}} dxdy$$

5. Вычислить трехкратный интеграл.

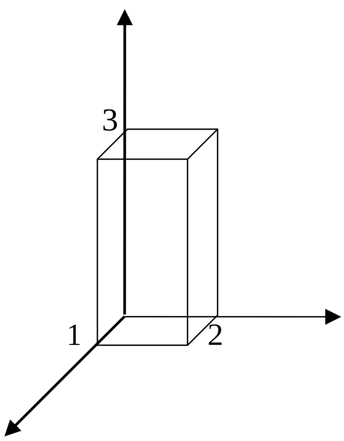
Пример. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V (x+3y-z)dxdydz.$$

Область интегрирования V ограничена поверхностями:

$$x=0, x=1, y=0, y=2, z=0, z=3.$$

Решение.



$$\iiint\limits_G (x+3y-z)dxdydz = \int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 (x+3y-z)dz =$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^2 \left(xz+3yz-\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 dy = \int_0^1 dx\int_0^2 (3x+9y-\frac{9}{2})dy =$$

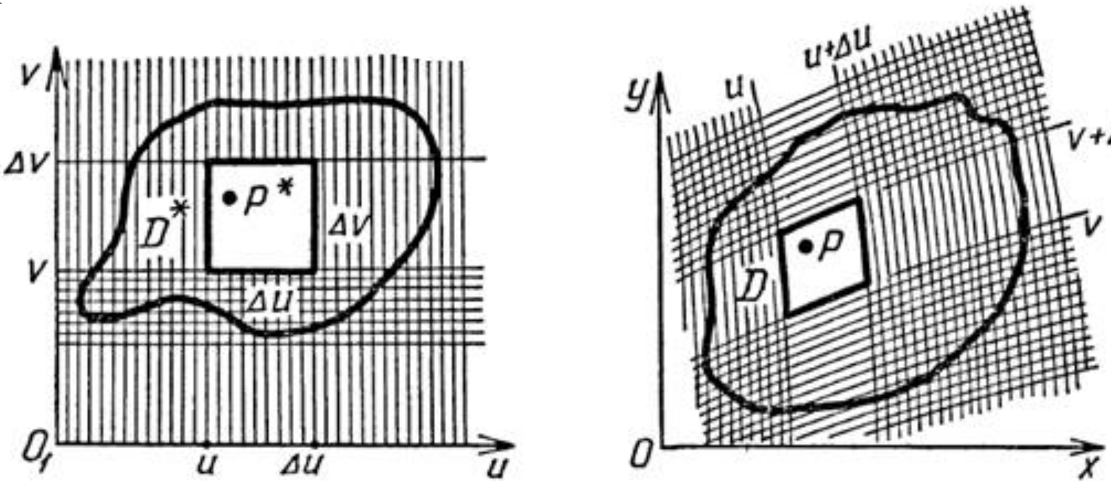
$$=\int_0^1 \left(3xy+9\frac{y^2}{2}-\frac{9}{2}y\right)\Bigg|_0^2 dx =$$

$$=\int_0^1 (6x+18-9)dx = \left(6\frac{x^2}{2}+9x\right)\Bigg|_0^1 = 12.$$

Если область не является стандартной ни в одном из направлений, то ее разбивают на конечное число стандартных областей, не имеющих общих внутренних точек, и используют свойство аддитивности тройного интеграла.

§6. Вычисление двойных интегралов в полярных координатах

Пусть в плоскости Oxy дана область D, ограниченная замкнутой линией L. Предположим, что координаты x и y являются функциями переменных u и v: $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$. Причем функции эти взаимно однозначные и дифференцируемые в некоторой области D^*. Таким образом, эти формулы устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками области D и D^*: $(x,y) \leftrightarrow (u,v)$. Если в плоскости Oxy точка опишет кривую L, то в плоскости O^*uv соответствующая точка опишет некоторую кривую L^*. В общем случае прямым линиям *u=const*, *v=const* на плоскости O^*uv будут соответствовать кривые на плоскости *Oxy*, называемые ***координатными линиями на** Oxy для новых координат (u,v).* Таким образом, для $\forall P(x,y) \in D$ имеем, что $P(x,y) = P\big(x(u,v), y(u,v)\big) = P(u,v)$, где $(u,v) \in D^*$. Координаты *(u,v)* точки $P(x,y) \in D$ называются ***криволинейными координатами на плоскости.***



При замене прямоугольных координат x и y на новые u и v происходит замена области D в плоскости *Oxy* более простой областью D^* в плоскости O^*uv. В результате такой замены происходит искажение области и элемент площади $dS = |I(u,v)|dS^*$, где $I(u,v)$ – ***коэффициент искажения области***, который называется ***якобианом преобразования*** функций *x=x(u,v), y=y(u,v)* по переменным u и v. Для его нахождения требуется вычислить определитель

$$I = I(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

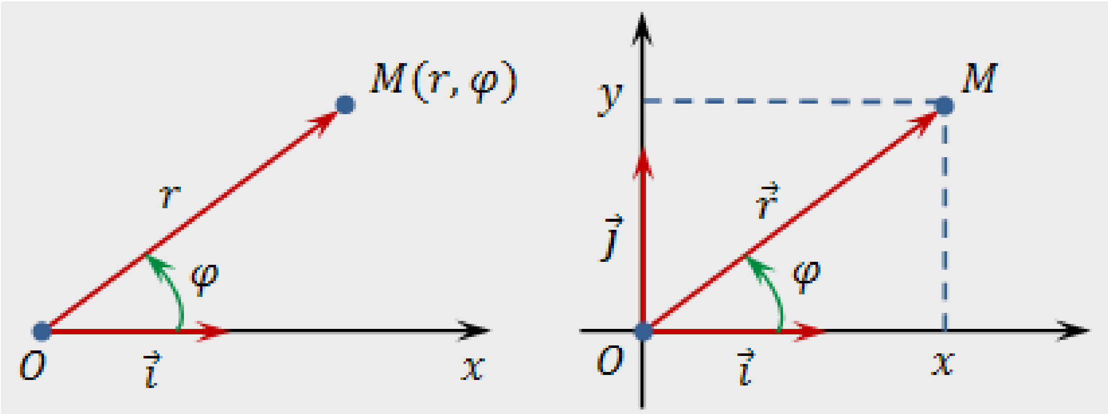
Окончательно формула замены переменных в двойном интеграле имеет вид

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))|I(u,v)|dudv.$$

Целью замены переменных в двойном интеграле является не упрощение подынтегральной функции, а переход к более простой области интегрирования, то есть упрощение расстановки пределов интегрирования в двойном интеграле.

Простейшим примером криволинейных координат на плоскости является полярная система координат (r,φ). Если полюс совпадает с началом координат декартовой системы координат, а полярный луч с осью абсцисс, то связь между этими системами координат следующая

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, r \in [0,+\infty), \varphi \in [0,2\pi] \text{ или } \varphi \in [-\pi,\pi].$$



Так как $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = arctg\frac{y}{x}$, то приравняв их к постоянным, получим на плоскости *Oxy* ***семейство координатных линий***:

- $x^2 + y^2 = (const)^2$ – семейство окружностей с центром в начале координат.
- $y = x(tgconst)$ – семейство лучей, проходящих через начало координат.

Поэтому, полярные координаты при вычислении двойного интеграла целесообразно применять в том случае, когда область интегрирования является кругом или некоторой его частью, либо когда в уравнениях линий, ограничивающих область интегрирования, содержатся выражения $(x^2 + y^2)^k, k \in \mathbb{N}$.

Якобиан преобразования в полярных координатах

$$I = I(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\varphi & -rsin\varphi \\ sin\varphi & rcos\varphi \end{vmatrix} = r$$

и элемент площади в полярных координатах $|I(r,\varphi)|drd\varphi = rdrd\varphi$, а формула замены

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(rcos\varphi, rsin\varphi)rdrd\varphi.$$

Интеграл в правой части следует сводить к повторному, расставляя пределы изменения (r,φ).

На практике, как правило, пределы изменения (r,φ) определяют по виду области *D* на плоскости *Oxy* и не используют изображение области в полярной системе координат.

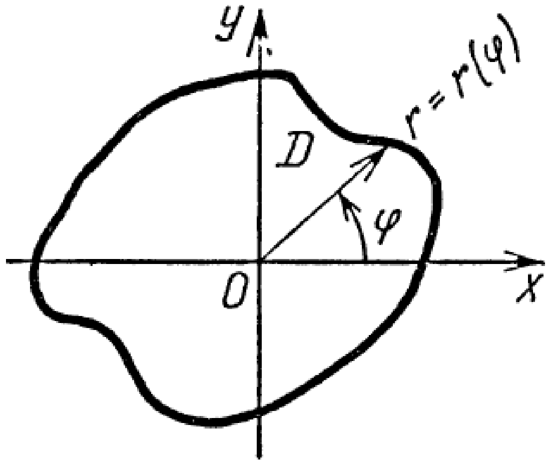
Схема расстановки пределов интегрирования в двойном интеграле при переходе к полярной системе координат.

1. Изобразить область *D* на плоскости *Oxy*.

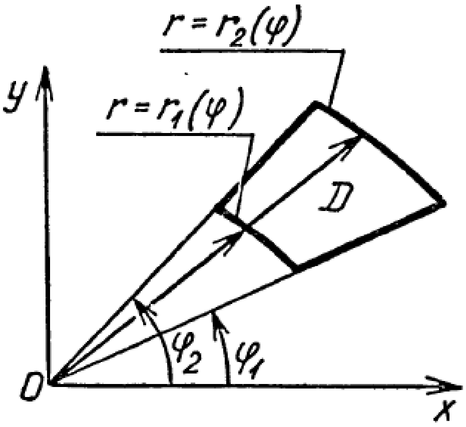
2. Записать уравнения линий, ограничивающих область, в поляной системе координат. Для чего заменить формально $x \to rcos\varphi, y \to rsin\varphi, x^2 +$

$y^2 \to r^2$.

3. Определить нижний и верхний предел r_1, r_2 изменения переменной $r = r(\varphi)$, для чего из начала координат проводим луч, проходящий через область *D*. Если начало координат *O*(0,0) лежит внутри области *D* или на ее границе, то считаем $r_1 = 0$, а r_2 определяем из уравнения линии через которую луч выходит из области *D*.

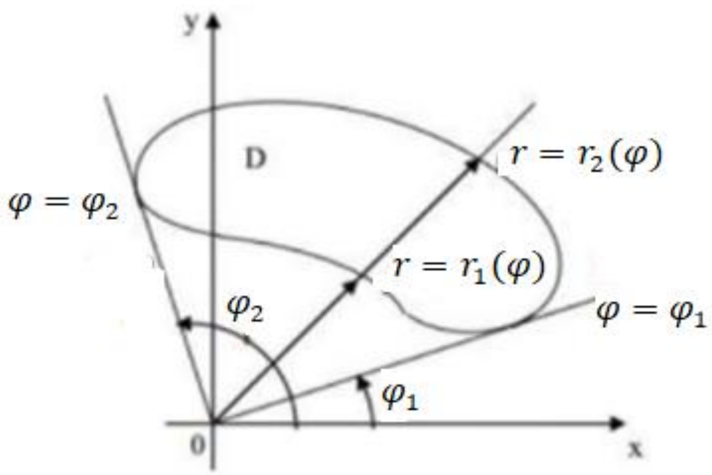


Если начало координат *O*(0,0) лежит вне области *D*, то r_1 определяем из уравнения линии, через которую луч входит в область *D*.

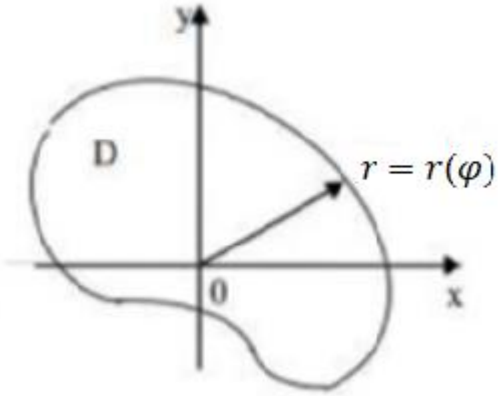


***В общем случае* r_1, r_2 *зависят от* φ.**

4. Определить наименьшее φ_1 и наибольшее φ_2 значения полярного угла φ для области *D*: φ_1 и φ_2 – полярные углы крайних радиус векторов касающихся области *D*.



Если начало декартовой системы координат лежит внутри области D, то ***всегда*** $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi$.



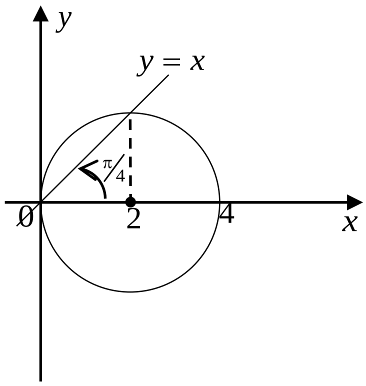
5. Провести вычисления по формуле

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_н}^{r_в} f(rcos\varphi, rsin\varphi)rdr$$

Пример. В двойном интеграле $\iint_D f(x;y)dxdy$ расставить пределы интегрирования, если область D определяется неравенствами: $x^2 + y^2 \le 4x, y \ge x.$

Решение. Построим границы области: $x^2 + y^2 = 4x, y = x.$ Преобразуем первое уравнение: $x^2 - 4x + y^2 = 0,$ $x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 = 0,$

$(x-2)^2 + y^2 = 4.$ Это уравнение окружности с центром в точке (2;0) и радиуса 2. Строим область D:



Запишем уравнение окружности и прямой в полярной системе координат:

$$x^2+y^2=4x, r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=4r\cos\varphi,$$

$$r=4\cos\varphi.$$

$$y=x, r\sin\varphi=r\cos\varphi, \varphi=\pi/4.$$

Проведя из полюса луч, пересекающий область интегрирования, видим, что он входит в область при $r=0$ и выходит при $r=4\cos\varphi.$ Следовательно,

$$\iint_D f(x;y)dxdy=\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{4\cos\varphi}f(r\cos\varphi;r\sin\varphi)rdr\,.$$

§7. Вычисление тройных интегралов в цилиндрических координатах

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана область V и функции

$$x=x(u,v,w), y=y(u,v,w), z=z(b,v,w),$$

которые однозначно разрешимы относительно переменных u,v,w

$$u=u(x,y,z), v=v(x,y,z), w=w(x,y,z).$$

Последние соотношения осуществляют отображение области V из $Oxyz$ в некоторую пространственную область V^* пространства O^*uvw , а первые соотношения осуществляет обратное отображение $V^*\to V$. Величины u,v,w в этом случае называются ***криволинейными координатами в пространстве.*** Если пространственная область V^* пространства O^*uvw отображается в область V пространства $Oxyz$ с помощью приведенных формул, причем функции из взаимно однозначны и непрерывны вместе со своими частными производными в области V^* и функциональный определитель (якобиан)

$$I(u,v,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

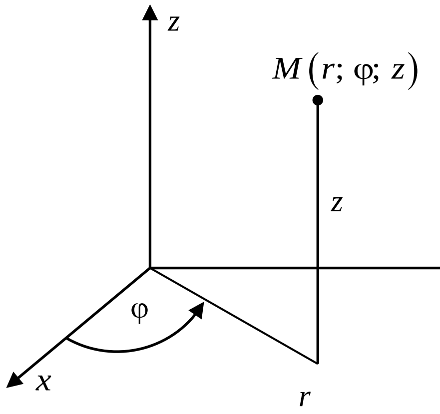
отличен от нуля в области V^*, то тогда между областями V и V^* существует взаимно однозначное соответствие и для тройного интеграла верна формула

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=$$

$$=\iiint_{V^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|I(u,v,w)|dudvdw.$$

$|I(u,v,w)|dudvdw$ называется ***элементом объема*** в новых координатах и является коэффициентом искажения области при переходе к криволинейным координатам.

Простейшими криволинейными координатами в пространстве является цилиндрическая система координат.



Пусть точка в декартовой прямоугольной системе координат в пространстве задается своими координатами *M(x,y,z)*. ***Цилиндрическими координатами в пространстве*** назовем упорядоченную тройку чисел (r, φ, z), где (r, φ) полярные координаты точки $\bar{M}(x, y, 0)$ – проекция точки *M(x,y,z)* на плоскость *Oxyz*, а z – аппликата точки *M(x,y,z)*.

Тогда прямоугольные координаты связаны цилиндрическим следующими соотношениями

$$\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \\ z = z \end{cases}, \text{ где } r \geq 0\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ (-\pi \leq \varphi \leq \pi)\ , -\infty < z < +\infty.$$

Так как модуль якобиана цилиндрических координат

$$|I(r, \varphi, z)| = \begin{vmatrix} cos\varphi & -rcos\varphi & 0 \\ sin\varphi & rcos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

то следующая формула выражает *переход* от *декартовых* координат в тройном интеграле к *цилиндрическим*:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(rcos\varphi, rsin\varphi, z)rdrd\varphi dz,$$

где V^* - область в цилиндрической системой координат $O^*r\varphi z$, в которую отображается область *V*. К трехкратному следует сводить интеграл по области V^*.

Цилиндрические координаты целесообразно применять, когда пространственная область V проектируется на одну из координатных плоскостей в круг или некоторую его часть. На практике, как правило, пределы изменения r, φ, z определяют по виду области V в декартовой системе координат *Oxyz* по следующей схеме.

Схема вычисления тройных интегралов в цилиндрических координатах.

Пусть область *V* стандартная (правильная) относительно оси *Oz*.

1. Изобразить область *V* в декартовых координатах.
2. Записать уравнения поверхностей, составляющих границу области V в

цилиндрических координатах, для чего заменить: $x \mapsto r cos\varphi$, $y \mapsto r sin\varphi$, $x^2 + y^2 \mapsto r^2$.

3. Провести прямую параллельную оси Oz и определить поверхности входа z_1 и выхода z_2 для области V.

4. Изобразить на отдельном рисунке проекцию D области V на плоскость Oxy.

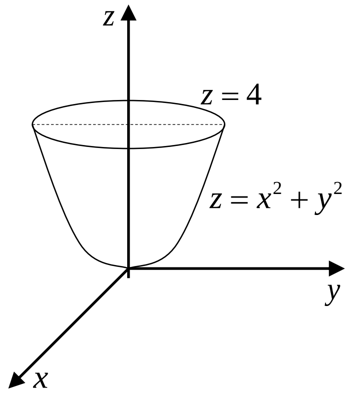
5. Определить пределы изменения для r и φ, используя схему расстановки пределов интегрирования в двойном интеграле в полярных координатах.

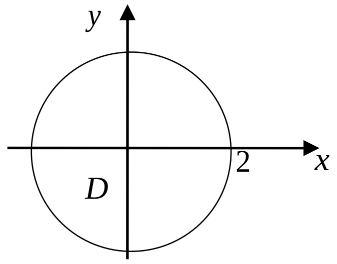
6. Произвести вычисления по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_н(\varphi)}^{r_в(\varphi)} r dr \int\limits_{z_{вх}(r,\varphi)}^{z_{вых}(r,\varphi)} f(r cos\varphi, r sin\varphi, z)dz.$$

Пример. Найти массу неоднородного тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$, $z=4$, если объемная плотность тела $\rho(x,y,z) = z$.

Решение. Данное тело ограничено сверху плоскостью $z=4$, снизу – параболоидом $z=x^2+y^2$. Проекцией этого тела на плоскость Oxy является круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=4$





$$m = \iiint\limits_G zdxdydz = \iiint\limits_G zrdrd\varphi dz == \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 rdr \int\limits_{r^2}^4 zdz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r\left(\frac{16}{2} - \frac{r^4}{2}\right)dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(8\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{12}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} (16 - 5\frac{1}{3})d\varphi = 10\frac{2}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{32}{3}\varphi\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{64\pi}{3}.$$