СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = y + t, \\ \dot{y} = -x - t, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Из первого ЛДУ выражаем *y* через *x*:

$$y = \dot{x} - t$$

и подставляем во второе ЛДУ:

$$\ddot{x} - 1 = -x - t \Rightarrow \ddot{x} + x = 1 - t.$$

Получили ЛНДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Общее решение соответствующего ЛОДУ имеет вид:

$$x_{OO}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Находим частное решение ЛНДУ методом неопределенных коэффициентов:

$$x_H(t) = At + B \Rightarrow x_H(t) = 1 - t.$$

Тогда

$$x(t) = x_{OO}(t) + x_H(t) = \; = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1 - t,$$
$$y(t) = \dot{x}(t) - t = C_2 \cos t - C_1 \sin t - 1 - t$$

и общее решение исходной ЛСДУ имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1 - t \\ y(t) = C_2 \cos t - C_1 \sin t - 1 - t \end{cases}.$$

Далее с учетом начальных условий определяем значения произвольных постоянных:

$$\begin{cases} 1 = x(0) = C_1 + 1 \\ 0 = y(0) = C_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Таким образом, искомое частное решение (решение задачи Коши) для исходной ЛСДУ имеет вид $\begin{cases} x = \sin t + 1, \\ y = \cos t - 1, \end{cases}$.

Пример 2. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = 6x_1(t) - 6x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t), \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = -1, \\ x_2(0) = 0, \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. Из 3-го ДУ находим $x_1(t) = \dot{x}_3(t)$ и подставляем в первые два уравнения:

$$\begin{cases} \ddot{x}_3(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = 6\dot{x}_3(t) - 6x_3(t) \end{cases}.$$

Из первого ДУ находим $x_2(t) = \ddot{x}_3(t) - x_3(t)$ и подставляем во второе ДУ:

$$\dddot{x}_3(t) - \dot{x}_3(t) = \dot{x}_3(t) + x_3(t).$$

Получили $x_3''' - 7x_3' + 6x_3 = 0$ –ЛОДУ с постоянными коэффициентами. Составляем характеристическое уравнение $\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$ и находим его корни: $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = -3$ (действительные и различные). Тогда функции e^t, e^{2t} и e^{-3t} – фундаментальная система решений и общее решение этого ЛОДУ имеет вид

$$x_3(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-3t},$$

откуда

$$x_1(t) = \dot{x}_3(t) = = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} - 3C_3 e^{-3t},$$

$$x_2(t) = \ddot{x}_3(t) - x_3(t) = 3C_2 e^{2t} + 8C_3 e^{-3t}.$$

Таким образом, общее решение ЛСДУ имеет вид:

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} - 3C_3 e^{-3t} \\ x_2(t) = 3C_2 e^{2t} + 8C_3 e^{-3t} \\ x_3(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-3t} \end{cases}.$$

Находим значения произвольных постоянных, учитывая начальные условия:

$$\begin{cases} -1 = x_1(0) = C_1 + 2C_2 - 3C_3 \\ 0 = x_2(0) = 3C_2 + 8C_3 \\ 1 = x_3(0) = C_1 + C_2 + C_3 \end{cases}, \text{ откуда } C_1 = \frac{3}{2},\ C_2 = -\frac{4}{5}, C_3 = -\frac{3}{10} \text{ и}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{3}{2}e^t - \frac{8}{5}e^{2t} - \frac{9}{10}e^{-3t} \\ x_2(t) = -\frac{12}{5}e^{2t} + \frac{12}{5}e^{-3t} \\ x_3(t) = \frac{3}{2}e^t - \frac{4}{5}e^{2t} + \frac{3}{10}e^{-3t} \end{cases} \text{ – искомое частное решение ЛСДУ.}$$

Пример 3. Найти общее решение неоднородной системы уравнений

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + x_2 - e^{2t}, \\ x_2' = x_2 - 2t. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения выразим x_2

$$x_2 = x_1' - 4x_1 + e^{2t}.$$

Найдем производную

$$x_2' = x_1'' - 4x_1' + 2e^{2t}$$

и подставим x_2 и x_2' во второе уравнение системы

$$x_1'' - 4x_1' + 2e^{2t} = x_1' - 4x_1 + e^{2t} - 2t.$$

Получим ЛНДУ для определения функции x_1:

$$x_1'' - 5x_1' + 4x_1 = -e^{2t} - 2t.$$

Характеристическое уравнение соответствующего ЛОДУ имеет вид

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,$$

его корни которого $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\overline{x}_1(t) = C_1e^t + C_2e^{4t}.$$

Частным решением неоднородного уравнения будет:

$$x_1^* = x_{11}^* + x_{12}^*,$$

где x_{11}^* соответствует первому слагаемому правой части $-e^{2t}$, x_{12}^* – второму слагаемому $-2t$. Тогда $x_{11}^* = A_0e^{2t}$, а $x_{12}^* = B_0 + B_1t$. Определим их методом сравнения коэффициентов и получим: $x_{11}^* = \frac{1}{2}e^{2t}$, $x_{12}^* = -\frac{5}{8} - \frac{1}{2}t$. Общее решение для x_1 будет:

$$x_1(t) = \overline{x}_1 + x_1^* = C_1e^t + C_2e^{4t} + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{5}{8} - \frac{1}{2}t.$$

Найдем производную

$$x_1' = C_1e^t + 4C_2e^{4t} + e^{2t} - \frac{1}{2}$$

и подставим x_1 и x_1' в выражение для x_2. Получим

$$x_2(t) = C_1e^t + 4C_2e^{4t} + e^{2t} - \frac{1}{2} - 4\left(C_1e^t + C_2e^{4t} + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{5}{8} - \frac{1}{2}t\right) + e^{2t} =$$
$$= -3C_1e^t + 2 + 2t.$$

Следовательно, общее решение данной системы имеет вид:

$$x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t} + \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{5}{8} - \frac{1}{2} t\,,$$

$$x_2(t) = -3C_1 e^t + 2 + 2t\,.$$