Дифференциальное уравнение Бесселя, функции Бесселя

Уравнение

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - 0,25\right) y = 0$$

является дифференциальным уравнением Бесселя с параметром $\nu = \frac{1}{2}$. Общее решение может быть записано в виде

$$y(x) = C_1 J_{1/2}\left(x\right) + C_2 J_{-1/2}\left(x\right),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, $J_\nu\left(x\right)$ – функция Бесселя:

$$J_\nu\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(\nu + k + 1\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

$\Gamma\left(s\right)$ – гамма-функция Эйлера.

Вычислим

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, 2^{k+1}}{k!\sqrt{\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!2k) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Ряд в правой части последнего равенства представляет собой разложение функции $\sin x$. Поэтому оказывается справедливым равенство

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(-\frac{1}{2} + k + 1\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Принимая во внимание, что

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2} + k + 1\right) = \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \frac{2k-1}{2} = \sqrt{\pi} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k},$$

получим

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, 2^k}{k!\sqrt{\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!2k) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)} x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Ряд, стоящий в правой части последнего равенства, является функцией $\cos x$. Следовательно,

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Тогда общее решение уравнения можно записать в виде

$$y(x)=C_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+C_2\frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Некоторые рекуррентные соотношения

1. $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x^{\nu}J_{\nu}(x)\right]=x^{\nu-1}J_{\nu-1}(x)$
2. $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right]=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}$
3. $\frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x)=J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)$
4. $2\frac{d}{dx}\left[J_{\nu}(x)\right]=J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)$

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x),\quad n\in Z;$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right)=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu}};$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}J_{\nu}(x)\right)=x^{\nu}J_{\nu-1}(x);$$

$$J_{\nu+1}(x)=\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)-J'_{\nu}(x);$$

$$J_{\nu-1}(x)=\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)+J'_{\nu}(x);$$

$$J_{\nu+1}(x)+J_{\nu-1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x);$$

$$J_{\nu+1}(x)-J_{\nu-1}(x)=-2J'_{\nu}(x);$$

ПРИМЕР .

Используя формулу (3) имеем

$$J_2(x)=\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x),$$

$$J_3(x)=\frac{4}{x}J_2(x)-J_1(x)=\frac{4}{x}\left[\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)\right]-J_1(x)=$$

$$=\left(\frac{8}{x^2}-1\right)J_1(x)-\frac{4}{x}J_0(x),$$

$$J_4(x)=\frac{6}{x}J_3(x)-J_2(x)=\left(\frac{48}{x^3}-\frac{8}{x}\right)J_1(x)+\left(-\frac{24}{x^2}+1\right)J_0(x)$$ и

т. д., при этом

$$J_0(x)=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{1!\cdot 2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2!\cdot 3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\ldots$$

***ПРИМЕР*.**

Используя формулу (2) имеем

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=J_{\frac{1}{2}+1}(x)=-x^{\frac{1}{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(x)\right)'=-x^{\frac{1}{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x)\right)'=$$

$$-x^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=-\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\right)=\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\left(\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}\right).$$

Замечание. *Функции Бесселя с индексом, равным целому числу с половиной, выражаются через элементарные функции.*

Замечание. *При решении задач используют разложение в ряд Фурье по ортогональной системе бесселевых функций.*

Ортогональность

Пусть μ_1, μ_2 — нули функции Бесселя $J_\alpha(x)$. Тогда

$$\int_0^1 xJ_\alpha(\mu_1 x)J_\alpha(\mu_2 x)dx=\begin{cases}0 & ;\quad \mu_1\neq\mu_2\\ \frac{1}{2}(J'_\alpha(\mu_1))^2 & ;\quad \mu_1=\mu_2\end{cases}$$

Изучить свойства функций Бесселя и одновременно освоить методы решения уравнений, сводящихся к функциям Бесселя, позволяет свободно распространяемая **программа символьной математики SymPy — библиотеки Python.**

https://habr.com/ru/articles/443628/