

Теоретический минимум по дисциплине «Математический анализ»

Определенный интеграл и его обобщения.

1. Что называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$? Что называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$?
2. Геометрический смысл определенного интеграла.
3. Основные свойства определенного интеграла.
4. Оценки интегралов. Теорема о среднем значении функции на отрезке.
5. Формула Ньютона-Лейбница.
6. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.
7. Свойства интегралов от четных и нечетных функций по симметричному относительно нуля промежутку.
8. Формулы для вычисления площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.
9. Формулы для вычисления объемов тел вращения.
10. Формулы для вычисления длин дуг кривых.
11. В чем заключается особенность несобственного интеграла 1-го рода?
12. Определение несобственного интеграла 1-го рода.
13. При каких значениях α сходится интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$?
14. В чем заключается особенность несобственного интеграла 2-го рода?
15. Определение несобственного интеграла 2-го рода.
16. При каких значениях α сходится интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$?
17. Геометрический смысл двойного интеграла.
18. Формула для вычисления площади плоской фигуры с помощью двойного интеграла.
19. Физический смысл двойного интеграла.

Ряды.

20. Что называется рядом? Что называется общим членом ряда?
21. Что называется n -й частичной суммой ряда? Что называется n -м остатком ряда?
22. Что называется суммой ряда? В каком случае ряд называется сходящимся? расходящимся?
23. Необходимый признак сходимости ряда.
24. Основные свойства числовых рядов.
25. Какие признаки используются для исследования сходимости числовых рядов с положительными членами?
26. Признак Даламбера.
27. Предельный признак сравнения.
28. Непредельный признак сравнения.

29. Интегральный признак Коши.
30. Какой ряд называется гармоническим? Сходится ли гармонический ряд?
31. Какой ряд называется обобщенным гармоническим рядом?
32. При каком условии обобщенный гармонический ряд является сходящимся? расходящимся?
33. Какой ряд называется знакопеременным?
34. Какой ряд называется знакочередующимся?
35. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.
36. При каком условии знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся?
37. При каком условии знакопеременный ряд называется условно сходящимся?
38. Признак Лейбница.
39. Что называется степенным рядом?
40. Что называется областью сходимости степенного ряда? Что называется радиусом сходимости степенного ряда?
41. Как найти интервал сходимости степенного ряда?
42. Теорема Абеля.
43. Что называется рядом Тейлора для функции $f(x)$?
44. Что называется рядом Маклорена для функции $f(x)$?
45. Разложение в ряд Маклорена функции e^x .
46. Разложения в ряд Маклорена функций $\sin x$ и $\cos x$.
47. Разложение в ряд Маклорена функции $\ln(1+x)$.
48. Разложения в ряд Маклорена функций $\frac{1}{1+x}$ и $\frac{1}{1-x}$.

Ряды Фурье.

49. Что называется рядом Фурье для периодической функции с периодом $T = 2l$?
50. По каким формулам определяются коэффициенты ряда Фурье для периодической с периодом $T = 2l$ функции $f(x)$?
51. Что называется рядом Фурье для периодической функции с периодом $T = 2\pi$?
52. По каким формулам определяются коэффициенты ряда Фурье для периодической с периодом $T = 2\pi$ функции $f(x)$?
53. Достаточное условие сходимости ряда Фурье (теорема Дирихле).
54. Какой вид имеет ряд Фурье для четной периодической с периодом $T = 2l$ функции $f(x)$? По каким формулам определяются коэффициенты этого ряда?
55. Какой вид имеет ряд Фурье для нечетной периодической с периодом $T = 2l$ функции $f(x)$? По каким формулам определяются коэффициенты этого ряда?
56. Комплексная форма ряда Фурье.

Дифференциальные уравнения.

57. Что называется дифференциальным уравнением (ДУ)? Что называется порядком ДУ?
58. Что называется решением ДУ?
59. Что называется общим решением ДУ? Что называется частным решением ДУ?
60. Что называется задачей Коши для ДУ 1-го порядка? Сформулировать теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка.
61. Что называется задачей Коши для ДУ 2-го порядка? Сформулировать теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ 2-го порядка.
62. Что называется ДУ с разделяющимися переменными? Указать метод его решения.
63. Какое ДУ 1-го порядка называется однородным? Указать метод его решения.
64. Какое ДУ 1-го порядка называется линейным? Указать метод его решения.
65. Какие ДУ 2-го порядка допускают понижение порядка?
66. Что называется линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) 2-го порядка?
67. Что называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) 2-го порядка?
68. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ.
69. Какой вид имеет общее решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, если характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня?
70. Какой вид имеет общее решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, если характеристическое уравнение имеет два совпадающих корня?
71. Какой вид имеет общее решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, если характеристическое уравнение имеет комплексные корни?
72. Теорема о структуре общего решения ЛНДУ.
73. Методы нахождения частного решения ЛНДУ.
74. При каких условиях для решения ЛНДУ применяется метод неопределенных коэффициентов?
75. Что называется правой частью специального вида для ЛНДУ с постоянными коэффициентами?
76. Теорема о наложении решений.

Типовые задания по дисциплине «Математический анализ»

Вариант 1.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^5 \ln(x+5)dx.$

2. $\int_1^{64} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) dt.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^2-1}.$

5. $\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^2}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2 - 6x + 10$, $x - y - 1 = 0$.

7. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y^2 = x$, $x = 3$, если поверхностная плотность равна $\gamma(x; y) = x$.

Исследовать сходимость числовой ряд.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!}.$

9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{4n-5}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+2^3} - \frac{1}{1+2^4} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{5^n \sqrt{n}}.$

13. Вычислить $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ x-1, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = |x|$ при $-1 < x < 1$; построить графики функции и суммы ряда.

В заданиях 36-37 найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $e^{x+3y} dy = x dx.$

17. $(y - xy') \cos \frac{y}{x} = x.$

Решить задачу Коши.

18. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$, $y(0) = 4$. 19. $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 4$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' = 2x - 1$.

21. Найти частное решение дифференциального уравнения

$y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

Вариант 2.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^1 x e^{-3x+1} dx.$

2. $\int_1^5 \frac{dx}{x + \sqrt{2x-1}}.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t \sin 2t dt.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx.$

5. $\int_0^2 \frac{x dx}{4-x^2}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = \pm 2$ и осью Ox .

7. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 6x^2$, $x + y = 2$, $x = 0$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)^5}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln^2(n+2)}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{4}}{5} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{n}.$

13. Вычислить $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 2x+1$ при $-1 < x < 1$; построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $(xy + x^2 y) y' = 1 + y^2.$

17. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$

Решить задачу Коши.

18. $xy' - y = y \ln \frac{y}{x}$, $y(1) = e^3$. 19. $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 6y = (6x+1)e^{3x}.$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \text{ удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = 1, y'(0) = 4.$$

Вариант 3.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$

2. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg}^4 t dt.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 + 1}.$

5. $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^5 x}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $x + y - 4 = 0$.

7. Вычислить $\iint_D (x + y) dx dy$ по области D , ограниченной линиями $y^2 = x$, $y = x$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$

9. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n - 5}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}.$

13. Вычислить $\int_0^1 x^5 \cos \frac{x}{2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ x + 2, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 10$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 3 - |x|$ при $-5 < x < 5$; построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $y - xy' = 2(1 + x^2 y').$

17. $(x + 2y)dx - xdy = 0.$

Решить задачу Коши.

18. $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}$, $y(0) = 2$.

19. $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}.$$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения

$y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.

Вариант 4.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^1 \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

2. $\int_0^7 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) dt.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^4}.$

5. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $x = y - y^2 + 6$ и осью Oy .

7. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху поверхностью $z = 4 - y^2$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: y = \frac{1}{2}x^2, y = 2$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{3^n n!}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+n}{4+n^2} \right)^2.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{8 \cdot 9} - \frac{1}{16 \cdot 17} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n}.$

13. Вычислить $\int_0^1 x^5 \sin \frac{x}{2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} -x + 0,5, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = |x| - 5$ при $-2 < x < 2$; построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $(x+4)dy - xydx = 0.$

17. $y' = 2x(x^2 + y).$

Решить задачу Коши.

18. $(x+3y)dy = (x-y)dx, y(1) = 1.$ 19. $y'' - 2y' - 8y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 5.$

20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}.$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 8y = 2x - 3$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Вариант 5.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^1 x e^{-x} dx.$

2. $\int_1^2 \frac{\sqrt{2+x}}{x} dx.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) dt.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_2^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x dx.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $x = y^2 + 2y - 3$ и осью Oy .

7. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y = x$, $y = 1$, $x = 0$, если поверхностная плотность равна $\gamma(x; y) = x^2 + 2y^2$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+1)!}{n^7}.$

9. $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{4n^4 - 5}}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{3}{2 \cdot 3} - \frac{3^2}{4 \cdot 5} + \frac{3^3}{8 \cdot 9} - \frac{3^4}{16 \cdot 17} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n+1}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n}.$

13. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sin 2x}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0,5x + 1, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $y - xy' = 1 + x^2 y'.$

17. $y^2 dx + x^2 dy = 2xy dx.$

Решить задачу Коши.

18. $xy' - 2y = 2x^4$, $y(1) = 2$. 19. $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}.$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 5y = 5x - x^2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

Вариант 6.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx.$

2. $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 t dt}{\sqrt[3]{\sin t}}.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}.$

5. $\int_0^{0.5} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $2x - y = 0$, $x - 2y + 3 = 0$, $y = 4$.

7. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху плоскостью $z + x = 6$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 6$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^7 \left(\frac{9}{2}\right)^n.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n-2}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{1 \cdot \sqrt{3}} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{4}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt{5}} - \frac{1}{4 \cdot \sqrt{6}} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n^2}.$

13. Вычислить $\int_0^{0.5} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = x$ при $1 < x < 3$; построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $y' + y + y^2 = 0.$

17. $y' - y = e^x.$

Решить задачу Коши.

18. $y^2 + x^2 y' = xy y', y(1) = 1.$ 19. $y'' - y' - 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3.$

20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$y'' - 6y' + 9y = \cos 3x.$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 10y = x - 2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 10$.

Вариант 7.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx.$

2. $\int_1^9 x^3 \sqrt{1-x} dx.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{\pi}^{+\infty} \sin \frac{x}{2} dx.$

5. $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^5}}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.

7. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5}{5^n}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 + 1}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2^2 \cdot 3} - \frac{1}{2^4 \cdot 5} + \frac{1}{2^6 \cdot 9} - \frac{1}{2^8 \cdot 17} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n2^n}.$

13. Вычислить $\int_0^1 x^5 \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 3-x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 2x + 2$ при $-2 < x < 2$; построить графики функции и суммы ряда. Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $y^2 \ln x dx - (y-1)x dy = 0.$

17. $xy' = y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$

Решить задачу Коши.

18. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0, y(1) = 0.$

19. $y'' + 9y' = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3.$

20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4.$$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + 2y = \sin x, \text{ удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Вариант 8.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^{0.5} \arcsin x dx.$

2. $\int_0^{63} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt{x+1}}.$

3. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 t dt.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{-\infty}^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$

5. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-\cos x}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 10x - 16$, $y = x + 2$.

7. Вычислить $\iint_D (x+y) dx dy$ по области D , ограниченной линиями $y = x^2 - 1$, $y = 1 - x^2$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{2^n(n+2)!}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^3}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2 \cdot 2} + \frac{1}{3^3 \cdot 3} - \frac{1}{3^4 \cdot 4} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n^2}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}.$

13. Вычислить $\int_0^{0.25} x \cos \sqrt{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 10$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 10 - x$ при $5 < x < 15$; построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $(x + x^2) y dx + dy + y^2 dy = 0.$

17. $xy' + y = \ln x.$

Решить задачу Коши.

18. $y = xy' + x e^{\frac{y}{x}}, y(1) = 0.$

19. $y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3.$

20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' = 8 - 16x$.

21. Найти частное решение дифференциального уравнения

$y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.

Вариант 9.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_1^{e^3} x \ln x dx.$

2. $\int_{-1}^0 \frac{3}{x^2 + 2x + 2} dx.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 \left(4t + \frac{\pi}{6} \right) dt.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{-\infty}^0 \frac{4dx}{x^2 + 9}.$

5. $\int_{-4}^4 \frac{dx}{(x+1)^3}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x - 2y = 4$, $x + y - 5 = 0$, $y = 0$.

7. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху плоскостью $x + y + z = 3$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: y = 1 - x^2, y = 0$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n n!}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[8]{\frac{n}{(7n-1)^3}}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} - \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 7}} - \frac{1}{\sqrt{7 \cdot 9}} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{(2n-1)3^n}}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3}.$

13. Вычислить $\int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 4x - 3, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ 0.5, & \text{если } x = 0, \\ x, & \text{если } 0 < x \leq 1; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx.$

17. $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x+y}{x}.$

Решить задачу Коши.

18. $x^2 y' + xy + 1 = 0, y(1) = 2.$ 19. $y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 4e^x.$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения

$y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

Вариант 10.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^1 \ln^2(x+5)dx.$

2. $\int_0^3 \sqrt{\frac{6+x}{6-x}}dx.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right)dt.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11}.$

5. $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 8x + 18$, $2x + y - 18 = 0$.

7. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y^2 = x$, $x = 1$, если поверхностная площадь равна $\gamma(x; y) = 4 - x - y$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4n+5}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2n}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{2 \cdot 3}{2^2} + \frac{3 \cdot 4}{2^3} - \frac{4 \cdot 5}{2^4} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{\sqrt{n^3+1}}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n}.$

13. Вычислить $\int_0^{0,25} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 5-x, & \text{если } -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & \text{если } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 10$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 5x - 1$ при $-5 < x < 5$; построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $y' = (2y+1) \operatorname{tg} x.$

17. $y'x \ln x = y + 3 \ln x.$

Решить задачу Коши.

18. $xy' - y = \sqrt{xy}$, $y(1) = 4$. 19. $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 7y' - 8y = e^x$.

21. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Вариант 11.

1. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^2} dx.$

2. $\int_8^{64} \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} dx.$

3. $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x} dx.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$

5. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{5x+1}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x - x^2$, $x + 3y = 3$.

7. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x^2$, $9y = x^2$, $y = 2$, $x \geq 0$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n5^n}.$

9. $\sum_{n=11}^{\infty} \sqrt{\frac{n-10}{n+100}}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+10)^n}{2^n + 1}.$

13. Вычислить $\int_0^{0,2} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 3x-1, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 6$ функцию $f(x)$,

если $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -3 < x \leq 0, \\ x, & \text{если } 0 < x \leq 3; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $dy = \sin^2 x \operatorname{tg} y dx.$

17. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy.$

Решить задачу Коши.

18. $xy' + x^2 = 3y$, $y(1) = -2$. 19. $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 5y' = 72e^{2x}$.

21. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66, \text{ удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = 3, y'(0) = 0.$$

Вариант 12.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^4 \frac{6}{1+\sqrt{x}} dx.$

2. $\int_2^3 \frac{2x^5-1}{2x^2-x} dx.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) dt.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{2x^2-5x+3}.$

5. $\int_0^1 \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $2y = (x+3)^2$, $y = 0$, $2x + 18y - 9 = 0$.

7. Вычислить $\iint_D x^2 y dx dy$ по области D , ограниченной линиями $y = 2x^3$, $y = 0$, $x = 1$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{2}{1 \cdot 3} - \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{6}{5 \cdot 7} - \frac{8}{7 \cdot 9} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)x^n}{n!}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^n n}.$

13. Вычислить $\int_0^1 x \ln(1+x^6) dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 3-2x, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 3-x$ при $-2 < x < 2$; построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $dx = \sin^2 x \operatorname{tg} y dy.$

17. $y' + y = 2e^x.$

Решить задачу Коши.

18. $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$, $y(1) = 0,5$. 19. $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 5y' - 6y = 3\cos x + 19\sin x.$$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 6$.

Вариант 13.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_1^2 x \log_2 x dx.$

2. $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt[4]{3x+1} + \sqrt{3x+1}}.$

3. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{3^x}{1+9^x} dx.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+2)^2}.$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - \cos 2x}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $9y = x^2$, $y = 4x^2$, $y - 2 = 0$.

7. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4$, если поверхностная площадь равна $\gamma(x; y) = 2x + 5y + 10$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{7}}{5} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n x^n.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{n^4}.$

13. Вычислить $\int_0^1 x^5 e^{-x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ (\pi - x)/2, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$,

если $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ -1, & \text{если } 1 < x < 2; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $xy' - y = y^2.$

17. $y = xy' - xe^{\frac{y}{x}}.$

Решить задачу Коши.

18. $xy' - y = x^2$, $y(1) = -2.$

19. $y'' + 4y' - 5y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 0.$

20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$y'' - 6y' + 9y = 3e^{-3x}.$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 6y = \cos 6x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

Вариант 14.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx.$

2. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$

3. $\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 x \sin^2 x dx.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}.$

5. $\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^3}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $x = y^2$, $x = \frac{3}{4}y^2 + 1$.

7. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху плоскостью $x + 2y + z = 4$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: x = 2y^2, x + 2y = 4$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(n!)^2}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)^3 + 1}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sin 1 - \sin \frac{1}{2^2} + \sin \frac{1}{3^2} - \sin \frac{1}{4^2} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}} x^n.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\sqrt{3n+1}}.$

13. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{x} \sin \frac{\sqrt{x}}{2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 5x + 1, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -2 < x < 0, \\ 2, & \text{если } 0 < x < 2; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $3e^x \sin y dx + (1 - e^x) \cos y dy = 0.$

17. $(2x + 1)y' = 4x + 2y.$

Решить задачу Коши.

18. $y' = \frac{y}{x} - 1, y(1) = 2.$

19. $y'' - 6y' = 0, y(0) = 2, y'(0) = 6.$

20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 10y' + 25y = e^{5x}.$$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 8y = -x^2, \text{ удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

Вариант 15.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^4 \frac{3}{1+\sqrt{2x+1}} dx.$ 2. $\int_1^{e^3} \frac{5}{x\sqrt{1+\ln x}} dx.$ 3. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2}.$ 5. $\int_{-4}^4 \frac{dx}{(x+2)^2}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x-4)^2$, $y = 16 - x^2$ и осью Ox .

7. Вычислить $\iint_D (x+y) dx dy$ по области D , ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 8$, $y = 0$, $x = 3$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)4^n}{n+2}.$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{2n^2-1}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^{2n}}{2^n}.$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{5^n \sqrt{n+1}}.$

13. Вычислить $\int_0^{0.5} (1 - e^{-x^2}) dx$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 1-4x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 8$ функцию $f(x)$, если $f(x) = |x| - 3$ при $-4 < x < 4$; построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $y' = \frac{e^{2x}}{\ln y}.$ 17. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$

Решить задачу Коши.

18. $x^2 y' + xy + 1 = 0$, $y(1) = 3$. 19. $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = e^{4x}$.

21. Найти частное решение дифференциального уравнения
 $y'' + 2y' + 2y = \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям
 $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Вариант 16.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx.$

2. $\int_0^7 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{-\infty}^0 e^{5x+1} dx.$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x dx}{\sin 2x}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 2$, $x + 2y - 5 = 0$.

7. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $2y = \sqrt{x}$, $x + y = 5$, $x = 0$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+2)!}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{4}{1^2} - \frac{4}{3^2} + \frac{4}{5^2} - \frac{4}{7^2} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}.$

13. Вычислить $\int_0^1 x^2 \left(1 - \cos \frac{\sqrt{x}}{2}\right) dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 6$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 2x - 3$ при $-3 < x < 3$; построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $\operatorname{ctg} x \cos^2 y dx + \sin^2 x \operatorname{tg} y dy = 0.$

17. $y = x(y' - x \cos x).$

Решить задачу Коши.

18. $y dx + 2\sqrt{xy} dy = x dy$, $y(1) = 4$. 19. $y'' - 9y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 3$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - y' - 6y = -(4x+1)e^{2x}.$$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 10y = x - 2, \text{ удовлетворяющее начальным условиям}$$

$$y(0) = 5, y'(0) = 0.$$

Вариант 17.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^1 \frac{x}{2e^x} dx.$

2. $\int_1^5 \frac{dx}{x + \sqrt{3x+1}}.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) dt.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{-\infty}^0 \frac{2x+3}{x^2+1} dx.$

5. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{4x}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $7x^2 - 9y + 9 = 0$, $5x^2 - 9y + 27 = 0$.

7. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$, $y = 1$, если поверхностная плотность равна $\gamma(x; y) = 3x^2 + 2y^2 + 1$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^{n-1}}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2n}{n^4+1}}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{1+3} - \frac{2}{1+3^2} + \frac{3}{1+3^3} - \frac{4}{1+3^4} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{2^n \sqrt{n+1}}.$

13. Вычислить $\int_0^1 \frac{e^{-x^3} - 1}{x^3} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 4 - 2x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 3$ функцию $f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < 1,5, \\ -1, & \text{если } 1,5 < x < 3; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $1 + (1 + y')e^y = 0.$

17. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2} + y.$

Решить задачу Коши.

18. $x(y' - y) = e^x$, $y(1) = e.$ 19. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1.$

20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 3\cos 2x - 6\sin 2x.$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения

$y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3, y'(0) = 5$.

Вариант 18.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_{-1}^2 x e^{-x/2} dx.$

2. $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}.$

3. $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2t \sin^2 2t dt.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{-\infty}^0 3^{2x} dx.$

5. $\int_0^7 \frac{xdx}{49-x^2}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $3x - y - 1 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$, $y - 3 = 0$.

7. Вычислить $\iint_D xy^3 dx dy$ по области D , ограниченной линиями $y^2 = 1 - x$, $x = 0$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n-1}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{(n+1)(3n+1)^3}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{2}{1} - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^{n-1}} x^n.$

12. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{(n-2)^2}.$

13. Вычислить $\int_0^{0,25} \cos \sqrt{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 10$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 3 - |x|$ при $-5 < x < 5$; построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $(1 + e^{3y})xdx = e^{3y} dy.$

17. $dy = (2e^x - y)dx.$

Решить задачу Коши.

18. $y' = \frac{(x-y)y}{x^2}$, $y(1) = 0,5$. 19. $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' - 24y = 6\cos 3x - 33\sin 3x$.

21. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12, \text{ удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

Вариант 19.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_1^5 x^2 \log_5 x dx.$

2. $\int_0^{15} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+1} + \sqrt{x+1}}.$

3. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_0^{+\infty} \frac{(x-1)dx}{(x^2-2x+5)^2}.$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - \cos 2x}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 2 \sin x$, $x = 0$, $x = 5\pi/4$.

7. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 4y^2$, $x + y = 5$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(2n)!}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n-1}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{5}{3} - \frac{5}{3^2 \cdot 2} + \frac{5}{3^3 \cdot 3} - \frac{5}{3^4 \cdot 4} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n^3}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!n^2}.$

13. Вычислить $\int_0^{0,25} x^2 \cos 4\sqrt{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 6x - 5, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 8$ функцию $f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } -4 < x < 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \\ 2, & \text{если } 0 < x < 4; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $(xy^3 + x)dx + (x^2y^2 - y^2)dy = 0.$

17. $xy' + x + y = 0.$

Решить задачу Коши.

18. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$, $y(1) = 0.$ 19. $y'' + 8y' + 16y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -1.$

20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 3y = 70e^{4x}.$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 5y = 5x - x^2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

Вариант 20.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_{-1}^0 (2x+3)e^{-x} dx.$

2. $\int_4^{25} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}.$

3. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 t dt.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$

5. $\int_1^{e^2} \frac{5}{x\sqrt{\ln x}} dx.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $x = -\pi$, $x = \pi/2$, $y - 1 = 0$.

7. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху поверхностью $z = 1 - x^2$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: y = 3 - x$, $y = 0$, $x = \pm 1$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^3 + 1}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{2}{4 \cdot 5} + \frac{3}{8 \cdot 9} - \frac{4}{16 \cdot 17} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{3^n}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3n^3}.$

13. Вычислить $\int_0^{0.1} \frac{1 - e^{-4x}}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 7 - 3x, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 1 + x$ при $-1 < x < 1$; построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $(y + x^2 y)y' - y^2 = 1.$

17. $xy' = 2y + x^4.$

Решить задачу Коши.

18. $xy' + y \ln \frac{y}{x} = y$, $y(1) = e^3$. 19. $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 8e^{3x}$.

21. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' = 4x + 2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3$, $y'(0) = -6$.

Вариант 21.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^{\pi/6} (2-x) \sin 3x dx.$

2. $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{3x+1}}.$

3. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin^3 t}.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_2^{+\infty} e^{-5x} dx.$

5. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{1+x}}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2$, $x + y + 2 = 0$.

7. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху поверхностью $z = 1 - y^2$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: x = y^2$, $x = 2y^2 + 1$, $y = \pm 1$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2 \cdot n!}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n-1}}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{\sqrt{n^5 + 4}}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}(x-1)^n}{n^2}.$

13. Вычислить $\int_0^{0,36} \sqrt{x} \sin \frac{\sqrt{x}}{3} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$,

если $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -2 < x < 0, \\ -0.5, & \text{если } x = 0, \\ x/2, & \text{если } 0 < x < 2; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $y' = 2xy + x.$

17. $(x - y)y dx - x^2 dy = 0.$

Решить задачу Коши.

18. $(x+1)y' + y = x^3 + x^2$, $y(0) = 1$. 19. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 16y = 80e^{2x}$.

21. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 8y = 2x - 3$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Вариант 22.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^{\pi/4} x \cos x \sin x dx.$

2. $\int_{25}^{49} \frac{dx}{x - 4\sqrt{x}}.$

3. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln^2 x}}.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{8x^2 + 1}.$

5. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, $x = 0$.

7. Найти объем криволинейного цилиндра, который ограничен сверху поверхностью $4z = y^2$, снизу плоскостью $z = 0$ и проектируется на плоскость Oxy в область $D: y = 2x, x + y = 9, y = 0$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^{n+1}}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3n+1)^3}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{3}{2!} + \frac{3^2}{3!} - \frac{3^3}{4!} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+4)}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n)^2 (x-1)^n.$

13. Вычислить $\int_0^{0.5} \frac{\ln(1+2x^2)}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 6x - 2, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 2x + 2$ при $-2 < x < 2$; построить графики функции и суммы ряда. Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $2xy' + x^2 = 1.$

17. $xy' - 2y + x^2 = 0.$

Решить задачу Коши.

18. $x dy + 2\sqrt{xy} dx = y dx, y(1) = 4.$ 19. $y'' - y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3.$

20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' = 15e^x.$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1, y'(0) = 14.$

Вариант 23.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x \cos x dx.$

2. $\int_1^{28} x \sqrt[3]{1-x} dx.$

3. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \sin t \sin 3t dt.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \sin \frac{x}{2} dx.$

5. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^5}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 3$, $x + y - 4 = 0$.

7. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $x + y = 3$, если поверхностная плотность равна $\gamma(x; y) = 4x + 5y + 2$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(2n-1)!}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 8}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{2!} - \frac{8}{4!} + \frac{27}{6!} - \frac{64}{8!} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(n+2)}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{5^n n}.$

13. Вычислить $\int_0^1 x^5 \cos \frac{x}{4} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 4 - 9x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 6$ функцию $f(x)$,

если $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } -3 < x < 0, \\ 1,5, & \text{если } x = 0, \\ -x, & \text{если } 0 < x < 3; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $y' - xy^2 = 2xy.$

17. $(2x^2 + xy)y = xy + y^2.$

Решить задачу Коши.

18. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$, $y(\sqrt{2}) = 2$. 19. $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 16y = 24e^{4x}$.

21. Найти частное решение дифференциального уравнения

$y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 2$.

Вариант 24.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^{\ln 5} x e^x dx.$

2. $\int_1^9 \frac{\sqrt{x} dx}{1+x}.$

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos x}.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}.$

5. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $x + y + 2 = 0$, $x - y - 2 = 0$.

7. Вычислить $\iint_D xy^3 dx dy$ по области D , ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 4x$ ($y \geq 0$).

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}}{n!}.$

9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)^2}{(n-1)(3n-1)^3}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sin 1 - \sin \frac{1}{2^3} + \sin \frac{1}{3^3} - \sin \frac{1}{4^3} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)(2n+1)}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{6^n}.$

13. Вычислить $\int_0^{0.5} \frac{\ln(1+4x^2)}{x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - 3, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 6$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 1 - |x|$ при $-3 < x < 3$; построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy.$

17. $xy' + y = \sin x.$

Решить задачу Коши.

18. $2xyu' + x^2 + y^2 = 0, y(1) = 0.$

19. $y'' - 4y' + 8y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0.$

20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x}.$$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения
 $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x$, удовлетворяющее начальным условиям
 $y(0) = 2, y'(0) = 7$.

Вариант 25.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_{-\pi/4}^0 x \sin 2x dx.$

2. $\int_{27}^{125} \frac{dx}{2 - \sqrt[3]{x}}.$

3. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 81}.$

5. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x}$, $y = x$, $y = 0$, $x = -3$.

7. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $y = 4$, $x = \sqrt{25 - y^2}$, если поверхностная плотность равна $\gamma(x; y) = x$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n!}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{4n^2 + 4n + 1}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3^2} + \frac{\sqrt{3}}{3^3} - \frac{\sqrt{4}}{3^4} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt[3]{n}}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n}}{4^n}.$

13. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{x^5} \sin \frac{\sqrt{x}}{2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 10x - 3, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 8$ функцию $f(x)$,

если $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{если } -4 < x < 0, \\ -1/2, & \text{если } x = 0, \\ 1+x, & \text{если } 0 < x < 4; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $(xy - x)^2 dy + y(1 - x)dx = 0.$

17. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2.$

Решить задачу Коши.

18. $y' = \sin^2 x + y \operatorname{ctg} x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$

19. $y'' + 4y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 4.$

20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 14y' + 49y = 72\sin 7x.$$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x, \text{ удовлетворяющее начальным условиям}$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

Вариант 26.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x^3} dx.$

2. $\int_1^2 x\sqrt{2-x} dx.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \sin^2 x dx.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 8x + 20}.$

5. $\int_{-1}^3 \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4x + 4} dx.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6x + 11$, $x = 0$, $x - 3 = 0$, $y + 2 = 0$.

7. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = y^2$, $x + y = 0$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{2n^2-1}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+4n+8}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{3}{2!} + \frac{5}{3!} - \frac{7}{4!} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n+1)x^n}{7^n}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{n(n+7)}.$

13. Вычислить $\int_0^2 \cos \frac{x^3}{16} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{4}, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 10$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 4x - 3$ при $-5 < x < 5$; построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $xyy' = \frac{1+x^2}{1-y^2}.$

17. $(xy' - 1) \ln x = 2y.$

Решить задачу Коши.

18. $(x+2y)dx + xdy = 0$, $y(1) = 0$. 19. $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + 2y = 20xe^x.$$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения
 $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1$, удовлетворяющее начальным условиям
 $y(0) = 2, y'(0) = 2$.

Вариант 27.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 5x dx.$

2. $\int_1^4 \frac{9x-1}{3\sqrt{x}+1} dx.$

3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{(1-\cos x)^2}.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_0^{+\infty} x 2^{-x} dx.$

5. $\int_{0.5}^e \frac{dx}{x \ln x}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{2}(x-5)^2$, $y = 9 - x$.

7. Вычислить $\iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy$ по области D , ограниченной линиями $xy = 1$, $y = x$, $y = 2$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^2 - 2n + 5}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 + 6n + 13}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{2}{3^4} + \frac{3}{5^4} - \frac{4}{7^4} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{4^n} x^n.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n} (x-4)^n.$

13. Вычислить $\int_0^2 \sin \frac{x^2}{4} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ x/5 - 2, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$, если $f(x) = 3 - x$ при $-2 < x < 2$; построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $2x^2 yy' + y^2 = 2.$

17. $2x^3 dy = y(2x^2 - y^2) dx.$

Решить задачу Коши.

18. $x^2 y' = 2xy + 3$, $y(1) = 0$. 19. $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 12y' + 36y = 12e^{4x}.$$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 5y' + 6y = 52 \sin 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -2$, $y'(0) = -2$.

Вариант 28.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^2 x^3 e^{-x^2} dx.$

2. $\int_2^3 \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$

3. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^2 t dt.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx.$

5. $\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$.

7. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $x = 0$, $x + y = 1$, $x + 2y + 2 = 0$, если поверхностная плотность равна $\gamma(x; y) = x^2$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{n^2 + 3}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 100}{100n^2 + 4}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{\sqrt{3}}{1 \cdot 2} - \frac{\sqrt{4}}{2 \cdot 2^2} + \frac{\sqrt{5}}{3 \cdot 2^3} - \frac{\sqrt{6}}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{2n(2n+1)}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt[3]{n^2}}.$

13. Вычислить $\int_0^1 \sin \frac{x^2}{2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики

функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 2x - 11, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 12$ функцию $f(x)$,

если $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{если } -6 < x < 0, \\ 1, & \text{если } 0 < x < 6; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $y^2 y' + xy^2 y' + x = 0.$

17. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$

Решить задачу Коши.

18. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2), y(1) = 1.$

19. $y'' + 6y' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 7y' - 8y = xe^x$.

21. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 16y = 32e^{4x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Вариант 29.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (x+4) \cos x dx.$

2. $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 \left(8t + \frac{\pi}{12} \right) dt.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}.$

5. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 2x + 1}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x-2)^2$, $y = (x-4)^2$ и осью Ox .

7. Вычислить $\iint_D xy^2 dx dy$ по области D , ограниченной линиями $x = 2 - y^2$, $x = 0$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2n-1}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{(n^2+1)^3}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\frac{1}{1+1^2} - \frac{3}{1+2^2} + \frac{5}{1+3^2} - \frac{7}{1+4^2} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} x^n.$

12. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n-2)^2}.$

13. Вычислить $\int_0^2 \sin \frac{x^3}{16} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 3-8x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x)$,

если $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{если } -2 < x < 0, \\ 2, & \text{если } x = 0, \\ 4, & \text{если } 0 < x < 2; \end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $x^2 y' = y' + xy.$

17. $x^2 dx + 2xy dy + y^2 dx = 0.$

Решить задачу Коши.

18. $y' = x^2(3y + e^{x^3})$, $y(0) = 1$. 19. $y'' - 2y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 12y' + 36y = \sin 2x.$$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y = 8e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -8$.

Вариант 30.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx.$

2. $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx.$

3. $\int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^4} dx.$

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{3^{2x}}.$

5. $\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}.$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$, $y = 2$.

7. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 1$, $x^2 = y$, $y = 2$, $x = 0$.

Исследовать сходимость числового ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(n+1)5^n}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n} + n}.$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots$$

Найти область сходимости степенного ряда.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(x+6)^n.$

13. Вычислить $\int_0^{0,25} \sqrt{x} \sin 2\sqrt{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

14. Разложить заданную на отрезке функцию в ряд Фурье, построить графики функции и суммы ряда: $f(x) = \begin{cases} 7x-1, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 8$ функцию $f(x)$, если $f(x) = |x| - 3$ при $-4 < x < 4$; построить графики функции и суммы ряда.

Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

16. $x dy + x y dy + y dx = x y dx.$

17. $xy' + y = \ln x + 1.$

Решить задачу Коши.

18. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y(1) = 2$. 19. $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 6$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' - 12y = (20x - 8)e^{4x}.$$

21. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 8y = \sin 2x, \text{ удовлетворяющее начальным условиям } y(0) = 0, y'(0) = 2.$$