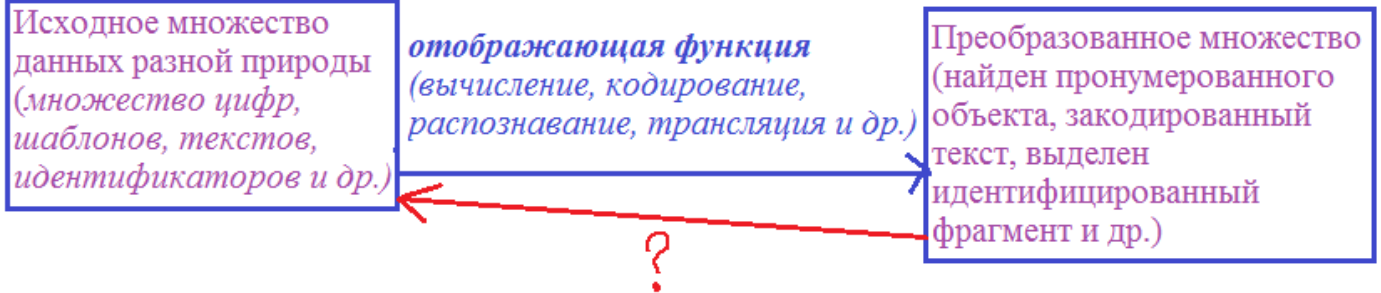


ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Отображения — ключевой механизм информатики.



Говорят, что отображение существует, если **задана пара множеств и отображающая функция**, для которой первое множество — область определения, а второе — область значения.

Чаще встречаются отображения (операторы), действующие в линейных нормированных пространствах. Наиболее изученными и важными для приложений являются линейные операторы.

Пусть L_1 и L_2 — два линейных пространства.

Опр. Если задано правило f , по которому каждому элементу $\bar{x} \in L_1$ ставится в соответствие некоторый элемент $\bar{y} \in L_2$, то говорят, что задан **оператор (отображение, преобразование)**, действующий из L_1 в L_2 : $f: L_1 \rightarrow L_2$; при этом элемент $\bar{y} = f(\bar{x})$ называется **образом** элемента \bar{x} , а элемент \bar{x} — **прообразом** элемента \bar{y} (при данном отображении f).

Опр. Оператор $f: L_1 \rightarrow L_2$ называется **линейным**, если для любых элементов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x} \in L_1$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются условия:

- 1) $f(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2)$;
- 2) $f(\alpha \bar{x}) = \alpha f(\bar{x})$.

В учебной и научной литературе линейные операторы принято обозначать A, B, C, T, \dots

Линейным функционалом называется линейный оператор, отображающий линейное пространство во множество чисел (действительных или комплексных).

Областью или множеством значений линейного оператора A называется множество

$$\text{im}A = \{y \in L_2 | y = Ax, x \in L_1\}.$$

Размерность области значений $\dim \text{im}A$ называется **рангом оператора A** и обозначается $\text{rang}A$, т.е.

$$\text{rang}A = \dim \text{im}A.$$

Ядром ненулевого линейного оператора A называется подпространство всех векторов $\bar{x} \in L_1$, для которых $A\bar{x} = 0$, и обозначается $\ker A$, т.е.

$$\ker A = \{\bar{x} \in L_1 | A\bar{x} = 0\}.$$

Размерность ядра оператора A называется **дефектом оператора** и обозначается $\text{def}A$, т.е.

$$\text{def}A = \dim \ker A.$$

В случае конечномерного пространства L_1 размерности n справедливо утверждение:

Сумма размерностей образа и ядра линейного оператора равна размерности исходного пространства, т.е.

$$\dim \text{im}A + \dim \ker A = n \text{ или } \text{rang}A + \text{def}A = n.$$

Примеры линейных операторов.

1. **Единичный (тождественный) оператор** $I(\bar{x}) = \bar{x}$ переводит каждый элемент пространства в себя.
2. **Нулевой оператор:** $O(\bar{x}) = \bar{0}$ для всех $\bar{x} \in L_1$ ($\bar{0}$ – нулевой элемент пространства L_2).

Линейными операторами являются линейные преобразования евклидова пространства, дифференциальные и интегральные операторы, преобразования последовательностей в дискретной математике и др.

ДЕЙСТВИЯ НАД ОПЕРАТОРАМИ

Сумма и произведение операторов.

Опр. Пусть A и B – два линейных оператора, действующих из линейного пространства L_1 в пространство L_2 . Назовем их суммой $A + B$ оператор C , ставящий в соответствие элементу $x \in L_1$ элемент

$$y = A(x) + B(x) \in L_2.$$

Опр. Произведение линейного оператора $A: L_1 \rightarrow L_2$ на число λ определяется как оператор, который элементу x ставит в соответствие элемент $\lambda A(x)$.

Опр. Произведением (композицией) линейного оператора $A: L_1 \rightarrow L_2$ на линейный оператор $B: L_2 \rightarrow L_3$ называется оператор C , ставящий в соответствие элементу $x \in L_1$ элемент

$$z = B(A(x)) \in L_3.$$

Сумма линейных операторов является линейным оператором.

При умножении линейного оператора на число получается линейный оператор.

Произведение линейных операторов является линейным оператором, который непрерывен, если A и B непрерывны.

Пусть пространства L_1 и L_2 нормированы.

Опр. Линейный оператор A называется **ограниченным**, если существует такая постоянная C , что для любого $x \in L_1$ выполняется неравенство

$$\|Ax\| \leq C\|x\|.$$

Наименьшее из чисел C , удовлетворяющее этому неравенству, называют **нормой оператора A** и обозначают $\|A\|$. Записывают

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Ограниченность линейного оператора в нормированных линейных пространствах равносильна его непрерывности.

Если A и B – ограниченные операторы, действующие в нормированных пространствах, то их сумма и произведение являются ограниченными операторами, причем

$$\begin{aligned}\|A + B\| &\leq \|A\| + \|B\|, \\ \|BA\| &\leq \|B\| \cdot \|A\|.\end{aligned}$$

Обратный оператор, обратимость.

Пусть A – оператор, действующий из L_1 в L_2 , и D_A – область определения, а $\text{im } A$ – образ этого оператора.

Опр. Оператор A называется обратимым, если для любого $y \in \text{im } A$ уравнение

$$Ax = y$$

имеет единственное решение.

Если A обратим, то каждому $\bar{y} \in \text{im } A$ можно поставить в соответствие единственный элемент $\bar{x} \in L_1$, являющийся решением уравнения $A\bar{x} = \bar{y}$. Оператор, осуществляющий это соответствие, называется **обратным к A** и обозначается A^{-1} , т.е. $\bar{x} = A^{-1}\bar{y}$.

Справедливы равенства

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – тождественный оператор, для которого $Ex = x$, $x \in L_1$.

Оператор A^{-1} , обратный линейному оператору A , также линеен.

Опр. Линейный оператор $A: L_1 \rightarrow L_2$ называется **невырожденным**, если его ядро состоит только из нулевого вектора, т.е.

$$A\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} = \bar{0},$$

в противном случае оператор называется вырожденным.

Для вырожденного оператора равенство $A\bar{x} = \bar{0}$ возможно и при некотором $\bar{x} \neq \bar{0}$

Пусть $A: L \rightarrow L$ – линейный оператор в n -мерном пространстве L .

Опр. Ненулевой элемент $\bar{x} \in L$ ($\bar{x} \neq \bar{0}$) называется **собственным вектором** линейного оператора $A: L \rightarrow L$, если существует такое число λ , что

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}.$$

Число λ называется **собственным значением** (собственным числом) линейного оператора A , соответствующим собственному вектору \bar{x} .

Совокупность всех собственных значений называется спектром оператора A , а все остальные значения λ – регулярными.

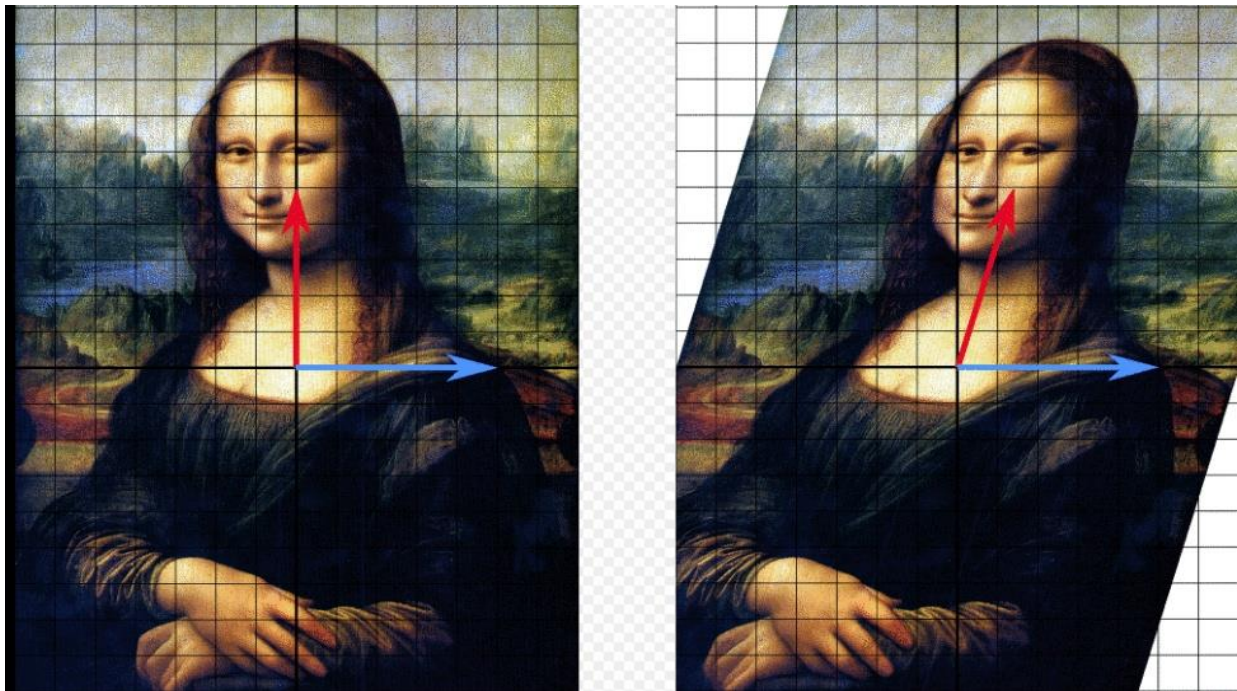
Понятие спектра – важнейшее понятие в теории операторов. Это связано с тем, что многие соотношения, связанные с линейными операторами, существенно упрощаются в системе координат, построенной на базисе из собственных векторов оператора. Исторически они возникли при исследовании квадратичных форм и дифференциальных уравнений.

Собственный вектор линейного оператора – это такой вектор, который при действии на него данного оператора лишь масштабируется с коэффициентом λ , а его ориентация остается неизменной.

Такое уникальное свойство собственных векторов линейных операторов используется в самых разных разделах математики и механики: при исследовании поверхностей второго порядка в геометрии, при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, при моделировании вращения твердого тела и малых колебаний механических систем, в квантовой механике и др.

Вспомним об операторных задачах в линейных пространствах:

1. Задача об отыскании корня уравнения $A\bar{x} = \bar{y}$
2. Задача о неподвижной точке $A\bar{x} = \bar{x}$
3. Задача о собственных значениях λ и собственных векторах линейного оператора $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$
4. Задача вариационного исчисления о нахождении элемента \bar{x} , доставляющего минимум функционала $\min(A\bar{x})$



Синим цветом обозначен собственный вектор. Он, в отличие от **красного**, при деформации (преобразовании) **не изменил направление**, поэтому является **собственным вектором** этого преобразования, соответствующим некоторому **собственному значению** (здесь оно равно единице, так как вектор не изменил свою длину). Любой вектор, параллельный синему вектору, также будет собственным, соответствующим тому же собственному значению.

!!!!!! Если λ – регулярная точка, то оператор $A - \lambda E$ обратим.
!!!!!! Спектр оператора A содержится в круге радиуса $\|A\|$.

Свойства собственных векторов

1. Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное значение.

2. Если \bar{x}_1 и \bar{x}_2 – два собственных вектора линейного оператора A с одним и тем же собственным значением λ , то $\alpha \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2$ также является собственным вектором линейного оператора A с тем же собственным значением λ , α, β – числа.

3. Собственные векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ линейного оператора A , соответствующие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, линейно независимы.
??? Базис?

Линейные операторы в конечномерных линейных пространствах и их матрицы

Пусть A линейный оператор, отображающий n -мерное пространство \mathbb{R}^n с базисом $\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n$ в m -мерное пространство \mathbb{R}^m с базисом $\bar{f}_1; \bar{f}_2; \dots; \bar{f}_m$.

Если \bar{x} – произвольный вектор пространства \mathbb{R}^n , то $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{e}_i$

и в силу линейности оператора A

$$A(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i A(\bar{e}_i).$$

Элементы $A(\overline{e_1}), A(\overline{e_2}), \dots, A(\overline{e_n})$ являются элементами линейного пространства \mathbb{R}^m , а значит, их можно разложить по базису $\overline{f_1}; \overline{f_2}; \dots; \overline{f_m}$:

$$\begin{aligned} A(\overline{e_1}) &= a_{11}\overline{f_1} + a_{21}\overline{f_2} + \dots + a_{m1}\overline{f_m}, \\ A(\overline{e_2}) &= a_{12}\overline{f_1} + a_{22}\overline{f_2} + \dots + a_{m2}\overline{f_m}, \\ &\dots, \\ A(\overline{e_n}) &= a_{1n}\overline{f_1} + a_{2n}\overline{f_2} + \dots + a_{mn}\overline{f_m}. \end{aligned}$$

Таким образом, линейный оператор определяется матрицей коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

столбцы которой состоят из координат векторов $A(\overline{e_1}), A(\overline{e_2}), \dots, A(\overline{e_n})$, и которая называется **матрицей линейного оператора** A .

Утверждение. Матрица линейного оператора позволяет найти образ любого вектора по единому алгоритму.

Если $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$ — столбцы координат элемента $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ в базисе $\overline{e_1}; \overline{e_2}; \dots; \overline{e_n}$ и его образа $\overline{y} = A(\overline{x}) \in \mathbb{R}^m$ в базисе $\overline{f_1}; \overline{f_2}; \dots; \overline{f_m}$ соответственно, то

$$Y = AX.$$

Линейные отображения между конечномерными векторными пространствами (проекторы, повороты координат, гомотетии, умножение вектора на матрицу и др.) изучаются в линейной алгебре.

Проектор (математика)

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

В линейной алгебре и функциональном анализе линейный оператор P , действующий в линейном пространстве, называется **прое́ктором** (а также **оператором прое́цирования** и **проекцио́нным опера́тором**) если $P^2 = P$. Такой оператор называют **идемпотентным**.

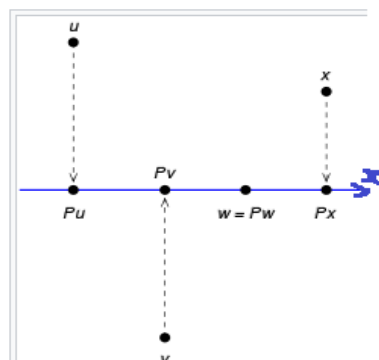
Несмотря на свою абстрактность, это определение обобщает идею построения геометрической проекции.

В качестве определения можно использовать следующее свойство проектора: линейный оператор $P: X \rightarrow X$ является проектором тогда и только тогда, когда существуют такие подпространства U и V пространства X , что X раскладывается в их прямую сумму, и при этом для любой пары элементов $u \in U, v \in V$ имеем $P(u + v) = u$. Подпространства U и V — соответственно **образ** и **ядро** проектора P , и обозначаются $\text{Im} P$ и $\text{Ker} P$.

$$\begin{aligned} P: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & P(x, y) &= (x, 0) \\ \text{Im } P &= U = \{(x, 0)\} \\ \text{Ker } P &= V = \{(0, y)\} & \mathbb{R}^2 &= U \oplus V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(u + v) &= P(u) + P(v) = u + 0 = u \\ P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Собственными значениями проектора могут быть только 0 и 1.



На этом рисунке преобразование P является ортогональной проекцией на ось Ox .

ОПЕРАТОРЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ в пространствах функций

1. **Оператор дифференцирования** (производная функции $f(x)$)

$$Df(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x).$$

2. **Обыкновенный линейный дифференциальный оператор**

$$L(y(x)) = y^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y'(x) + a_n(x) \cdot y(x)$$

отображает пространство n раз дифференцируемых функций $y(x)$ в пространство функций.

Пусть G – область трехмерного пространства в декартовой системе координат $Oxyz$. В области G задана скалярная функция $U = U(x; y; z)$ и вектор-функция

$$\vec{F}(x; y; z) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k},$$

где скалярные функции $P = P(x; y; z)$, $Q = Q(x; y; z)$, $R = R(x; y; z)$ являются проекциями вектор-функции \vec{F} на координатные оси.

3. **Оператор градиента** от скалярной функции трех переменных $U(x; y; z)$

$$\text{grad } U(x; y; z) = \nabla u(x; y; z) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

отображает множество дифференцируемых функций на множество векторных функций. **Градиент скалярной функции направлен в сторону наискорейшего возрастания этой функции.**

3. **Оператор дивергенции** от векторной функции \vec{F} в точке M определяется соотношением:

$$\text{div} \vec{F}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M).$$

Оператор дивергенции отображает множество дифференцируемых векторных функций на множество скалярных функций.

4. **Оператор ротор** векторной функции $\vec{F} = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$, $(x; y; z) \in G$, где функции $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$, $R(x; y; z)$ и их производные первого порядка по координатам непрерывны в области G , отображает множество дифференцируемых векторных функций на множество векторных функций и определяется равенством

$$\text{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

5. **Оператор лапласиан** от скалярной функции $U(x; y; z)$

$$\nabla^2 U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U(x; y; z) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

отображает множество скалярных дважды дифференцируемых функций на множество скалярных функций.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ в пространствах функций

$$[Jy](x) = \int_a^b K(x, t)y(t)dt$$

отображают множество интегрируемых функций $y(t)$ на множество функций.

1. Преобразование Фурье

Пусть $f(t)$ является кусочно-гладкой, т.е. имеет конечное число точек разрыва первого рода, и абсолютно интегрируемой на $(-\infty, \infty)$, т.е. интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ сходится. Тогда функция

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

называется прямым преобразованием Фурье функции $f(t)$ и является, вообще говоря, комплекснозначной функцией. Функцию

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \qquad e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

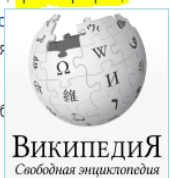
называют обратным преобразованием Фурье.

Преобразование Фурье является обобщением ряда Фурье на непериодические функции, в том смысле, что при некоторых условиях непериодическую функцию можно представить как суперпозицию гармонических колебаний с разными частотами с коэффициентами («амплитудами») $F(\omega)$.

Применения [[править](#) | [править код](#)]

Преобразование Фурье используется во многих областях науки — в физике, теории чисел, комбинаторике, обработке сигналов, теории вероятностей, статистике, криптографии, акустике, океанологии, оптике, геометрии и многих других. В обработке сигналов и связанных областях преобразование Фурье обычно рассматривается как декомпозиция функции по частоте и амплитуде, то есть обратимый переход от *временного пространства* в *частотное пространство*. Богатые возможности применения основываются на полезных свойствах преобразования:

- Преобразования являются **линейными операторами** и, с соответствующей нормализацией, **унитарными** (свойство, известное как **теорема Парсеваля**, или, в более узком смысле, как **теорема Планшереля**, или, в наиболее общем, как **дуализм Понтрягина**).
- Преобразования обратимы, причём обратное преобразование имеет практически такую же форму, как и прямое преобразование.
- Синусоидальные базисные функции (вернее, **комплексные экспоненты**) являются **собственными функциями дифференцирования**, что означает, что данное представление превращает линейные **дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами** в **обычные алгебраические**. (Например, в линейной стационарной системе частота — **консервативная величина**, поэтому поведение на каждой частоте может решаться независимо).
- По **теореме о свёртке**, преобразование Фурье превращает сложную операцию свёртки в простое умножение, что означает, что они обеспечивают эффективный способ вычисления основанных на свёртке операций, таких как умножение **многочленов** и **умножение больших чисел**.
- Дискретная версия преобразования Фурье** может быть быстро рассчитана на компьютерах с использованием алгоритма **быстрого преобразования Фурье** (БПФ).



Дискретное преобразование Фурье (в англоязычной литературе **DFT, Discrete Fourier Transform**) — это одно из преобразований Фурье, широко применяемых в алгоритмах цифровой обработки сигналов (его модификации применяются в сжатии звука в MP3, сжатии изображений в JPEG и др.), а также в других областях, связанных с анализом частот в дискретном (к примеру, оцифрованном аналоговом) сигнале. Дискретное преобразование Фурье требует в качестве входа дискретную функцию. Такие функции часто создаются путём дискретизации (выборки значений из непрерывных функций). Дискретные преобразования Фурье помогают решать дифференциальные уравнения в частных производных и выполнять такие операции, как свёртки. Дискретные преобразования Фурье также активно используются в статистике, при анализе временных рядов. Существуют многомерные дискретные преобразования Фурье.

Свертка функций. Если $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$, то

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du \leftrightarrow F(\omega)G(\omega).$$

2. **Преобразование Лапласа** получается из преобразования Фурье заменой $p = i\omega$.

Для функции f , удовлетворяющей условиям:

$|f(t)| < Ce^{\gamma_0 t}$ при $t \geq 0$, $f(t) = 0$ при $t < 0$ (γ_0 и C — постоянные),

прямое и обратное преобразование Лапласа имеют вид

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\mu-i\infty}^{-\mu+i\infty} \Phi(p)e^{pt}dp.$$

Функция Φ определена и аналитична в полуплоскости $Re\ p = -\mu > \gamma_0$.

ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ последовательностей

Преобразование последовательностей включает в себя такие понятия, как дискретные преобразования Лапласа, Фурье, разностные операторы, свёртка двух последовательностей, биномиальные преобразования, преобразования Стирлинга и другие. Преобразования последовательности могут использоваться для ускорения сходимости ряда.

Например, биномиальное преобразование последовательности $a_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ в $s_n = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ имеет вид

$$s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a_k,$$

где $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент.

Ортогональные и самосопряженные (симметрические) операторы в евклидовом пространстве

евклидово пространство	
симметрическая матрица	$A^T = A$
симметрический (самосопряжённый) оператор	$(Ax, y) = (x, Ay)$
ортогональная матрица	$A^T = A^{-1}$
ортогональный оператор	$(Ax, Ay) = (x, y)$

Пусть L – евклидово пространство.

Опр. Линейный оператор $A^*: L \rightarrow L$ называется *сопряженным* линейному оператору $A: L \rightarrow L$, если для любых $\bar{x}, \bar{y} \in L$

$$(A(\bar{x}), \bar{y}) = (\bar{x}, A^*(\bar{y})).$$

Теорема. Каждый линейный оператор A имеет единственный сопряженный оператор A^* .

Опр. Линейный оператор $A: L \rightarrow L$ называется *самосопряженным*, если он совпадает со своим сопряженным, т.е. $A = A^*$.

Опр. Линейный оператор $A: L \rightarrow L$ называется *симметрическим*, если для любых $\bar{x}, \bar{y} \in L$

$$(A(\bar{x}), \bar{y}) = (\bar{x}, A(\bar{y})).$$

Самосопряжённый оператор является симметрическим; обратное, вообще говоря, не верно. Для непрерывных операторов, определённых на всём пространстве, понятия симметрический и самосопряжённый совпадают.

В ортонормированном базисе матрица A^* сопряженного оператора A^* является транспонированной матрицей A^T исходного оператора A , т.е.

$$A^* = A^T.$$

В ортонормированном базисе матрица A самосопряженного оператора совпадает со своей транспонированной $A = A^T$,

Теорема. Линейный оператор A является самосопряженным (симметрическим) тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе его матрица является симметрической.

Утв. Все собственные значения симметрической матрицы с действительными элементами являются действительными числами.

Утв. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Теорема. Пусть A – самосопряженный линейный оператор в евклидовом пространстве L . Тогда в пространстве L существует ортонормированный базис из собственных векторов линейного оператора A .

Следствие. Матрица A самосопряженного линейного оператора в евклидовом пространстве приводима к диагональному виду.

Примеры. В пространстве \mathbb{R}^3 симметрическими являются операторы:

$f(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$ (где $\lambda \in \mathbb{R}$ – фиксированное число) – оператор растяжения в λ раз

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

оператор растяжения вдоль оси Ox

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

, где λ_i – коэффициенты растяжения вдоль соответствующих осей.

Опр. Линейный оператор $A: L \rightarrow L$ называется **ортгогональным**, если он сохраняет скалярное произведение элементов евклидова пространства L , т. е. если для любых $\bar{x}, \bar{y} \in L$ выполняется равенство

$$(A(\bar{x}), A(\bar{y})) = (\bar{x}, \bar{y}).$$

Из определения следует, что ортгогональный оператор сохраняет ортгогональность и норму элементов евклидова пространства, поскольку

$$\text{если } (\bar{x}, \bar{y}) = 0, \text{ то } (A(\bar{x}), A(\bar{y})) = 0,$$

$$\|A(\bar{x})\| = \sqrt{(A(\bar{x}), A(\bar{x}))} = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} = \|\bar{x}\|.$$

Теорема. Линейный оператор $A: L \rightarrow L$, действующий в евклидовом пространстве, является ортгогональным тогда и только тогда, когда он переводит ортонормированный базис евклидова пространства L в ортонормированный базис этого пространства.

Опр. Матрица A называется **ортгогональной**, если $A^T A = E$.

Матрица A ортгогонального оператора A является ортгогональной. Признаком ортгогональности матрицы является попарная ортгогональность ее столбцов и строк.

Свойства ортогональных матриц.

1. Если A —ортогональная матрица, то $A^{-1} = A^T$.
2. Если A —ортогональная матрица, то $\det A = \pm 1$.

В пространствах \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 ортогональными являются линейные операторы, сохраняющие расстояние. Например, оператор поворота вектора на фиксированный угол; оператор симметрии относительно прямой на плоскости или относительно плоскости в пространстве.

Примерами ортогональных матриц являются:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -0,6 & -0,8 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицами каких линейных операторов указанные матрицы являются?

Дискретное косинусное преобразование (англ. *Discrete Cosine Transform, DCT*) — одно из ортогональных преобразований. Вариант косинусного преобразования для вектора действительных чисел. Применяется в алгоритмах сжатия информации с потерями, например, MPEG и JPEG. Это преобразование тесно связано с дискретным преобразованием Фурье и является гомоморфизмом его векторного пространства.

Данное преобразование является линейным, поэтому его результат можно вычислить при помощи умножения матрицы преобразования и вектора. Матрица ДКП является ортогональной (обратная матрица равна транспонированной), поэтому обратное преобразование вычисляется с помощью умножения транспонированной матрицы ДКП на вектор. На практике используется вариант ДКП с матрицей, пропорциональной ортогональной (получающейся из ортогональной умножением на константу).