РЯДЫ ФУРЬЕ

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. **Разложение периодической функции в ряд Фурье.**
2. **Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.**

1. Разложение периодической функции в ряд Фурье

Пример 1. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 4$) функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -2 < x \le 0, \\ x & \text{при } 0 < x \le 2; \end{cases}$$

изобразить графики функции и суммы ряда.

Решение. График функции $f(x)$ изображен на рис. 1.

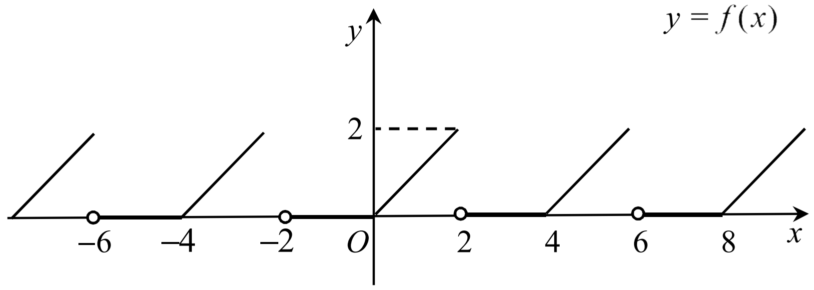

Рис. 1. График функции $f(x)$

Поскольку $T = 2l = 4$, то $l = 2$. Рассчитаем коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} xdx\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 = 1;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\cos\frac{\pi nx}{2}dx =$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x; & du=dx \\ dv=\cos\frac{\pi n}{2}xdx; & v=\int\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2-\frac{2}{\pi n}\int_0^2\sin\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{\pi n}\cdot\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\pi n-0+\frac{4}{\pi^2n^2}(\cos\pi n-\cos 0)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi n}\cdot 0+\frac{4}{\pi^2n^2}((-1)^n-1)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi^2n^2}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & \text{если } n=2k,\\ -\dfrac{4}{\pi^2\left(2k-1\right)^2}, & \text{если } n=2k-1.\end{cases}$$

Заметим, что при расчете коэффициентов ряда Фурье часто используются соотношения

$$\boxed{\sin\pi n=0;\quad \cos\pi n=(-1)^n.}$$

Далее находим

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x; & du=dx \\ dv=\sin\frac{\pi n}{2}xdx; & v=\int\sin\frac{\pi nx}{2}dx=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-x\cdot\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{\pi n}\int_0^2\cos\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-x\cdot\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2+\frac{4}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{\pi n}\cos\pi n-0+\frac{4}{\pi^2n^2}(\sin\pi n-\sin 0)\right)=-\frac{2}{\pi n}\cdot(-1)^n=\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Итак, ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}+\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}$$

или

$$f(x)\sim\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\frac{\pi(2k-1)x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}.$$

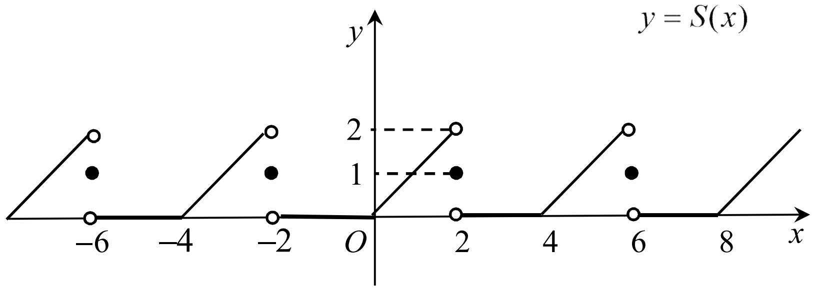

Рис. 2. График суммы ряда $S(x)$

В силу теоремы Дирихле график суммы $S(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ имеет вид, представленный на рис. 2.

Пример 2. Используя разложение в ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\frac{\pi(2k-1)x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}$$

периодической с периодом $T=4$ функции

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -2<x\le 0,\\ x & \text{при } 0<x\le 2,\end{cases}$$

найти сумму ряда: а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$.

Решение. а) Подставим в ряд Фурье $x=0$:

$$S(0)=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos 0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin 0=$$

$$=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

С другой стороны, из теоремы Дирихле следует, что $S(0)=0$, поэтому

$$\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2k-1\right)^2}=0,$$

откуда получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2k-1\right)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

или

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

б) При $x=1$ получим:

$$S(1)=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\frac{\pi(2k-1)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Поскольку $\cos\frac{\pi(2k-1)}{2}=0$ и

$$\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}\sin\frac{\pi(2k-1)}{2}=(-1)^{k+1}, & \text{если } n=2k-1 - \text{нечетное},\\ \sin\frac{\pi\cdot 2k}{2}=\sin\pi k=0, & \text{если } n=2k - \text{четное},\end{cases}$$

то

$$S(1)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{2k}}{\pi(2k-1)}\cdot(-1)^{k+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$

По теореме Дирихле, $S(1)=1$, поэтому

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=1;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4};$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

2. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Пример 1. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2\pi$) функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \le x \le \pi; \end{cases}$$

изобразить графики функции и суммы ряда.

Решение. График функции $f(x)$ изображен на рис. 3.

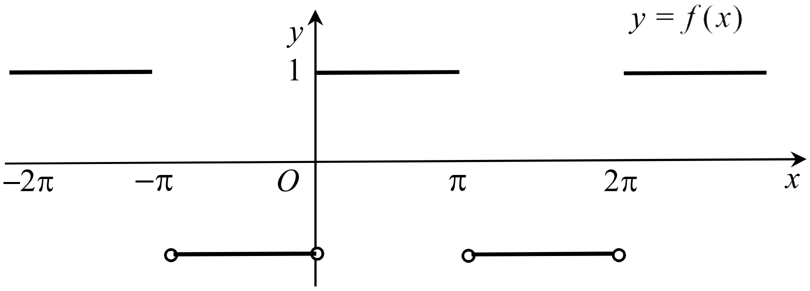

Рис. 3. График функции $f(x)$

Поскольку $f(x)$ – нечетная функция, то

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Вычисляя коэффициенты

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi n}(\cos \pi n - 1) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k - \text{четное}, \\ \dfrac{4}{\pi(2k-1)}, & \text{если } n = 2k-1 - \text{нечетное}, \end{cases}$$

получим ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots + \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + \ldots\right).$$

На рис. 4 изображен график суммы ряда $S(x)$.

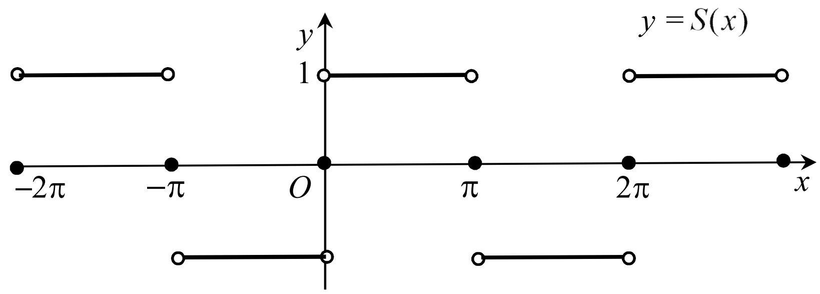

Рис. 4. График суммы ряда $S(x)$

Пример 2. Разложить функцию $f(x) = x$ на промежутке $[0; \pi)$ в тригонометрический ряд Фурье: а) по косинусам; б) по синусам.

Решение. а) Чтобы получить разложение в ряд Фурье, содержащий только косинусы, доопределим функцию так, чтобы функция $f_1(x)$ была четная. Тогда $f_1(x) = |x|$ при $x \in (-\pi; \pi)$ (рис. 5).

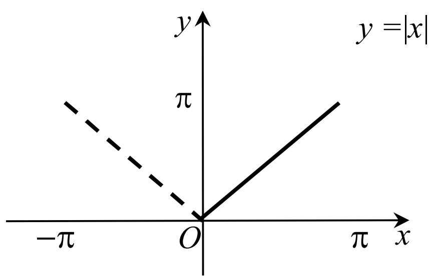

Рис. 5. График функции $f(x)$, доопределенной четным образом

В этом случае

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\cos nx\bigg|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\pi\sin\pi n + \frac{1}{n^2}(\cos\pi n - \cos 0)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}, & \text{если } n = 2k-1. \end{cases}$$

Таким образом, в этом случае ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},$$

т. е. при всех $x \in [0; \pi]$ имеет место соотношение

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x - \frac{4}{25\pi}\cos 5x - \ldots.$$

б) Для разложения функции в ряд Фурье по синусам доопределим ее так, чтобы функция $f_1(x)$ была нечетная, т. е. $f_1(x) = x$ при $x \in (-\pi; \pi)$ (см. рис. 6).

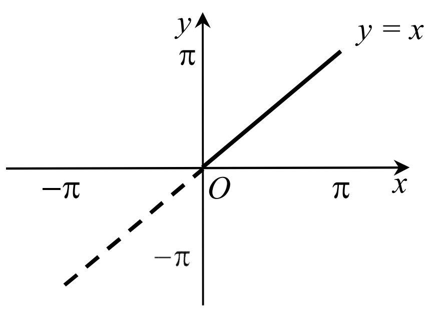

Рис. 6. График функции $f(x)$, доопределенной нечетным образом

В этом случае

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\pi\cos\pi n + \frac{1}{n^2}(\sin\pi n - \sin 0)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{(-1)^n\pi}{n}\right) = \frac{(-1)^n 2}{n}.$$

Таким образом, ряд Фурье по синусам имеет вид

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,$$

т. е. при всех $x \in [0; \pi)$ справедливо равенство

$$x = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x... .$$