ГАММА- и БЕТА-функции

Гамма-функция (факториальная функция), являясь одной из простейших неэлементарных функций, осуществляет естественное распространение факториала на вещественные (комплексные) значения аргумента. Эта задача была решена Эйлером, который ввел и исследовал ***гамма-функцию*** $\Gamma(x)$, для которой

$$\boldsymbol{\Gamma(n+1) = n!}.$$

Первая формула, предложенная Эйлером для гамма-функции, имела вид

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\right\}.$$

Эта формула может быть записана в виде

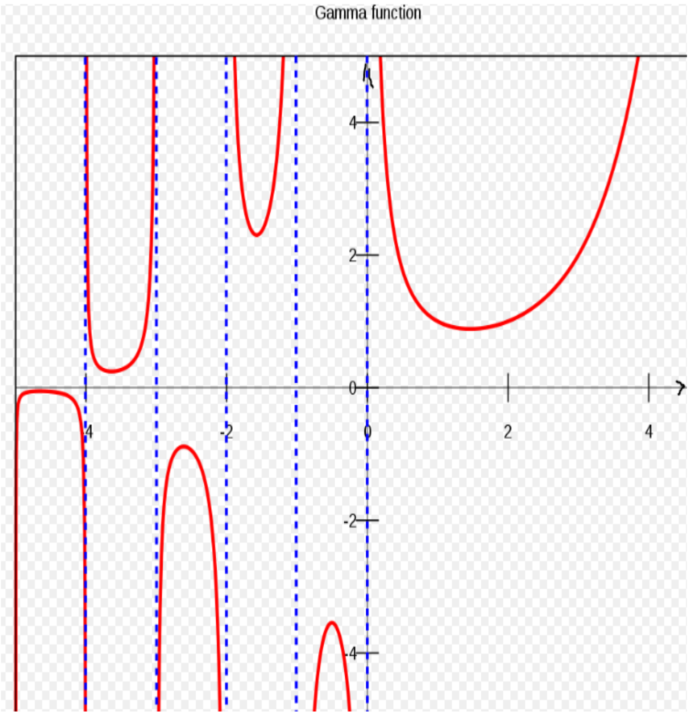
$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}e^{-\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}e^{\frac{x}{n}}\right\}, \qquad (1)$$

где

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right),$$

$$\boldsymbol{\gamma = 0,5772156649} \ldots.$$

Постоянная $\boldsymbol{\gamma}$ называется ***постоянной Эйлера***. Сам Эйлер вычислил ее значение с 20 десятичными знаками.



Для гамма-функции получены интегральные представления, одно их них

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\ , \quad \mathrm{Re}x > 0, \qquad (2)$$

принимается за определение гамма-функции.

Применение к формуле (2) общей теории несобственных интегралов, зависящих от параметра, позволяет вывести ряд различных свойств этой функции. В частности, показано, что при $x > 0$ функция $\Gamma(x)$ является непрерывно дифференцируемой, причем

$$\frac{d}{dx}\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln t dt\ .$$

При больших значениях переменной справедлива ***формула Стирлинга***

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}, \qquad x \to +\infty. \qquad (3)$$

Для уточнения формулы используют ***ряд Стирлинга***

$$\ln\Gamma(x) = x\ln x - x - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{12x} + \frac{1}{720x^3} - \cdots.$$

Для приближенного вычисления факториала во многих случаях достаточно использовать формулу

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n.$$

Гамма-функция $\Gamma(x)$ удовлетворяет трем функциональным соотношениям:

$$\mathbf{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)} \quad \textbf{(\textit{формула приведения})},$$

$$\mathbf{\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}} \; \textbf{(\textit{формула дополнения})},$$

$$\mathbf{2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \pi^{1/2}\Gamma(2x)},$$

которые играют важную роль при различных преобразованиях и вычислениях, связанных с этой функцией.

Проверить формулы справа.

$$\Gamma(1) = 0! = 1$$
$$\Gamma(2) = 1! = 1$$
$$\Gamma(3) = 2! = 2$$
$$\Gamma(4) = 3! = 6$$
$$\Gamma(5) = 4! = 24$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right) = \tfrac{15}{8}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(-\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{4}{3}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-n\right) = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)x\Gamma(x).$$

Замечание. *Формула приведения следует из формулы (2) интегрированием по частям.*

В связи с гамма-функцией рассматривают факториальные образования, которые широко используются в различных приложениях.

Факториальные степени (символ Похгаммера)**.**

Убывающий факториал определяется как

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1),$$

возрастающий факториал определяется

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1).$$

Значение обоих факториалов принимается равным 1 для $n = 0$.

Необходимо проявлять осторожность при интерпретации символа Похгаммера $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{n}}$. В зависимости от контекста, символ Похгаммера $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{n}}$ может представлять убывающий факториал $x^{\underline{n}}$ или возрастающий факториал $x^{\overline{n}}$, определённые выше.

В комбинаторике символ $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{n}}$ используется для представления убывающего факториала. В теории специальных функций (в частности, гипергеометрической функции) символ Похгаммера $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{n}}$ используется для представления возрастающего факториала.

Факториальные степени можно расширить на вещественные (комплексные) значения n с помощью гамма-функции:

$$x^{\underline{n}} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)} \quad \text{и} \quad x^{\overline{n}} = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}.$$

Эйлер ввел и исследовал и ***бета-функцию*** $B(x,y)$, связанную с гамма-функцией соотношением

$$\boldsymbol{B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}}.$$

При $x > 0,\ y > 0$ для бета-функции справедливо интегральное представление

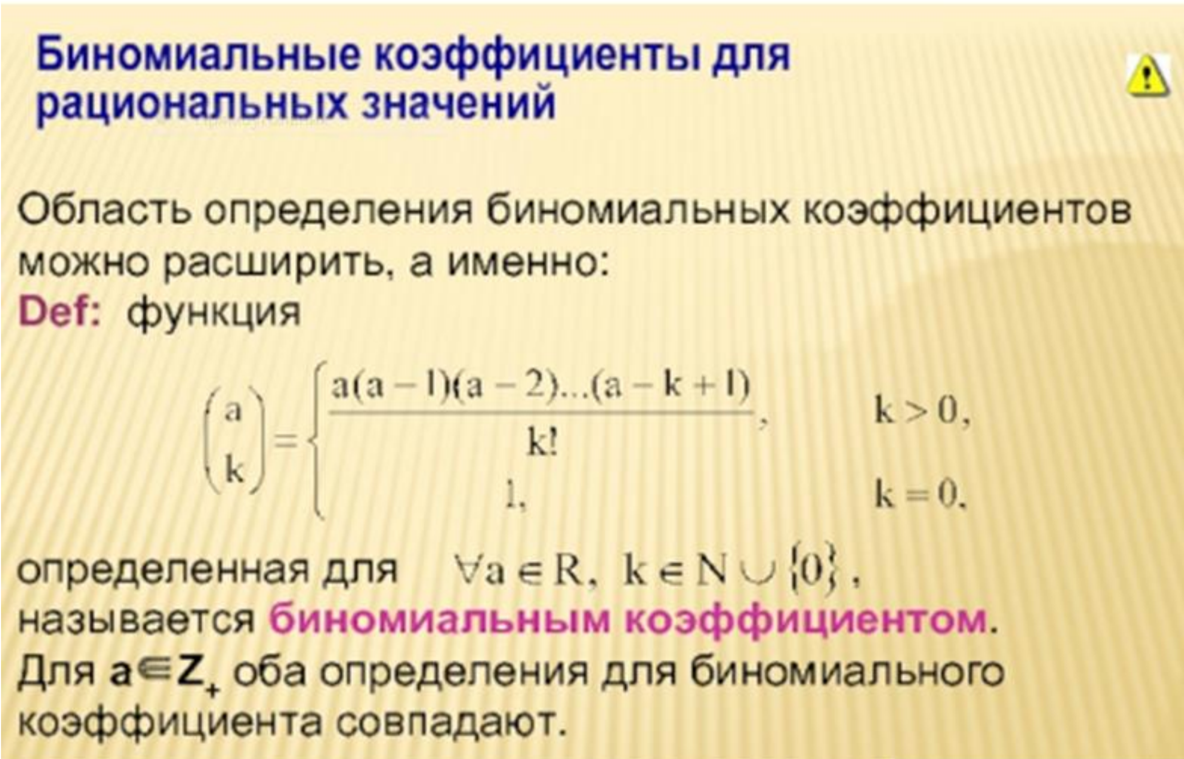
$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

Подобно тому, как гамма-функция является обобщением факториала, бета-функция является обобщением биномиальных коэффициентов

$$\boldsymbol{\binom{n}{k} = \frac{1}{(n+1)B(n-k+1,k+1)}}.$$

Биномиальные коэффициенты

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$



$$C_5^3=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5!}{3!2!}=\frac{3!4\cdot 5}{3!2}=10$$

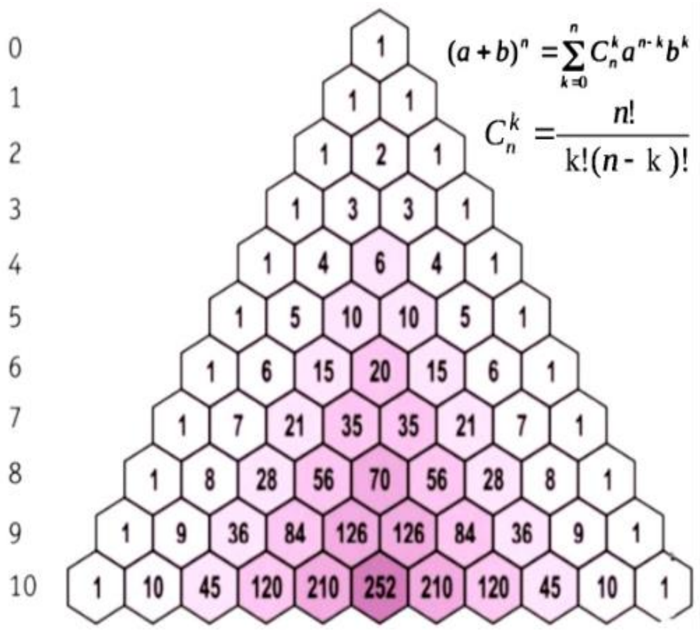
$$C_2^5=0$$

$$\binom{-2}{3}=\frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!}=\frac{-2(-3)(-4)}{3!}=-4$$

$$\binom{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}-3)}{4!}=\frac{13-9\sqrt{2}}{12}$$

Таблица Треугольник Паскаля

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1



Бета-функция удовлетворяет двумерному разностному уравнению

$$B(x,y)-B(x+1,y)-B(x,y+1)=0.$$

Бином Ньютона:

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^mx^m+\ldots+C_n^nx^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^mx^m.$$

Замечание. Функция $(1+x)^n$ является ***производящей функцией*** для биномиальных коэффициентов.

Систематические методы пересчета основаны на понятии производящей функции.

Пусть $x=1$. Получим

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n.$$

Пусть $x=-1$:

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2+\cdots+(-1)^nC_n^n=0.$$

Складывая (вычитая) два последних равенства и деля результат на 2, получим

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n = 2^{n-1}, \quad C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^{n-1} = 2^{n-1}, \text{ если } n \text{ четно,}$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^{n-1} = 2^{n-1}, \quad C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^n = 2^{n-1}, \text{ если } n \text{ нечетно}$$

Свойства чисел C_n^m (биномиальных коэффициентов).

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$. **2.** $C_n^0 = C_n^n = 1$. **3.** $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

Некоторые соотношения, содержащие биномиальные коэффициенты

Определим зависящий от x многочлен $\binom{x}{k}$ (или C_x^k) при помощи равенства

$$\binom{x}{k} = (-1)^k \frac{\Gamma(k-x)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-x)} = \begin{cases} 1, \\ \frac{1}{k!} x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1), \end{cases}$$

k=1,2,3,…

Справедливы соотношения

$$\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!} =$$

$$= (-1)^k \frac{-x(-x+1)(-x+2)\dots(-x+k-1)}{k!} = (-1)^k \frac{(-x)^{\overline{k}}}{k!}$$

Биномиальные коэффициенты $\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \binom{x}{2}, \dots$ являются ***целозначными многочленами*** от x, то есть принимают целые значения при целых x. Более того, они образуют базис целозначных многочленов, в котором все целозначные многочлены степени n выражаются как линейные комбинации $\binom{x}{k}$, k=0,1,…,n, с целыми коэффициентами. Запишите несколько первых элементов этого базиса.

$$\binom{x}{0} = 1, \quad \binom{x}{1} = x, \quad \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2!} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2},$$

$$\binom{x}{3} = \cdots, \binom{x}{4} = \cdots.$$

Например, $3x^3 - 5x^2 + 7x - 1 = -1 \cdot \binom{x}{0} + \mathbf{5} \cdot \binom{x}{1} + \mathbf{8} \cdot \binom{x}{2} + \mathbf{18} \cdot \binom{x}{3}$

Указание. 1) Данный многочлен записали в виде линейной комбинации с неопределенными коэффициентами

$$3x^3 - 5x^2 + 7x - 1 = \alpha_1 \cdot \binom{x}{0} + \alpha_2 \cdot \binom{x}{1} + \alpha_3 \cdot \binom{x}{2} + \alpha_4 \cdot \binom{x}{3}$$

2) Представили биномиальные коэффициенты в виде многочленов.

3) Сравнили коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства. Получили систему линейных алгебраических уравнений.
4) Решили систему линейных алгебраических уравнений.
5) Записали ответ.

Алгоритмы вычисления

Биномиальные коэффициенты можно вычислить с помощью рекуррентной формулы

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

если на каждом шаге n хранить значения $\binom{n}{k}$ при k=0,1,…, n. Этот алгоритм особенно эффективен, если нужно получить все значения $\binom{n}{k}$ при фиксированном n. Алгоритм требует $O(n)$ памяти ($O(n^2)$ при вычислении всей таблицы биномиальных коэффициентов) и $O(n^2)$ времени (в предположении, что каждое число занимает единицу памяти и операции с числами выполняются за единицу времени).

При фиксированном значении k биномиальные коэффициенты могут быть вычислены по рекуррентной формуле

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$$

с начальным значением $\binom{k}{k} = 1$.

Если требуется вычислить коэффициенты $\binom{n}{k}$ при фиксированном значении n, можно воспользоваться формулой

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

при начальном условии $\binom{n}{0} = 1$.