ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ЛОДУ) С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти общее решение ЛОДУ $y''+y'-2y=0$.
Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2+\lambda-2=0$$

и найдем его корни: $\lambda_1=1;\ \lambda_2=-2$ (действительные и различные). Тогда $y_1(x)=e^x$ и $y_2(x)=e^{-2x}$ – фундаментальная система решений и $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ – общее решение рассматриваемого ЛОДУ.

Пример 2. Найти общее решение ЛОДУ $y''+3y'-10y=0$.
Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2+3\lambda-10=0$$

и найдем его корни: $\lambda_1=2;\ \lambda_2=-5$ (действительные и различные). Тогда $y_{oo}=C_1e^{2x}+C_2e^{-5x}$ – общее решение рассматриваемого ЛОДУ.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''-4y'=0$.
Решение. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2-4\lambda=0.$$

Его корни $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 4$ – действительны и различны. Тогда общим решением будет $y=C_1+C_2e^{4x}$.

Пример 4. Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} y''-y'-2y=0, \\ y(0)=1, \\ y'(0)=3. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение будет:

$$\lambda^2-\lambda-2=0.$$

Его корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$. Общее решение имеет вид:

$$y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}.$$

Для определения частного решения найдем $y'(x)$:

$$y'(x) = 2C_1e^{2x} - C_2e^{-x}.$$

Тогда для вычисления постоянных C_1 и C_2 нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y(0) = 1 = C_1 + C_2, \\ y'(0) = 3 = 2C_1 - C_2. \end{cases}$$

Решая систему, получим: $C_1 = 4/3$, $C_2 = -1/3$. Следовательно, частное решение имеет вид: $y(x) = \frac{4}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x}$.

Пример 5. Найти общее решение ЛОДУ $y'' - 2y' + y = 0$.
Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (действительные и совпадают). Тогда $y_1(x) \equiv e^x$, $y_2(x) = xe^x$ – фундаментальная система решений и $y = (C_1 + C_2x)e^x$ – общее решение рассматриваемого ЛОДУ.

Пример 6. Найти общее решение ЛОДУ $y'' - 4y' + 4y = 0$.
Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Найдем его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ (действительные и совпадают). Тогда $y_1 = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$ – фундаментальная система решений и $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$ – общее решение рассматриваемого ЛОДУ.

Пример 7. Найти общее решение ЛОДУ $y'' + 2y' + 5y = 0$.
Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Применяя формулы для корней квадратного уравнения, найдем его корни: $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ (комплексные). Тогда $y_{oo} = e^{-x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right)$ – общее решение данного ЛОДУ.

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$.
Решение. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2-4\lambda+13=0.$$

Его корни $\lambda = 2 \pm 3i$ - комплексные, им соответствуют частные решения $y_1(x)=e^{2x}\cos 3x$ и $y_2(x)=e^{2x}\sin 3x$. Тогда общее решение будет:

$$y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

Пример 9. Найти общее решение ЛОДУ $y''+y'+y=0$.
Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2+\lambda+1=0.$$

Найдем его корни: $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (комплексные). Тогда $y_1(x)=e^{\frac{-1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$ и $y_2(x)=y=e^{\frac{-1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ – фундаментальная система решений и $y=e^{\frac{-1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ – общее решение данного ЛОДУ.

Пример 10. Найти общее решение ЛОДУ $y^{(4)}-5y''+4y=0$.
Решение. Данное ДУ –ЛОДУ с постоянными коэффициентами. Для его решения составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^4-5\lambda+4=0.$$

Это биквадратное уравнение, решаем его:

$$\lambda^4-5\lambda+4=(\lambda^2-1)(\lambda^2-4)=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-2)=0,$$

откуда получаем четыре корня характеристического уравнения:

$$\lambda_1=-1, \lambda_2=1, \lambda_3=-2, \lambda_4=2 .$$

Все корни характеристического уравнения являются действительными и различными. Тогда общее решение этого ЛОДУ имеет вид:

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3e^{-2x}+C_4e^{2x}.$$