ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Определение линейного пространства.
2. Понятия линейной зависимости и линейной независимости элементов линейного пространства.
3. Размерность и базис линейного пространства.
4. Подпространства линейных пространств.
5. Линейные операторы.
6. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
7. Евклидово пространство.
8. Квадратичные формы.

1. Определение линейного пространства

Линейным (или ***векторным***) ***пространством*** называется множество L элементов произвольной природы, если определены операция сложения элементов, ставящая в соответствие каждой паре элементов $\overline{x}, \overline{y} \in L$ единственный элемент $\overline{x} + \overline{y} \in L,$ и операция умножения элементов на действительные числа, ставящая в соответствие каждому элементу $\overline{x} \in L$ и каждому числу $\alpha \in \mathbb{R}$ единственный элемент $\alpha\overline{x} \in L,$ причем заданные операции удовлетворяют следующим 8 аксиомам: для любых $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in L$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$ (коммутативность сложения);

2) $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$ (ассоциативность сложения);

3) существует ***нейтральный (нулевой) элемент*** $\overline{0} \in L$ такой, что $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$ для всех $\overline{x} \in L;$

4) для каждого $\overline{x} \in L$ существует ***противоположный элемент*** $-\overline{x} \in L$ такой, что $\overline{x} + (-\overline{x}) = \overline{0};$

5) $1\overline{x} = \overline{x};$

6) $\alpha(\overline{x} + \overline{y}) = \alpha\overline{x} + \alpha\overline{y}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения элементов);

7) $(\alpha + \beta)\overline{x} = \alpha\overline{x} + \beta\overline{x}$ (дистрибутивность умножения элемента на число относительно сложения чисел);

8) $\alpha(\beta\overline{x}) = (\alpha\beta)\overline{x}$ (ассоциативность умножения на число).

Замечание. Элементы линейного пространства часто называют ***векторами***.

Примеры линейных пространств

1) Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел с обычными операциями сложения элементов и умножения на число.

2) Множество всех векторов на плоскости $\mathcal{V}_2$, либо в пространстве $\mathcal{V}_3$, либо множество $\mathcal{V}_1$ всех векторов, коллинеарных заданной прямой.

3) Множество $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ всех матриц фиксированного размера $m\times n$.

4) Множество $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов с действительными коэффициентами.

5) Множество $\mathbb{R}_n[x]$ всех многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами.

6) Множество всех функций с действительными значениями, определенных на некотором отрезке либо на $\mathbb{R}$.

7) Множество всех непрерывных функций с действительными значениями, определенных на некотором отрезке либо на $\mathbb{R}$.

8) Важнейший пример линейного пространства дает ***пространство*** $\mathbb{R}^n$ – ***пространство*** n***-мерных векторов*** – множество всех упорядоченных комбинаций n действительных чисел:

$$\mathbb{R}^n=\{\overline{x}=(x_1;x_2;...;x_n):x_i\in\mathbb{R},1\le i\le n\},$$

в котором равенство n-мерных векторов, а также сложение и умножение на число понимаются поэлементно: если $\overline{x}=(x_1;x_2;...;x_n)$, $\overline{y}=(y_1;y_2;...;y_n)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, то

$$\overline{x}=\overline{y}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x_1=y_1,\\x_2=y_2,\\...,\\x_n=y_n;\end{cases}$$

$$\overline{x}+\overline{y}=(x_1+y_1;x_2+y_2;...;x_n+y_n);$$

$$\alpha\overline{x}=(\alpha x_1;\alpha x_2;...;\alpha x_n).$$

В частности, множество $\mathcal{V}_2$ всех векторов на плоскости можно трактовать как множество $\mathbb{R}^2$, так как при выбранном базисе на плоскости каждый вектор плоскости может быть задан упорядоченной парой чисел – своими координатами в данном базисе.

Аналогично, множество $\mathcal{V}_3$ векторов в пространстве отождествляют с $\mathbb{R}^3$.

Множество $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ матриц размера $m\times n$ с действительными элементами иногда обозначают $\mathbb{R}^{m\times n}$.

9) Существует линейное пространство, состоящее из одного элемента: $L=\{\overline{0}\}$. Такое линейное пространство называют ***нулевым***.

2. Понятия линейной зависимости и линейной независимости элементов линейного пространства

Линейной комбинацией элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n} \in L$ с числовыми коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ называется элемент

$$\overline{y}=\alpha_1\overline{x_1}+\alpha_2\overline{x_2}+...+\alpha_n\overline{x_n}\in L.$$

Система (множество) элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n} \in L$ называется ***линейно зависимой***, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, из которых хотя бы одно не равно 0, что $\alpha_1\overline{x_1}+\alpha_2\overline{x_2}+...+\alpha_n\overline{x_n}=\overline{0}$.

Система (множество) элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n} \in L$ называется ***линейно независимой***, если равенство $\alpha_1\overline{x_1}+\alpha_2\overline{x_2}+...+\alpha_n\overline{x_n}=\overline{0}$ возможно только в случае, когда все коэффициенты линейной комбинации равны 0, т. е. $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$.

Теорема 1 (критерий линейной зависимости системы элементов). Система элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n} \in L$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных.

Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем элементов

1) Всякая система элементов, содержащая нулевой элемент, линейно зависима.

2) Если некоторые элементы системы образует линейно зависимую систему, то и вся система линейно зависима.

3) Если система элементов линейно независима, то и любая ее подсистема (часть) линейно независима.

4) Если элементы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n} \in L$ линейно независимы и элемент $\overline{y} \in L$ не является их линейной комбинацией, то система элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}, \overline{y} \in L$ линейно независима.

3. Размерность и базис линейного пространства

Размерностью линейного пространства L называется такое число $\dim L = n,$ что:

1) в L существует n линейно независимых элементов;
2) любая система из $n+1$ элемента линейно зависима.

Таким образом, размерность линейного пространства – это максимальное число линейно независимых элементов этого пространства.

Размерность нулевого линейного пространства считается равной 0.

Линейное пространство L называется ***бесконечномерным*** $(\dim L = \infty),$ если при любом натуральном n существует система n линейно независимых элементов этого пространства.

Базисом линейного пространства L называется такая упорядоченная система $\left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\},$ состоящая из n линейно независимых элементов этого пространства, такая, что любой элемент $\overline{x} \in L$ может быть представлен в виде линейной комбинации базисных элементов:

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}. \qquad (1)$$

Представление (1) называется ***разложением элемента*** $\overline{x}$ ***по базису*** $\left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\},$ а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ – ***координатами элемента*** $\overline{x}$ ***в базисе*** $\left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\};$ в этом случае пишут

$$\overline{x} = \{x_1; x_2; ...; x_n\}.$$

Теорема 1. Координаты любого элемента $\overline{x} \in L$ в данном базисе $\left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\}$ определяются однозначно.

Основное значение базиса заключается в том, что операции сложения и умножения элементов линейного пространства на числа при задании базиса сводятся к соответствующим операциям над координатами элементов.

Теорема 2. Пусть в линейном пространстве L задан базис $\left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\}$. Тогда:

1) все координаты нулевого элемента равны 0;

2) два элемента равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты в данном базисе;

3) при сложении двух элементов складываются их соответствующие координаты;

4) при умножении элемента на число все координаты умножаются на это число.

Теорема 3. Базис линейного пространства L состоит из n элементов тогда и только тогда, когда $\dim L = n$.

Замечание. Базис линейного пространства определяется неоднозначно.

Теорема 4. В n-мерном линейном пространстве всякая упорядоченная система, состоящая из n линейно независимых элементов, является базисом.

Преобразование координат вектора при изменении базиса

Пусть $\mathcal{E} = \left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\}$ – базис линейного пространства L; $\mathcal{E}' = \left\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}; ...; \overline{e_n'}\right\}$ – новый базис линейного пространства L, причем (любой вектор пространства L может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса $\mathcal{E}$)

$$\begin{aligned}
&\overline{e_1'} = t_{11}\overline{e_1} + t_{21}\overline{e_2} + ... + t_{n1}\overline{e_n},\\
&\overline{e_2'} = t_{12}\overline{e_1} + t_{22}\overline{e_2} + ... + t_{n2}\overline{e_n},\\
&...,\\
&\overline{e_n'} = t_{1n}\overline{e_1} + t_{2n}\overline{e_2} + ... + t_{nn}\overline{e_n}.
\end{aligned}$$

Матрица

$$T = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей перехода от базиса*** $\mathcal{E}$ ***к базису*** $\mathcal{E}'$.

Согласно данному определению, i-й столбец матрицы перехода есть столбец координат i-го вектора нового базиса в старом. Поэтому говорят, что матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных по столбцам.

Замечание. Поскольку векторы $\overline{e_1}';\overline{e_2}';\dots;\overline{e_n}'$ линейно независимы, то матрица перехода является невырожденной матрицей: $\det T \neq 0$.

Теорема 5. Если $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}$ – столбцы координат элемента $\overline{x} \in L$ в базисе $\mathcal{E}$ и в базисе $\mathcal{E}'$ соответственно, то $X = TX'$.

Следствие 1. $X' = T^{-1}X$, где T – матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$.

Следствие 2. Матрица перехода от базиса $\mathcal{E}'$ к базису $\mathcal{E}$ – это матрица, обратная матрице перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$:

$$T_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}} = T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}.$$

4. Подпространства линейных пространств

Непустое подмножество L' действительного линейного пространства L называется ***линейным подпространством*** пространства L, если для любых $\overline{x}, \overline{y} \in L'$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ элементы $\overline{x} + \overline{y} \in L'$, $\alpha\overline{x} \in L'$. Подпространство само является линейным пространством, причем $\dim L' \leq \dim L$.

Примеры подпространств:

1. Простейшими примерами подпространств для любого линейного пространства L являются нулевое подпространство $\{\overline{0}\}$ и само пространство L. Эти подпространства называются ***тривиальными***.

2. Пусть L – множество всех непрерывных функций, тогда $L' = \mathbb{R}_n[x]$ – множество всех многочленов степени не выше n – является подпространством линейного пространства L.

3. Пусть $L = \mathbb{R}_5[x]$ – множество многочленов степени не выше 5, тогда $L' = \mathbb{R}_4[x]$ – множество многочленов степени не выше 4 – является подпространством линейного пространства L.

4. Если $L = \mathcal{V}_3$ (множество всех векторов в пространстве), то $L' = \mathcal{V}_2$ (множество всех векторов на плоскости) является подпространством линейного пространства L, а $L'' = \mathcal{V}_1$ (множество векторов, коллинеарных заданной прямой) является подпространством L'.

Важный пример линейного подпространства дает следующее понятие.

Пусть $\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}$ – элементы линейного пространства L. ***Линейной оболочкой*** элементов $\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}$ называется множество всех линейных комбинаций этих элементов:

$$L(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}) = \{\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} + ... + \gamma\overline{z} : \alpha, \beta, ..., \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Линейную оболочку элементов $\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}$ обозначают $L(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z})$ либо $<\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}>$. Иногда также говорят, что линейная оболочка ***натянута на векторы*** $\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}$.

Свойства линейных оболочек

1) Линейная оболочка заданных элементов линейного пространства L является подпространством линейного пространства L.

2) Линейная оболочка $L(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z})$ является наименьшим подпространством, содержащим элементы $\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}$.

3) Размерность линейной оболочки $L(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z})$ равна максимальному числу линейно независимых элементов в системе элементов $\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}$.

5. Линейные операторы

Пусть L_1 и L_2 – два линейных пространства. Если задано правило f, по которому каждому элементу $\overline{x} \in L_1$ ставится в соответствие некоторый элемент $\overline{y} \in L_2$, то говорят, что задан ***оператор*** (***отображение***, ***преобразование***), действующий из L_1 в L_2: $f : L_1 \to L_2$; при этом элемент $\overline{y} = f(\overline{x})$ называется ***образом*** элемента $\overline{x}$, а элемент $\overline{x}$ – ***прообразом*** элемента $\overline{y}$ (при данном отображении f).

Замечание. Термин «преобразование» используется в случае, когда пространства L_1 и L_2 совпадают.

Отображение, при котором каждый элемент $\overline{y} \in L_2$ имеет единственный прообраз (иными словами, разным элементам $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in L_1, \overline{x_1} \neq \overline{x_2}$, соответствуют разные образы $\overline{y_1}, \overline{y_2} \in L_2, \overline{y_1} \neq \overline{y_2}$) называется ***взаимно однозначным***, или ***биективным***.

Оператор $f : L_1 \to L_2$ называется ***линейным***, если для любых элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x} \in L_1$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются условия:

1) $f(\overline{x_1} + \overline{x_2}) = f(\overline{x_1}) + f(\overline{x_2})$;

2) $f(\alpha\overline{x}) = \alpha f(\overline{x})$.

Оператор $f : L_1 \to L_2$ является линейным тогда и только тогда, когда для любых элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in L_1$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполняется условие $f(\alpha\overline{x_1} + \beta\overline{x_2}) = \alpha f(\overline{x_1}) + \beta f(\overline{x_2})$.

Оператор $I : L \to L$, действующий по правилу $I(\overline{x}) = \overline{x}$, называется ***тождественным оператором***.

Примеры линейных операторов:

1) Пусть $L_1 = \mathcal{V}_2$ – множество всех свободных векторов на плоскости. Будем рассматривать элементы этого линейного пространства как векторы, исходящие из начала координат – точки O.

Тогда примерами линейных операторов являются: поворот вектора на данный угол φ; умножение вектора на данное число λ; симметрия относительно прямой, проходящей через точку O; симметрия относительно точки O; проекция на одну из осей.

2) Пусть $L_1 = \mathbb{R}^{n\times 1}$ – множество матриц-столбцов (множество столбцов высоты n), а $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – фиксированная матрица размера $m \times n$. Тогда $f(X) = AX$ – линейное отображение, $f : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1}$.

3) Пусть $L_1 = \mathbb{R}[x]$ – пространство многочленов с действительными коэффициентами. Рассмотрим отображение D – оператор дифференцирования, который ставит в соответствие каждому многочлену

$$a(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbb{R}[x]$$

его производную

$$a'(x) = a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \in \mathbb{R}[x].$$

Оператор дифференцирования является линейным оператором $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$.

Заметим, что $D : \mathbb{R}^n[x] \to \mathbb{R}^{n-1}[x]$.

4) В любом линейном пространстве L можно определить отображения $I(\overline{x}) = \overline{x}$ и $O(\overline{x}) = \overline{0}$, которые также являются линейными операторами.

Действия с линейными операторами

Суммой двух линейных операторов $f : L_1 \to L_2$ и $g : L_1 \to L_2$ называется оператор $h = f + g : L_1 \to L_2$, действующий так, что для любого $\overline{x} \in L_1$ справедливо $h(\overline{x}) = f(\overline{x}) + g(\overline{x})$.

Очевидно, что сумма линейных операторов $f + g$ является линейным оператором и $f + g = g + f$ (сложение операторов коммутативно).

Произведением линейного оператора $f : L_1 \to L_2$ на число λ называется оператор $h = \lambda f : L_1 \to L_2$, действующий по правилу $h(\overline{x}) = \lambda f(\overline{x})$ для любого $\overline{x} \in L_1$.

Легко проверить, что при умножении линейного оператора на число получается линейный оператор.

Произведением (***композицией***) линейного оператора $f : L_1 \to L_2$ на линейный оператор $g : L_2 \to L_3$ называется оператор $h = g \circ f : L_1 \to L_3$, действие которого заключается в последовательном применении операторов f и g, т. е. $h(\overline{x}) = g(f(\overline{x}))$ для любого $\overline{x} \in L_1$.

Произведение оператора f на оператор g обозначают $h = g \circ f$ или $h = gf$. Произведение линейных операторов также является линейным оператором.

Замечание 1. Оператор, действующий первым, записывается справа.

Замечание 2. Как правило, $gf \neq fg$, т. е. операция умножения операторов не коммутативна.

Оператор $\varphi: L \to L$ называется ***обратным*** к данному оператору $f: L \to L$, если $\varphi \circ f = I$ и $f \circ \varphi = I$. Оператор, обратный к оператору f, обозначается f^{-1}.

Если $f: L \to L$ – линейный оператор и оператор f^{-1} существует, то f^{-1} – тоже линейный оператор.

Если $f: L \to L$ – линейный оператор, то обратный оператор f^{-1} существует тогда и только тогда, когда f – взаимно однозначный оператор.

Матрицы линейных операторов

Пусть $f: L_1 \to L_2$ – линейный оператор и линейные пространства L_1 и L_2 конечномерны.

Выберем базисы: $\mathcal{E} = \left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\}$ – базис линейного пространства L_1; $\mathcal{F} = \left\{\overline{f_1}; \overline{f_2}; ...; \overline{f_m}\right\}$ – базис линейного пространства L_2.

Элементы $f(\overline{e_1}), f(\overline{e_2}), ..., f(\overline{e_n})$ (образы базисных векторов линейного пространства L_1 при отображении f) являются элементами линейного пространства L_2, а значит, их можно разложить по базису $\mathcal{F}$:

$$f(\overline{e_1}) = a_{11}\overline{f_1} + a_{21}\overline{f_2} + ... + a_{m1}\overline{f_m},$$
$$f(\overline{e_2}) = a_{12}\overline{f_1} + a_{22}\overline{f_2} + ... + a_{m2}\overline{f_m},$$
$$\ldots,$$
$$f(\overline{e_n}) = a_{1n}\overline{f_1} + a_{2n}\overline{f_2} + ... + a_{mn}\overline{f_m}.$$

Матрица

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

столбцы которой состоят из координат векторов $f(\overline{e_1}), f(\overline{e_2}), ..., f(\overline{e_n})$, называется ***матрицей линейного оператора*** f.

Если $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix}$ – столбцы координат элемента $\overline{x} \in L_1$ в базисе $\mathcal{E}$ и его образа $\overline{y} = f(\overline{x}) \in L_2$ в базисе $\mathcal{F}$ соответственно, то $Y = A_f X$.

Действиям над линейными операторами соответствуют такие же действия над их матрицами (в соответствующих базисах):

1) $A_{f+g} = A_f + A_g$;

2) $A_{\lambda f} = \lambda A_f$ (λ – число);

3) $A_{g \circ f} = A_g A_f$;

4) $A_{f^{-1}} = (A_f)^{-1}$;

5) матрица тождественного оператора является единичной: $A_I = E$.

Таким образом, линейные преобразования описываются с помощью матриц и действия над линейными преобразованиями сводятся к действиям над их матрицами.

Линейный оператор $f : L \to L$ называется ***невырожденным***, если его матрица невырожденная, т. е. $\det A_f \neq 0$.

Линейный оператор $f : L \to L$ является невырожденным тогда и только тогда, когда f – взаимно однозначный оператор.

Преобразование матрицы линейного оператора при изменении базиса

Пусть $\mathcal{E} = \left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \ldots; \overline{e_n}\right\}$ – базис линейного пространства L; $\mathcal{E}' = \left\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}; \ldots; \overline{e_n'}\right\}$ – новый базис линейного пространства L, $T = T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$ – матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$.

Если $f : L \to L$ – линейный оператор и A_f – матрица линейного оператора f в базисе $\mathcal{E}$, а A'_f – матрица линейного оператора f в базисе $\mathcal{E}'$, то

$$A'_f = T^{-1} A_f T.$$

6. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Пусть $f: L \to L$ – линейный оператор, действующий в линейном пространстве L.

Ненулевой элемент $\overline{x} \in L$ $(\overline{x} \neq \overline{0})$ называется ***собственным вектором*** линейного оператора $f: L \to L,$ если существует такое число $\lambda,$ что $f(\overline{x}) = \lambda\overline{x}.$ Число λ называется ***собственным значением*** (***собственным числом***) линейного оператора f, соответствующим собственному вектору $\overline{x}.$

Свойства собственных векторов

1) Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное значение.

2) Если $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ – два собственных вектора линейного оператора f с одним и тем же собственным значением $\lambda,$ то $\overline{x_1} + \overline{x_2}$ также является собственным вектором линейного оператора f с тем же собственным значением $\lambda,$ т. е.

$$\begin{matrix} f(\overline{x_1}) = \lambda\overline{x_1} \\ f(\overline{x_2}) = \lambda\overline{x_2} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad f(\overline{x_1} + \overline{x_2}) = \lambda(\overline{x_1} + \overline{x_2}).$$

3) Если $\overline{x}$ – собственный вектор линейного оператора f с собственным числом $\lambda,$ то любой вектор $\alpha\overline{x}$ (α – число) является собственным вектором линейного оператора f с тем же собственным значением $\lambda,$ т. е.

$$f(\overline{x}) = \lambda\overline{x} \quad \Rightarrow \quad f(\alpha\overline{x}) = \lambda(\alpha\overline{x}).$$

Замечание. Из свойств 2, 3 следует, что множество собственных векторов данного линейного оператора f, соответствующих одному и тому же собственному числу $\lambda,$ вместе с нулевым элементом образуют линейное подпространство линейного пространства $L.$

4) Собственные векторы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_k}$ линейного оператора f, соответствующие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k,$ линейно независимы.

Характеристический многочлен матрицы линейного оператора

Пусть $f: L \to L$ – линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве L. Зафиксируем некоторый базис $\mathcal{E}$ в пространстве L. Поскольку линейный оператор действует из L в L, будем рассматривать векторы и их образы в одном и том же базисе. Тогда матрица $A = A_f$ линейного преобразования состоит из столбцов координат образов базисных векторов в этом базисе.

Если $\overline{x}$ – собственный вектор линейного оператора f с собственным числом λ, матрица A – матрица линейного оператора f в базисе $\mathcal{E}$, то $AX = \lambda X$, где X – столбец координат вектора $\overline{x}$ в базисе $\mathcal{E}$.

Ненулевой столбец $X \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий $AX = \lambda X$ при некотором λ, называется ***собственным вектором*** матрицы A, соответствующим ***собственному значению*** λ.

Для нахождения собственных чисел матрицы A (а, следовательно, и оператора f) нужно решить уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) называется ***характеристическим уравнением*** матрицы A, а его корни называются ***характеристическими числами***, или ***собственными значениями*** матрицы A.

Многочлен n-й степени, стоящий в левой части характеристического уравнения (1), называется ***характеристическим многочленом*** матрицы A.

Характеристический многочлен имеет n корней, вообще говоря, комплексных, с учетом их кратности.

Замечание. Собственными значениями линейного оператора в *действительном* линейном пространстве являются только *действительные* корни характеристического уравнения.

Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду

Матрица A_f линейного оператора называется ***приводимой к диагональному виду***, если существует такая невырожденная матрица T (такое преобразование базиса), что матрица $B = T^{-1}A_f T$ является диагональной.

Теорема 2. Матрица A_f линейного оператора f приводима к диагональному виду тогда и только тогда, когда существует базис, состоящий из собственных векторов оператора f. На главной диагонали матрицы, записанной в этом базисе, стоят собственные числа:

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Замечание. Не каждый линейный оператор n-мерного линейного пространства имеет n линейно независимых собственных векторов, а следовательно, не всегда матрицу линейного оператора можно привести к диагональному виду.

Если линейный оператор f, действующий в действительном линейном пространстве L, $\dim L = n$, имеет n различных действительных собственных значений, то существует базис пространства L из собственных векторов этого оператора, а следовательно, матрица A_f приводима к диагональному виду.

Замечание. Это условие является достаточным, но не является необходимым условием диагонализируемости матрицы линейного оператора. Матрица линейного оператора может быть приводима к диагональному виду и в том случае, когда среди собственных значений оператора есть совпадающие либо когда имеются комплексные корни характеристического уравнения матрицы линейного оператора, действующего в вещественном линейном пространстве.

7. Евклидово пространство

Евклидовым пространством называется линейное пространство L, в котором определена операция скалярного умножения элементов:

каждой паре элементов $\overline{x}, \overline{y} \in L$ ставится в соответствие *действительное* число $(\overline{x}, \overline{y})$, которое называется ***скалярным произведением*** элементов $\overline{x}$ и $\overline{y}$, причем эта операция удовлетворяет следующим 4 аксиомам: для любых $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in L$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x})$;
2) $(\overline{x} + \overline{y}, \overline{z}) = (\overline{x}, \overline{z}) + (\overline{y}, \overline{z})$;
3) $(\alpha\overline{x}, \overline{z}) = \alpha(\overline{x}, \overline{z})$;
4) $(\overline{x}, \overline{x}) \geq 0$, причем $(\overline{x}, \overline{x}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$.

Замечание. В матричной форме записи скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^n$ находится по формуле $(\overline{x}, \overline{y}) = X^T Y$, где X, Y – столбцы координат элементов $\overline{x}, \overline{y}$ соответственно.

Примеры Евклидовых пространств:

1) Евклидовым пространством является множество $\mathcal{V}_3$ свободных векторов в пространстве (или множество $\mathcal{V}_2$ свободных векторов на плоскости) с обычным определением скалярного произведения. Для обычных векторов в трехмерном пространстве норма совпадает с длиной вектора

2) Евклидовым пространством является пространство $\mathbb{R}^n$, в котором скалярное произведение элементов задается формулой

$$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n,$$

где $\overline{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, $\overline{y} = (y_1; y_2; ...; y_n)$.

Можно показать, что в этом случае все 4 аксиомы скалярного произведения, указанные в определении 1, выполняются.

Векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ евклидова пространства называются ***ортогональными***, если $(\overline{x}, \overline{y}) = 0$.

Замечание. Считается, что нулевой вектор ортогонален любому вектору.

Теорема 1. Если ненулевые векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_k}$ попарно ортогональны, то они линейно независимы.

Нормой вектора $\overline{x}$ евклидова пространства называется *положительное* число $\|\overline{x}\| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})}$.

Свойства нормы вектора.

1) $\|\overline{x}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x} = \overline{0}$.

2) $\|\alpha\overline{x}\| = |\alpha| \, \|\overline{x}\|$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) $(\overline{x}, \overline{y}) \le \|\overline{x}\| \|\overline{y}\|$ (***неравенство Коши – Буняковского***).

4) $\|\overline{x} + \overline{y}\| \le \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$ (***неравенство треугольника***).

Если $\|\overline{x}\| = 1$, то вектор $\overline{x}$ называется ***нормированным***.

Система векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$ называется ***ортонормированной***, если все ее векторы нормированы и попарно ортогональны.

Теорема 2. Во всяком конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Процесс ортогонализации Грама – Шмидта

Процесс ортогонализации Грама – Шмидта используется для построения в евклидовом пространстве ортонормированного базиса на основании произвольного базиса этого пространства.

Пусть $\mathcal{F} = \left\{\overline{f_1}; \overline{f_2}; ...; \overline{f_n}\right\}$ – исходный базис n-мерного евклидова пространства. Ортонормированный базис $\mathcal{E} = \left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\}$ получается с помощью следующей процедуры:

1) $\overline{e_1} = \dfrac{\overline{f_1}}{\|\overline{f_1}\|}$;

2) $\overline{g_2} = \overline{f_2} - (\overline{f_2}, \overline{e_1})\overline{e_1}$; $\overline{e_2} = \dfrac{\overline{g_2}}{\|\overline{g_2}\|}$;

3) $\overline{g_3} = \overline{f_3} - (\overline{f_3}, \overline{e_1})\overline{e_1} - (\overline{f_3}, \overline{e_2})\overline{e_2}$; $\overline{e_3} = \dfrac{\overline{g_3}}{\|\overline{g_3}\|}$;

…;

$n)\ \overline{g_n} = \overline{f_n} - (\overline{f_n}, \overline{e_1})\overline{e_1} - (\overline{f_n}, \overline{e_2})\overline{e_2} - \ldots - (\overline{f_n}, \overline{e_{n-1}})\overline{e_{n-1}};\ \overline{e_n} = \dfrac{\overline{g_n}}{\left\|\overline{g_n}\right\|}.$

Координаты вектора евклидова пространства в ортонормированном базисе

Пусть $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}\}$ – ортонормированный базис в n-мерном евклидовом пространстве, $\overline{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – координаты вектора $\overline{x}$ в этом базисе, т. е.

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + \ldots + x_n\overline{e_n}.$$

Умножая обе части равенства скалярно на $\overline{e_1}$, получим

$$(\overline{x}, \overline{e_1}) = x_1(\overline{e_1}, \overline{e_1}) + x_2(\overline{e_2}, \overline{e_1}) + \ldots + x_n(\overline{e_n}, \overline{e_1}) =$$
$$= x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + \ldots + x_n \cdot 0 = x_1.$$

Аналогично, $(\overline{x}, \overline{e_2}) = x_2; \ldots; (\overline{x}, \overline{e_n}) = x_n.$

Таким образом, координаты вектора в ортонормированном базисе равны скалярным произведениям вектора на базисные векторы.

Выражение скалярного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе

Пусть даны $\overline{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\overline{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ – координаты векторов $\overline{x}, \overline{y}$ в *ортонормированном* базисе $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}\}$. Тогда

$$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Замечание 1. В матричном виде $(\overline{x}, \overline{y}) = X^TY$, где X, Y – столбцы координат элементов $\overline{x}, \overline{y}$ соответственно.

Замечание 2. В произвольном базисе $\{\overline{f_1}, \overline{f_2}, \ldots, \overline{f_n}\}$ эти формулы имеют более сложный вид. Если $\overline{x} = x_1\overline{f_1} + x_2\overline{f_2} + \ldots + x_n\overline{f_n}$, $\overline{y} = y_1\overline{f_1} + y_2\overline{f_2} + \ldots + y_n\overline{f_n}$, то

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j(\overline{f_i}, \overline{f_j}).$$

8. Квадратичные формы

Квадратичной формой от n ***действительных переменных*** $x_1, x_2, ..., x_n$ называется сумма вида

$$q(x_1; x_2; ...; x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \qquad (1)$$

где коэффициенты a_{ij} квадратичной формы – некоторые действительные числа, причем $a_{ij} = a_{ji}$.

Таким образом, квадратичная форма может быть также записана в виде

$$q(x_1; x_2; ...; x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 +$$
$$+2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + ... + 2a_{n-1;\,n}x_{n-1}x_n.$$

Заметим, что к изучению квадратичных форм от двух и трех переменных приводит задача об определении формы кривых и поверхностей 2-го порядка. Первоначально теория квадратичных форм возникла именно из этих задач, но впоследствии нашла многочисленные применения в математике и ее приложениях.

Матрицей квадратичной формы называется матрица, составленная из ее коэффициентов, а именно, квадратичной форме (1) соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В матричном виде квадратичная форма (1) может быть записана как

$$q(X) = X^T AX, \text{ где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матрицу A квадратичной формы всегда можно привести к диагональному виду

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – собственные значения матрицы A. Следовательно, любую квадратичную форму можно привести к виду

$$q_1(x_1'; x_2'; ...; x_n') = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 + ... + \lambda_n(x_n')^2. \qquad (2)$$

Если квадратичная форма записана в виде (2), то говорят, что она приведена к ***каноническому виду***.

Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду

Чтобы определить преобразование переменных, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, нужно выполнить следующие действия.

1) Записать матрицу квадратичной формы и найти собственные значения этой матрицы.

2) Найти собственные векторы матрицы квадратичной формы и нормировать их. Направления собственных векторов называются ***главными направлениями*** квадратичной формы.

Замечание. Если среди собственных значений матрицы есть совпадающие, необходимо выбирать соответствующие собственные векторы так, чтобы они были ортонормированы.

3) Записать матрицу T, составив ее из полученных нормированных векторов-столбцов.

4) Записать искомое преобразование переменных по формуле $X = TX'$.

Знакоопределенные квадратичные формы

Пусть $\overline{x} = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$. Квадратичная форма $q(\overline{x})$ называется:

1) ***положительно определенной***, если $q(\overline{x}) > 0$ для всех $\overline{x} \neq \overline{0}$;

2) ***отрицательно определенной***, если $q(\overline{x}) < 0$ для всех $\overline{x} \neq \overline{0}$;

3) ***положительно полуопределенной***, если $q(\overline{x}) \geq 0$ для всех $\overline{x} \neq \overline{0}$;

4) ***отрицательно полуопределенной***, если $q(\overline{x}) \leq 0$ для всех $\overline{x} \neq \overline{0}$;

5) ***знаконеопределенной***, если существуют такие $\overline{x}$ и $\overline{y}$ что $q(\overline{x}) > 0$ и $q(\overline{y}) < 0$.

Замечание. Несложно видеть, что знакоопределенность квадратичной формы фактически означает постоянство знаков собственных значений ее матрицы.

Если квадратичная форма	то собственные значения ее матрицы
положительно определена,	все положительны;
отрицательно определена,	все отрицательны;
положительно полуопределена,	все неотрицательны;
отрицательно полуопределена,	все неположительны.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы $q(\overline{x})$.

Главными минорами квадратичной формы $q(\overline{x})$ называются миноры матрицы A, стоящие в левом верхнем углу:

$$\Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \dots; \quad \Delta_n = \det A.$$

Теорема 1 [критерий Сильвестра]. 1) Квадратичная форма $q(\overline{x})$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны;

2) квадратичная форма $q(\overline{x})$ является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда ее главные миноры нечетного порядка отрицательны, а четного – положительны.