ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИЯХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. **Понятие функции нескольких переменных. Линии уровня, поверхности уровня**
2. **Предел и непрерывность функции двух переменных**
3. **Частные производные первого порядка. Дифференцируемость функции двух переменных. Полный дифференциал. Производные высших порядков**
4. **Дифференцирование неявной функции одной и нескольких переменных**
5. **Производная по направлению. Градиент**
6. **Экстремумы функций нескольких переменных**

1. Понятие функции нескольких переменных. Линии уровня, поверхности уровня

Переменная z (с областью изменения Z) называется ***функцией независимых переменных*** x ***и*** y в области D, если каждой паре $(x; y)$ их значений из D по некоторому закону (правилу f) соответствует одно определённое значение z (из Z), что обозначается следующим образом: $z = f(x; y)$ или $z = z(x; y)$, $(x; y) \in D$, и т. п.

Переменные x и y называются аргументами функции z, область D – областью определения функции. Если функция $z = z(x; y)$ задана только формулой, то в качестве её области определения рассматривается естественная ***область определения*** функции – множество точек $(x; y)$ плоскости Oxy, при которых выражение $z(x; y)$ имеет смысл.

Переменная u называется функцией переменных $x_1,..., x_n$, если каждому набору этих переменных по некоторому правилу соответствует единственное значение переменной u: $u = u(x_1;...; x_n)$.

Множество точек пространства $\mathbf{R}^3$ с координатами $(x; y; z(x;y))$ при всех $(x; y) \in D$, называется ***графиком функции*** $z = z(x; y)$. График функции $z= z(x;y)$, как правило, является ***поверхностью*** в пространстве R^3.

Функцию трёх и более переменных изобразить с помощью графика в пространстве $Oxyz$ представляется весьма затруднительным. Некоторое представление о поведении функции нескольких переменных можно получить с помощью поверхностей уровня этой функции.

Поверхностью уровня функции $u = u(x_1;...; x_n)$ называется множество точек пространства, в которых функция $u = u(x_1;...;x_n) \equiv const$ $= c$, т.е. принимает одно и то же значение

Для функции двух переменных множество точек области D, в которых функция $z(x; y)$ принимает заданное значение c, называется ***линией уровня*** функции и задаётся уравнением $z = z(x;y) \equiv const = c$.

Пример. Найти область определения и линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Выражение справа имеет смысл при всех x и y, значит, областью определения функции будет вся плоскость Oxy.

На линии уровня $z = x^2 + y^2 = c$ и $c \geq 0$, значит, линии уровня – концентрические окружности радиуса $\sqrt{c}$ с центром в начале координат. Графиком функции является параболоид вращения.

2. Предел и непрерывность функции двух переменных

Если a – конечная точка, $a \in \mathbf{R}$, то для любого $\varepsilon > 0$ ε-***окрестностью*** $O_\varepsilon(a)$ точки a называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$: $O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. В случае $a = +\infty$ $O_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon, +\infty)$, а в случае $a = -\infty$ имеем: $O_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\varepsilon)$. Понятие окрестности для бесконечности без знака (∞) определяется равенством $O_\varepsilon(\infty) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)$.

Окрестностью **O_r радиуса *r*** (r-окрестностью) точки $M_0(x_0; y_0) \in \mathbf{R}^2$ называется совокупность всех точек $M(x; y) \in \mathbf{R}^2$, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$, т.е. совокупность всех точек $M(x; y)$ на плоскости Oxy, лежащих внутри круга радиуса $r > 0$ с центром в точке $M_0(x_0;y_0)$:

$$O_r(M_0) = \{M \in \mathbf{R}^2 : \ d(MM_0) < r\} = \{(x;y) \in \mathbf{R}^2 : \ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}.$$

Если из круга удалить точку M_0, то окрестность называется проколотой и обозначается $\hat{O}_r(M_0)$.

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки M_0. Тогда число A (конечное или бесконечное) называется ***пределом функции*** $z = f(x; y)$ при стремлении точки $M(x; y)$ к точке $M_0(x_0; y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $r = r(\varepsilon) > 0$, что $f(x; y) \in O_\varepsilon(A)$ для всех $M \in \hat{O}_r(M_0)$.

В частности, число $A \in \mathbf{R}$ называется ***конечным пределом*** функции $z = f(x; y)$ при стремлении точки $M(x; y)$ к точке $M_0(x_0; y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малого положительного ε) найдётся такое число $r = r(\varepsilon)>0$, что для всех точек $M(x;\ y)$, отличных от $M_0(x_0;\ y_0)$ и отстоящих от $M_0(x_0;\ y_0)$ меньше, чем на r, имеет место неравенство $|f(x;\ y) - A|<\varepsilon$. Обозначения: $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A$ или $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;\ y) = A$.

Нетрудно видеть, что если предел существует, то он единственный.

При вычислении пределов используются известные теоремы о пределах. Если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A$, $\lim\limits_{M\to M_0} g(M) = B$, то

1) $\lim\limits_{M\to M_0} (f(M) \pm g(M))= A \pm B$; 2) $\lim\limits_{M\to M_0} (f(M)\cdot g(M)) = A\cdot B$;

3) $\lim\limits_{M\to M_0} (f(M)\ /\ g(M)) = A/B\ (B \neq 0)$; 4) $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)^{g(M)} = A^B,\ (A>0)$.

Определенный выше предел называется **двойным** пределом в отличие от так называемых **повторных** пределов:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y),\ \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

Функция $z = f(x;y)$ называется ***непрерывной*** (по совокупности переменных x и y) в точке $M_0(x_0;\ y_0)$, если она определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;\ y) = f(x_0;\ y_0)$ ($M\to M_0$ произвольным образом, оставаясь в окрестности точки M_0).

Другими словами, функция $z = f(x;y)$ называется ***непрерывной*** в точке $M_0(x_0;\ y_0)$, если бесконечно малым приращениям аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется ***непрерывной в этой области*** (в случае граничных точек имеет место соответствующая односторонняя непрерывность (изнутри)).

Если функция определена в некоторой проколотой окрестности точки M_0, но не определена в самой точке M_0 или $\lim\limits_{M\to M_0} f(x;\ y) \neq f(x_0;\ y_0)$, то точка M_0 называется ***точкой разрыва***.

Точки разрыва функции $z = f(x;\ y)$ могут образовывать целые линии разрыва.

Свойства непрерывных функций двух переменных аналогичны свойствам непрерывных функций одной переменной.

Отметим также, что непрерывность функции по одной переменной при фиксированном значении другой (других) переменной называется непрерывностью функции **по этой переменной**.

Если функция $z = f(x;\ y)$ непрерывна в точке M_0 по совокупности переменных, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x;\, y_0) = f(x_0;\, y_0)$ и $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0;\, y) = f(x_0;\, y_0)$, и, таким образом, функция в этой точке непрерывна по каждой переменной (в отдельности).

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример. Исследовать точки разрыва функции $f(x;\, y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

Решение. Данная функция имеет единственную точку разрыва $O(0;0)$. В этой точке функция не определена и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y) = +\infty$. По аналогии с функцией одной переменной имеем дело с точкой бесконечного разрыва. В остальных точках функция непрерывна.

3. Частные производные первого порядка. Дифференцируемость функции двух переменных. Полный дифференциал. Производные высших порядков

Пусть функция $z = f(x;\, y)$ *определена* и непрерывна в некоторой окрестности $O_\varepsilon(M_0)$ точки $M_0(x_0;y_0)$. Будем изменять x, считая $y = y_0$. Тогда

$$f(x_0 + \Delta x;\, y_0) - f(x_0;\, y_0) = \Delta_x z$$

называется ***частным приращением*** z ***по*** x. Аналогично при $x = x_0$ имеем ***частное приращением*** z ***по*** y:

$$\Delta_y z = f(x_0;y_0 + \Delta y) - f(x_0;y_0).$$

Полным приращением функции $z = f(x;y)$, соответствующим приращениям Δx и Δy аргументов x и y, называется разность

$$\boxed{\Delta z = f(x_0 + \Delta x;y_0 + \Delta y) - f(x_0;y_0).}$$

Частной производной функции $z = f(x;y)$ по переменной x или по y называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению переменной, при условии, что приращение переменной стремится к нулю:

$$\boxed{z'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad z'_y = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}}$$

Используются обозначения: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, f'_x, z'_x и аналогичные обозначения для переменной y.

При дифференцировании по x переменная y зафиксирована

(считается постоянной); при дифференцировании по у переменная х считается постоянной.

Если находится частная производная функции $u = u(x_1,...,x_n)$, по некоторой переменной, то все остальные переменные рассматриваются как постоянные.

Дифференцируемость функции двух переменных

Функция $z = f(x;y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M_0(x_0;y_0)$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и её полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + +\gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta y,$$

где величины A и B не зависят от Δx и Δy, и γ_1,γ_2 стремятся к нулю при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$.

***Необходимые условия дифференцируемости*:**

1) если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке по совокупности переменных;

2) если функция дифференцируема в точке, то в этой точке существуют частные производные z'_x и z'_y.

Достаточное условие дифференцируемости:

если в точке $M_0(x_0;y_0)$ существуют непрерывные частные производные по x и по y, то функция дифференцируема в этой точке.

Полный дифференциал

Главная часть $A\Delta x + B\Delta y$ приращения Δz, линейная относительно Δx и Δy, называется ***полным дифференциалом*** dz функции $z = f(x; y)$ в точке M_0:

$$\boxed{dz = z'_x\, dx + z'_y\, dy}$$

причём $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ для независимых переменных x и y.

Обозначения: $z'_x\, dx = d_x z,\ z'_y\, dy = d_y z$ – частные дифференциалы функции. Тогда $dz = d_x z + d_y z$. При этом полное приращение функции не обязательно равно сумме частных приращений.

Пример. Найти частные приращения и полное приращение функции $z = xy$.

Решение. Используя формулы

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y) \text{ и } \Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y),$$

получаем

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)\, y - xy = y\Delta x,\ \Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y.$$

Полное приращение

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\cdot\Delta y.$$

При $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}3$, имеем $\Delta_x z = 0{,}4$, $\Delta_y z = 0{,}3$, $\Delta z = 0{,}76$. В данном случае полное приращение не равно сумме частных приращений.

Производные высших порядков

Если частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x;y)$ являются дифференцируемыми функциями, то их производные по x или y будут частными производными второго порядка. Приняты следующие обозначения: $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – вторая производная по x, $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, или $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – смешанные производные второго порядка, $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – вторая производная по y. Используются также обозначения z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy}.

Аналогично определяются производные третьего, четвёртого и других порядков. Частные производные высшего порядка, взятые по различным переменным, называются смешанными. Например,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\frac{\partial u}{\partial x})$: сначала функцию дифференцируем по x, а результат дифференцируем два раза по y.

Если смешанные частные производные второго порядка функции $z = f(x;y)$ непрерывны, то они равны, т.е. не зависят от порядка дифференцирования: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ или $z''_{xy} = z''_{yx}$.

4. Дифференцирование неявной функции одной и нескольких переменных

Дифференцирование неявной функции одной переменной. Пусть функция $y = y(x)$ определяется уравнением $F(x;y) = 0$, неразрешённым относительно y и $F(x;y)$ непрерывна вместе со своими частными производными в области, содержащей точку $(x;y)$, которая удовлетворяет уравнению $F(x;y) = 0$, причём $F'_y(x;y) \neq 0$. Тогда

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}.}$$

Дифференцирование неявной функции двух переменных. Пусть функция $z = z(x;y)$ определяется уравнением $F(x;y;z) = 0$, неразрешённым относительно z и $F(x;y;z)$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам, причём $F'_z(x;y;z) \neq 0$. Тогда

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}} \quad \text{и} \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}.}$$

5. Производная по направлению. Градиент

Пусть функция $u = u(x;y;z)$ определена и дифференцируема в окрестности точки $M_0\,(x_0;y_0;z_0)$ и задан вектор $\vec{a}$. Проведём через точку M_0 луч в направлении вектора $\vec{a}$. Параметрические уравнения луча запишем в виде $x = x_0 + t\cos\alpha$, $y = y_0 + t\cos\beta$, $z = z_0 + t\cos\gamma$, $t \geq 0$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{a}$. Если $M(x;y;z)$ – точка луча, то значение параметра t, соответствующее точке M, равно расстоянию от точки M_0 до точки M. Точке M_0 соответствует $t = 0$. На луче функция $u = u(x;y;z) = u(x_0 + t\cos\alpha;\, y_0 + t\cos\beta;\, z_0 + t\cos\gamma)$ является функцией одной переменной t.

Правосторонняя производная этой функции в точке $t = 0$ называется ***производной*** функции $u = u(x;y;z)$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***по направлению*** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\frac{\partial u}{\partial a}$:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial t}u(x_0 + t\cos\alpha;\, y_0 + t\cos\beta;\, z_0 + t\cos\gamma)\Big|_{t=0}.$$

Кроме того, $\frac{\partial u}{\partial a} = \lim\limits_{M\to M_0}\frac{u(M) - u(M_0)}{|MM_0|}$, $M \to M_0$ по лучу. Дифференцируя функцию $u = u(x;y;z)$ как сложную по переменной t и полагая $t=0$, получим

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.}$$

Если $z = z(x; y)$, то $\boxed{\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.}$

Скорость наибольшего роста функции в данной точке по величине и направлению определяется вектором ***градиента***:

$$\boxed{\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right),}$$

величина которого равна $|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$.

Если $z = z(x; y)$, то $\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right)$, $|\operatorname{grad} z| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$.

Градиент в каждой точке направлен по нормали к линии (поверхности) уровня, проходящей через эту точку, в сторону возрастания функции. Производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial a} = (\operatorname{grad} u, \vec{a}^0) = \text{пр}_{\vec{a}} \operatorname{grad} u$, где $\vec{a}^0$ – единичный вектор, сонаправленный с вектором $\vec{a}$.

6. Экстремумы функций нескольких переменных

Пусть функция $z = z(x; y)$ определена в области D и точка $M_0(x_0;y_0)$ – внутренняя точка области. Если существует такая окрестность точки $M_0(x_0;y_0)$, что для всех точек M из этой окрестности $z(M_0) \geq z(M)$ ($z(M_0) \leq z(M)$), то точка M_0 называется точкой ***локального максимума*** **(*минимума*)** функции $z = z(x;y)$. Если эти неравенства строгие для $M \neq M_0$, то и соответствующий локальный максимум (минимум) называется строгим. Точки максимума и минимума называются точками ***экстремума***.

Характерное свойство точек экстремума: в некоторых окрестностях таких точек приращение функции не меняет знак.

Необходимые условия экстремума. Если функция $z = z(x; y)$ имеет в точке M_0 экстремум, то в этой точке $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (или не существует) и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (или не существует). Такие точки называются ***критическими***.

Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, называются ***стационарными.***

Достаточные условия экстремума. Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ – стационарная точка функции $z = z(x;\ y)$ и в окрестности этой точки функция имеет непрерывные производные второго порядка. Тогда если в точке M_0

1) $\Delta=\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix}>0$ и $z''_{xx}<0$ или $z''_{yy}<0$ (что равносильно), то точка M_0 – точка строгого локального максимума;

2) $\Delta>0$, $z''_{xx}>0$ ($z''_{yy}>0$), то точка M_0 – точка строгого локального минимума;

3) в случае $\Delta<0$ локального экстремума нет;

4) случай $\Delta=0$ требует дополнительного исследования.