ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

1. **Определение определенного интеграла, его геометрический и механический смысл, основные свойства**
2. **Методы вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница**
3. **Геометрические и физические приложения определенного интеграла**
4. **Несобственные интегралы**
5. **Двойной интеграл**
6. **Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги)**

1. Определение определенного интеграла, его геометрический и механический смысл, основные свойства

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена некоторая функция $f(x)$, $x\in[a,b]$. Осуществим ***n*-разбиение** промежутка $[a;b]$ на n частей точками $x_0, x_1, ..., x_n$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длину i-го промежутка, наибольшую из этих длин d_n назовем ***диаметром разбиения***: $d_n = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$. На каждом из частичных промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольно точку ξ_i: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, и составим ***интегральную сумму***:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{d_n\to+0}\sigma_n$ интегральных сумм σ_n, когда диаметр разбиения d_n стремится к нулю, и этот предел *не зависит* ни от *выбора разбиения*, ни от *выбора точек* ξ_i на частичных промежутках, то этот предел называется ***определенным интегралом*** (ОИ) от функции $f(x)$ по промежутку $[a,b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, при этом функция $f(x)$ называется ***интегрируемой*** на отрезке $[a,b]$.

Таким образом, $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{d_n\to+0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$;

здесь $f(x)$ – ***подынтегральная функция***, $f(x)dx$ – ***подынтегральное выражение***, x – ***переменная интегрирования***, a – ***нижний***, b – ***верхний пределы интегрирования***.

Рассмотрим на плоскости Oxy фигуру – ***криволинейную трапецию*** T_f, ограниченную снизу осью Ox, сверху – графиком неотрицательной функции $y = f(x), x \in [a,b], a < b,$ и с боков – прямыми $x = a$ и $x = b$. (см. рис. 1).

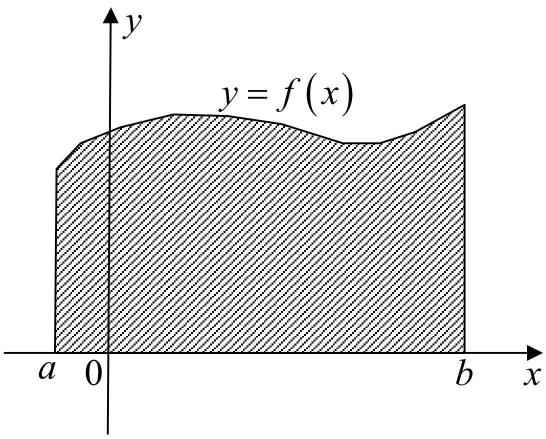

Рис. 1. Геометрический смысл определенного интеграла.

Геометрический смысл ОИ: *интеграл по промежутку от неотрицательной на этом промежутке функции равен* ***площади*** *соответствующей криволинейной трапеции*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = S_{кр.тр.T_f}}.$$

Механический смысл ОИ: если $f(x) = \rho(x)$ – *плотность* (линейная) в точке x неоднородного стержня $[a,b]$, то *интеграл от плотности по промежутку* $[a,b]$ *выражает* ***массу*** $m_{[a,b]}$ *стержня* $[a,b]$:

$$\boxed{\int_a^b \rho(x)dx = m_{[a,b]}.}$$

Свойства определенного интеграла

Из определения ОИ вытекает ***необходимое условие интегрируемости***: если функция интегрируема по промежутку, то она ограничена на этом промежутке.

Достаточное условие интегрируемости: если функция непрерывна на промежутке (отрезке), то она интегрируема по этому промежутку.

В дальнейшем будем считать рассматриваемые функции интегрируемыми на соответствующих промежутках. Тогда имеют места следующие ***свойства*** ОИ:

1.Интеграл от единичной функции выражает *длину* отрезка $[a,b]$:

$$\boxed{\int_a^b dx = b-a.}$$

2. По определению полагают

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0,}$$

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.}$$

3. ***Линейность*:**

$$\boxed{\int_a^b C\cdot f(x)dx = C\cdot\int_a^b f(x)dx,\ C-\text{const}}$$

(постоянную можно выносить за знак интеграла);

$$\boxed{\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx}$$

(интеграл от суммы (разности) интегрируемых функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций).

4. ***Аддитивность***: интеграл по промежутку $[a,b]=[a,c]\cup[c,b]$ равен сумме интегралов по составляющим промежуткам:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.}$$

5. ***Монотонность***: если $f(x)\geq g(x)$ для всех $x\in[a,b]$ и $a<b$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$, в частности, для непрерывной на $[a,b]$ функции f имеет место ***теорема об оценках***:

$$\boxed{m_*(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq m^*(b-a),}$$

где $m_* = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m^* = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

5. ***Теорема о среднем***. Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то найдется точка $c\in(a,b)$ такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ и

$f(c)=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ – ***среднее значение*** функции f на промежутке $[a,b]$.

Геометрический смысл теоремы о среднем: в случае неотрицательной на $[a,b]$ функции f найдется точка $c\in(a,b)$ такая, что площадь соответствующей криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f(c)$ (см. рис. 2).

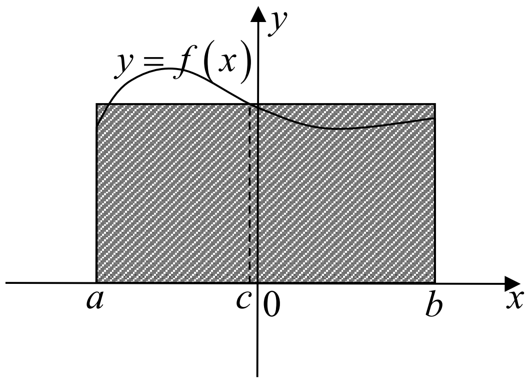

Рис. 2. Геометрический смысл теоремы о среднем.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и для каждого $x\in[a;b]$ рассмотрим интеграл $\int\limits_a^x f(t)dt=\Phi(x)$ – ***функцию переменного верхнего предела***. Если $f(x)$ интегрируема, то $\Phi(x)$ непрерывна.

Теорема о дифференцировании определенного интеграла по переменному верхнему пределу: в каждой точке $x\in(a,b)$, где $f(x)$ непрерывна, функция $\Phi(x)$ является дифференцируемой, причем производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, вычисленной на этом переменном верхнем пределе:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt=\Phi'(x)=f(x),\ x\in(a,b).$$

2. Методы вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то справедлива ***формула Ньютона-Лейбница***:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),}$$

где $F(x)$ – произвольная первообразная для $f(x)$. Выражение $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ называется ***двойной подстановкой***.

Формула Ньютона-Лейбница позволяет свести вычисление определенного интеграла к нахождению соответствующего неопределенного интеграла и является основной формулой интегрального исчисления.

Формула интегрирования по частям в ОИ: если $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывные на промежутке $[a,b]$ функции, то

$$\boxed{\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu}.$$

Формула замены переменной в ОИ (*интегрирование подстановкой*): если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[t_0;t_1]$, причем $a = \varphi(t_0)$; $b = \varphi(t_1)$ и множество значений функции φ не выходит за пределы промежутка $[a, b]$. то

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.}$$

Замечание. Замена переменной в ОИ обладает тем преимуществом по сравнению с НИ, что не требуется возвращаться к исходной переменной, однако при этом приходится пересчитывать пределы интегрирования.

В случае, когда промежуток интегрирования $[-a, a]$ симметричен относительно начала координат и интегрируемая на нем функция f является либо четной, либо нечетной, имеют место равенства:

1) $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ для *нечетной* функции и

2) $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$ для *четной* функции.

3. Геометрические и физические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур. Пусть D – криволинейная трапеция, ограниченная снизу графиком функции $y = f_1(x)$, сверxy – графиком функции $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \ge f_1(x), x \in [a;b]$, с боков – прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$ (см. рис. 3). Тогда ее площадь S_D вычисляется по формуле

$$\boxed{S_D = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx}.$$

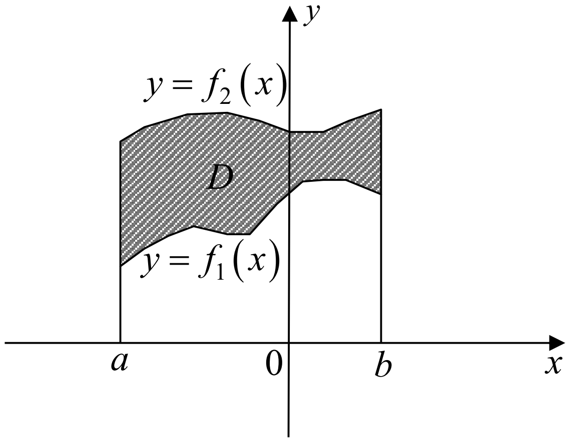

Рис. 3. Вычисление площади криволинейной трапеции.

Вычисление длин дуг плоских кривых. Если кривая L задана *явно* как график функции $y = y(x)$, $x \in [a;b]$, то длина дуги этой кривой вычисляется по формуле

$$\boxed{|L| = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'_x\right)^2}\, dx.}$$

Вычисление объемов тел по площадям поперечных сечений. Пусть тело G расположено между плоскостями $x = a$ и $x = b$, и $S(C)$ - площадь поперечного сечения тела плоскостью $x = C$, причем $S(C)$ является непрерывной функцией при $C \in [a;b]$. Тогда объем тела G вычисляется по формуле:

$$\boxed{V_G = \int_a^b S(x) dx.}$$

Вычисление объемов тел вращения. Пусть тело G получено вращением фигуры, ограниченной линиями $y = f(x) \ge 0$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вокруг оси Ox. Тогда площадь поперечного сечения – площадь круга: $S(x)=\pi y^2(x)$, поэтому объем $V_G=V_x$ тела G выражается формулой

$$\boxed{V_x=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.}$$

Аналогично объем тела вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $x=x(y)\ge 0,\ x=0,\ y=c,\ y=d.$, равен

$$\boxed{V_y=\pi\int_c^d x^2(y)\,dy}.$$

Вычисление площадей поверхностей вращения. Площадь $S_{\Pi}=S_x$ поверхности Π, образованную вращением кривой $y=f(x)\ge 0, x\in[a;b]$, вокруг оси $Ox.$, равна

$$\boxed{S_x=2\pi\int_a^b y(x)\,ds(x)=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}\,dx=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.}$$

Аналогично площадь поверхности вращения кривой $x=x(y)\ge 0,\ y\in[c;d]$, вокруг оси $Oy.$ вычисляется по формуле

$$\boxed{S_y=2\pi\int_c^d x(y)\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\,dy}.$$

Вычисление работы. Пусть материальная точка передвигается по прямолинейному пути $[a;b]$ под воздействием постоянной по направлению силы переменной величины $F(x),\ x\in[a;b].$ Тогда работа A силы $F(x)$ на промежутке $[a;\ b]$ равна

$$\boxed{A=\int_a^b F(x)\,dx.}$$

4. Несобственные интегралы

Как вытекает из определения ОИ, интегрируемая функция должна: 1) быть ограниченной, 2) рассматриваться на конечном интервале $[a;b]$. В приложениях часто возникает необходимость интегрировать как функции, определенные на бесконечном промежутке, так и функции, являющиеся неограниченными.

В этих двух случаях непосредственно применить ОИ нельзя и, таким образом, возникает потребность в обобщении понятия ОИ, что приводит к понятию несобственных интегралов. Существует два основных типа несобственных интегралов: 1) интегралы по бесконечному промежутку и 2) интегралы от неограниченных функций.

Несобственные интегралы по бесконечному промежутку

Пусть I – *один из промежутков вида*: $(-\infty;a]$, $[b;+\infty)$ или $(-\infty;+\infty)$. Пусть на промежутке I определена функция $f(x)$, которая является интегрируемой на любом конечном промежутке, содержащемся в I. Тогда ***несобственный интеграл по промежутку*** I (***несобственный интеграл 1-го рода***) определяется следующим образом:

1) $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{a} f(x)dx$, если $I=(-\infty;a]$;

2) $\int\limits_{b}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{b}^{B} f(x)dx$, если $I=[b;+\infty)$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}}\int\limits_{A}^{B} f(x)dx$, если $I=(-\infty;+\infty)$,

если предел существует и конечен (в этом случае соответствующий интеграл называется ***сходящимся***); если предел не существует или не является конечным, интеграл считается ***расходящимся***.

Если наряду со сходимостью интеграла от функции $f(x)$ по промежутку I имеет место и сходимость интеграла от модуля этой функции, то такая сходимость называется ***абсолютной***.

Непредельный признак сравнения несобственных интегралов. Пусть $0\le f(x)\le g(x)$, $x\in I$; тогда:

если сходится интеграл от функции $g(x)$ по промежутку I, то и сходится и интеграл от функции $f(x)$ по этому промежутку;

если же расходится интеграл от функции $f(x)$ по промежутку I, то и расходится и интеграл от функции $g(x)$ по этому промежутку;

Предельный признак сравнения несобственных интегралов. Если существует конечный отличный от нуля предел $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}\ne 0$, где $c=-\infty$ в случае $I=(-\infty;a]$, $c=+\infty$ для $I=[b;+\infty)$ и $c=\infty$ для $I=(-\infty;+\infty)$, то несобственные интегралы от функций $f(x)$ и $g(x)$ по промежутку I сходятся (или расходятся) одновременно.

Интегралы вида $\int\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^n}$, $\int\limits_{-\infty}^{-1}\dfrac{dx}{x^n}$ часто используются при применении признаков сравнения для несобственных интегралов по бесконечному промежутку.

Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть на промежутке $I=(a;b]$ (или $I=[a;b)$, или $I=[a;b]$) задана функция f, которая имеет на этих промежутках единственную «особенность» – точку c, в окрестности которой функция не является ограниченной. Точка $c=a$ для первого случая, $c=b$ для второго и $c\in(a;b)$ для третьего промежутков. Предположим далее, что функция f интегрируема на любом замкнутом промежутке, целиком лежащем в I. Тогда можно определить ***несобственный интеграл от неограниченной функции*** I (***несобственный интеграл 2-го рода***) формулами:

1) $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, если $I=(a;b]$;

2) $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$, если $I=[a;b)$;

3) $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\left(\int\limits_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx\right)$, если $I=[a;b]$,

если предел существует и конечен (в этом случае соответствующий интеграл называется ***сходящимся***); если предел не существует или не является конечным, интеграл считается ***расходящимся***.

Если наряду со сходимостью интеграла от функции $f(x)$ по промежутку I имеет место и сходимость интеграла от модуля этой функции, то такая сходимость называется ***абсолютной***.

Непредельный признак сравнения несобственных интегралов.

Пусть $0\le f(x)\le g(x)$, $x\in I$; тогда:

если сходится интеграл от функции $g(x)$ по промежутку I, то сходится и интеграл от функции $f(x)$ по этому промежутку;

если же расходится интеграл от функции $f(x)$ по промежутку I, то и расходится и интеграл от функции $g(x)$ по этому промежутку;

Предельный признак сравнения несобственных интегралов. Если существует конечный отличный от нуля предел $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}\ne 0,$ где $c=a$ в случае $I=(a;b]$, $c=b$ для $I=[a;b)$ и $c\in(a;b)$ для $I=[a;b]$, то несобственные интегралы от функций $f(x)$ и $g(x)$ по промежутку

I сходятся (или расходятся) одновременно.

Интеграл вида $\int_0^b \frac{dx}{x^n}$ часто используется при применении признаков сравнения для несобственных интегралов от неограниченных функций.

Несобственные интегралы обладают всеми основными свойствами определенных интегралов, в частности свойствами линейности и аддитивности. В общем случае, когда на промежутке I имеется несколько (конечное число) особенностей, этот промежуток разбивается на конечное число промежутков, где особенности только на концах, затем по свойству аддитивности интеграл по всему промежутку сводится к сумме интегралов по частичным промежуткам, интегрирование по каждому из которых проводится с отступлением от особенностей и последующим предельным переходом.

5. Двойной интеграл

Рассмотрим в плоскости *Oxy* квадрируемую – *измеримую*, т. е. имеющую *площадь*, фигуру (область) D, на которой определена некоторая функция $f(M), M \in D$. Осуществим далее ***n-разбиение*** области D на n пересекающихся, разве лишь, по линиям квадрируемых частичных областей $D_1, ..., D_n$ так, чтобы:

1) $D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n$,

2) площадь $D_i \cap D_j$ равна нулю ($i \neq j$)

и составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i, \qquad (1)$$

где ΔS_i – площадь D_i, M_i – произвольная точка, принадлежащая D_i.

Сумму вида (1) будем называть ***интегральной суммой*** для функции f по области D. Символом d_i обозначим диаметр – наибольшее расстояние между точками области D_i, наибольший из частичных диаметров – ***диаметр разбиения*** – символом λ_n: $\lambda_n = \max_i d_i$.

Если теперь существует *конечный* предел интегральных сумм (1) при *диаметре разбиения, стремящемся к нулю*, независимо как от *способа разбиения* области D на части, так и от *выбора точек* M_i в частичных областях, то этот предел называется ***двойным интегралом*** от функции f по области D и обозначается $\iint_D f(x;y)dxdy$.

Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i. \qquad (2)$$

Функция $f(M) = f(x;y)$ в этом случае называется интегрируемой в области D.

Как и в случае определенного интеграла, имеют место следующие условия интегрируемости:

необходимое: если функция интегрируема, то она ограничена и

достаточное: если функция непрерывна, то она интегрируема.

Свойства двойного интеграла

Основные свойства двойного интеграла аналогичны свойствам определенного интеграла.

1. Интеграл от единичной функции выражает *площадь* области интегрирования: $\iint\limits_D dxdy = S_D -$ площадь фигуры D.

2. *Линейность*: $\iint\limits_D C \cdot f(x,y)dxdy = C \cdot \iint\limits_D f(x,y)dxdy, \quad C - const$ (постоянную можно выносить за знак интеграла);

$$\iint\limits_D (f(x,y) \pm g(x,y))dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

(интеграл от суммы (разности) интегрируемых функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций).

3. *Аддитивность*: интеграл по области, состоящей из областей, пересекающихся только по границе, равен сумме интегралов по составляющим областям

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

4. *Монотонность*: если в области D имеет место неравенство $f(x,y) \geq 0$, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0$; если $f(x,y) \geq g(x,y)$ для любых $(x,y) \in D$, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D g(x,y)dxdy$, в частности, для непрерывной на D функции f имеет место *оценка* $m_* S_D \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq m^* S_D$, где $m_* = \min\limits_{M \in D} f(M)$, $m^* = \max\limits_{M \in D} f(M)$.

5. *Теорема о среднем*. Если функция f непрерывна в области D, то в области D найдется точка (ξ, η) такая, что

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta) \cdot S_D;$$

величина $f(\xi,\eta)=\dfrac{1}{S_D}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ называется *средним значением* функции f в области D.

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Двойные интегралы вычисляются ***сведением к повторным***.

Пусть область D ограничена снизу и сверху двумя непрерывными кривыми $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$, с боков – вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 4)

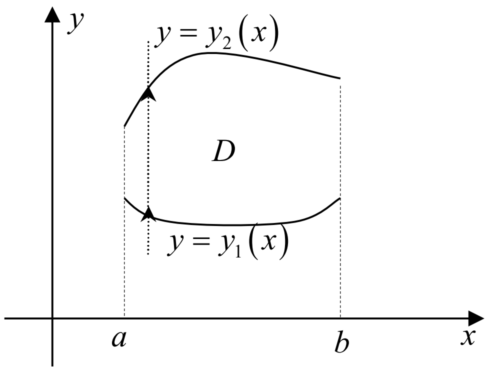

Рис. 4. Область интегрирования

Предположим, что каждая прямая $x=const$, $x\neq a$, $x\neq b$, пересекает границу области D не более чем в двух точках с ординатами $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$. Тогда

$$\iint\limits_D f(M)ds=\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy\ . \qquad (3)$$

Правую часть (3) называют ***повторным интегралом*** с внешним интегрированием по x и внутренним по y.

Пусть теперь область D имеет вид (рис. 5):

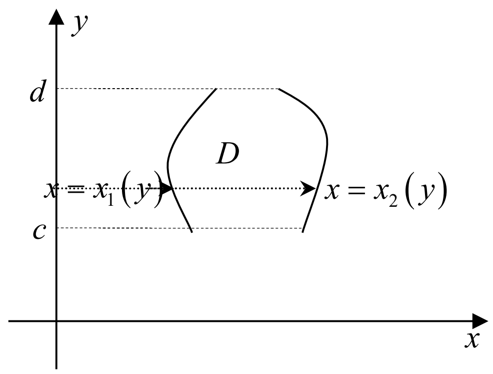

Рис. 5. Криволинейная трапеция

Предположим, что каждая прямая $y = const$ пересекает границу области D не более чем в двух точках с абсциссами $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$. Тогда

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx. \qquad (4)$$

Правая часть формулы (4) — ***повторный интеграл*** с внешним интегрированием по y и внутренним по x.

В формулах (3) и (4) сначала вычисляются внутренние интегралы как обычные определенные интегралы, при этом переменная внешнего интеграла считается постоянной, а затем вычисляются внешние интегралы.

Пределы у внешних интегралов всегда постоянны. Если внешний интеграл вычисляется по x, то пределы внутреннего интеграла могут зависеть от x или быть постоянными; если же внешний интеграл вычисляется по y, то пределы внутреннего интеграла могут зависеть от y или быть постоянными.

Внутренние и внешние *пределы* в повторных интегралах (в декартовых координатах) *постоянны* тогда и только тогда, когда область D является *прямоугольником*.

Геометрические приложения двойного интеграла

1. *Площадь* S_D плоской фигуры D равна $S_D = \iint_D dxdy.$

2. *Объем* V цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x;y) \geq 0$, снизу – замкнутой областью D в плоскости Oxy и с боков цилиндрической поверхностью с направ-

ляющей – границей области D и образующей, параллельной оси Oz, выражается интегралом $V = \iint\limits_D f(x;y)dxdy$.

Физические приложения двойного интеграла

1. *Масса* m_D материальной пластины D с поверхностной плотностью $\gamma = \gamma(x;y)$ в точке $M(x;y)$ вычисляется по формуле

$$m_D = \iint\limits_D \gamma(x;y)dxdy.$$

2. *Координаты* x_c, y_c *центра тяжести* (масс) фигуры могут быть вычислены по формулам

$$x_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\gamma(x;y)dxdy, \quad y_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\gamma(x;y)dxdy.$$

6. Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги)

Пусть на плоскости *Oxy* задана непрерывная кривая *L(AB)*, в каждой точке которой задана некоторая непрерывная функция $f(x;y), (x;y) \in L$. Произвольным образом разобьем кривую L на n частей (дуг) точками $A = M_1, M_2, ..., M_n = B$, длину частичной дуги обозначим $\Delta\ell_i$, назовем ***диаметром разбиения*** $d_n = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta\ell_i$, наибольшую из длин частичных дуг. На каждой из полученных дуг L_i выберем произвольную точку $M_i(\xi_i;\eta_i)$ и составим ***интегральную сумму***:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta\ell_i.$$

Если существует конечный предел интегральных сумм σ_n при $d_n \to 0$ и этот предел не зависит от способа разбиения кривой L на части и от выбора точек M_i, то такой предел называется ***криволинейным интегралом первого рода*** (КРИ-1) – *интегралом по длине дуги от функции f(x;y) по кривой* L и обозначается

$$\int\limits_L f(x;y)d\ell.$$

Таким образом $\int\limits_L f(x;y)d\ell = \lim\limits_{d_n\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta\ell_i$

Теорема. Если функция $f(x;y)$ непрерывна в каждой точке кривой L, и кривая L гладкая (в каждой точке существует касательная к кривой и положение ее непрерывно меняется при перемещении точки по кривой), то КРИ-1 существует.

Аналогично определяются КРИ-1 в пространстве:

$$\int_L f(x;y;z)d\ell$$

Свойства КРИ-1

1. КРИ-1 не зависит от направления пути интегрирования: $\int_{AB} f(x;y)d\ell = \int_{BA} f(x;y)d\ell$.

2.Линейность:

$\int_L (\alpha f(x,y) + \ldots + \beta g(x,y))d\ell = \alpha\int_L f(x;y)d\ell + \ldots + \beta\int_L \mathrm{g}(x;y)d\ell,$

3.Аддитивность: если разбить кривую L, на две части L_1 и L_2, то $\int_L f(x,y)d\ell = \int_{L_1} f(x;y)d\ell + \int_{L_2} \mathrm{f}(x;y)d\ell,$

4.Монотонность: если $f(x;y) \geq g(x;y)$ для любых $(x;y) \in L$, то $\int_L f(x;y)d\ell \geq \int_L \mathrm{g}(x;y)d\ell$.

5.Теорема о среднем: на кривой L найдется такая точка $C(x_c;y_c) \in L$, что $\int_L f(x;y)d\ell = f(x_c;y_c)\ell$, где ℓ – длина дуги L.

Вычисление КРИ-1

КРИ-1 сводится к определенному интегралу, для чего достаточно вспомнить формулы вычисления длины дуги с помощью определенного интеграла, в зависимости от способа задания дуги.

1. Дуга L задана явно $y = y(x),\ x \in [a;b]$,

$$\boxed{\int_L f(x;y)d\ell = \int_a^b f(x;y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx,\ a<b}$$

2. Дуга L задана параметрически $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in T = [t_1;t_2]$,

$$\boxed{\int_L f(x;y)d\ell = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t);y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.}$$

Геометрический смысл КРИ-1 - длина дуги L: $\int_L d\ell = \ell$.

Физический смысл КРИ-1: масса m_L материальной дуги L с линейной плотностью $\rho\left(x;y;z\right)$ в точке $M(x;y;z)\in L$ равна $\int\limits_L \rho\left(x;y;z\right)d\ell = m_\ell$.

Кроме того, аналогично формулам для вычисления координат центра тяжести плоской фигуры с помощью двойного интеграла, с помощью КРИ-1 вычисляются координаты центра тяжести кривой.