ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти общее решение ДУ $x\,y'' + y' = 1$.

Решение. Это ДУ 2-го порядка, допускающее его понижение, поскольку отсутствует неизвестная функция. Выполняем замену неизвестной функции: $y' = z = z(x)$. Тогда $y'' = z'_x = z'$ и исходное ДУ 2-го порядка сводится к ДУ 1-го порядка:

$$x\,z' + z = 1,$$

интегрируя которое, получаем его общее решение:

$$(x\,z)' = 1 \Rightarrow x\,z = x + C_1 \Rightarrow z = \frac{C_1}{x} + 1.$$

Возвращаемся к исходным обозначениям:

$$z = y' = \frac{C_1}{x} + 1.$$

Интегрируя полученное ДУ 1-го порядка, получаем: $y = C_1 \ln|x| + x + C_2$ – общее решение исходного ДУ 2-го порядка.

Пример 2. Найти общее решение ДУ $y''' - y'' = 0$.

Решение. ДУ 3-го порядка, допускающее его понижение, поскольку отсутствует неизвестная функция и ее производная. Выполняем замену неизвестной функции: $y'' = z$. Тогда $y'''_{xxx} = \left(y''\right)'_x = z'_x = z'$ и исходное ДУ 3-го порядка сводится к ДУ 1-го порядка

$$z' - z = 0,$$

интегрируя которое получаем его общее решение:

$$\frac{dz}{z} = dx \;\Rightarrow\; \ln|z| = x + \ln|C_1| \;\Rightarrow z = e^x \cdot C_1 .$$

Возвращаемся к исходным обозначениям:

$$z = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = C_1 \cdot e^x .$$

Дважды интегрируя полученное ДУ 2-го порядка, получаем: $y' = C_1 e^x + C_2 \;\Rightarrow\; y = C_1 e^x + C_2 x + C_3$ – общее решение исходного ДУ 3-го порядка.

Пример 3. Найти общее решение ДУ $y \cdot y'' - \left(y'\right)^2 = 0$.

Решение. ДУ 2-го порядка, допускающее его понижение, поскольку отсутствует независимая переменная. Выполняем замену неизвестной функции: $y' = z = z(y)$. Тогда $y'' = z'_y \cdot z = z' \cdot z$ и исходное ДУ сводится к ДУ 1-го порядка

$$y \cdot z \cdot z' - z^2 = z(y \cdot z' - z) = 0,$$

что в свою очередь приводит к совокупности ДУ:

$$\text{либо } z = \frac{dy}{dx} = 0, \text{ либо } y \cdot z' - z = 0 .$$

Интегрируем эту совокупность:

либо $y = C = const$,

либо $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{z}{y} \Rightarrow \dfrac{dz}{z} = \dfrac{dy}{y} \Rightarrow \ln|z| = \ln|y| + \ln|C_1| \Rightarrow z = C_1 y$.

Возвращаемся в последнем уравнении к исходным обозначениям:

$$z = y' = \frac{dy}{dx} = C_1 y$$

и интегрируем:

$$\frac{dy}{y} = C_1 dx \Rightarrow \ln|y| = C_1 x + \ln|C_2| \Rightarrow |y| = e^{\ln|C_2|} \cdot e^{C_1 x} \Rightarrow |y| = |C_2| \cdot e^{C_1 x},$$

откуда с учетом произвольности (знака) C_2 получаем $y = C_2 \cdot e^{C_1 x}$. Учитывая, что из этого решения при $C_2 = C$, $C_1 = 0$ получается в качестве частного случая ранее найденное решение $y = C = const$, то, объединяя эти решения, запишем общее решение исходного ДУ 2-го порядка в виде $y = C_2 \cdot e^{C_1 x}$.