Раздел 8. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Линейные пространства: определение и примеры

Пример 1. Рассмотрим несколько множеств различных математических объектов:

1) множество $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ матриц фиксированного размера $m\times n$, элементы которых – действительные числа;

2) множество $\mathcal{V}_3$ векторов в пространстве (либо множество $\mathcal{V}_2$ векторов на плоскости, либо множество $\mathcal{V}_1$ векторов на прямой);

3) множество $\mathbb{R}$ действительных чисел;

4) множество $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов с действительными коэффициентами.

Во всех этих множествах определены операции сложения элементов и умножения на число, обладающие одинаковыми свойствами.•

Существует много других примеров множеств элементов различной природы, для которых определены операции сложения и умножения на число, обладающие теми же свойствами. Для изучения общих свойств таких множеств вводится понятие линейного пространства.

Опр. 1. ***Линейным*** (или ***векторным***) ***пространством*** называется множество L элементов произвольной природы, если определены операция *сложения элементов*, ставящая в соответствие каждой паре элементов $\overline{x}, \overline{y}\in L$ единственный элемент $\overline{x}+\overline{y}\in L$, и операция *умножения элементов на действительные числа*, ставящая в соответствие каждому элементу $\overline{x}\in L$ и каждому числу $\alpha\in\mathbb{R}$ единственный элемент $\alpha\overline{x}\in L$, причем заданные операции удовлетворяют следующим 8 аксиомам: для любых $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\in L$ и любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

1) $\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}$ (*коммутативность* сложения);

2) $(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}=\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})$ (*ассоциативность* сложения);

3) существует ***нейтральный (нулевой) элемент*** $\overline{0} \in L$ такой, что $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$ для всех $\overline{x} \in L$;

4) для каждого $\overline{x} \in L$ существует ***противоположный элемент*** $-\overline{x} \in L$ такой, что $\overline{x} + (-\overline{x}) = \overline{0}$;

5) $1\overline{x} = \overline{x}$;

6) $\alpha(\overline{x} + \overline{y}) = \alpha\overline{x} + \alpha\overline{y}$ (*дистрибутивность* умножения на число относительно сложения элементов);

7) $(\alpha + \beta)\overline{x} = \alpha\overline{x} + \beta\overline{x}$ (*дистрибутивность* умножения элемента на число относительно сложения чисел);

8) $\alpha(\beta\overline{x}) = (\alpha\beta)\overline{x}$ (*ассоциативность* умножения на число).

Замечание. Элементы линейного пространства часто называют ***векторами***.

Пример 1 (продолжение). Укажем некоторые примеры линейных пространств.

1. Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел с обычными операциями сложения элементов и умножения на число.

2. Множество всех векторов на плоскости $\mathcal{V}_2$, либо в пространстве $\mathcal{V}_3$, либо множество $\mathcal{V}_1$ всех векторов, коллинеарных заданной прямой.

3. Множество $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ всех матриц фиксированного размера $m \times n$.

Упражнение 1. Почему не является линейным пространством множество *всех* матриц?

4. Множество $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов с действительными коэффициентами.

5. Множество $\mathbb{R}_n[x]$ всех многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами.

Упражнение 2. Почему не является линейным пространством множество всех многочленов фиксированной степени n с действительными коэффициентами?

6. Множество всех функций с действительными значениями, определенных на некотором отрезке либо на $\mathbb{R}$.

7. Множество всех непрерывных функций с действительными значениями, определенных на некотором отрезке либо на $\mathbb{R}$. •

Пример 2. Важнейший пример линейного пространства дает ***пространство*** $\mathbb{R}^n$ – ***пространство n-мерных векторов*** – множество всех упорядоченных комбинаций n действительных чисел:

$$\mathbb{R}^n = \{\overline{x} = (x_1; x_2; ...; x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n\},$$

в котором равенство n-мерных векторов, а также сложение и умножение на число понимаются поэлементно: если $\overline{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, $\overline{y} = (y_1; y_2; ...; y_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$\overline{x} = \overline{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2, \\ ..., \\ x_n = y_n; \end{cases}$$

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; ...; x_n + y_n);$$

$$\alpha\overline{x} = (\alpha x_1; \alpha x_2; ...; \alpha x_n).$$

В частности, множество $\mathcal{V}_2$ всех векторов на плоскости можно трактовать как множество $\mathbb{R}^2$, так как при выбранном базисе на плоскости каждый вектор плоскости может быть задан упорядоченной парой чисел – своими координатами в данном базисе.

Аналогично, множество $\mathcal{V}_3$ векторов в пространстве отождествляют с $\mathbb{R}^3$.

Множество $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ матриц размера $m \times n$ с действительными элементами иногда обозначают $\mathbb{R}^{m\times n}$.•

Пример 3. Существует линейное пространство, состоящее из одного элемента: $L = \{\overline{0}\}$. Такое линейное пространство называют ***нулевым***. •

Замечание. В определении линейного пространства произвольными могут быть не только природа элементов, но и способы сложения элементов и умножения их на число.

Пример 4. Рассмотрим множество всех *положительных* действительных чисел

$$L = \{\overline{x} = x : x > 0\}$$

и определим *сумму* элементов как их произведение, а *умножение на число* $\alpha \in \mathbb{R}$ как возведение в степень α:

$$\overline{x} + \overline{y} = xy; \qquad \alpha\overline{x} = x^{\alpha}.$$

Покажем, что множество L с введенными таким образом операциями является линейным пространством.

Решение. Проверим, что введенные на множестве L операции удовлетворяют 8 аксиомам линейного пространства. Действительно,

1) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$ для любых $\overline{x}, \overline{y} \in L$, так как $xy = yx$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$;

2) $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$ для любых $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in L$, так как $(xy)z = x(yz)$ для всех $x, y, z \in \mathbb{R}$;

3) нейтральным элементом является $\overline{1} \in L$, поскольку $\overline{x} + \overline{1} = 1x = x = \overline{x}$ для всех $\overline{x} \in L$;

4) противоположным элементу $\overline{x} \in L$ является $\overline{\dfrac{1}{x}} \in L$, поскольку $\overline{x} + \overline{\dfrac{1}{x}} = x\dfrac{1}{x} = 1 = \overline{1}$;

5) $1\overline{x} = x^{1} = x = \overline{x}$ для всех $\overline{x} \in L$;

6) $\alpha(\overline{x} + \overline{y}) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha}y^{\alpha} = \alpha\overline{x} + \alpha\overline{y}$ для любых $\overline{x}, \overline{y} \in L$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$;

7) $(\alpha + \beta)\overline{x} = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha}x^{\beta} = \alpha\overline{x} + \beta\overline{x}$ для любого $\overline{x} \in L$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

8) $\alpha(\beta\overline{x}) = (x^{\beta})^{\alpha} = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta)\overline{x}$ для любого $\overline{x} \in L$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Следовательно, множество L с введенными указанным образом операциями сложения и умножения на действительное число является линейным пространством. •

Замечание. В сформулированном определении 1 рассмотрена операция умножения на *действительные* числа, поэтому такое линейное (векторное) пространство называют также ***действительным*** (или ***вещественным***) ***линейным пространством***.

Если в определении 1 рассмотреть операцию умножения на *комплексные* числа, то получим определение ***комплексного линейного пространства***.

Пример 5. Приведем примеры комплексных линейных пространств.

1. Множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел с обычными операциями сложения и умножения на комплексное число.

2. Множество $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ всех матриц фиксированного размера $m\times n$ с комплексными элементами.

3. Множество $\mathbb{C}[x]$ всех многочленов с комплексными коэффициентами.

4. Множество $\mathbb{C}^n=\{\overline{x}=(x_1;x_2;...;x_n):x_i\in\mathbb{C},1\le i\le n\}$ n-мерных векторов с комплексными координатами. •

Замечание. Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел по отношению к обычной операции сложения комплексных чисел и операции умножения комплексных чисел на *действительное* число является *действительным* линейным пространством.

Простейшие свойства линейных пространств

Непосредственно из аксиом линейного пространства можно получить ряд простейших свойств.

Т 1. В произвольном линейном пространстве L:

1) нулевой элемент единственен;

2) для каждого $\overline{x}\in L$ существует *единственный* противоположный элемент.

Доказательство. **1)** В аксиоме 3 линейного пространства не утверждается, что нулевой элемент должен быть единственным. Но из аксиом 1 и 3 в совокупности это вытекает.

Пусть существуют два нулевых элемента $\overline{0_1}\in L$ и $\overline{0_2}\in L$. Тогда

$$\overline{0_1}=\overline{0_1}+\overline{0_2}=\overline{0_2}+\overline{0_1}=\overline{0_2}.$$

Здесь в первом равенстве использован тот факт, что $\overline{0_2}$ – нулевой элемент, второе следует из коммутативности сложения, а третье справедливо в силу того, что $\overline{0_1}$ – нулевой элемент.

Следовательно, элементы $\overline{0_1}$ и $\overline{0_2}$ совпадают.

2) Пусть для некоторого $\overline{x} \in L$ существует два противоположных элемента $(-\overline{x})_1 \in L$ и $(-\overline{x})_2 \in L$.

Рассмотрим сумму $(-\overline{x})_1 + \overline{x} + (-\overline{x})_2$. В силу аксиомы 2 эта сумма не зависит от порядка выполнения двух операций сложения. Меняя порядок сложения, получаем:

$$\left((-\overline{x})_1 + \overline{x}\right) + (-\overline{x})_2 = \overline{0} + (-\overline{x})_2 = (-\overline{x})_2;$$

$$(-\overline{x})_1 + \left(\overline{x} + (-\overline{x})_2\right) = (-\overline{x})_1 + \overline{0} = (-\overline{x})_1,$$

т. е. оба противоположных элемента совпадают. ◁

Т 2. В произвольном линейном пространстве L:

1) $0\overline{x} = \overline{0}$ для всех $\overline{x} \in L$;

2) $-1\overline{x} = -\overline{x}$ для всех $\overline{x} \in L$;

3) $\alpha\overline{0} = \overline{0}$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ (либо для всех $\alpha \in \mathbb{C}$, если рассматривается комплексное линейное пространство);

4) $\alpha\overline{x} = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad$ либо $\alpha = 0$, либо $\overline{x} = \overline{0}$.

§ 2. Понятия линейной зависимости и линейной независимости элементов линейного пространства

Понятия линейной комбинации элементов, а также линейной зависимости и линейной независимости векторов произвольного линейного пространства определяются точно так же, как для обычных векторов в пространстве.

Опр. 1. ***Линейной комбинацией*** элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n} \in L$ с числовыми коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ называется элемент

$$\overline{y} = \alpha_1\overline{x_1} + \alpha_2\overline{x_2} + ... + \alpha_n\overline{x_n} \in L.$$

Опр. 2. Система (множество) элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n} \in L$ называется ***линейно зависимой***, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, из которых хотя бы одно не равно 0, что $\alpha_1\overline{x_1} + \alpha_2\overline{x_2} + ... + \alpha_n\overline{x_n} = \overline{0}$.

Опр. 3. Система (множество) элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n} \in L$ называется ***линейно независимой***, если равенство

$\alpha_1\overline{x_1}+\alpha_2\overline{x_2}+...+\alpha_n\overline{x_n}=\overline{0}$ возможно только в случае, когда все коэффициенты линейной комбинации равны 0, т. е. $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$.

Т 1 (критерий линейной зависимости системы элементов). Система элементов $\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n}\in L$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных.

Доказательство. По определению, если элементы $\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n}\in L$ линейно зависимы, то существуют такие числа $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$, не все равные 0, что $\alpha_1\overline{x_1}+\alpha_2\overline{x_2}+...+\alpha_n\overline{x_n}=\overline{0}$. Пусть $\alpha_1\neq 0$. Тогда

$$\overline{x_1}=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overline{x_2}-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\overline{x_3}-...-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\overline{x_n},$$

т. е. элемент $\overline{x_1}$ является линейной комбинацией элементов $\overline{x_2},\overline{x_3},...,\overline{x_n}$.

Обратно, если $\overline{x_1}$ является линейной комбинацией элементов $\overline{x_2},\overline{x_3},...,\overline{x_n}$, т. е. $\overline{x_1}=\alpha_2\overline{x_2}+\alpha_3\overline{x_3}+...+\alpha_n\overline{x_n}$. Тогда $\overline{x_1}-\alpha_2\overline{x_2}-\alpha_3\overline{x_3}-...-\alpha_n\overline{x_n}=\overline{0}$, т. е. линейная комбинация элементов $\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n}\in L$ равна $\overline{0}$, причем коэффициент при $\overline{x_1}$ не равен 0, а значит, элементы $\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n}\in L$ линейно зависимы. $\triangleleft$

Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем элементов

Утв. 1. Всякая система элементов, содержащая нулевой элемент, линейно зависима.

Утв. 2. Если часть системы элементов образует линейно зависимую систему, то и вся система линейно зависима.

Утв. 3. Если система элементов линейно независима, то и любая ее подсистема (часть) линейно независима.

Утв. 4. Если элементы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n} \in L$ линейно независимы и элемент $\overline{y} \in L$ не является их линейной комбинацией, то система элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}, \overline{y} \in L$ линейно независима.

Пример 1. В линейном пространстве $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ матриц размера 2×2 проверить, являются ли линейно зависимыми или линейно независимыми следующие системы элементов:

а) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$

б) $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$

Решение. **а)** Составим линейную комбинацию указанных элементов (матриц) и приравняем ее к нулевому элементу, т. е. нулевой матрице:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 = O;$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполняя действия над матрицами в левой части равенства, получим

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_3 + 3\alpha_4 & 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку равенство двух матриц означает равенство их соответствующих элементов, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0, \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Если эта система имеет только нулевое решение, то элементы линейного пространства линейно независимы. Если эта система имеет ненулевое решение, то элементы линейного пространства линейно зависимы.

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{II'=II-2\cdot I \\ IV'=IV-3\cdot I}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[IV'=IV+II]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[IV'=IV-3\cdot III]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система, имеющая только одно (нулевое) решение:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0, \\ -8\alpha_4 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0, \\ \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, линейная комбинация матриц A_1, A_2, A_3, A_4 равна нулевой матрице только в том случае, когда все коэффициенты этой линейной комбинации равны 0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Следовательно, матрицы A_1, A_2, A_3, A_4 линейно независимы.

б) Проверим, может ли быть равна нулевой матрице линейная комбинация матриц $B_1, B_2, B_3, B_4,$ не все коэффициенты которой равны 0 (***нетривиальная*** линейная комбинация матриц B_1, B_2, B_3, B_4):

$$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3 + \alpha_4 B_4 = O;$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 \\ \alpha_3 + 3\alpha_4 & 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 7\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая соответствующие элементы двух матриц, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0, \\ \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0, \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 7\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{II'=II-2\cdot I \\ IV'=IV-3\cdot I}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[IV'=IV+II]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[IV'=IV-3\cdot III]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система, имеющая бесконечно много решений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0, \\ \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0, \\ 0 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -c, \\ \alpha_2 = c, \\ \alpha_3 = -3c, \\ \alpha_4 = c, c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

В частности, полагая $c = 1$, получим $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -3, \alpha_4 = 1,$ т. е. существует равная нулевой матрице *нетривиальная* линейная комбинация матриц B_1, B_2, B_3, B_4 :

$$-B_1 + B_2 - 3B_3 + B_4 = O,$$

а значит, матрицы B_1, B_2, B_3, B_4 линейно зависимы. •

Пример 2. а) Несложно видеть, что в линейном пространстве многочленов элементы

$$f_1(x) = x^4;\ f_2(x) = x^3;\ f_3(x) = x^2;\ f_4(x) = x;\ f_5(x) = 1;\ f_6(x) = x^3 - 4x + 1$$

линейно зависимы, так как последний из них является линейной комбинацией остальных: $f_6(x) = f_2(x) - 4f_4(x) + f_5(x)$, а значит, в соответствии с критерием линейной зависимости (теорема 1), данные многочлены линейно зависимы.

б) В линейном пространстве непрерывных функций элементы

$$f_1(x) = 1;\ f_2(x) = \cos x;\ f_3(x) = \cos^2 x;\ f_4(x) = \cos 2x$$

линейно зависимы, так как $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, т. е. последний элемент является линейной комбинацией остальных: $f_4(x) = 2f_3(x) - f_1(x)$, а значит, в соответствии с критерием линейной зависимости (теорема 1), данные функции линейно зависимы.●

§ 3. Размерность и базис линейного пространства

Опр. 1. ***Размерностью*** линейного пространства L называется такое число $\dim L = n$, что:

1) в L существует n линейно независимых элементов;

2) любая система из $n+1$ элемента линейно зависима.

Таким образом, размерность линейного пространства – это максимальное число линейно независимых элементов этого пространства.

Размерность нулевого линейного пространства считается равной 0.

Опр. 2. Линейное пространство L называется ***бесконечномерным*** $(\dim L = \infty)$, если при любом натуральном n существует система n линейно независимых элементов этого пространства.

Пример 1. Множество $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов с действительными коэффициентами является бесконечномерным линейным пространством, так как для любого натурального n система многочленов $1; x; x^2; \ldots; x^{n-1}$ является линейно независимой. (Действительно, линейная комбинация этих многочленов, отвечающая набору коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, есть многочлен $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$, который является нулевым (т. е. равен постоянной функции 0), только если все его коэффициенты (они же коэффициенты линейной комбинации) равны нулю.)

Аналогично, множество всех функций с действительными значениями, определенных на некотором отрезке либо на $\mathbb{R}$, а также множество всех непрерывных функций с действительными значениями, определенных на некотором отрезке либо на $\mathbb{R}$, являются бесконечномерными линейными пространствами, поскольку содержат линейно независимую систему функций $1; x; x^2; ...; x^{n-1}$ для любого натурального n.•

Опр. 3. ***Базисом*** линейного пространства L называется такая *упорядоченная* система $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\}$, состоящая из n линейно независимых элементов этого пространства, что любой элемент $\overline{x} \in L$ может быть представлен в виде линейной комбинации базисных элементов:

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}. \qquad (1)$$

Опр. 4. Представление (1) называется ***разложением элемента*** $\overline{x}$ ***по базису*** $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\}$, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ – ***координатами элемента*** $\overline{x}$ ***в базисе*** $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\}$; в этом случае пишут

$$\overline{x} = \{x_1; x_2; ...; x_n\}.$$

Пример 2. В линейном пространстве $\mathbb{R}_2[x]$ многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами элементы x и x^2 линейно независимы: их линейная комбинация $\alpha x + \beta x^2$ есть многочлен, который равен нулю (нулевому многочлену) лишь при $\alpha = \beta = 0$.

Однако пара этих элементов не образует базиса, так как, к примеру, многочлен 1 нулевой степени, являющийся элементом $\mathbb{R}_2[x]$, нельзя представить в виде линейной комбинации многочленов x и x^2, поскольку равенство $1 = \alpha x + \beta x^2$ двух многочленов невозможно ни при каких значениях коэффициентов.

В то же время три многочлена $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$ образуют базис линейного пространства $\mathbb{R}_2[x]$, так как:

1) система многочленов $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$ линейно независима: их линейная комбинация

$\alpha_1 e_1(x)+\alpha_2 e_2(x)+\alpha_3 e_3(x)=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2$ равна нулю (нулевому многочлену) лишь при $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$;

2) через многочлены $e_1(x)=1, e_2(x)=x, e_3(x)=x^2$ можно выразить любой многочлен степени не выше 2: если $p(x)=ax^2+bx+c$, то $p(x)=ce_1(x)+be_2(x)+ae_3(x)$.

Таким образом, система многочленов $1, x, x^2$ есть базис в $\mathbb{R}_2[x]$.

•

Пример 3. Покажем, что квадратные трехчлены $e_1(x)=x^2-x+2, e_2(x)=2x^2+x, e_3(x)=4x^2-x+1$ образуют базис в линейном пространстве $\mathbb{R}_2[x]$ многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами.

Решение. 1) Покажем, что система многочленов $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ линейно независима, т. е. что равенство $\alpha_1 e_1(x)+\alpha_2 e_2(x)+\alpha_3 e_3(x)=0$ возможно только в случае $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

Составим линейную комбинацию данных квадратных трехчленов и приравняем ее к 0:

$$\alpha_1(x^2-x+2)+\alpha_2(2x^2+x)+\alpha_3(4x^2-x+1)=0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим

$$(\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3)x^2+(-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)x+2\alpha_1+\alpha_3=0.$$

Равенство возможно только в том случае, если все коэффициенты многочлена в левой части равны 0, т. е.

$$\begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3=0, \\ -\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0, \\ 2\alpha_1+\alpha_3=0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[III'=III-2\cdot I]{II'=II+I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[III'=-III]{II'=\frac{1}{3}\cdot II}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 7 & 0\end{array}\right)\to\xrightarrow[III'=III-4\cdot II]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система, имеющая только одно (нулевое) решение:

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3=0,\\ \alpha_2+\alpha_3=0,\\ 3\alpha_3=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=0,\\ \alpha_2=0,\\ \alpha_3=0.\end{cases}$$

Таким образом, линейная комбинация многочленов $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ равна 0 только в том случае, когда все коэффициенты этой линейной комбинации равны 0: $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Следовательно, многочлены $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ линейно независимы.

2) Покажем, что любой многочлен $p(x)=ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x]$ может быть представлен в виде линейной комбинации многочленов $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$. Для этого, приравняв линейную комбинацию многочленов $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ к $p(x)$:

$$\alpha_1(x^2-x+2)+\alpha_2(2x^2+x)+\alpha_3(4x^2-x+1)=ax^2+bx+c,$$

определим значения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим

$$(\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3)x^2+(-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)x+2\alpha_1+\alpha_3=ax^2+bx+c.$$

Равенство возможно только в том случае, если все коэффициенты многочленов при одинаковых степенях x совпадают, т. е.

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3=a,\\ -\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=b,\\ 2\alpha_1+\alpha_3=c.\end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 4 & a\\ -1 & 1 & -1 & b\\ 2 & 0 & 1 & c\end{array}\right)\xrightarrow[III'=III-2\cdot I]{II'=II+I}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 4 & a\\ 0 & 3 & 3 & b+a\\ 0 & -4 & -7 & c-2a\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow[III'=-III]{II'=\frac{1}{3}\cdot II}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&a\\0&1&1&\frac{b+a}{3}\\0&4&7&2a-c\end{array}\right)\xrightarrow[III'=III-4\cdot II]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&a\\0&1&1&\frac{b+a}{3}\\0&0&3&\frac{2a-4b-3c}{3}\end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система, имеющая единственное решение:

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3=a,\\ \alpha_2+\alpha_3=\dfrac{b+a}{3},\\ 3\alpha_3=\dfrac{2a-4b-3c}{3};\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{-a+2b+6c}{9},\\ \alpha_2=\dfrac{a+7b+3c}{9},\\ \alpha_3=\dfrac{2a-4b-3c}{9}.\end{cases}$$

Следовательно, любой многочлен $p(x)=ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x]$ может быть представлен в виде линейной комбинации многочленов $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$.

Таким образом, квадратные трехчлены $e_1(x)=x^2-x+2, e_2(x)=2x^2+x, e_3(x)=4x^2-x+1$ образуют базис в $\mathbb{R}_2[x]$. •

Пример 3 (продолжение). Квадратный трехчлен $p(x)=ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x]$ имеет в базисе $e_1(x)=x^2-x+2, e_2(x)=2x^2+x, e_3(x)=4x^2-x+1$ координаты

$$\alpha_1=\frac{-a+2b+6c}{9};\ \alpha_2=\frac{a+7b+3c}{9};\ \alpha_3=\frac{2a-4b-3c}{9}.$$

поскольку $p(x)=\alpha_1e_1(x)+\alpha_2e_2(x)+\alpha_3e_3(x)$.

Определим координаты квадратного трехчлена $p(x)=2x^2+x+3$ в этом базисе. Так как $a=2, b=1, c=3,$ то

$$\alpha_1=\frac{-2+2\cdot1+6\cdot3}{9}=2;\ \alpha_2=\frac{2+7\cdot1+3\cdot3}{9}=2;\ \alpha_3=\frac{2\cdot2-4\cdot1-3\cdot3}{9}=-1,$$

т. е. $p(x)=2e_1(x)+2e_2(x)-e_3(x)$.

Проверка: действительно,

$$2(x^2-x+2)+2(2x^2+x)-(4x^2-x+1)=2x^2+x+3. \bullet$$

Т 1. Координаты любого элемента $\overline{x} \in L$ в данном базисе $\left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\}$ определяются однозначно.

Доказательство. Если допустить, что некоторый элемент $\overline{x} \in L$ имеет в данном базисе два разложения:

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}; \qquad \overline{x} = x_1'\overline{e_1} + x_2'\overline{e_2} + ... + x_n'\overline{e_n},$$

то, вычитая из первого равенства второе, получим

$$\overline{0} = (x_1 - x_1')\overline{e_1} + (x_2 - x_2')\overline{e_2} + ... + (x_n - x_n')\overline{e_n}.$$

Так как базис – это линейно независимая система элементов, то ее линейная комбинация равна нулевому элементу только в том случае, когда она тривиальная, т. е. все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю:

$$x_1 - x_1' = 0; x_2 - x_2' = 0; ...; x_n - x_n' = 0.$$

Следовательно, $x_1 = x_1'; x_2 = x_2'; ...; x_n = x_n'$, а значит, два разложения элемента $\overline{x} \in L$ в базисе $\left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\}$ совпадают. ◁

Основное значение базиса заключается в том, что операции сложения и умножения элементов линейного пространства на числа при задании базиса сводятся к соответствующим операциям над координатами элементов.

Т 2. Пусть в линейном пространстве L задан базис $\left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\}$. Тогда:

1) все координаты нулевого элемента равны 0;
2) два элемента равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты в данном базисе;
3) при сложении двух элементов складываются их соответствующие координаты;
4) при умножении элемента на число все координаты умножаются на это число.

Т 3. Базис линейного пространства L состоит из n элементов тогда и только тогда, когда $\dim L = n$.

Пример 4. 1) Если $L = \mathbb{R}$, то $\dim L = 1$; базис – любое число, отличное от 0.

2) Множество $\mathcal{V}_3$ всех векторов в пространстве является трехмерным линейным пространством: $\dim\mathcal{V}_3 = 3$; базис – любые три некомпланарных вектора. Если $L = \mathcal{V}_2$ (множество всех векторов на плоскости), то $\dim\mathcal{V}_2 = 2$; базис – любые две неколлинеарных вектора. Множество $\mathcal{V}_1$ векторов, коллинеарных заданной прямой, – одномерное линейное пространство: $\dim\mathcal{V}_1 = 1$; базис – любой ненулевой вектор этого пространства.

3) Если $L = \mathbb{R}^n$, то $\dim L = n$; базис в пространстве $\mathbb{R}^n$ составляют, например, n n-мерных векторов:

$$\overline{e_1} = (1; 0; 0; ...; 0);\ \overline{e_2} = (0; 1; 0; ...; 0);\ ...;\ \overline{e_n} = (0; 0; 0; ...; 1), \qquad (2)$$

поскольку для любого $\overline{x} = (x_1; x_2; ...; x_n) \in \mathbb{R}^n$ справедливо представление $\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}$.

Базис (2) в пространстве $\mathbb{R}^n$ называют ***стандартным.***

4) *Упражнение 1*. Показать, что в качестве базиса в линейном пространстве $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ матриц размера 2×3 можно взять

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\dim\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R}) = 6$.

5) Множество $\mathbb{R}_n[x]$ всех многочленов степени не выше n имеет базис $1; x; x^2; ...; x^n$, поэтому $\dim\mathbb{R}_n[x] = n+1$.•

Замечание. Базис линейного пространства определяется неоднозначно.

Т 4. В n-мерном линейном пространстве всякая упорядоченная система, состоящая из n линейно независимых элементов, является базисом.

Пример 5. Найдем координаты вектора $\overline{x} = (1; 2; 3; 4) \in \mathbb{R}^4$ в базисе $\overline{e_1} = (1; 0; 1; 0)$; $\overline{e_2} = (0; 1; 0; 1)$; $\overline{e_3} = (1; 1; 1; 0)$; $\overline{e_4} = (0; 1; 1; 1)$.

Решение. Найдем коэффициенты разложения элемента $\overline{x}$ по базису $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}; \overline{e_4}\}$, т. е. такие числа x_1, x_2, x_3, x_4, что $\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + x_3\overline{e_3} + x_4\overline{e_4}$. При этом удобно записывать элементы пространства $\mathbb{R}^4$ (упорядоченные комбинации *n* действительных чисел) как матрицы-столбцы. Тогда

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}x_1 + x_3\\x_2 + x_3 + x_4\\x_1 + x_3 + x_4\\x_2 + x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Приравнивая соответствующие элементы двух матриц, получим систему уравнений

$$\begin{cases}x_1 + x_3 = 1,\\x_2 + x_3 + x_4 = 2,\\x_1 + x_3 + x_4 = 3,\\x_2 + x_4 = 4.\end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 1 & 2\\1 & 0 & 1 & 1 & 3\\0 & 1 & 0 & 1 & 4\end{array}\right) \xrightarrow[\substack{III'=III-I\\IV'=IV-II}]{} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & -1 & 0 & 2\end{array}\right).$$

Таким образом, получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_4 = 2, \\ -x_3 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -2, \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

Следовательно, $\overline{x} = 3\overline{e_1} + 2\overline{e_2} - 2\overline{e_3} + 2\overline{e_4}$, т. е. определили координаты $\overline{x} = \{3; 2; -2; 2\}$ в базисе $\left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}; \overline{e_4}\right\}$.•

Преобразование координат вектора при изменении базиса

В линейном пространстве все базисы равноправны. Тот или иной базис выбирают исходя из конкретных обстоятельств, а может быть, и вообще произвольно. Иногда удобно использовать для представления элементов линейного пространства несколько базисов, но тогда естественным образом возникает задача преобразования координат векторов, которое связано с изменением базиса.

Пусть $\mathcal{E} = \left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\}$ – базис линейного пространства L; $\mathcal{E}' = \left\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}; ...; \overline{e_n'}\right\}$ – новый базис линейного пространства L, причем (любой вектор пространства L может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса $\mathcal{E}$)

$$\begin{aligned} &\overline{e_1'} = t_{11}\overline{e_1} + t_{21}\overline{e_2} + ... + t_{n1}\overline{e_n}, \\ &\overline{e_2'} = t_{12}\overline{e_1} + t_{22}\overline{e_2} + ... + t_{n2}\overline{e_n}, \\ &..., \\ &\overline{e_n'} = t_{1n}\overline{e_1} + t_{2n}\overline{e_2} + ... + t_{nn}\overline{e_n}. \end{aligned}$$

Опр. 5. Матрица

$$T = T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей перехода от базиса*** $\mathcal{E}$ ***к базису*** $\mathcal{E}'$.

Согласно данному определению, *i-й столбец матрицы перехода есть столбец координат i-го вектора нового базиса в старом*. Поэтому говорят, что матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных по столбцам.

Замечание. Поскольку векторы $\overline{e_1'}; \overline{e_2'}; ...; \overline{e_n'}$ линейно независимы, то матрица перехода является невырожденной матрицей: $\det T \neq 0$.

Пример 6. В пространстве $\mathcal{V}_2$ векторов на плоскости найдем матрицу перехода от базиса $\mathcal{E} = \left\{\vec{i}; \vec{j}\right\}$ к базису $\mathcal{E}' = \left\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}\right\}$, который получается из базиса $\mathcal{E} = \left\{\vec{i}; \vec{j}\right\}$ поворотом на заданный угол φ против часовой стрелки (рис. 1).

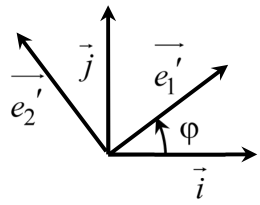


Рис. 1. Поворот ортонормированного базиса $\mathcal{E} = \left\{\vec{i}; \vec{j}\right\}$ на угол φ

Несложно видеть, что координаты векторов нового базиса в базисе $\mathcal{E} = \left\{\vec{i}; \vec{j}\right\}$ равны

$$\overline{e_1'} = \{\cos\varphi; \sin\varphi\}; \overline{e_2'} = \{-\sin\varphi; \cos\varphi\}.$$

Поэтому

$$T = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \bullet$$

Непосредственной подстановкой доказывается следующий факт.

Т 5. Если $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}$ – столбцы координат элемента $\overline{x} \in L$ в базисе $\mathcal{E}$ и в базисе $\mathcal{E}'$ соответственно, то $\boxed{X = TX'.}$

Следствие 1. $\boxed{X' = T^{-1}X,}$ где T – матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$.

Следствие 2. Матрица перехода от базиса $\mathcal{E}'$ к базису $\mathcal{E}$ – это матрица, обратная матрице перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$:

$$\boxed{T_{\mathcal{E}' \to \mathcal{E}} = T^{-1}_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}.}$$

Изоморфизм линейных пространств

Опр. 6. Два линейных пространства L_1 и L_2 называются ***изоморфными***, если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что если $\overline{x_1} \leftrightarrow \overline{y_1}$, $\overline{x_2} \leftrightarrow \overline{y_2}$, где $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in L_1$, $\overline{y_1}, \overline{y_2} \in L_2$, то $\overline{x_1} + \overline{x_2} \leftrightarrow \overline{y_1} + \overline{y_2}$ и $\alpha \overline{x_1} \leftrightarrow \alpha \overline{y_1}$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

Из определения изоморфизма следует, что линейно зависимым векторам из L_1 соответствуют линейно зависимые векторы из L_2, и обратно. Поэтому размерности изоморфных пространств одинаковы, а пространства разной размерности не могут быть изоморфны друг другу.

Т 6. Два линейных пространства L_1 и L_2 изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim L_1 = \dim L_2$.

Таким образом, все линейные пространства одинаковой размерности изоморфны друг другу. Поэтому любое n-мерное действительное линейное пространство можно отождествлять с $\mathbb{R}^n$, рассматривая его элементы как столбцы координат в некотором фиксированном базисе.

§ 4. Подпространства линейных пространств

Опр. 1. Непустое подмножество L' действительного линейного пространства L называется ***линейным подпространством*** пространства L, если для любых $\overline{x}, \overline{y} \in L'$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ элементы $\overline{x} + \overline{y} \in L'$, $\alpha \overline{x} \in L'$.

Утв. 1. Подпространство само является линейным пространством, причем $\dim L' \leq \dim L$.

Пример 1. Приведем примеры подпространств линейных пространств.

1. Простейшими примерами подпространств для любого линейного пространства L являются нулевое подпространство $\{\overline{0}\}$ и само пространство L. Эти подпространства называются ***тривиальными***.

2. Пусть L – множество всех непрерывных функций, тогда $L' = \mathbb{R}_n[x]$ – множество всех многочленов степени не выше n – является подпространством линейного пространства L.

3. Пусть $L = \mathbb{R}_5[x]$ – множество многочленов степени не выше 5, тогда $L' = \mathbb{R}_4[x]$ – множество многочленов степени не выше 4 – является подпространством линейного пространства L.

4. Если $L = \mathcal{V}_3$ (множество всех векторов в пространстве), то $L' = \mathcal{V}_2$ (множество всех векторов на плоскости) является подпространством линейного пространства L, а $L'' = \mathcal{V}_1$ (множество векторов, коллинеарных заданной прямой) является подпространством L'.●

Важный пример линейного подпространства дает следующее понятие.

Опр. 2. Пусть $\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}$ – элементы линейного пространства L. ***Линейной оболочкой*** элементов $\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}$ называется множество всех линейных комбинаций этих элементов:

$$L(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}) = \{\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} + ... + \gamma\overline{z} : \alpha, \beta, ..., \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Линейную оболочку элементов $\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}$ обозначают $L(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z})$ либо $< \overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z} >$. Иногда также говорят, что линейная оболочка *натянута на векторы* $\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}$.

Упражнение. Показать, что линейная оболочка заданных элементов линейного пространства L является подпространством линейного пространства L.

Утв. 2. Линейная оболочка $L(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z})$ является *наименьшим* подпространством, содержащим элементы $\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}$.

Утв. 3. Размерность линейной оболочки $L(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z})$ равна максимальному числу линейно независимых элементов в системе элементов $\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z}$.

Пример 2. В линейном пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов линейная оболочка $L(1, x, x^2, ..., x^n) = \mathbb{R}_n[x]$ – множество всех многочленов степени не выше n; линейная оболочка $L(x, x^2, ..., x^n)$ – множество всех многочленов вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x$; линейная оболочка $L(1, x, x^2, x^2 + x + 1)$ – множество всех многочленов вида $a_0x^2 + a_1x + a_2$, т. е. $\mathbb{R}_2[x]$. •

Пример 3. Пусть $L = \mathcal{V}_3$ (множество всех векторов в пространстве), $\overline{x} = 2\vec{i} + \vec{j}, \overline{y} = 3\vec{j} - 2\vec{k} \in L.$ Тогда линейная оболочка

$$L(\overline{x}, \overline{y}) = \{\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

– это множество всех векторов, параллельных плоскости, содержащей векторы $\overline{x} = 2\vec{i} + \vec{j}, \overline{y} = 3\vec{j} - 2\vec{k}$, т. е. плоскости

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

или $-2x + 4y + 6z = 0$, т. е. $x - 2y - 3z = 0$.•

Операции над подпространствами

Пусть L_1 и L_2 – два линейных подпространства одного и того же линейного пространства L.

Опр. 3. ***Пересечением*** $L_1 \cap L_2$ подпространств L_1 и L_2 называется множество всех элементов, принадлежащих одновременно и L_1, и L_2:

$$L_1 \cap L_2 = \{\overline{x} \in L : \overline{x} \in L_1, \overline{x} \in L_2\}.$$

Очевидно, что $L_1 \cap L_2$ также является подпространством линейного пространства L.

Опр. 4. ***Суммой*** $L_1 + L_2$ подпространств L_1 и L_2 называется множество всех элементов вида $\overline{z} = \overline{x} + \overline{y}$, где $\overline{x} \in L_1$, $\overline{y} \in L_2$, т. е.

$$L_1 + L_2 = \{\overline{z} = \overline{x} + \overline{y} : \overline{x} \in L_1, \overline{y} \in L_2\}.$$

Упражнение. Проверить, что $L_1 + L_2$ является подпространством линейного пространства L.

Пример 4. Пусть $L = \mathcal{V}_3$ (множество всех свободных векторов в пространстве); L_1 – множество всех векторов, параллельных плоскости Oxy; L_2 – множество всех векторов, параллельных плоскости Oxz.

Тогда $L_1 \cap L_2$ – множество всех векторов, параллельных оси Ox, а $L_1 + L_2 = L$.

Заметим, что

$$\dim L = 3, \dim L_1 = 2, \dim L_2 = 2, \dim(L_1 \cap L_2) = 1, \dim(L_1 + L_2) = 3. \bullet$$

Т 1. Пусть L_1 и L_2 – два подпространством одного и того же линейного пространства L. Тогда

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Пример 5. Пусть $L = \mathbb{R}[x]$ (множество всех многочленов); $L_1 = L(1, x, x^2, x^3)$, $L_2 = L(x^2, x^3, x^4)$. Тогда $\dim L_1 = 4, \dim L_2 = 3$.

В этом случае $L_1 + L_2 = L(1, x, x^2, x^3, x^4), \dim(L_1 + L_2) = 5$; $L_1 \cap L_2 = L(x^2, x^3), \dim(L_1 \cap L_2) = 2.$ $\bullet$

§ 5. Линейные операторы

Пусть L_1 и L_2 – два линейных пространства.

Опр. 1. Если задано правило *f*, по которому каждому элементу $\overline{x} \in L_1$ ставится в соответствие некоторый элемент $\overline{y} \in L_2$, то говорят, что задан ***оператор*** (***отображение***, ***преобразование***), действующий из L_1 в L_2: $f : L_1 \to L_2$; при этом элемент $\overline{y} = f(\overline{x})$ называется ***образом*** элемента $\overline{x}$, а элемент $\overline{x}$ – ***прообразом*** элемента $\overline{y}$ (при данном отображении *f*).

Замечание. Термин «преобразование» используется в случае, когда пространства L_1 и L_2 совпадают.

Опр. 2. Отображение, при котором каждый элемент $\overline{y} \in L_2$ имеет единственный прообраз (иными словами, разным элементам $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in L_1, \overline{x_1} \neq \overline{x_2}$, соответствуют разные образы $\overline{y_1}, \overline{y_2} \in L_2, \overline{y_1} \neq \overline{y_2}$) называется ***взаимно однозначным***, или ***биективным***.

Замечание. Отображения, которые мы будем рассматривать, не обязательно будут взаимно однозначными.

Опр. 3. Оператор $f : L_1 \to L_2$ называется ***линейным***, если для любых элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x} \in L_1$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ (либо $\alpha \in \mathbb{C}$, если рассматриваются комплексные линейные пространства) выполняются условия:

1) $f(\overline{x_1} + \overline{x_2}) = f(\overline{x_1}) + f(\overline{x_2})$;

2) $f(\alpha\overline{x}) = \alpha f(\overline{x})$.

Утв. 1. Оператор $f : L_1 \to L_2$ является линейным тогда и только тогда, когда для любых элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in L_1$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (либо $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ в случае комплексных линейных пространств) выполняется условие $f(\alpha\overline{x_1} + \beta\overline{x_2}) = \alpha f(\overline{x_1}) + \beta f(\overline{x_2})$.

Пример 1. Пусть $L_1 = \mathcal{V}_2$ – множество всех свободных векторов на плоскости. Будем рассматривать элементы этого линейного пространства как векторы, исходящие из начала координат – точки *O*.

Тогда примерами линейных операторов являются: поворот вектора на данный угол φ; умножение вектора на данное число λ; симметрия относительно прямой, проходящей через точку *O*; симметрия относительно точки *O*; проекция на одну из осей. •

Пример 2. Пусть $L_1 = \mathbb{R}^{n\times 1}$ – множество матриц-столбцов (множество столбцов высоты *n*), а $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – фиксированная матрица размера $m \times n$. Тогда $f(X) = AX$ – линейное отображение, $f : \mathbb{R}^{n \times 1} \to \mathbb{R}^{m \times 1}$.

Отметим, что поскольку всякое n-мерное действительное линейное пространство можно отождествлять с $\mathbb{R}^n$, то данное отображение можно рассматривать как отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.•

Пример 3. Пусть $L_1 = \mathbb{R}[x]$ – пространство многочленов с действительными коэффициентами. Рассмотрим отображение D – оператор дифференцирования, который ставит в соответствие каждому многочлену

$$a(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbb{R}[x]$$

его производную

$$a'(x) = a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \in \mathbb{R}[x].$$

Оператор дифференцирования является линейным оператором $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$.

Заметим, что $D : \mathbb{R}^n[x] \to \mathbb{R}^{n-1}[x]$.•

Пример 4. В любом линейном пространстве L можно определить отображения $I(\overline{x}) = \overline{x}$ и $O(\overline{x}) = \overline{0}$, которые также являются линейными операторами. •

Опр. 4. Оператор $I : L \to L$, действующий по правилу $I(\overline{x}) = \overline{x}$, называется ***тождественным оператором***.

Пример 5. Рассмотрим на множестве векторов в пространстве

$$L_1 = \mathcal{V}_3 = \{\overline{x} = (x_1; x_2; x_3) : x_1; x_2; x_3 \in \mathbb{R}\}$$

два линейных оператора:

$f_1(\overline{x}) = \overline{x} \times \vec{a}$ – умножение вектора $\overline{x} \in \mathcal{V}_3$ справа на заданный вектор $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$;

$f_2(\overline{x})$ – отображение вектора $\overline{x} \in \mathcal{V}_3$ симметрично относительно плоскости Ox_1x_2.

Найдем явный вид операторов f_1 и f_2, т. е. для каждого $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3) \in L_1$ укажем координаты его образов $f_1(\overline{x})$ и $f_2(\overline{x})$.

Для отображения $f_1(\overline{x}) = \overline{x} \times \vec{a}$ имеем

$$f_1(\overline{x}) = f_1(x_1; x_2; x_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(3x_2 - 2x_3) - \vec{j}(3x_1 - x_3) + \vec{k}(2x_1 - x_2),$$

поэтому $f_1(x_1; x_2; x_3) = (3x_2 - 2x_3; -3x_1 + x_3; 2x_1 - x_2)$.

Вектор, симметричный вектору $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)$ относительно плоскости Ox_1x_2, очевидно, имеет координаты $(x_1; x_2; -x_3)$, поэтому $f_2(x_1; x_2; x_3) = (x_1; x_2; -x_3)$.●

Действия с линейными операторами

Опр. 5. ***Суммой*** двух линейных операторов $f: L_1 \to L_2$ и $g: L_1 \to L_2$ называется оператор $h = f + g: L_1 \to L_2$, действующий так, что для любого $\overline{x} \in L_1$ справедливо $h(\overline{x}) = f(\overline{x}) + g(\overline{x})$.

Очевидно, что сумма линейных операторов является линейным оператором.

Очевидно, что $f + g = g + f$ (сложение операторов коммутативно).

Опр. 6. ***Произведением*** линейного оператора $f: L_1 \to L_2$ на число λ называется оператор $h = \lambda f: L_1 \to L_2$, действующий по правилу $h(\overline{x}) = \lambda f(\overline{x})$ для любого $\overline{x} \in L_1$.

Очевидно, что при умножении линейного оператора на число получается линейный оператор.

Замечание. Множество $L(L_1 \to L_2)$ всех линейных операторов, действующих из линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2, также является линейным пространством.

Опр. 7. ***Произведением*** (***композицией***) линейного оператора $f: L_1 \to L_2$ на линейный оператор $g: L_2 \to L_3$ называется оператор $h = g \circ f: L_1 \to L_3$, действие которого заключается в последовательном действии операторов f и g, т. е. $h(\overline{x}) = g(f(\overline{x}))$ для любого $\overline{x} \in L_1$.

Произведение оператора f на оператор g обозначают $h = g \circ f$ или $h = gf$.

Замечание 1. Оператор, действующий первым, записывается справа.

Замечание 2. Как правило, $gf \neq fg$, т. е. *операция умножения операторов не коммутативна*.

Упражнение. Проверить, что произведение линейных операторов является линейным оператором.

Пример 5 (продолжение). Зная явный вид операторов:

$$f_1(x_1; x_2; x_3) = (3x_2 - 2x_3; -3x_1 + x_3; 2x_1 - x_2);$$

$$f_2(x_1; x_2; x_3) = (x_1; x_2; -x_3)$$

для всех $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3) \in L_1$, определим явный вид оператора $h = f_2 \circ f_1 - f_1 \circ f_2$.

Решение. Найдем явный вид оператора $h_1 = f_2 \circ f_1$. Пусть $\overline{y} = f_1(\overline{x})$, $\overline{z} = f_2(\overline{y})$. Тогда координаты элементов $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)$, $\overline{y} = (y_1; y_2; y_3)$, $\overline{z} = (z_1; z_2; z_3)$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases} y_1 = 3x_2 - 2x_3, \\ y_2 = -3x_1 + x_3, \\ y_3 = 2x_1 - x_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = -y_3. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} z_1 = 3x_2 - 2x_3, \\ z_2 = -3x_1 + x_3, \\ z_3 = -2x_1 + x_2, \end{cases}$$

поэтому $h_1(x_1; x_2; x_3) = (3x_2 - 2x_3; -3x_1 + x_3; -2x_1 + x_2)$.

Найдем явный вид оператора $h_2 = f_1 \circ f_2$. Пусть теперь $\overline{y} = f_2(\overline{x})$, $\overline{z} = f_1(\overline{y})$. Тогда координаты элементов $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)$, $\overline{y} = (y_1; y_2; y_3)$, $\overline{z} = (z_1; z_2; z_3)$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = -x_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = 3y_2 - 2y_3, \\ z_2 = -3y_1 + y_3, \\ z_3 = 2y_1 - y_2. \end{cases}$$

поэтому

$$\begin{cases} z_1 = 3x_2 + 2x_3, \\ z_2 = -3x_1 - x_3, \\ z_3 = 2x_1 - x_2, \end{cases}$$

а значит, $h_2(x_1; x_2; x_3) = (3x_2 + 2x_3; -3x_1 - x_3; 2x_1 - x_2)$.

Теперь найдем координаты элемента $\overline{z} = h(\overline{x}) = h_1(\overline{x}) - h_2(\overline{x})$:

$$\begin{cases} z_1 = 3x_2 - 2x_3 - (3x_2 + 2x_3) = -4x_3, \\ z_2 = -3x_1 + x_3 - (-3x_1 - x_3) = 2x_3, \\ z_3 = -2x_1 + x_2 - (2x_1 - x_2) = -4x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Следовательно, $h(x_1; x_2; x_3) = (-4x_3; 2x_3; -4x_1 + 2x_2)$. •

Опр. 8. Оператор $\varphi : L \to L$ называется ***обратным*** к данному оператору $f : L \to L$, если $\varphi \circ f = I$ и $f \circ \varphi = I$.

Оператор, обратный к оператору f, обозначается f^{-1}.

Пример 6. Найдем f^{-1}, если

$$f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3; x_3; x_2)$$

для всех $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3) \in L$.

Решение. Пусть $\overline{y} = f(\overline{x})$. Тогда координаты элементов $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)$ и $\overline{y} = (y_1; y_2; y_3)$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3, \\ y_2 = x_3, \\ y_3 = x_2, \end{cases}$$

Выразим из этих соотношений координаты элемента $\overline{x} = f^{-1}(\overline{y})$ через y_1, y_2, y_3:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2x_2 - x_3, \\ x_3 = y_2, \\ x_2 = y_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_3 - y_2, \\ x_2 = y_3, \\ x_3 = y_2; \end{cases}$$

поэтому $f^{-1}(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + 2x_3 - x_2; x_3; x_2)$. •

Утв. 2. Если $f: L \to L$ – линейный оператор и оператор f^{-1} существует, то f^{-1} – тоже линейный оператор.

Утв. 3. Если $f: L \to L$ – линейный оператор, то обратный оператор f^{-1} существует тогда и только тогда, когда f – взаимно однозначный оператор.

Матрицы линейных операторов

Пусть $f: L_1 \to L_2$ – линейный оператор и линейные пространства L_1 и L_2 конечномерны.

Выберем базисы: $\mathcal{E} = \left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\}$ – базис линейного пространства L_1; $\mathcal{F} = \left\{\overline{f_1}; \overline{f_2}; ...; \overline{f_m}\right\}$ – базис линейного пространства L_2.

Элементы $f(\overline{e_1}), f(\overline{e_2}), ..., f(\overline{e_n})$ (образы базисных векторов линейного пространства L_1 при отображении f) являются элементами линейного пространства L_2, а значит, их можно разложить по базису $\mathcal{F}$:

$$f(\overline{e_1}) = a_{11}\overline{f_1} + a_{21}\overline{f_2} + ... + a_{m1}\overline{f_m},$$
$$f(\overline{e_2}) = a_{12}\overline{f_1} + a_{22}\overline{f_2} + ... + a_{m2}\overline{f_m},$$
$$\ldots,$$
$$f(\overline{e_n}) = a_{1n}\overline{f_1} + a_{2n}\overline{f_2} + ... + a_{mn}\overline{f_m}.$$

Опр. 9. Матрица

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

столбцы которой состоят из координат векторов $f(\overline{e_1}), f(\overline{e_2}), ..., f(\overline{e_n})$, называется ***матрицей линейного оператора*** f.

Утв. 4. Если $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$ – столбцы координат элемента $\overline{x} \in L_1$ в базисе $\mathcal{E}$ и его образа $\overline{y} = f(\overline{x}) \in L_2$ в базисе $\mathcal{F}$ соответственно, то $\boxed{Y = A_f X.}$

Утв. 5. Действиям над линейными операторами соответствуют такие же действия над их матрицами (в соответствующих базисах):

1) $A_{f+g} = A_f + A_g$;

2) $A_{\lambda f} = \lambda A_f$ (λ – число);

3) $A_{g \circ f} = A_g A_f$;

4) $A_{f^{-1}} = (A_f)^{-1}$;

5) матрица тождественного оператора является единичной: $A_I = E$.

Таким образом, линейные преобразования описываются с помощью матриц и действия над линейными преобразованиями сводятся к действиям над их матрицами.

Пример 5 (продолжение). Зная явный вид операторов:

$$f_1(x_1; x_2; x_3) = (3x_2 - 2x_3; -3x_1 + x_3; 2x_1 - x_2);$$

$$f_2(x_1; x_2; x_3) = (x_1; x_2; -x_3)$$

для всех $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3) \in L_1$, найдем их матрицы, а также определим матрицу и явный вид оператора $h = f_2 \circ f_1 - f_1 \circ f_2$.

Решение. Выберем базис $\mathcal{E} = \left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}\right\}$ линейного пространства L_1 и найдем матрицу A_{f_1} линейного оператора f_1 в этом базисе. Пусть

$$A_{f_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} –$$

матрица линейного оператора f_1 и столбцы координат элемента $\overline{x}$ и его образа $\overline{y} = f_1(\overline{x})$ в базисе $\mathcal{E}$. Согласно утверждению 4, $Y = A_{f_1}X$, т. е.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

С другой стороны, из условия вытекает, что координаты элемента $\overline{x}$ и его образа $\overline{y} = f_1(\overline{x})$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} y_1 = 3x_2 - 2x_3, \\ y_2 = -3x_1 + x_3, \\ y_3 = 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

Отсюда получим $A_{f_1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Аналогично найдем $A_{f_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Чтобы найти матрицу A_h оператора $h = f_2 \circ f_1 - f_1 \circ f_2$, вычислим сначала матрицы операторов $f_2 \circ f_1$ и $f_1 \circ f_2$, используя утверждение 5:

$$A_{f_2 f_1} = A_{f_2} A_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_{f_1 f_2} = A_{f_1} A_{f_2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$A_h = A_{f_2 f_1} - A_{f_1 f_2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, явный вид оператора $h = f_2 \circ f_1 - f_1 \circ f_2$ задается соотношением $h(x_1; x_2; x_3) = (-4x_3; 2x_3; -4x_1 + 2x_2)$. •

Опр. 10. Линейный оператор $f : L \to L$ называется ***невырожденным***, если его матрица невырожденная, т. е. $\det A_f \neq 0$.

Утв. 6. Линейный оператор $f : L \to L$ является невырожденным тогда и только тогда, когда f – взаимно однозначный оператор.

Преобразование матрицы линейного оператора при изменении базиса

Пусть $\mathcal{E} = \left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\}$ – базис линейного пространства L; $\mathcal{E}' = \left\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}; ...; \overline{e_n'}\right\}$ – новый базис линейного пространства L, $T = T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$ – матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$.

Утв. 7. Если $f : L \to L$ – линейный оператор и A_f – матрица линейного оператора f в базисе $\mathcal{E}$, а A_f' – матрица линейного оператора f в базисе $\mathcal{E}'$, то

$$\boxed{A_f' = T^{-1} A_f T.}$$

Доказательство. Пусть X и Y – столбцы координат элемента $\overline{x} \in L$ и его образа $\overline{y} = f(\overline{x})$ в базисе $\mathcal{E}$, а X' и Y' – столбцы координат элементов $\overline{x}$ и $\overline{y} = f(\overline{x})$ в базисе $\mathcal{E}'$. Тогда, в силу теоремы 5 §3, $X = TX'$ и $Y = TY'$.

Если A_f – матрица линейного оператора f в базисе $\mathcal{E}$, то, согласно утверждению 4, $Y = A_f X$. Выражая X и Y через X' и Y', получим

$$TY' = A_f TX' \quad \Leftrightarrow \quad Y' = T^{-1} A_f TX',$$

откуда, в силу $Y' = A'_f X'$, получим $A'_f = T^{-1} A_f T$. ◁

Пример 7. Пусть $A_f = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица линейного оператора f в базисе $\mathcal{E} = \left\{ \overline{e_1}; \overline{e_2} \right\}$. Найдем матрицу A'_f этого линейного оператора в базисе $\mathcal{E}' = \left\{ \overline{e_1'}; \overline{e_2'} \right\}$, где $\overline{e_1'} = 2\overline{e_1} + \overline{e_2}$; $\overline{e_2'} = 6\overline{e_1} + 4\overline{e_2}$.

Решение. Согласно утверждению 7, $A'_f = T^{-1} A_f T$, где $T = T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$ – матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$.

Матрица $T = T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$ состоит из координат векторов нового базиса $\mathcal{E}'$ в старом базисе $\mathcal{E}$, записанных по столбцам, поэтому

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу T^{-1} по формуле

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T.$$

Вычислим определитель матрицы T и алгебраические дополнения к элементам этой матрицы:

$$\det T = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{11} = 4; \qquad A_{21} = -6;$$
$$A_{12} = -1; \qquad A_{22} = 2.$$

Следовательно, $T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$A'_f = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 28 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}. \bullet$$

§ 6. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Пусть $f: L \to L$ – линейный оператор, действующий в линейном пространстве L.

Опр. 1. *Ненулевой* элемент $\overline{x} \in L$ $(\overline{x} \neq \overline{0})$ называется ***собственным вектором*** линейного оператора $f: L \to L$, если существует такое число λ, что $f(\overline{x}) = \lambda \overline{x}$. Число λ называется ***собственным значением*** (***собственным числом***) линейного оператора f, соответствующим собственному вектору $\overline{x}$.

Иными словами, собственный вектор линейного оператора – это такой вектор, который при действии на него данного оператора лишь масштабируется с коэффициентом λ, а его ориентация остается неизменной.

Такое уникальное свойство собственных векторов линейных операторов используется в самых разных разделах математики и механики: при исследовании поверхностей второго порядка в геометрии, при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, при моделировании вращения твердого тела и малых колебаний механических систем, в квантовой механике и др.

Свойства собственных векторов

1. Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное значение.

2. Если $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ – два собственных вектора линейного оператора f с одним и тем же собственным значением λ, то $\overline{x_1} + \overline{x_2}$ также является собственным вектором линейного оператора f с тем же собственным значением λ, т. е.

$$\begin{matrix} f(\overline{x_1}) = \lambda \overline{x_1} \\ f(\overline{x_2}) = \lambda \overline{x_2} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad f(\overline{x_1} + \overline{x_2}) = \lambda(\overline{x_1} + \overline{x_2}).$$

3. Если $\overline{x}$ – собственный вектор линейного оператора f с собственным числом λ, то любой вектор $\alpha \overline{x}$ (α – число) является собственным вектором линейного оператора f с тем же собственным значением λ, т. е.

$$f(\overline{x}) = \lambda \overline{x} \quad \Rightarrow \quad f(\alpha \overline{x}) = \lambda(\alpha \overline{x}).$$

Замечание. Из свойств 2, 3 следует, что *множество собственных векторов данного линейного оператора f, соответствующих одному и тому же собственному числу* λ, *вместе с нулевым элементом образуют линейное подпространство линейного пространства L.*

4. Собственные векторы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_k}$ линейного оператора f, соответствующие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, линейно независимы.

Характеристический многочлен матрицы линейного оператора

Пусть $f : L \to L$ – линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве L. Зафиксируем некоторый базис $\mathcal{E}$ в пространстве L. Поскольку линейный оператор действует из L в L, логично рассматривать векторы и их образы в одном и том же базисе. Тогда матрица $A = A_f$ линейного преобразования состоит из столбцов координат образов базисных векторов в этом же базисе.

Если $\overline{x}$ – собственный вектор линейного оператора f с собственным числом λ, матрица A – матрица линейного оператора f в базисе $\mathcal{E}$, то $AX = \lambda X$, где X – столбец координат вектора $\overline{x}$ в базисе $\mathcal{E}$.

Опр. 2. Ненулевой столбец $X \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий $AX = \lambda X$ при некотором λ, называется ***собственным вектором*** матрицы A, соответствующим ***собственному значению*** λ.

Рассмотрим способ нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы A (а следовательно, и оператора f).

Преобразуем соотношение $AX = \lambda X$, определяющее собственные векторы и собственные значения матрицы, следующим образом:

$$AX = \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad AX = \lambda EX \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda E)X = O,$$

где E – единичная матрица n-го порядка, O – нулевой столбец из $\mathbb{R}^n$.

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$. Тогда последнее матричное уравнение примет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно системе линейных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \ldots, \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0. \end{cases}$$

Это однородная система линейных алгебраических уравнений. Она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда матрица этой системы вырожденная, т. е. $\det(A-\lambda E)=0$. Поэтому для нахождения собственных чисел матрицы A нужно решить уравнение $\det(A-\lambda E)=0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (1)$$

Опр. 3. Уравнение (1) называется ***характеристическим уравнением*** матрицы A, а его корни называются ***характеристическими числами***, или ***собственными значениями*** матрицы A.

Левая часть характеристического уравнения (1) представляет собой многочлен n-й степени.

Опр. 4. Многочлен n-й степени, стоящий в левой части характеристического уравнения (1), называется ***характеристическим многочленом*** матрицы A.

Характеристический многочлен имеет n корней, вообще говоря, комплексных, с учетом их кратности.

Замечание. Собственными значениями линейного оператора в *действительном* линейном пространстве являются только *действительные* корни характеристического уравнения.

Т 1. Характеристический многочлен матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Пусть A_f – матрица линейного оператора f в базисе $\mathcal{E}$; A'_f – матрица линейного оператора f в базисе $\mathcal{E}'$; $T = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ – матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$. Тогда $A'_f = T^{-1}A_f T$.

Поскольку $E = T^{-1}ET$, то

$$A'_f - \lambda E = T^{-1}A_f T - \lambda T^{-1}ET = T^{-1}(A_f - \lambda E)T.$$

Следовательно,

$$\det(A'_f - \lambda E) = \det(T^{-1}(A_f - \lambda E)T) =$$
$$= \det T^{-1}\det(A_f - \lambda E)\det T = \det(A_f - \lambda E),$$

так как $\det T^{-1} = \dfrac{1}{\det T}$. ◁

Пример 1. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Собственные значения матрицы определяются из условия $\det(A - \lambda E) = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0;$$

$$6 - 5\lambda + \lambda^2 - 2 = 0;$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Решая уравнение, получим собственные значения $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 4.$

Собственные векторы удовлетворяют условию $(A - \lambda E)X = O,$ т. е.

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, координаты собственного вектора $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, соответствующего собственному числу $\lambda_1 = 1,$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (2-1)x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + (3-1)x_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases}$$

т. е. $x_1 = -2x_2.$ Таким образом, с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Аналогично найдем собственный вектор $X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = 4,$ из системы

$$\begin{cases} (2-4)x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + (3-4)x_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $x_1 = x_2.$ Поэтому с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ответ: $\lambda_1 = 1,\ X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix};\ \lambda_2 = 4,\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$ •

Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду

Поскольку работать с диагональной матрицей всегда легче, то базис, в котором матрица оператора принимает такой вид, является предпочтительным по сравнению с другими. Этот базис состоит из собственных векторов линейного оператора.

Т 2. Матрица линейного оператора имеет диагональный вид

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

тогда и только тогда, когда каждый базисный вектор является собственным вектором этого линейного оператора.

В этом случае на главной диагонали матрицы стоят собственные числа:

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Опр. 5. Матрица A_f линейного оператора называется ***приводимой к диагональному виду***, если существует такая невырожденная матрица T (такое преобразование базиса), что матрица $B = T^{-1} A_f T$ является диагональной.

Т 3. Матрица A_f линейного оператора f приводима к диагональному виду тогда и только тогда, когда существует базис, состоящий из собственных векторов оператора f.

Замечание. Не каждый линейный оператор *n*-мерного линейного пространства имеет *n* линейно независимых собственных векторов, а следовательно, не всегда матрицу линейного оператора можно привести к диагональному виду.

Пример 2. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Собственные значения определим из условия $\det(A - \lambda E) = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(1-\lambda)^2 = 0,$$

поэтому собственные значения матрицы равны $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$

Собственные векторы удовлетворяют условию $(A - \lambda E)X = O,$ т. е., подставляя $\lambda = 1,$ для собственного вектора $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$ причем в данном случае не существует двух линейно независимых собственных векторов. •

Утв. 1. 1) Если линейный оператор $f,$ действующий в *действительном* линейном пространстве $L,$ $\dim L = n,$ имеет n различных действительных собственных значений, то существует базис пространства L из собственных векторов этого оператора, а следовательно, матрица A_f приводима к диагональному виду.

2) Если линейный оператор $f,$ действующий в *комплексном* линейном пространстве $L,$ $\dim L = n,$ имеет n различных комплексных собственных значений, то существует базис пространства L из собственных векторов этого оператора, а следовательно, матрица A_f приводима к диагональному виду.

Замечание. Это условие является достаточным, но не является необходимым условием диагонализируемости матрицы линейного оператора. Матрица линейного оператора может быть приводима к диагональному виду и в том случае, когда среди собственных значений оператора есть совпадающие либо когда имеются комплексные корни характеристического уравнения матрицы линейного оператора, действующего в вещественном линейном пространстве.

Пример 3. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. Собственные значения определим из условия $\det(A-\lambda E)=0$, т. е.

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 3 & -1\\ -3 & 5-\lambda & -1\\ -3 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0;$$

$$(-1-\lambda)((5-\lambda)(1-\lambda)+3)-3(-3+3\lambda-3)-(-9+15-3\lambda)=0;$$

$$(-1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)-3(3\lambda-6)-(6-3\lambda)=0;$$

$$-\lambda^2+6\lambda-8-\lambda^3+6\lambda^2-8\lambda-9\lambda+18-6+3\lambda=0;$$

$$-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0;$$

$$\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=0.$$

Заметим, что $\lambda_1=1$ является корнем этого уравнения. Разделим характеристический многочлен на $\lambda-1$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
\lambda^3 & -5\lambda^2 & +8\lambda & -4 & \lambda-1\\ \cline{5-5}
\lambda^3 & -\lambda^2 & & & \lambda^2-4\lambda+4\\ \cline{1-2}
 & -4\lambda^2 & +8\lambda & -4 & \\
 & -4\lambda^2 & +4\lambda & & \\ \cline{2-3}
 & & 4\lambda & -4 & \\
 & & 4\lambda & -4 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Таким образом, $(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+4)=0$, откуда получим собственные значения матрицы: $\lambda_1=1; \lambda_2=\lambda_3=2$.

Собственные векторы удовлетворяют условию $(A-\lambda E)X=O$, т. е., подставляя $\lambda=1$, для собственного вектора $X_1=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ получим

$$\begin{pmatrix} -1-1 & 3 & -1 \\ -3 & 5-1 & -1 \\ -3 & 3 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1+3x_2-x_3=0, \\ -3x_1+4x_2-x_3=0, \\ -3x_1+3x_2=0. \end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[I'=I-II]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[\substack{II'=II+3\cdot I \\ III'=III+3\cdot I}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Равносильная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1-x_2=0, \\ x_2-x_3=0, \\ 0=0, \end{cases}$$

т. е. $x_1=x_2=x_3$. Таким образом, с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda=2$. Их координаты удовлетворяют условию

$$\begin{pmatrix} -1-2 & 3 & -1 \\ -3 & 5-2 & -1 \\ -3 & 3 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1+3x_2-x_3=0, \\ -3x_1+3x_2-x_3=0, \\ -3x_1+3x_2-x_3=0, \end{cases}$$

т. е. система равносильна одному уравнению $-3x_1+3x_2-x_3=0$. Полагая $x_1=c_1, x_2=c_2$, получим $x_3=-3c_1+3c_2$. Эти формулы при $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ задают все решения системы и, соответственно, все собственные векторы, отвечающие собственному числу $\lambda=2$.

При $c_1 = 1, c_2 = 0$ получим собственный вектор $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; при $c_1 = 0, c_2 = 1$ получим собственный вектор $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Несложно видеть, что эти векторы линейно независимы.

Таким образом, собственные векторы X_1, X_2, X_3 линейно независимы, а следовательно, преобразование, задаваемое матрицей A, диагонализируемо, его матрица в базисе $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda_1 = 1,\ X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2,\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. •

§ 7. Евклидово пространство

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Евкли́д

(др.-греч. Εὐκλείδης)

(III в. до н. э.)

древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Трактат Евклида «Начала» состоит из 13 книг, Евклид включил в него многое из того, что было создано его предшественниками, обработав этот материал и сведя его воедино. «Начала» Евклида оставались основным учебником по математике в течение более чем двух тысячелетий.

Евклид жил во времена царя Птолемея I, который покровительствовал наукам. Одна из легенд рассказывает, что, решив изучить геометрию, Птолемей спросил Евклида, нет ли более короткого пути изучения, чем «Начала», на что Евклид ответил: «К геометрии нет царской дороги».

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Опр. 1. ***Евклидовым пространством*** называется *действительное* линейное пространство L, в котором определена операция скалярного умножения элементов: каждой паре элементов $\overline{x}, \overline{y} \in L$ ставится в соответствие *действительное* число $(\overline{x}, \overline{y})$, которое называется ***скалярным произведением*** элементов $\overline{x}$ и $\overline{y}$, причем эта операция удовлетворяет следующим 4 аксиомам: для любых $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in L$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x})$;
2) $(\overline{x} + \overline{y}, \overline{z}) = (\overline{x}, \overline{z}) + (\overline{y}, \overline{z})$;
3) $(\alpha\overline{x}, \overline{z}) = \alpha(\overline{x}, \overline{z})$;
4) $(\overline{x}, \overline{x}) \geq 0$, причем $(\overline{x}, \overline{x}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$.

Пример 1. Евклидовым пространством является множество $\mathcal{V}_3$ свободных векторов в пространстве (или множество $\mathcal{V}_2$ свободных векторов на плоскости) с обычным определением скалярного произведения. •

Пример 2. Евклидовым пространством является пространство $\mathbb{R}^n$, в котором скалярное произведение элементов задается формулой

$$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

где $\overline{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $\overline{y} = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$.

Можно показать, что в этом случае все 4 аксиомы скалярного произведения, указанные в определении 1, выполняются.•

Замечание. В матричной форме записи скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^n$ находится по формуле $(\overline{x}, \overline{y}) = X^TY$, где X, Y – столбцы координат элементов $\overline{x}, \overline{y}$ соответственно.

Упражнение 1. Показать, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ (которое можно трактовать как множество векторов на плоскости) операция

$$\overline{x} \circ \overline{y} = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$$

удовлетворяет всем четырем аксиомам скалярного произведения.

Опр. 2. Векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ евклидова пространства называются ***ортогональными***, если $(\overline{x}, \overline{y}) = 0.$

Замечание. Считается, что нулевой вектор ортогонален любому вектору.

Т 1. Если ненулевые векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_k}$ попарно ортогональны, то они линейно независимы.

Доказательство. Докажем теорему *методом от противного*. Допустим, векторы линейно зависимы. Тогда существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные 0, что

$$\alpha_1\overline{e_1} + \alpha_2\overline{e_2} + ... + \alpha_k\overline{e_k} = \overline{0}.$$

Умножив это равенство скалярно на $\overline{e_1}$, получим

$$(\overline{e_1}, \alpha_1\overline{e_1} + \alpha_2\overline{e_2} + ... + \alpha_k\overline{e_k}) = (\overline{e_1}, \overline{0}) = 0.$$

С другой стороны, в силу свойств скалярного произведения и ортогональности векторов,

$$(\overline{e_1}, \alpha_1\overline{e_1} + \alpha_2\overline{e_2} + ... + \alpha_n\overline{e_n}) = \alpha_1(\overline{e_1}, \overline{e_1}) + \alpha_2(\overline{e_1}, \overline{e_2}) + ... + \alpha_k(\overline{e_1}, \overline{e_k}) =$$
$$= \alpha_1(\overline{e_1}, \overline{e_1}) + 0 + ... + 0 = \alpha_1(\overline{e_1}, \overline{e_1}),$$

откуда $\alpha_1(\overline{e_1}, \overline{e_1}) = 0,$ а значит, $\alpha_1 = 0.$

Аналогично доказывается, что $\alpha_2 = 0; ...; \alpha_k = 0.$

Таким образом, предположив, что векторы линейно зависимы, пришли к противоречию. Значит, векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_k}$ линейно независимы. ◁

Опр. 3. ***Нормой*** вектора $\overline{x}$ евклидова пространства называется *положительное* число $\|\overline{x}\| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})}.$

Пример 1 (продолжение). Для обычных векторов в трехмерном пространстве норма совпадает с длиной вектора. •

Свойства нормы вектора.

1. $\|\overline{x}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x} = \overline{0}.$

2. $\|\alpha\overline{x}\| = |\alpha| \, \|\overline{x}\|$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}.$

3. $(\overline{x}, \overline{y}) \le \|\overline{x}\| \|\overline{y}\|$ (***неравенство Коши – Буняковского***).

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Виктор Яковлевич Буняко́вский

(1804–1889)

русский математик, педагог, историк математики, вице-президент академии наук в 1864–1889 гг. Был почетным членом всех русских университетов: Московского, Санкт-Петербургского, Казанского, Харьковского, Киевского, Новороссийского, многих иностранных и русских ученых обществ.

Начало всемирной известности Буняковского положил появившийся в 1846 г. обширный трактат «Основания математической теории вероятностей», в котором впервые было сведено вместе все, что было выработано по этой теории трудами известных математиков, начиная с Паскаля и Ферма, даны объяснения новых решений самых трудных и запутанных вопросов, указано много практических приложений теории вероятностей, а также приведена история возникновения и развития теории вероятностей.

Все работы Буняковского, ставящие его в число величайших европейских математиков, помимо ценности в научном отношении – по богатству, новизне и оригинальной разработке научно-математических материалов, – отличаются замечательной ясностью и изяществом изложения. Многие из них переведены на иностранные языки.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Доказательство. Рассмотрим вектор $\overline{x}+t\overline{y}$, где t – произвольное действительное число. В силу аксиомы 4, скалярное произведение

$$(\overline{x}+t\overline{y}, \overline{x}+t\overline{y}) \geq 0.$$

Пользуясь аксиомами, перепишем это скалярное произведение в виде

$$(\overline{x}+t\overline{y}, \overline{x}+t\overline{y}) = (\overline{x}, \overline{x}) + 2t(\overline{x}, \overline{y}) + t^2(\overline{y}, \overline{y}).$$

Таким образом, относительно переменной t получили квадратичное неравенство

$$t^2(\overline{y}, \overline{y}) + 2t(\overline{x}, \overline{y}) + (\overline{x}, \overline{x}) \geq 0,$$

$$t^2\left\|\overline{y}\right\|^2+2t(\overline{x},\overline{y})+\left\|\overline{x}\right\|^2\geq 0,$$

которое имеет место при любом t. Это означает, что дискриминант квадратного трехчлена меньше или равен нулю, т. е.

$$D=4(\overline{x},\overline{y})^2-4\left\|\overline{y}\right\|^2\left\|\overline{x}\right\|^2\leq 0,$$

откуда получаем доказываемое неравенство. ◁

4. $\left\|\overline{x}+\overline{y}\right\|\leq\left\|\overline{x}\right\|+\left\|\overline{y}\right\|$ (***неравенство треугольника***).

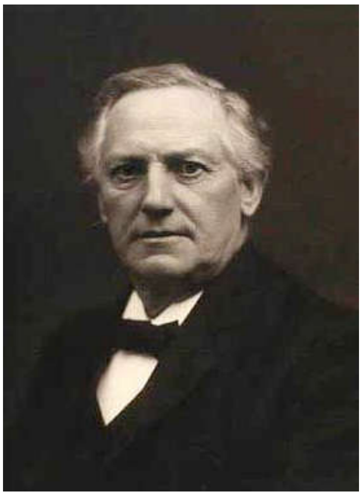
Опр. 4. Если $\left\|\overline{x}\right\|=1$, то вектор $\overline{x}$ называется ***нормированным***.

Опр. 5. Система векторов $\overline{e_1},\overline{e_2},...,\overline{e_n}$ называется ***ортонормированной***, если все ее векторы нормированы и попарно ортогональны.

Т 2. Во всяком конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Процесс ортогонализации Грама – Шмидта

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W



Йёрген Педерсен Грам
(дат. *Jørgen Pedersen Gram*)
(1850–1916)

датский математик. Основные направления исследований – математическая статистика, теория чисел, линейная алгебра.
Работал математиком в страховом обществе; был председателем датского страхового совета. Наряду с прикладными статистическими исследованиями внес заметный вклад в фундаментальную математику.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Эрхард Шмидт
(нем. *Erhard Schmidt*)
(1876–1959)
немецкий математик, с 1917 г. профессор Берлинского университета. В 1946–58 гг. первый директор Института математики АН ГДР. Основные труды по теории функций, интегральным уравнениям, функциональному анализу.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Процесс ортогонализации Грама – Шмидта используется для построения в евклидовом пространстве ортонормированного базиса на основании произвольного базиса этого пространства.

Пусть $\mathcal{F}=\left\{\overline{f_1};\overline{f_2};...;\overline{f_n}\right\}$ – исходный базис n-мерного евклидова пространства. Ортонормированный базис $\mathcal{E}=\left\{\overline{e_1};\overline{e_2};...;\overline{e_n}\right\}$ получается с помощью следующей процедуры:

1) $\overline{e_1}=\dfrac{\overline{f_1}}{\left\|\overline{f_1}\right\|}$;

2) $\overline{g_2}=\overline{f_2}-(\overline{f_2},\overline{e_1})\overline{e_1}$; $\overline{e_2}=\dfrac{\overline{g_2}}{\left\|\overline{g_2}\right\|}$;

3) $\overline{g_3}=\overline{f_3}-(\overline{f_3},\overline{e_1})\overline{e_1}-(\overline{f_3},\overline{e_2})\overline{e_2}$; $\overline{e_3}=\dfrac{\overline{g_3}}{\left\|\overline{g_3}\right\|}$;

…;

n) $\overline{g_n}=\overline{f_n}-(\overline{f_n},\overline{e_1})\overline{e_1}-(\overline{f_n},\overline{e_2})\overline{e_2}-...-(\overline{f_n},\overline{e_{n-1}})\overline{e_{n-1}}$; $\overline{e_n}=\dfrac{\overline{g_n}}{\left\|\overline{g_n}\right\|}$.

Пример 3. В евклидовом пространстве $\mathcal{V}_3$ трехмерных векторов применим процесс ортогонализации Грама – Шмидта к базису $\overline{f_1}=\{1;-2;2\}$; $\overline{f_2}=\{-1;0;-1\}$; $\overline{f_3}=\{5;-3;-7\}$.

Решение. 1. Найдем норму вектора $\overline{f_1}$ и вектор $\overline{e_1} = \dfrac{\overline{f_1}}{\left\|\overline{f_1}\right\|}$:

$$\left\|\overline{f_1}\right\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3; \qquad \overline{e_1} = \left\{\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}.$$

2. Чтобы найти вектор $\overline{g_2} = \overline{f_2} - (\overline{f_2}, \overline{e_1})\overline{e_1}$, спроектируем вектор $\overline{f_2}$ на вектор $\overline{e_1}$ и отнимем полученную проекцию от $\overline{f_2}$.

Поскольку $(\overline{f_2}, \overline{e_1}) = -\dfrac{1}{3} + 0 - \dfrac{2}{3} = -1$, то

$$\overline{g_2} = \overline{f_2} + \overline{e_1} = \left\{-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right\}; \left\|\overline{g_2}\right\| = 1; \overline{e_2} = \frac{\overline{g_2}}{\left\|\overline{g_2}\right\|} = \left\{-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right\}.$$

3. Вектор $\overline{g_3} = \overline{f_3} - (\overline{f_3}, \overline{e_1})\overline{e_1} - (\overline{f_3}, \overline{e_2})\overline{e_2}$ равен разности вектора $\overline{f_3}$ и векторов, полученных при его проектировании на $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$.

Вычисляя $(\overline{f_3}, \overline{e_1}) = \dfrac{5}{3} + \dfrac{6}{3} - \dfrac{14}{3} = -1$; $(\overline{f_3}, \overline{e_2}) = -\dfrac{10}{3} + \dfrac{6}{3} + \dfrac{7}{3} = 1$, имеем

$$\overline{g_3} = \overline{f_3} + \overline{e_1} - \overline{e_2} = \left\{5 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}; -3 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}; -7 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right\} = \{6; -3; -6\};$$

$$\left\|\overline{g_3}\right\| = \sqrt{36 + 9 + 36} = 9; \overline{e_3} = \frac{\overline{g_3}}{\left\|\overline{g_3}\right\|} = \left\{\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right\}.$$

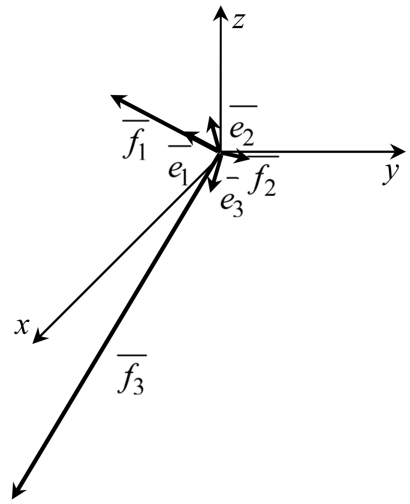


Рис. 2. Построение ортонормированного базиса

Таким образом, векторы $\overline{e_1} = \left\{\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$; $\overline{e_2} = \left\{-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right\}$; $\overline{e_3} = \left\{\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right\}$ образуют ортонормированный базис в пространстве. •

Координаты вектора евклидова пространства в ортонормированном базисе

Пусть $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}\}$ – *ортонормированный базис* в n-мерном евклидовом пространстве, $\overline{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – координаты вектора $\overline{x}$ в этом базисе, т. е.

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}.$$

Умножая обе части равенства скалярно на $\overline{e_1}$, получим

$$(\overline{x}, \overline{e_1}) = x_1(\overline{e_1}, \overline{e_1}) + x_2(\overline{e_2}, \overline{e_1}) + ... + x_n(\overline{e_n}, \overline{e_1}) =$$

$$= x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + ... + x_n \cdot 0 = x_1.$$

Аналогично, $(\overline{x}, \overline{e_2}) = x_2; ...; (\overline{x}, \overline{e_n}) = x_n$.

Таким образом, *координаты вектора в ортонормированном базисе равны скалярным произведениям вектора на базисные векторы.*

Выражение скалярного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе

Пусть даны $\overline{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $\overline{y} = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ – координаты векторов $\overline{x}, \overline{y}$ в *ортонормированном базисе* $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}\}$. Тогда

$$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n.$$

Замечание 1. В матричном виде $(\overline{x}, \overline{y}) = X^T Y$, где X, Y – столбцы координат элементов $\overline{x}, \overline{y}$ соответственно.

Замечание 2. В произвольном базисе $\{\overline{f_1}, \overline{f_2}, ..., \overline{f_n}\}$ эти формулы имеют более сложный вид. Если $\overline{x} = x_1 \overline{f_1} + x_2 \overline{f_2} + ... + x_n \overline{f_n}$, $\overline{y} = y_1 \overline{f_1} + y_2 \overline{f_2} + ... + y_n \overline{f_n}$, то

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\overline{f_i}, \overline{f_j}).$$

Комплексное евклидово пространство

Опр. 6. ***Комплексным евклидовым*** (или ***унитарным***) ***пространством*** называется *комплексное* линейное пространство L, в котором определена операция скалярного умножения элементов: каждой паре элементов $\overline{x}, \overline{y} \in L$ ставится в соответствие *комплексное* число $(\overline{x}, \overline{y})$, которое называется ***скалярным произведением*** элементов $\overline{x}$ и $\overline{y}$, причем эта операция удовлетворяет следующим 4 аксиомам: для любых $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in L$ и любого $\alpha \in \mathbb{C}$

1) $(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{(\overline{y}, \overline{x})}$;
2) $(\overline{x} + \overline{y}, \overline{z}) = (\overline{x}, \overline{z}) + (\overline{y}, \overline{z})$;
3) $(\alpha \overline{x}, \overline{z}) = \alpha (\overline{x}, \overline{z})$;
4) $(\overline{x}, \overline{x}) \geq 0$, причем $(\overline{x}, \overline{x}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$.

Замечание. $(\overline{x}, \overline{x}) \in \mathbb{R}$.

Все определения и результаты, сформулированные для евклидова пространства, остаются справедливыми и для комплексного евклидова пространства.

§ 8. Ортогональные и самосопряженные (симметрические) операторы в евклидовом пространстве

Ортогональные операторы

Пусть L – евклидово пространство.

Опр. 1. Линейный оператор $f: L \to L$ называется ***ортогональным***, если он сохраняет скалярное произведение элементов евклидова пространства L, т. е. если для любых $\overline{x}, \overline{y} \in L$ выполняется равенство

$$(f(\overline{x}), f(\overline{y})) = (\overline{x}, \overline{y}).$$

Из определения легко следует, что ортогональный оператор сохраняет норму элементов евклидова пространства, поскольку

$$\left\| f(\overline{x}) \right\| = \sqrt{(f(\overline{x}), f(\overline{x}))} = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})} = \left\| \overline{x} \right\|.$$

Верно и обратное, поэтому имеет место следующее утверждение.

Утв. 1. Линейный оператор $f: L \to L$ является ортогональным тогда и только тогда, когда он сохраняет норму элементов евклидова пространства L, т. е. если для любых $\overline{x} \in L$ выполняется равенство $\left\| f(\overline{x}) \right\| = \left\| \overline{x} \right\|$.

Доказательство. Докажем, что если линейный оператор $f: L \to L$ сохраняет норму, то он является ортогональным оператором. Пусть $\overline{x}, \overline{y} \in L$. В силу определения нормы и свойств скалярного произведения в евклидовом пространстве,

$$\left\| \overline{x} + \overline{y} \right\|^2 = (\overline{x} + \overline{y}, \overline{x} + \overline{y}) = (\overline{x}, \overline{x}) + 2(\overline{x}, \overline{y}) + (\overline{y}, \overline{y}) = \left\| \overline{x} \right\|^2 + 2(\overline{x}, \overline{y}) + \left\| \overline{y} \right\|^2,$$

откуда

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{2}\left(\left\| \overline{x} + \overline{y} \right\|^2 - \left\| \overline{x} \right\|^2 - \left\| \overline{y} \right\|^2 \right).$$

Следовательно, если оператор f сохраняет норму элементов евклидова пространства L, т. е. $\|f(\overline{x})\| = \|\overline{x}\|$, $\|f(\overline{y})\| = \|\overline{y}\|$, $\|f(\overline{x}+\overline{y})\| = \|\overline{x}+\overline{y}\|$, то $(f(\overline{x}), f(\overline{y})) = (\overline{x}, \overline{y})$. ◁

Утверждение 1 позволяет привести примеры ортогональных операторов.

Пример 1. В пространствах $\mathcal{V}_2$ и $\mathcal{V}_3$ (в евклидовых пространствах свободных векторов на плоскости и в пространстве) ортогональными являются линейные операторы, сохраняющие расстояние.

Например, ортогональными являются: оператор поворота вектора на фиксированный угол; оператор симметрии относительно прямой на плоскости или относительно плоскости в пространстве.•

Кроме того, ортогональный оператор сохраняет ортогональность элементов евклидова пространства, поскольку если $(\overline{x}, \overline{y}) = 0$, то $(f(\overline{x}), f(\overline{y})) = 0$.

Таким образом, ортогональный оператор переводит любой *ортонормированный базис* евклидова пространства L в *ортонормированный базис* этого пространства. Верно и обратное утверждение.

Т 1. Линейный оператор $f: L \to L$, действующий в евклидовом пространстве, является ортогональным тогда и только тогда, когда он переводит ортонормированный базис евклидова пространства L в ортонормированный базис этого пространства.

Доказательство. Докажем, что если $\mathcal{E} = \left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\}$ – ортонормированный базис евклидова пространства L и линейный оператор f переводит его в ортонормированный базис $\mathcal{E}' = \left\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}; ...; \overline{e_n'}\right\}$, где $\overline{e_1'} = f(\overline{e_1}); \overline{e_2'} = f(\overline{e_2}); ...; \overline{e_n'} = f(\overline{e_n})$, то оператор f – ортогональный, т. е. для любых $\overline{x}, \overline{y} \in L$ выполняется равенство $(f(\overline{x}), f(\overline{y})) = (\overline{x}, \overline{y})$.

Напомним, что если даны координаты векторов $\overline{x}, \overline{y}$ в ортонормированном базисе $\mathcal{E}$: $\overline{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $\overline{y} = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$, т. е. $\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}$ и $\overline{y} = y_1\overline{e_1} + y_2\overline{e_2} + ... + y_n\overline{e_n}$, то

$$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

В силу линейности оператора f получим

$$f(\overline{x}) = x_1 f(\overline{e_1}) + x_2 f(\overline{e_2}) + \ldots + x_n f(\overline{e_n}) = x_1 \overline{e_1'} + x_2 \overline{e_2'} + \ldots + x_n \overline{e_n'};$$

$$f(\overline{y}) = y_1 f(\overline{e_1}) + y_2 f(\overline{e_2}) + \ldots + y_n f(\overline{e_n}) = y_1 \overline{e_1'} + y_2 \overline{e_2'} + \ldots + y_n \overline{e_n'},$$

т. е. координаты образов элементов $\overline{x}, \overline{y}$ в базисе $\mathcal{E}'$ совпадают с координатами исходных элементов $\overline{x}, \overline{y}$ в базисе $\mathcal{E}$. А значит,

$$(f(\overline{x}), f(\overline{y})) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = (\overline{x}, \overline{y}),$$

что означает, что оператор f является ортогональным. ◁

Пусть A_f – матрица ортогонального оператора f в ортонормированном базисе $\mathcal{E}$. Напомним, что если X, Y – столбцы координат элементов $\overline{x}, \overline{y}$ соответственно в ортонормированном базисе $\mathcal{E}$, то $(\overline{x}, \overline{y}) = X^T Y$. Тогда

$$(f(\overline{x}), f(\overline{y})) = (A_f X)^T A_f Y = X^T A_f^T A_f Y.$$

Поскольку для ортогонального оператора f равенство $(f(\overline{x}), f(\overline{y})) = (\overline{x}, \overline{y})$ выполняется для любых $\overline{x}, \overline{y} \in L$, то $A_f^T A_f = E$.

Опр. 2. Матрица A называется ***ортогональной***, если $A^T A = E$.

Свойства ортогональных матриц.

1. Если A – ортогональная матрица, то $A^{-1} = A^T$.

2. Если A – ортогональная матрица, то $\det A = \pm 1$.

Пример 2. Примерами ортогональных матриц являются:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \bullet$$

Т 2. Линейный оператор f является ортогональным тогда и только тогда, когда его матрица в любом ортонормированном базисе является ортогональной.

Следствие. Если $T = T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$ – матрица перехода от одного *ортонормированного* базиса к другому *ортонормированному* базису, то она является ортогональной матрицей.

Самосопряженные (симметрические) операторы

Опр. 3. Линейный оператор $f: L \to L$ называется ***самосопряженным (симметрическим)***, если для любых $\overline{x}, \overline{y} \in L$

$$(f(\overline{x}), \overline{y}) = (\overline{x}, f(\overline{y})).$$

Упражнение 1. Проверить, что в пространстве $\mathcal{V}_3$ являются симметрическими:

1) $f(\overline{x}) = \lambda \overline{x}$ (где $\lambda \in \mathbb{R}$ – фиксированное число) – оператор растяжения в λ раз;

2) $f(\overline{x}) = (\overline{x}, \overline{e})\overline{e}$ (где $\overline{e}, \left\|\overline{e}\right\| = 1,$ – фиксированный вектор) – оператор проектирования на направление вектора $\overline{e}$. •

Опр. 4. Матрица A называется ***симметрической***, если $A^T = A$, т. е. она симметрична относительно главной диагонали.

Т 3. Линейный оператор f является самосопряженным (симметрическим) тогда и только тогда, когда в любом *ортонормированном* базисе его матрица является симметрической.

Утв. 2. Все собственные значения *симметрической* матрицы с действительными элементами являются действительными числами.

Утв. 3. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Т 4. Если f – самосопряженный линейный оператор в евклидовом пространстве L, то в евклидовом пространстве L существует ортонормированный базис из собственных векторов линейного оператора f.

Следствие. Матрица A_f самосопряженного линейного оператора в евклидовом пространстве приводима к диагональному виду.

§ 9. Квадратичные формы

Опр. 1. ***Квадратичной формой от*** n ***действительных переменных*** $x_1, x_2, ..., x_n$ называется сумма вида

$$q(x_1; x_2; ...; x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

т. е.

$$q(x_1; x_2; ...; x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n +$$

$$+a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_2x_n + ... + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + ... + a_{nn}x_n^2, \quad (1)$$

где коэффициенты a_{ij} квадратичной формы – некоторые действительные числа, причем $a_{ij} = a_{ji}$.

Таким образом, квадратичная форма может быть также записана в виде

$$q(x_1; x_2; ...; x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 +$$
$$+2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + ... + 2a_{n-1;\, n}x_{n-1}x_n.$$

Заметим, что к изучению квадратичных форм от двух и трех переменных приводит задача об определении формы кривых и поверхностей 2-го порядка. Первоначально теория квадратичных форм возникла именно из этих задач, но впоследствии нашла многочисленные применения в математике и ее приложениях.

Опр. 2. ***Матрицей квадратичной формы*** называется матрица, составленная из ее коэффициентов, а именно, квадратичной форме (1) соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что эта матрица является симметрической, так как $a_{ij} = a_{ji}$.

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие: каждой квадратичной форме соответствует симметрическая матрица.

В матричном виде квадратичная форма (1) может быть записана как

$$q(X) = X^T AX, \text{ где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Пусть X – столбец координат вектора $\overline{x}$ в некотором *ортонормированном* базисе $\mathcal{E}$, $f: L \to L$ – линейный (самосопряженный) оператор, действующий в евклидовом пространстве L и имеющий в базисе $\mathcal{E}$ матрицу A, тогда запись (1) равносильна

$$q(\overline{x}) = (\overline{x}, f(\overline{x})),$$

т. е. значение квадратичной формы на векторе $\overline{x}$ равно скалярному произведению вектора $\overline{x}$ и его образа при отображении f.

Пусть $T = T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$ – матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$, X и X' – столбцы координат вектора $\overline{x}$ в базисах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ соответственно, тогда, в силу теоремы 5 §3, $X = TX'$, а следовательно, в новых переменных квадратичная форма будет иметь вид

$$q(X) = X^T AX = (TX')^T A(TX') = (X')^T T^T ATX' = q_1(X'),$$

т. е. в новых переменных получается квадратичная форма с матрицей

$$A' = T^T AT.$$

Заметим, что поскольку T – матрица перехода от базиса к базису, то это матрица невырожденного линейного преобразования, а значит $\det T \neq 0$.

Более того, если T – матрица перехода от одного *ортонормированного* базиса к другому *ортонормированному* базису, то она является ортогональной матрицей, а значит, $T^{-1} = T^T$ и

$$A' = T^{-1} AT.$$

Таким образом, *матрица квадратичной формы при переходе от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису преобразуется как матрица линейного самосопряженного оператора.*

Как следует из теоремы 4 §8, матрицу линейного самосопряженного оператора, а значит, и матрицу A квадратичной формы можно привести к диагональному виду

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы A.

Таким образом, любую квадратичную форму можно привести к виду

$$q_1(x_1'; x_2'; \ldots; x_n') = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + \ldots + \lambda_n (x_n')^2. \qquad (2)$$

Опр. 3. Если квадратичная форма записана в виде (2), то говорят, что она приведена к ***каноническому виду***.

Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду

Чтобы определить преобразование переменных, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, нужно выполнить следующие действия.

1. Записать матрицу квадратичной формы и найти собственные значения этой матрицы.

2. Найти собственные векторы матрицы квадратичной формы и нормировать их.

Опр. 4. Направления собственных векторов называются ***главными направлениями*** квадратичной формы.

Замечание. Если среди собственных значений матрицы есть совпадающие, необходимо выбирать соответствующие собственные векторы так, чтобы они были *ортонормированы*.

3. Записать матрицу T, составив ее из полученных нормированных векторов-столбцов.

4. Записать искомое преобразование переменных по формуле $X = TX'$.

Пример 1. Определим преобразование координат, приводящее квадратичную форму

$$q(x_1; x_2) = 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2$$

к каноническому виду; запишем канонический вид квадратичной формы.

Решение. 1. Запишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы из условия $\det(A - \lambda E) = 0,$ т. е.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(3-\lambda)^2 - 25 = 0;$$

$$9 - 6\lambda + \lambda^2 - 25 = 0;$$

$$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0.$$

Решая уравнение, получим собственные значения $\lambda_1 = 8; \lambda_2 = -2.$

2. Найдем собственные векторы из условия $(A - \lambda E)X = O,$ т. е.

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, координаты собственного вектора $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$ соответствующего собственному числу $\lambda_1 = 8,$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (3-8)x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 + (3-8)x_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -5x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 = 0, \end{cases}$$

т. е. $x_1 = x_2.$ Таким образом, с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$ Норма этого вектора равна

$\|X_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, поэтому нормированный собственный вектор найдем как $\overline{e_1} = \dfrac{X_1}{\|X_1\|} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Аналогично найдем собственный вектор $X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = -2$, из системы

$$\begin{cases} (3+2)x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 + (3+2)x_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $x_1 = -x_2$. Поэтому с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Вычисляя норму этого вектора $\|X_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, получим нормированный собственный вектор $\overline{e_2} = \dfrac{X_2}{\|X_2\|} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

3. Матрица перехода к новому ортонормированному базису будет иметь вид

$$T = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

4. Связь между новыми и старыми координатами задается формулой $X = TX'$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ – столбцы координат старом и новом базисах соответственно, откуда получим преобразование координат, приводящее квадратичную форму к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2', \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2', \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}, \\ x_2 = \dfrac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

5. Подставим полученные формулы в исходную квадратичную форму и приведем ее к каноническому виду:

$$q(x_1; x_2) = 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2;$$

$$q_1(x_1'; x_2') = 3\left(\frac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 10\frac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}\frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}} + 3\left(\frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= 3\frac{(x_1')^2 - 2x_1'x_2' + (x_2')^2}{2} + 10\frac{(x_1')^2 - (x_2')^2}{2} + 3\frac{(x_1')^2 + 2x_1'x_2' + (x_2')^2}{2} =$$

$$= 3(x_1')^2 + 3(x_2')^2 + 5(x_1')^2 - 5(x_2')^2 = 8(x_1')^2 - 2(x_2')^2.$$

Заметим, что для записи канонического вида квадратичной формы достаточно знать собственные значения матрицы квадратичной формы:

$$q_1(x_1'; x_2') = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 = 8(x_1')^2 - 2(x_2')^2. \bullet$$

Пример 2. Построим линию, которую задает уравнение

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 = -8.$$

Решение. Из примера 1 следует, что заданное уравнение равносильно уравнению

$$8(x_1')^2 - 2(x_2')^2 = -8,$$

где x_1', x_2' – координаты точки в базисе

$$\overline{e_1} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}; \quad \overline{e_2} = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Разделив обе части уравнения на -8, получим

$$-\frac{(x_1')^2}{1}+\frac{(x_2')^2}{4}=1.$$

Это уравнение гиперболы с полуосями $a=1, b=2,$ действительной осью которой является Ox_2' (см. рис. 3).

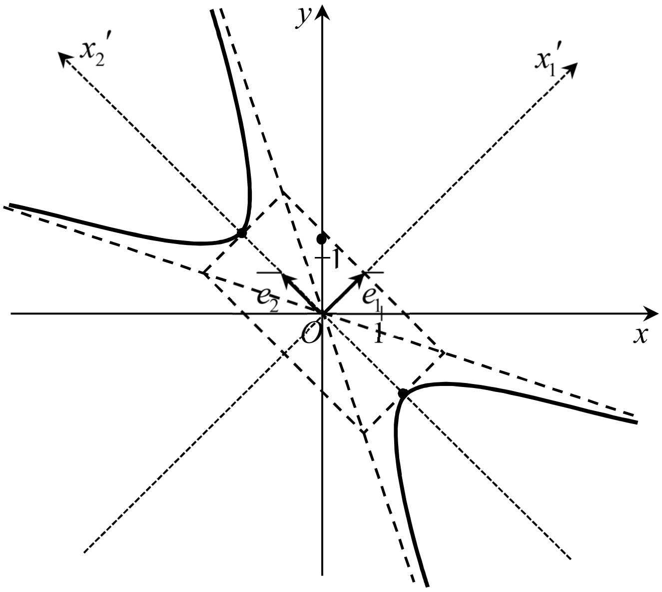


Рис. 3. Гипербола $-\frac{(x_1')^2}{1}+\frac{(x_2')^2}{4}=1$

•

Пример 3. Построим линию, которую задает уравнение

$$3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0.$$

Решение. В примере 1 показано, что квадратичная форма $3x^2+10xy+3y^2$ диагонализируется с помощью преобразования

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1'-x_2'}{\sqrt{2}}, \\ y=\dfrac{x_1'+x_2'}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

которое сводится к повороту системы координат. Поэтому заданное уравнение равносильно уравнению

$$3\left(\frac{x_1'-x_2'}{\sqrt{2}}\right)^2+10\frac{x_1'-x_2'}{\sqrt{2}}\frac{x_1'+x_2'}{\sqrt{2}}+3\left(\frac{x_1'+x_2'}{\sqrt{2}}\right)^2-$$

$$-2\frac{x_1'-x_2'}{\sqrt{2}}-14\frac{x_1'+x_2'}{\sqrt{2}}-13=0,$$

или

$$8(x_1')^2-2(x_2')^2-8\sqrt{2}x_1'-6\sqrt{2}x_2'-13=0.$$

Выделяя полный квадрат по каждой из переменных, получим

$$8((x_1')^2-\sqrt{2}x_1')-2((x_2')^2+3\sqrt{2}x_2')-13=0;$$

$$8\left((x_1')^2-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x_1'+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)-4-$$

$$-2\left((x_2')^2+2\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}x_2'+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)+9-13=0;$$

$$8\left(x_1'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\left(x_2'+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=8.$$

Введем замену переменных

$$\begin{cases} X=x_1'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ Y=x_2'+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

которая задает преобразование параллельного переноса новой системы координат $Ox_1'x_2'$. (Началом системы координат O_1XY является точка $x_1'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2'=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.)

Перейдя к новым переменным и разделив обе части уравнения на 8, получим в системе координат O_1XY каноническое уравнение кривой 2-го порядка

$$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{4} = 1,$$

а именно, уравнение гиперболы с полуосями $a = 1, b = 2,$ действительной осью которой является O_1X (см. рис. 4).

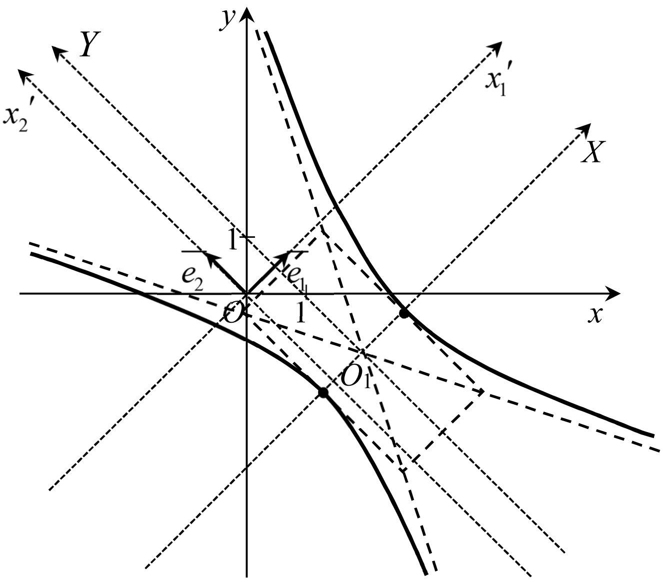


Рис. 4. Гипербола $\dfrac{X^2}{1} - \dfrac{Y^2}{4} = 1$

Запишем преобразование, с помощью которого исходное уравнение кривой 2-го порядка приводится к каноническому виду. Поскольку

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}, \\ y = \dfrac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}, \\ x_2' = \dfrac{y-x}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

то

$$\begin{cases} X = x_1' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ Y = x_2' + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{x+y-1}{\sqrt{2}}, \\ Y = \dfrac{y-x+3}{\sqrt{2}}. \end{cases} \bullet$$

Упражнение 1. Определить вид поверхности $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz = 18$.

Знакоопределенные квадратичные формы

Пусть $\overline{x} = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$.

Опр. 5. Квадратичная форма $q(\overline{x})$ называется:

- ***положительно определенной***, если $q(\overline{x}) > 0$ для всех $\overline{x} \neq \overline{0}$;

- ***отрицательно определенной***, если $q(\overline{x}) < 0$ для всех $\overline{x} \neq \overline{0}$;

- ***положительно полуопределенной***, если $q(\overline{x}) \geq 0$ для всех $\overline{x} \neq \overline{0}$;

- ***отрицательно полуопределенной***, если $q(\overline{x}) \leq 0$ для всех $\overline{x} \neq \overline{0}$;

- ***знаконеопределенной***, если существуют такие $\overline{x}$ и $\overline{y}$ что $q(\overline{x}) > 0$ и $q(\overline{y}) < 0$.

Замечание. Несложно видеть, что знакоопределенность квадратичной формы фактически означает постоянство знаков собственных значений ее матрицы.

Если квадратичная форма	то собственные значения ее матрицы
положительно определена,	все положительны;

отрицательно определена,	все отрицательны;
положительно полуопределена,	все неотрицательны;
отрицательно полуопределена,	все неположительны.

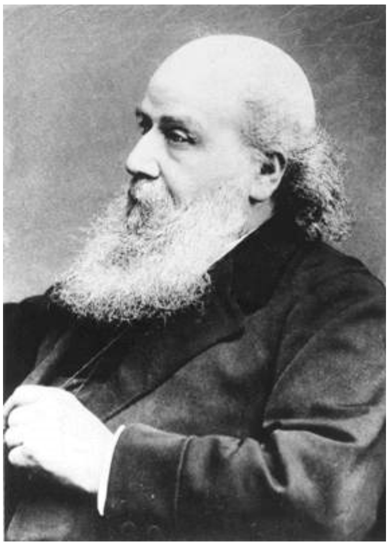
Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы $q(\overline{x})$.

Опр. 6. ***Главными минорами квадратичной формы*** $q(\overline{x})$ называются миноры матрицы A, стоящие в левом верхнем углу:

$$\Delta_1 = a_{11};\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix};\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};\quad \dots;\quad \Delta_n = \det A.$$

По знакам главных миноров квадратичной формы можно легко проверить знакоопределенность квадратичной формы с помощью критерия Сильвестра.

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W



Джеймс Джóзеф Сильвéстр
(англ. *James Joseph* Sylvester)
(1814–1897)
известный английский математик.
Известен своими работами в теории матриц, теории чисел и комбинаторике.
В 1878 г. он основал «Американский математический журнал» (*American Journal of Mathematics*) – второй в то время в США.
Лондонское королевское общество учредило бронзовую Медаль Сильвестра, которая вручается с 1901 г. за выдающиеся заслуги в математике.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Т 1 [критерий Сильвестра]. 1) Квадратичная форма $q(\overline{x})$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны;

2) квадратичная форма $q(\overline{x})$ является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда ее главные миноры нечетного порядка отрицательны, а четного – положительны.

Пример 4. Проверим знакоопределенность квадратичной формы

$$q(x; y; z) = 6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz.$$

Решение. Запишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ее главные миноры и определим их знаки:

$$\Delta_1 = 6 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 4 = 26 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 210 + 0 + 0 - 20 - 28 - 0 = 162 > 0.$$

Итак, все главные миноры квадратичной формы положительны. Следовательно, в силу критерия Сильвестра делаем вывод, что квадратичная форма $q(x; y; z)$ положительно определена, т. е. $q(x; y; z) > 0,$ если значение хотя бы одной из переменных x, y, z не равно 0.•

Замечание. Из примера 4 следует, что все собственные числа матрицы данной квадратичной формы строго положительны, а значит уравнение поверхности $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz = 18$ (см. упражнение 1) приводится к виду $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = 18,$ где все коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ строго положительны, а значит, это уравнение задает в пространстве эллипсоид.