Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом

Пусть требуется найти решение *y(t)* задачи Коши для ЛДУ *n* порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{/}(t) + a_0 y(t) = f(t) \\ y(0) = y^{/}(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

Будем предполагать, что искомая функция *y(t)*, ее производные, а также функция *f(t)* являются оригиналами. Обозначим изображения для *y(t)* и *f(t)* через *Y(p) и F(p)* соответственно. Тогда по свойству дифференцирования оригинала, с учетом нулевых начальных условий, имеем

$$y^{/}(t) \doteqdot pY(p), y^{//}(t) \doteqdot p^2 Y(p), \dots, y^{(n)}(t) = p^n Y(p)$$

и, применяя преобразование Лапласа к ЛДУ, получаем

$$a_n p^n Y(p) + a_{n-1} p^{n-1} Y(p) + \cdots + a_1 p Y(p) + a_0 Y(p) = F(p)$$

Это уравнение является операторным уравнением для поставленной задачи Коши. Оно является алгебраическим уравнением переменной *p*. Выразим из него *Y(p)* и придем к уравнению

$$Y(p) = \frac{F(P)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$

Если обозначить $A_n(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0$ (в правой части ничто иное, как характеристический многочлен исходного ДУ), то придем к уравнению

$$Y(p) = \frac{F(p)}{A_n(p)}$$

где выражение в правой части известно. Часть этого выражения $\frac{1}{A_n(p)}$ называют ***передаточной функцией или системной функцией.*** Системная функция характеризует физические особенности динамической системы, учитывая ее параметры, связи и т.п.

Если от изображения вернуться к оригиналу, то получим решение искомой задачи Коши.

Если начальные условия не являются нулевыми, то в правой части выражения для изображения искомой функции, точнее, в числителе, будут содержаться известные дополнительные слагаемые, так как изображение производных имеет другой вид. Если задана начальная задача

$$y(0) = y_0, y^{/}(0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1,}$$

то

$$y^{/}(t) \doteqdot pY(p) - y_0,$$

$$y^{//}(t) \doteqdot p^2Y(p) - py_0 - y_1$$

$$y^{///}(t) \doteqdot p^3Y(p) - p^2y_0 - py_1 - y_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и для нахождения изображения решения получаем выражение

$$Y(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A_n(p)}$$

Обращая полученное выражение, находим искомое решение задачи Коши.

Пример. Найти решение задачи Коши

$$y^{//}(t) + 2y^{/}(t) + y = te^{-t}, y(0) = 1, y^{/}(0) = 2$$

Пусть $y(t) \doteqdot Y(p)$. Тогда

$$y^{/}(t) \doteqdot pY(p) - y_0 = pY(p) - 1$$

$$y^{//}(t) \doteqdot p^2Y(p) - py_0 - y_1 = p^2Y(p) - p - 2$$

$$te^{-t} \doteqdot \frac{1}{(p+1)^2}$$

И операторное уравнение имеет вид

$$Y(p)(p^2 + 2p + 1) - 2 - p - 2 = \frac{1}{(p+1)^2}$$

$$Y(p)(p+1)^2 - (p+4) = \frac{1}{(p+1)^2}$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p+1)^4} + \frac{(p+4)}{(p+1)^2}$$

$$Y(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{3}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^4}$$

Или обращая $y(t) = (1 + 3t + \frac{t^3}{6})e^{-t}$

Операционным методом находим решение задачи Коши для неоднородного ЛДУ с постоянными коэффициентами не находя общего решения однородного и какого-либо частного решения неоднородного уравнения. Недостатком метода является то, что начальные условия должны быть заданы в нулевой точке. Если начальные условия заданы в некоторой точке t_0, то переходом к новой переменной $\tau=t-t_0$ получаем задачу Коши с нулевыми начальными условиями относительно новой переменной τ.

Если считать $y(0)=C_0, y^{/}(0)=C_1, \cdots, y^{(n-1)}(0)=C_{n-1}$ произвольными постоянными, то решение, найденное операторным методом, будет являться общим решением исходного ДУ и из него может быть получено решение произвольной задачи Коши. Удобство операторного метода состоит еще и в том, что решение может быть получено и в случае, когда правая часть является составной функцией (задана в виде фигурной скобки, а не единого аналитического выражения).

Совершенно аналогичным образом находится решение систем ЛДУ с постоянными коэффициентами. Отличие только в том, что вместо одного операторного уравнения получаем систему таких уравнений.

Пример. Найти решение системы.

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y - 2 \end{cases} \quad \mathrm{x(o)=0,\ y(0)=2}.$$

Пусть $x(t) \div \overline{x}(p)$, а $y(t) \div \overline{y}(p)$, тогда $\mathrm{x}'(\mathrm{t}) \div p\,\overline{\mathrm{x}}(\mathrm{p})$, $y'(t) \div \overline{y}(p) - 2$, изображение системы имеет вид :

$$\begin{cases} p\overline{x}(p) = \overline{x}(p) + 2\overline{y}(p) \\ p\overline{y}(p) - 2 = 2\overline{x}(p) + y(p) - \dfrac{2}{p} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (p-1)\overline{x}(p) - 2\overline{y}(p) = 0 \\ -2\overline{x}(p) + (p-1)\overline{y}(p) = 2 - \dfrac{2}{p} \end{cases}$$

Найдём решение этой линейной системы по формулам Крамера :

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -2 \\ -2 & p-1 \end{vmatrix} = (p-1)^2 - 4,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ (2p-2)/p & p-1 \end{vmatrix} = \frac{4(p-1)}{p}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-1 & 0 \\ -2 & 2(p-1)/p \end{vmatrix} = \frac{2(p-1)^2}{p},\ \overline{x}(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4(p-1)}{p(p^2-2p-3)}$$

$$\frac{p-1}{p(p+1)(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-3}$$

$$p-1 = A(p+1)(p-3) + Bp(p-3) + Cp(p+1)$$

$$p=0 \quad : \quad -1=-3A \quad A=1/3$$

$$p=-1 \quad : \quad -2=4B \quad b=-1/2$$

$$p=3 \quad : \quad 2=12C \quad C=1/6$$

$$\bar{x}(p)=\frac{4}{3}\frac{1}{p}-2\frac{1}{p+1}+\frac{2}{3}\frac{1}{p-3}, \text{ отсюда } x(t)=\frac{4}{3}-2e^{-t}+\frac{2}{3}e^{3t}$$

$$\bar{y}(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=2\frac{(p-1)^2}{p(p^2-2p-3)}$$

$$\frac{p^2-2p+1}{p(p+1)(p-3)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p-3}$$

$$p^2-2p+1=A(p+1)(p-3)+Bp(p-3)+Cp(p+1)$$

$p=0$	:	$1=-3A$	$A=-1/3$
$p=-1$	:	$4=4B$	$B=1$
$p=3$	:	$4=12C$	$C=1/3$

$$\bar{x}(p)=-\frac{2}{3}\frac{1}{p}+2\frac{1}{p+1}+\frac{2}{3}\frac{1}{p-3}, \text{ отсюда } y(t)=-\frac{2}{3}+2e^{-t}+\frac{2}{3}e^{3t}$$