4.2 粮食加工厂用四种不同的方法储藏粮食.储藏一段时间后,分别抽样化验,得到粮食含水率如下:

储藏方法	含水率	储藏方法	含水率
Ⅰ	7.3,8.3,7.6,8.4,8.3	Ⅲ	8.1,6.4,7.0
Ⅱ	5.8,7.4,7.1	Ⅳ	7.9,9.0

设含水率均服从正态分布且方差相同,试检验这四种不同的储藏方法对粮食的含水率是否有显著影响(取 $\alpha=0.05$).

4.2 设 $X_i \sim N(u_i, \delta^2)$ 分别为 I、II、III、IV 种储藏方法粮食的含水率 $(i=1,2,3,4)$

H_0: $u_1=u_2=u_3=u_4$　　H_1: u_1, u_2, u_3, u_4 不全相等

水平	数据	m_i	T_i	T_i^2/m_i	y_{ij}^2(平方和)
1	7.3, 8.3, 7.6, 8.4, 8.3	5	39.9	318.402	319.39
2	5.8, 7.4, 7.1	3	20.3	137.3633	138.81
3	8.1, 6.4, 7.0	3	21.5	154.0833	155.51
4	7.9, 9.0	2	16.9	142.805	143.41
	总和	13	98.6	752.6537	757.18

$\overline{X_1}=\frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5}X_{1j}=7.98$　　$\overline{X_2}=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}X_{2j}=6.767$

$\overline{X_3}=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}X_{3j}=7.167$　　$\overline{X_4}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}X_{4j}=8.4$

$Q_A=\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i^2}{m_i}-\frac{T^2}{n}=752.6537-\frac{98.6^2}{13}=4.810$

$Q_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}y_{ij}^2-\frac{T^2}{n}=757.18-\frac{98.6^2}{13}=9.3369$

$QE=QT-QA=4.5263$

来源	平方和	自由度	均方	F
Q_A 组内	4.8106	3	1.6035	3.189
Q_E 组内	4.5263	9	0.5029	
Q_T 总	9.3369	12		

$F=\frac{Q_A/r-1}{Q_E/n-r}\approx 3.189$　　$F_{0.05}(3,9)=3.8625$

$F<F_{0.05}(3,9)$ 故接受原假设，认为无显著差异.

$$Q_r=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}^2-n\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}^2-\frac{1}{n}T_{\cdot\cdot}^2$$

$$Q_A=\sum_{i=1}^{r}\frac{X_{i\cdot}^2}{n_i}-n\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{r}\frac{X_{i\cdot}^2}{n_i}-\frac{1}{n}T_{\cdot\cdot}^2$$

$$Q_E=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}^2-\sum_{i=1}^{n_i}\frac{T_i^2}{n_i}$$

方差来源	平方和	自由度	均方	F值
组间(因素影响)	Q_A	r-1	S_A^2	S_A^2/S_E^2
组内(误差)	Q_E	n-r	S_E^2	
总和	Q_r	n-1		

4.6 生产某种化工产品，选择三种不同的浓度及四种不同的温度重复试验两次，产品的得率如下：

浓度%＼温度/℃	10	24	38	52
2	10,14	11,11	9,13	10,12
4	7,9	8,10	7,11	6,10
6	5,11	13,14	12,13	10,14

设得率均服从正态分布且方差相同，试检验浓度、温度以及他们的交互作用对产品的得率是否有显著影响(取显著性水平 $\alpha=0.05$).

解：设α_i为浓度第i个水平的效应$(i=1,2,3)$，β_j为温度第j个水平的效应$(j=1,2,3,4)$，γ_{ij}为浓度第i个水平和温度第j水平的交互效应$(i=1,2,3 \quad j=1,2,3,4)$。

提出假设检验：

$$H_{01}: \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$$
$$H_{02}: \beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4$$
$$H_{03}: \gamma_{ij}=0 \ (i=1,2,3 \quad j=1,2,3,4)$$

$$Q_T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} X_{ijk}^2 - -\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} X_{ijk}\right)^2$$

$$Q_A = \frac{1}{st}\sum_{i=1}^{r} X_{i..}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} X_{ijk}\right)^2$$

$$Q_B = \frac{1}{rt}\sum_{j=1}^{s} X_{.j.}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} X_{ijk}\right)^2$$

$$Q_E = Q_T - Q_A - Q_B - Q_I$$

方差来源	平方和	自由度	均方和	F值
因素A	Q_A	r-1	S_A^2	F_A
因素B	Q_B	s-1	S_B^2	F_B
交互作用I	Q_I	(r-1)(s-1)	S_I^2	F_I
误差	Q_E	rs(t-1)	S_E^2	
总和	Q_T	rst-1		

4.6

浓度 \ 温度	B_1	B_2	B_3	B_4	$X_{i..}$	$X_{i..}^2$
A_1	14, 10 (24)	11, 11 (22)	13, 9 (22)	10, 12 (22)	90	8100
A_2	9, 7 (16)	10, 8 (18)	7, 11 (18)	6, 10 (16)	68	4624
A_3	5, 11 (16)	13, 14 (27)	12, 13 (25)	14, 10 (24)	92	8464
$X_{.j.}$	56	67	65	62	250	
$X_{.j.}^2$	3136	4489	4225	3844		

$r=3$ $s=4$ $t=2$

$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2} X_{ijk}^2 = 2752$ $\quad n\bar{x}^2 = \frac{1}{24}\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2} X_{ijk}\right)^2 = 2604.1667$

$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_{ij}^2 = 5374$

$Q_T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} x_{ijk}^2 - n\bar{x}^2 = 2752 - 2604.1667 = 147.8333$

$Q_A = \frac{1}{St}\sum_{i=1}^{n} x_{i..}^2 - n\bar{x}^2 = \frac{1}{8}\times 21188 - 2604.1667 = 44.333$

$Q_B = \frac{1}{rt}\sum_{j=1}^{s} x_{.j.}^2 - n\bar{x}^2 = \frac{1}{6}\times 15694 - 2604.1667 = 11.5000$

$Q_I = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} x_{ij}^2 - n\bar{x}^2 - Q_A - Q_B = 27.000$

$Q_E = Q_T - Q_A - Q_B - Q_I = 65.000$

$F_A = \frac{Q_A/(r-1)}{Q_E/rs(t-1)} = 4.089$ $\quad F_B = \frac{Q_B/(s-1)}{Q_E/rs(t-1)} = 0.708$ $\quad F_I = \frac{Q_I/(r-1)(s-1)}{Q_e/rs(t-1)} = 0.831$

$F_{0.05}(2,12) < F_A < F_{0.01}(2,12)$，浓度有显著影响

$F_B < F_{0.05}(3,12)$ $\quad F_I < F_{0.05}(6,12)$ 温度和交互无显著影响

4.6 解：检验假设 $H_{01}: \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

$H_{02}: \beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=0$

$H_{03}: \gamma_{ij}=0 \quad (i=1,2,3;\ j=1,2,3,4)$.

构造统计量：$F_A=\frac{S_A^2}{S_E^2}\sim F(r-1, rs(t-1))$

$F_B=\frac{S_B^2}{S_E^2}\sim F(s-1, rs(t-1))$

$F_I=\frac{S_I^2}{S_E^2}\sim F((r-1)(s-1), rs(t-1))$

由题目数据可计算下表：

温度 / 浓度	B_1	B_2	B_3	B_4	$X_{i\cdot}$	$X_{i\cdot}^2$
A_1	10,14 (24)	11,11 (22)	9,13 (22)	10,12 (22)	90	8100
A_2	7,9 (16)	8,10 (18)	7,11 (18)	6,10 (16)	68	4624
A_3	5,11 (16)	13,14 (27)	12,13 (25)	10,14 (24)	92	8464
$X_{\cdot j}$	56	67	65	62	250	21188
$X_{\cdot j}^2$	3136	4489	4225	3844	15694	

$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{t}X_{ij}^2=1032+602+1116=2752$　$n\bar{X}^2=\frac{T^2}{n}=\frac{(250)^2}{n}=2604.1667$

$\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{sr}X_{i\cdot}^2=3374$.

$Q_T=2752-2604.1667=147.8333$

$Q_A=\frac{1}{rst}\times 21188-2604.1667=44.3333$

$Q_B=\frac{1}{srt}\times 15694-2604.1667=11.5$

$Q_I=\frac{1}{t}\times 3374-2604.1667=44.3333-11.5=27$.

$Q_E=147.8333-44.3333-11.5-27=65$

列二元方差分析表如下：

方差来源	平方和	自由度	均方和	F值
因子A	44.3333	2	22.1667	4.0924
因子B	11.5	3	3.8333	0.7077
交互作用I	27	6	4.5	0.8308
误差	65	12	5.4167	
总和	147.8333	23		

查表得：$F_{0.05}(2,12)=3.89$　$4.0924=F>F_{0.05}(2,12)=3.89$　拒绝原假设，浓度对产品得率有显著影响

$F_{0.05}(3,12)=3.49$　$0.7077=F<F_{0.05}(3,12)=3.49$　接受原假设，温度对产品得率无显著影响

$F_{0.05}(6,12)=3$　$0.8308=F<F_{0.05}(6,12)=3$　接受原假设，两者的交互作用对产品得率无显著影响

4.8 将三种不同的加压水平 A_1, A_2, A_3 用于四台不同的纺织机器 B_1, B_2, B_3, B_4 中，在每种加压水平和每台机器中各取一个试样测量，得纱支强度如下表：

加压 \ 机器	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1577	1692	1800	1642
A_2	1535	1640	1783	1621
A_3	1592	1652	1810	1663

设纱支强度均服从正态分布且方差相同，问不同加压水平和不同机器之间纱支强度有无显著差异（取显著性水平 $\alpha=0.05$）.

解：设α_i为加压第i个水平的效应$(i = 1,2,3)$，β_j为机器第j个水平的效应$(j = 1,2,3,4)$。

提出假设检验：

$$H_{01}: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$$

$$H_{02}: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$$

$$Q_T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} X_{ij}^2 - \frac{T^2}{n}$$

$$Q_A = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r} X_{i\cdot}^2 - \frac{T^2}{n}$$

$$Q_B = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{s} X_{\cdot j}^2 - \frac{T^2}{n}$$

$$Q_E = Q_T - Q_A - Q_B$$

方差来源	平方和	自由度	均方和	*F*值
因素*A*	Q_A	r-1	S_A^2	F_A
因素*B*	Q_B	s-1	S_B^2	F_B
误差	Q_E	(r-1)(s-1)	S_E^2	
总和	Q_T	rs-1		

4.8 H_0: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ H_0': $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$

a_i 为水平 A_i 的效应 b_i 为水平 B_j 的效应

① 先化简，减去1600

$X_{i\cdot}$ $X_{i\cdot}^2$

加压 \ 机器	B_1	B_2	B_3	B_4	T_i
A_1	-23	92	200	42	311
A_2	-65	40	183	21	179
A_3	-8	52	210	63	317
T_j	-96	184	593	126	$T=807$

$X_{\cdot j}$

$X_{\cdot j}^2$

$CT = \frac{1}{12}T^2 = \frac{1}{12}\times 651249 = 54270.75$

$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} X_{ij}^2 = (-23)^2 + (-65)^2 + \cdots + 63^2 = 141349$

$\sum_{i=1}^{3} T_i^2 = 311^2 + 179^2 + 317^2 = 229251$

$\sum_{j=1}^{4} T_j^2 = (-96)^2 + 184^2 + 593^2 + 126^2 = 410597$

$S_T^2 = \left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2} x_{ijk}\right)^2 - CT = 87085.25$

$S_A = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3} T_i^2 - CT = 3042$

$S_B = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{4} T_j^2 - CT = 82594.916$

$S_E = S_T - S_A - S_B = 1441.33$

自由度：$f_A = 2$ $f_B = 3$ $f_G = 6$

$F_A = \frac{f_E S_A}{f_A S_E} \approx 6.3317$ $F_B = \frac{f_E S_B}{f_B S_E} \approx 114.61$

4.8 解：检验假设：$H_{01}: \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$　　已知 $r=3, s=4$　　备择假设：$H_{11}: \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不全相等为0

$H_{02}: \beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=0$　　$H_{12}: \beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 不全为0

构造统计量：$F_A=\frac{S_A^2}{S_E^2}\sim F(r-1,(r-1)(s-1))$

$F_B=\frac{S_B^2}{S_E^2}\sim F(s-1,(r-1)(s-1))$

由题目数据可计算下表：

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	$X_{i\cdot}$	$X_{i\cdot}^2$
A_1	1577	1692	1800	1642	6711	45037521
A_2	1535	1640	1783	1621	6579	43283241
A_3	1592	1632	1810	1663	6717	45113889
$X_{\cdot j}$	4704	4984	5393	4926	20007	
$X_{\cdot j}^2$	22127616	24840256	29084449	24265476		

$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}X_{ij}^2=13776618+8281568+9893589+8089374=33443749.$

$\frac{1}{12}(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}X_{ij})^2=\frac{2786979.083}{2786882}$　　$\bar{X}=\frac{20007}{12}=1667.25$

$Q_T=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}X_{ij}^2-n\bar{X}^2=33443749-\frac{20007^2}{12}=87068.25$

$Q_A=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}X_{i\cdot}^2-n\bar{X}^2=\frac{1}{4}\times(45037521+43283241+45113889)-\frac{20007^2}{12}=3042.$

$Q_B=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{4}X_{\cdot j}^2-n\bar{X}^2=\frac{1}{3}\times(22127616+24840256+29084449+24265476)-\frac{20007^2}{12}=82594.92$

$Q_E=Q_T-Q_A-Q_B=1451.33$

列=元方差分析表如下：

方差来源	平方和	自由度	均方和	F值
因子A	3042	2	1521	~~6.332~~ 6.332
因子B	82594.92	3	27531.64	~~114.609~~ 114.609
误差	1451.33	6	240.222 ~~242.055~~	
总和	87068.25	11		

查表得：$F_{0.05}(2,6)=5.14$　　~~6.332~~ $6.332=F_A>F_{0.05}(2,6)=5.14$　　拒绝原假设 H_{01}

$F_{0.05}(3,6)=4.76$　　~~114.609~~ $114.609=F_B>F_{0.05}(3,6)=4.76$　　拒绝原假设 H_{02}

即不同加压水平和不同机器之间纱支强度均有显著差异.