第三章 假设检验

理学院

预习提纲

1. 假设检验的基本思想及两类错误的概念；
2. 单个、两个正态母体参数的假设检验方法；
3. 母体的大样本参数假设检验；
4. 单侧假设检验；
5. 分布假设检验。

本次课教学目的：

- 掌握假设检验的基本概念并熟悉假设检验方法步骤

重点难点：

- 假设检验的基本思想
- 正态母体的均值，方差假设检验，分布假设检验

§1 假设检验初述，二类错误

1.1 假设检验的概念

例，对某产品进行了工艺改造或研制了新产品，要比较原产品和新产品在某一项指标上的差异，这样我们面临选择是否接受假设“新产品的某一项指标优于老产品”。

这样必须作一些试验，也就是抽样，根据得到的样本观察值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 来作出决定。

假设检验问题是不同于参数估计的另一类重要的统计推断问题，它的基本思想是根据子样的信息，运用统计分析的方法来检验关于母体的某项假设是否正确，从而做出接受或拒绝的决定。

1.2 假设检验的分类

本节讨论重点

假设检验

参数假设检验

对母体分布中的参数作某项假设，一般是对母体的数字特征作一项假设，用母体中子样检验此项假设是否成立

e.g 经过改进生产工艺，某电器零件的平均电阻是否有显著变化

分布假设检验

对母体分布作某项假设，用母体中子样检验此项假设是否成立

e.g 某种设备的寿命是否服从 $\theta=20000$ 的指数分布

例1 某食品厂用自动装罐机装罐头食品，每罐标准重量为$\mu_0=500$克。按以前生产经验标准差$\sigma=10$克。每隔一定时间需要检查机器工作情况。现抽取10罐，称得其重量为（单位：克）

495，510，505，498，503，492，502，512，497，506

假定重量服从正态分布，试问这段时间机器工作是否正常？

[分析]

1. 在此母体上假设平均数是500克且标准差为10，则重量服从正态分布 $N(500,10^2)$

2.直观上看，可考察子样平均数与500之差的大小，也就是要确定常数k，若 $|\bar{x}-500|<k$，则认为机器工作正常，若 $|\bar{x}-500|\geq k$，则认为机器工作不正常。

3. k值如何选取？其合理的界限在何处？应由什么原则来确定？

在实际工作中，
往往把不轻易否定
的命题作为原假设

解：

（1）提出假设：

$$H_0: \mu = 500$$

它的对立假设是：

$$H_1: \mu \neq 500$$

备择假设

（2）判断原假设H_0是否成立

在假设H_0成立的前提下，$\bar{X}$服从正态分布 $N\left(500, \frac{10^2}{n}\right)$，因而

$$U = \frac{\bar{X} - 500}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$$

能衡量差异$\left|\bar{X} - 500\right|$
大小且分布已知

服从标准正态分布 $N(0,1)$

（3）设一临界值 $k_0>0$，若

$$|U| = \frac{\overline{X}-500}{\frac{10}{\sqrt{n}}} \geq k_0$$

就认为有较大偏差；则认为 H_0 不真，拒绝 H_0；若

$$|U| = \frac{\overline{X}-500}{\frac{10}{\sqrt{n}}} \leq k_0$$

则接受 H_0

对于如何确定k值，这里用到人们在实践中普遍采用的一个原则：

小概率事件原则

小概率事件在一次试验中<u>基本上不会发生</u>

小概率事件在一次试验中发生的概率记为α，一般取5%或1%，或10%

接上：对给定的小概率α，存在可以在$N(0,1)$表中查到分位点的值$\mu_{\alpha/2}$，使

$$P\{|U| > \mu_{\alpha/2}\} = \alpha \quad 即 \quad P\{\frac{|\overline{X} - 500|}{\frac{10}{\sqrt{10}}} \geq u_{\alpha/2}\} = \alpha$$

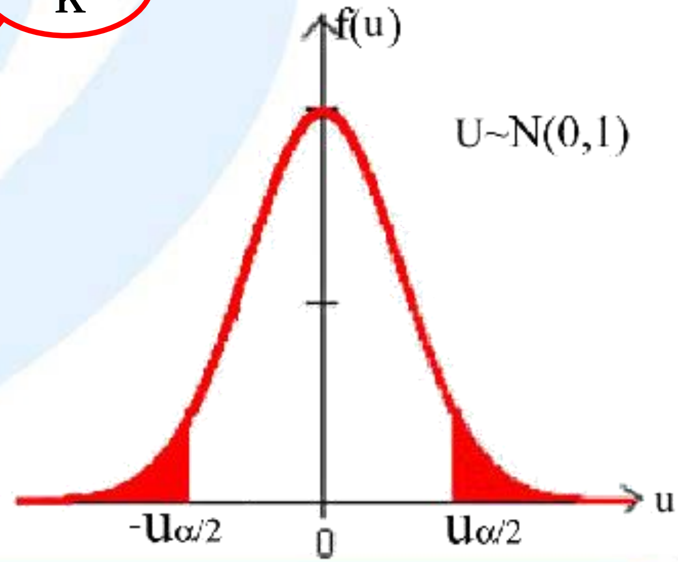
k_0

也就是说，$|U| > \mu_{\alpha/2}$ 是假设H_0为真时的一个小概率事件。倘若样本的某个观测值能使小概率事件发生，那就有理由认为$|U|$太大了，从而怀疑假设H_0的正确性。这时就在显著性水平α下拒绝原假设H_0，故我们可以得出拒绝域：$|U| \geq \mu_{\alpha/2}$

k

也就是

$$|\overline{X} - 500| \geq \mu_{\alpha/2} \frac{10}{\sqrt{10}}$$



当一次试验后得到的子样平均值$\overline{X}$落入拒绝域内，拒绝假设H_0；反之，接受H_0。

（4）例1中 $\bar{x}=502$，$|\bar{x}-500|=2$，取 α = 0. 05，$k=\mu_{\alpha/2}\dfrac{10}{\sqrt{10}}=1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{10}}=6.20$

则 $|\bar{x}-500|\le k$ ，接受原假设，认为这段时间的平均罐重是500克，机器工作是正常的。

简单总结

目的：检验正态母体平均数

假定母体X的分布是 $N(\mu,\sigma^2)$ ，且 $\sigma^2=\sigma_0^2$ （ σ_0^2 是已知数）

在母体上作：

$$\text{假设}H_0:\mu=\mu_0(\mu_0\text{是已知数})$$

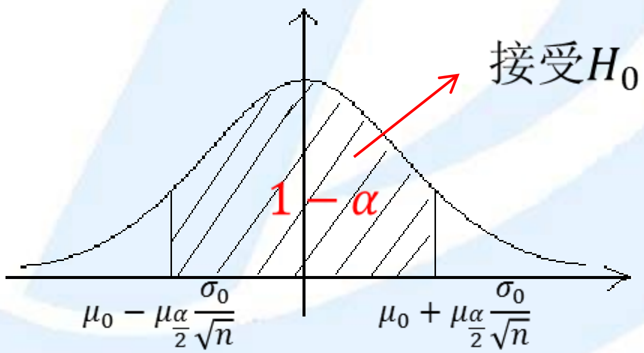
给定 α（ α 是小概率），查附表1可得 $u_{\alpha/2}$ ，进行一次抽样后获得子样平均值 $\bar{x}$ 。

若 $\left|\bar{x}-\mu_0\right| \geq u_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$

则拒绝假设H_0，即不能认为母体平均数是 μ_0

若 $\left|\bar{x}-\mu_0\right| < u_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$

则接受假设H_0，即可认为母体平均数是μ_0



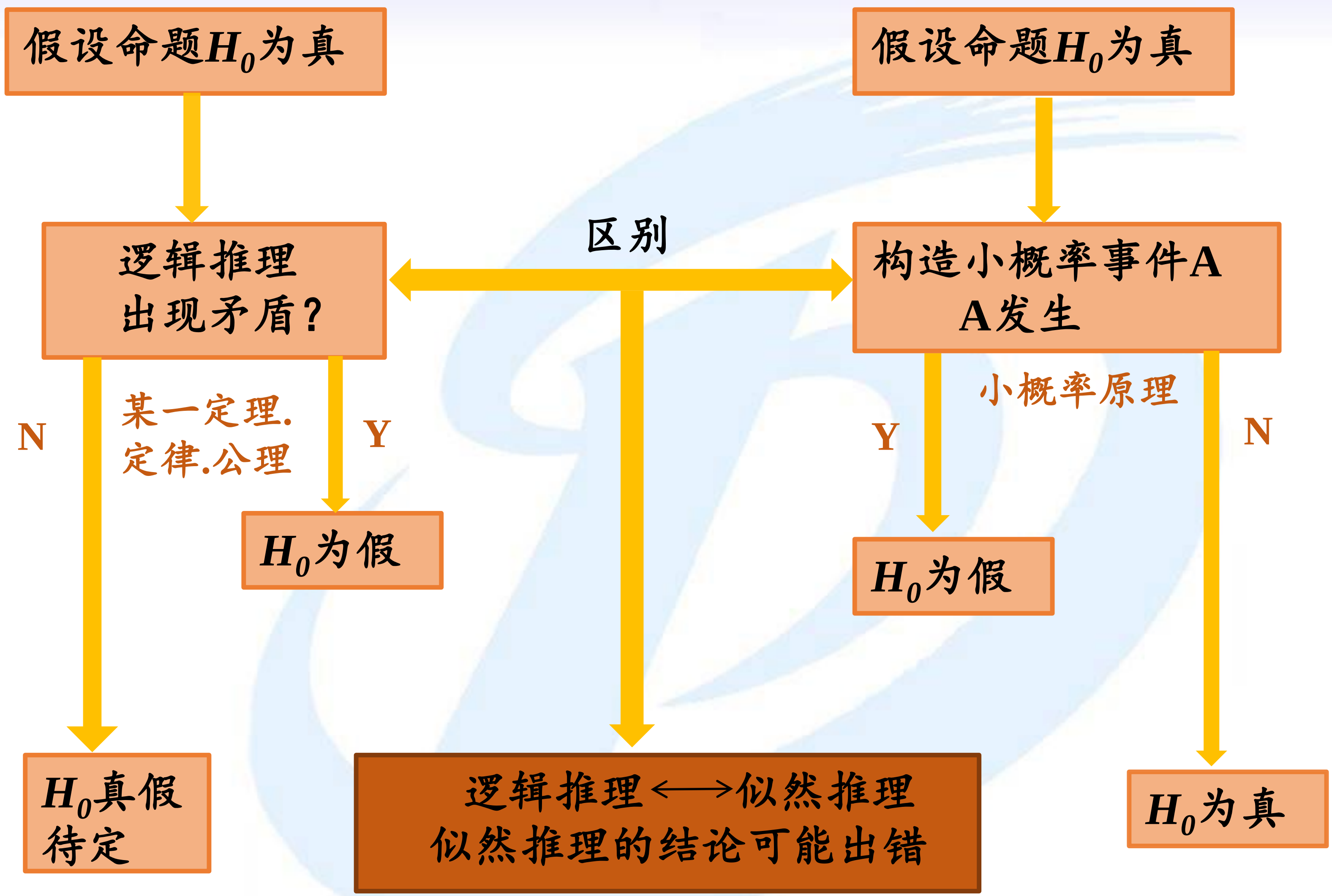
通常的反证法

通常的反证法是设定一个假设以后，如果出现的事实与之矛盾，(即如果这个假设是正确的话，出现一个 $\boxed{\text{概率等于0}}$ 的事件)则绝对地否定假设。

带概率性质的反证法的逻辑:

如果假设H_0是正确的话,一次试验出现一个概率很小的事件,则以 $\boxed{\text{很大的把握否定假设}H_0}$

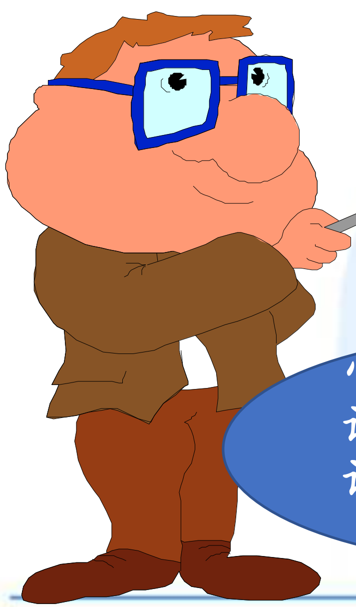
通常反证法与概率反证法的区别



前两例中检验所依据的逻辑就是带概率性质的反证法的逻辑：

如果H_0是对的，那么衡量差异大小的某个统计量落入拒绝域是个小概率事件。如果该统计量的实测值落入拒绝域，也就是说，<u>H_0成立下的小概率事件发生了，那么就认为H_0不可信而否定它</u>。否则我们就不能否定H_0（只好接受它）.

<u>不否定H_0并不是肯定H_0一定对</u>，而只是说差异还不够显著，还没有达到足以否定H_0的程度.



小概率事件在一次试验中发生的概率记为α，一般取5%或1%，或10%

所以假设检验又叫

“差异显著性检验”

α称为显著水平

假设检验方法步骤：

根据问题提出原假设H_0，同时给出对立假设H_1（备选假设）；

在H_0成立的前提下，选择合适的统计量，这个统计量要包含待检的参数，并求得其分布；

给定显著性水平α，按分布写出小概率事件及其概率表达式；

由子样计算出需要的数值；

判断小概率事件是否发生，是则拒绝，否接受。

例2 某种产品在通常情况下废品率是5%，现从生产出的一批中随意地抽取50个，检验得知有4个废品，问能否认为这批产品的废品率为5%？（取小概率 α=5%）

[分析]：母体X的分布是二点分布B(1,p)，X=1表示一个产品是废品，其发生的概率为p，即

$$P\{X=1\}=p, P\{X=0\}=1-p$$

在母体上作假设 $H_0: p=p_0$ （$p_0=0.05$ ），令n=50，m=4，

$$\bar{X}=\frac{m}{n}$$

又 $E\overline{X}=p_0, D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{p_0(1-p_0)}{n}$

故 $U=\dfrac{\frac{m}{n}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

近似服从标准正态分布 $N(0,1)$

前提：n很大，抽取的子样是大子样，一般 $n\geq 50$

解： 同例1类似，求出

$$\left|\bar{x}-\mu_0\right|=\left|\frac{m}{n}-p_0\right|=\left|\frac{4}{50}-0.05\right|=0.03$$

$$k=u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}=1.96\sqrt{\frac{0.05\times0.95}{50}}=0.06$$

比较得：

$$\left|\frac{m}{n}-p_0\right|<k$$

故接受H_0，即可以认为这批产品的废品率为5%

$$P\{|U|>\mu_{\alpha/2}\}=\alpha$$

若$\left|\bar{x}-\mu_0\right|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$，则拒绝原假设；

若$\left|\bar{x}-\mu_0\right|< u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$，则接受原假设。

参数假设检验类型

参数假设检验常分为四种类型：

- 检验母体平均数； $H_0:\mu=\mu_0(\mu_0\text{已知})$
- 检验两个母体平均数相等； $H_0:\mu_1=\mu_2$
- 检验母体方差； $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2(\sigma_0^2\text{是已知数})$
- 检验两个母体方差相等 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$

根据选择的统计量，假设检验分为：

统计量的分布	假设检验方法
正态分布	U 检验
t 分布	t 检验
χ^2分布	χ^2 检验
F分布	F 检验

1.3 假设检验可能产生的两类错误

检验一个H_0时,是根据检验统计量来判决是否接受H_0的,而检验统计量是随机的,这就有可能判决错误.这种错误有以下两类:

H_0事实上是正确的,但被我们拒绝了,称犯了“弃真”的(或称第一类)错误.

H_0事实上是不正确的,但被我们接受了,称犯了“存伪”的(或称第二类)错误.

这两类错误出现的可能性是不可能排除的。

原因在于:由子样推导母体

假设检验的两类错误

	实际情况	
决定	H_0为真	H_0不真
拒绝H_0	第一类错误	正确
接受H_0	正确	第二类错误

犯两类错误的概率:

$$P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\} = \alpha$$

$$P\{接受H_0 \mid H_0不真\} = \beta$$

[注]：显著性水平α为犯第一类错误的概率

由于H_0为真条件下的小概率事件$|U| > \mu_{\alpha/2}$发生时才拒绝H_0

$$P\{|U| > \mu_{\alpha/2}\} = \alpha$$

两类错误是互相关联的。当样本容量n固定时，一类错误概率的减少导致另一类错误概率的增加，不可能使得犯这两类错误的概率都很小。要同时降低两类错误,必须增加样本容量.

在统计学中，往往是先控制犯第一类错误的概率在一定限度内，再考虑尽量减小犯第二类错误的概率。这是由两类错误的结果造成的影响的不同而决定的。一般是先取很小的正数α，保证犯弃真错误的可能性很小，从而使H_0处于被保护地位，然后通过增加样本容量来减少纳伪的错误β.事实上，纳伪错误β是随n的增大而减小的.

例如：检验某人是否患某疾病，即 H_0:此人有病，H_1:此人没病

第一类错误：有病被视为无病

后果：轻者贻误治病良机，重者导致死亡。

第二类错误：无病被视为有病

后果：轻者经济损失，重者引起身体不良反映。

零假设是经过周密考虑后作出的，应体现保护性

一个好的检验是在限制了犯第一类错误的概率下，尽可能缩小第二类错误的概率。

$$P\{\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真}\} = \alpha$$

$$P\{\text{接受}H_0 \mid H_0\text{不真}\} = \beta$$

☞ 思考题

1、在显著水平α下，经过检验而原假设H0没有被拒绝，（　）

A.原假设H0一定是正确的

B.备择假设H1一定是错误的

C.H0是正确的可能性为 $1-\alpha$

D.原假设H0可能是正确的

2、下列说法正确的是（　）

A.若备择假设是正确的，作出的决策是拒绝备择假设，则犯了弃真错误

B.若备择假设是错误的，作出的决策是接受备择假设，则犯了纳伪错误

C.若原假设是正确的，但作出的决策是接受备择假设，则犯了弃真错误

D.若原假设是正确的，但作出的决策是接受备择假设，则犯了纳伪错误

$P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\}=\alpha$ 弃真

$P\{接受H_0 \mid H_0不真\}=\beta$ 纳伪

3、某工地，须检验运到的水泥的重量，在正常情况下每包水泥的重量服从正态分布 $X \sim N(100, 1.5^2)$（单位：Kg）。现抽查了9包，其重量为：99.3，98.7，100.5，101.2，98.3，99.7，99.5，102.1，100.5，问在水平α=0.05下，是否接受假设：$H_0: \mu = 100$。

$$P\{|U| > \mu_{\alpha/2}\} = \alpha$$

若 $\left|\overline{x} - \mu_0\right| \ge u_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$，则拒绝原

若 $\left|\overline{x} - \mu_0\right| < u_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$，则接受原

解：求得子样平均值 $\bar{x} = 99.98$

在α=0.05下有

$$P\left\{\left|\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \ge \mu_{\alpha/2}\right\} = \alpha$$

当H_0成立时，$\mu_{\alpha/2} = \mu_{0.025} = 1.96$

$$\left|\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{99.98 - 100}{1.5/\sqrt{9}}\right| = 0.04 < \mu_{0.025} = 1.96$$

所以接受原假设，即 $H_0: \mu = 100$

§2~3 检验母体平均数与方差

单个正态母体的假设检验

1. 平均数的检验：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，σ^2 已知的情形。

对于假设检验问题：$H_0 : \mu = \mu_0$

当H_0成立时，构造检验统计量

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$\boxed{P\left\{|U| < \mu_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = P\left\{\frac{|\bar{X} - \mu|}{\sigma / \sqrt{n}} < \mu_{\frac{\alpha}{2}}\right\} \approx 1 - \alpha}$$

对于显著性水平α，知其拒绝域为

$$W = \left\{|U| \geq u_{\alpha/2}\right\}$$

2. 平均数的检验：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，σ^2 未知的情形。

由于σ^2未知，样本方差是总体方差的优良估计，于是，我们利用样本标准差S代替总体方差σ

对于假设检验问题：$H_0: \mu = \mu_0$

当H_0成立时，构造检验统计量

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

对于显著性水平α，知其拒绝域为

$$w = \{|T| \geq t_{\alpha/2}(n-1)\}$$

$$P\left\{|T| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{S^*/\sqrt{n}} < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} \approx 1 - \alpha$$

例： 某砖瓦厂生产的砖其抗断强度X服从正态分布。长期以来，砖的抗断强度的均值为30（Kg/cm²）。现改进了工艺，新生产了一批砖，从中抽取10块作抗断强度试验。测得其抗断强度为

30.8	32.6	29.7	31.6	30.2
31.9	31.0	29.5	31.8	31.4

试问：这批砖的抗断强度的均值是否较以往生产的砖有显著变化?

解： 在水平 $\alpha = 0.05$ 下，提出假设 $H_0 : \mu = 30$

统计量T的观察值为

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{31.05 - 30}{\frac{1.07}{\sqrt{10}}} = 3.1032$$

查表，$t_{0.0025}(9) = 2.2622$ ，由于 $t_{0.025}(9) < T$

所以，拒绝原假设，认为这批砖的抗断强度的均值较以往生产的砖有显著变化

3. 方差的检验：$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$， μ, σ^2 都未知的情形。

对于假设检验问题：$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$

$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}\} = 1-\alpha$$

构造检验统计量

$$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

对于显著性水平α，知其拒绝域为

$$W = \left\{T \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right\} \cup \left\{T \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\}$$

例：某纺织厂生产的维尼纶的纤度服从正态分布，以往生产时 σ 稳定在0.048.现在改进了工艺，从按新工艺的维尼纶纤维中任取5根，测得其纤度为

1.38	**1.43**	**1.39**	**1.40**	**1.41**

问：革新后生产出的维尼纶其纤度的标准差与以往相比是否有显著变化？（$\alpha=0.1$）

解：在水平 $\alpha=0.1$ 下，$H_0:\sigma=0.048$

计算统计量

$$T=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{1.48\times10^{-3}}{0.048^2}=0.0642$$

查表，$\chi^2{}_{0.95}(4)=0.711$，$\chi^2{}_{0.05}(4)=9.488$，由于 $T<\chi^2{}_{0.95}(4)$

所以，拒绝原假设，认为革新后生产出的维尼纶其纤度的标准差与以往相比有显著变化

两个正态母体的假设检验

1. 两个正态母体平均数相等的检验：$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，假设 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

在两个母体上作假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$。从两个母体各抽取一个子样 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，$(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ 。记 $\overline{X}, \overline{Y}, S_x^{*2}, S_y^{*2}$分别为的子样均值和方差。

当H_0成立时，$T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}} S^*} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$

$$P\left\{ -t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) < \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} S^*} < t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \right\} = 1 - \alpha$$

其中 $S^* = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1) S_x^{*2} + (n_2 - 1) S_y^{*2}}{n_1 + n_2 - 2}}$

对于显著性水平α，使得 $P\{|T| > t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\} = \alpha$

所以H_0的拒绝域为 $w = \{|T| > t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\}$

$$S^* = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_x^{*2}+(n_2-1)S_y^{*2}}{n_1+n_2-2}}$$

例： 对两种不同热处理方法加工的金属材料做抗拉强度试验，得到的试验数据如下：

甲种方法 31，34，29，26，32，35，38，34，30，29，32，31

乙种方法 26，24，28，29，30，29，32，26，31，29，32，28

设用二种热处理方法加工的金属材料抗拉强度各构成正态母体，且二个母体方差相等。给定显著水平 $\alpha=0.05$，问二种方法所得金属材料的（平均）抗拉强度有无显著差异。

解： 据题意，检验假设 $H_0:\mu_1=\mu_2$，计算统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}S^*}=\frac{31.75-28.67}{\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}}\times 2.85}=2.65$$

查表得，$t_{0.025}(22)=2.074$ ，由于 $T>t_{0.025}(22)$

故拒绝H_0，认为二种方法所得金属材料的（平均）抗拉强度有显著差异。

$$F=\frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^{*2}}{\sigma_1^2}/(n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S_2^{*2}}{\sigma_2^2}/(n_2-1)}=\frac{S_1^{*2}/\sigma_1^2}{S_2^{*2}/\sigma_2^2}=\frac{\sigma_2^2/\sigma_1^2}{S_2^{*2}/S_1^{*2}}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

2. 两个正态母体方差相等的检验：$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$，$Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$。

在两个母体上作假设 $H_0:\sigma_1^{\ 2}=\sigma_2^{\ 2}$。从两个母体各抽取一个子样 $\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$，$\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)$。记 $n_1,n_2,S_x^{*2},S_y^{*2}$，分别为的子样容量和方差。

当H_0成立时，$F=\dfrac{S_x^{*2}}{S_y^{*2}}\sim F\left(n_1-1,n_2-1\right)$

对于显著性水平α，使得

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)<F<F_{\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)\right\}=1-\alpha$$

所以H_0的拒绝域为

$$w=\left\{F\le F_{1-\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)\right\}\cup\left\{F\ge F_{\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)\right\}$$

$$w=\left\{F\le F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right\}\cup\left\{F\ge F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right\}$$

例： 甲、乙二台机床加工同一种轴。从这二台机床加工的轴中分别随机地抽取若干根，测得直径（单位：毫米）为：

机床甲　20.5，19.8，19.7，20.4，20.1，20.0，19.0，19.9

机床乙　19.7，20.8，20.5，19.8，19.4，20.6，19.2

假定各台机床加工轴的直径分别构成正态母体。试比较甲、乙二台机床加工的精度有无显著差异（取 $\alpha=0.05$ ）？

解： 据题意，检验假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$，计算统计量

$$n_1=8,\bar{x}_1=19.93,s_1^{*2}=0.216$$

$$n_2=7,\bar{x}_2=20.00,s_2^{*2}=0.397$$

因而

$$F=\frac{s_1^{*2}}{s_2^{*2}}=\frac{0.216}{0.397}=0.544$$

查表得，$F_{0.025}(7,6)=5.70$ ，$F_{0.025}(6,7)=5.12$，则

$$F_{0.975}(7,6)=\frac{1}{F_{0.025}(6,7)}=\frac{1}{5.12}=0.195$$

易见，$F_{0.975}(7,6)<F<F_{0.025}(7,6)$，故认为两个正态母体方差无显著差异。

3. 基于成对数据的检验（t检验）

为了比较两种产品或两种仪器，两种方法的差异。我们在相同的条件下，作对比试验，得到一批成对观察值，然后观察数据作出推断。这种方法称为逐对比较法。

例：比较两种安眠药A与B的疗效。以10个失眠患者为实验对象。以X1表示使用A后延长的睡眠时间，X2表示用B后延长的睡眠时间。对每个患者各服两种药分别实验一次，数据如下：（单位：小时）

患者	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_1	1.9	0.8	1.1	0.1	-0.1	4.4	5.5	1.6	4.6	3.4
X_2	0.7	-1.6	-0.2	-1.2	-0.1	3.4	3.7	0.8	0	2.0
$X= X_1-X_2$	1.2	2.4	1.3	1.3	0	1.0	1.8	0.8	4.6	1.4

给定显著水平 $\alpha=1\%$ ，试问两种药的疗效有无显著差异？

[分析] 如果把 X_1, X_2 看作两母体数量指标，即 X_1, X_2 看作取得的子样，那么检验两种药的疗效是否相等，可看作检验两母体平均数是否相等。但是对同一个人使用两种药后延长的睡眠时间会有联系，所以这两个子样不是相互独立的简单随机子样。

考虑 $X = X_1 - X_2$，假定X具有正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，这里 μ, σ^2 未知，若两种药疗效相等，则X表随机误差，而随机误差可以认为服从正态分布，其均值为0。

解：据题意，检验假设 $H_0: \mu = 0$，构造统计量

$$T = \frac{\overline{X} - 0}{\frac{S^*}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

利用表中X的10个子样值进行检验。先算得

$$\overline{x} = 1.580, s^* = 1.230$$

又查表得 $t_{\alpha/2}(9) = 3.25$，再算得

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s^*}{\sqrt{n}} = 3.25 \times \frac{1.230}{\sqrt{10}} = 1.26$$

易见 $|\overline{x}| > 1.26$，故两种药的疗效有显著差异。

[简单总结]

- 母体分布类型已知，为正态分布；
- 母体个数分为单个母体与两个母体；
- 主要检验正态母体平均数相等以及方差相等。

$$|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$$

2、测得X,Y两批电子器材的电阻的子样观测值，计算得 $\bar{x}=0.1407,\ s_x^{*2}=2.80^2$, $\bar{y}=0.1385,\ s_y^{*2}=2.66^2$，$n_1=n_2=6$ ，假定这两批器材的电阻分别服从正态分布且方差相等，试问这两批器材的电阻有无显著差异（α=0.05）？

解： 据题意，作假设 $H_0:\mu_1=\mu_2$ ，在H_0成立的前提下，构造统计量

$$T=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s^*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

查表得，$t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(10)=2.2281$

由子样值计算，

$$|t|=\frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{s^*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{|0.1407-0.1385|}{\sqrt{\frac{5\times 2.80^2+5\times 2.66^2}{10}}\times\sqrt{\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}}}=\frac{0.0022\times\sqrt{3}}{2.73}=0.0014<t_{0.0025}(10)=2.2281$$

故接受H_0，即认为这两批器材的电阻无明显差异。

$$F \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$$
$$\text{或} F \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$$

Southwest Petroleum University 西南石油大學

3、某种物品在处理前与处理后分别抽样分析，其含脂率（%）如下：

处理前　0.19，0.18，0.21，0.30，0.41，0.12，0.27

处理后　0.15，0.13，0.07，0.24，0.19，0.06，0.08，0.12

假定处理前后的含脂率都服从正态分布。试问处理前后的含脂率的方差是否有显著差异（取 $\alpha=0.05$）

解： 据题意，作检验：$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$，选取统计量 $F=\dfrac{S_x^{*2}}{S_y^{*2}}$，当$H_0$为真时，$F\sim F(n_1-1,n_2-1)$。取 $\alpha=0.05,\ n_1=7,\ n_2=8$ 得

$$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(6,7)=5.12$$

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=\frac{1}{F_{0.025}(7,6)}=\frac{1}{5.7}=0.18$$

故H_0接受域为 $\{0.18\le F\le 5.12\}$

由 $\bar{X}=0.24,\ S_x^{*2}=0.0091,\ n_1=7,\ \bar{Y}=0.13,\ S_y^{*2}=0.0039,\ n_2=8$

得 $F_0=\dfrac{0.0091}{0.0039}=2.33$，落入接受域中，故处理前后的含脂率的方差无显著差异

1、某食品厂用自动装罐机装罐头食品，规定标准重量为250克，标准差为 3 克时机器工作为正常，每天定时检验机器情况，现抽取16罐，测得平均重量 $\overline{X}=252$ 克，样本标准差 $S=4$ 克，假定罐头重量服从正态分布，试问该机器工作是否正常（α=0.05）？

正常满足两个条件：平均值为250克，标准差为3克

解：

（1）① 提出 $H_0:\mu=250;\quad H_1:\mu\neq 250$

② 选取统计量

$$T=\frac{\overline{X}-250}{S/\sqrt{n}}\sim t(15)$$

拒绝域为

$$\{|T|>t_{0.025}(15)\}$$

查表得：$t_{0.025}(15)=2.1315$，由样本值算得 $T=2<2.1315$，故接受 H_0。

（2）① 提出假设 $H_0:\sigma^2=9;\quad \mathrm{H}_1:\sigma^2\neq 9$

② 选取统计量 $$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(15)$$

拒绝域为 $$\left\{\chi^2>\chi^2_{0.05}(15)\right\}$$

查表得 $\chi^2_{0.05}(15)=24.996$，由样本值算得$\chi^2=\frac{15\times16}{9}=26.667>24.966$，故拒绝$H_0$。

综合来看，认为机器工作不正常。

大子样母体的假设检验

1. 母体X的分布是任意的，且 $EX=\mu$ ，$DX=\sigma^2$ 存在且样本为大样本。

在母体上作检验，假设 $H_0:\mu=\mu_0$ ，μ_0 已知，由中心极限定理，可构造统计量

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

当H_0成立时，$U\sim N(0,1)$（近似）

对于显著性水平α，存在 $P\{|U|\geq U_{\alpha/2}\}\approx\alpha$，则如果

$$U_0=\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\geq U_{\alpha/2}$$

就拒绝H_0，否则接受H_0

例：某电器元件的平均电阻一直保持在2.64。改变加工工艺后，测得100个元件的电阻，计算得平均电阻为2.62，标准差 s 为0.06，问新工艺对此元件（平均）电阻有无显著影响（给定显著水平α=0.01）

解：据题意，在此母体上作假设 $H_0:\mu=2.64$，已知 $n=100$，$\bar{x}=2.62$，s=0.06。查表得 $u_{\alpha/2}=2.57$，又

$$\left|\bar{x}-\mu_0\right|=0.02, u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}=2.57\times\frac{0.06}{10}=0.015$$

$$U_0=\frac{\left|\bar{X}-\mu_0\right|}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\geq U_{\alpha/2}$$

所以

$$\left|\bar{x}-\mu_0\right|>u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

故拒绝原假设，即可以认为新工艺对元件的（平均）电阻有显著影响。

2. 母体X，Y的分布是任意的，且 $EX=\mu_1, EY=\mu_2$，$DX=\sigma_1^{\ 2}, DY=\sigma_2^{\ 2}$，存在且两个样本都为大样本。

在母体上作检验，假设 $H_0:\mu_1=\mu_2$，由中心极限定理，可构造统计量

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

当H_0成立时，$U\sim N(0,1)$（近似）

对于显著性水平α，存在 $P\{|U|\geq U_{\alpha/2}\}\approx\alpha$ ，则如果

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}\geq U_{\alpha/2}$$

就拒绝H_0，否则接受H_0

例：在二种工艺条件下纺得细纱，各抽100个试样，试验得强力数据，经计算得：

$$\text{甲工艺}\quad n_1=100,\ \overline{x}_1=280,\ s_1=28$$

$$\text{乙工艺}\quad n_2=100,\ \overline{x}_2=286,\ s_2=28.5$$

问二种工艺条件下细纱强力有无显著差异？（取$\alpha=5\%$）

解：按题意，这是检验两个母体平均数相等的问题，作假设检验

$$H_0:\mu_1=\mu_2$$

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}\geq U_{\alpha/2}$$

计算得：

$$\left|\overline{x}_1-\overline{x}_2\right|=6$$

$$u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^{\ 2}}{n_1}+\frac{s_2^{\ 2}}{n_2}}=1.96\times\sqrt{\frac{28^2+28.5^2}{100}}=7.83$$

易见

$$\left|\overline{x}_1-\overline{x}_2\right|<7.83$$

故接受原假设，即认为二种工艺条件下细纱强力无显著差异。

☞思考题

1、为了比较两种枪弹的速度（单位：米/秒），在相同的条件下进行速度测定。算得子样平均数与子样标准差

枪弹甲 $n_1 = 110$ $\bar{x}_1 = 2805$ $s_1 = 120.41$

枪弹乙 $n_1 = 100$ $\bar{x}_1 = 2680$ $s_1 = 105.00$

在显著水平α=0.05下，这两种枪弹（平均）速度有无显著差异?

解：按题意，建立假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$

在H_0成立的前提下，构造统计量

$$u = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

查表得，$\mu_{\alpha/2} = \mu_{0.025} = 1.96$

由样本计算

$$|u|=\frac{|2805-2680|}{\sqrt{\frac{120^2}{110}+\frac{105^2}{100}}}=\frac{125}{\sqrt{130.9+110.25}}=\frac{125}{15.53}=8.04>\mu_{\alpha/2}$$

故拒绝H_0，即认为这两种枪弹（平均）速度有显著差异。

§4 单侧假设检验

前两节在母体上作的假设H_0形式为 $\mu=\mu_0,\sigma^2=\sigma_0^2,\mu_1=\mu_2,\sigma_1^2=\sigma_2^2$。假设$H_0$亦称为原假设。原假设$H_0$的对立情形称为对立假设，记为$H_1$。例如：

$$
\begin{aligned}
&H_0:\mu=\mu_0, &&H_1:\mu\neq\mu_0\\
&H_0:\mu_1=\mu_2, &&H_1:\mu_1\neq\mu_2\\
&H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, &&H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2\\
&H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2, &&H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2
\end{aligned}
$$

因而原假设H_0和备择假设H_1是成对出现的。这些假设中每一对都称为双侧假设。因为表示H_1的参数区域都在H_0的参数区域的两侧。如

$H_0:\mu=\mu_0;\ H_1:\mu\neq\mu_0$

这对假设区域 $\{\mu:\mu\neq\mu_0\}$ 在$\mu=\mu_0$ 点的两侧。但实际问题中，还会遇到这样一类情形。例如：

（1）某种产品要求废品率不高于5%。今从一批产品中随机地取50个，检查到4个废品，问这批产品是否符合要求。此例在母体上可作假设：

$$H_0: P \le 0.05; H_1: P > 0.05$$

（2）某种金属经热处理后平均抗拉强度为42公斤/厘米^2。今改变热处理方法，取一个子样，问抗拉强度有无显著提高？此例在母体上可作假设：

$$H_0: \mu \le 42; H_1: \mu > 42$$

（3）某电工器材厂生产一种保险丝，规定保险丝熔化时间（单位：小时）的方差不超过400。今从一批产品中抽得一个子样，问这批产品的方差是否符合要求？此例在母体上可作假设：

$$H_0: \sigma^2 \le 400; H_1: \sigma^2 > 400$$

（4）某假设某种产品经技术革新后平均日产量有没有显著提高，可在革新前和革新后随意地各记录若干天日产量。如果把革新前日产量看成第一母体，革新后看成第二母体，此例可作假设：

$$H_0: \mu_1 \ge \mu_2; H_1: \mu_1 < \mu_2$$

[规定] 上述这些假设H_0的形式都属于单侧假设检验问题。

[注意] 习惯上在检验产品质量是否合格时，原假设H_0取为合格；检验某参数值有无显著变大（或变小），原假设H_0总取不变大（或不变小）情形，即保守情形。

[重点]

单侧假设检验方法导出的步骤类似于双侧假设检验，主要区别在于由显著水平α作小概率事件时需依据H_1来做。

小结——一个正态总体均值(μ)的假设检验

对母体（或子样）要求		正态母体方差σ_0^2已知	正态母体方差σ_0^2未知
所用函数及其分布		$U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S^*/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
假设（拒绝域）	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$\lvert U\rvert\geq u_{\frac{\alpha}{2}}$	$\lvert T\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
假设（拒绝域）	$H_0:\mu\geq\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$U\leq -u_\alpha$	$T\leq -t_\alpha(n-1)$
假设（拒绝域）	$H_0:\mu\leq\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$	$U\geq u_\alpha$	$T\geq t_\alpha(n-1)$

小结——一个正态总体方差(σ^2)的假设检验

对母体（或子样）要求		正态母体
所用函数及其分布		$\chi^2=(n-1)\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$
假设（拒绝域）	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或$\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$	$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)$
	$H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$	$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

小结—两个正态总体均值(μ)的假设检验

对母体（或子样）要求		两个正态母体方差 σ_1^2和σ_1^2均已知	两个正态母体方差 $\sigma_1^2=\sigma_1^2=\sigma^2$均未知
检验统计量		$U=\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}$	$T=\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}S^*}$
假设（拒绝域）	$H_0:\mu_1=\mu_2$ $H_1:\mu_1\neq\mu_2$	$\lvert U\rvert\geq u_{\frac{\alpha}{2}}$	$\lvert T\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$
	$H_0:\mu_1\geq\mu_2$ $H_1:\mu_1<\mu_2$	$U\leq -u_\alpha$	$T\leq -t_\alpha(n_1+n_2-2)$
	$H_0:\mu_1\leq\mu_2$ $H_1:\mu_1>\mu_2$	$U\geq u_\alpha$	$T\geq t_\alpha(n_1+n_2-2)$

小结—两个正态总体方差(σ^2)的假设检验

Southwest Petroleum University 西南石油大学

对母体（或子样）要求		两个正态母体
检验统计量		$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$
假设（拒绝域）	$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或$F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$
	$H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$F\ge F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
	$H_0:\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$F\le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$

$$F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)=\frac{1}{F_{\alpha}(n_2-1,n_1-1)}$$

例： 一台机床加工轴的平均椭圆度是0.095毫米，机床经过调整后取20根轴测量其椭圆度，计算得 $\bar{x}=0.081, s^*=0.025$，问调整后机床加工轴的（平均）椭圆度有无显著降低（取$\alpha=5\%$）？这里假定调整后机床加工轴的椭圆度是正态母体。

解：按题意，要检验假设 $H_0:\mu\ge\mu_0, H_1:\mu<\mu_0$ ，其中 $\mu_0=0.095$

我们可用 $\bar{X}$ 作检验。则可知在 $\mu=\mu_0$ 的前提下统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S^*/\sqrt{n}}$$

检验参数值有无显著降低，原假设取保守情况即参数值没有降低

服从自由度为n-1的t分布

查表得：$t_\alpha(n-1)$的值，使 $P\{T\le -t_\alpha(n-1)\}=\alpha$，即花括号内为概率为α的小概率事件。

本题中，$\mu_0 = 0.095, n = 20, \bar{x} = 0.081, s^* = 0.025$，则

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}} = -2.50 \le -t_\alpha(n-1) = 1.73$$

因此拒绝H_0，即认为调整后机床加工轴的（平均）椭圆度显著降低

☞思考题

1、有两台车床生产同一种型号的钢球，根据以往的经验可以认为，这两台机床生产的钢球的直径均服从正态分布。现从这两台车床生产的产品中分别抽出8个和9个钢球，测得钢球的直径如下（单位：mm）：

甲车床：15.0，14.5，15.2，15.5，14.8，15.1，15.2，14.8；

乙车床：15.2，15.0，14.8，15.2，15.0，15.0，14.8，15.1，14.9。

试问据此是否可以认为乙车床生产的产品的方差比甲车床小（α=0.05）？

解： 提出假设 $H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2;\ H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$

选取检验统计量

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F\left(n_1-1,n_2-1\right)$$

查表得，$F_\alpha\left(n_1-1,n_2-1\right)=F_{0.05}\left(7,8\right)=3.50$

由样本观察值具体计算，得

$$s_1^2 = 0.096 \qquad s_2^2 = 0.026$$

又 $$F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0.096}{0.026} = 3.69 > 3.50$$

故应拒绝H_0，即可以认为乙车床产品的直径的方差比甲车床小。

§5 分布假设检验

前面介绍的各种小样本参数的假设检验，都是在正态母体的条件下进行的。但是在许多实际问题中，人们事先对母体的分布类型并不知道。

所谓 分布假设检验 就是对母体分布作某项假设，用母体中抽取的子样检验此项假设是否成立。在母体分布上作的假设可分为二类：

1.假设母体的分布是已知分布

假设 $H_0 : F(x) = F_0(x)$，$F_0(x)$ 为已知分布函数

例：检验一颗骰子六面是否均匀，可作假设H_0：骰子出现的点数X分布列为

X	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

2.假设母体分布的类型是已知的，即作假设 $H_0: F(x)=F_0(x;\theta_1,\ldots,\theta_k)$ ，其中 F_0 形式已知，而参数 $\theta_1,\ldots,\theta_k$ 未知

例：检验母体X的分布为正态分布，即作假设

$$H_0: F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$ ，其中 μ,σ^2 未知

下面介绍 χ^2 检验法，检验假设H_0

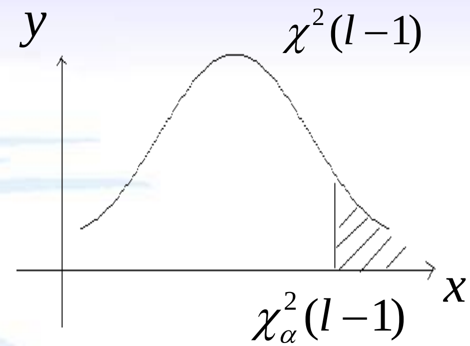
（1）当假设分布已知，母体分布是只有有限多项的离散分布。其步骤为：

1）设 $A_1,A_2,\ldots,A_l$ 为两两不相容事件完备组，即$\bigcup_{i=1}^{l}A_i=U, A_iA_j=\phi(i\neq j)$

作假设$H_0: p(A_i)=p_i(i=1,2,\ldots,l), p_1,p_2,\ldots,p_l$ 为已知数。

2）选取统计量

抽出一子样，得到 A_i出现的实际频数分布为(n)



事件： $A_1, A_2, \ldots, A_l$

实际频数： $m_1, m_2, \ldots, m_l$ $\quad \sum_{i=1}^{l} m_i = n$

理论频数： $np_1, np_2, \ldots, np_l$

子样的实际频数对理论频数偏差的加权平方和

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$$

当H0成立时，n很大（$n \ge 50$）时，由K.Pearson定理得：

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2(l-1)$$

$$\boldsymbol{f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}}$$

皮尔逊（K.Pearson）定理

设 $P(A_i) = p_i, i = 1,2,\ldots,l$，其中 $p_1, p_2, \ldots, p_l$ 是已知数。则

$\boldsymbol{\chi^2(n)}$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\chi^2 \le x\} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{l-1}{2}}\Gamma\left(\dfrac{l-1}{2}\right)} x^{\frac{l-1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & , x \ge 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

即当 $n \to \infty$ 时 χ^2 按分布收敛到自由度为 $l-1$ 的 χ^2 分布。

3）给定显著性水平 $\alpha(0<\alpha<1)$，由 χ^2 分布性质有

$$p\{\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(l-1)\} = \alpha$$

从而得到H_0的拒绝域

$$w = \{\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(l-1)\}$$

4）根据样本值可得

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$$

5）根据 χ_0^2 值作出判断，$\chi_0^2 \in w$，拒绝H_0，否则接受H_0。

例：检验一颗骰子的六个面是否匀称（$\alpha=5\%$），现在掷120次，结果如下：

点数	1，	2，	3，	4，	5，	6
频数	21，	28，	19，	24，	16，	12

解：

1、做检验假设

$$H_0: p\{x=1\}=1/6, p\{x=2\}=1/6,\ldots, p\{x=6\}=1/6$$

2、构造统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{l}\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$$

当H_0成立时，$\chi^2 \sim \chi^2(l-1)=\chi^2(5)$

3、当 $\alpha=0.05$时，可得

$$p\{\chi^2 \geq \chi^2_{0.05}(l-1)\}=0.05$$

知拒绝域为 $w=\{\chi^2 \ge 11.07\}$

4、据样本值得

理论频数 $120\times\frac{1}{6}=20,20,\dots,20$

则 $\chi_0^2=\frac{(21-20)^2}{20}+\cdots+\frac{(21-20)^2}{20}=8.1$

5、则可得 $\chi_0^2<\chi_{0.05}^2(5)$ ，则接受H_0，可认为匀称。

（2）假设母体分布形式为已知，参数未知的假设

1）作假设 $H_0: F(x) = F_0(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)$，其中 F_0 已知，$\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ 未知。

2）据大样本（$n \geq 50$），利用极大似然估计法，得到 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ 极大似然估计 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots,\hat{\theta}_k$ 代入 F_0 的表达式，可得

$$F(x) = F_0\left(x;\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_k\right)$$（已知函数）

3）构造统计量

将子样分为 l 组，分点为 $a_0,a_1,\ldots,a_l$，将 $(-\infty,+\infty)$ 分为 $l+1$ 个区间（通常为7-14个区间且理论 np_i 不少于5）

$$(a_0,a_1],(a_1,a_2],\ldots,(a_{l-1},a_l]$$

并计算概率

$$p_i = F(a_i) - F(a_{i-1}) = F_0\left(a_i;\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_k\right) - F_0\left(a_{i-1};\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_k\right)$$

即可得到

（2）假设母体分布形式为已知，参数未知的假设

1） 作假设 $H_0: F(x)=F_0(x;\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k)$，其中 F_0 已知，$\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k$ 未知。

2）据大样本（$n\geq 50$），利用极大似然估计法，得到 $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k$ 极大似然估计 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\dots,\hat{\theta}_k$ 代入 F_0 的表达式，可得

$$F(x)=F_0\left(x;\hat{\theta}_1,\dots,\hat{\theta}_k\right)$$（已知函数）

3）构造统计量

将子样分为 l 组，分点为 $a_1,\dots,a_{l-1}$，将 $(-\infty,+\infty)$ 分为 l 个区间

（通常为7-14个区间且理论 np_i 不少于5） $(a_0,a_1],(a_1,a_2],\dots,(a_{l-1},a_l]$

$$(-\infty,a_1],(a_1,a_2],\dots,(a_{l-2},a_{l-1}],(a_{l-1},+\infty)$$

并计算概率

$$p_i=F(a_i)-F(a_{i-1})=F_0\left(a_i;\hat{\theta}_1,\dots,\hat{\theta}_k\right)-F_0\left(a_{i-1};\hat{\theta}_1,\dots,\hat{\theta}_k\right)\quad i=2,3,\cdots,l-1$$

$$p_1=F_0\left(a_1;\hat{\theta}_1,\dots,\hat{\theta}_k\right),\quad p_l=1-F_0\left(a_{l-1};\hat{\theta}_1,\dots,\hat{\theta}_k\right)$$

即可得到

分组	$(-\infty, a_1]$	$(a_1, a_2]$	$\cdots$	$(a_{l-1}, -\infty)$
理论概率	p_1	p_2	$\cdots$	p_l
理论频数	np_1	np_2	$\cdots$	np_l
实际频数	m_1	m_2	$\cdots$	m_l

得

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$$

当H_0成立时，由K.Pearson定理知 $\chi^2 \sim \chi^2(l-k-1)$

k为未知参数个数

4）给定α，由 χ^2 分布性质有

$$p\{\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(l-k-1)\} = \alpha$$

从而得到H_0的拒绝域

$$w = \{\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(l-k-1)\}$$

5)据样本值可得

$$\chi_0^2=\sum_{i=1}^{l}\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$$

6）据 χ_0^2 值作出判断，$\chi_0^2\in w$，拒绝H_0，否则接受H_0。

例： 考察某电话交换站一天中电话接错次数X，统计267天的记录，各天电话接错次数的频数分布列成下表：

i(一天电话接错次数)	0-2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	≥16
m_i（天数）	1	5	11	14	22	43	31	40	35	20	18	12	7	6	2

试检验X的分布与泊松分布有无显著差异？（$\alpha=5\%$）

解： 1、作检验假设 $H_0: p_k = p\{x=k\} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, (k=0,1,2,\ldots)$

因参数 λ 为未知，由极大似然估计得

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{267}(2\times1+3\times5+\cdots+15\times6+16\times2) = 8.74$$ P25例2.1.4

则可假设

$$H_0: p_k = p\{x=k\} = \frac{e^{-8.74}8.74^k}{k!}, (k=0,1,2,\ldots)$$

2、构造统计量

子样的理论概率算出为 $p_k = p\{x=k\} = \dfrac{e^{-8.74}8.74^k}{k!}$

理论频数 $np_k = 267\times\dfrac{e^{-8.74}8.74^k}{k!}$

则可得到 np_i 2.05 4.76 10.39 $\cdots$ 4.33 4.65

将理论频数小于5的合并，则可得组数 $l=13$

统计量为 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{13}\dfrac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$

当H_0成立时，$\chi^2 \sim \chi^2(l-k-1)$

3、当$\alpha = 0.05$时，可得

$$p\left\{\chi^2 \geq \chi^2_{0.05}(13-1-1)\right\} = 0.05$$

则得拒绝域为

$$w = \left\{\chi^2 \geq 19.675\right\}$$

4、据样本值可得

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{13} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 7.8$$

5、据 $\chi_0^2 \notin w$，则接受H_0，与泊松分布无显著差异。

例3.3.1（P67）

☞思考题

1、有一正四面体，将此四面体分别涂为红、黄、蓝、白四色。现在任意的抛掷它直到它的白色的一面与地面相接触为止。记录其抛掷的次数，作为一盘试验。作200盘这样的试验，结果如下：

抛掷次数	1	2	3	4	≥5
频数	56	48	32	28	36

问该四面体是否均匀（α=0.05）？即检验母体X是否满足下面的分布律：

X	1	2	3	4	≥ 5
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$\frac{81}{256}$
np_i	50	37.5	28.125	21.094	63.281
m_i	56	48	32	28	36
$\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$	0.72	2.94	0.53	2.27	11.76

解：（1）建立假设H_0:母体X的分布律为上述分布律或四面体分布均匀。

（2）在H_0成立的前提下，构造统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}\sim\chi^2(4)$$

（3）由样本计算

$$\chi^2=\frac{(56-50)^2}{50}+\frac{\left(48-200\times\frac{3}{16}\right)^2}{200\times\frac{3}{16}}+\cdots+\frac{\left(36-200\times\frac{81}{256}\right)^2}{200\times\frac{81}{256}}$$

$$\approx 18.22$$

（4）查表得，$\chi^2_{0.05}(4)=9.488$

（5）比较得，$\chi^2>\chi^2_{0.05}(4)$，故拒绝H_0，即认为这个四面体分布不均匀

Thank you!