《最优化理论与方法》试卷

课程号 S2222207　　考试时间 100 分钟

适用专业年级（方向）：　硕士、博士 2021 级等

考试方式及要求：　闭卷笔试，分 A,B 题的最优化 1-4 班做 A 题，最优化 5 班做 B 题。

题　号	一	二	三	四	五	总分
得　分						
阅卷人						

姓名　学号　教学班号　年级　专业

密　封　线

一、判断题（每小题 3 分，共 30 分，在括号里面打√或×）

1、若线性规划有最优解，则它一定有基可行解为最优解。（ √ ）

2、动态规划是解决多阶段决策过程的一种有效方法。（ √ ）

3、设$f(x)$是二次可微函数，若$f(x)$在凸集S上是严格凸函数，则$f(x)$在任意点$x\in S$的$\nabla^2 f(x)$正定。（× ）

4、凸规划问题的任一局部最优解都是它的全局最优解。（ √ ）

5、单目标规划问题和多目标规划问题的解都有多种，包括绝对最优解、劣解、有效解（或非劣解，Pareto 解）或弱有效解（或弱非劣解，弱 Pareto 解）。（ × ）

6、对偶问题最优解的经济解释是资源的影子价格。（ √ ）

7、约束优化问题

$$\min f(x)$$
$$s.t.\begin{cases} g_i(x)\ge 0, i=1,2,\cdots,m \\ h_j(x)=0, j=1,2,\cdots,l \end{cases}$$

的外罚函数$P(x,M)=f(x)+M(\sum_{j=1}^{l}\left[h_j(x)\right]^2+\sum_{i=1}^{m}[max(0,g_i(x))]^2)$，

其中M为充分大的正数。（×　）

8、FR 共轭梯度法的初始搜索方向必须取最速下降方向，才满足二次终止性(经过有限次迭代必达到极小点的性质)。（ √ ）

9、阻尼牛顿法需要利用一维搜索方法计算步长因子；而牛顿算法的步长因子不需要计算，它为 1.（√　）

10、内部罚函数法适用于具有等式约束的多维约束优化问题。（ × ）

二、简答题（每小题 6 分，共 30 分）

1、简要说明静态规划（线性和非线性规划）建模步骤与动态规划建模步骤的异同。

答：（1）静态规划的建模步骤为确定决策变量、确定目标函数和确定约束条件。（2 分）

（2）动态规划的建模步骤为划分阶段、正确选择状态变量、确定决策变量以及允许决策集合、确定状态转移方程、确定阶段指标函数和最优指标函数，建立动态规划基本方程。（2 分）

（3）动态规划的建模步骤比静态规划的建模步骤不同的是增加了划分阶段、选择状态变量、确定状态转移方程三步；余下的两步与静态规划的建模步骤类似，都有确定决策变量、目标函数和约束条件，但其含义有所不同。（2 分）

2、最优化 1-4 班做 A 题，最优化 5 班做 B 题。

设无约束优化问题$min f(x)$的目标函数为$f(x)=\frac{1}{2}x^TQx+b^Tx+c$，其中$Q$是正定矩阵：

A. 试写出最速下降算法解决该问题的详细步骤，并简要说明其优缺点。

答：求解目标函数的梯度为 $g(x)=Qx+b$， $g_k=g(x_k)=Qx_k+b$，搜索方向：从 x_k 出发，沿 $-g_k$ 作直线搜索以确定 x_{k+1}。

姓名 学号 教学班号 年级 专业 密 封 线

Step1：选定 x_0，计算 f_0, g_0

Step2：做一维搜索，$f_{k+1} = \min_t f\left(x_k + tg_k\right)$，$x_{k+1} = x_k + tg_k$.

Step3：判别，若满足精度要求，则停止；否则，置 k=k+1，转步 2。（4 分）

优缺点：最速下降法在初始点收敛快，算法简单，在最优点附近有锯齿现象，收敛速度慢。（2 分）

B. 证明该问题存在唯一全局最优解，且用牛顿法计算该问题时，仅需一步迭代就可得到最优解。

证明：该函数的 Hesse 阵恰好为正定矩阵 Q，根据凸函数的二阶判定条件可知 f(x) 为严格凸函数，而严格凸函数具有唯一全局最优解。（2 分）

另一方面，原问题的梯度 $g = Qx + b$，由一阶条件知原问题最优解 x^* 满足 $\nabla f(x^*) = Qx^* + b = 0$，即全局唯一最优解为 $x^* = -Q^{-1}b$. (2 分)

而根据牛顿法迭代公式：

$$x^{(1)} = x^{(0)} - G^{-1}g = x^{(0)} - Q^{-1}\left(Qx^{(0)} + b\right) = -Q^{-1}b$$

所以 $x^{(1)} = x^* = -Q^{-1}b$，即迭代一次可得全局唯一最优解。(2 分)

3、最优化 1-4 班做 A 题，最优化 5 班做 B 题。

A. 请阐述黄金分割法与 Fibonacci 法的不同点？

答：（1）搜索区间长度的缩短率不同，黄金分割法是 0.618，Fibonacci 法是 Fibonacci 数；（2 分）（2）黄金分割法是近似最优的，Fibonacci 法是最优策略；（2 分）（3）黄金分割法不需要计算搜索次数，而 Fibonacci 法需要；（1 分）（4）计算试点的公式不同，黄金分割法不变，而 Fibonacci 法有变化。（1 分）

B. 为何内部罚函数法中，罚因子要随算法迭代而逐渐缩小？

答：因为带约束的优化问题的最优解往往在可行域边界处取得（2 分），而内部罚函数法会使得迭代点越靠近可行域边界就受到越大的惩罚，从而不易达到最优解（2 分），为了使得迭代点靠近可行域边界处的最优解就不得不逐渐缩小罚因子减小惩罚。（2 分）

4、约束优化问题中

$$\min f(x)$$
$$s.t.\begin{cases} g_i(x) \geq 0, i = 1,2,\cdots,m \\ h_j(x) = 0, j = 1,2,\cdots,l \end{cases}$$

什么是有效约束？什么是可行方向？什么是下降方向？什么是可行下降方向？

答：有效约束：若 $g_j(x^0)=0$，这时点 x^0 处于该约束条件形成的可行域边界上，它对 x^0 的摄动起到某种限制作用。（1 分）

可行方向：x^0 是可行点，某方向 p，若存在实数 $\lambda_0>0$，使得它对任意 $\lambda\in[0,\lambda_0]$，均有 $x^0+\lambda p$为可行点，则称方向 p 是点 x^0 的可行方向。（2 分）

下降方向：某一可行点 x^0，对该点的任一方向 p 来说，若存在实数 $\lambda_0'>0$，使对任意 $\lambda\in[0,\lambda_0']$均有 $f\left(x^0+\lambda p\right)<f\left(x^0\right)$，就称方向 p 为 x^0 点的一个下降方向。（2 分）

可行下降方向：既是可行方向，又是下降方向。（1 分）

5、最优化 1-4 班做 A 题，最优化 5 班做 B 题

A. 请列出三种用“惩罚”思想求解最优化问题的方法，并指出它们分别能够求解什么优化问题？

答：（1）外点法：它可通过求解一系列多维无约束非线性规划问题以获取多维约束非线性规划问题；（2 分）

内点法：它可通过求解一系列多维无约束非线性规划问题以获取只有不等式约束的多维约束非线性规划问题；（2 分）

乘子法：它只通过取足够大的惩罚因子、不必趋于无穷大求解有限个多维无约束非线性规划问题以获取只有不等式约束的多维约束非线性规划问题。（2 分）

B. 证明多目标规划问题中，目标函数的任意分量的最优解为原问题的弱

姓名 学号 教学班号 年级 专业 密 封 线

有效解.

答：设多目标规划问题的目标函数为 $f(x)=\left(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x)\right)$，设$x_k^*$为单目标优化问题$\min f_k(x)$的最优解，其中$f_k(x)$为 $f(x)$的任意分量。（2 分）显然对任意可行解 x，都有$f_k(x_k^*)\le f_k(x)$成立，这表明对任意可行解 x 都不可使得 $f(x)$严格优于 $f(x_k^*)$，根据弱有效解的定义，x_k^*即为原问题的弱有效解。（4 分）

三、（20 分）已知线性规划问题如下：

$$\min z=4x_1+x_2$$
$$s.t.\begin{cases}3x_1+x_2=3\\9x_1+3x_2\ge 6\\x_1+2x_2\le 3\\x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

(1) 用大 M 法求解该线性规划问题（10 分）；

(2) 写出该问题的对偶问题（4 分）；

(3) 写出该问题的 MatLab 求解代码（6 分）。

解：（1）根据题意约束条件 1 和 2 可以合并为 1，引入松弛变量 x3，x4，构造新问题。

$$\min \quad z=4x_1+x_2+Mx_3+0*x_4$$

$$s.t.\begin{cases}3x_1+x_2+x_3 \qquad =3\\x_1+2x_2 \qquad +x_4=3\\x_1,\cdots x_4\ge 0\end{cases}$$ (2 分)

	$c_j \to$		4	1	M	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4
M	x_3	3	[3]	1	1	0
0	x_4	3	1	2	0	1
	c_j-z_j		4-3M	1-M	0	0
4	x_1	1	1	1/3	1/3	0
0	x_4	2	0	[5/3]	-1/3	1
	c_j-z_j		0	-1/3	M -4/3	0
4	x_1	3/5	1	0	2/5	-1/5
1	x_2	6/5	0	1	-1/5	3/5
	c_j-z_j		0	0	M-7/5	1/5

(6 分)

因检验数σ_j>0，表明已求得最优解： $X^* = (3/5, 6/5)$

(2 分)

（2）根据题意约束条件 1 和 2 可以合并为 1，对偶问题为

$$\max \ \omega = 3y_1 + 3y_2$$

$$s.t. \begin{cases} 3y_1 + y_2 \le 3 \\ y_1 + 2y_2 \ \le 3 \\ y_1\text{无约束，} \ y_2 \le 0 \end{cases}$$

(4 分)

（3）
```
f=[4;1];
A=[-9,-3;1,2];
b=[-6;3];
Aeq=[3,1];
beq=3;
lb=[0;0];
```
(4 分)

```
[x,fval] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb)
```
(2 分)

姓名 学号 教学班号 年级 专业 密 封 线

姓名　学号　教学班号　年级　专业　密　封　线

四、（12 分）已知非线性规划问题如下：

$$\min\ f(\mathrm{x}) = x_1^{\ 2} + 8x_2^{\ 2},$$

其中 $\mathrm{x} = (x_1, x_2)^T$，给定初始点 $\mathrm{x}_0 = (1, 1)^T$。

（1）求函数f的梯度和 Hesse 阵，并判断其凸性(4 分)；

（2）用牛顿法求解（8 分）。

解：（1）f 的梯度为 $\nabla f(x) = (2x_1, 16x_2)^T$;　（1 分）

f 的 Hesse 阵为 $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$.　（2 分）

因 f 的 Hesse 阵在 R 上正定，从而 f 在 R 上为严格凸函数。　（1 分）

（2）$g_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \end{bmatrix} \neq 0, G_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$ 求解方程 $G_1 P_1 = -g_1$，$G_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & \\ & 1/16 \end{bmatrix}$，

$P_1 = -G_1^{-1} g_1 = -\begin{bmatrix} 1/2 & \\ & 1/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$。　（5 分）

于是 $x_2 = x_1 + P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。　（3 分）

姓名 学号 教学班号 年级 专业 密 封 线

五、（8 分）最优化 1-4 班做 A 题，最优化 5 班做 B 题。

A. 求出下述非线性规划问题的 K-T 点：

$$f(x) = (x_1-2)^2 + (x_2-1)^2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1{}^2 + x_2 \ge 0 \\ -x_1 - x_2 + 2 \ge 0 \end{cases}$$

解：满足 K-T 条件的点 $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1-2) \\ 2(x_2-1) \end{bmatrix}$， （2 分）

$\nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$， （2 分）

$$\begin{cases} 2(x_1-2)+2\alpha_1 x_1+\alpha_2=0 \\ 2(x_2-1)-\alpha_1+\alpha_2=0 \\ \alpha_1(-x_1{}^2+x_2)=0 \\ \alpha_2(-x_1-x_2+2)=0 \\ -x_1{}^2+x_2\ge 0 \\ -x_1-x_2+2\ge 0 \\ \alpha_1,\alpha_2\ge 0 \end{cases}$$

，解得：$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \\ \alpha_1=2/3 \\ \alpha_2=2/3 \end{cases}$. （4 分）

故 $\bar{x}=(1,\ 1)^T$ 是该非线性规划问题的 K-T 点。

B. 设集合 $S=\{(x_1,x_2)|x_1^2-x_2\le 0, x_1^2-2x_1-x_2+2\le 0\}$

（1）求证：S为凸集；（3 分）

（2）求证：(1,1)是集合S中距点$\left(\frac{5}{4},0\right)$最近的点。（5 分）

证明：(1)由于$x_2=x_1^2$和$x_2=x_1^2-2x_1+2=(x_1-1)^2+1$ 都为开口向上的二次函数，所以其上图$S_1=\{(x_1,x_2)|x_1^2-x_2\le 0\}$和$S_2=\{(x_1,x_2)|x_1^2-2x_1-x_2+2\le 0\}$均为凸集（2 分），而两个凸集的交集也是凸集，故 $S=S_1\cap S_2$为凸集（1 分）。

（2）该问题其实就是验证(1,1)为带约束优化问题

$$\min\left(x_1-\frac{5}{4}\right)^2+(x_2-0)^2$$
$$s.t.\ (x_1,x_2)\in S$$

的最优解,因为该问题是凸规划问题，只需验证(1,1)为该问题的 K-T 点。(2 分)

设 $f(x)=\left(x_1-\frac{5}{4}\right)^2+x_2^2, g_1(x)=x_1^2-x_2, g_2(x)=x_1^2-2x_1-x_2+2$, λ_1, λ_2为常数，则该问题的 K-T 条件为 (2 分)

$$\begin{cases} \nabla_x f(x)+\lambda_1\nabla_x g_1(x)+\lambda_2\nabla_x g_2(x)=0 \\ \lambda_1 g_1(x)=0 \\ \lambda_2 g_2(x)=0 \\ g_1(x), g_2(x)\le 0 \\ \lambda_1, \lambda_2\ge 0 \end{cases}$$

因为$x^*=(1,1)^T$满足$g_1(x^*)=0$，$g_2(x^*)=0$,所以g_1, g_2都是有效约束，故$\lambda_1, \lambda_2>0$,再将$x^*=(1,1)^T$代入$\nabla_x f(x)+\lambda_1\nabla_x g_1(x)+\lambda_2\nabla_x g_2(x)=0$ 中解得$\lambda_1=0.25>0$，$\lambda_2=1.75>0$,满足条件，所以$x^*=(1,1)^T$是满足 K-T 条件的最优解。（1 分）

姓名 学号 教学班号 年级 专业

密 封 线