1.2 从总体中抽取容量为 60 的子样，它的频数分布如下表：

观测值 x_i	1	3	6	26
频数 m_i	8	40	10	2

求子样均值与子样方差，并求子样标准差.

1.4 若从某总体中抽取容量为 13 的子样：

$$-2.1,3.2,0,-0.1,1.2,-4,2.22,2.01,1.2,-0.1,3.21,-2.1,0$$

试写出这个子样的顺序统计量、子样中位数和极差. 如果再抽取一个样品为 2.7 构成一个容量为 14 的子样，求子样中位数.

1.6 从同一总体抽得的两个子样，其容量分别为 n_1 和 n_2，设这两个子样的均值分别为 $\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$，子样方差分别为 S_1^2 和 S_2^2. 现将两个子样合并在一起，问容量为 n_1+n_2 的联合子样的均值 $\overline{X}$ 与方差 S^2 分别是什么？

1.7 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自总体 $X\sim N(0,2^2)$ 的简单随机样本

$$Y=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$$

则当 $a=$ ________，$b=$ ________ 时，统计量 Y 服从 χ^2 分布，其自由度为 ________.

1.9 设总体 $X \sim N(0, 2^2)$，而 $X_1, X_2, \cdots, X_{15}$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则随机变量

$$Y = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + X_{12}^2 + \cdots + X_{15}^2)}$$

服从________分布，参数为________.

1.13 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 分别是从分布为 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 两个总体中抽取的随机子样，$\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别表示 X 和 Y 的子样均值

$$S_x^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2, \quad S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$$

分别表示 X 和 Y 的子样方差. 对任意两个固定的实数 a 和 b，试求随机变量

$$Y = \frac{a(\overline{X} - \mu_1) + b(\overline{Y} - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}{m+n-2}}\sqrt{\dfrac{a^2}{m} + \dfrac{b^2}{n}}}$$

的概率分布.

1.17 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自总体 $N(0, 0.3^2)$ 的一个容量为 10 的样本，求

$$P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right\}$$

√ 1.2 从总体中抽取容量为 60 的子样，它的频数分布如下表：

观测值 x_i	1	3	6	26
频数 m_i	8	40	10	2

求子样均值与子样方差，并求子样标准差.

$N=60,\quad f(x_i)=\frac{m_i}{N}$

1.2 解：子样均值 $\bar{x}=\sum_{i=1}^{4} x_i f(x_i)$

$=\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \frac{m_i}{N}$

$=1\times\frac{8}{60}+3\times\frac{40}{60}+6\times\frac{10}{60}+26\times\frac{2}{60}$

$=4$

子样方差 $S_n^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2\cdot m_i$

$=\frac{1}{60}\times[(1-4)^2\times8+(3-4)^2\times40+(6-4)^2\times10+(26-4)^2\times2]$

$=18.678$

子样无偏方差 $S^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2\cdot m_i$

$=\frac{1}{59}\times1120$

≈18.983

子样标准差 $S=\sqrt{S^2}=\sqrt{18.98}=$ 4.351

1.4 若从某总体中抽取容量为 13 的子样:

$$-2.1, 3.2, 0, -0.1, 1.2, -4, 2.22, 2.01, 1.2, -0.1, 3.21, -2.1, 0$$

试写出这个子样的顺序统计量、子样中位数和极差. 如果再抽取一个样品为 2.7 构成一个容量为 14 的子样,求子样中位数.

1.4. 这个子样的顺序(次序)统计量为

$-4, -2.1, -2.1, -0.1, -0.1, 0, 0, 1.2, 1.2, 2.01, 2.22, 3.2, 3.21$ 2.7

子样中位数 $x_{(\frac{13+1}{2})} = x_{(7)} = 0$

子样极差 $R = x_{(13)} - x_{(1)} = 3.21 - (-4) = 7.21$

当增加子样本 2.7 后,子样中位数为 $\tilde{x} = \frac{1}{2}(x_{(7)} + x_{(8)}) = \frac{1}{2}(0+1.2) = 0.6$

知识点 $\tilde{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & n\text{为奇数} \\ \frac{1}{2}\left(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}\right) & n\text{为偶数.} \end{cases}$

1.6 从同一总体抽得的两个子样，其容量分别为 n_1 和 n_2，设这两个子样的均值分别为 $\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$，子样方差分别为 S_1^2 和 S_2^2。现将两个子样合并在一起，问容量为 n_1+n_2 的联合子样的均值 $\overline{X}$ 与方差 S^2 分别是什么？

1.6 解：由题意知

设 $\overline{x}_1 = \frac{1}{n_1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_1})$

$\overline{x}_2 = \frac{1}{n_2}(x_1' + x_2' + \cdots + x_{n_2}')$

则联合子样的均值 $\overline{x}$ 为

$$\overline{x} = \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_{n_1}) + (x_1'+x_2'+\cdots+x_{n_2}')}{n_1+n_2}$$

$$= \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2}{n_1+n_2}$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \overline{x}_1)^2$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(x_i' - \overline{x}_2)^2$$

$$S^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_{n_1}-\overline{x})^2+(x_1'-\overline{x})^2+(x_2'-\overline{x})^2+\cdots+(x_{n_2}'-\overline{x})^2}{n_1+n_2-1}$$

$$\therefore (n_1+n_2-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 - 2n_1\overline{x}_1\overline{x} + n_1\overline{x}^2 + \sum_{j=1}^{n_2} x_j'^2 - 2n_2\overline{x}_2\overline{x} + n_2\overline{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 + \sum_{j=1}^{n_2} x_j'^2 - 2\overline{x}(n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2) + n_1\overline{x}^2 + n_2\overline{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 + \sum_{j=1}^{n} x_j'^2 - 2(n_1+n_2)\overline{x}^2 + (n_1+n_2)\overline{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 + \sum_{j=1}^{n_2} x_j'^2 - (n_1+n_2)\overline{x}^2$$

又因为 $(n_1-1)S_1^2=\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x}_1)^2=\sum_{i=1}^{n_1}x_i^2-n_1\bar{x}_1^2$

$\therefore \sum_{i=1}^{n_1}x_i^2=(n_1-1)S_1^2+n_1\bar{x}_1^2$

同理 $\sum_{j=1}^{n_2}x_j'^2=(n_2-1)S_2^2+n_2\bar{x}_2^2$

$\therefore (n_1+n_2-1)S^2=(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2+n_1\bar{x}_1^2+n_2\bar{x}_2^2-(n_1+n_2)\bar{x}^2$

而 $n_1\bar{x}_1^2+n_2\bar{x}_2^2-(n_1+n_2)\bar{x}^2$

$$=n_1\bar{x}_1^2+n_2\bar{x}_2^2-(n_1+n_2)\cdot\frac{(n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2)^2}{(n_1+n_2)^2}$$

$$=n_1\bar{x}_1^2+n_2\bar{x}_2^2-\frac{(n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2)^2}{n_1+n_2}$$

$$=\frac{n_1(n_1+n_2)\bar{x}_1^2+n_2(n_1+n_2)\bar{x}_2^2-(n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2)^2}{n_1+n_2}$$

$$=\frac{n_1^2\bar{x}_1^2+n_1n_2\bar{x}_1^2+n_1n_2\bar{x}_2^2+n_2^2\bar{x}_2^2-n_1^2\bar{x}_1^2-n_2^2\bar{x}_2^2-2n_1n_2\bar{x}_1\bar{x}_2}{n_1+n_2}$$

$$=\frac{n_1n_2(\bar{x}_1^2+\bar{x}_2^2-2\bar{x}_1\bar{x}_2)}{n_1+n_2}$$

$$=\frac{n_1n_2(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{n_1+n_2}$$

$$\therefore (n_1+n_2-1)s^2=(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2+\frac{n_1n_2(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{n_1+n_2}$$

$$\therefore s^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-1}+\frac{n_1n_2(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{(n_1+n_2-1)(n_1+n_2)}$$

1.7 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自总体 $X\sim N(0,2^2)$ 的简单随机样本

$$Y=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$$

则当 $a=$________, $b=$________时，统计量 Y 服从 χ^2 分布，其自由度为________.

1.7 由题意得 $X\sim N(0,2^2)$

$E(X_1-2X_2)=EX_1-2EX_2=0-0=0$

$D(X_1-2X_2)=DX_1+4DX_2=5\cdot 2^2$

同理 $E(3X_3-4X_4)=3EX_3-4EX_4=0-0=0$

$D(3X_3-4X_4)=9DX_3+16DX_4=25\cdot 2^2=10^2$

$\therefore X_1-2X_2\sim N(0,5\cdot 2^2)$ $\quad 3X_3-4X_4\sim N(0,10^2)$

则 $\frac{X_1-2X_2}{2\sqrt{5}}\sim N(0,1)$ $\quad \frac{3X_3-4X_4}{10}\sim N(0,1)$

要使 Y 服从 χ^2 分布，则需 $\sqrt{a}(X_1-2X_2)\sim N(0,1)$

$\sqrt{b}(3X_3-4X_4)\sim N(0,1)$

$\therefore \sqrt{a}=\frac{1}{2\sqrt{5}}$ $\quad \sqrt{b}=\frac{1}{10}$

$\therefore a=\frac{1}{20}=0.05$ $\quad b=\frac{1}{100}=0.01$

同时统计量 Y 服从自由度为 2 的 χ^2 分布.

1.9 设总体 $X \sim N(0,2^2)$，而 $X_1, X_2, \cdots, X_{15}$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则随机变量

$$Y=\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2)}$$

服从______分布，参数为______.

1.9. 由于 $X \sim N(0, 2^2)$ 所以 $\frac{X}{2} \sim N(0,1)$

$\therefore \frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{4} \sim \chi^2(10)$

同理 $\frac{(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2)}{4} \sim \chi^2(5)$

则 $Y = \dfrac{\dfrac{\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{4}}{10}}{\dfrac{\frac{X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2}{4}}{5}} = \dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2)}$

$\therefore$ Y 服从 $F(10,5)$ 即 Y 服从 F 分布，参数为 $(10,5)$.

1.13 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 分别是从分布为 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 两个总体中抽取的随机子样，$\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别表示 X 和 Y 的子样均值

$$S_x^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2, \quad S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$$

分别表示 X 和 Y 的子样方差. 对任意两个固定的实数 a 和 b，试求随机变量

$$Y = \frac{a(\overline{X}-\mu_1)+b(\overline{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_x^2+(n-1)S_y^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{n}}}$$

的概率分布.

1.13，由题意得 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2) \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$

则 $\overline{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma^2}{m}) \quad \overline{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma^2}{n})$

且 $\overline{X}-\mu_1 \sim N(0, \frac{\sigma^2}{m}) \quad \overline{Y}-\mu_2 \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$

则 $E(a(\overline{X}-\mu_1)+b(\overline{Y}-\mu_2)) = aE(\overline{X}-\mu_1)+bE(\overline{Y}-\mu_2) = 0$

$D(a(\overline{X}-\mu_1)+b(\overline{Y}-\mu_2)) = a^2 D\overline{X} + b^2 D\overline{Y}$

$= a^2 \cdot \frac{\sigma^2}{m} + b^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n}$

$= (\frac{a^2}{m} + \frac{b^2}{n})\sigma^2$

$$\therefore \frac{a(\bar{X}-\mu_1)+b(\bar{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{n}\right)\sigma^2}} \sim N(0,1)$$

而 $\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$

定理1.3.3（P15）

$$\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

由卡方分布的可加性知 $\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2)$

由t分布的定义知

$$Y=\frac{\dfrac{a(\bar{X}-\mu_1)+b(\bar{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{n}\right)\sigma^2}}}{\sqrt{\dfrac{\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{\sigma^2}}{m+n-2}}}=\frac{a(\bar{X}-\mu_1)+b(\bar{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}\cdot\left(\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{n}\right)}}$$

$$\therefore \quad Y \sim t(m+n-2)$$

√ **1.17** 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 是来自总体 $N(0,0.3^2)$ 的一个容量为 10 的样本，求

$$P\left\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\right\}$$

1.17 解：由题意知 $X\sim N(0,0.3^2)$

则 $\frac{X}{0.3}\sim N(0,1)$

而 $P\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\}=P\{\sum_{i=1}^{10}(\frac{X_i}{0.3})^2>\frac{1.44}{0.3^2}\}$

$=P\{\sum_{i=1}^{10}\frac{X_i^2}{0.3^2}>16\}$

$=P\{\chi^2\geq\chi_\alpha^2(10)\}=\alpha$ 令 $\chi_\alpha^2(10)=16$

经查表知 $\chi_{0.1}^2(10)=15.99\approx16$

$\therefore\alpha=0.1$

即 $P\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\}=0.1$