西南石油大学
《最优化理论与方法》习题

简答题

1. 简述最优化问题的算法的一般迭代格式及其收敛性和停止准则。常见的最优化算法有哪些，分别用于解决哪些问题.
2. 简述最速下降法下降方向和步长的选取原理，分析算法的优缺点.
3. 简述线性规划问题单纯形法的基本原理，解的可能性和出现的位置.
4. 什么是凸优化，凸优化问题相比其他优化问题有什么好处？
5. 简述惩罚函数法的基本思想和适用范围.
6. 简述黄金分割法和斐波那契法的区别和联系.
7. 总结利用 Matlab 求解线性规划、0-1 规划、非线性规划、动态规划和多目标规划等问题的命令和函数.
8. 总结牛顿类数值算法，指出这些算法的主要区别.
9. 为何最速下降法会产生锯齿现象，锯齿现象对算法会产生怎样的影响？
10. 线性规划的可行域非空，则最优解有哪些情况，这些解分别会出现在可行域的什么位置？
11. 凸性在最优化问题里面扮演着怎样的作用？
12. 用内部罚函数法求解带不等式约束的优化问题时，为何每步迭代时要缩小惩罚系数？

计算题

1. 求解下列线性规划问题:

(1) $\max\ -x_1+3x_2+x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3 & \le 7, \\ -2x_1+4x_2 & \le 12, \\ -4x_1+3x_2+8x_3 & \le 10, \\ x_1,x_2,x_3 & \ge 0. \end{cases}$$

(2) $\min\ -3x_1-x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1+3x_2+x_3 & =30, \\ 4x_1-4x_2+x_4 & =16, \\ 2x_1-x_2 & \le 12, \\ x_1\,x_2,x_3,x_4 & \ge 0. \end{cases}$$

(3) $\max\ 3x_1-5x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -x_1+2x_2+4x_3 & \le 4, \\ x_1+x_2+2x_3 & \le 5, \\ -x_1+2x_2+x_3 & \ge 1, \\ x_1,x_2,x_3 & \ge 0. \end{cases}$$

(4) $\min\ x_1-3x_2+x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3 & =8, \\ 2x_1+x_2 & \ge 2, \\ x_1+2x_2 & \le 10, \\ x_1\,x_2,x_3 & \ge 0. \end{cases}$$

(5) $\min\ 3x_1-2x_2+x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3 & =1, \\ 2x_1+3x_2 & \ge 8, \\ x_1,x_2,x_3 & \ge 0. \end{cases}$$

(6) $\min\ 2x_1-3x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3 & \ge 3, \\ x_1-x_2+x_3 & \ge 2, \\ x_1\,x_2,x_3 & \ge 0. \end{cases}$$

2. 求解下列函数的梯度和 Hesse 阵, 并判断其凸性:

(1) $f(X) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - x_2$

(2) $f(X) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$

(3) $f(X) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_2 + 2$

(4) $f(X) = x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + 1)^2$

(5) $f(X) = 8x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2$

3. 用外点罚函数法解下列问题:

$$\begin{aligned} &\min x_1^2 + x_2^2 \\ &\text{s.t. } x_1 + x_2 = 1. \end{aligned}$$

4. 用内点罚函数法解下列问题:

$$\begin{aligned} &\min (x+1)^2 \\ &\text{s.t. } x \geq 0. \end{aligned}$$

5. 求函数:

$$f(x) = (x_1 + x_2 + 6)^2 + (2 - 3x_1 - 3x_2 - x_1x_2)^2$$

在点 $\hat{x} = (-4, 6)^T$ 处的牛顿方向和最速下降方向.

6. 用乘子法解下列问题:

(1) $$\begin{aligned} &\min x_1^2 + x_2^2 \\ &\text{s.t. } x_1 \geq 1. \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} &\min x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + 1)^2 \\ &\text{s.t. } x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 1. \end{aligned}$$

7. 判断点 $\bar{x} = (0, 2)^T$ 是否为下述非线性规划问题的 K-T 点:

$$\min (x_1 - \frac{9}{4})^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1^2 + x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

8. 求下述非线性规划问题的 **K-T** 点:

$$\min x_1^2 - x_2 - 3x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 \geq 0, \\ x_1^2 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

9. 用共轭梯度法解下列问题:

(1) $\min 0.5x_1^2 + x_2^2$, 初始点 $x^{(1)} = (0, -2)^T$

(2) $\min (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$, 初始点 $x^{(1)} = (1, 3)^T$

(3) $\min 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2$, 初始点 $x^{(1)} = (2, -2)^T$

10. 分别用动态规划的逆序法和顺序法解下列问题:

$$\max 8x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 10x_3 & = 10, \\ x_1 x_2, x_3 & \geq 0. \end{cases}$$

11. 用线性加权法解下列问题:(取 $\lambda_1 = 0.6, \lambda_2 = 0.4$)

$$v - \min F(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2, 2x_1 + x_2)^T$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 & \leq 6, \\ x_1 + 3x_2 & \leq 3, \\ 2x_1 - x_2 & \leq 2, \\ x_1 x_2 & \geq 0. \end{cases}$$

10. 证明正交向量组是共轭向量组, 共轭矩阵正定的共轭向量组是线性无关的.
11. 设优化问题的目标函数为:

$$f(X) = \frac{1}{2}X^T AX + b^T X + c$$

证明其梯度和 Hesse 阵分别为 $AX + b$ 和 A.

12. Ω 是凸锥当且仅当其满足下述条件：$\forall x, y \in \Omega, \lambda \geq 0, x+y \in \Omega$ 且 $\lambda x \in \Omega$
13. 证明点集 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset R$ 的凸包与这些点的凸组合全体构成的集合是一样的.
14. 证明任意两个锥的交集和并集都是锥，进一步的，证明任意两个凸锥的交集也是凸锥，思考任意两个凸锥的并集是否是凸锥，若是给出证明，若不是给出反例.
15. 证明用牛顿法求解凸正定二次规划问题只需迭代一次就达到全局最优解.