3.1 从已知标准差 $\sigma=2.5$ 的正态母体中，抽取容量为 $n=16$ 的子样，由它算得子样均值为 $\bar{x}=27.56$，试在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，检验假设 $H_0:\mu=26$ 是否成立.

3.5 某批矿砂的 5 个样品中的镍含量(%)经测定为

$$3.25,\ 3.27,\ 3.24,\ 3.26,\ 3.24$$

设测定值服从正态分布. 问在显著水平 $\alpha=0.01$ 下，能否认为这批矿砂的(平均)镍含量超过了 3.235%.

3.6 从某种试验物中取出 24 个样品，测量其发热量，计算得 $\bar{x}=11958$，子样标准差 $s=323$，问以 5% 的显著水平是否可认为发热量的期望值小于 12100(假定发热量服从正态分布)?

3.8 某纺织厂在正常的运转条件下，各台布机一小时内经纱平均断头数为 0.973 根. 该厂进行工艺改革，减少经纱上浆率. 在 200 台布机上进行试验，结果每台一小时内经纱平均断头数为 0.954 根，标准差为 0.162 根，问新工艺经纱断头数与旧工艺有无显著差异(取显著性水平 $\alpha=0.05$)?

3.9 某产品的次品率为 0.17. 现对此产品进行新工艺试验，从中抽取 400 件检验，发现有次品 56 件. 试检验采用新工艺后产品的质量有无显著地提高(取显著性水平 $\alpha=0.05$)?

3.12 某电场器材厂生产一种保险丝. 测量其熔化时间，正常情况的方差为 400. 今从某天产品中抽取容量为 25 的子样，测量其熔化时间并计算得 $\overline{x}=62.24$，子样方差 $s^2=404.77$. 要求保险丝熔化时间分散度(即方差)不超过 400，问该天生产的保险丝熔化时间是否符合这一要求(假定熔化时间服从正态分布，取显著性水平 $\alpha=0.01$)?

3.15 在十块试验田上同时试种甲、乙两种品种作物，根据产量计算得

$$\overline{x}=30.97, s_x=26.7, \overline{y}=21.79, s_y=21.1$$

试问这两种品种产量有无显著差异（假定两种作物产量都服从正态分布且方差相等，取显著性水平 $\alpha=0.05$)?

3.18 机床厂某日从两台机器所加工的同一种零件中分别抽取若干个零件测试尺寸，得样本方差如下：

从第一台机器加工的零件中抽取 11 个，$s_1^2=0.064$；

从第二台机器加工的零件中抽取 9 个，$s_2^2=0.030$.

假设零件尺寸均服从正态分布，问这两台机器的加工精度是否有显著差异(取 $\alpha=0.05$)?

小结——一个正态总体均值(μ)的假设检验

对母体（或子样）要求		正态母体方差σ_0^2已知	正态母体方差σ_0^2未知
所用函数及其分布		$U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S^*/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
假设(拒绝域)	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$\lvert U\rvert\geq u_{\frac{\alpha}{2}}$	$\lvert T\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$H_0:\mu\geq\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	置信上限：$P\{-U_\alpha<U\}=1-\alpha$ $U\leq -u_\alpha$	$T\leq -t_\alpha(n-1)$
	$H_0:\mu\leq\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$	置信下限：$P\{U<U_\alpha\}=1-\alpha$ $U\geq u_\alpha$	$T\geq t_\alpha(n-1)$

小结——一个正态总体方差(σ^2)的假设检验

对母体（或子样）要求		正态母体
所用函数及其分布		$\chi^2=(n-1)\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$
假设(拒绝域)	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或$\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$	置信下限：$P\{\chi^2<\chi^2_\alpha\}=1-\alpha$ $\chi^2\ge\chi^2_\alpha(n-1)$
	$H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$	置信上限：$P\{\chi^2_{1-\alpha}<\chi^2\}=1-\alpha$ $\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

小结—两个正态总体均值(μ)的假设检验

对母体（或子样）要求		两个正态母体方差 σ_1^2和σ_2^2均已知	两个正态母体方差 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$均未知
检验统计量		$U=\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}$	$T=\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}S^*}$
假设(拒绝域)	$H_0:\mu_1=\mu_2$ $H_1:\mu_1\neq\mu_2$	$\lvert U\rvert\geq u_{\frac{\alpha}{2}}$	$\lvert T\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$
	$H_0:\mu_1\geq\mu_2$ $H_1:\mu_1<\mu_2$	$U\leq -u_\alpha$	$T\leq -t_\alpha(n_1+n_2-2)$
	$H_0:\mu_1\leq\mu_2$ $H_1:\mu_1>\mu_2$	$U\geq u_\alpha$	$T\geq t_\alpha(n_1+n_2-2)$

小结—两个正态总体方差(σ^2)的假设检验

对母体（或子样）要求		两个正态母体
检验统计量		$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$
假设(拒绝域)	$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或$F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$
	$H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$F\ge F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
	$H_0:\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$F\le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$

$$F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)=\frac{1}{F_{\alpha}(n_2-1,n_1-1)}$$

3.1 从已知标准差 $\sigma=2.5$ 的正态母体中，抽取容量为 $n=16$ 的子样，由它算得子样均值为 $\bar{x}=27.56$，试在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，检验假设 $H_0:\mu=26$ 是否成立.

3.1 解：在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，提出检验假设.

$H_0:\ \mu=26$ $\quad$ $H_1:\ \mu\neq 26$

构造统计量为

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

由题意得 $\bar{x}=27.56$ $\quad \sigma=2.5$ $\quad n=16$ 代入得

$$|U|=\left|\frac{27.56-26}{2.5/\sqrt{16}}\right|=2.496$$

当 H_0 为真时，其拒绝域为 $\{|U|>u_{\frac{\alpha}{2}}\}$，

查表知 $u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96<|U|$

∴ 拒绝原假设，即 $\mu=26$ 不成立.

3.5 某批矿砂的 5 个样品中的镍含量(%)经测定为

$$3.25,\ 3.27,\ 3.24,\ 3.26,\ 3.24$$

设测定值服从正态分布. 问在显著水平 $\alpha=0.01$ 下,能否认为这批矿砂的(平均)镍含量超过了 3.235%.

3.5. 解: 在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下,提出检验假设

H_0: $u \le 3.235\%$　　H_1: $u > 3.235\%$

构造统计量

$$T=\frac{\bar{x}-u_0}{S/\sqrt{n}}$$

则其拒绝域为 $\{T \geq t_\alpha(n-1)\}$

由题意得 $\bar{x}=\frac{3.25+3.27+3.24+3.26+3.24}{5}\cdot 0.01=3.252\%$

样本方差为 $S^2=\frac{0.01^2}{5-1}[(3.25-3.252)^2+(3.27-3.252)^2+(3.24-3.252)^2\cdot 2$
$+(3.26-3.252)^2]=1.7\times 10^{-8}$

则有 $T=\frac{(3.252-3.235)\cdot 0.01}{S/\sqrt{n}}=\frac{0.017\cdot 0.01}{\sqrt{\frac{1.7\times 10^{-8}}{5}}}\approx 2.92$

而查表可知

$$t_\alpha(n-1)=t_{0.01}(4)=3.746>T$$

∴ 接受原假设. 即认为这批矿砂的镍含量没超过3.235%

3.6 从某种试验物中取出 24 个样品，测量其发热量，计算得 $\bar{x}=11958$，子样标准差 $s=323$，问以 5% 的显著水平是否可认为发热量的期望值小于 12100（假定发热量服从正态分布）？

3.6 解：在显著性水平 $\alpha=5\%$ 下，提出检验假设

$H_0: u \geq 12100 \qquad H_1: u < 12100$

构造统计量 $T=\dfrac{\bar{x}-u_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

其拒绝域为 $\{T \leq -t_\alpha(n-1)\}$

由题意得 $\bar{x}=11958 \quad S=323 \quad u_0=12100. \quad n=24$

查表可知 $t_{0.05}(n-1)=t_{0.05}(23)=1.713$

故有 $T=\dfrac{11958-12100}{323/\sqrt{24}} \approx -2.15 < -t_{0.05}(23)$

故拒绝原假设．即可认为发热量的期望值小于12100

3.6 从某种试验物中取出 24 个样品，测量其发热量，计算得 $\bar{x}=11958$，子样标准差 $s=323$，问以 5% 的显著水平是否可认为发热量的期望值小于 12100（假定发热量服从正态分布）？

3.6 解：在显著性水平 $\alpha=5\%$ 下，提出检验假设

$H_0: \mu \leq 12100 \qquad H_1: \mu > 12100$

构造统计量 $T=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

其拒绝域为 $\{T \geq t_\alpha(n-1)\}$

由题意得 $\bar{x}=11958 \quad S=323 \quad \mu_0=12100. \quad n=24$

查表可知 $t_{0.05}(n-1)=t_{0.05}(23)=1.713$

故有 $T=\dfrac{11958-12100}{323/\sqrt{24}} \approx -2.15 < t_{0.05}(23)$

故接受原假设，即可认为发热量的期望值小于12100

3.8 某纺织厂在正常的运转条件下，各台布机一小时内经纱平均断头数为 0.973 根. 该厂进行工艺改革，减少经纱上浆率. 在 200 台布机上进行试验，结果每台一小时内经纱平均断头数为 0.954 根，标准差为 0.162 根，问新工艺经纱断头数与旧工艺有无显著差异(取显著性水平 $\alpha=0.05$)?

3.8 解：在显著性水平 $\alpha=0.05$，提出检验假设.

$H_0: \mu=\mu_0 \qquad H_1: \mu \neq \mu_0$

构造统计量为

$$U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$$，其中 $\bar{X}=0.954$. $\sigma=0.162$

则拒绝域为 $\{|U|>u_{\frac{\alpha}{2}}\}$

查表可知 $u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$ 又 $n=200$ $\mu_0=0.973$

而 $|U|=\left|\dfrac{0.954-0.933}{0.162/\sqrt{200}}\right|=\dfrac{0.019\cdot 10\sqrt{2}}{0.162}=1.66<u_{\frac{\alpha}{2}}$

故接受原假设，即新工艺经纱断头数与旧工艺无显著差异.

3.9 某产品的次品率为 0.17. 现对此产品进行新工艺试验，从中抽取 400 件检验，发现有次品 56 件. 试检验采用新工艺后产品的质量有无显著地提高(取显著性水平 $\alpha=0.05$)?

解：　母体X的分布是二点分布B(1,p),即

$$P\{X=1\}=p, P\{X=0\}=1-p$$

在母体上作假设 $H_0: p \geq p_0$ **(**$p_0=0.17$**)，**$H_1: p < p_0$

令n=400，m=56,

又 $p_0 = 0.17$

故 $U = \dfrac{\frac{m}{n} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

近似服从标准正态分布 $H_0: p \geq p_0$

给定显著性水平$\alpha = 0.05$，拒绝域可表示为

$$\{U < -u_\alpha\}$$

计算可得

$$U = \frac{\frac{m}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{\frac{56}{400} - 0.17}{\sqrt{\frac{0.17 \times 0.83}{400}}} = -1.596$$

查表得：

$$u_\alpha = 1.65，即U > -u_\alpha$$

故接受H_0，即可以认为采用新工艺后产品的质量没有显著性提高。

3.12 某电场器材厂生产一种保险丝. 测量其熔化时间，正常情况的方差为 400. 今从某天产品中抽取容量为 25 的子样，测量其熔化时间并计算得 $\overline{x}=62.24$，子样方差 $s^2=404.77$. 要求保险丝熔化时间分散度(即方差)不超过 400，问该天生产的保险丝熔化时间是否符合这一要求(假定熔化时间服从正态分布，取显著性水平 $\alpha=0.01$)?

3.12 在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下，提出假设检验

$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2 \quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

构造统计量为

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

其拒绝域为 $\{\chi^2 \geqslant \chi^2_{\alpha}(n-1)\}$

查表知 $\chi^2_{0.01}(25-1) = \chi^2_{0.01}(24) = 42.98$

由题意得 $S^2 = 404.77 \quad \sigma_0^2 = 400 \quad n=25$

计算得 $\chi^2 = \frac{24 \cdot 404.77}{400} = 24.29 < \chi^2_{\alpha}(n-1)$，

故接受原假设，即该天生产的保险丝熔化时间分散度"不超过400"这一要求 ~~度~~ 符合.

3.15 在十块试验田上同时试种甲、乙两种品种作物，根据产量计算得

$$\bar{x}=30.97, s_x=26.7, \bar{y}=21.79, s_y=21.1$$

试问这两种品种产量有无显著差异（假定两种作物产量都服从正态分布且方差相等，取显著性水平 $\alpha=0.05$）？

3.15 解：在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，提出检验假设

$H_0: \mu_1=\mu_2 \qquad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

构造统计量

$$T=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\,S^*} \qquad \text{其中 } S^*=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_x^2+(n_2-1)S_y^2}{n_1+n_2-2}}$$

其拒绝域为 $|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$

由题意得 $\bar{x}=30.97$，$\bar{y}=21.79$ $S_x=26.7$ $S_y=21.1$

$n_1=n_2=10$ 代入得

$$T=\frac{30.97-21.79}{\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}\cdot\sqrt{\frac{9\cdot 26.7^2+9\cdot 21.1^2}{10+10-2}}}$$

$$=\frac{9.18}{\sqrt{\frac{1}{5}\times\frac{26.7^2+21.1^2}{2}}}\approx 0.853$$

查表知 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(18)=2.100$

故 $|T|<t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$

∴ 接受原假设，即认为两种品种产量无显著差异.

3.18 机床厂某日从两台机器所加工的同一种零件中分别抽取若干个零件测试尺寸，得样本标准差如下：

从第一台机器加工的零件中抽取 11 个，$s_1^2=0.064$；

从第二台机器加工的零件中抽取 9 个，$s_2^2=0.030$.

假设零件尺寸均服从正态分布，问这两台机器的加工精度是否有显著差异（取 $\alpha=0.05$）？

3.18 解：在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，提出检验假设

$H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2 \qquad H_1: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

构建统计量

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$$

则拒绝域为 $\{F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\}\cup\{F\geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\}$

由题意得 $S_1^2=0.064 \qquad S_2^2=0.030$

$n_1=11 \qquad n_2=9$

查表知 $F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(10,8)=4.30$

$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.975}(10,8)=\dfrac{1}{F_{0.025}(8,10)}=\dfrac{1}{3.85}\approx0.26$

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{0.064}{0.03}\approx2.13$$

$\therefore\ F<F_{0.025}(10,8)$ 且 $F>F_{0.975}(10,8)$

故接受原假设，即两台机器的加工精度没有显著性差异.