M23 – Gekoppelte Pendel

Protokoll zum Versuch des Physikalischen Praktikums I
von
Julian Molt & Valentin Stopper

Universität Stuttgart

Verfasser:	Julian Molt (Physik), 3803097
	Valentin Stopper (Physik), 3774391
Gruppennummer:	A-016
Versuchsdatum:	24.09.2025
Betreuerin:	Lara Zaiser

Stuttgart, den 26. September 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Versuchsziel und Versuchsmethode

2 Grundlagen

Eine Schwingung ist in der Physik eine Bewegung, die sich periodisch wiederholt. Sie wird wesentlich durch zwei Größen charakterisiert: Die Amplitude, welche die maximale Auslenkung aus der Ruhelage ist und die Frequenz, welche der Kehrwert der Schwingungsdauer ist. Die Schwingungsdauer ist die Zeit, die das System benötigt, um wieder in den selben Zustand zu kommen. Die harmonische Schwingung ist eine spezielle Schwingung, bei der die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung ist, wodurch die Schwingung sinusförmig abläuft.

Ein klassisches schwingungsfähiges System ist ein Pendel. Unterschieden wird zwischen mathematischen und physikalischen Pendeln, wobei das mathematische eine Punktmasse betrachtet, die an einer masselosen Aufhängung schwingt. Beim Physikalischen werden hingegen alle Massen und ihre räumlichen Ausdehnungen durch das Trägheitsmoment berücksichtigt.

Werden zwei Pendel gekoppelt, können diese wechselwirken und beeinflussen dann jeweils ihre Bewegungsgleichungen, die als ein paar gekoppelter Differenzialgleichungen vorliegen:

$$J\ddot{\psi}_1 = -Mg\ell_\mathrm{S}\psi_1 - D_\mathrm{F}\ell_\mathrm{H}^2(\psi_1 - \psi_2) \tag{2.1}$$

$$J\ddot{\psi}_2 = -Mg\ell_\mathrm{S}\psi_2 - D_\mathrm{F}\ell_\mathrm{H}^2(\psi_2 - \psi_1) \tag{2.2}$$

Sie setzen sich zusammen aus den rückstellenden Drehmomenten der Gewichtskraft und der Federkraft. Die Schwerpunktmasse M ergibt sich aus der Summe über alle Teilmassen $m, m_\mathrm{H}, m_\mathrm{St}$ und für ihren Abstand zur Drehachse gilt $\ell_\mathrm{S} = \frac{Lm + l_H m_H + 0{,}5 L_{St} m_{St}}{M}$.

Mit den Kreisfrequenzen $\omega_0^2 = \frac{Mgl_s}{J}$ und $\Omega^2 = \frac{D_F l_H^2}{J}$ ergibt sich:

$$\ddot{\psi}_1 + \omega_0^2\psi_1 + \Omega^2(\psi_1 - \psi_2) = 0 \tag{2.3}$$

$$\ddot{\psi}_2 + \omega_0^2\psi_2 - \Omega^2(\psi_2 - \psi_1) = 0 \tag{2.4}$$

Das System aus zwei gekoppelten Pendeln kann drei Schwingungsformen einnehmen: gleichsinnige Schwingung, gegensinnige Schwingung und Schwebung. Die ersten beiden sind dabei die Fundamentalschwingungen des Systems.

Bei der gleichsinnigen Schwingung werden beide Pendel anfangs mit gleichem Winkel $\psi_1 = \psi_2 = \psi_a$ $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$ ausgelenkt, so dass sie in Phase schwingen. Dadurch gilt:

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_a \cos(\omega_0 t) \tag{2.5}$$

Bei der gegensinnigen Schwingung werden die Pendel mit gegensätzlichen Winkeln $-\psi_1 = \psi_2 = \psi_a$ $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$ ausgelenkt. Dadurch gilt

$$\psi_1(t) = \psi_a \cos\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} \cdot t \tag{2.6}$$

$$-\psi_2(t) = \psi_a \cos\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} \cdot t\,. \tag{2.7}$$

Die Schwebung resultiert aus zwei sich überlagernden Schwingungen, mit unterschiedlichen Frequenzen. Dies kann erreicht werden, indem Pendel 1 ausgelenkt wird, während 2 in Ruhe ist: $\psi_1 = \psi_a$ $\psi_2 = 0$ $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$. Nach dem Beginn der Schwingung nimmt die Amplitude von Pendel 1 ab, während die von 2 zunimmt. Dies geschieht, bis 1 stillsteht, dann liegt die vollständige Energie in der Schwingung von Pendel 2 vor. Ab da transferiert Pendel 2 seine Energie wieder an 1 ab. Das Resultat sind 90° zueinander verschobene Schwingungen der Pendel mit an und abnehmenden Amplituden. Damit ergibt sich:

$$\psi_1(t) = \psi_a \cos\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} t \cdot \cos\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} t \tag{2.8}$$

$$\psi_2(t) = \psi_a \sin\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} t \cdot \sin\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} t \tag{2.9}$$

Die Schwingungsdauern lassen sich mit den Kreisfrequenzen $\omega_I = \frac{\sqrt{\omega_0^2+2\Omega^2}-\omega_0}{2} = \frac{\omega_{\text{geg}}-\omega_{\text{gl}}}{2}$ und $\omega_{II} = \frac{\sqrt{\omega_0^2+2\Omega^2}+\omega_0}{2} = \frac{\omega_{\text{geg}}+\omega_{\text{gl}}}{2}$ berechnen: $T_I = \frac{2\pi}{\omega_I}$ $T_{II} = \frac{2\pi}{\omega_{II}}$.

Die Stärke der Kopplung kann durch den Kopplungsgrad beschrieben werden. Dieser setzt die durch die Kopplung übertragene Energie ins Verhältnis zur Gesamtenergie. Er kann durch eine der drei Formeln berechnet werden:

$$K = \frac{D_F l^2}{mgL + D_F l^2} = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 + \Omega^2} \tag{2.10}$$

$$K = \frac{\omega_{\text{geg}}^2 - \omega_{\text{gl}}^2}{\omega_{\text{geg}}^2 + \omega_{\text{gl}}^2} = \frac{T_{gl}^2 - T_{geg}^2}{T_{gl}^2 + T_{geg}^2} \tag{2.11}$$

$$K = \frac{2\omega_I - \omega_{II}}{\omega_I^2 + \omega_{II}^2} = 4 \cdot \frac{T_S T_{II}}{4T_S^2 + T_{II}^2} \tag{2.12}$$

Das Trägheitsmoment J des Pendels kann mit $J = \frac{1}{3} m_{St} L_{St}^2 + m_H l_H^2 + mL^2$ berechnet werden, da die Ausdehnung in die Breite der Massen und des Stabes gegenüber der Länge vernachlässigbar sind und so von Punktmassen ausgegangen werden kann. m_{St},L_{St} sind die Masse und Länge des Stabes, m_H,l_H sind die Masse und der Abstand zur Drehachse des Hakens und m, L sind die Masse des Pendelgewichts und dessen Abstand zur Rotationsachse.

3 Messprinzip mit Skizze und Versuchsablauf

Abbildung 1: Aufbau der Pendel, die hier bei $\ell_{\mathrm{H}} = 70\,\mathrm{cm}$ gekoppelt sind.

4 Formeln

5 Messwerte

Parameter	Pendel 1	Pendel 2
Masse des Pendelkörpers $m\,/\,\mathrm{kg}$	$176{,}97 \cdot 10^{-3}$	$174{,}95 \cdot 10^{-3}$
Masse des Hakens $m_{\mathrm{H}}\,/\,\mathrm{kg}$	$16{,}06 \cdot 10^{-3}$	$15{,}80 \cdot 10^{-3}$
Masse der Stange	$131{,}40 \cdot 10^{-3}$	$131{,}27 \cdot 10^{-3}$
$L\,/\,\mathrm{kg}$	0,804	0,800
$\ell_{\mathrm{H}}\,/\,\mathrm{m}$	0,4	0,4
$L_{\mathrm{St}}\,/\,\mathrm{m}$	0,87	0,87

Tabelle 1: Ungekoppelter gleichsinniger Fall

5.1 40 cm

Pendel	t_0 / s	t_1 / s
1	1,4	35,5
2	1,3	35,4

Tabelle 2: Ungekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	t_0 / s	t_1 / s
1	0,9	34,8
2	0,8	34,8

Tabelle 3: Gekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	t_0 / s	t_1 / s
1	0,4	33,3
2	1,2	34,1

Tabelle 4: Gekoppelter gegensinniger Fall

Pendel	t_0 / s	t_1 / s	t_2 / s	t_3 / s	t_4 / s
1	0,0	52,4	105,8	160,0	211,6
2	25,4	79,5	132,9	185,3	237,8

Tabelle 5: Schwebungsfall

5.2 55 cm

Pendel	t_0 / s	t_1 / s
1	0,8	35,0
2	0,8	34,8

Tabelle 6: Ungekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	t_0 / s	t_1 / s
1	0,5	34,5
2	0,5	34,5

Tabelle 7: Gekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	t_0 / s	t_1 / s
1	1,4	33,6
2	0,6	32,9

Tabelle 8: Gekoppelter gegensinniger Fall

Pendel	t_0 / s	t_1 / s	t_2 / s	t_3 / s	t_4 / s
1	14,8	44,9	74,6	105,2	134,8
2	0,0	29,5	60,2	89,8	119,6

Tabelle 9: Schwebungsfall

5.3 70 cm

Pendel	t_0 / s	t_1 / s
1	1,5	35,8
2	1,5	35,7

Tabelle 10: Ungekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	t_0 / s	t_1 / s
1	0,5	34,7
2	0,5	34,7

Tabelle 11: Gekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	t_0 / s	t_1 / s
1	1,5	33,0
2	0,7	32,2

Tabelle 12: Gekoppelter gegensinniger Fall

Pendel	t_0 / s	t_1 / s	t_2 / s	t_3 / s	t_4 / s
1	0,0	18,1	38,7	58,3	77,8
2	9,0	29,5	49,0	68,6	88,3

Tabelle 13: Schwebungsfall

Pendel	t_0 / s	t_1 / s	t_2 / s	t_3 / s	t_4 / s
1	6,2	26,7	47,1	66,9	85,6
2	16,4	36,9	57,3	77,1	97,4

Tabelle 14: Schwebungsfall für unterschiedlich ausgelenkte Massen

6 Auswertung

T_0 berechnet sich aus den Daten, die in Tabelle 2 eingetragen sind durch

$$T_0 = \frac{t_1 - t_0}{20}\,, \tag{6.1}$$

da zwischen t_0 und t_1 20 Perioden durchlaufen wurden. Damit ergibt sich für Pendel 1

$$T_{0,1} = \frac{35{,}5\,\mathrm{s} - 1{,}4\,\mathrm{s}}{20} = 1{,}7\,\mathrm{s} \tag{6.2}$$

und für Pendel 2 analog ebenfalls $T_{0,2} = 1{,}7\,\mathrm{s}$.

Für den Kopplungsgrad mit $\ell_\mathrm{H} = 40\,\mathrm{cm}$ ergeben sich folgende Periodendauern.

Periodendauer	Links	Rechts	Mittel
T_gl	1,7 s	1,7 s	1,7 s
T_geg	1,6 s	1,6 s	1,6 s
T_II	1,6 s	1,6 s	1,6 s
T_S	52,9 s	53,1 s	53,0 s

Tabelle 15: Periodendauern für ℓ_H

Für den Kopplungsgrad mit $\ell_{\mathrm{H}} = 55\,\mathrm{cm}$ ergeben sich folgende Periodendauern.

Periodendauer	Links	Rechts	Mittel
T_{gl}	1,7 s	1,7 s	1,7 s
T_{geg}	1,6 s	1,6 s	1,6 s
T_{II}	1,6 s	1,6 s	1,6 s
T_{S}	30,0 s	29,9 s	30,0 s

Tabelle 16: Periodendauern für ℓ_{H}

Für den Kopplungsgrad mit $\ell_{\mathrm{H}} = 70\,\mathrm{cm}$ ergeben sich folgende Periodendauern.

Periodendauer	Links	Rechts	Mittel
T_{gl}	1,7 s	1,7 s	1,7 s
T_{geg}	1,6 s	1,6 s	1,6 s
T_{II}	1,6 s	1,6 s	1,6 s
T_{S}	19,5 s	19,8 s	19,6 s

Tabelle 17: Periodendauern für ℓ_{H}

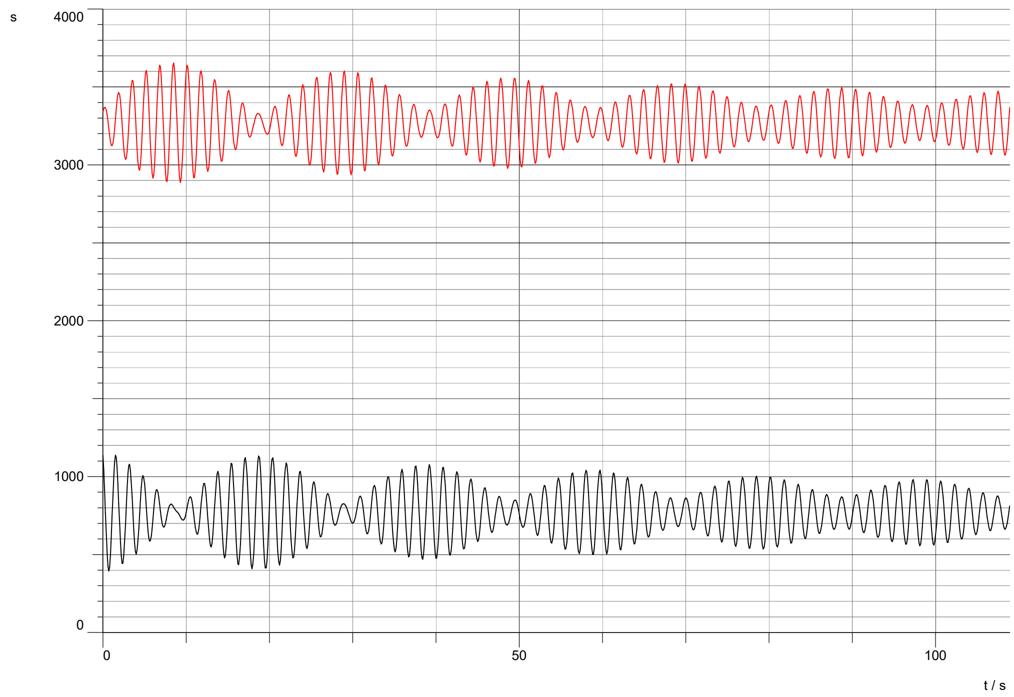

Abbildung 2: Exemplarisches $x(t)$-Diagramm des Schwebungsfalles bei $\ell_\mathrm{H} = 70\,\mathrm{cm}$

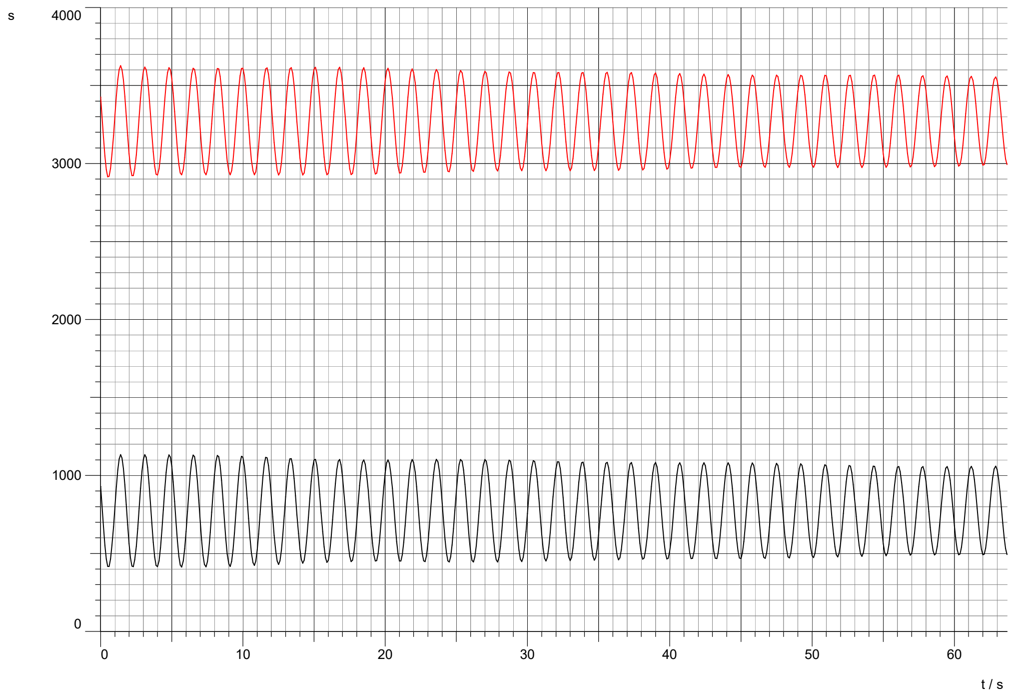

Abbildung 3: Exemplarisches $x(t)$-Diagramm der gleichsinnigen Fundamentalschwingung bei $\ell_{\mathrm{H}} = 70\,\mathrm{cm}$

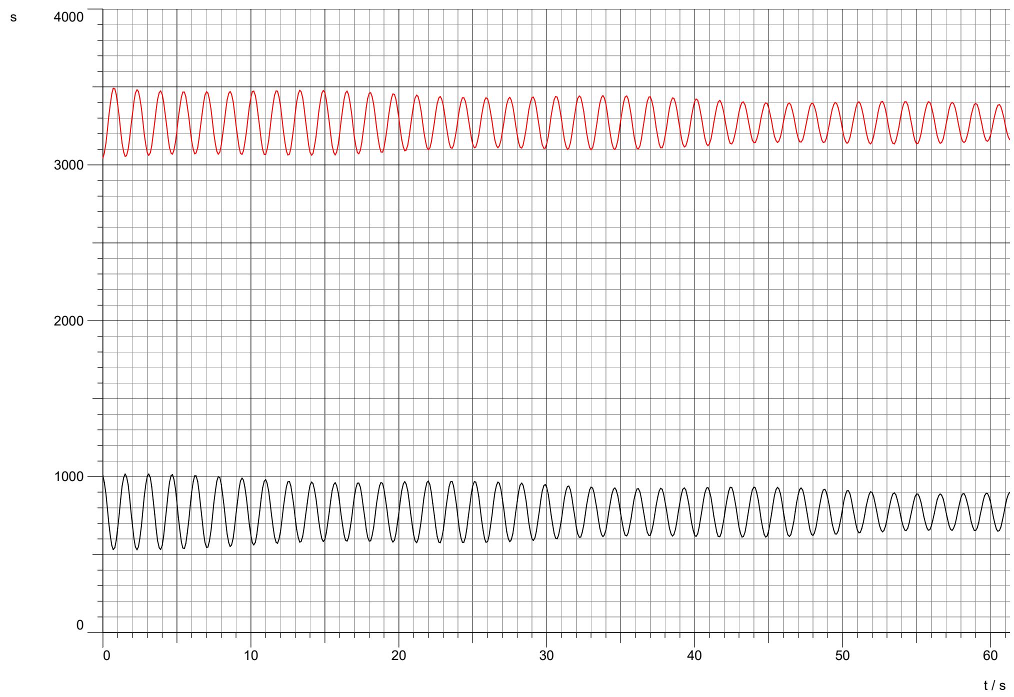

Abbildung 4: Exemplarisches $x(t)$-Diagramm der gegensinnigen Fundamentalschwingung bei $\ell_\mathrm{H} = 70\,\mathrm{cm}$

Nach wird das Gesamtträgheitsmoment mit den Daten aus Tabelle 1 berechnet. Für das erste Pendel ergibt sich das Trägheitsmoment

$$J_1 = \frac{1}{3} \cdot 131{,}40 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}87\,\mathrm{m})^2 + 16{,}06 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}4\,\mathrm{m})^2 + 176{,}97 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}804\,\mathrm{m})^2 = 0{,}150\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{6.3}$$

und für das zweite Pendel $J_2 = 0{,}148\,\mathrm{kg\,m^2}$.

Die Eigenfrequenz ω_0 wird mittels berechnet. Dafür muss zuerst die Lage des Schwerpunktes ℓ_S mit berechnet werden und ergibt

$$\ell_\mathrm{S} = \frac{Lm + \ell_\mathrm{H} m_\mathrm{H} + \frac{1}{2} L_\mathrm{St} m_\mathrm{St}}{m + m_\mathrm{H} + m_\mathrm{St}} \tag{6.4}$$

$$\ell_{\mathrm{S},1} = \frac{0{,}804\,\mathrm{m} \cdot 176{,}97 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} + 0{,}4\,\mathrm{m} \cdot 16{,}06 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} + \frac{1}{2} 0{,}87\,\mathrm{m} \cdot 131{,}40 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{(176{,}97 \cdot 10^{-3} + 16{,}06 \cdot 10^{-3} + 131{,}40 \cdot 10^{-3})\mathrm{kg}} = 0{,}635\,\mathrm{m} \tag{6.5}$$

Für $\ell_{\mathrm{S},2}$ ergibt sich $\ell_{\mathrm{S},1} = 0{,}632\,\mathrm{m}$.

7 Fehlerrechnung

8 Zusammenfassung

9 Literatur

[1] Versuchsanleitung zu (Abgerufen am 1.04.2050)

10 Anhang

Gewicht Pendel 1: 174,95 g (→ 80cm)
Aufhängung Pendel 1: 15,80 g
Haken
Gewicht Pendel 2: 176,97 g (→ 84)
Haken Pendel 2: 16,06 g
Gewicht Pendelstange 2: 131,40 g

Gew. Pendelstange 1: 131,27g

d=0,01g

C. [illegible]

Massen umdrehen?

Kopplungsmasse: 23,77 g

$\boxed{1.}$ Pendel 1: (für 20 Perioden)

	t_0	t_1
Pendel 1	1,4s	35,50s
Pendel 2	1,3s	35,4s

$\boxed{2.}$ Gekoppelt gleichsinnig

20 Perioden

	t_0	t_1
Pendel 1	0,90s	34,85
Pendel 2	0,80s	34,85

Gekoppel gegensinnig

	t_0	t_1
Pendel 1	0,40s	33,30s
Pendel 2	1,20s	34,10s

Nochmal gekoppelt gegensinnig

	t_0	t_1
Pendel 1	0,90s	33,70s
Pendel 2	1,70s	34,60s

Schwebungsfall	t_0	t_1	t_2	t_4	t_5
Pendel 1	0,0s	52,40s	105,80s	160,0s	211,60s
Pendel 2	25,40s	79,50s	132,99s	185,30s	237,80s

$\boxed{l_H = 55cm}$

ungekoppelt (T_0)

	t_0	t_1
Pendel 1	0,80s	35,0s
Pendel 2	0,80s	34,80s

gekoppelt gleichsinnig

	t_0	t_1
Pendel 1	0,50s	34,50s
Pendel 2	0,50s	34,50s

gekoppelt gegensinnig

	t_0	t_1
Pendel 1	1,40s	33,60s
Pendel 2	0,60s	32,90s

Schwebefall

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
Pendel 1	14,80s	44,90s	74,60s	105,20s	134,80s	
Pendel 2	0s	29,5s	60,2s	89,8s	119,6s	

$l_1 = 70\,cm$ 4 Zin

ungekoppelt (T_0)

	t_0	t_1
Pendel 1	7,5	35,8
Pendel 2	7,5	35,7

gekoppelt gleichsinnig

	t_0	t_1
Pendel 1	~~[illegible]~~ 0,5	34,7 s.
Pendel 2	0,5 s	34,7 s

gekoppelt gegensinnig

	t_0	t_1
Pendel 1	7,5 s	33 s
Pendel 2	0,7 s	32,2 s

$T = \frac{20}{37,5} \approx 0,53$

Schweeeeeebungsfall

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
Pendel 1	0	18,7	38,7	58,3	77,8 s
Pendel 2	9,0	29,5	49,0	68,6	88,3

Schwebungsfall beide ausgelenkt

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
Pendel 1	6,2	26,7	47,1	66,9	85,6
Pendel 2	16,4	36,9	57,3	77,1	97,4