

# M23 – Gekoppelte Pendel

Protokoll zum Versuch des Physikalischen Praktikums I  
von  
**Julian Molt & Valentin Stopper**

Universität Stuttgart

Verfasser:	Julian Molt (Physik), 3803097
	Valentin Stopper (Physik), 3774391
Gruppennummer:	A-016
Versuchsdatum:	24.09.2025
Assistentin:	Lara Zaiser

Stuttgart, den 26. September 2025

# **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Versuchsziel</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Messprinzip</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Messwerte</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Auswertung</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Fehlerrechnung</b>	<b>11</b>
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>11</b>
<b>8</b>	<b>Literatur</b>	<b>11</b>
<b>9</b>	<b>Anhang</b>	<b>11</b>

# 1 Versuchsziel und Versuchsmethode

In diesem Versuch soll das Verhalten – insbesondere die Schwingungsdauer – gekoppelter Pendel untersucht werden. Dazu werden mit einer CCD-Kamera die Auslenkungen beider Pendel über die Zeit gemessen und anschließend die Periodendauern aus dem Messprogramm extrahiert.

## 2 Grundlagen

Eine Schwingung in der Physik ist eine Bewegung, die sich periodisch wiederholt. Sie wird wesentlich durch zwei Größen charakterisiert: Die Amplitude, welche die maximale Auslenkung aus der Ruhelage ist und die Frequenz, welche der Kehrwert der Schwingungsdauer ist. Die Schwingungsdauer ist die Zeit, die das System benötigt, um wieder in den selben Zustand zu kommen. Die harmonische Schwingung ist eine spezielle Schwingung, bei der die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung ist, wodurch die Schwingung sinusförmig abläuft.

Ein klassisches schwingungsfähiges System ist ein Pendel. Unterschieden wird zwischen mathematischen und physikalischen Pendeln, wobei das mathematische eine Punktmasse betrachtet, die an einer masselosen Aufhängung schwingt. Beim Physikalischen werden hingegen alle Massen und ihre räumlichen Ausdehnungen durch das Trägheitsmoment berücksichtigt.

Werden zwei Pendel gekoppelt, können diese wechselwirken und beeinflussen dann jeweils ihre Bewegungsgleichungen, die als ein paar gekoppelter Differenzialgleichungen vorliegen

$$J\ddot{\psi}_1 = -Mg\ell_S\psi_1 - D_F\ell_H^2(\psi_1 - \psi_2) \quad (2.1)$$

$$J\ddot{\psi}_2 = -Mg\ell_S\psi_2 - D_F\ell_H^2(\psi_2 - \psi_1), \quad (2.2)$$

wobei  $J$  das Trägheitsmoment eines Pendels ist,  $\psi_i$  die Momentanauslenkung des Pendels,  $g$  die Erdbeschleunigung,  $\ell_S$  die Länge bis zum Schwerpunkt gemessen von der Drehachse,  $\ell_H$  die Länge bis zum Haken – ebenfalls vom Schwerpunkt gemessen,  $D_F$  der Proportionalitätskonstante der Feder und der Schwerpunktmasse  $M$ . Diese ergibt sich als Summe aller Teilmassen  $m$ , der unten angebrachten Masse;  $m_H$ , der Masse des Hakens, um die Pendel zu koppeln und  $m_{St}$ , der Masse der Stange. Für ihren Abstand zur Drehachse, dem Schwerpunkt  $\ell_S$  gilt

$$\ell_S = \frac{Lm + \ell_H m_H + \frac{1}{2}L_{St}m_{St}}{M}. \quad (2.3)$$

Mit den Kreisfrequenzen  $\omega_0^2 = \frac{Mg\ell_s}{J}$  und  $\Omega^2 = \frac{D_F\ell_H^2}{J}$  ergibt sich:

$$\ddot{\psi}_1 + \omega_0^2\psi_1 + \Omega^2(\psi_1 - \psi_2) = 0 \quad (2.4)$$

$$\ddot{\psi}_2 + \omega_0^2\psi_2 + \Omega^2(\psi_2 - \psi_1) = 0 \quad (2.5)$$

Es gibt drei Fälle, wie das System der zwei gekoppelten Pendeln schwingen kann: gleichsinnig, gegensinnig und den Schwebungsfall. Die ersten beiden werden als Fundamentalschwingungen des Systems bezeichnet.

Bei der gleichsinnigen Schwingung werden beide Pendel anfangs mit gleichem Winkel  $\psi_1 = \psi_2 = \psi_a$ ,  $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$  ausgelenkt, sodass sie in Phase schwingen. Diese Randbedingungen führen auf die Lösung

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) = \psi_a \cos(\omega_0 t). \quad (2.6)$$

Bei der gegensinnigen Schwingung werden die Pendel mit gegensätzlichen Winkeln  $-\psi_1 = \psi_2 = \psi_a$ ,  $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$  ausgelenkt. Dadurch gilt

$$\psi_1(t) = \psi_a \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} \cdot t\right) \quad (2.7)$$

$$-\psi_2(t) = \psi_a \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} \cdot t\right). \quad (2.8)$$

Die Schwebung resultiert aus zwei sich überlagernden Schwingungen, mit unterschiedlichen Frequenzen. Dies kann erreicht werden, indem Pendel 1 ausgelenkt wird, während 2 in Ruhe ist:  $\psi_1 = \psi_a$ ,  $\psi_2 = 0$ ,  $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$ . Nach Beginn der Schwingung nimmt die Amplitude von Pendel 1 ab, während die von 2 zunimmt. Dies geschieht, bis 1 stillsteht, dann liegt die vollständige Energie in der Schwingung des zweiten Pendels vor. Ab da transferiert Pendel 2 seine Energie wieder zu 1. Das Resultat sind  $90^\circ$  zueinander phasenverschobene Schwingungen der Pendel mit zu- und abnehmenden Amplituden. Damit ergibt sich:

$$\psi_1(t) = \psi_a \cos \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} t \cdot \cos \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} t \quad (2.9)$$

$$\psi_2(t) = \psi_a \sin \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} t \cdot \sin \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} t \quad (2.10)$$

Die Schwingungsdauern lassen sich mit den Kreisfrequenzen  $\omega_I = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} = \frac{\omega_{\text{geg}} - \omega_{\text{gl}}}{2}$  und  $\omega_{II} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} = \frac{\omega_{\text{geg}} + \omega_{\text{gl}}}{2}$  berechnen:  $T_I = \frac{2\pi}{\omega_I}$ ,  $T_{II} = \frac{2\pi}{\omega_{II}}$ .

Die Stärke der Kopplung kann durch den Kopplungsgrad  $K$  beschrieben werden. Dieser setzt die durch die Kopplung übertragene Energie ins Verhältnis zur Gesamtenergie. Er kann durch eine der drei Formeln berechnet werden:

$$K = \frac{D_F \ell^2}{mgL + D_F \ell^2} = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 + \Omega^2} \quad (2.11)$$

$$K = \frac{\omega_{\text{geg}}^2 - \omega_{\text{gl}}^2}{\omega_{\text{geg}}^2 + \omega_{\text{gl}}^2} = \frac{T_{\text{gl}}^2 - T_{\text{geg}}^2}{T_{\text{gl}}^2 + T_{\text{geg}}^2} \quad (2.12)$$

$$K = \frac{2\omega_I - \omega_{II}}{\omega_I^2 + \omega_{II}^2} = 4 \cdot \frac{T_S T_{II}}{4T_S^2 + T_{II}^2} \quad (2.13)$$

Das Trägheitsmoment  $J$  des Pendels berechnet sich anhand

$$J = \frac{1}{3} \cdot m_{\text{St}} \cdot L_{\text{St}}^2 + m_{\text{H}} \cdot \ell_{\text{H}}^2 + m \cdot L^2, \quad (2.14)$$

da die Ausdehnung in die Breite der Massen und des Stabes gegenüber der Länge vernachlässigbar sind und sie sich so zu Punktmassen reduzieren lassen.  $m_{\text{St}}$  und  $L_{\text{St}}$  sind die Masse und Länge des Stabes,  $m_{\text{H}}$  und  $\ell_{\text{H}}$  sind die Masse und der Abstand zur Drehachse des Hakens und  $m$  und  $L$  sind die Masse des Pendelgewichts und dessen Abstand zur Rotationsachse.

### 3 Messprinzip mit Abbild und Versuchsablauf



Abbildung 1: Aufbau der Pendel, die hier bei  $\ell_{\text{H}} = 70$  cm gekoppelt sind.

Die Pendel werden durch lange, dünne Metallstäbe realisiert, die durch eine Fadenöse auf einem horizontal befestigten Metallstab gelagert sind, und auf deren Enden Gewichte gezogen und dann mit einer Schraube festgezogen werden können. Nach demselben Prinzip werden die Haken als Aufnahmepunkte für die Verbindung zwischen beiden Pendeln über den Gewichten installiert. Um die Pendel zu koppeln wird eine Schnur, die durch eine weitere Masse führt in die Haken eingehängt.

Von einer CCD-Kamera wird die Momentanauslenkung der Massen aufgezeichnet. Dafür sind an den Massen vertikal reflektierende Streifen angebracht. Der Fokus der Kamera wird auf 0,9 m eingestellt. Die Blende wurde auf 11 eingestellt.

Mit einer Metalleiste, an der zwei verschiebbare Stopper angebracht sind, lassen sich die Pendel bestmöglich gleichphasig mit gleicher Amplitude auslenken. Um die gegensinnige Fundamentalschwingung zu erzeugen kann auch das Kopplungsgewicht nach unten gezogen werden.

Nach einer initialen Auslenkung wird im Messprogramm die Aufzeichnung gestartet und für ca. 60 s gemessen. Wird der Schwebungsfall gemessen, sollen mindestens 5 Minima abgewartet werden. Dann wird die Aufzeichnung gestoppt und durch Auswählen der interessanten Punkte im Diagramm die verstrichene Zeit mit der zugehörigen Anzahl an durchlaufenen Perioden notiert.

## 4 Messwerte

Parameter	Pendel 1	Pendel 2
$m / \text{kg}$	$176,97 \cdot 10^{-3}$	$174,95 \cdot 10^{-3}$
$m_{\text{H}} / \text{kg}$	$16,06 \cdot 10^{-3}$	$15,80 \cdot 10^{-3}$
$m_{\text{St}} / \text{kg}$	$131,40 \cdot 10^{-3}$	$131,27 \cdot 10^{-3}$
$L / \text{m}$	0,804	0,800
$\ell_{\text{H}} / \text{m}$	0,4	0,4
$L_{\text{St}} / \text{m}$	0,87	0,87

Tabelle 1: Massen und Längen der zwei Pendel

$t_0$  und  $t_1$  stehen im ungekoppelten Fall, sowie im gekoppelten Fall für die Fundamentalschwingungen stets für Zeitpunkte, zwischen denen 20 Perioden durchlaufen wurden. Im Schwebungsfall sind mit  $t_i$  alle Zeiten vermerkt, zu der das Pendel stillsteht.

Im Folgenden sind die Messwerte für die Position  $\ell_H = 40$  cm tabelliert.

Pendel	$t_0$ / s	$t_1$ / s
1	1,4	35,5
2	1,3	35,4

Tabelle 2: Ungekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	$t_0$ / s	$t_1$ / s
1	0,9	34,8
2	0,8	34,8

Tabelle 3: Gekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	$t_0$ / s	$t_1$ / s
1	0,4	33,3
2	1,2	34,1

Tabelle 4: Gekoppelter gegensinniger Fall

Pendel	$t_0$ / s	$t_1$ / s	$t_2$ / s	$t_3$ / s	$t_4$ / s
1	0,0	52,4	105,8	160,0	211,6
2	25,4	79,5	132,9	185,3	237,8

Tabelle 5: Schwebungsfall

Im Folgenden sind die Messwerte für die Position  $\ell_{\text{H}} = 55 \text{ cm}$  tabelliert.

Pendel	$t_0 / \text{s}$	$t_1 / \text{s}$
1	0,8	35,0
2	0,8	34,8

Tabelle 6: Ungekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	$t_0 / \text{s}$	$t_1 / \text{s}$
1	0,5	34,5
2	0,5	34,5

Tabelle 7: Gekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	$t_0 / \text{s}$	$t_1 / \text{s}$
1	1,4	33,6
2	0,6	32,9

Tabelle 8: Gekoppelter gegensinniger Fall

Pendel	$t_0 / \text{s}$	$t_1 / \text{s}$	$t_2 / \text{s}$	$t_3 / \text{s}$	$t_4 / \text{s}$
1	14,8	44,9	74,6	105,2	134,8
2	0,0	29,5	60,2	89,8	119,6

Tabelle 9: Schwebungsfall



Im Folgenden sind die Messwerte für die Position  $\ell_H = 70$  cm tabelliert.

Pendel	$t_0$ / s	$t_1$ / s
1	1,5	35,8
2	1,5	35,7

Tabelle 10: Ungekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	$t_0$ / s	$t_1$ / s
1	0,5	34,7
2	0,5	34,7

Tabelle 11: Gekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	$t_0$ / s	$t_1$ / s
1	1,5	33,0
2	0,7	32,2

Tabelle 12: Gekoppelter gegensinniger Fall

Pendel	$t_0$ / s	$t_1$ / s	$t_2$ / s	$t_3$ / s	$t_4$ / s
1	0,0	18,1	38,7	58,3	77,8
2	9,0	29,5	49,0	68,6	88,3

Tabelle 13: Schwebungsfall

Pendel	$t_0$ / s	$t_1$ / s	$t_2$ / s	$t_3$ / s	$t_4$ / s
1	6,2	26,7	47,1	66,9	85,6
2	16,4	36,9	57,3	77,1	97,4

Tabelle 14: Schwebungsfall für unterschiedlich ausgelenkte Massen

## 5 Auswertung

$T_0$  berechnet sich aus den Daten, die in Tabelle 2 eingetragen sind durch

$$T_0 = \frac{t_1 - t_0}{20} = \frac{35,5 \text{ s} - 1,4 \text{ s}}{20} = 1,7 \text{ s}. \quad (5.1)$$

Für Pendel 2 folgt analog ebenfalls  $T_0 = 1,7 \text{ s}$ . Somit ist dies auch das Mittel. Dieses Prinzip wird auf alle  $T_{\text{gl}}$  und  $T_{\text{geg}}$  angewendet.

$T_{\text{II}}$  wird durch Gleichung 2 ermittelt.

Bei  $T_{\text{S}}$  wird der erste und der letzte Zeitpunkt des Stillstandes des Pendel, der in der Messdauer liegt auf die Anzahl der Schwebungsdauern in diesem Intervall normiert.

Für den Kopplungsgrad mit  $\ell_{\text{H}} = 40 \text{ cm}$  ergeben sich folgende Periodendauern.

Periodendauer	Links	Rechts	Mittel
$T_{\text{gl}}$	1,7 s	1,7 s	1,7 s
$T_{\text{geg}}$	1,6 s	1,6 s	1,6 s
$T_{\text{II}}$	1,6 s	1,6 s	1,6 s
$T_{\text{S}}$	52,9 s	53,1 s	53,0 s

Tabelle 15: Periodendauern für  $\ell_{\text{H}} = 40 \text{ cm}$

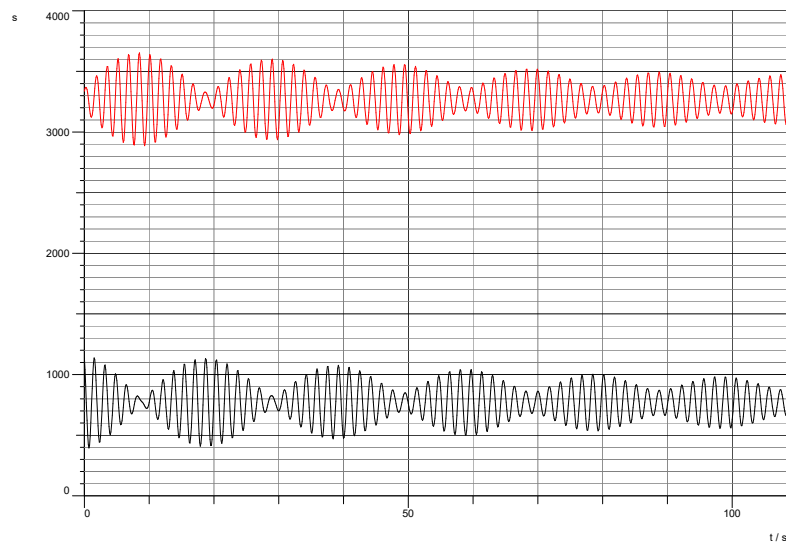
Für den Kopplungsgrad mit  $\ell_{\text{H}} = 55 \text{ cm}$  ergeben sich folgende Periodendauern.

Periodendauer	Links	Rechts	Mittel
$T_{\text{gl}}$	1,7 s	1,7 s	1,7 s
$T_{\text{geg}}$	1,6 s	1,6 s	1,6 s
$T_{\text{II}}$	1,6 s	1,6 s	1,6 s
$T_{\text{S}}$	30,0 s	29,9 s	30,0 s

Tabelle 16: Periodendauern für  $\ell_{\text{H}} = 55 \text{ cm}$

Für den Kopplungsgrad mit  $\ell_{\text{H}} = 70 \text{ cm}$  ergeben sich folgende Periodendauern.

Periodendauer	Links	Rechts	Mittel
$T_{\text{gl}}$	1,7 s	1,7 s	1,7 s
$T_{\text{geg}}$	1,6 s	1,6 s	1,6 s
$T_{\text{II}}$	1,6 s	1,6 s	1,6 s
$T_{\text{S}}$	19,5 s	19,8 s	19,6 s

Tabelle 17: Periodendauern für  $\ell_{\text{H}} = 70 \text{ cm}$ Abbildung 2: Exemplarisches  $x(t)$ -Diagramm des Schwebungsfalles bei  $\ell_{\text{H}} = 70 \text{ cm}$

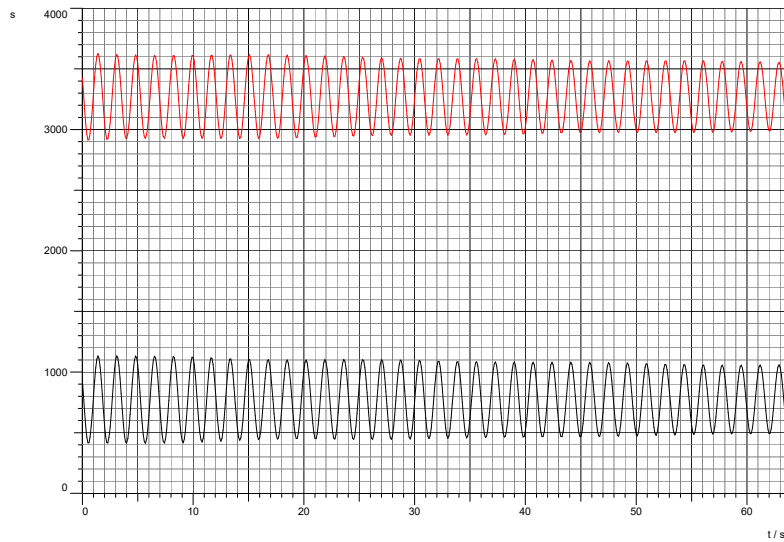


Abbildung 3: Exemplarisches  $x(t)$ -Diagramm der gleichsinnigen Fundamentalschwingung bei  $\ell_H = 70$  cm

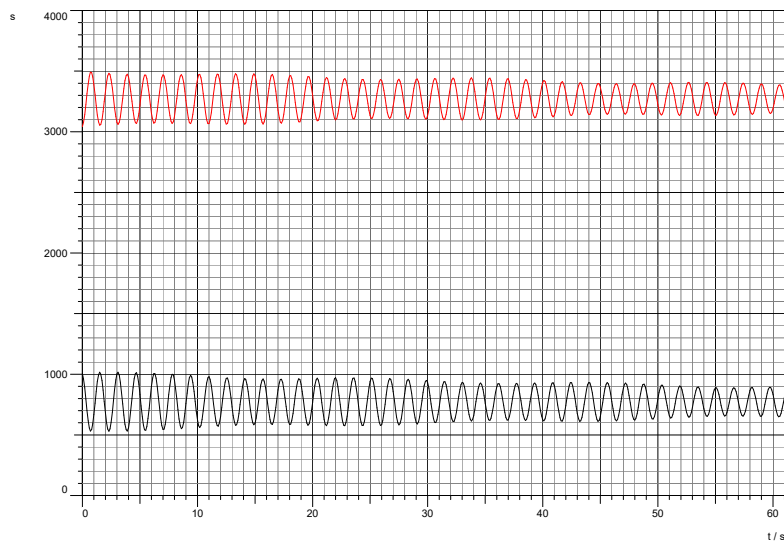


Abbildung 4: Exemplarisches  $x(t)$ -Diagramm der gegensinnigen Fundamentalschwingung bei  $\ell_H = 70$  cm

Nach Gleichung 2.14 wird das Gesamtträgheitsmoment mit den Daten aus

Tabelle 1 berechnet. Für das erste Pendel ergibt sich das Trägheitsmoment

$$J_1 = \frac{1}{3} \cdot 131,40 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot (0,87 \text{ m})^2 + 16,06 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot (0,4 \text{ m})^2 + 176,97 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot (0,804 \text{ m})^2 = 0,150 \text{ kg m}^2 \quad (5.2)$$

und für das zweite Pendel  $J_2 = 0,148 \text{ kg m}^2$ .

Die Eigenfrequenz  $\omega_0$  wird mittels Gleichung 2 berechnet. Dafür muss zuerst die Lage des Schwerpunktes  $\ell_S$  mit berechnet werden und ergibt

$$\ell_S = \frac{Lm + \ell_H m_H + \frac{1}{2} L_{St} m_{St}}{m + m_H + m_{St}} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \ell_{S,1} &= \frac{0,804 \text{ m} \cdot 176,97 \cdot 10^{-3} \text{ kg} + 0,4 \text{ m} \cdot 16,06 \cdot 10^{-3} \text{ kg} + \frac{1}{2} 0,87 \text{ m} \cdot 131,40 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{(176,97 \cdot 10^{-3} + 16,06 \cdot 10^{-3} + 131,40 \cdot 10^{-3}) \text{ kg}} \\ &= 0,635 \text{ m} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Für  $\ell_{S,2}$  ergibt sich  $\ell_{S,1} = 0,632 \text{ m}$ .

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mg\ell_S}{J}} \quad (5.5)$$

## 6 Fehlerrechnung

## 7 Zusammenfassung

## 8 Literatur

[1] Versuchsanleitung zu (Abgerufen am 1.04.2050)

## 9 Anhang



Gewicht Pendel 1:  $\rightarrow 80\text{cm}$  174,95 g

Aufhängung Pendel 1: 75,80 g  
Haken

Gewicht Pendel 2:  $\rightarrow 84$  176,97 g

Haken Pendel 2: 16,06 g

Gewicht Pendelstange 2: 131,40 g

Topplungsmasse: 23,77 g

Gew. Pendelstange 1: 131,27 g

$$d = 0,01 \text{ g}$$

L. 20

Massen umdrehen?

1.	Pendel 1:	$t_0$	$t_1$	(für 20 Perioden)
		1,45	35,50s	
	Pendel 2:	1,35	35,45	

2. Gekoppelt gleichsinnig

	$t_0$	$t_1$
Pendel 1	0,95	34,85
Pendel 2	0,80s	34,85

20 Perioden

Gekoppelt gegensinnig

	$t_0$	$t_1$
Pendel 1	0,40s	33,30s
Pendel 2	1,20s	34,10s

Nochmal gekoppelt gegensinnig

	$t_0$	$t_1$
Pendel 1	0,90s	33,70s
Pendel 2	1,70s	34,60s

Schwebungsfall

	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_4$	$t_5$
Pendel 1	0,0s	52,40s	105,80s	160,0s	211,60s
Pendel 2	25,40s	79,50s	132,90s	185,30s	237,80s



$$l_H = 55 \text{ cm}$$

ungekoppelt ( $T_0$ )

	$t_0$	$t_1$
Pendel 1	0,80s	35,0s
Pendel 2	0,80s	34,80s

gekoppelt gleichsinnig

	$t_0$	$t_1$
Pendel 1	0,50s	34,50s
Pendel 2	0,50s	34,50s

gekoppelt gegensinnig

	$t_0$	$t_1$
Pendel 1	1,40s	33,60s
Pendel 2	0,60s	32,90s

Schwebefall

	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$
Pendel 1	74,80s	44,90s	74,60s	705,20s	734,80s	
Pendel 2	0s	29,5s	60,2s	89,8s	719,6s	



$$l_1 = 70 \text{ cm}$$

Wier

ungekoppelt ( $T_0$ )

	$t_0$	$t_1$
Pendel 1	7,5	35,8
Pendel 2	7,5	39,7

gekoppelt gleichsinnig

	$t_0$	$t_1$
Pendel 1	<del>7,5</del>	34,75
Pendel 2	0,5s	34,75

gekoppelt gegensinnig

	$t_0$	$t_1$
Pendel 1	7,5 s	33 s
Pendel 2	0,7 s	32,2 s

$$T = \frac{20}{37,5} \approx 0,63$$

Schwebefall (0°)

	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$
Pendel 1	0	18,1	38,7	58,3	77,8
Pendel 2	90	29,5	49,0	68,6	88,3

Schwebefall beide ausgelenkt

	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$
Pendel 1	6,2	26,7	47,1	66,9	85,6
Pendel 2	76,4	36,9	57,3	77,1	97,4