

M23 – Gekoppelte Pendel

Protokoll zum Versuch des Physikalischen Praktikums I von
Julian Molt & Valentin Stopper

Universität Stuttgart

Verfasser: Julian Molt (Physik),
3803097

Valentin Stopper (Physik),
3774391

Gruppennummer: A-016

Versuchsdatum: 24.09.2025

Assistentin: Lara Zaiser

Stuttgart, den 29. September 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Versuchsziel	1
2	Grundlagen	1
3	Messprinzip	4
4	Messwerte	5
5	Auswertung	9
6	Fehlerrechnung	13
7	Zusammenfassung	13
8	Anhang	14

1 Versuchsziel und Versuchsmethode

In diesem Versuch soll das Verhalten, insbesondere die Schwingungsdauer, gekoppelter Pendel untersucht werden. Dazu werden mit einer CCD-Kamera die Auslenkungen beider Pendel über die Zeit gemessen und anschließend die Periodendauern aus dem Messprogramm extrahiert.

Zudem wird das Trägheitsmoment berechnet und damit die verschiedenen Kopplungsgrade bestimmt.

2 Grundlagen

Eine Schwingung in der Physik ist eine Bewegung, die sich periodisch wiederholt. Sie wird wesentlich durch zwei Größen charakterisiert: Die Amplitude, welche die maximale Auslenkung aus der Ruhelage ist und die Frequenz, welche der Kehrwert der Schwingungsdauer ist. Die Schwingungsdauer ist die Zeit, die das System benötigt, um wieder in den selben Zustand zu kommen. Die harmonische Schwingung ist eine spezielle Schwingung, bei der die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung ist, wodurch die Schwingung sinusförmig abläuft.

Ein klassisches schwingungsfähiges System ist ein Pendel. Unterschieden wird zwischen mathematischen und physikalischen Pendeln, wobei das mathematische eine Punktmasse betrachtet, die an einer masselosen Aufhängung schwingt. Beim Physikalischen werden hingegen alle Massen und ihre räumlichen Ausdehnungen durch das Trägheitsmoment berücksichtigt.

Werden zwei Pendel gekoppelt, können diese wechselwirken und beeinflussen dann jeweils ihre Bewegungsgleichungen, die als ein paar gekoppelter Differenzialgleichungen vorliegen

$$J\ddot{\psi}_1 = -Mg\ell_S\psi_1 - D_F\ell_H^2(\psi_1 - \psi_2) \quad (1)$$

$$J\ddot{\psi}_2 = -Mg\ell_S\psi_2 - D_F\ell_H^2(\psi_2 - \psi_1), \quad (2)$$

wobei J das Trägheitsmoment eines Pendels ist, ψ_i die Momentanauslenkung des Pendels, g die Erdbeschleunigung, ℓ_S die Länge bis zum Schwerpunkt gemessen von der Drehachse, ℓ_H die Länge bis zum Haken, ebenfalls vom Schwerpunkt gemessen, D_F der Proportionalitätskonstante der Feder und der Schwerpunktmasse M . Diese ergibt sich als Summe aller Teilmassen aus der unten angebrachten Masse m , der Masse des Hakens m_H , um die Pendel zu koppeln und der Masse der Stange m_{St} . Für ihren Abstand zur

Drehachse, dem Schwerpunkt bei ℓ_S gilt

$$\ell_S = \frac{Lm + \ell_H m_H + \frac{1}{2} \cdot L_{St} m_{St}}{M}, \quad (3)$$

wobei L der Abstand zwischen Drehpunkt und Pendelgewicht und L_{St} die Länge der Stange sind. Mit den Kreisfrequenzen

$$\omega_0^2 = \frac{Mg\ell_S}{J} \quad (4)$$

und

$$\Omega^2 = \frac{D_F \ell_H^2}{J} \quad (5)$$

ergibt sich:

$$\ddot{\psi}_1 + \omega_0^2 \psi_1 + \Omega^2 (\psi_1 - \psi_2) = 0 \quad (6)$$

$$\ddot{\psi}_2 + \omega_0^2 \psi_2 + \Omega^2 (\psi_2 - \psi_1) = 0 \quad (7)$$

Es gibt drei Fälle, wie das System der zwei gekoppelten Pendeln schwingen kann: gleichsinnig, gegensinnig und den Schwebungsfall. Die ersten beiden werden als Fundamentalschwingungen des Systems bezeichnet.

Bei der gleichsinnigen Schwingung werden beide Pendel anfangs mit gleichem Winkel $\psi_1 = \psi_2 = \psi_a$, $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$ ausgelenkt, sodass sie in Phase schwingen. Diese Randbedingungen führen auf die Lösung

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) = \psi_a \cos(\omega_0 t). \quad (8)$$

Bei der gegensinnigen Schwingung werden die Pendel mit gegensätzlichen Winkeln $-\psi_1 = \psi_2 = \psi_a$, $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$ ausgelenkt. Dadurch gilt

$$\psi_1(t) = -\psi_a \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} \cdot t\right) \quad (9)$$

$$\psi_2(t) = \psi_a \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} \cdot t\right). \quad (10)$$

Die Schwebung resultiert aus zwei sich überlagernden Schwingungen, mit unterschiedlichen Frequenzen. Dies kann erreicht werden, indem Pendel 1 ausgelenkt wird, während Pendel 2 in Ruhe ist: $\psi_1 = \psi_a$, $\psi_2 = 0$, $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$. Nach Beginn der Schwingung nimmt die Amplitude von Pendel 1 ab, während die von Pendel 2 zunimmt. Dies geschieht, bis Pendel 1 stillsteht, dann liegt die vollständige Energie in der Schwingung

des zweiten Pendels vor. Ab da transferiert Pendel 2 seine Energie wieder zu Pendel 1. Das Resultat sind 90° zueinander phasenverschobene Schwingungen der Pendel mit zu- und abnehmenden Amplituden. Damit ergibt sich:

$$\psi_1(t) = \psi_a \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} \cdot t\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} \cdot t\right) \quad (11)$$

$$\psi_2(t) = \psi_a \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} \cdot t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} \cdot t\right). \quad (12)$$

Die Schwingungsdauern lassen sich mit den Kreisfrequenzen $\omega_I = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} = \frac{\omega_{\text{geg}} - \omega_{\text{gl}}}{2}$ und $\omega_{II} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} = \frac{\omega_{\text{geg}} + \omega_{\text{gl}}}{2}$ berechnen als

$$T_I = \frac{2\pi}{\omega_I} \quad (13)$$

und

$$T_{II} = \frac{2\pi}{\omega_{II}}. \quad (14)$$

Die Stärke der Kopplung kann durch den Kopplungsgrad K beschrieben werden. Dieser setzt die durch die Kopplung übertragene Energie ins Verhältnis zur Gesamtenergie. Er kann durch eine der drei Formeln berechnet werden:

$$K = \frac{D_F \ell_H^2}{Mg\ell_S + D_F \ell_H^2} = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 + \Omega^2} \quad (15)$$

$$K = \frac{\omega_{\text{geg}}^2 - \omega_{\text{gl}}^2}{\omega_{\text{geg}}^2 + \omega_{\text{gl}}^2} = \frac{T_{\text{gl}}^2 - T_{\text{geg}}^2}{T_{\text{gl}}^2 + T_{\text{geg}}^2} \quad (16)$$

$$K = \frac{2\omega_I - \omega_{II}}{\omega_I^2 + \omega_{II}^2} = 4 \cdot \frac{T_S T_{II}}{4T_S^2 + T_{II}^2} \quad (17)$$

Die Ausdehnungen der Massen und des Stabes sind gegenüber dem relativ großen Abstand zur Drehachse vernachlässigbar und lassen sich so zu Punktmassen reduzieren. Dann ergibt sich durch mehrmaliges Anwenden des Satzes von Steiner das Trägheitsmoment J des Pendels:

$$J = \frac{1}{3} \cdot m_{\text{St}} \cdot L_{\text{St}}^2 + m_H \cdot \ell_H^2 + m \cdot L^2. \quad (18)$$

3 Messprinzip mit Abbild und Versuchsablauf



Abbildung 1: Aufbau der Pendel, die hier bei $\ell_H = 70\text{ cm}$ gekoppelt sind.

Die Pendel werden durch lange, dünne Metallstäbe realisiert, die durch eine Fadenöse auf einem horizontal befestigten Metallstab gelagert sind, und auf deren Enden Massen gezogen und dann mit einer Schraube festgezogen werden können. Nach demselben Prinzip werden die Haken als Aufnahmepunkte für die Verbindung zwischen beiden Pendeln über den Massen installiert. Um die Pendel zu koppeln wird eine Schnur, die durch eine weitere Masse führt in die Haken eingehängt.

Von einer CCD-Kamera wird die Momentanauslenkung der Massen aufgezeichnet. Dafür sind an den Massen vertikal reflektierende Streifen angebracht. Der Fokus der Kamera wird auf 0,9 m eingestellt. Die Blende wurde auf 11 eingestellt.

Mit einer Metalleiste, an der zwei verschiebbare Stopper angebracht sind, lassen sich die Pendel bestmöglich gleichphasig mit gleicher Amplitude auslenken. Um die gegensinnige Fundamentalschwingung zu erzeugen kann auch das Kopplungsgewicht nach unten gezogen werden.

Um die relevanten Daten zur Periodendauerbestimmung eines Pendels zu erhalten wird wie folgt vorgegangen: Nach einer initialen Auslenkung wird im Messprogramm die Aufzeichnung gestartet und nach ca. 60 s gestoppt. Dann wird ein Extremum der Auslenkung zu Beginn der Aufzeichnung ausgewählt, der zugehörige Zeitpunkt notiert, 20 Perioden abgezählt und wieder der Zeitpunkt notiert, um daraus die Differenz zu

bilden. Wird der Schwebungsfall gemessen, werden mindestens 5 Minima abgewartet. Dann wird die Aufzeichnung beendet und der Zeitpunkt des ersten Stillstandes notiert. Beim vierten Stillstand des Pendels wird dieser Zeitpunkt vermerkt.

4 Messwerte

Tabelle 1: Massen und Längen der zwei Pendel

Parameter	Pendel 1	Pendel 2
m in kg	$176,97 \cdot 10^{-3}$	$174,95 \cdot 10^{-3}$
m_H in kg	$16,06 \cdot 10^{-3}$	$15,80 \cdot 10^{-3}$
m_{St} in kg	$131,40 \cdot 10^{-3}$	$131,27 \cdot 10^{-3}$
L in m	0,804	0,800
ℓ_H in m	0,4	0,4
L_{St} in m	0,87	0,87

t_0 und t_1 stehen im ungekoppelten Fall, sowie im gekoppelten Fall für die Fundamentalschwingungen stets für Zeitpunkte, zwischen denen 20 Perioden durchlaufen wurden. Im Schwebungsfall sind mit t_i alle Zeiten vermerkt, zu der das Pendel stillsteht.

Im Folgenden sind die Messwerte für die Position $\ell_H = 40\text{ cm}$ tabelliert.

Tabelle 2: Ungekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	t_0 in s	t_1 in s
1	1,4	35,5
2	1,3	35,4

Tabelle 3: Gekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	t_0 in s	t_1 in s
1	0,9	34,8
2	0,8	34,8

Tabelle 4: Gekoppelter gegensinniger Fall

Pendel	t_0 in s	t_1 in s
1	0,4	33,3
2	1,2	34,1

Tabelle 5: Schwebungsfall

Pendel	t_0 in s	t_1 in s	t_2 in s	t_3 in s	t_4 in s
1	0,0	52,4	105,8	160,0	211,6
2	25,4	79,5	132,9	185,3	237,8

Im Folgenden sind die Messwerte für die Position $\ell_H = 55\text{ cm}$ tabelliert.

Tabelle 6: Ungekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	t_0 in s	t_1 in s
1	0,8	35,0
2	0,8	34,8

Tabelle 7: Gekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	t_0 in s	t_1 in s
1	0,5	34,5
2	0,5	34,5

Tabelle 8: Gekoppelter gegensinniger Fall

Pendel	t_0 in s	t_1 in s
1	1,4	33,6
2	0,6	32,9

Tabelle 9: Schwebungsfall

Pendel	t_0 in s	t_1 in s	t_2 in s	t_3 in s	t_4 in s
1	14,8	44,9	74,6	105,2	134,8
2	0,0	29,5	60,2	89,8	119,6

Im Folgenden sind die Messwerte für die Position $\ell_H = 70\text{ cm}$ tabelliert.

Tabelle 10: Ungekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	t_0 in s	t_1 in s
1	1,5	35,8
2	1,5	35,7

Tabelle 11: Gekoppelter gleichsinniger Fall

Pendel	t_0 in s	t_1 in s
1	0,5	34,7
2	0,5	34,7

Tabelle 12: Gekoppelter gegensinniger Fall

Pendel	t_0 in s	t_1 in s
1	1,5	33,0
2	0,7	32,2

Tabelle 13: Schwebungsfall

Pendel	t_0 in s	t_1 in s	t_2 in s	t_3 in s	t_4 in s
1	0,0	18,1	38,7	58,3	77,8
2	9,0	29,5	49,0	68,6	88,3

Tabelle 14: Schwebungsfall für unterschiedlich ausgelenkte Massen

Pendel	t_0 in s	t_1 in s	t_2 in s	t_3 in s	t_4 in s
1	6,2	26,7	47,1	66,9	85,6
2	16,4	36,9	57,3	77,1	97,4

5 Auswertung

T_0 berechnet sich aus den Daten, die in Tabelle 2 eingetragen sind durch

$$T_0 = \frac{t_1 - t_0}{20} = \frac{35,5 \text{ s} - 1,4 \text{ s}}{20} = 1,7 \text{ s}.$$

Für Pendel 2 folgt analog ebenfalls $T_0 = 1,7 \text{ s}$. Somit ist dies auch das Mittel. Dieses Prinzip wird auf alle T_{gl} und T_{geg} angewendet.

T_{II} wird durch Gleichung 14 ermittelt.

Bei T_{S} wird der erste und der letzte Zeitpunkt des Stillstandes des Pendel, der in der Messdauer liegt auf die Anzahl der Schwebungsdauern in diesem Intervall normiert.

Für die entsprechenden Kopplungsgrade ergeben sich die folgende Periodendauern.

Tabelle 15: Periodendauern für $\ell_{\text{H}} = 40 \text{ cm}$

Periodendauer	Pendel 1	Pendel 2	Mittel
T_{gl}	1,7 s	1,7 s	1,7 s
T_{geg}	1,6 s	1,6 s	1,6 s
T_{II}	1,6 s	1,6 s	1,6 s
T_{S}	52,9 s	53,1 s	53,0 s

Tabelle 16: Periodendauern für $\ell_{\text{H}} = 55 \text{ cm}$

Periodendauer	Pendel 1	Pendel 2	Mittel
T_{gl}	1,7 s	1,7 s	1,7 s
T_{geg}	1,6 s	1,6 s	1,6 s
T_{II}	1,6 s	1,6 s	1,6 s
T_{S}	30,0 s	29,9 s	30,0 s

Tabelle 17: Periodendauern für $\ell_{\text{H}} = 70 \text{ cm}$. \tilde{T}_{S} sind die Schwebungsdauern die gemessen wurden, als die Schwebung durch ungleiche Auslenkungen erzeugt wurde.

Periodendauer	Pendel 1	Pendel 2	Mittel
T_{gl}	1,7 s	1,7 s	1,7 s
T_{geg}	1,6 s	1,6 s	1,6 s
T_{II}	1,6 s	1,6 s	1,6 s
T_{S}	19,5 s	19,8 s	19,6 s
\tilde{T}_{S}	19,9 s	20,3 s	20,1 s

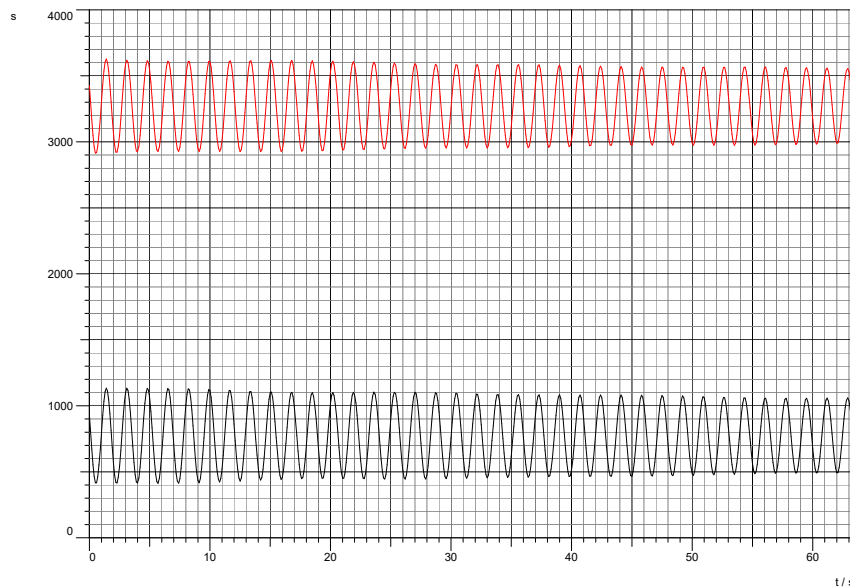


Abbildung 2: $x(t)$ -Diagramm der gleichsinnigen Fundamentalschwingung bei $\ell_{\text{H}} = 70 \text{ cm}$.

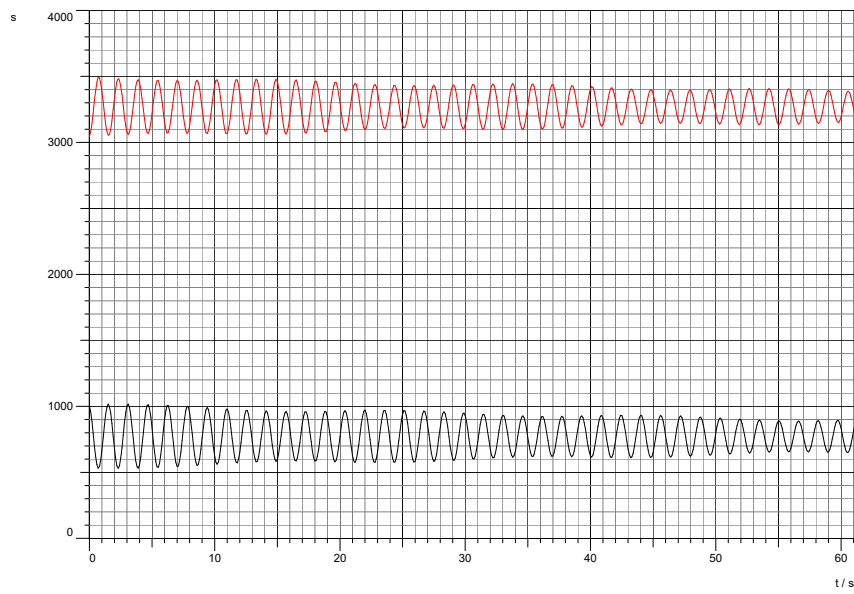


Abbildung 3: $x(t)$ -Diagramm der gegenseinnigen Fundamentalschwingung bei $\ell_{\text{H}} = 70$ cm.

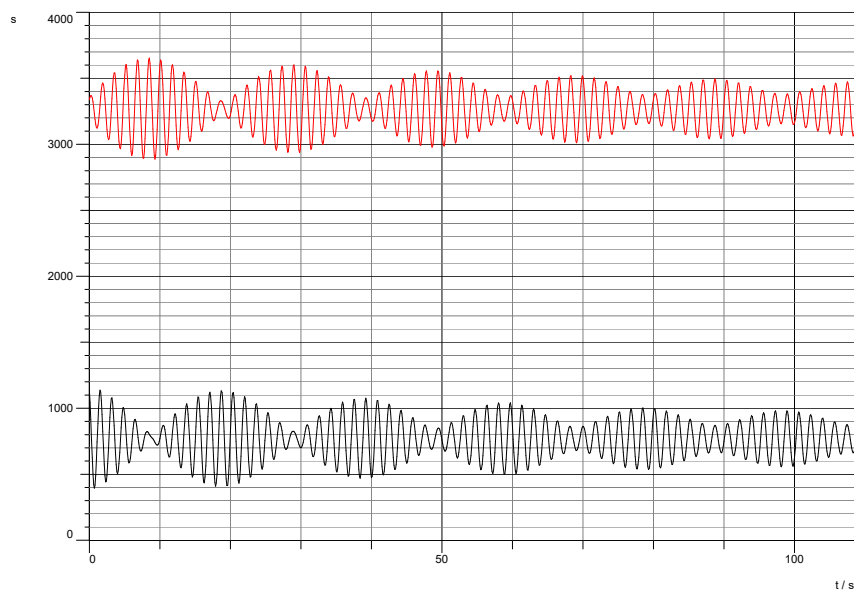


Abbildung 4: $x(t)$ -Diagramm des Schwebungsfalles bei $\ell_{\text{H}} = 70$ cm.

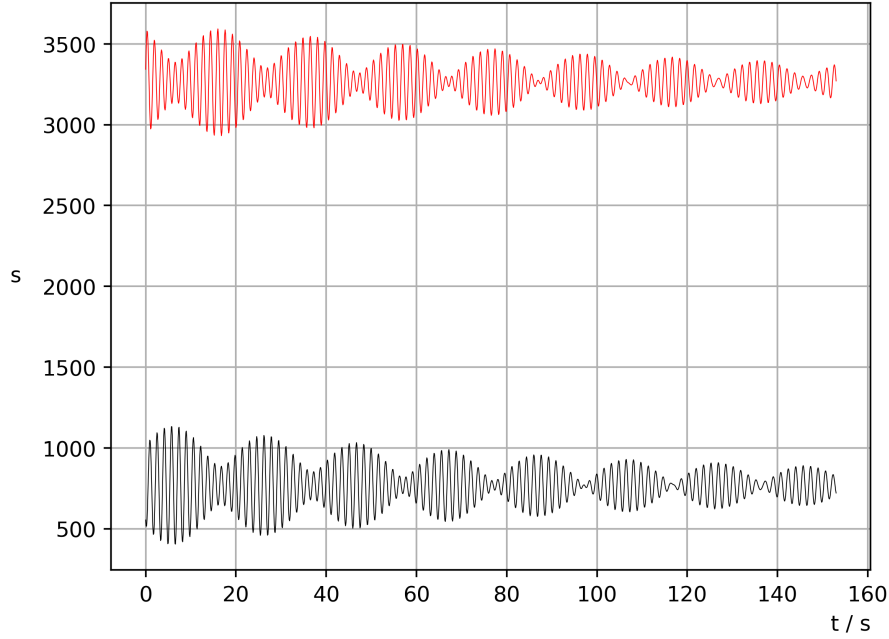


Abbildung 5: $x(t)$ -Diagramm der gegenseitigen Fundamentalschwingung bei $\ell_H = 70$ cm.

Wie aus Tabelle 17 hervorgeht, liegen T_S und \tilde{T}_S sehr nah beieinander. Daran lässt sich sehen, dass die Schwebungsdauer nicht davon abhängt, ob nur ein Pendel oder beide ausgelenkt werden. Bei letztem Schwingungsmodus ist zu beachten, dass die Auslenkungen ungleich sein müssen, das sonst wieder Fundamentalschwingungen entstehen würden. Dies liegt daran, dass die Schwebungsdauer nur von den Eigenfrequenzen des Systems abhängt, und diese ändern sich nicht, solange man die Dimensionen des Systems nicht manipuliert bzw. den Kopplungsgrad nicht verändert.

Nach Gleichung 18 wird das Gesamtträgheitsmoment mit den Daten aus Tabelle 1 berechnet. Für das erste Pendel ergibt sich das Trägheitsmoment

$$J_1 = \frac{1}{3} \cdot 131,40 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot (0,87 \text{ m})^2 + 16,06 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot (0,4 \text{ m})^2 + 176,97 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot (0,804 \text{ m})^2 = 0,150 \text{ kg m}^2$$

und für das zweite Pendel $J_2 = 0,148 \text{ kg m}^2$.

Die Eigenfrequenz ω_0 wird mittels Gleichung 4 berechnet. Dafür muss zuerst die Lage des Schwerpunktes ℓ_S mit Gleichung 3 berechnet werden und ergibt

$$\ell_S = \frac{Lm + \ell_H m_H + \frac{1}{2} \cdot L_{St} m_{St}}{m + m_H + m_{St}} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
\ell_{S,1} &= (0,804 \text{ m} \cdot 176,97 \cdot 10^{-3} \text{ kg} + 0,4 \text{ m} \cdot 16,06 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot 0,87 \text{ m} \cdot 131,40 \cdot 10^{-3} \text{ kg}) \\
&\quad \cdot ((176,97 \cdot 10^{-3} + 16,06 \cdot 10^{-3} + 131,40 \cdot 10^{-3}) \text{ kg})^{-1} \\
&= 0,635 \text{ m}.
\end{aligned}$$

Für $\ell_{S,2}$ ergibt sich $\ell_{S,2} = 0,632 \text{ m}$. Die Schwerpunktmasse des ersten Pendels M_1 ist

$$\begin{aligned}
M_1 &= m_1 + m_{H,1} + m_{St,1} \\
&= 176,97 \cdot 10^{-3} \text{ kg} + 16,06 \cdot 10^{-3} \text{ kg} + 131,40 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \\
&= 324,43 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Für das zweite Pendel ist $M_2 = 322,02 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$. Damit beläuft sich die theoretische Eigenfrequenz $\omega_{0,1,theo}$ auf

$$\omega_{0,1,theo} = \sqrt{\frac{M_1 g \ell_S}{J_1}} = \sqrt{\frac{324,43 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 0,635 \text{ m}}{0,150 \text{ kg m}^2}} = 3,671 \text{ Hz}. \tag{21}$$

Folgerichtig gilt $\omega_{0,2,theo} = 3,673 \text{ Hz}$.

Aus den gemessenen Größen ergeben sich die gemessenen Eigenfrequenzen

$$\omega_{0,1,mess} = \frac{2\pi}{1,7 \text{ s}} = 3,7 \text{ Hz} \tag{22}$$

und $\omega_{0,2,mess} = 3,7 \text{ Hz}$.

Länge	K nach Gleichung 16	K nach Gleichung 17
$\ell_H = 40 \text{ cm}$	0,0606	0,0302
$\ell_H = 55 \text{ cm}$	0,0606	0,0533
$\ell_H = 70 \text{ cm}$	0,0606	0,0815

Tabelle 18: Kopplungsgrade berechnet durch verschiedene Gleichungen.

6 Fehlerrechnung

7 Zusammenfassung

Die Kopplungsgrade verändern sich nur geringfügig. Dabei sollte Gleichung 16 die genaueren Ergebnisse liefern, da er mit den direkt gemessenen Periodendauern berechnet

werden kann, während bei Gleichung 17 mehrere Messungen und Rechnungen für T_{II} nötig sind, wodurch größere Unsicherheiten das Ergebnis verfälschen.

Hier steht halt noch was [mbuch]

8 Anhang