

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN  
ECOLE DE PHYSIQUE

SIMULATION NUMÉRIQUE EN PHYSIQUE [LPHY2371]

---

# Equation d'Advection-Diffusion et Prédicibilité

---

*Auteurs :*

Arnaud SCHILS

Valéry MATERNE

*Enseignant :*

Pr. Michel CRUCIFIX

Décembre 2016



**UCL**  
Université  
catholique  
de Louvain

## Première partie

# Equation d'Advection-Diffusion

### 1.1 Fournissez un schéma numérique explicite d'ordre $\mathcal{O}(h + k)$ . Donnez-en le stencil. Nous pouvons introduire les facteurs $\lambda_d = Dk/h^2$ et $\lambda_b = bk$ . Quelles importances ces facteurs ont-ils pour la condition de stabilité ?

Dans cette section un schéma numérique explicite est fourni pour l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - bu(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

où  $D, a, b$  sont des constantes et  $D$  est positive. Dans la suite de ce texte les dépendances en  $x$  et  $t$  de la fonction  $u$  ne seront pas toujours mentionnées explicitement.

Les dérivées de l'Equation 1 sont remplacées par leurs expressions en différences finies. Soient  $u(x_i, t_j) \equiv U_{i,j}$ ,  $h$  le pas d'espace et  $k$  le pas de temps, ces expressions sont :

$$\left. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=x_i, t=t_j} = \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_i, t=t_j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{x=x_i, t=t_j} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} + \mathcal{O}(k) . \quad (4)$$

Notons que pour la dérivée seconde par rapport à  $x$ , la formule à trois points d'ordre  $\mathcal{O}(h^2)$  a été choisie au lieu de celles d'ordre  $\mathcal{O}(h)$  afin d'obtenir à la fin une matrice tridiagonale. En injectant ces différences finies dans l'Equation 1 on obtient :

$$D \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) - a \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h} + \mathcal{O}(h) - bU_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} + \mathcal{O}(k) . \quad (5)$$

En multipliant l'expression par le pas de temps  $k$ , en isolant  $U_{i,j+1}$  et en négligeant l'erreur en  $\mathcal{O}(h^2)$  car elle est d'ordre supérieur à  $\mathcal{O}(h)$  on obtient :

$$U_{i,j+1} = \frac{Dk}{h^2}(U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}) - \frac{ak}{h}(U_{i+1,j} - U_{i,j}) - bkU_{i,j} + U_{i,j} + \mathcal{O}(h+k) . \quad (6)$$

En définissant  $\lambda_d = \frac{Dk}{h^2}$ ,  $\lambda_a = \frac{ak}{h}$  et  $\lambda_b = bk$  l'expression devient :

$$U_{i,j+1} = \lambda_d(U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}) - \lambda_a(U_{i+1,j} - U_{i,j}) - \lambda_b U_{i,j} + U_{i,j} + \mathcal{O}(h+k) . \quad (7)$$

Sans spécifier l'ordre de l'erreur et en réarrangeant l'expression on a :

$$U_{i,j+1} = U_{i-1,j}\lambda_d + U_{i,j}(-2\lambda_d + \lambda_a - \lambda_b + 1) + U_{i+1,j}(\lambda_d - \lambda_a) . \quad (8)$$

En imposant les conditions aux bords constantes  $\forall j, U_{0,j} = 0$  et  $\forall j, U_{N+1,j} = 0$ , le schéma numérique peut s'écrire sous forme matricielle comme ceci :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda_d & -2\lambda_d + \lambda_a - \lambda_b + 1 & \lambda_d - \lambda_a & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \lambda_d & -2\lambda_d + \lambda_a - \lambda_b + 1 & \lambda_d - \lambda_a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} U_{0,j+1} \\ U_{1,j+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{N,j+1} \\ U_{N+1,j+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} U_{0,j} \\ U_{1,j} \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{N,j} \\ U_{N+1,j} \end{pmatrix} \quad (10)$$

où  $M$  est une matrice tridiagonale. Notons que les  $U_{i,0}$  sont connus grâce aux conditions initiales. Le stencil de ce schéma explicite est présenté à la Figure 1. Chaque  $U_{i,j+1}$  dépend en effet des  $U_{i-1,j}$ ,  $U_{i,j}$  et  $U_{i+1,j}$ .

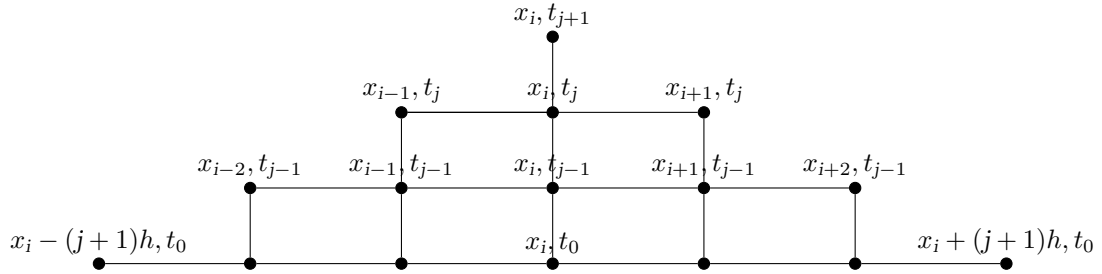


FIGURE 1 – Stencil du schéma numérique explicite.

## 1.2 Fournissez la solution analytique de l'équation, ainsi que la relation de dispersion. Discutez brièvement les cas particuliers déjà vus au cours ( $D=0$ , $b=0$ , etc.).

L'équation aux dérivées partielles à résoudre est l'Equation 1. Les conditions aux bords suivantes sont imposées :

$$\begin{cases} u(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

où  $l > 0$ . La solution  $u$  est donc recherchée dans le domaine :

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ 0 < x < l \end{cases} \quad (12)$$

L'Equation 1 peut-être résolue par la méthode de séparation de variables. La solution  $u$  est supposée être de la forme :

$$u(x, t) = v(x)w(t) \quad (13)$$

En injectant cette forme de  $u$  dans l'Equation 1 on obtient :

$$Dw(t)\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} - aw(t)\frac{\partial v(x)}{\partial x} - bv(x)w(t) = v(x)\frac{\partial w(t)}{\partial t} \quad (14)$$

En divisant cette équation par  $v(x)w(t)$  on obtient :

$$\frac{D}{v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{a}{v} \frac{\partial v}{\partial x} - b = \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial t} \equiv C_1 \quad (15)$$

Chaque partie de l'équation est en effet égale à une constante  $C_1$  puisque la partie gauche ne dépend que de  $x$  et la partie droite ne dépend que de  $t$ . L'équation peut maintenant être résolue en résolvant séparément la partie qui dépend du temps  $t$  et la partie qui dépend de la position  $x$ . Pour la partie dépendante du temps on a :

$$\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial t} = C_1 \quad (16)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = C_1 w \quad (17)$$

$$w(t) = C_2 e^{C_1 t} \quad (18)$$

où  $C_2$  est une constante. Pour la partie dépendante de la position  $x$  on a :

$$\frac{D}{v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{a}{v} \frac{\partial v}{\partial x} = C_1 + b \quad (19)$$

$$D \frac{d^2 v}{dx^2} - a \frac{dv}{dx} - (C_1 + b)v = 0 \quad (20)$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du 2ème ordre. Sa solution dépend donc de son polynôme caractéristique :

$$Dr^2 - ar - (C_1 + b) = 0 \quad (21)$$

$$\rho = a^2 + 4D(C_1 + b) \quad (22)$$

Les deux racines de ce polynôme sont :

$$r_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{\rho}}{2D} \quad (23)$$

En fonction du signe de  $\rho$  la solution de l'équation peut avoir trois formes.

Si  $\rho > 0$

$$v(x) = C_3 e^{r_1 x} + C_4 e^{r_2 x} \quad (24)$$

où  $C_3$  et  $C_4$  sont des constantes. En utilisant la condition au bord  $u(0, t) = 0 = v(0)w(t) \implies v(0) = 0$  on a :

$$C_4 = -C_3 \implies v(x) = C_3 (e^{r_1 x} - e^{r_2 x}) \quad (25)$$

Et en utilisant la condition au bord  $u(l, t) = 0 = v(l)w(t) \implies v(l) = 0$  on a :

$$C_3 (e^{r_1 l} - e^{r_2 l}) = 0 \implies C_3 = 0 \implies v(x) = 0 \quad (26)$$

Cette solution n'est donc pas intéressante par rapport à nos conditions aux bords.

Si  $\rho = 0, r_1 = r_2 \equiv r$

$$v(x) = (C_3 + C_4 x) e^{rx} \quad (27)$$

où  $C_3$  et  $C_4$  sont des constantes. En utilisant la condition au bord  $u(0, t) = 0 = v(0)w(t) \implies v(0) = 0$  on a :

$$C_3 = 0 \implies v(x) = C_4 x e^{rx} \quad (28)$$

Et en utilisant la condition au bord  $u(l, t) = 0 = v(l)w(t) \implies v(l) = 0$  on a :

$$C_4 l e^{r_l} = 0 \implies C_4 = 0 \implies v(x) = 0 \quad (29)$$

Cette solution n'est donc pas intéressante par rapport à nos conditions aux bords.

Si  $\rho < 0$

On définit

$$r_{1,2} \equiv \alpha \pm i\beta \quad (30)$$

avec

$$\alpha = \frac{a}{2D}, \quad (31)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{-a^2 - 4D(C_1 + b)}}{2D}. \quad (32)$$

On a alors comme solution pour  $v(x)$  :

$$v(x) = (C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x)) e^{\alpha x}. \quad (33)$$

En utilisant la condition au bord  $u(0, t) = 0 = v(0)w(t) \implies v(0) = 0$  on a :

$$C_3 = 0 \implies v(x) = C_4 \sin(\beta x) e^{\alpha x} \quad (34)$$

Et en utilisant la condition au bord  $u(l, t) = 0 = v(l)w(t) \implies v(l) = 0$  on a :

$$\sin(\beta l) = 0 \implies \beta l = m\pi \implies \beta = \frac{m\pi}{l}, m \in \mathbb{N}^*. \quad (35)$$

On notera que  $\beta > 0$  car  $\rho < 0$  et  $D > 0$ .

La solution générale pour la partie de l'équation dépendante de la position est donc :



$$v(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{4_m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} \quad (36)$$

où les  $C_{4_m}$  sont des constantes. Utilisons maintenant la condition au bord  $u(x, 0) = g(x)$  afin de déterminer les valeurs de ces constantes  $C_{4_m}$  :

$$u(x, 0) = v(x)w(0) = v(x)C_2 = g(x) . \quad (37)$$

On a alors,

$$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{4_m} C_2 \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} . \quad (38)$$

En définissant  $C_m = C_{4_m} C_2$  on obtient :

$$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} \quad (39)$$

On voit dès lors que les coefficients  $C_m$  sont obtenus en projetant la fonction  $g(x)e^{-\alpha x}$  sur la base des fonctions  $\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$  :

$$C_m = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{-\alpha x} dx \quad (40)$$

La fonction  $u(x, t)$  peut alors s'écrire :

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} e^{C_{1_m} t} \quad (41)$$

Nous devons maintenant déterminer l'expression de la constante  $C_{1_m}$  qui dépend de  $\beta$  et donc de  $m$ . En partant de l'expression de  $\beta$  (32), on obtient :

$$C_{1_m} = \frac{-a^2 - 4D^2\beta^2}{4D} - b \quad (42)$$

et avec  $\beta = \frac{m\pi}{l}$ , on a :

$$C_{1_m} = -\frac{a^2}{4D} - \frac{Dm^2\pi^2}{l^2} - b. \quad (43)$$

En injectant l'expression de  $C_{1_m}$  dans celle de  $u$  on a alors :

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \exp\left(\frac{ax}{2D} + \left(-\frac{a^2}{4D} - \frac{Dm^2\pi^2}{l^2} - b\right)t\right) \quad (44)$$

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \exp\left(\frac{a}{2D}\left(x - \frac{a}{2}t\right) - \left(\frac{Dm^2\pi^2}{l^2} + b\right)t\right)} \quad (45)$$

avec

$$\boxed{C_m = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{a}{2D}x\right) dx}. \quad (46)$$

## Relation de dispersion

On utilise, comme solution à l'équation d'advection-diffusion (1), une onde plane de la forme :

$$u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} \quad (47)$$

avec  $k$  le nombre d'onde qui est relié à la longueur d'onde  $\lambda$  par la relation  $\lambda = 2\pi/k$  et  $\omega$  la fréquence de l'onde.

On obtient alors l'expression suivante :

$$\omega = ak - i(Dk^2 + b) \quad (48)$$

qui est la relation de dispersion de l'équation (1). Elle détermine la fréquence  $\omega$  en fonction de  $k$  pour une onde plane prise comme solution.

## Cas particuliers

Si  $D = 1$ ,  $a = b = 0$  on retrouve l'équation de la chaleur adimensionnelle et homogène :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} . \quad (49)$$

En injectant ces valeurs de  $D, a$  et  $b$  dans l'Equation 45 on a :

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \exp\left(-\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2}\right)t\right) \quad (50)$$

avec

$$C_m = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx . \quad (51)$$

On retombe donc bien sur la solution de l'équation de la chaleur adimensionnelle homogène du cours si l'on pose  $l = 1$ .

Si  $D = 0 = b$  on retrouve la forme générale de l'équation d'advection :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 . \quad (52)$$

La solution présentée à l'Equation 45 n'est alors plus valide car celle-ci n'est valable que si  $D > 0$  et  $\rho < 0$ . La solution de l'Equation 52 est  $u(x, t) = g(x - at)$  avec comme condition initiale  $u(x, 0) = g(x)$  (démonstration faite en séance d'exercices).

- 1.3 Fournissez un schéma implicite. Est-il toujours stable ?
- 1.4 Illustrez votre propos avec plusieurs simulations numériques, comparant schémas numériques implicites et explicites.
- 1.5 Montrez, dans ces schéma numériques, quels termes sont responsables de la diffusion numérique. Quel est son ordre de grandeur par rapport à la diffusion explicitement modélisée par le terme  $D$  ?
- 1.6 Comparez vitesse de groupe numérique avec celle du système original. Le schéma est-il dispersif ?
- 1.7 Le terme de diffusion  $D$  peut-il être responsable d'un comportement instable ? Expliquer.
- 1.8 Fournissez un schéma de Lax-Wendroff à trois points  $(i-1, i, i+1)$  dans l'espace. Quel est l'ordre de ce schéma ? Est-il monotone ? Discutez les avantages et les inconvénients au schéma que vous avez donné au point 1 ci-dessus.

## Deuxième partie

### Prédictibilité

**Introduction**

**2.9    todo**

**Conclusion**