

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
ECOLE DE PHYSIQUE

SIMULATION NUMÉRIQUE EN PHYSIQUE [LPHY2371]

Equation d'Advection-Diffusion et Prédicibilité

Auteurs:

Arnaud SCHILS

Valéry MATERNE

Enseignant:

Pr. Michel CRUCIFIX

Décembre 2016

The logo of the University of Louvain (UCL) is displayed within a blue square. It features the acronym 'UCL' in large, white, bold, sans-serif capital letters. Below it, the words 'Université catholique de Louvain' are written in a smaller, white, sans-serif font, stacked in three lines: 'Université', 'catholique', and 'de Louvain'. Thin white horizontal lines are positioned above and below the text.

UCL
Université
catholique
de Louvain

Chapter 1

Exercice d'examen 1

Introduction

- 1.1** Fournissez un schéma numérique explicite d'ordre $\mathcal{O}(h + k)$. Donnez-en le stencil. Nous pouvons introduire les facteurs $\lambda_d = Dk/h^2$ et $\lambda_b = bk$. Quelles importances ces facteurs ont-ils pour la condition de stabilité?
- 1.2** Fournissez la solution analytique de l'équation, ainsi que la relation de dispersion. Discutez brièvement les cas particuliers déjà vus au cours ($D=0$, $b=0$, etc.)

L'équation aux dérivées partielles à résoudre est la suivante:

$$D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - bu(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (1.1)$$

où D, a et b sont des constantes. Dans la suite de ce texte les dépendances

en x et t de la fonction u ne seront pas toujours mentionnées explicitement. Les conditions aux bords suivantes sont imposées:

$$\begin{cases} u(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

où $l > 0$. La solution u est donc recherchée dans le domaine:

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ 0 < x < l \end{cases} \quad (1.3)$$

L'Equation 1.1 peut-être résolue par la méthode de séparation de variables. La solution u est supposée être de la forme:

$$u(x, t) = v(x)w(t) \quad (1.4)$$

En injectant cette forme de u dans l'Equation 1.1 on obtient:

$$Dw(t)\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} - aw(t)\frac{\partial v(x)}{\partial x} - bv(x)w(t) = v(x)\frac{\partial w(t)}{\partial t} \quad (1.5)$$

En divisant cette équation par $v(x)w(t)$ on obtient:

$$\frac{D}{v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{a}{v} \frac{\partial v}{\partial x} - b = \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial t} \equiv C_1 \quad (1.6)$$

Chaque partie de l'équation est en effet égale à une constante C_1 puisque la partie gauche ne dépend que de x et la partie droite ne dépend que de t . L'équation peut maintenant être résolue en résolvant séparément la partie qui dépend du temps t et la partie qui dépend de la position x . Pour la partie dépendante du temps on a:

$$\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial t} = C_1 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = C_1 w \quad (1.8)$$

$$\boxed{w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2_n} e^{C_1 t}} \quad (1.9)$$

où C_{2_n} sont des constantes. Pour la partie dépendante de la position x on a:

$$\frac{D}{v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{a}{v} \frac{\partial v}{\partial x} = C_1 + b \quad (1.10)$$

$$D \frac{d^2 v}{dx^2} - a \frac{dv}{dx} - (C_1 + b)v = 0 \quad (1.11)$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du 2ème ordre. La solution à son équation dépend alors du polynôme caractéristique de l'équation:

$$Dr^2 - ar - (C_1 + b) = 0 \quad (1.12)$$

$$\rho = a^2 + 4D(C_1 + b) \quad (1.13)$$

Les deux racines de ce polynôme sont:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{a + \sqrt{\rho}}{2D} \\ r_2 = \frac{a - \sqrt{\rho}}{2D} \end{cases} \quad (1.14)$$

En fonction du signe de ρ la solution de l'équation peut avoir trois formes.

Si $\rho > 0$

$$v(x) = C_3 e^{r_1 x} + C_4 e^{r_2 x} \quad (1.15)$$

où C_3 et C_4 sont des constantes. En utilisant la condition au bord $u(0, t) = 0 = v(0)w(t) \implies v(0) = 0$ on a:

$$C_4 = -C_3 \implies v(x) = C_3 (e^{r_1 x} - e^{r_2 x}) \quad (1.16)$$

Et en utilisant la condition au bord $u(l, t) = 0 = v(l)w(t) \implies v(l) = 0$ on a:

$$C_3 (e^{r_1 l} - e^{r_2 l}) = 0 \implies r_1 = r_2 \implies v(x) = 0 \quad (1.17)$$

Cette solution n'est donc pas intéressante par rapport à nos conditions aux bords.

Si $\rho = 0, r_1 = r_2 \equiv r$

$$v(x) = (C_3 + C_4 x)e^{rx} \quad (1.18)$$

où C_3 et C_4 sont des constantes. En utilisant la condition au bord $u(0, t) = 0 = v(0)w(t) \implies v(0) = 0$ on a:

$$C_3 = 0 \implies v(x) = C_4 x e^{rx} \quad (1.19)$$

Et en utilisant la condition au bord $u(l, t) = 0 = v(l)w(t) \implies v(l) = 0$ on a:

$$C_4 l e^{rl} = 0 \implies C_4 = 0 \implies v(x) = 0 \quad (1.20)$$

Cette solution n'est donc pas intéressante par rapport à nos conditions aux bords.

Si $\rho < 0$

On définit $r_1 \equiv \alpha + i\beta, r_2 \equiv \alpha - i\beta$ et

$$v(x) = (C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x))e^{\alpha x} \quad (1.21)$$

En utilisant la condition au bord $u(0, t) = 0 = v(0)w(t) \implies v(0) = 0$ on a:

$$C_3 = 0 \implies v(x) = C_4 \sin(\beta x) e^{\alpha x} \quad (1.22)$$

Et en utilisant la condition au bord $u(l, t) = 0 = v(l)w(t) \implies v(l) = 0$ on a:

$$\sin(\beta l) = 0 \implies \beta l = m\pi \implies \beta = \frac{m\pi}{l}, m \in \mathbb{Z} \quad (1.23)$$

La solution générale pour la partie de l'équation dépendante de la position est donc:

$$v(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{4m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} \quad (1.24)$$

où les C_{4m} sont des constantes. Utilisons maintenant la condition au bord $u(x, 0) = g(x)$ afin de déterminer les valeurs de ces constantes C_{4m} .

$$u(x, 0) = v(x)w(0) = v(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} = g(x) \quad (1.25)$$

En définissant $C_2 \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n}$:

$$v(x)C_2 = g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{4m} C_2 \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} \quad (1.26)$$

En définissant $\tilde{C}_{4m} = C_{4m} C_2$ on obtient:

$$g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_{4m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} \quad (1.27)$$

On voit dès lors que les coefficients \tilde{C}_{4m} sont obtenus en projetant la fonction $g(x)e^{-\alpha x}$ sur la base des fonctions $\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$:

$$\tilde{C}_{4m} = \frac{1}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{-\alpha x} dx \quad (1.28)$$

Puisque le terme de la somme pour $m = 0$ est égal à zéro, et que la fonction sinus est impaire:

$$\tilde{C}_{4(-m)} = \frac{1}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{-m\pi x}{l}\right) e^{-\alpha x} dx = -\tilde{C}_{4m} \quad (1.29)$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_{4(-m)} \sin\left(\frac{-m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} = \tilde{C}_{4m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} \quad (1.30)$$

Et donc:

$$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} 2\tilde{C}_{4m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} \quad (1.31)$$

En définissant $C'_{4m} = 2\tilde{C}_{4m}$ on peut écrire:

$$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C'_{4m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} \quad (1.32)$$

avec

$$C'_{4m} = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{-\alpha x} dx \quad (1.33)$$

La fonction $u(x, t)$ peut alors s'écrire:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C'_{4m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} e^{C_1 t} \quad (1.34)$$

Notons que par définition du polynôme caractéristique de l'équation différentielle $\alpha = a/(2D)$ et donc qu'il ne reste plus qu'à déterminer la constante C_1 .

$$\rho = a^2 + 4D(C_1 + b) \implies \boxed{C_1 = \frac{\rho - a^2}{4D} - b} \quad (1.35)$$

Par ailleurs,

$$\alpha + i\beta = \frac{a + \sqrt{\rho}}{2D} \quad (1.36)$$

$$\sqrt{\rho} = 2D(\alpha + \beta i) - a \quad (1.37)$$

$$\rho = (2D(\alpha + \beta i) - a)^2 \quad (1.38)$$

En injectant cette expression de ρ dans celle de C_1 on obtient:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{(2D(\alpha + \beta i) - a)^2 - a^2}{4D} - b = \frac{4D^2(\alpha + \beta i)^2 + a^2 - 4Da(\alpha + \beta i) - a^2}{4D} - b \\
&= D(\alpha + \beta i)^2 - a(\alpha + \beta i) - b = D(\alpha^2 - \beta^2 + i2\alpha\beta) - a(\alpha + \beta i) - b \\
&= D(\alpha^2 - \beta^2) + i2D\alpha\beta - a\alpha - a\beta i - b = D(\alpha^2 - \beta^2) + i2D\frac{a}{2D}\beta - a\alpha - a\beta i - b \\
&= D(\alpha^2 - \beta^2) + ia\beta - a\alpha - a\beta i - b = D(\alpha^2 - \beta^2) - a\alpha - b \\
&= D\left(\frac{a^2}{4D^2} - \frac{m^2\pi^2}{l^2}\right) - \frac{a^2}{2D} - b = -\frac{a^2}{4D} - \frac{Dm^2\pi^2}{l^2} - b \quad (1.39)
\end{aligned}$$

En injectant l'expression de C_1 dans celle de u :

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C'_{4m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \exp\left(\frac{ax}{2D} + \left(-\frac{a^2}{4D} - \frac{Dm^2\pi^2}{l^2} - b\right)t\right) \quad (1.40)$$

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C'_{4m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \exp\left(\frac{a}{2D}\left(x - \frac{a}{2}t\right) - \left(\frac{Dm^2\pi^2}{l^2} + b\right)t\right)} \quad (1.41)$$

Conclusion

Chapter 2

Prédictibilité

Introduction

2.1 todo

Conclusion