Université catholique de Louvain

Ecole de physique

Simulation numérique en physique [lphy2371]

Equation d'Advection-Diffusion et Prédictibilité

Auteurs:
Arnaud Schils
Valéry Materne

Enseignant:
Pr. Michel Crucifix

Décembre 2016

Chapter 1

Exercice d'examen 1

Introduction

1.1 Fournissez un schéma numérique explicite d'ordre $\mathcal{O}(h+k)$. Donnez-en le stencil. Nous pouvons introduire les facteurs $\lambda_d = Dk/h^2$ et $\lambda_b = bk$. Quelles importances ces facteurs ont-ils pour la condition de stabilité?

1.2 Fournissez la solution analytique de l'équation, ainsi que la relation de dispersion. Discutez brièvement les cas particuliers déjà vus au cours (D=0, b=0, etc.)

L'équation aux dérivées partielles à résoudre est la suivante:

$$D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - a\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - bu(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{1.1}$$

où D, a et b sont des constantes. Dans la suite de ce texte les dépendances en x et t de la fonction u ne seront pas toujours mentionnées explicitement. Les conditions aux bords suivantes sont imposées:

$$\begin{cases} u(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

où $l > 0$. La solution u est donc recherchée dans le domaine:

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ 0 < x < l \end{cases} \tag{1.3}$$

L'Equation 1.1 peut-être résolue par la méthode de séparation de variables. La solution u est supposée être de la forme:

$$u(x,t) = v(x)w(t) \tag{1.4}$$

En injectant cette forme de u dans l'Equation 1.1 on obtient:

$$Dw(t)\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} - aw(t)\frac{\partial v(x)}{\partial x} - bv(x)w(t) = v(x)\frac{\partial w(t)}{\partial t} \tag{1.5}$$

En divisant cette équation par $v(x)w(t)$ on obtient:

$$\frac{D}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{a}{v}\frac{\partial v}{\partial x} - b = \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial t} \equiv C_1 \tag{1.6}$$

Chaque partie de l'équation est en effet égale à une constante C_1 puisque la partie gauche ne dépend que de x et la partie droite ne dépend que de t. L'équation peut maintenant être résolue en résolvant séparément la partie qui dépend du temps t et la partie qui dépend de la position x. Pour la partie dépendante du temps on a:

$$\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial t} = C_1 \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = C_1 w \tag{1.8}$$

$$\boxed{w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2_n} e^{C_1 t}} \tag{1.9}$$

où C_{2_n} sont des constantes. Pour la partie dépendante de la position x on a:

$$\frac{D}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{a}{v}\frac{\partial v}{\partial x} = C_1 + b \tag{1.10}$$
$$D\frac{d^2 v}{dx^2} - a\frac{dv}{dx} - (C_1 + b)v = 0 \tag{1.11}$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du 2ème ordre. La solution à son équation dépend alors du polynôme caractéristique de l'équation:

$$Dr^2 - ar - (C_1 + b) = 0 \tag{1.12}$$
$$\rho = a^2 + 4D(C_1 + b) \tag{1.13}$$

Les deux racines de ce polynôme sont:

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{a + \sqrt{\rho}}{2D} \\ r_2 = \dfrac{a - \sqrt{\rho}}{2D} \end{cases} \tag{1.14}$$

En fonction du signe de ρ la solution de l'équation peut avoir trois formes.

Si $\rho > 0$

$$v(x) = C_3 e^{r_1 x} + C_4 e^{r_2 x} \tag{1.15}$$

où C_3 et C_4 sont des constantes. En utilisant la condition au bord $u(0, t) = 0 = v(0)w(t) \implies v(0) = 0$ on a:

$$C_4 = -C_3 \implies v(x) = C_3(e^{r_1 x} - e^{r_2 x}) \tag{1.16}$$

Et en utilisant la condition au bord $u(l, t) = 0 = v(l)w(t) \implies v(l) = 0$ on a:

$$C_3(e^{r_1 l} - e^{r_2 l}) = 0 \implies r_1 = r_2 \implies v(x) = 0 \tag{1.17}$$

Cette solution n'est donc pas intéressante par rapport à nos conditions aux bords.

Si $\rho = 0, r_1 = r_2 \equiv r$

$$v(x) = (C_3 + C_4 x)e^{rx} \tag{1.18}$$

où C_3 et C_4 sont des constantes. En utilisant la condition au bord $u(0,t) = 0 = v(0)w(t) \implies v(0) = 0$ on a:

$$C_3 = 0 \implies v(x) = C_4 x e^{rx} \tag{1.19}$$

Et en utilisant la condition au bord $u(l,t) = 0 = v(l)w(t) \implies v(l) = 0$ on a:

$$C_4 l e^{rl} = 0 \implies C_4 = 0 \implies v(x) = 0 \tag{1.20}$$

Cette solution n'est donc pas intéressante par rapport à nos conditions aux bords.

Si $\rho < 0$

On définit $r_1 \equiv \alpha + i\beta$, $r_2 \equiv \alpha - i\beta$ et

$$v(x) = (C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x))e^{\alpha x} \tag{1.21}$$

En utilisant la condition au bord $u(0,t) = 0 = v(0)w(t) \implies v(0) = 0$ on a:

$$C_3 = 0 \implies v(x) = C_4 \sin(\beta x) e^{\alpha x} \tag{1.22}$$

Et en utilisant la condition au bord $u(l,t) = 0 = v(l)w(t) \implies v(l) = 0$ on a:

$$\sin(\beta l) = 0 \implies \beta l = m\pi \implies \beta = \frac{m\pi}{l}, m \in \mathbb{Z} \tag{1.23}$$

La solution générale pour la partie de l'équation dépendante de la position est donc:

$$\boxed{v(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{4_m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x}} \tag{1.24}$$

où les C_{4_m} sont des constantes. Utilisons maintenant la condition au bord $u(x,0) = g(x)$ afin de déterminer les valeurs de ces constantes C_{4_m}.

$$u(x,0) = v(x)w(0) = v(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2_n} = g(x) \tag{1.25}$$

En définissant $C_2 \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2_n}$:

$$v(x)C_2 = g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{4_m} C_2 \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} \tag{1.26}$$

En définissant $\tilde{C}_{4_m} = C_{4_m} C_2$ on obtient:

$$g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_{4_m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} \tag{1.27}$$

On voit dès lors que les coefficients $\tilde{C}_{4_m}$ sont obtenus en projetant la fonction $g(x)$ sur la base des fonctions $\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x}$:

$$\tilde{C}_{4_m} = \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} dx \tag{1.28}$$

Puisque le terme de la somme pour $m = 0$ est égal à zéro, et que la fonction sinus est impaire:

$$\tilde{C}_{4_{(-m)}} = \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{-m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} dx = -\tilde{C}_{4_m} \tag{1.29}$$

$$\Longrightarrow \tilde{C}_{4_{(-m)}} \sin\left(\frac{-m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} = \tilde{C}_{4_m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} \tag{1.30}$$

Et donc:

$$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} 2\tilde{C}_{4_m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} \tag{1.31}$$

En définissant $C'_{4_m} = 2\tilde{C}_{4_m}$ on peut écrire:

$$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C'_{4_m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} \tag{1.32}$$

avec

$$C'_{4_m} = 2\int_0^l g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} dx \tag{1.33}$$

La fonction $u(x,t)$ peut alors s'écrire:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C'_{4_m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{\alpha x} e^{C_1 t} \tag{1.34}$$

Notons que par définition du polynôme caractéristique de l'équation différentielle $\alpha = a/(2D)$ et donc qu'il ne reste plus qu'à déterminer la constante C_1.

$$\rho = a^2 + 4D(C_1 + b) \implies \boxed{C_1 = \frac{\rho - a^2}{4D} - b} \tag{1.35}$$

Par ailleurs,

$$\alpha + i\beta = \frac{a + \sqrt{\rho}}{2D} \tag{1.36}$$

$$\sqrt{\rho} = 2D(\alpha + \beta i) - a \tag{1.37}$$

$$\rho = (2D(\alpha + \beta i) - a)^2 \tag{1.38}$$

En injectant cette expression de ρ dans celle de C_1 on obtient:

$$C_1 = \frac{\left(2D(\alpha+\beta i)-a\right)^2 - a^2}{4D} - b = \frac{4D^2(\alpha+\beta i)^2 + a^2 - 4Da(\alpha+\beta i) - a^2}{4D} - b$$
$$= D(\alpha+\beta i)^2 - a(\alpha+\beta i) - b = D(\alpha^2-\beta^2+i2\alpha\beta) - a(\alpha+\beta i) - b$$
$$= D(\alpha^2-\beta^2) + i2D\alpha\beta - a\alpha - a\beta i - b = D(\alpha^2-\beta^2) + i2D\frac{a}{2D}\beta - a\alpha - a\beta i - b$$
$$= D(\alpha^2-\beta^2) + ia\beta - a\alpha - a\beta i - b = D(\alpha^2-\beta^2) - a\alpha - b$$
$$= D\left(\frac{a^2}{4D^2} - \frac{m^2\pi^2}{l^2}\right) - \frac{a^2}{2D} - b = -\frac{a^2}{4D} - \frac{Dm^2\pi^2}{l^2} - b \quad (1.39)$$

En injectant l'expression de C_1 dans celle de u:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C'_{4_m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \exp\left(\frac{ax}{2D} + \left(-\frac{a^2}{4D} - \frac{Dm^2\pi^2}{l^2} - b\right)t\right) \quad (1.40)$$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C'_{4_m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \exp\left(\frac{a}{2D}\left(x - \frac{a}{2}t\right) - \left(\frac{Dm^2\pi^2}{l^2} + b\right)t\right)} \quad (1.41)$$

Conclusion

Chapter 2

Prédictibilité

Introduction

2.1 todo

Conclusion