Neo Hookean UMAT

徐辉

2019 年 4 月 13 日

1 理论

Abaqus 指标映射关系

(i,j)	a
(1,1)	1
(2,2)	2
(3,3)	3
(1,2)	4
(1,3)	5
(2,3)	6

表 1: Abaqus 指标映射关系

线性理论的 Lame 常数: λ_0 和 μ_0

$$\lambda = \lambda_0$$

$$\mu = \mu_0 - \lambda_0 \ln J$$

变形梯度

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}$$

左 Cauchy Green 变形张量

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} F_{11}^2 + F_{12}^2 + F_{13}^2 & F_{11}F_{21} + F_{12}F_{22} + F_{13}F_{23} & F_{11}F_{31} + F_{12}F_{32} + F_{13}F_{33} \\ & F_{21}^2 + F_{22}^2 + F_{23}^2 & F_{21}F_{31} + F_{22}F_{32} + F_{23}F_{33} \\ \mathrm{sym} & & F_{31}^2 + F_{32}^2 + F_{33}^2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
B[1] &= B_{11} = F_{11}^2 + F_{12}^2 + F_{13}^2 \\
B[2] &= B_{22} = F_{21}^2 + F_{22}^2 + F_{23}^2 \\
B[3] &= B_{33} = F_{31}^2 + F_{32}^2 + F_{33}^2 \\
B[4] &= B_{12} = F_{11}F_{21} + F_{12}F_{22} + F_{13}F_{23} \\
B[5] &= B_{13} = F_{11}F_{31} + F_{12}F_{32} + F_{13}F_{33} \\
B[6] &= B_{23} = F_{21}F_{31} + F_{22}F_{32} + F_{23}F_{33}
\end{aligned}
$$

应变能函数 [1](5.4.54)

$$
W(\boldsymbol{C}) = \frac{1}{2}\mu_0(\mathrm{trace}(\boldsymbol{C}) - 3) - \mu_0 \ln J + \frac{1}{2}\lambda_0(\ln J)^2
$$

Kirchhoff 应力 [1](5.4.55)

$$
\boldsymbol{\tau} = \lambda_0 \ln J \boldsymbol{I} + \mu_0(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})
$$

Cauchy 应力

$$
\boldsymbol{\sigma} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{J} = \frac{\mu_0}{J}\boldsymbol{B} - \frac{\mu_0 - \lambda_0 \ln J}{J}\boldsymbol{I}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma[1] &= \sigma_{11} = \frac{\mu_0}{J}B[1] - \frac{\mu_0 - \lambda_0 \ln J}{J} \\
\sigma[2] &= \sigma_{11} = \frac{\mu_0}{J}B[2] - \frac{\mu_0 - \lambda_0 \ln J}{J} \\
\sigma[3] &= \sigma_{11} = \frac{\mu_0}{J}B[3] - \frac{\mu_0 - \lambda_0 \ln J}{J} \\
\sigma[4] &= \sigma_{12} = \frac{\mu_0}{J}B[4] \\
\sigma[5] &= \sigma_{13} = \frac{\mu_0}{J}B[5] \\
\sigma[6] &= \sigma_{23} = \frac{\mu_0}{J}B[6]
\end{aligned}
$$

材料切线刚度可以表示为 [1](5.4.57)

$$
\mathbb{C}^{\tau}_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj})
$$

有切线刚度的转化关系 [1](5.4.42)(5.4.46)(5.4.51)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}^{SE}_{ijkl} &= \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} \\
\mathbb{C}^{\tau}_{ijkl} &= F_{im}F_{jn}F_{kp}F_{lq}C^{SE}_{mnpq} \\
\mathbb{C}^{\sigma T}_{ijkl} &= \frac{1}{J}\mathbb{C}^{\tau}_{ijkl}
\end{aligned}
$$

Abaqus 切线刚度可以表示 [2](36) 为

$$
\mathrm{DDSDDE}_{iqph} = \frac{1}{J}F_{iM}F_{qI}F_{pK}F_{hL}\frac{\partial S_{MI}}{\partial E_{KL}} + \frac{1}{2}(\sigma_{ip}\delta_{qh} + \sigma_{qh}\delta_{ip} + \sigma_{ih}\delta_{qp} + \sigma_{qp}\delta_{ih})
$$

注意该公式和论文中不同, 认为论文中公式存在笔误，不同之处用红色标出。指标变换并带入材料刚度有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DDSDDE}_{ijkl} &= \mathbb{C}^{\sigma T}_{ijkl} + \frac{1}{2}(\sigma_{ik}\delta_{jl} + \sigma_{jl}\delta_{ik} + \sigma_{il}\delta_{jk} + \sigma_{jk}\delta_{il}) \\
&= \frac{1}{J}(\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj})) + \frac{1}{2}(\sigma_{ik}\delta_{jl} + \sigma_{jl}\delta_{ik} + \sigma_{il}\delta_{jk} + \sigma_{jk}\delta_{il})
\end{aligned}
$$

根据表 1，写成矩阵形式有

$$
\begin{aligned}
\text{DDSDDE} = & \begin{pmatrix}
(\lambda+2\mu)/J & \lambda/J & \lambda/J & 0 & 0 & 0 \\
 & (\lambda+2\mu)/J & \lambda/J & 0 & 0 & 0 \\
 & & (\lambda+2\mu)/J & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \mu/J & 0 & 0 \\
 & \text{sym} & & & \mu/J & 0 \\
 & & & & & \mu/J
\end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix}
2\sigma[1] & 0 & 0 & \sigma[4] & \sigma[5] & 0 \\
 & 2\sigma[2] 0 & 0 & \sigma[4] & 0 & \sigma[6] \\
 & & 2\sigma[3] & 0 & \sigma[5] & \sigma[6] \\
 & & & (\sigma[1]+\sigma[2])/2 & \sigma[6]/2 & \sigma[5]/2 \\
 & \text{sym} & & & (\sigma[1]+\sigma[3])/2 & \sigma[4]/2 \\
 & & & & & (\sigma[2]+\sigma[3])/2
\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1}
$$

2 数值模拟

对如下问题进行数值模拟。

平面应变问题，一个 1x1 的块体两侧受压，边界条件为位移载荷。左侧为 0.25，右侧为-0.25。

材料参数 $\mu_0 = 2$,$\lambda_0 = 1000000$

2.1 理论解

变形梯度:

$$
\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

左 Cauchy-Green 变形张量:

$$
\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Cauchy 应力

$$
\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + 2\left(\frac{\partial W}{\partial I}\boldsymbol{B}\right) = \mu_0\boldsymbol{B} - p\boldsymbol{I} = \mu_0 \begin{pmatrix} 0.25-p & 0 & 0 \\ 0 & 4-p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix}
$$

根据边界条件

$$
\sigma_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 4
$$

因此 Cauchy 应力

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + 2\left(\frac{\partial W}{\partial I}\boldsymbol{B}\right) = \mu_0\boldsymbol{B} - p\boldsymbol{I} = \mu_0\begin{pmatrix} -3.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

2.2 模拟结果

2.2.1 使用 μ

在公式 (1) 中，直接使用 μ。即不作修改，直接使用公式 (1)。

数值模拟应力大小和解析结果相同。

第一个负特征值出现在增量步 94，时间 0.8358，名义应变大约为 $0.5 \times 0.8358/1 = 41.79\%$。

2.2.2 使用 μ_0

在切线刚度的部分就认为材料不可压缩，即在公式 (1) 中，使用 μ_0，μ 出现的的地方使用 μ_0 代替。

第一个负特征值出现在增量步 10，时间 0.00758, 名义应变大约为 $0.5 \times 0.00758/1 = 0.00379\%$。

在增量步 54，时间 0.3877，名义应变大约为 $0.5 \times 0.3877/1 = 19\%$ 时计算不收敛。

参考文献

[1] Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures @ Belytschko

[2] Nguyen N , Waas A M . Nonlinear, finite deformation, finite element analysis[J]. Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik, 2016, 67(3):35.