Задача Ламе о равностороннем нагружении толстостенного полого цилиндра из несжимаемого материала

Кинематическая постановка задачи

Пусть требуется определить напряженно-деформированное состояние упругого толстостенного полого цилиндра, находящегося под равносторонним осесимметричным нагружением. Обозначим внутренний и внешний радиусы цилиндра в недеформированном состоянии как r_1 и r_2 соответственно, а высоту цилиндра как l.
В силу осевой симметрии геометрии задачи и осесимметричного характера нагружения, удобно воспользоваться цилиндрическими координатами в качестве лагранжевых (r для радиальной компоненты вектора перемещений, φ для угловой компоненты и z для осевой):

$$\begin{aligned} \overset{o}{x}_1 &= x & X_1 &= r & \overset{o}{x}_1 &= r\cos\varphi \\ \overset{o}{x}_2 &= y, & X_2 &= \varphi, & \overset{o}{x}_2 &= r\sin\varphi \\ \overset{o}{x}_3 &= z & X_3 &= z & \overset{o}{x}_3 &= z \end{aligned} \tag{1.1}$$

Для выбранного напряженно-деформированного состояния радиальное перемещение зависит только от r, а осевое является линейной функцией координаты z. Тогда, если записать закон движения материальной точки в виде

$$\begin{aligned} r &= f(r) \\ z &= kz \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $f(r)$ - функция раздувания цилиндра, а k - коэффициент растяжения цилиндра, то можно получить вектора локального базиса в отсчётной:

$$\overset{o}{\vec{R}}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overset{o}{\vec{R}}_2 = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overset{o}{\vec{R}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

и актуальной:

$$\vec{R}_1 = \begin{pmatrix} f'(r)\cos\varphi \\ f'(r)\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{R}_2 = \begin{pmatrix} -f(r)\sin\varphi \\ f(r)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{R}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

конфигурациях. Выпишем ненулевые компоненты метрической метрической матриц в отсчётной и актуальной конфигурациях:

$$\begin{aligned} \overset{o}{g}_{11} &= 1 & \overset{o}{g}_{22} &= r^2 & \overset{o}{g}_{33} &= 1 \\ g_{11} &= f'(r)^2 & g_{22} &= f(r)^2 & g_{33} &= k^2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Метрические матрицы диагональны, что и следовало ожидать, учитывая ортогональность векторов локального базиса в отсчётной и актуальной конфигурациях. Тогда легко вычислить компоненты обратных метрических матриц:

$$\overset{o}{g}{}^{11} = 1 \qquad \overset{o}{g}{}^{22} = \frac{1}{r^2} \qquad \overset{o}{g}{}^{33} = 1$$
$$g^{11} = \frac{1}{f'(r)^2} \quad g^{22} = \frac{1}{f(r)^2} \quad g^{33} = \frac{1}{k^2} \tag{1.6}$$

Итак

$$\overset{o}{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \overset{o}{g}{}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} f'^2 & 0 & 0 \\ 0 & f^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix} \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} f'^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & f^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & k^{-2} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Выпишем теперь параметры Ламе для отсчётной и актуальной конфигураций, используя $H_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\beta}}$:

$$\overset{o}{H}_1 = 1 \quad \overset{o}{H}_2 = r \quad \overset{o}{H}_3 = 1$$
$$H_1 = f' \quad H_2 = f \quad H_3 = k \tag{1.8}$$

Также нам нужны будут в дальнейшем компоненты градиента деформации:

$$\underset{\sim}{F} = \vec{R}_i \otimes \vec{\overset{o}{R}}{}^i = \overset{o}{g}{}^{ij} \vec{R}_i \otimes \vec{\overset{o}{R}}_j = (\overset{o}{g}{}^{ij} H_i \overset{o}{H}_j)\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = f'\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \frac{f}{r}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + k\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \tag{1.9}$$

Таким образом:

$$\underset{\sim}{F} = \begin{pmatrix} f' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{r} & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{F}{}^{-1} = \begin{pmatrix} f'^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{f} & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{F}, \underset{\sim}{O} = \underset{\sim}{E} \tag{1.10}$$

где $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{U} \cdot \underset{\sim}{O} = \underset{\sim}{O} \cdot \underset{\sim}{V}$ - ортогональное разложение градиента деформации.

Найдём $\overset{(n)}{\underset{\sim}{C}}$ и $\overset{(n)}{\underset{\sim}{G}}$ - энергетические тензоры и меры деформации:

$$\overset{(n)}{\underset{\sim}{C}} = \frac{1}{(n-III)}(U^{n-III} - E)$$
$$\overset{(n)}{\underset{\sim}{G}} = \frac{1}{n-III}U^{n-III} \tag{1.11}$$

Тогда:

$$\overset{(n)}{\underset{\sim}{C}} = \frac{1}{n-III}\left[\left(f'^{n-III} - 1\right)\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \left(\left(\frac{f}{r}\right)^{n-III} - 1\right)\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \left(k^{n-III} - 1\right)\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3\right]$$
$$\overset{(n)}{\underset{\sim}{G}} = \frac{1}{n-III}\left[f'^{n-III}\,\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \left(\frac{f}{r}\right)^{n-III}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + k^{n-III}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3\right] \tag{1.12}$$

Воспользуемся далее условием несжимаемости материала: $\det \underset{\sim}{F} = 1$. Тогда:

$$\frac{f' fk}{r} = 1 \tag{1.13}$$

откуда немедленно следует:

$$f' = \frac{r}{fk} \tag{1.14}$$

Разрешая это дифференциальное уравнение относительно f, получаем:

$$fdf = \frac{r}{k}dr \quad \Rightarrow \quad f^2 = \frac{r^2}{k} + C \tag{1.15}$$

где C - константа, также подлежащая определению.
Используя условие несжимаемости в форме (1.14), перепишем выражения для энергетических тензоров и мер деформации $\overset{(n)}{\underset{\sim}{C}}$ и $\overset{(n)}{\underset{\sim}{G}}$ (1.12):

$$\begin{aligned}
\overset{(n)}{\underset{\sim}{C}} &= \frac{1}{n-III}\left[\left(\left(\frac{r}{fk}\right)^{n-III} - 1\right)\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \left(\left(\frac{f}{r}\right)^{n-III} - 1\right)\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \left(k^{n-III} - 1\right)\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3\right] \\
\overset{(n)}{\underset{\sim}{G}} &= \frac{1}{n-III}\left[\left(\frac{r}{fk}\right)^{n-III}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \left(\frac{f}{r}\right)^{n-III}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + k^{n-III}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3\right]
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Выражение для обратного тензора $\overset{(n)}{\underset{\sim}{G}}$:

$$\overset{(n)}{\underset{\sim}{G}}{}^{-1} = \left(n-III\right)\left[\left(\frac{fk}{r}\right)^{n-III}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \left(\frac{r}{f}\right)^{n-III}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \left(\frac{1}{k}\right)^{n-III}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3\right] \tag{1.17}$$

а также выражение для градиента деформации $\underset{\sim}{F}$:

$$\underset{\sim}{F} = \frac{r}{fk}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \frac{f}{r}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + k\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \tag{1.18}$$

Определяющие соотношения

Энергетические тензоры напряжений

В данной задаче, исходя из диагонального вида градиента деформации, можно заключить, что энергетические и квазиэнергетические тензоры деформаций и напряжений для разных классов моделей $(A)_n, (B)_n, (C)_n, (D)_n$ совпадают:

$$\overset{(n)}{\underset{\sim}{C}} = \overset{(n)}{\underset{\sim}{A}}, \quad \overset{(n)}{\underset{\sim}{g}} = \overset{(n)}{\underset{\sim}{G}}, \quad \overset{(n)}{\underset{\sim}{T}} = \overset{(n)}{\underset{\sim}{S}}, \quad n = I \ldots V$$

Кроме того, декартов базис совпадает с собственным базисом градиента деформации, а это означает, что все эти тензоры имеют общий собственный базис $\vec{e}_\alpha$. Поэтому имеет смысл исследовать в дальнейшем только модели классов $(A)_n$ и $(B)_n$.

Выражение для энергетического тензора напряжений для модели $(A)_n$ с учётом несжимаемости материала в случае отсутствия вязких эффектов имеет вид:

$$(\mathrm{A})_n: \quad \begin{aligned}
\overset{(n)}{\underset{\sim}{T}} &= -\hat{p}\left(\underset{\sim}{E} + (n-III)\overset{(n)}{\underset{\sim}{C}}\right)^{-1} + \overset{(n)}{\underset{\sim}{T}}_{\Sigma} \\
\overset{(n)}{\underset{\sim}{T}}_{\Sigma} &= \rho\frac{\partial\psi}{\partial \overset{(n)}{\underset{\sim}{C}}} = \lambda I_1(\overset{(n)}{\underset{\sim}{C}})\underset{\sim}{E} + 2\mu\overset{(n)}{\underset{\sim}{C}}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Здесь $\overset{(n)}{\underset{\sim}{T}}_{\Sigma} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial \overset{(n)}{\underset{\sim}{C}}}$ - выражение для упругой части тензора напряжений, $\hat{p}$ - гидростатическое давление, а λ и μ - константы Ламе материала. Воспользуемся (1.11), для выражения в скобках в (1.19):

$$\left(\underset{\sim}{E}+(n-III)\overset{(n)}{\underset{\sim}{C}}\right)^{-1}=\left(\underset{\sim}{E}+\underset{\sim}{U}^{n-III}-E\right)^{-1}=\frac{1}{(n-III)}\overset{(n)}{\underset{\sim}{G}}{}^{-1} \qquad (1.20)$$

Тогда выражение для энергетического тензора напряжений модели $(A)_n$ примет вид:

$$\overset{(n)}{\underset{\sim}{T}}=-\frac{\hat{p}}{(n-III)}\overset{(n)}{\underset{\sim}{G}}{}^{-1}+\overset{(n)}{\underset{\sim}{T}}{}_{\Sigma} \qquad (1.21)$$

Аналогичные выражения можно выписать и для модели $(B)_n$:

$$(\mathrm{B})_n:\quad \begin{aligned}&\overset{(n)}{\underset{\sim}{T}}=-\frac{\hat{p}}{(n-III)}\overset{(n)}{\underset{\sim}{G}}{}^{-1}+\overset{(n)}{\underset{\sim}{T}}{}_{\Sigma}\\ &\overset{(n)}{\underset{\sim}{T}}{}_{\Sigma}=\rho\frac{\partial\psi}{\partial\overset{(n)}{\underset{\sim}{G}}}=\mu(n-III)\left[\left(1+\beta+(1-\beta)(n-III)I_1(\overset{(n)}{\underset{\sim}{G}})\right)\underset{\sim}{E}-(1-\beta)(n-III)\overset{(n)}{\underset{\sim}{G}}\right]\end{aligned} \qquad (1.22)$$

Здесь также $\hat{p}$ - гидростатическое давление, а β и μ - константы материала.

Очевидно, что из диагональности тензоров $\overset{(n)}{\underset{\sim}{C}}$ и $\overset{(n)}{\underset{\sim}{G}}$ следует диагональность тензоров $\overset{(n)}{\underset{\sim}{T}}$ и $\overset{(n)}{\underset{\sim}{T}}{}_{\Sigma}$ для этих моделей.

Тензор истинных напряжений Коши

Связь между тензором истинных напряжений Коши $\underset{\sim}{T}$ и энергетическими тензорами напряжений имеет вид:

$$\underset{\sim}{T}=\underset{\sim}{F}^{n-III}\cdot\overset{(n)}{\underset{\sim}{T}} \qquad (1.23)$$

Переобозначив гидростатическое давление $p=\dfrac{\hat{p}}{(n-III)}$, можно выписать ненулевые компоненты тензора истинных напряжений Коши:

$$\begin{aligned}&T_{11}=T_r=-p+\left(\frac{r}{fk}\right)^{n-III}\overset{(n)}{T}_{\Sigma r}\\ &T_{22}=T_\varphi=-p+\left(\frac{f}{r}\right)^{n-III}\overset{(n)}{T}_{\Sigma\varphi}\\ &T_{33}=T_z=-p+k^{n-III}\overset{(n)}{T}_{\Sigma z}\end{aligned} \qquad (1.24)$$

где $\overset{(n)}{T}_{\Sigma r}$, $\overset{(n)}{T}_{\Sigma\varphi}$ и $\overset{(n)}{T}_{\Sigma z}$ - соответствующие компоненты энергетического тензора упругих напряжений, для модели $(A)_n$:

$$(A)_n:\quad\begin{aligned}&\overset{(n)}{T}_{\Sigma r}=\lambda I^{An}{}_1+\frac{2\mu}{n-III}\left(\left(\frac{r}{fk}\right)^{n-III}-1\right)\\ &\overset{(n)}{T}_{\Sigma\varphi}=\lambda I^{An}{}_1+\frac{2\mu}{n-III}\left(\left(\frac{f}{r}\right)^{n-III}-1\right)\\ &\overset{(n)}{T}_{\Sigma z}=\lambda I^{An}{}_1+\frac{2\mu}{n-III}\left(k^{n-III}-1\right)\end{aligned} \qquad (1.25)$$

где

$$I^{An}{}_1=\frac{1}{n-III}\left\{\left(\frac{r}{fk}\right)^{n-III}+\left(\frac{f}{r}\right)^{n-III}+k^{n-III}-3\right\} \qquad (1.26)$$

- 1-й инвариант тензора $\overset{(n)}{\underset{\sim}{C}}$.

Тогда для для модели $(B)_n$ соответственно:

$$(B)_n: \quad \begin{aligned} \overset{(n)}{T}_{\Sigma r} &= \mu(n-III)\left[1+\beta+(1-\beta)\left(\left(\frac{f}{r}\right)^{n-III}+k^{n-III}\right)\right] \\ \overset{(n)}{T}_{\Sigma\varphi} &= \mu(n-III)\left[1+\beta+(1-\beta)\left(\left(\frac{r}{fk}\right)^{n-III}+k^{n-III}\right)\right] \\ \overset{(n)}{T}_{\Sigma z} &= \mu(n-III)\left[1+\beta+(1-\beta)\left(\left(\frac{f}{r}\right)^{n-III}+\left(\frac{r}{fk}\right)^{n-III}\right)\right] \end{aligned} \tag{1.27}$$

Первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа

Связь между тензором истинных напряжений Коши и первым тензором Пиолы-Кирхгофа имеет вид:

$$\underset{\sim}{P} = \sqrt{\frac{g}{\overset{o}{g}}}\underset{\sim}{F}^{-1}\cdot\underset{\sim}{T} \tag{1.28}$$

Здесь g и $\overset{o}{g}$ - определители метрической матрицы в актуальной и отсчётной конфигурациях соответственно. Из условия несжимаемости $\sqrt{\frac{g}{\overset{o}{g}}}=1$, поэтому для несжимаемых материалов эта связь примет вид

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{F}^{-1}\cdot\underset{\sim}{T} \tag{1.29}$$

Выпишем компоненты тензора Пиолы-Кирхгофа:

$$\begin{aligned} P_{11} &= P_r = \frac{fk}{r}T_r = -\frac{fk}{r}p + \overset{(n)}{P}_{\Sigma r} \\ P_{22} &= P_\varphi = \frac{r}{f}T_\varphi = -\frac{r}{f}p + \overset{(n)}{P}_{\Sigma\varphi} \\ P_{33} &= P_z = \frac{1}{k}T_z = -\frac{1}{k}p + \overset{(n)}{P}_{\Sigma z} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Здесь, соответственно:

$$\begin{aligned} \overset{(n)}{P}_{\Sigma r} &= \left(\frac{r}{fk}\right)^{n-III-1}\overset{(n)}{T}_{\Sigma r} \\ \overset{(n)}{P}_{\Sigma\varphi} &= \left(\frac{f}{r}\right)^{n-III-1}\overset{(n)}{T}_{\Sigma\varphi} \\ \overset{(n)}{P}_{\Sigma z} &= k^{n-III-1}\overset{(n)}{T}_{\Sigma z} \end{aligned} \tag{1.31}$$

Уравнения равновесия для задачи статики

Попробуем исследовать уравнения равновесия для задачи статики при условии отсутствия внешних массовых сил:

$$\overset{0}{\vec{\nabla}} \cdot \underset{\sim}{P} = \vec{0} \tag{1.32}$$

Для ортогональной системы координат и произвольного тензора $\underset{\sim}{T}$ имеет место выражение:

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{T} = \sum_{\gamma=1}^{3} b_\gamma \vec{e}_\gamma$$
$$b_\gamma = \frac{1}{\Delta}\sum_{\alpha=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial X^\alpha}\left(\frac{\Delta}{H_\alpha}T_{\alpha\gamma}\right) + \frac{\Delta}{H_\alpha H_\gamma}\left(T_{\gamma\alpha}\frac{\partial H_\gamma}{\partial X^\alpha} - T_{\alpha\alpha}\frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\gamma}\right)\right] \tag{1.33}$$

Здесь $\Delta = H_1 H_2 H_3$

Для цилиндрической системы координат с учётом равенства нулю недиагональных компонент тензора Пиолы-Кирхгофа имеем $b_2 = b_3 = 0$, а для b_1 выражение

$$b_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial(rP_{11})}{\partial r} - \frac{P_{22}}{r} = \frac{\partial P_r}{\partial r} + \frac{P_r}{r} - \frac{P_\varphi}{r} \tag{1.34}$$

Здесь и далее, если это не вызывает путаницы, обозначение (n) над компонентами тензора Пиолы-Кирхгофа опускаем.

Тогда уравнения равновесия эквивалентны условию $b_1 = 0$:

$$\frac{\partial P_r}{\partial r} + \frac{P_r - P_\varphi}{r} = 0 \tag{1.35}$$

представляющему собой дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции гидростатического давления $p(r,t)$.

Преобразуем (1.35) с учётом (1.30):

$$-\left(\frac{pfk}{r}\right)_r + p\frac{r^2 - f^2 k}{r^2 f} = -\frac{\partial P_{\Sigma r}}{\partial r} - \frac{P_{\Sigma r} - P_{\Sigma\varphi}}{r}$$
$$-\left(\frac{pfk}{r}\right)_r + p\frac{r^2 - f^2 k}{r^2 f} = \frac{r\dfrac{\partial P_{\Sigma r}}{\partial r} + P_{\Sigma r} - P_{\Sigma\varphi}}{r} \tag{1.36}$$

Здесь записью $(f)_r$ обозначаем дифференцирование по r. Обозначим также

$$\tilde{h} = r\frac{\partial P_{\Sigma r}}{\partial r} + P_{\Sigma r} - P_{\Sigma\varphi} \tag{1.37}$$

Тогда

$$-\left(\frac{pfk}{r}\right)_r + p\frac{r^2 - f^2 k}{r^2 f} = \frac{\tilde{h}}{r} \tag{1.38}$$

Преобразуем 1-е слагаемое в (1.38) с учётом (1.14):

$$k\left(\frac{pf}{r}\right)_r = k\frac{(pf)'r - pf}{r^2} = \frac{k}{r}(pf)' - p\frac{kf}{r^2} \tag{1.39}$$

Перепишем производную по r как производную сложной функции по f:

$$\frac{k}{f}(pf)' = \frac{k}{r}\frac{d(pf)}{dr} = \frac{k}{r}\frac{d(pf)}{df}\frac{df}{dr} = \frac{k}{r}f\left(\frac{dp}{df} + p\right)\frac{r}{fk} =$$
$$= \frac{dp}{df} + \frac{p}{f} \tag{1.40}$$

Тогда

$$k\left(\frac{pf}{r}\right)_r = \frac{dp}{df} + \frac{p}{f} - p\frac{kf}{r^2} = \frac{dp}{df} - p\frac{kf^2 - r^2}{fr^2} \tag{1.41}$$

Подставляя (1.41) в (1.38), непосредственно убеждаемся что

$$\frac{dp}{df}=\frac{\tilde{h}}{r} \tag{1.42}$$

Откуда

$$\frac{\partial p}{\partial r}\frac{dr}{df}=\frac{\partial p}{\partial r}\left(f'\right)^{-1}=\frac{\partial p}{\partial r}\frac{fk}{r} \tag{1.43}$$

А значит получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp}{dr}=\frac{\tilde{h}}{fk} \tag{1.44}$$

которое легко интегрируется:

$$p(r)=p_0+\frac{1}{k}\int_{r_1}^{r}\frac{\tilde{h}}{f}dr \tag{1.45}$$

Граничные условия

Для решения задачи Ламе требуется определить 3 неизвестных: p_0, C и k. Для нахождения этих неизвестных будем использовать граничные условия.

Зададим граничные условия на внутренней и внешней стенках цилиндра(давление жидкости или газа):

$$\begin{aligned} P_r(r_1)&=-q_1 \\ P_r(r_2)&=-q_2 \end{aligned} \tag{1.46}$$

Тогда из (1.30) получим:

$$-q_1=-p_0\frac{f(r_1)k}{r_1}+P_{\Sigma r}(r_1) \tag{1.47}$$

$$-q_2=-p_0\frac{f(r_2)k}{r_2}+\frac{1}{k}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\tilde{h}}{f}dr+P_{\Sigma r}(r_2) \tag{1.48}$$

Из (1.47):

$$p_0=\left(P_{\Sigma r}(r_1)+q_1\right)\frac{r_1}{f(r_1)k} \tag{1.49}$$

Подставим в (1.48)

$$-q_2=-\frac{r_1}{r_2}\frac{f(r_2)}{f(r_1)}\left(P_{\Sigma r}(r_1)+q_1\right)+\frac{1}{k}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\tilde{h}}{f}dr+P_{\Sigma r}(r_2) \tag{1.50}$$

откуда получаем нелинейное уравнение относительно неизвестных C и k:

$$F(C,k)=q_2-\frac{r_1}{r_2}\frac{f(r_2)}{f(r_1)}\left(P_{\Sigma r}(r_1)+q_1\right)+\frac{1}{k}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\tilde{h}}{f}dr+P_{\Sigma r}(r_2)=0 \tag{1.51}$$

Для замыкания системы нужно использовать граничные условия на торцах цилиндра. Это может быть либо условие в виде перемещений, либо условие в виде давления.

1. Граничные условия в виде перемещений:

$$u_z=(z-\overset{o}{z})\big|_{\overset{o}{z}=0}=h \tag{1.52}$$

Если высота цилиндра в отсчётной конфигурации равна l, то

$$\frac{l+h}{l}=k \tag{1.53}$$

2. Граничные условия в виде давления:

$$P_z(z)=-q_3 \tag{1.54}$$

Ослабим это условие, введя интегральное условие на торце:

$$-q_3 = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \sigma_z(R) R dR = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z(f(r)) f(r) f'(r) dr \qquad (1.55)$$

С учётом $P_z = \sigma_z$ и $f'(r) = \dfrac{r}{f(r)k}$ перепишем это условие:

$$-q_3 = \frac{2\pi}{k} \int_{r_1}^{r_2} P_z(f(r)) r dr \qquad (1.56)$$

Здесь (1.55) или (1.56) – 2-е уравнение, совместно с уравнением (1.51) замыкающее систему для поиска неизвестных p_0, C и k.