Chapter 1

Clase 1

1.1 Topología

Topología en $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \mathbb{R}}_{n\text{veces}}$$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n); x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R} \wedge \ldots \wedge x_n \in \mathbb{R}\}$$

Al $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ se conoce como (n-upla), (vector), (punta) y a $\mathbb{R}^n$ es el n-ésimo espacio vectorial.

$\mathbb{R}^0 = \{\mathbb{O}\}$ espacio vectorial de dimensión 0.

En $\mathbb{R}^n$ tenemos:

- **Adición:**

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \end{aligned}$$

  donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $(x + y)$ es el vector suma.

- **Multiplicación por escalar:**

$$\begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \end{aligned}$$

  donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Example.

> Verificar que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}-$ espacio vectorial. Esto es $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo conmutativo y además.
>
> - $(\lambda + u)x = \lambda x + ux$

- $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
- $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
- $1x = x$

$\mathbb{O} = (0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ es el vector nulo.

Si $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to -x = (-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$. Además $-1(x)$ es el inverso aditivo de x y es denotado por $-x$

En $\mathbb{R}^n$, la base canónica es $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ donde:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n \\ e_2 &= (0, 1, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n \\ e_i &= (0, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ésimo}}}{1}, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ e_n &= (0, 0, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Example.

Mostrar que B es una base de $\mathbb{R}^n$.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ con

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ x &= (x_1, 0, \cdots, 0) + (0, x_2, 0, \cdots, 0) + \cdots + (0, 0, \cdots, x_n) \\ x &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \end{aligned}$$

¿B es linealmente independiente?
Sea $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = \mathbb{O}$$

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \mathbb{O} = (0, 0, \cdots, 0)$$

$$\to \lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 0 \wedge \cdots \wedge \lambda_n = 0$$

$\mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \{T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n : T$ es una transformación lineal$\}$

$M(n \times m)$ conjunto de matrices de orden $n \times m$ con entradas reales.

$$\begin{aligned} \psi \colon \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow M(n \times m) \\ A &\longmapsto (A) \end{aligned}$$

Considere

$$\begin{aligned} B &= \{e_1, e_2, \cdots, e_m\} & &\subset \mathbb{R}^m \text{base canónica} \\ B' &= \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \cdots, \overline{e_n}\} & &\subset \mathbb{R}^n \text{base canónica} \end{aligned}$$

$$Ae_j = a_{1j}\overline{e_1} + a_{2j}\overline{e_2} + \cdots + a_{nj}\overline{e_n}$$

$$\begin{array}{cc} \psi(A) = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cccc} \text{Coef. de} Ae_1 & & & \text{Coef. de} Ae_m \end{array} \end{array}$$

Example.

> Mostrar que ψ es una biyección. más aún, e sun isomorfismo entre espacios vectoriales.
>
> Decimos que $\psi\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ es bilineal si
>
> $$\begin{aligned} \psi(x+x',y) &= \psi(x,y)+\psi(x',y); & \forall x,x' \in \mathbb{R}^m, \forall y \in \mathbb{R}^n \\ \psi(\lambda x,y) &= \lambda\psi(x,y); & \forall x \in \mathbb{R}^m, \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \psi(x,y+y') &= \psi(x,y)+\psi(x,y'); \\ \psi(x,\lambda y) &= \lambda\psi(x,y); \end{aligned}$$

Dados

$$\begin{aligned} x &= (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m \\ y &= (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= \psi\left(\sum_{i=1}^m x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j \overline{e_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^m x_i \psi\left(e_i, \sum_{j=1}^n y_j \overline{e_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n y_j \psi(e_i,\overline{e_j}) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j \psi(e_i,\overline{e_j}) \text{ (por bilinealidad)} \end{aligned}$$

1.2 Producto Interno y Norma en $\mathbb{R}^n$

Sea E un espacio vectorrial sobre $\mathbb{R}$

1.2.1 Producto Interno

Un producto interno sobre E es una función

Definition 1.2.1: Producto interno

Un **producto interno** sobre un espacio vectorial E es una función

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle\colon E\times E &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) &\longmapsto \langle x,y\rangle\end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:
(i) Linealidad en la primera componente:

$$\langle x+x',y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x',y\rangle, \qquad \forall x,x',y\in E \tag{1.1}$$
$$\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle, \qquad \forall x,y\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{R} \tag{1.2}$$

(ii) Simetría:

$$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle, \quad \forall x,y\in E \tag{1.3}$$

(iii) Positividad definida:

$$\langle x,x\rangle > 0, \quad \forall x\in E.\forall x\neq \mathbb{O} \tag{1.4}$$

Como consecuencia de las propiedades (1.1) y (1.3), también se cumple:

- $\langle x,y+y'\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,y'\rangle, \quad \forall x,y,y'\in E$
- $\langle x,\lambda y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle, \quad \forall x,y\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$

*En otras palabras, el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es **bilineal** y **simétrico**.*

Example.

> Sea $\langle .,.\rangle\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
> Si $x=(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ e $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$
>
> $$\to \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ (Producto interno euclideano)}$$

Definition 1.2.2: Ortogonalidad

Sean $x,y\in\mathbb{R}^n$. Decimos que x y y son **ortogonales** si

$$\langle x,y\rangle = 0. \tag{1.5}$$

1.2.2 Norma

Definition 1.2.3: Norma

Una **norma** sobre el espacio vectorial E es una función

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned} \tag{1.6}$$

que satisface las siguientes propiedades:
(i) Desigualdad triangular:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in E \tag{1.7}$$

(ii) Homogeneidad absoluta:

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in E \tag{1.8}$$

(iii) Positividad definida:

$$\|x\| > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq 0 \tag{1.9}$$

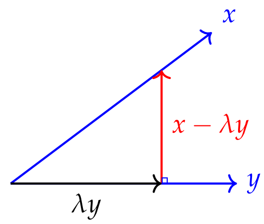
- De (1.8)
$$\|\mathbb{O}\| = \|0x\| = |0|\|x\| = 0$$
- De (1.8)
$$\|-x\| = \|(-1)x\| = |-1|\|x\| = \|x\|$$
- De (1.7)
$$0 = \|\mathbb{O}\| = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \underbrace{\|-x\|}_{\|x\|}$$
$$\therefore 0 \leq \|x\|, \quad \forall x \in E \tag{1.10}$$
- De (1.10) y (1.9) es equivalente a
$$\|x\| = 0 \longleftrightarrow x = \mathbb{O}$$

Example.

La norma euclideana en $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{aligned}$$

Mostemos que $\|.\|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$
Para (1.8) es inmediato, (1.9) hay que negar $x \neq 0$, o sea $x = 0$
Solo falta mostrar (1.7) Sean $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0 \rightarrow \langle y, y \rangle > 0$



¿Para qué $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $\langle y, x - \lambda y \rangle = 0$?

$$\begin{aligned} &\leftrightarrow \langle y, x\rangle - \lambda \langle y, y \rangle = 0 \\ &\leftrightarrow \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} = \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|\lambda y + x - \lambda y\|^2 \\ &= \langle xy + x - \lambda y, xy + x - \lambda y\rangle \\ &= |\lambda|^2 \|y\|^2 + \underbrace{\|x - \lambda y\|^2}_{\geq 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \|x\|^2 \geq |\lambda|^2 \|y\|^2 = \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \\ \rightarrow \|x\|^2 \|y\|^2 \geq |\langle x, y \rangle|^2 \\ \rightarrow \|x\| \|y\| \geq |\langle x, y\rangle|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz.
Además, la igualdad se da cuando uno de los vectores es multiplo del otro o x, y es linealmente dependiente.

Claim

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Proof for Claim.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \|x-y\|$

$$\begin{aligned} d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto d(x,y) = \|x-y\|; \quad d(x,y) \text{ es una métrica} \end{aligned}$$

(i) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, d(x,y) \geq 0$

(ii) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, d(x,y) = d(y,x)$ simetría

(iii) $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n, d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

(iv) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, d(x,z) = 0 \leftrightarrow x = y$

Example.

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \qquad (1.11) \\ \|x\|_\infty &= \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\} \\ \|x\|_2 = \|x\| &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \end{aligned}$$

De (1.11),

$$\begin{aligned} \|x+y\|_1 &= |x_1 + y_1| + \cdots + |x_n + y_n| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + \cdots + |x_n| + |y_n| = \|x\|_1 + \|y\|_1 \end{aligned}$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots x_1^n} \geq |x_1| \to \|x\|_\infty \leq \|x\|$$

$$\|x\|_1 \geq \|x\|$$

Claim: Ley del paralelogramo

Si $\|.\|$ proviene de un producto interno en $\mathbb{R}^n$, entonces $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Proof for Claim.

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \qquad (1.12) \\ \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \qquad (1.13) \end{aligned}$$

De (1.12) y (1.13)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$\square$

Example.

> En $\mathbb{R}^2, e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$
> Si $\|.\|_1$ en $\mathbb{R}^2$ proviene de un producto interno.
>
> $$\rightarrow \forall\, x, y \in \mathbb{R}^2, \|x+y\|_1^2 + \|x-y\|_1^2 = 2(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2)$$
>
> Si $x = e_1,\ y = e_2 \longrightarrow 2^2 + 2^2 = 2(1^2 + 1^2)$ (absurdo)
> Por lo tanto, $\|.\|_1$ no proviene de un prducto interno.

Sean $|.|$ y $\|.\|$ dos normas en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $|.|$ y $\|.\|$ son equivalentes si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tal que,

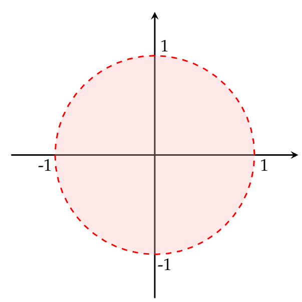
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha|x| \leq \|x\| \leq \beta|x|$$

dada $\|.\|$ norma en $\mathbb{R}^n$ la **BOLA ABIERTA** con centro en $a \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ es

$$B^{\|\cdot\|}(a, r) = \{z \in \mathbb{R}^n \colon \|z - a\| < r\}$$

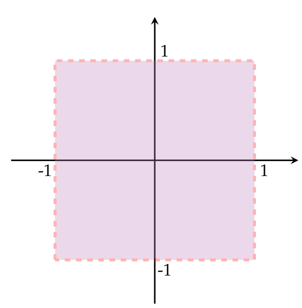
En $\mathbb{R}^2$

$$B^{\|\cdot\|}(\mathbb{O}, 1) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \colon \|(z_1, z_2)\| < 1\}$$



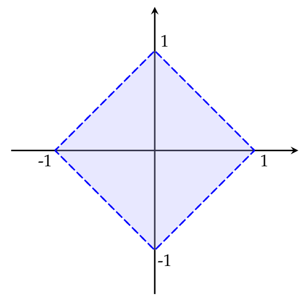
$p = 2$

$$B^{\|\cdot\|_\infty}(\mathbb{O}, 1) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \colon \max|z_1|, |z_2| < 1\}$$



$p = \infty$

$$B^{\|\cdot\|_1}(\mathbb{O},1) = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2 \colon |z_1| + |z_2| < 1\}$$



$p = 1$

Theorem 1.2.4: Equivalencia de normas en $\mathbb{R}^n$

En $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.

Proof. del Theorem 1.2.4
Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ k &\longmapsto x(k) = x_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \end{aligned}$$

Sea $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, decimos que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $a \in \mathbb{R}^n$ si,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall\, k \in \mathbb{N}, k \geq k_0 \longrightarrow \|x_k - a\| < \varepsilon$$

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \text{ es respecto a la norma} \quad \|x_k - a\|_\infty \leq |(x_k - a)|$$

□

Remark.

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \leq n\|x\|_1$$
$$\Rightarrow \|x\| \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|$$

Theorem 1.2.5: Criterio de convergencia en $\mathbb{R}^n$

Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, donde

$$x_k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

y sea $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
Entonces,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \quad \text{si y solo si} \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\},\ \lim_{k\to\infty} x_i^k = a_i.$$

Proof. del teorema 1.2.5
$(\Rightarrow)$ Supongamos que $\lim_{k\to\infty} x_k = a$
Dado, $\varepsilon > 0, \exists\, k_0 \in \mathbb{N}, \forall\, k \in \mathbb{N}$

$$k \geq k_0 \longrightarrow \left|x_i^k - a\right| \leq \|x_k - a\|_\infty \leq \|x_k - a\| < \varepsilon, \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty} x_i^k = a_i, \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$$

$(\Leftarrow)$ Suponga que $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\lim_{k\to\infty} x_i^k = a_i$$

Dado $\varepsilon > 0, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\ \exists\, k_i^o \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, k \in \mathbb{N}, \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned} k \geq k_i^o &\to \left|x_i^k - a_i\right| < \varepsilon_0 \\ &\to \left|x_i^k - a_i\right|^2 < \varepsilon_0^2 \end{aligned}$$

Sea $k_0 = \max\{k_1^0, k_2^0, \ldots, k_n^0\}$ si $k \geq k_0 \geq k_i^0\ \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} &\to \sqrt{\sum_{i=1}^n \left|x_i^k - a_i\right|^2} < \sqrt{n\varepsilon_0^2} \\ &\to \left\|x_i^k - a\right\| < \sqrt{n}\varepsilon_0 = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Chapter 2

Clase 2

2.1 Equivalante Norms

Teníamos que, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

Estas tres normas son equivalentes.

Dada $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, con $\forall\, k \in \mathbb{N}, x_k = (k_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n,\ a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ significa que $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}$

$$k \geq k_0 \longrightarrow \|x_k - a\| < \varepsilon$$
$$|\|x_k - a\| - 0| < \varepsilon, \quad \|x_k - a\| \in \mathbb{R}$$

Theorem 2.1.1: Equivalencia de la convergencia en $\mathbb{R}^n$

Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Entonces:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \quad \text{en } \|\cdot\|_2 \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \lim_{k\to\infty} x_i^k = a_i$$

Proof. Prueba del teorema 2.1.1
Sea una subsucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \ldots) \subset \mathbb{R}^n$,

- Una subsucesión de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de la forma:

$$(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots)$$

  tal que $(i_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}, \{i_1 < i_2 < i_3 < \ldots\} = \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, es estrictamente creciente.

- Función de índices:

$$\begin{aligned} i\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ k &\longmapsto i(k) = i_k \end{aligned}$$

- Sucesión original como función:

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ k &\longmapsto x(k) = x_k \end{aligned}$$

- Subsucesión como composición:

$$\begin{aligned} x \circ i\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ k &\longmapsto (x \circ i)(k) = x(i(k)) = x_{i_k} \end{aligned}$$

- Notación alternativa para la subsucesión:

$$(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_p)_{p\in\mathbb{N}'}, \quad \text{donde } \mathbb{N}' = \{i_1, i_2, i_3, \ldots\} \subset \mathbb{N}$$

- Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que X es **acotado con respecto a la norma infinito**

$$\exists\, c > 0 \text{ tal que } X \subset B^{\|\cdot\|_\infty}(\mathbf{0}, c) = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z - \mathbf{0}\|_\infty \leq c\} \tag{2.1}$$

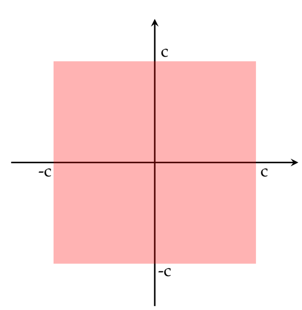
$$B^{\|\cdot\|_\infty}(\mathbf{0}, c) = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n : \max_{1\leq i\leq n} |z_i| \leq c \right\}$$

$$B^{\|\cdot\|_\infty}(\mathbf{0}, c) = [-c, c]^n = \prod_{i=1}^{n} [-c, c].$$

Por lo tanto, la condición de acotamiento se puede expresar también como:

$$\exists\, c > 0 \text{ tal que } \forall\, x \in X, \quad \|x\|_\infty \leq c.$$

$$|x_i| \leq c, \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n.$$



□

Proposition 2.1.2

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Entonces:

$$X \text{ es acotado (en } \|\cdot\|_\infty) \iff \forall\, i \in \{1,\ldots,n\},\ \pi_i(X) \text{ está acotado en } \mathbb{R},$$

donde $\pi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la proyección sobre la i-ésima coordenada.

Proof. $(\Rightarrow)$ Supongamos que $X \subset \mathbb{R}^n$ es acotado en la norma infinito.

Entonces, existe $c > 0$ tal que:

$$X \subset B^{\|\cdot\|_\infty}[0,c] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq c\} = \prod_{i=1}^{n}[-c,c].$$

De esto se deduce que para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, la proyección $\pi_i(X)$ satisface:

$$\pi_i(X) \subset [-c,c],$$

es decir, cada coordenada de los vectores en X está acotada por c.

$(\Leftarrow)$ (Ejercicio)

□

Theorem 2.1.3: Bolzano–Weierstrass en $\mathbb{R}^n$

Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión acotada. Entonces, existe una subsucesión $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ y un punto $x \in \mathbb{R}^n$ que convergen

$$\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x.$$

Proof. Prueba del Theorem 2.1.3
<u>Caso $n = 3$:</u>

- Como $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada $\to \exists\, c > 0$ tal que $x_k = (x_1^k,\, x_2^k,\, x_3^k) \in \mathbb{R}^3$

  $(x_1^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es acotado, pues

  $$\forall\, k \in \mathbb{N}, \|x_k\|_\infty \leq c \to \left|x_i^k\right| \leq c, \quad \forall\, i \in \{1,2,3\} \tag{2.2}$$

  Por **Bolzano-Weierstrass en** $\mathbb{R}$, $\exists\, (x_1^{i_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_1^{i_K} = b_1 \in \mathbb{R}$
  donde $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$

- $(x_2^{i_k}) \subset (x_2^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, pues $\left|x_2^k\right| \leq c, \forall\, k \in \mathbb{N}$

  Por **Bolzano-Weierstrass en** $\mathbb{R}$, $\exists\, (x_2^{i_{j_k}})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_2^{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_2^{i_{j_K}} = b_2 \in \mathbb{R}$

- $(x_3^{i_{j_k}})$ es acotada por (2.2)

  Por **Bolzano-Weierstrass en** $\mathbb{R}$, $\exists\,(x_3^{i_{j_{p_k}}})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_3^{i_{j_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_3^{i_{j_{p_k}}} = b_3 \in \mathbb{R}$

Como $(x_1^{i_{j_{p_k}}})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_1^{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_2^{i_{j_{p_k}}})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_2^{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ entonces

$$\lim_{k\to\infty} x_1^{i_{j_{p_k}}} = b_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_2^{i_{j_{p_k}}} = b_2 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_3^{i_{j_{p_k}}} = b_3 \in \mathbb{R}$$

Del theorem 2.1.1

$$\left(x_{i_{j_{p_k}}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge } (b_1, b_2, b_3)$$

donde,

$$x_{i_{j_{p_k}}} = \left(x_1^{i_{j_{p_k}}}, x_2^{i_{j_{p_k}}}, x_3^{i_{j_{p_k}}}\right), \forall k \in \mathbb{N}$$

□

Sabemos que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio métrico completo.

- Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión. Entonces, (x_k) es de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ (respecto a alguna norma $\|\cdot\|$) si y solo si:

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall\,m, p \in \mathbb{N},\ m, p \geq k_0 \Rightarrow \|x_m - x_p\| < \varepsilon.$$

Example.

Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es convergente $\to (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Proof. Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$

$$\to \exists\,a \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \lim_{k\to\infty} x_k = a$$

Dado $\varepsilon > 0, \exists\,k_0 \in \mathbb{N}$

$$k \geq k_0 \to \|x_k - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$p \geq k_0 \to \|x_p - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } k, p \geq k_0 \to \|x_k - k_p\| &\leq \|x_k - a\| + \|a - x_p\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ \|x_k - k_p\| &< \varepsilon \end{aligned}$$

$\therefore (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. □

Theorem 2.1.4

El espacio $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ es completo.
Es decir, si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es una sucesión de Cauchy respecto a $\|\cdot\|_\infty$, entonces (x_k) converge en $\mathbb{R}^n$.

Proof. Prueba del teorema 2.1.4
Sea $x_k = \left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right), \forall\, k \in \mathbb{N}$ tal que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Dado $\varepsilon > 0, \exists\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k, p \in \mathbb{N}$

$$k, p \geq k_0 \longrightarrow \left\|x_k - x_p\right\|_\infty < \varepsilon$$
$$\max_{1\leq i\leq n} \left|x_i^k - x_i^p\right| \varepsilon$$

$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad k, p \geq k_0 \to \left|x_i^k - x_i^p\right| < \varepsilon$

$\therefore \left(x_i^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de cauchy en $\mathbb{R}$ completo $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \exists\, a_i \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = a_i$

del teorema 2.1.1 $\quad \lim\limits_{k\to\infty} x_k = a = (a_1, \ldots, a_n)$

□

Theorem 2.1.5: Equivalencia de normas en $\mathbb{R}^n$

En $\mathbb{R}^n$, todas las normas son equivalentes.
Es decir, dadas dos normas $|.|$ y $\|.\|$ en $\mathbb{R}^n$, existen constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tales que:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha|x| \leq \|x\| \leq \beta|x|$$

Proof. Prueba del teorema 2.1.4
Basta con mostrar que cualquier norma $|.|$ es equivalente a $\|.\|_1$

Sea $|.|$ una norma en $\mathbb{R}^n, \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \forall x = (x_1, \ldots, x_n) = (x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \in \mathbb{R}^n$

$$|x| = \left|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i||e_i| \leq \beta \sum_{i=1}^n |x_i|$$
$$\leq \beta \|x_i\|_1$$

donde $\max\limits_{1\leq i\leq n} |e_i| = \beta$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq \beta\|x\|_1 \tag{2.3}$$

Solo falta demostrar que $\exists\, \alpha > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha\|x\|_1 \leq |x|$

Por contradicción, supongamos que

$$\forall\, \alpha > 0, \exists\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha\|x_\alpha\|_1 > |x_\alpha|$$

para

$$\alpha = \frac{1}{k}, \exists\, x_k \in \mathbb{R}^n, \frac{1}{k}\|x_k\|_1 > |x_k|$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists\, x_k \in \mathbb{R}^n, \frac{1}{k}\|x_k\|_1 > |x_k| \to x_k \neq 0$$

Hemos construido $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\|x_k\|_1 > 0 \wedge |x_k| > 0$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{k} > \frac{1}{\|x_k\|_1} \cdot |x_k| = \left| \frac{1}{\|x_k\|_1} \cdot x_k \right| = |z_k|$$

Tenemos,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|z_k\|_1 = 1 \tag{2.4}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |z_k| = \frac{1}{k} \tag{2.5}$$

Como $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, de 2.4 es acotada respecto a $\|.\|_1$

Por **Bolzano-Weierstrass en** $\mathbb{R}^n$, $\exists (z_{i_k}) \subset (z_k)_{k\in\mathbb{N}}$

Para $\|.\|_1 \approx \|.\|_\infty$ y $\exists\, a \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} z_{i_k} = a$$

$$\lim_{k\to\infty} \left\| z_{i_k} - a \right\| = 0 \tag{2.6}$$

Remark.

$$\|b\| = \|b - c + c\| \leq \|b - c\| + \|c\|$$

$$\|b\| - \|c\| \leq \|b - c\|$$

$$\to |\|b\| - \|c\|| \leq \|b - c\|$$

$$\to 0 \leq \left| \left\| z_{i_K} \right\|_1 - \|a\|_1 \right| \leq \left\| z_{i_k} - a \right\|$$

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \left| \left\| z_{i_K} \right\|_1 - \|a\|_1 \right| \leq \lim_{k\to\infty} \left\| z_{i_k} - a \right\| = 0$$

$$\to \lim_{k\to\infty} \left| \left\| z_{i_K} \right\|_1 - \|a\|_1 \right| = 0$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty} \left\| z_{i_K} \right\|_1 = \|a\|_1 \to a \neq 0$$

De (2.3) y (2.6), como $\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \left| z_{i_k} - a \right| \leq \beta \left\| z_{i_k} - a \right\|_1$

$$\to \lim_{k\to\infty} \left| z_{i_k} - a \right| = 0$$

como $\left| \left| z_{i_k} - |a| \right| \right| \leq \left| z_{i_k} - a \right|$

$$\to \lim_{k\to\infty} \left| z_{i_k} \right| = |a|$$

De (2.5), $|z_{i_k}| < \frac{1}{i_k}$

$$\lim_{k\to\infty} |z_{i_k}| = 0 \to |a| = 0$$

$\to a = 0$ (Contradicción)

Por lo tanto, existe $\alpha > 0$ tal que:

$$\alpha\|x\|_1 \leq |x|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

$\square$

Corollary 2.1.6

Sean $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}^n$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \in \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} y_k = b \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión tal que $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_0$.
Entonces, se cumple:
(i)

$$\lim_{k\to\infty} (x_k + y_k) = \lim_{k\to\infty} x_k + \lim_{k\to\infty} y_k = a + b.$$

(ii)

$$\lim_{k\to\infty} (\lambda_k x_k) = \lambda_0 \cdot \lim_{k\to\infty} x_k = \lambda_0 a.$$

(iii) Producto interno euclidiano

$$\lim_{k\to\infty} \langle x_k, y_k\rangle = \langle \lim_{k\to\infty} x_k, \lim_{k\to\infty} y_k\rangle = \langle a, b\rangle.$$

(iv) Para toda norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \|\lim_{k\to\infty} x_k\| = \|a\|.$$

Donde $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $x_k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ y $y_k = (y_1^k, \ldots, y_n^k)$.

Proof. Prueba del ítem (i):
Como $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, se tiene que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lim_{k\to\infty} x_i^k = a_i$

Analogamente, $\lim_{k\to\infty} y_i^k = b_i \quad$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

Por tanto, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\lim_{k\to\infty} (x_i^k + y_i^k) = \lim_{k\to\infty} x_i^k + \lim_{k\to\infty} y_i^k = a_i + b_i.$$

Por el teorema (2.1.1),

$$\lim_{k\to\infty} (x_k + y_k) = a + b.$$

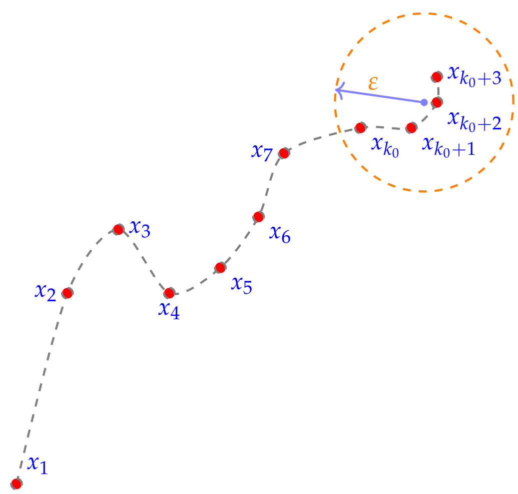
$\square$

Chapter 3

Clase 3

3.1 Unicidad en sucesiones acotadas

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $k \geq k_0 \Rightarrow \|x_k - a\| < \varepsilon$



Theorem 3.1.1

Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión acotada. Entonces, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente si y sólo si toda subsucesión convergente de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge al mismo punto de $\mathbb{R}^n$.

Proof. Prueba del teorema 3.1.1

($\Rightarrow$) Supongamos que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \in \mathbb{R}^n$. Sea $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N} :\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_0 \Rightarrow \|x_k - a\| < \varepsilon \tag{3.1}$$

Como $(i_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ es estrictamente creciente $\Rightarrow i_k \geq k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Entonces, $k \geq k_0 \Rightarrow i_k \geq k \geq k_0 \Rightarrow \|x_{i_k} - a\| < \varepsilon$ por (3.1).

$\therefore \lim\limits_{k\to\infty} x_{i_k} = a$.

($\Leftarrow$) Supongamos que toda subsucesión de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge lo hace al mismo punto.

Sea $A = \left\{a \in \mathbb{R}^n, \exists\, (x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_k)_{k\in\mathbb{N}} : \lim\limits_{k\to\infty} x_{i_k} = a\right\}$ (Conjunto de valores de adherencia de la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$)

Como $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, del teorema de **Bolzano-Weierstrass**, $\exists (x_{i_k})_k \subset (x_k)_k$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{i_k} = a \in \mathbb{R}^n$. Así $a \in A$, $A \neq \varnothing$

Queremos mostrar que $\lim \lim_{k\to\infty} x_k = a$

Por reducción al absurdo, supongamos que <u>no ocurra</u> $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$

$$\sim (\forall \varepsilon > 0, \exists\, k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_0 \Rightarrow \|x_k - a\| < \varepsilon)$$

$$\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, k_0 \in \mathbb{N} : \exists\, k \in \mathbb{N},\ k \geq k_0 \wedge \|x_k - a\| \geq \varepsilon$$

Podemos construir $(x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\left|x_{i_j} - a\right| \geq \varepsilon_0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

Por el teorema de **Bolzano-Weierstrass**, $\exists \left(x_{j_{p_k}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_{j_{p_k}} = b \in \mathbb{R}^n$$

De (3.2) $\left|x_{j_{p_k}} - a\right| \geq \varepsilon_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Así, $|b - a| = \lim\limits_{k\to\infty} \left|x_{j_{p_k}} - a\right| = \varepsilon_0 > 0 \to b \neq a$ $\square$

3.2 Puntos de acumulación

Chapter 4

Clase 6

4.1 Distancia entre conjuntos

Sean $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ no vacíos, la distancia entre X e Y está acotado inferiormente,

$$d(X, Y) = \inf \{|x - y| \in \mathbb{R} : x \in X, y \in Y\} \tag{4.1}$$

Remark.

> Si $X \subset M$ e $Y \subset M$, entonces
> $$d(X, Y) \geq d(M, N)$$