IMCA **Miércoles, 05 de marzo de 2025**

Examen

Álgebra lineal

---

1. Sean U, V y W tres espacios vectoriales de dimensión finita tales que $T : U \to V$ es lineal inyectiva, $L : V \to W$ lineal sobreyectiva y $T(U) = N(L)$. Demuestre que existe $S : V \to U \times W$ lineal biyectiva.

2. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \, , \, \rangle$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador lineal. Una **adjunta** de T es un operador lineal $T^* \in \mathcal{L}(V)$ tal que:

$$\forall x \in V, \forall y \in V : \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle,$$

   a) Demuestre que si T admite una adjunta, entonces esta es única.

   b) Sea $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las matrices $n \times n$ con coeficientes reales y producto interno $\langle X, Y \rangle = traza(X^T Y)$. Dado $A \in V$ defina:

$$\varphi_A(X) := A^T X A, \quad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

   Demuestre que $\varphi_A \in \mathcal{L}(V)$ y halle su adjunta.

3. Dado $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semidefinida positiva. Demuestre que:

   a) Existe S una $r \times n$ matriz con $r = rango(T)$, tal que $T = S^t S$.

   b) Sea $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Si $v^t T v = 0$ entonces $Tv = 0$.

4. Sea $A : E \to E$ un operador normal, con E un $\mathbb{R}$–espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y F un subespacio invariante bajo A. Demuestre que:

   a) $A(F^\perp)$ es invariante bajo A^*.

   b) Sea C una matriz asociada a A respecto de una base ortonormal. Si C es triangular superior entonces C es diagonal.