IMCA

Análisis Real - Pre Maestría

Pre Maestría

Verano 2025-0

Instrucciones:

- Duración: 180 minutos
- Cada problema tiene un valor de 5 puntos.
- El examen es personal y no se permite el uso de artículos con conexión a internet, libros o apuntes de clase.

---

1. Dado $X \subset \mathbb{R}$, para una aplicación $f : X \to X$ y un punto $x \in X$ considere la sucesión:
   - $f^0(x) = x$,
   - Para cada entero positivo n: $f^n(x) = f\left(f^{n-1}(x)\right)$,

   Para
   $$f(x) = \frac{3+3x}{3+x}, \quad x \geq -\sqrt{3},$$
   y para cada x en el dominio de f, determine el conjunto
   $$A(x) = \left\{ y \in \mathbb{R} : \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y, \text{ donde}(n_k) \subset \mathbb{N},\, n_k < n_{k+1} \right\}.$$

2. Sea $\mathscr{C}$ el conjunto de las sucesiones de Cauchy de números racionales. Considere la relación sobre $\mathscr{C}$ dada por
   $$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0.$$
   Demuestre que
   a) $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $\mathscr{C}$.
   b) Dados $x = [x_n], y = [y_n]$ en el espacio cociente $\mathscr{C}/\sim$, las operaciones
   $$x + y = [x_n + y_n], \quad x \cdot y = [x_n \cdot y_n]$$
   están bien definidas.
   c) Todo elemento x en $\mathscr{C}/\sim$ cuyo representante no esté en la clase de la sucesión constante igual a cero, admite un inverso multiplicativo.

3. ¿Existe una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
   $$f(f(x)) = e^{-x},$$
   para todo número real x?

4. Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que
   $$\int_0^2 [4f(x) - f^4(x)]\, dx \leq 6.$$
