

Solution

2376---最长距离

(maxlength)

【题目简述】在一个 $N * M$ 的 0 和 1 组成的数字矩阵中，0 表示空地 1 表示障碍，两个格子连通即有公共边并且均不为障碍，两个格子间的距离为其欧几里得距离。问移去至多 T 个障碍物可得到的最大距离。

【方法 1】SPFA

若没有障碍，一种方法枚举起点和终点找出最大值；二种建图，用 SPFA 求最长路

此题如果总想要枚举移走哪几块障碍的话，是不可能 AC 的。

但只要稍微换一个角度，就豁然开朗。直接算出某两格之间最短要经过几个障碍物，然后枚举任意两格，如果经过障碍物的个数小于等于总个数，则说明这两格是可行。取所有可行里的最优即可。最短路可以用 SPFA。

【算法步骤】

①读入数据，为 1 则 $map[i,j]=1$ ，否则为 0；

②for($i=1;i \leq n;i++$)//枚举每个点

for($j=1;j \leq m;j++$)spfa(i,j);

先求出点(i,j)到其他点经过的最少障碍数；

然后若其他点到点(i,j)的障碍物小于等于 T ，求出其距离的最大值。

③输出答案 Ans

【方法 2】双重 BFS

对这道题的特殊图，也可以用双重 bfs 或者 bfs+dfs:

枚举起点(x,y)，先用外层 BFS 维护距离（即障碍）递增，内层 DFS/BFS 访问值为 0 且为经过的点，求出所有点到(x,y)经过的最少障碍数 $d[i,j]$ 。再枚举终点，求出最大值。

2374---游 戏

(game)

【题目考点】数论+DP(分组背包)

【题目分析】

最终问题为：N 相当于背包的容量，N 以内的素因子 p_1, p_2, \dots, p_k 相当于物品，对于每个物品可以取 $0 \sim k[i]$ (满足 $p_i^{k[i]} \leq N$)，很明显是一个多层背包问题。

2375---windy 数

(windy)

【题目考点】数位统计类 DP

【思路点拨】

题目中要求的是统计 a, b 之间的 Windy 数个数，可以转化为统计前 b 个和前 $(a-1)$ 个 Windy 数的个数，相减即可。现在的问题是怎么统计前 b 个 Windy 数的个数。

容易看出，当前这个数是 Windy 数，那么在这个数前面加上一位，只要加的这一位与当前这个数最高位差的绝对值大于等于 2，那么加一位之后的新数也是 Windy 数。因此该问题满足无后效性。可以用动态规划求解。令 $f[i, j]$ 代表位数为 i ，最高位为 j 的 Windy 数的个数：

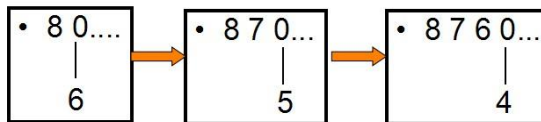
$$f[i, j] = \sum f[i-1, k] (0 \leq k \leq 9 \text{ 且 } |k-j| \geq 2)$$

设 a 是个 k 位数，先预处理 $f[i][j]$ 的值，再统计 $1 \sim a-1$ 中有多少个 Windy 数，则分以下三种情况讨论：以 87654 为例。

1. 先将位数小于 k 的个数累加起来，即 $\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^9 f[i, j]$ ， $0 \sim 9999$

2. 考虑位数为 k ，但是最高位数字小于 a 的最高位数字的个数累加起来。 $10000 \sim 79999$

3. 从高位到低位依次统计，第 i 位是 a 的第 i 位数字时，第 $i-1$ 位数在小于 a 后面的部分情况下有多少个 Windy 数。



这个统计特别考验选手的思维细致程度，在写程序时一定要三思而后行。

4. 迷路

(road)

【题目考点】矩阵乘法的经典应用

【题目大意】给出一个边权为 1 至 9 的有向图，求节点 0 到节点 N-1 的长度恰好为 T 的路径数对 2009 取模的结果。 $(2 \leq N \leq 10; 1 \leq T \leq 1000000000)$

【题目分析】

在解决这个问题之前，首先思考这个**问题的简化版**：即假设所有边权都是 1，怎么做？这是矩阵乘法的经典运用。设 A 是该有向图的可达性矩阵。

A 的一次方， $a[i,j]$ 的值表示原有向图的邻接矩阵，即 i 到 j 经过一条边的路径数；

A 的二次方， $a[i,j]$ 的值表示 i 到 j 经过两条边的路径数；

若 $M=A^k$ ，则 $M[i,j]$ 就是 i 到 j 经过 k 条边的路径数。

而 M 可以利用快速求幂在 $O(\log k)$ 的时间内求得，总的时间复杂度就是 $O(n^3 \log k)$ 。

那么边权不为 1 的情况怎么处理呢？

考虑到 N 很小，并且边权只有 1 至 9 的情况，所以可以拆点。

将原图中每个节点拆成 9 个，依次用有向边连接。

如果原图中，节点 i 到节点 j 有一条长度为 k 的有向边，那么在新图中对于节点 i 的 k 号节点连一条有向边到节点 j 的 1 号节点。

这样，新图中所有的有向边的权值为 1。

这样问题就可以由经典的矩阵乘法解决了。

$Ans = g[1, (n-1) * 9 + 1]$