

2017 年国考题 -组合优化部分讲解

一、填空（每项 2 分）

1、函数 $f(t) = (1-2t)^{-7}$ 中 t^5 的系数是：_____

答：直接套公式 $(1-2x)^{-7} = \sum_{k=0}^{\infty} C(7+k-1, k)(2x)^k$

$$K=5 \quad C(11,5) 2^5$$

2、设 T 是有 K 个顶点的树，则 T 的着色数为：_____

答：2 个

3、某饭店有 3 种甜点且无限多，小王选取 4 个甜点的方法有：_____

法1：直接列 $3 + C_3^2 * 3 + C_3^1 = 15$

法2：母函数 $(1+x+x^2+\dots)^3 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = (1-x)^{-3} = \sum C(3+k-1, k) x^k$
 $k=4 \quad C(6,2)=15$

4、 $m = p_1^{t_1} \cdot p_k^{t_k}$ 是 m 的唯一素数分解，其中 $p_1 - p_k$ 是不同的素数，

定义：函数 $\mu(m) = \begin{cases} 0 & \text{如 } \exists_i \in (1, 2, \dots, k) \text{ 使 } t_i > 0 \\ 1 & \text{如 } m = 1 \\ (-1)^k & \text{如 } t_i = 1 \text{ 对所有的 } i = 1, 2, \dots, k, \end{cases}$

则对于大于1的整数 n ,

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \underline{\hspace{2cm}}$$

答：离散数学的题（略）

二、计算题（共 15 分）

1、 $[99, 1000]$ 内不能被 5、6、8 中任何一个数整除的数的个数为：_____

答：根据容斥原理

$1000-98=902$ 个（1~1000 中除去 1~98）

A_i : 被 i 除 $i=5, 6, 8$

则 $902 - |A_5| - |A_6| - |A_8| + |A_5 \cap A_6| + |A_5 \cap A_8| + |A_6 \cap A_8| - |A_5 \cap A_6 \cap A_8|$

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{902}{5} \right\rfloor = 180 \quad |A_6| = \left\lfloor \frac{902}{6} \right\rfloor = 150 \quad |A_8| = \left\lfloor \frac{902}{8} \right\rfloor = 112$$

$$|A_5 \cap A_6| = \left\lfloor \frac{902}{30} \right\rfloor = 30 \quad |A_5 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{902}{40} \right\rfloor = 22 \quad |A_6 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{902}{24} \right\rfloor = 37$$

$$|A_5 \cap A_6 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{902}{120} \right\rfloor = 7 \quad (\text{注: 被 5、6、8 整除的数有 30、40、24、120})$$

$$= 902 - 180 - 150 - 112 + 30 + 22 + 37 - 7 = 542$$

故，不能被 i 整除的整数个数为 542 个

2、求 $\neg(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)$ 的主析取范式和主合取范式。

要求分别用 极小项/极大项 以及相应数字的简洁形式表达。

答：离散数学的题（略）

三、解答题（每项 6 分）

1、t 个球排一排， $t \geq 3$ ，用红橙黄蓝绿，5 种颜色，每球一种颜色，要求红橙黄的球至少出现一个，问有多少种？

答：根据指数型母函数

$$\begin{aligned} & \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2 \\ &= (e^x - 1)^3 * e^{2x} \\ &= (e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1) e^{2x} \\ &= e^{5x} - 3e^{4x} + 3e^{2x} - e^x \\ &= \sum (5^k - 3 * 4^k + 3 * 2^k - 1) \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

2、8 个座位排一排，8 个同学 $A_1 \sim A_8$ 在此处上 2 节课，第 1 节课 A_i 同学坐 i 位置。（ $i = 1 \sim 8$ ）

(1) 若第 2 节课时，要求 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 4 位同学与自己第一节课时不同，且 $A_5 \sim A_8$ 和第一节课相同，求有多少坐法？

(2) 第 2 节课要求 8 位同学中只有 4 位与第一节不同，但不指定是哪 4 位，求有几种坐法？

答：(1) 根据完全错排 $D_4 = 4! \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right)$

(2) $C_8^4 D_4$

(思路：先挑 4 个不动，剩下 4 个动的)