《离散数学》

第三讲

数理逻辑之析取范式
合取范式

李昊
信息楼312

第二节 析取范式与合取范式

一、 析取范式与合取范式

1．基本概念

（1） 文字——命题变项及其否定的总称

（2） 简单析取式——有限个文字构成的析取式

$p, \neg q, p\vee\neg q, p\vee q\vee r, \ldots$

（3）简单合取式——有限个文字构成的合取式

$p, \neg q, p\wedge\neg q, p\wedge q\wedge r, \ldots$

（4）析取范式——由有限个简单合取式组成的析取式

$A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_r\ (r\geq 1)$

（5）合取范式——由有限个简单析取式组成的合取式

$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_r\ (r\geq 1)$

（6）范式——析取范式与合取范式的总称

说明:

- 单个文字既是简单析取式，又是简单合取式
- 形如 $p\wedge\neg q\wedge r$, $\neg p\vee q\vee\neg r$ 的公式既是析取范式,又是合取范式

主要性质:

- 简单析取式与简单合取式的性质见定理 2.1
- 析取范式与合取范式的性质见定理 2.2

- 定理2.1 （1） 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式
- （2）一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式。

- 定理2.2 （1） 一个析取式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式
- （2）一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式

合取范式（conjunctive normal form)(小项):

有限个简单析取式构成的合取式。

析取范式（disjunctive normal form)（大项）:

有限个简单合取式构成的析取式。

标准句(standard sentence)：合取范式或析取范式

定理2.3：任意一个命题公式都存在与之等价的合取范式和析取范式。

定理的证明思路：

1、将所有联结词转换为合取，析取，否定；

2、将否定联结词移到命题变量 的前面；

3、消除多余的否定联结词；

4、化成合取范式和析取范式。

析取范式： ∧ 对 ∨分配；

合取范式： ∨ 对 ∧ 分配；

例 求下面式子的析取范式以及合取范式。

$$\left(p\wedge\left(q\rightarrow r\right)\right)\rightarrow s \Leftrightarrow \left(p\wedge\left(\neg q\vee r\right)\right)\rightarrow s$$

$$\Leftrightarrow \neg\left(p\wedge\left(\neg q\vee r\right)\right)\vee s$$

$$\Leftrightarrow \left(\neg p\vee\neg\left(\neg q\vee r\right)\right)\vee s$$

$$\Leftrightarrow \left(\neg p\vee\left(q\wedge\neg r\right)\right)\vee s \Leftrightarrow \neg p\vee\left(q\wedge\neg r\right)\vee s$$

即析取范式

$$\Leftrightarrow \left(\neg p\vee s\right)\vee\left(q\wedge\neg r\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\neg p\vee s\vee q\right)\wedge\left(\neg p\vee s\vee\neg r\right)$$

即合取范式

3. 求公式的范式举例

例 求下列公式的析取范式与合取范式

（1） $A=(p\rightarrow\neg q)\vee\neg r$

（2） $B=(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$

解 （1）

$$(p\rightarrow\neg q)\vee\neg r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee\neg r \qquad \text{（消去}\rightarrow\text{）}$$

$$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee\neg r \qquad \text{（结合律）}$$

注意：最后结果既是 A 的析取范式（由 3 个简单合取式组成的析取式），又是 A 的合取范式（由一个简单析取式组成的合取式）

(2)

$$(p\to\neg q)\to r$$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\to r$　　（消去第一个→）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$　　（消去第二个→）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$　　（否定号内移——德摩根律）

最后一步已为析取范式（两个简单合取式构成）

继续:

$B \Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$　　（∨对∧分配律）

最后一步已为合取范式（由两个简单析取式构成）

定理2.3：任意一个命题公式都存在与之等价的合取范式和析取范式。

定理2.3的作用与局限：

1、标准化但仅仅是初步的

标准化的形式

不唯一性（规范化要求：主范式）

2、能够判定是否为永真或永假公式但不方便

二、主析取范式与主合取范式

1．极小项与极大项

定义 2.4 在含有 n 个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第 i（$1\le i\le n$）个文字出现在左起第 i 位上，称这样的简单合取式（简单析取式）为极小项（极大项）.

几点说明：

- n 个命题变项产生 2^n 个极小项和 2^n 个极大项
- 2^n 个极小项（极大项）均互不等值
- 用 m_i 表示第 i 个极小项，其中 i 是该极小项成真赋值的十进制表示. M_i 表示第 i 个极大项，其中 i 是该极大项成假赋值的十进制表示，m_i（M_i）称为极小项（极大项）的名称.

由 p, q 两个命题变项形成的极小项与极大项由下表给出

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

$$p \to q \quad \Leftrightarrow \neg p \vee q \quad \Leftrightarrow M_2$$

$$p \to q \quad \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$\Leftrightarrow \left(\neg p \wedge \left(q \vee \neg q\right)\right) \vee \left(\left(p \vee \neg p\right) \wedge q\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\neg p \wedge q\right) \vee \left(\neg p \wedge \neg q\right) \vee \left(p \wedge q\right)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$$

由 p, q, r 三个命题变项形成的极小项与极大项由下表给出.

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

m_i 与 M_i 的关系由书上定理 2.4 给出，即

$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$,　　$\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

2. 主析取范式与主合取范式

定义 2.5

（1）主析取范式——由极小项构成的析取范式

（2） 主合取范式——由极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变项为 p, q, r 时，

$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow m_1 \vee m_3$ ——主析取范式

$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \Leftrightarrow M_7 \wedge M_1$——主合取范式

3. 命题公式 A 的主析取范式与主合取范式

（1） 与 A 等值的主析取范式称为 A 的主析取范式；与 A 等值的主合取范式称为 A 的主合取范式.

（2） 主析取范式的存在惟一定理

定理 2.5 任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式,并且是惟一的

定理2.4：令A（a1、a2、……、an）包含有n个变量的公式，则有：

1、如果A存在与之等价的主析取范式，则必唯一；

2、如果A存在与之等价的主合取范式，则必唯一；

例 求 A 的主合取范式

$$(p\to\neg q)\to r$$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （合取范式） ①

$$p\vee r$$

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$ ②

$$q\vee r$$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_4$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$ （主合取范式）

实际上，可以通过主析取范式求主合取范式；

也可以通过主合取范式求主析取范式；

例：已知 $p \rightarrow q \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$

c

$$\neg\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg\neg(m_0 \vee m_1 \vee m_3)$$

$$\Leftrightarrow \neg(m_2)$$

$$\Leftrightarrow M_2$$

如何利用真值表来求主析取范式、主合取范式？

例 求 $A=(p\to\neg q)\to r$ 的主析取范式，主合取范式

由 p, q, r 三个命题变项形成的极小项与极大项由下表给出.

p, q, r	A	名称	公式
0 0 0	*0*	m_0	$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$
0 0 1	*1*	m_1	$\neg p\wedge\neg q\wedge r$
0 1 0	*0*	m_2	$\neg p\wedge q\wedge\neg r$
0 1 1	*1*	m_3	$\neg p\wedge q\wedge r$
1 0 0	*0*	m_4	$p\wedge\neg q\wedge\neg r$
1 0 1	*1*	m_5	$p\wedge\neg q\wedge r$
1 1 0	*1*	m_6	$p\wedge q\wedge\neg r$
1 1 1	*1*	m_7	$p\wedge q\wedge r$

$A=(p\to\neg q)\to r$ 的主析取范式为 $m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

$A=(p\to\neg q)\to r$ 的主合取范式为 $M_0\wedge M_2\wedge M_4$

3. 主范式的用途——与真值表相同.

（1）求公式的成真成假赋值

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$，其成真赋值为 001, 011, 101, 110, 111，当然成假赋值为 000, 010, 100. 类似地，由主合取范式也立即求出成假或成真赋值.

(2) 判断公式的类型

设 A 含 n 个命题变项.

A 为重言式 $\Leftrightarrow A$ 的主析取范式含 2^n 个极小项

$\Leftrightarrow A$ 的主合取范式为 1.

A 为矛盾式 $\Leftrightarrow A$ 的主析取范式为 0

$\Leftrightarrow A$ 的主合析取范式含 2^n 个极大项

A 为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow A$ 的主析取范式中至少含一个（但不是全部）极小项

$\Leftrightarrow A$ 的主合取范式中至少含一个（但不是全部）极大项

(3）判断两个公式是否等值

例 用主析取范式判两个公式是否等值

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

解 $p\to(q\to r) = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\to r = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\to q)\to r = m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

显见，(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

(4）解实际问题（见书上例 2.12）

6. 最后说明两点:

- 由公式 A 的主析取范式确定它的主合取范式，反之亦然.
- 用公式 A 的真值表求 A 的主范式.

二、命题公式中的逻辑联接词的极小完备性。

逻辑联接词组是功能完备的：

任一个命题公式都能够等价于仅包含这些逻辑联接词联结起来的公式。

逻辑联接词组是极小功能完备的：

是功能完备的并且不能少一个。

例1：否定、析取、合取组成的逻辑联结词组是功能完备的（由范式的存在性），但不是极小功能完备的。

例2：否定和合取组成的逻辑联结词组是极小功能完备的。

$$p \vee q \quad \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

例3：否定和析取组成的逻辑联结词组是极小功能完备的。

与非（p与q的否定）**p↑q**， $\neg(p \wedge q)$

或非（p或q的否定）**p↓q** $\neg(p \vee q)$

p↑q为真当且仅当**p**，**q**不同时为真 ¬ （**p∧q**）

p↓q为真当且仅当**p**，**q**不同时为假

P	q	与非p↑q	或非p↓q
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1

{↑}{↓}也是联结词完备集。

证明：已知：否定，析取，合取联接词是完备的，

$$\neg p \Leftrightarrow \neg(p \vee p) \Leftrightarrow p \downarrow p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \downarrow \neg q$$

$$\Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$$

例

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \downarrow q)$$

$$\Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$