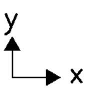
Prosjektoppgave FYS2130

Vår 2017

Innleveringsfrist:
09/05 - 2017, 20 CEST



L. B. N. Clausen

Om prosjektet og rapporten

Vi ønsker at arbeidet med prosjektoppgaven gir deg økt forståelse og innsikt i et fenomen som ligger innenfor kursets pensum. Nedover finner du mer informasjon om prosjektrapporten.

- Dine besvarelser av oppgavene skal samles i en rapport. Rapporten må skrives i en tekstbehandler (Word, LaTeX, etc.) og innleveringen skal skje i form av **en eneste PDF-fil**.
- Innleveringen skal skje som elektronisk innlevering i **Devilry**.
- **Kandidatnummer** (og ikke navn) skal skrives på besvarelsen.
- Programmeringen skal skje i Python eller Matlab.
- Dataprogrammene skal legges ved rapporten som en appendiks. Iblant vil vi kjøre koden din etter vi har klipp ut den fra PDF-filen - derfor hjelper du oss vanvittig mye gjennom å ikke bruke linjenummerering.
- Vi ønsker at du leverer et funksjonsdyktig program per oppgave - ikke lever bare et program som løser alle oppgavene. Vi vet at store deler av programmet er likt, men for oss er det enklere å følge besvarelsene dersom vi har hele programmet foran oss.
- Vi ønsker at rapporten ikke har mer enn 20 sider (uten appendiks). Det er mulig at du får trekk i poeng hvis rapporten din er for lang.
- Samarbeid med andre, både i programmering og ved skriving av deler av teksten, er fullt ut lovlig, men det skal gå fram av rapporten: alle som samarbeider gjør rede for hvilke deler i rapporten man faktisk har samarbeidet om, og med hvilken person (bare kandidatnummer). Alle må levere sin egen rapport, og ingen rapporter må være 100% lik med andres.
- Vær nøyaktig med figurene! Alle figurene skal har tekst langs aksene (tenk også på enheter) og må beskrives i teksten. Figurer og bilder skal utformes slik at de er optimale for den størrelsen figuren får i den endelige publikasjonen. Det betyr bl.a. at tekst langs akser bør være omtrent av samme størrelse som teksten i resten av dokumentet.
- **Husk å sjekke kurswebsidene for nye beskjeder minst to ganger per dag mens du jobber med prosjektoppgaven. Det kan skje at det blir noen endringer i prosjektoppgaveteksten og/eller endringer i det praktiske opplegget i løpet av uka.**

Veiledning og hjelp

Vi tilbyr utstrakt hjelp under første del av prosjektuka. Vi har reservert Datalaboratorium (V329) i fysikkbygningen for

- Tirsdag, 02/05, kl 08-12
- Onsdag, 03/05, kl 12-16
- Torsdag, 04/05, kl 08-12

Datalaboratorium burde være tilgjengelig hele uka kl 08-16 men veiledning tilbys bare under de periodene gitt ovenfor. Ellers kan dere får hjelp av kursansvarlig gjennom epost.

Prosjektoppgaven består av flere relaterte deler. Dersom du stanger hodet mot veggen i en av disse delene og veiledning ikke er tilgjengelig, anbefaler vi at du tar tak i en annen del eller jobber med analyse, figurlaging eller skriving av tekst, inntil du får tak i veiledning. Det er vanligvis ikke lurt å streve med enkeltdetaljer i timevis før du søker hjelp!

Vekting

Ved bedømming av prosjektoppgaven vil de ulike delene gi poeng som angitt nedenfor. Vi tar forbehold om endringer dersom det framkommer spesielle momenter ved rettingen som vi ikke hadde tenkt på på forhånd.

Oppgave	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Poeng	10	5	5	15	25	15	25	25	25

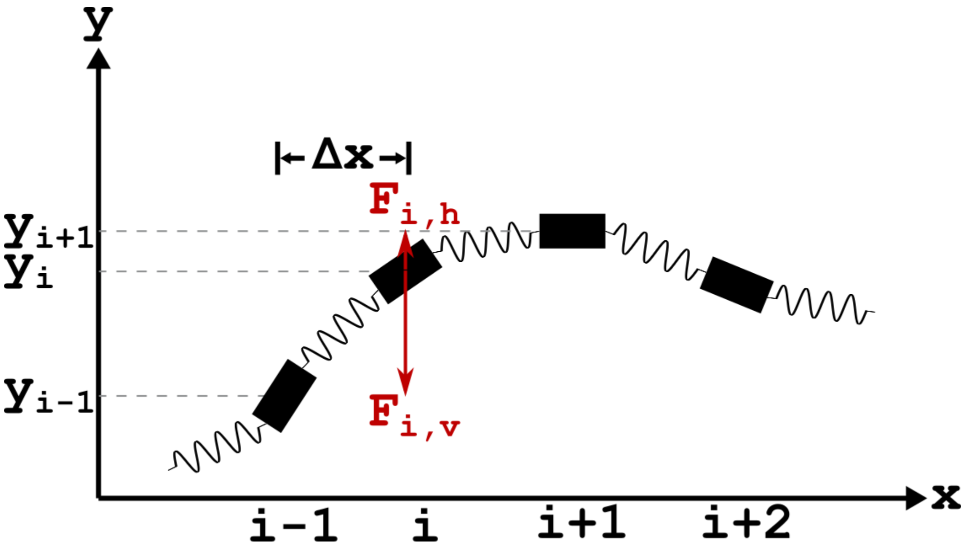
	Språk	**Figurer**	**Program**	**Layout**
Poeng	10	20	10	10

Totalt vil det være mulig å få 200 poeng, men husk at det er MAX-poeng som er gitt i listen ovenfor. En vanlig god argumentasjon vil gjerne føre til 4 av 5 poeng for at vi skal ha mulighet for å gi noe ekstra til de få som har en ekstra god argumentasjon.

Grensen for stryk vil vi først sette når vi ser på alle rapportene samlet. I prinsippet ligger grensen for stryk på om lag 40% av max, det vil si 80 poeng i vår sammenheng. I praksis vil grensen antakelig ligge litt lavere siden kravene for å få full uttelling er meget høye.

Innleding

I dette prosjektet skal du modellere bølger langs en streng. For å kunne bruke diskrete numeriske metoder må vi først diskretisere strengen. Vi antar at strengen består av N massepunkter med masse m som er forbundet med nabomassepunkter gjennom $N-1$ (sic!) fjærer og hvor fjærene har en fjærkonstant k. Siden vi senere kommer til å forandre massen og fjærstivheten langs strengen er det lurt å allerede nå tenke på m og k i programmet som arrayer (med N og $N-1$ verdier). I tillegg antar vi at massepunktene beveger seg bare i en dimensjon (y). Situasjonen er skissert i Figur O.1.



Figur O.1: *Strengen. De svarte rektanglene er massepunktene, som er forbundet med fjærer til to naboer. Ved posisjon i er massepunktet påvirket av to krefter: $F_{i,v}$ pga fjæren til venstre og $F_{i,h}$ pga fjæren til høyere. Kreftene er avhengig av de relative avstandene mellom massepuktene.*

Gjennom hele prosjektet bruker vi indeksene $0 \leq i \leq N-1$ for å betegne posisjonen av massepunktene på x-aksen, siden den faktiske verdien av avstanden Δx (se Figur O.1) ikke har betydning for resultatene.

Massepunktet ved posisjon i i strengen påvirkes da av to krefter: fjærkraften fra venstre $F_{i,v}$ og fjærkraften fra høyere $F_{i,h}$. Siden fjærkraften F er generelt definert som $F = -k\Delta y$ kan vi beskriver kreftene på det i-te massepunktet som:

$$F_{i,v} = -k_{i-1} dy_{i,v} = -k_{i-1}(y_i - y_{i-1})$$
$$F_{i,h} = -k_i dy_{i,h} = -k_i(y_i - y_{i+1})$$

Den totale kraften F_i som vil bevege massepunktet er da gitt som

$$F_i = F_{i,v} + F_{i,h} = -(k_{i-1} + k_i)y_i + k_{i-1}y_{i-1} + k_i y_{i+1}. \tag{O.1}$$

For å beregne akselerasjonen til massepunktet ($\ddot{y}_i$) numerisk trenger vi utslaget ved tre tidspunkter:

y_i^- :utslaget ved den i-te posisjonen for det siste tidspunktet
y_i^0 :utslaget ved den i-te posisjonen for det nårærende tidspunktet
y_i^+ :utslaget ved den i-te posisjonen for det neste tidspunktet.

Den diskretiserte version av $\ddot{y}_i$ er

$$\ddot{y}_i = \frac{d^2 y_i}{dt^2} \approx \frac{\dfrac{y_i^+ - y_i^0}{\Delta t} - \dfrac{y_i^0 - y_i^-}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{y_i^+ - 2y_i^0 + y_i^-}{(\Delta t)^2}, \tag{O.2}$$

hvor Δt er tidssteget.

Bevegelsesligningen for massepunktet ved posisjon i er

$$F_i = m_i \ddot{y}_i \tag{O.3}$$

Randbetingelser

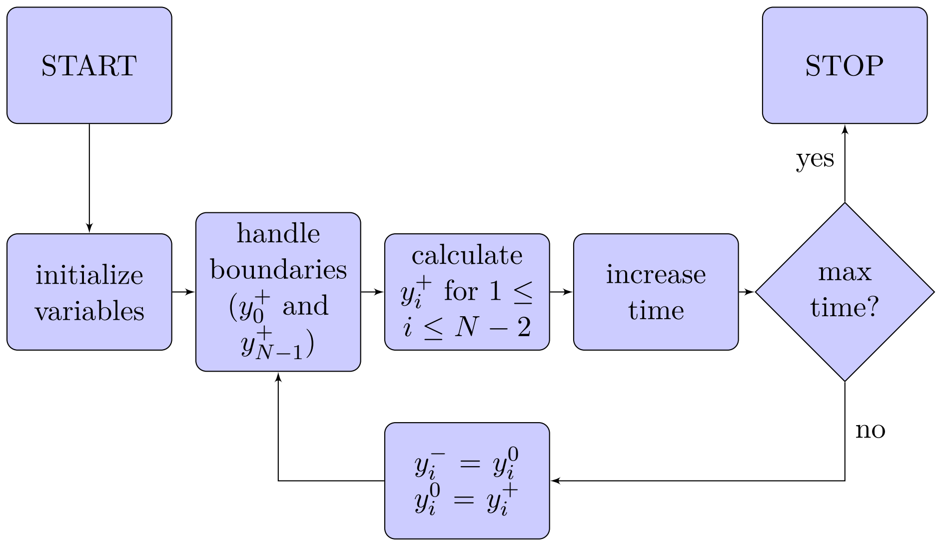
Det første massepunktet ($i = 0$) er ikke koblet til noen fjær på venstre siden; det siste massepunktet ($i = N - 1$) er ikke koblet til noen fjær på høyere siden. Vi har to forskjellige måter å handtere den situasjonen.

Åpne ender

Å realisere åpne endestykker er enkelt: det eneste vi trenger å gjøre er å bruke kraften fra høyre i bevegelsesligningen (O.3) for det første punktet eller kraften fra venstre for det siste massepunktet.

Reflekterende ender

Vi får reflekterende endestykker når massepunktet på randen (enten $i = 0$ eller $i = N-1$) holdes på $y = 0$. Det oppnår vi gjennom å gi det massepunktet en masse som er veldig mye større enn massen av de andre massepunktene.



Figur O.2: *Forslag for programlogikken.*

Pseudocode

Logikken for programmet ditt kan se omtrent ut som vist i Figur O.2. Vår forslag er at du bruker to nøstede løkker. En løkke øker tiden fra $t_0 = 0$ til t_{max} i tidssteg Δt (faktisk vist som løkke i Figur O.2). For hver eneste tid beregnes utslaget ved endestykkene først, før den andre løkken løper over alle $1 \leq i \leq N-2$ og beregner y_i^+ fra y_i^-, y_i^0, y_{i-1}^0, y_{i+1}^0, m_i, k_i og k_{i-1}.

Vi ønsker at du leverer et funksjonsdyktig program per oppgave - ikke lever bare et program som løser alle oppgavene! Vi vet at store deler av programmet er likt, men for oss er det enklere å følge besvarelsene dersom vi har hele programmet foran oss.

Oppgave 1 (10 poeng)

Utled bevegelsesligningen for massepunktet på den i-te posisjonen fra (O.1), (O.2) og (O.3), dvs y_i^+ i avhengighet av y_i^-, y_i^0, y_{i-1}, y_{i+1}, m_i, k_{i-1} og k_i med $0 \leq i \leq N-1$. Vær nøyaktig på endestykkene og gi beskrivelsen for både åpne og reflekterende kanter!

Oppgave 2 (5 poeng)

Introduser en konstant massetetthet $\mu = m/\Delta x$ i ligning (O.3) og en konstant fjærstivhet $\kappa = k\Delta x$, hvor Δx beskriver avstanden mellom to massepunkter (se Figur O.1). Utleder bølgeligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} = v_B^2 \frac{d^2y}{dx^2} \tag{O.4}$$

og vis at utbredelseshastigheten er $v_B^2 = \kappa/\mu$!

Oppgave 3 (5 poeng)

Det programmet som du skal utvikkle i Oppgave 4 må kunne oppløse utbredelseshastigheten v_B, dvs at den numeriske hastigheten $\Delta x/\Delta t$ må være større enn v_B for a kunne oppløse bølger som beveger seg med hastighet v_B. Hva er Δt sin avhengighet av k og m? Hva med Δx?

Oppgave 4 (15 poeng)

Skriv et program (python eller Matlab) som løser, for en gitt initialfordeling av y_i^- og y_i^0, bevegelsesligningen (O.3). Bruk $N = 200$ massepunkter med masse $m_i = 0.02$ kg og en fjærstivhet $k = 10$ kg/s^2. Begrunn ditt valg for Δt! Bruk

$$y_i^0 = \sin\left(7\pi \frac{i}{N-1}\right), \quad 0 \leq i \leq N-1 \tag{O.5}$$

med reflekterende randbetingelser ($m_0 = m_{N-1} \gg m$) for å teste programmet ditt over 1200 tidssteg. For de gitte initialbetingelsene, hva slags bevegelse forventer du? Hvordan kan forventningene hjelpe deg å finne verdiene for y_i^-? Bruk plot av y_i^0 for forskjellige tidspunkter for å vise bevegelsen av strengen.

Oppgave 5 (25 poeng)

Hvilken svingefrekvens f forventer du og hvor mange tidssteg må du ta for å få 10 perioder? La programmet ditt kjøre for 10 perioder og i hvert tidssteg lagre y_{99}, dvs utslaget ved den 100. (midterste) posisjon. Plot $y_{99}(t)$ og forklarer bevegelsen. Bestem svingefrekvensen av din numerisk løsning f_N uten å bruke (Fast) Fourier Transform. Sammenlign den numeriske frekvensen f_N med den eksakte (forvented) svingefrekvensen f. Beregn en Fast Fourier Transform (FFT) av $y_{99}(t)$ og plot den relevante delen av $|\text{FFT}[y_{99}(t)]|^2$. Diskutér resultatene!

Oppgave 6 (15 poeng)

Vis at din numerisk løsning bevarer den totale energien!

Oppgave 7 (25 poeng)

Bruk følgende initialutslagene, en trekant sentrert på strengen:

$$y_i^- = y_i^0 = \begin{cases} (i-69)/30 & \text{if } 70 \leq i \leq 99 \\ (129-i)/30 & \text{if } 100 \leq i \leq 128 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{O.6}$$

med reflekterende randbetingelser ($m_0 = m_{N-1} \gg m$). Beskriv og forklar bevegelsen av strengen!

Oppgave 8 (25 poeng)

Sentrerer trekanten fra oppgave 7 på posisjon $i = 30$. Hva må gjøres for å få hele trekanten til å bevege seg til høyere? Implementer dine endringer! Verifiser programmet ditt gjennom å se hele trekanten reflekteres mellom endepunktene.

Oppgave 9 (25 poeng)

Nå knyter vi en tykkere streng med samme stivhet k på den opprinnelige strengen. Gjør endringer i programmet ditt slik at lengden av strengen nå er $N = 400$ massepunkter og at massen på den „tykke“ siden er tre ganger den av den „tynne“ siden, dvs $m_j = 3m_i, 0 \leq i \leq 199, 200 \leq j \leq 399$.

Bruk trekantbølgen fra Oppgave 8 til å bestemme impedansforholdet ved å se på amplitudene av den innfallende bølgen relativt til den reflekterte og transmitterte!

Tipp: Hvis du ikke klarer oppgave 8, dvs at trekanten din ikke beveger seg som den skal, kan du fortsatt løse denne oppgaven gjennom å bruk løsningen til oppgave 7.

Lykke til!