MEK2200 Oblig 1 Høst 2017

Mikael Mortensen (`mikaem@math.uio.no`)

Department of Mathematics, University of Oslo.

Sep 15, 2017

Oppgave 1

Gitt to vektorer $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Beskriv følgende operasjoner med minst tre forskjellige notasjoner hver, vis resultatet, og noter hvilken rank (orden) resultatet har i hver deloppgave:

a) Ytre produktet mellom $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$

b) Divergensen av $\boldsymbol{a}$

c) Curlen av $\boldsymbol{a}$

d) Kryss produktet mellom $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$

e) Gradienten av $\boldsymbol{a}$, definert slik at $\boldsymbol{da} = \operatorname{grad} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{dx}$

f) Anta nå at gradienten av $\boldsymbol{a}$ kan beskrives som ytre produktet mellom ∇ og $\boldsymbol{a}$, dvs, $\nabla \otimes \boldsymbol{a}$, eller $\nabla \boldsymbol{a}$. Hvordan samsvarer dette med resultatet i e)?

Eksempel: Indre productet mellom $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$

- Vektor form: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$
- Indeks form: $a_i b_i$
- Komponent (eller basis vector) form: $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i b_j \boldsymbol{i}_i \cdot \boldsymbol{j}_j$
- Resultatet er en skalar $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ av orden 0.

Oppgave 2

I et kartesisk koordinatsystem x, y, z, er spenningstensoren gitt ved

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

der a, b, c, d, e er konstanter.

a) Hvilke verdier av a, b, c, d, e er tillatt for $\boldsymbol{P}$ hvis vi antar ingen volumkrefter og et system som er i likevekt (ingen akselerasjon)?

b) Finn spenningen på plan med normalvektoren $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})/\sqrt{2}$ hvor $\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{j}$ er enhetsvektorene i henholdsvis x og y retning.

c) Bestem normalspenningen og tangensialspenningen på planet definert i b).

d) Finn prinsipalspenningene og prinsipalretningene. (Hint: Kontroller resultatet ved å bruke matlab/python (sympy modul) til å løse egenverdiproblemet. Se også principal stresses and stress invariants under stress(mechanics) på wikipedia for løsningsmetode.

Oppgave 3

Et to-dimensjonalt forskyvningsfelt i x, y planet er gitt ved $\boldsymbol{u} = \{\alpha y, \alpha x\}$, hvor $0 < \alpha \leq 1$.

a) Skisser hvordan et kvadrat med hjørner (1, 0), (-1, 0), (0, 1) og (0, -1) deformeres. Hvordan endres arealet for det deformerte kvadratet?

b) Finn forskyvningsforskjellen $\triangle \boldsymbol{u}$ mellom to vilkårlige punkter i feltet med vektoriell avstand $\{\triangle x, \triangle y\}$. Bestem tensoren for relative forskyvningsforskjeller.

c) Finn tensoren for deformasjoner uten volumendring for det gitte feltet.

Oppgave 4

Torsjonsfeltet for en sirkulær stav som er spent fast ved $x = 0$ og som har sentrum langs x-aksen er gitt ved

$$\boldsymbol{u} = qxr\boldsymbol{i}_\phi$$

i sylinderkoordinater (r, ϕ, x) og

$$\boldsymbol{u} = qx(-z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k})$$

i kartesiske koordinater. Enhetsvektorerne i sylinderkoordinater er gitt ved $(\boldsymbol{i}_r, \boldsymbol{i}_\phi, \boldsymbol{i})$ og i kartesiske som $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

a) Regn i kartesiske koordinater og vis at spenningstensoren basert på Hooke's lov er gitt ved likning (1)

b) Bruk resultatet fra forrige deloppgave til å finne prinsipalspenninger og retninger.

c) Vis at spenningstensoren i sylinderkoordinater kan skrives som likning (2)

$$\boldsymbol{P} = \mu q \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{P} = \mu q r(\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}_\phi + \boldsymbol{i}_\phi \boldsymbol{i}) \tag{2}$$

Krav til innlevering og godkjenning

For alle deloppgaver gis det maksimalt 5 poeng for hver. For godkjenning kreves det minst 75% av maksimalt oppnåelig poengsum. Dersom dette ikke er innfridd ved innlevering, men besvarelsen vurderes som et seriøst forsøk, kan det gis anledning til ny innlevering. For nærmere informasjon om regler se lenke. Tidsfrister er gitt på kurssidene til MEK2200. Du kan bruke Latex eller levere en håndskrevet besvarelse. Det er lov å samarbeide, men alle må levere inviduelle besvarelser.