MEK2200 – Oblig 1

Jonas Gahr Sturtzel Lunde (`jonassl`)

October 5, 2017

Oppgave 1

Table 1: Multiprogram sets

	Vektornotasjon	**Indeksnotasjon**	**Dyadisk notasjon**	**Komponentform**
Ytreprodukt	$\mathbb{C} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$	$C_{ij} = a_i b_j$	$\mathbb{C} = a_i b_j (\boldsymbol{i}_i \otimes \boldsymbol{i}_j)$	
Divergens	$c = \nabla \cdot \boldsymbol{a}$	$\mathrm{c} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$		$\mathrm{c} = (\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + ...)$
Curl	$\boldsymbol{c} = \nabla \times \boldsymbol{a}$	$c_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$	$\boldsymbol{c} = \frac{\partial}{\partial x_i} a_j (\boldsymbol{i}_i \times \boldsymbol{i}_j)$	
Kryssprodukt	$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$	$\epsilon_{ijk} a_j b_k$	$\boldsymbol{c} = a_i b_j (\boldsymbol{i}_i \times \boldsymbol{i}_j)$	
Gradient	$\mathbb{C} = \nabla \boldsymbol{a}$	$C_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$	$\mathbb{C} = \frac{\partial}{\partial x_i} a_j (\boldsymbol{i}_i \otimes \boldsymbol{i}_j)$	

Oppgave 2

a)

Cauchy's andre spenningsrelasjoner sier at spenningstensoren $\mathbb{P}$ er symetrisk. Dette innebærer at $c = b$ i vårt tilfelle. Vi kan da skrive $\mathbb{P}$ som

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

b)

Spenningsvektoren på et plan med normalvektor $\boldsymbol{n}$ er definert som

$$\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{n} \cdot \mathbb{P} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right] \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \left[\frac{a+b}{\sqrt{2}},\ \frac{b+d}{\sqrt{2}},\ 0\right]$$

c)

De normale og tangentielle og komponentene av spenningsvektoren er henholdsvis definert som

$$P_{nn} = \boldsymbol{P}_n \cdot \boldsymbol{n} = \left[\frac{a+b}{\sqrt{2}},\ \frac{b+d}{\sqrt{2}},\ 0\right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right] = b + a/2 + d/2$$

$$P_{nt} = |\boldsymbol{P}_n \times \boldsymbol{n}| = |[0,\ 0,\ a/2 + b/2 - (b/2 + d/2)]| = a/2 - d/2$$

d)

Vi vet at prinsipalretningene og prinsipalspenningene korresponderer til egenvektorene og egenverdiene til spenningstensoren. Egenverdiene til en matrise finnes ved den karakterisiske ligningen

$$|\mathbb{P} - I\lambda| = 0$$

For vår stresstensor har vi at

$$|\mathbb{P} - I\lambda| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ b & d-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & e-\lambda \end{vmatrix} = (e-\lambda)\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (e-\lambda)[(a-\lambda)(d-\lambda) - (b)(b)]$$

som har løsningen

$$\lambda_1 = e$$

og ligningen

$$\begin{aligned} (a-\lambda)(d-\lambda) - (b)(b) = 0 \\ \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0 \end{aligned}$$

som har løsningene

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2 - 2ad + 4b^2 + d^2} + a + d\right] \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2}\left[-\sqrt{a^2 - 2ad + 4b^2 + d^2} + a + d\right] \end{aligned}$$

Egenvektorene er definert som

$$\mathbb{P}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i$$

Som gir ligningene

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_1 &= e \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_1 \\
\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_2 &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2 - 2ad + 4b^2 + d^2} + a + d\right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_2 \\
\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_3 &= \frac{1}{2}\left[-\sqrt{a^2 - 2ad + 4b^2 + d^2} + a + d\right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_3
\end{aligned}$$

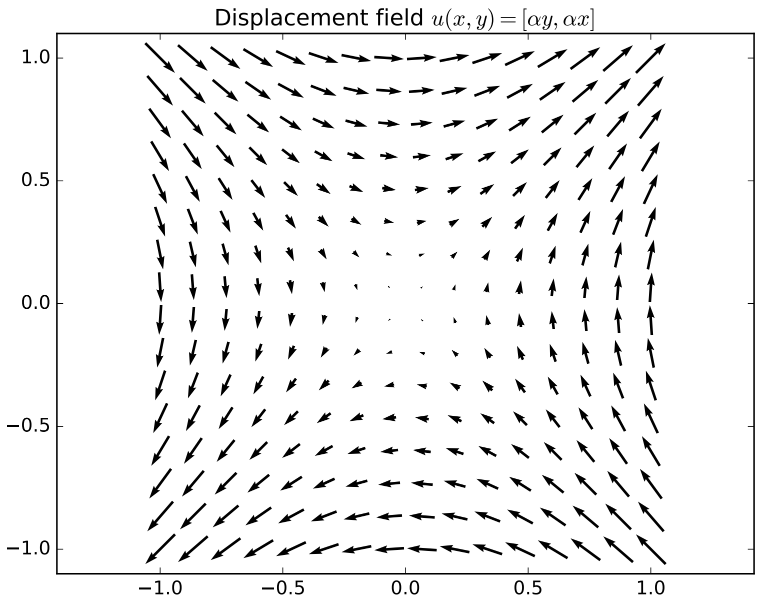
med løsninger

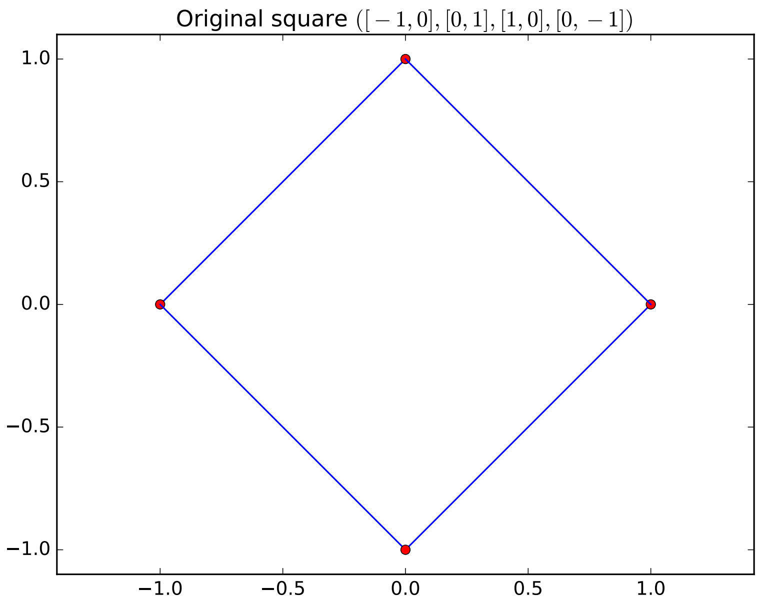
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1 &= [0,\ 0,\ 1] \\
\boldsymbol{x}_2 &= \left[-\frac{-a+d-\sqrt{a^2+4b^2-2ad+d^2}}{2b},\ 1,\ 0\right] \\
\boldsymbol{x}_3 &= \left[-\frac{-a+d+\sqrt{a^2+4b^2-2ad+d^2}}{2b},\ 1,\ 0\right]
\end{aligned}
$$

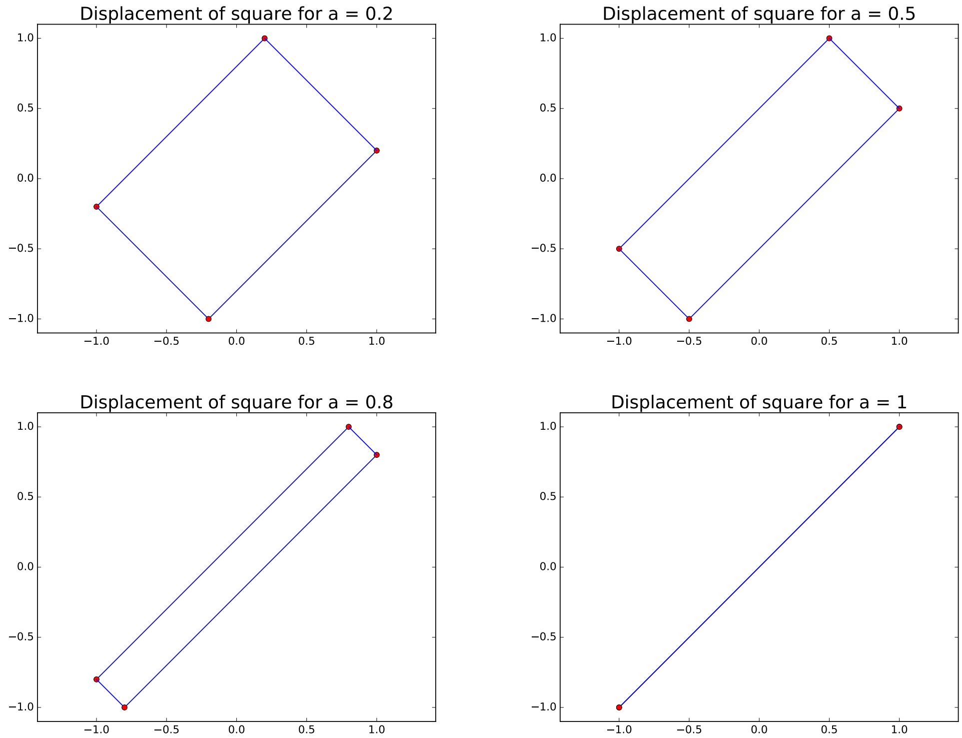
Dette er altså prinsipalspenningene og retningene.

Oppgave 3

a)







Ettersom vi ser fra figurene at kvadratet holder en rektangulær form, kan vi regne arealet som produktet av to sidekanter, som vi finner som avstanden mellom to punkter:

$$|(1,0)-(0,1)|\cdot|(1,0)-(0,-1)|=2$$

Vi regner ut hvor disse 3 punktene befinner seg etter forskyvningen.

$$\begin{aligned}(1+\alpha y, 0+\alpha x) &= (1,\alpha)\\ (0+\alpha y, 1+\alpha x) &= (\alpha,1)\\ (0+\alpha y, -1+\alpha x) &= (-\alpha,-1)\end{aligned}$$

Arealet blir da

$$|(1,\alpha)-(\alpha,1)|\cdot|(1,\alpha)-(-\alpha,-1)| = |(1-\alpha,\alpha-1)|\cdot|(1+\alpha,\alpha+1)|$$

$$=\sqrt{(1-\alpha)^2+(\alpha-1)^2}\sqrt{(\alpha+1)^2+(\alpha+1)^2}$$

$$=\sqrt{2(1-\alpha)^2}\sqrt{2(\alpha+1)^2}=2(1-\alpha^2)$$

Vi ser at arealet av firkanten er 2 ved $\alpha=0$, og 0 ved $\alpha=1$, slik vi forventet fra figurene.

b)

Forskyvningsfeiltet $\boldsymbol{u}=[\alpha y,\alpha x]$ bestemmer forskyvningen til et punkt i feltet. Forskyvningsforskjellen mellom to punkt i feltet blir da

$$\Delta\boldsymbol{u}=[\alpha\Delta y,\ \alpha\Delta x]$$

Tensoren for relative forskyvningsforskjeller er (i to dimensjoner) gitt som

$$\mathbb{D}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ \alpha & 0\end{pmatrix}$$

Oppgave 4

a)

Vi har spenningstensoren definert som

$$P_{ij} = \lambda \nabla \cdot \boldsymbol{u} \delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} \tag{1}$$

Vi finner tøyningstensoren for systemet vårt, definert som

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}qz & \frac{1}{2}qy \\ -\frac{1}{2}qz & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}qy & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Som insatt i 1 gir spenningsmatrisen

$$\mathbb{P} = \mu q \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

For å finne prinsipalspenninger og retninger sitter vi igjen med et egenverdiproblem. Vi skal løse ligningen

$$\mathbb{P}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Jeg orker ikke løse enda et egenverdiproblem for hånd, så WolframAlpha skal få lov til å ta denne. Prinsipalspenningene og retningene i kartesiske koordinater er

$$\boldsymbol{x}_1 = \left[0,\ \frac{y}{z},\ 0\right] \qquad \lambda_1 = 0$$
$$\boldsymbol{x}_2 = \left[-\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{y},\ -\frac{z}{y},\ 1\right] \qquad \lambda_2 = -\sqrt{y^2+z^2}$$
$$\boldsymbol{x}_3 = \left[\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{y},\ -\frac{z}{y},\ 1\right] \qquad \lambda_3 = \sqrt{y^2+z^2}$$