

# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

|                      |  |
|----------------------|--|
| Eksamen i:           | Fys2160  |
| Eksamensdag:         | Mandag 5. desember 2016  |
| Tid for eksamen:     | 1430–1830  |
| Oppgavesettet er på: | 5 sider  |
| Vedlegg:             | ingen  |
| Tilatte hjelpemidler | Elektronisk kalkulator, godkjent for videregående skole<br>Rottman: Matematisk formelsamling<br>Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter<br>To A4 ark med notater<br>(arkene kan beskrives på begge sider) |

*Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare oppgavene.*

*Du må i oppgavene begrunne dine svar.*

## Oppgave 1

- (a) For et elektron i en to-dimensjonal relativistisk elektron-gass er energitilstandene gitt ved  $\epsilon(n_x, n_y) = a(n_x^2 + n_y^2)^{1/2}$  for  $n_x, n_y = 0, 1, 2, \dots$ . Vis at tilstandstettheten er  $D(\epsilon) = \pi\epsilon/a^2$ .

### Løsning:

Vi finner tilstandstettheten ved å ta utgangspunkt i at i  $(n_x, n_y)$ -rommet er tilstandstettheten 2: For hver  $(n_x, n_y)$ -verdi har vi to tilstander svarende til de to spinntilstandene til et Fermion, slik at  $D(n_x, n_y) = 2$ . Vi finner tilstandstettheten i  $n$ -rommet ved å se at i intervallet mellom  $n$  og  $n + dn$  er det  $D(n_x, n_y)dA$  tilstander hvor  $dA = (1/4)2\pi n dn$ , slik at  $D(n)dn = \pi n dn$ . Vi finner da tilstandstettheten i energiroommet ved

$$D(\epsilon)d\epsilon = D(n)dn, \quad (1)$$

$$D(\epsilon) = D(n) \frac{1}{d\epsilon/dn}, \quad (2)$$

hvor  $d\epsilon/dn = d/dn(an) = a$ , slik at

$$D(\epsilon) = D(n) \frac{1}{d\epsilon/dn} = \pi n/a = \pi\epsilon/a^2, \quad (3)$$

som var det vi skulle vise

- (b) Må to systemer som begge er i termisk likevekt og i termisk kontakt ha samme entropi? Begrunn svaret eller gi et moteksempel.

### Løsning:

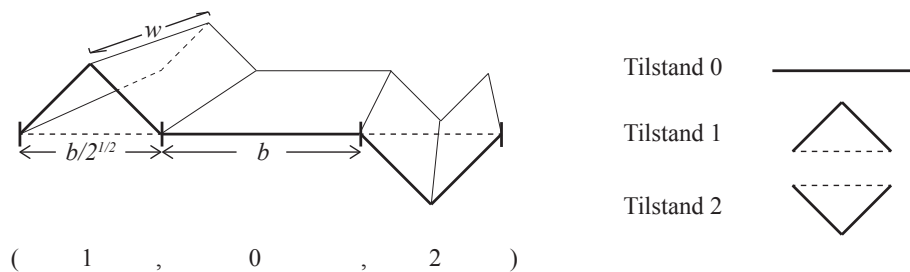
Nei. For eksempel vil to ideelle gasser med samme tetthet i termisk likevekt og i termisk kontakt ha en entropi som er avhengig av partikkeltallet.

## Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven studere en membran som kan foldes langs  $x$ -aksen, mens den forblir uforandret langs  $y$ -aksen. Vi skal studere dette systemet ved

gitt energi,  $E$ , areal,  $A$ , og antall elementer,  $N$ , i membranen. Hvert element i membranen kan være i tre mulige tilstander:

- Elementet kan være flatt, med energi  $\epsilon_0$  og lengde  $b_0 = b$  (tilstand 0)
- Elementet kan være foldet oppover med energi  $\epsilon_0$  og lengde  $b_1 = b/\sqrt{2} = bc$  (tilstand 1)
- Elementet kan være foldet nedover med energi  $\epsilon_0$  og lengde  $b_1 = b/\sqrt{2} = bc$  (tilstand 2).



Figur 1: Illustrasjon av modellen for en membran.

Modellen er illustrert i figur 1. Hvert element,  $i$ , har en energi,  $\epsilon_i = \epsilon_0$ , som er uavhengig av tilstanden til elementet, og et areal,  $A_i$ . Den totale energien til systemet er  $E = \sum_i \epsilon_0 = N\epsilon_0$ , mens det totale arealet til systemet er:

$$A = \sum_{i=1}^N A_i. \quad (4)$$

Arealet er gitt som lengden,  $L$ , ganger bredden,  $w$ ,  $A = wL$ . Bredden  $w$  er den samme for alle elementer, mens lengden  $L$  er gitt som:

$$L = N_0 b_0 + N_1 b_1 + N_2 b_1 = N_0 b_0 + (N - N_0) b_1 = N_0 b + (N - N_0) bc, \quad (5)$$

hvor  $c = 1/\sqrt{2}$ . En mikrotilstand til systemet angis som en liste  $(i_1, i_2, \dots, i_N)$  av tilstandene til hvert enkelt element. For eksempel er membranen i figur 1 i mikrotilstanden  $(1, 0, 2)$ .

## Del 1

Anta at systemet består av 2 elementer, hvorav ett element er i tilstand 0, mens det andre elementet ikke i tilstand 0. Det vil si at  $N = 2$  og  $N_0 = 1$ .

- (a) List opp alle mikrotilstander for dette systemet. Hva er multiplisiteten til systemet?

### Løsning:

Mulige tilstander er:  $(0,1)$ ,  $(0,2)$ ,  $(1,0)$ ,  $(2,0)$

Multiplisiteten er derfor  $\Omega(N = 2, N_0 = 1) = 4$

- (b) Hva er sannsynligheten for hver av disse mikrotilstandene i likevekt ( $N = 2$ ,  $N_0 = 1$ )?

**Løsning:**

Siden systemet er beskrevet ved konstant  $E, A, N$  er systemet et mikrokanonisk system og alle mikrotilstander er like sannsynlige:

$$P = \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{4} . \quad (6)$$

**Del 2**

Vi skal nå studere et system med  $N$  elementer hvorav  $N_0$  elementer er i tilstanden 0.

(c) Vis at multiplisiteten til dette systemet er

$$\Omega(N, N_0) = \frac{N!}{N_0!(N - N_0)!} 2^{N - N_0} . \quad (7)$$

**Løsning:**

Vi finner multiplisiteten til dette systemet. Vi har  $N$  plasser som skal besettes med ulike elementer. Først plasserer vi  $N_0$  elementer av typen 0 blant  $N$  plasser. Dette kan vi gjøre  $\Omega_0(N, N_0)$  forskjellige måter:

$$\Omega_0 = \binom{N}{N_0} . \quad (8)$$

Vi har da igjen  $N - N_0$  plasser. Hver av disse plassene kan enten være av element 1 eller av element 2. Det betyr at antall måter vi kan velge de resterende plassene på er  $2^{N - N_0}$ . Multiplisiteten er derfor

$$\Omega(N, N_0) = \Omega_0 2^{N - N_0} = \frac{N!}{N_0!(N - N_0)!} 2^{N - N_0} . \quad (9)$$

(d) Finn entropien,  $S = S(E, N_0, N)$ , til systemet. Bruk Stirling's tilnærming  $\ln(x!) = x \ln x - x$  til å skrive om uttrykket slik at det ikke inneholder fakultetsfunksjonen.

**Løsning:**

$$S = k \ln \Omega(E, N_0, N) = k \ln \frac{N!}{N_0!(N - N_0)!} 2^{N - N_0} \quad (10)$$

$$= k (\ln(N!) - \ln(N_0!) - \ln(N - N_0)! + (N - N_0) \ln 2) \quad (11)$$

$$\simeq k (N \ln N - N - N_0 \ln N_0 + N_0 - (N - N_0) \ln(N - N_0) + (N - N_0) + (N - N_0) \ln 2) \quad (12)$$

$$\simeq k (N \ln N - N_0 \ln N_0 - (N - N_0) \ln(N - N_0) + (N - N_0) \ln 2) \quad (13)$$

(e) Ta utgangspunkt i termodynamikkens første lov og at  $\vec{d}Q = T dS$  for en reversibel prosess og vis at den termodynamiske identitet for systemet kan skrives som

$$T dS = dE - \sigma dA , \quad (14)$$

hvor  $\sigma$  er den ytre overflatespenningen som virker på enden av membranen.

**Løsning:**

Termodynamikkens første lov gir at  $dE = dQ + dW$ . Hvis vi ser på en reversibel prosess hvor  $dQ = T dS$  blir da

$$dE = T dS + dW, \quad (15)$$

hvor arbeidet som utføres av overflatespenningen på membranen er  $dW = \sigma dA = \sigma w dL$ , slik at

$$dE = T dS - \sigma dA \Rightarrow T dS = dE - \sigma dA. \quad (16)$$

(f) Vis at vi kan finne  $\sigma$  ved:

$$\sigma = -T \frac{1}{wb(1-c)} \left( \frac{\partial S}{\partial N_0} \right)_{E,N}. \quad (17)$$

**Løsning:**

Fra den termodynamiske identiteten vet vi at  $dE = T dS - \sigma dA$ , slik at

$$\sigma = - \left( \frac{\partial S}{\partial A} \right)_{E,N}. \quad (18)$$

Vi deler dette opp ved først å derivere med hensyn på  $N_0$  og deretter med hensyn på  $A$  siden  $A = A(N_0)$ :

$$\sigma = - \left( \frac{\partial S}{\partial A} \right)_{E,N} = - \left( \frac{\partial S}{\partial N_0} \right)_{E,N} \left( \frac{\partial N_0}{\partial A} \right). \quad (19)$$

Her bruker vi at  $A = wL = w(bN_0 + bc(N - N_0))$  slik at

$$\left( \frac{\partial A}{\partial N_0} \right) = wb(1-c), \quad (20)$$

og dermed

$$\sigma = - \frac{1}{wb(1-c)} \left( \frac{\partial S}{\partial N_0} \right)_{E,N}. \quad (21)$$

(g) Vis at tilstandslikningen for membranen er:

$$\sigma \simeq - \frac{kT}{wb(1-c)} \ln \frac{(N - N_0)}{(2N_0)}. \quad (22)$$

**Løsning:**

Vi finner  $\sigma$  fra

$$\sigma = - \frac{1}{wb(1-c)} \left( \frac{\partial S}{\partial N_0} \right)_{E,N}, \quad (23)$$

hvor

$$S \simeq k(N \ln N - N_0 \ln N_0 - (N - N_0) \ln(N - N_0) + (N - N_0) \ln 2) \quad (24)$$

Vi deriverer med hensyn på  $N_0$ . Da forsvinner alle ledd som kun avhenger av  $N$ :

$$\left( \frac{\partial S}{\partial N_0} \right)_{E,N} \simeq kT \ln 2 - kT(-1 \ln N_0 - 1 + 1 + \ln(N - N_0)) \quad (25)$$

$$\simeq kT \ln 2 - kT \ln(N - N_0)/N_0. \quad (26)$$

Og da får vi for  $\sigma$ :

$$\sigma \simeq -\frac{kT}{wb(1-c)} \ln \frac{(N-N_0)}{(2N_0)}. \quad (27)$$

(h) Finn likevektsarealet,  $A_0$ , slik at  $\sigma(T, A_0, N) = 0$ .

### Løsning:

Vi finner likevektsarealet  $A_0$  ved å finne den verdien for  $N_0$  som gjør  $\sigma = 0$ , og deretter finner vi den tilsvarende verdien for  $A_0$ . Vi ser at  $\sigma = 0$  når logaritmen er null, og det er den når  $N - N_0 = 2N_0$ , det vil si for  $N_0 = N/3$ . Den tilsvarende verdien for  $A$  er

$$A_0 = wL = wb(N_0 + (N - N_0)c) = wb\left(\frac{N}{3} + c\left(N - \frac{N}{3}\right)\right) = Nwb\left(\frac{1}{3} + c\frac{2}{3}\right). \quad (28)$$

## Oppgave 3

Vi skal i denne oppgaven studere en blanding av to typer atomer i en krystall i kontakt med et termisk reservoar slik at  $(T, V, N)$  er tilnærmet konstant for systemet. Systemet består av  $N_A$  atomer av type A og  $N_B$  av type B. Atomene vekselvirker med sine nærmeste naboer. Det er to nærmeste naboer i en dimensjon, fire i to dimensjoner og seks i tre dimensjoner. Vekselvirkningen mellom hvert par av naboatomer gir et energibidrag til den totale energien til systemet. To atomer av typen A som er ved siden av hverandre bidrar med en energi  $\epsilon_{AA}$  til den totale energien til systemet, to atomer av typen A og B bidrar med en energi  $\epsilon_{AB}$ , og to atomer av typen B bidrar med en energi  $\epsilon_{BB}$ . Vi antar at  $\epsilon_{AA} = \epsilon_{BB} = u$ , og at  $\epsilon_{AB} = \epsilon_{BA} = v$ . Vi har i figur 2 illustrert et en-dimensjonalt system med fire atomer i tilstanden  $(A, A, B, A)$ . I denne tilstanden har systemet energien  $E((A, A, B, A)) = \epsilon_{AA} + 2\epsilon_{AB} = u + 2v$ .



Figur 2: Illustrasjon av en tilstand  $(A, A, B, A)$  for et system med fire atomer: tre atomer av type A og ett atom av type B.

La oss først anta at vi ser på et system med tre atomer, to av type A og et av type B, i en dimensjon.

(a) List opp alle mulige tilstander for systemet med  $N_A = 2, N_B = 1$  og finn energien til hver av tilstandene.

### Løsning:

- $AAB, E = \epsilon_{AA} + \epsilon_{BA} = u + v$
- $ABA, E = \epsilon_{AB} + \epsilon_{BA} = 2v$
- $BAA, E = \epsilon_{AB} + \epsilon_{AA} = u + v$

(b) Finn partisjonsfunksjonen,  $Z(T, V, N_A = 2, N_B = 1)$  for dette systemet.

**Løsning:**

Vi finner  $Z$  ved å summere over alle mulige tilstander for systemet:

$$Z = \sum_i e^{-\epsilon_i/kT} = e^{-(u+v)/kT} + e^{-(2v)/kT} + e^{-(u+v)/kT} = 2e^{-(u+v)/kT} + e^{-(2v)/kT} \quad (29)$$

(c) Finn Helmholtz frie energi,  $F(T, V, N_A = 2, N_B = 1)$  for dette systemet.

**Løsning:**

Vi finner  $F$  fra  $F = -kT \ln Z$ :

$$F = -kT \ln Z = -kT \ln \left( 2e^{-(u+v)/kT} + e^{-(2v)/kT} \right) . \quad (30)$$

La oss nå se på et endimensjonalt system med  $N_A = N_B = N/2$ , hvor  $\epsilon_{AA} = \epsilon_{BB} < \epsilon_{AB}$ , og  $N$  er stor.

(d) Hva blir  $F$  i likevekt når  $T = 0$ ? (Hint: Du behøver ikke finne det eksakte uttrykket for  $F$  for å kunne svare på denne oppgaven).

**Løsning:**

I likevekt er  $F$  minimal. Siden  $F = E - TS$  vil  $E$  være minimal når  $T = 0$ . Hvordan kan  $E$  bli liten i dette tilfellet? Vi må ha minst mulig av  $\epsilon_{AB}$ . Det får vi når alle A er sammen og alle B er sammen - altså når overflaten mellom A og B blir minst mulig. Da er det kun ett sted hvor vi får  $\epsilon_{AB}$ , mens alle de andre blir  $\epsilon_{AA} = \epsilon_{BB}$ . Helmholtz fri energi blir da  $F = E(T = 0) = (N_A - 1)\epsilon_{AA} + \epsilon_{AB} + (N_B - 1)\epsilon_{BB}$ .

Vi skal nå utvikle en numerisk modell og så en teoretisk modell for dette systemet i to dimensjoner. En tilstand for systemet beskrives av en matrise  $m_{ij}$ , hvor hvert element i matrisen kan ha verdien 1 (som svarer til at elementet er av typen A) eller verdien -1 (som svarer til at elementet er av typen B). Husk at antall A-atomer,  $N_A$ , og antall B-atomer,  $N_B$ , ikke endrer seg.

(e) Skisser en algoritme for en funksjon `randomstate(NA,NB,M)` som lager en tilfeldig  $M \times M$  matrise med  $N = M^2$  elementer, hvor `NA` ( $N_A$ ) elementer har verdi +1 (er av type A) og `NB` ( $N_B = N - N_A$ ) elementer har verdi -1 (er av type B).

**Løsning:**

```
def randomstate(NA,NB,M):
    m = zeros((M,M))
    index = permutation(M*M)
    ix,iy = unravel_index(index,(M,M))
    j = range(NA)
    m[ix[j],iy[j]] = 1
    j = range(NA,NA+NA)
    m[ix[j],iy[j]] = -1
    return m
```

Anta at du har oppgitt en funksjon `energy(m,EAA,EAB,EBB)` som returnerer energien som svarer til tilstanden gitt av matrisen `m`, hvor `EAA`, `EAB` og `EBB` er henholdsvis  $\epsilon_{AA}$ ,  $\epsilon_{AB}$  og  $\epsilon_{BB}$ .

- (f) Skisser et program som lager 10000 tilfeldige tilstander og bruker dette til å finne en tilnærmet verdi for partisjonsfunksjonen og energien til systemet.

**Løsning:**

```
# Python
Z = 0.0
E = 0.0
EAA =
EBB =
EAB =
kT = ...
for i in range(10000):
    m = rndstate()
    en = energy(m,EAA,EAB,EBB)
    ee = exp(-en/kT)
    Z = Z + ee
    E = E + en*ee
print "Z = ",Z
print "<E> = ",E/Z
```

Vi skal nå studere en forenklet modell for det to-dimensjonale systemet. Vi antar at  $\epsilon_{AA} = \epsilon_{BB} = 0$  og at  $\epsilon_{AB} = \epsilon$ . Energien til systemet er da tilnærmet lik

$$E = zN\epsilon x(1-x), \quad x = (N_A/N). \quad (31)$$

Vi antar at det eneste bidraget til entropien til systemet kommer fra blandingsentropien for systemet.

- (g) Vis at entropien til en krystall med  $N_A$  atomer av typen A og  $N_B$  atomer av typen B tilnærmet er lik

$$S = -Nk [x \ln x + (1-x) \ln (1-x)] . \quad (32)$$

**Løsning:**

Vi finner entropien til systemet ved å se på antall måter systemet kan organiseres på. Hvis vi har  $N_A$  av type A og  $N_B$  av type B som skal plasseres på  $N = N_A + N_B$  plasser er antallet måter dette kan gjøres  $\Omega = N!/(N_A!N_B!)$  slik at entropien til systemet er

$$S = k \ln \Omega = k (\ln N! - \ln N_A! - \ln(N - N_A)!) . \quad (33)$$

Vi bruker Stirlings tilnærming og finner:

$$S/k = N \ln N - N - N_A \ln N_A + N_A - (N - N_A) \ln(N - N_A) + (N - N_A) , \quad (34)$$

hvor vi nå setter inn at  $N_A = xN$  og  $N - N_A = (1-x)N$ :

$$S/k = N \ln N - Nx \ln Nx - (1-x) \ln N(1-x) \quad (35)$$

$$= N \ln N - (Nx + (1-x)N) \ln N - Nx \ln x - N(1-x) \ln(1-x) , \quad (36)$$

som gir

$$S/k = -N (x \ln x + (1-x) \ln(1-x)) . \quad (37)$$

- (h) Skriv et program som plotter Helmholtz frie energi,  $F(x)$ , som funksjon av  $x$  for en gitt temperatur  $T$ .

### Løsning:

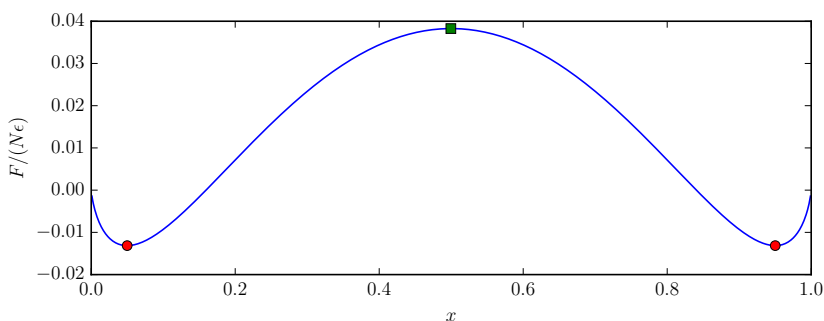
Vi vet at  $F = E - TS$ , som her blir

$$F = zN\epsilon x(1-x) + NkT(x \ln x + (1-x) \ln(1-x)) , \quad (38)$$

hvor  $z$  er et tall. (Dette er vanligvis antall naboer, altså  $z = 4$  i to dimensjoner). Vi plotter dette direkte

```
# Python
z = ...
epsilon = ...
kT = ...
x = linspace(0.0,1.0,1000)
F_div_N = z*epsilon*x*(1-x) + kT*(x*log(x)+ (1-x)*log(x))
plot(x,F_div_N)
xlabel('x'),ylabel('F/N')
show()
```

Figur 3 viser Helmholtz frie energi,  $F(x)$ , for en gitt temperatur  $T$ . Minimum for  $F(x)$  ligger her ved  $x = 0.05$  og  $x = 0.95$ .



Figur 3: Plot av  $F(x)/(N\epsilon_{AB})$ . Minimum av  $F$  inntreffer for  $x = 0.05$  og  $x = 0.95$ , mens maksimum inntreffer for  $x = 0.5$ .

- (i) Vi ser på et system hvor  $N_A = N_B = N/2$ . Anne sier at i likevekt er A og B plassert på annenhver posisjon i hele systemet, som på et sjakkbrett, fordi dette svarer til  $x = 0.5$ . Anton sier at Anne tar feil. Han sier at Helmholtz energi er minimal hvis halve systemet har  $x = 0.05$  og den andre halvdel har  $x = 0.95$ . For et slikt system er også  $N_A = N_B = N/2$  sier Anton, men  $F$  er mindre enn hvis  $x = 0.5$  uniformt i hele i systemet. Hvem har rett? Begrunn svaret ditt.

### Løsning:

Anton har rett. Hvis vi lager et system hvor halvparten er ved  $x = 0.05$  og den andre halvdel er ved  $x = 0.95$ , blir midlere  $x$ -verdi:  $\bar{x} = (0.05 + 0.95)/2 = 0.5$ . Men Helmholtz fri energi for den ene halvdel med  $x = 0.05$  blir  $F_1 = f(x = 0.05) N/2$  og Helmholtz fri energi for den andre halvdel blir  $F_2 = f(x = 0.95) N/2$ . Den totale Helmholtz frie energi blir derfor  $F_{TOT} = F_1 + F_2 + F_3$  hvor  $F_3$  er Helmholtz frie energi for den delen hvor del 1 og del 2 møtes. Men i et stort system blir denne overflaten liten sammenliknet med resten av systemet



og vi kan derfor anta at  $F_3 \ll F_1, F_2$ . Dermed er  $F_{TOT} \simeq F_1 + F_2 = N/2(f(x = 0.05) + f(x = 0.95)) = Nf(x = 0.05)$ . Den siste overgangen kommer av at  $f(x = 0.05) = f(x = 0.95)$ . Vi ser at dette blir lavere enn  $Nf(x = 0.5)$  som svarer til Anne sitt forslag.

## Oppgave 4

Helmholtz frie energi for en ideell, monoatomisk gass med  $N$  atomer er

$$F = -kT \ln \frac{Z_1^N}{N!}, \quad (39)$$

hvor partisjonsfunksjonen for ett atom er

$$Z_1 = n_Q(T) V. \quad (40)$$

Her er  $V$  volumet til gassen,  $N$  er antallet atomer i gassen,  $T$  er temperaturen og  $n_Q(T) = (2\pi mkT/h^2)^{3/2}$ .

(a) Vis at det kjemiske potensialet til gassen er

$$\mu = kT \ln \frac{n}{n_Q}, \quad (41)$$

hvor  $n = N/V$ .

Anta at atomene i gassen blir påvirket av en kraft langs  $x$ -aksen slik at energien til et atom er  $\epsilon(x) = \kappa x^2/2$ . Du kan fremdeles anta at gassen er tynn slik at atomene ikke vekselvirker med hverandre og du kan anta at temperaturen er konstant i hele gassen.

(b) Finn Helmholtz frie energi,  $F(x; T, V, N)$ , for en del av gassen med volum  $V$ , temperatur  $T$ , og antall atomer  $N$  ved posisjonen  $x$ .

### Løsning:

Vi finner Helmholtz fri energi som Helmholtz fri energi for gassen uten potensialet pluss energien gassen med  $N$  atomer ved posisjonen  $x$  har i det ytre potensialet:

$$F_{TOT} = F_g + N e(x) = -kT \ln \frac{Z_1^N}{N!} + N \kappa x^2/2. \quad (42)$$

(c) Finn det kjemiske potensialet til gassen som funksjon av  $x$ .

### Løsning:

Vi kan finne det kjemiske potensialet ved å summere det indre og det ytre potensialet, eller ved å derivere Helmholtz frie energi med hensyn på  $N$ . I begge tilfeller får vi:

$$\mu_{TOT} = \mu_g + \kappa x^2/2. \quad (43)$$

(d) Finn tettheten til gassen som funksjon av  $x$  når gassen er i diffusiv likevekt ved konstant temperatur  $T$ .

**Løsning:**

Vi finner tettheten  $n(x)$  ved å ta utgangspunkt at i likevekt må det kjemiske potensialet være det samme overalt. Det betyr at det kjemiske potensialet må være det samme i  $x = 0$  som i  $x$ . Det gir

$$\mu(x = 0) = \mu_0 = kT \ln n(0)/n_Q(T) = \mu(x) = kT \ln n(x)/n_Q(T) + \kappa x^2/2 . \quad (44)$$

Vi deler på  $kT$  og får:

$$\ln n(0)/n_Q(T) = \ln n(x)/n_Q(T) + \kappa x^2/(2kT) . \quad (45)$$

Vi trekker  $n_Q(T)$  ut på begge sider:

$$\ln n(0) - \ln n_Q(T) = \ln n(x) - \ln n_Q(T) + \kappa x^2/(2kT) , \quad (46)$$

$$\ln n(0) = \ln n(x) + \kappa x^2/(2kT) , \quad (47)$$

som gir

$$\ln n(x) = \ln n(0) - \kappa x^2/(2kT) . \quad (48)$$

Vi tar eksponensialfunksjonen på begge sider og får

$$n(x) = n(0)e^{-\kappa x^2/(2kT)} . \quad (49)$$