OPG 1 a) - Han spiller et gitt antall $n = 20$ ganger.

- Hvert spill har to utfall
- Spillene er uavhengige.
- Sannsynligheten for suksess er konstant.

$n = 20$, $p = 18/37$, $P(X) = b(x; 20, 18/37)$, $k = 18$

$E(X) = np = 20 \cdot \frac{18}{37} \approx 9{,}73..$

$SD(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{20 \cdot \frac{18}{37} \cdot (1 - 18/37)} \approx 2{,}235$

b) $Y = X\left(\frac{36}{18} - 1\right) \cdot 100 - 100(20 - X) = 100X + 100X - 2000$

$= 200X - 2000 = 200[X - 10]$

$E(Y) = 200\,E(X) - 2000 = 200 \cdot 9{,}73 - 2000 = -54$

$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E([200X - 2000]^2) - (-54)^2$

$= E(200^2X^2 - 8e5\,X + 2000^2) - 2916$

$= 4e4\,\underbrace{E(X^2)} - 8e5\,E(X) + 4e6 - 2916$

$= M''_x(t) = n(n-1)p^2 + np = 20(20-1)\frac{18^2}{37^2} + 20\frac{18}{37} = 99{,}664$

$= 4e4 \cdot 99{,}7 - 8e5 \cdot 20 \cdot \frac{18}{37} + 4e6 - 2916 = \frac{7499200}{37}$

$SD(Y) = \sqrt{V(X)} \approx \underline{\underline{450}}$

c) $P(Y) = P(X) = b(x; 20, \frac{18}{37})$

$Y = 200X - 2000 \geq 1000 \Rightarrow X \geq \frac{3000}{200} = 15$

Vinne 1000 kr eller mer; $X \geq 15$

$Y = 200X - 2000 \leq -1000 \Rightarrow X \leq \frac{1000}{200} = 5$

Tape 1000 kr eller mer; $X \leq 5$

Python

$P(Y \geq 1000) = P(X \geq 15) = \sum_{x=15}^{20} b(x; 20, \frac{18}{37}) = \underline{\underline{0{,}0154\ldots}}$

$P(Y \leq -1000) = P(X \leq 5) = \sum_{x=0}^{5} b(x; 20, \frac{18}{37}) = \underline{\underline{0{,}0275\ldots}}$

d) $P(Y) = P(X) = b(x; 20, \frac{6}{37})$

$Y = X(\frac{36}{6} - 1) \cdot 100 - 100(20 - X) = 500X + 100X - 2000$

$= 600X - 2000$

$Y = 600X - 2000 \geq 1000 \Rightarrow X \geq \frac{3000}{600} = 5$

Vinne 1000 kr eller mer: $X \geq 5$

$Y = 600X - 2000 \leq -1000 \Rightarrow X \leq \frac{1000}{600} = \frac{5}{3} = 1.666\ldots$

Tape 1000 kr eller mer: $X \leq 1$

Python.

$P(Y \geq 1000) = P(X \geq 5) = \sum_{x=5}^{20} b(x; 20, \frac{6}{37}) = \underline{\underline{0.214\ldots}}$

$P(Y \leq -1000) = P(X \leq 1) = \sum_{x=0}^{1} b(x; 20, \frac{6}{37}) = \underline{\underline{0.141\ldots}}$

e) $P(z) = \underbrace{\left(\frac{36}{37}\right)^{z-1}}_{\text{Først tapen } z-1 \text{ gangen}} \underbrace{\left(\frac{1}{37}\right)}_{\text{så vinner en gang.}}$

$y = \frac{36}{1} \cdot 100\, x - 100 \cdot z$

x = 1. Han må vinne 1 gang for å kunne tjene 1000 kr.

$= 3600 - 100z \geq 1000 \Rightarrow z \geq \frac{3600 - 1000}{100} = 26$

Python. $P(y \geq 1000) = \sum_{z=1}^{26} P(z) \approx \underline{\underline{0.51}}$

f) $P(y \leq -1000) = 1 - P(y > -1000)$

$y = 3600 - 100z > -1000 \Rightarrow z > \frac{3600 + 1000}{100} = 46$

Python $P(y > -1000) = \sum_{z=1}^{45} P(z) = 0.71$

$P(y \leq -1000) = 1 - 0709 = \underline{\underline{0.29}}$

OPPGAVE 2

a) X = Gjenstående levetid (fra 35 år)

$P(X)$ = Sannsynlighet for X gjenstående år (fra 35)

q_x = Sannsynligheten ~~for~~ å dø i ~~løpet~~ av neste år

Hvis q_x er sannsynligheten for å dø innen et år i en alder x, er $(1-q_x)$ sannsynligheten for å overleve det neste året. Da er $(1-q_{35})(1-q_{36})\cdots(1-q_x) = \prod_{y \leq x}(1-q_y)$

sannsynligheten for å overleve de neste x årene.

Dette tilsvarer $P(x \leq X) = \prod_{y=0}^{x}(1-q_{y+35}) = 1 - P(X \leq x)$

Som gir

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - \prod_{y=0}^{x}(1 - q_{35+y})$$

b) $F(x) - F(x-1) = \sum_{y \leq x} P(y) - \sum_{y \leq x-1} P(y) = P(x)$

d) Hvis $X \leq 34$ blir han under 70 år, og får ingen pensjon. Det er da ingen nåverdi ($h(X) = 0$).
Pensjonen utbetalt om k år vil ha en nåverdi på $100'000/1.03^k$. Ettersom utbetalingene går over flere år, fra 35 år fra nå til X år fra nå, vil den totale nåverdien bli

$$h(X) = \sum_{k=35}^{X} \frac{100\,000}{1.03^k} = 100\,000 \sum_{k=35}^{X} 1.03^{-k}$$

$$h(X) = 100\,000 \left[- \frac{1.03^{-34} - 1.03^{-X}}{1 - 1.03} \right]$$

$$= \frac{100\,000}{1.03^{35}} \left[\frac{1.03^{-34} - 1.03^{-X}}{1 - 1.03} \cdot \frac{1.03^{34}}{1.03^{-1}} \right]$$

$$= \frac{100\,000}{1.03^{35}} \left[\frac{1.03^{34-X} - 1}{1/1.03 - 1} \right] = \frac{100\,000}{1.03^{35}} \left[\frac{1 - (1/1.03)^{X-34}}{1 - 1/1.03} \right]$$

e) $$E[h(X)] = \sum_{x \in X} h(x) P(x) = \sum_{x=0}^{71} h(x) P(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{34} h(x) P(x) + \sum_{x=35}^{71} h(x) P(x)$$

$$= \sum_{x=35}^{71} \frac{100\,000}{1.03^{35}} \frac{1 - (1/1.03)^{x-34}}{1 - 1/1.03} \cdot P(x)$$

$$= \frac{100\,000}{1.03^{35}} \frac{1}{1 - 1/1.03} \left[\sum_{x=35}^{71} P(x) - (1/1.03)^{x-34} P(x) \right]$$

$$= \frac{100\,000}{1.03^{35}} \frac{P(X \geq 35) - \sum_{x=35}^{71} (1/1.03)^{x-34} P(x)}{1 - 1/1.03}$$

f) $E[h(X)] = 387'000$ kr (se kode)

g) Nå-verdien av en sum innbetalt om k år er

$$K \cdot \frac{1}{1.03^k}$$

Dersom han betaler en sum K hvert år, enten til han dør i en alder < 70, eller i 35 år, blir nå-verdien:

$$\sum_{k=0}^{\min(34,x)} K \cdot \frac{1}{1.03^k} = K \cdot g(X)$$

h) $$E[g(X)] = \sum_{x=0}^{71} g(x)P(x) = \sum_{x=0}^{34} g(x)P(x) + \sum_{x=35}^{71} g(x)P(x)$$

$$g(X) = \sum_{k=0}^{X} 1.03^{-k} = \left[\frac{1-(1/1.03)^{X+1}}{1-(1/1.03)}\right], \quad X \leq 34$$

$$g(X) = \left[\frac{1-(1/1.03)^{35}}{1-(1/1.03)}\right], \quad X \geq 35$$

$$E[g(X)] = \sum_{x=0}^{34}\left[\frac{1-(1/1.03)^{x+1}}{1-(1/1.03)} P(x)\right] \sum_{x=35}^{71}\left[\frac{1-(1/1.03)^{35}}{1-(1/1.03)} P(x)\right]$$

$$= \frac{P(X<35) - \sum_{x=0}^{34}(1/1.03)^{x+1}P(x) + P(X\geq 35) - \sum_{x\geq 35}^{71}(1/1.03)^{35}P(x)}{1-(1/1.03)}$$

$$= \frac{1 - \sum_{x=0}(1/1.03)^{x+1}P(x) - (1/1.03)^{35}P(X\geq 35)}{1-(1/1.03)}$$

i) $E[g(X)] = 21.56$

j) $K = \dfrac{E[h(X)]}{E[g(X)]} = 17952$ kr