20. februar 2018

STK1100

Obligatorisk oppgave 1 av to.

Innleveringsfrist

Torsdag 8. mars 2018, klokken 14:30 i Devilry (https://devilry.ifi.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

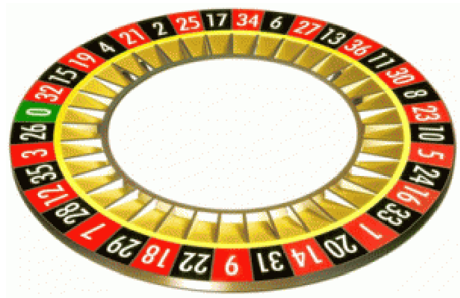
www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

Spesielt om det obligatoriske oppgavesettet i STK1100

Det anbefales at du bruker MATLAB til å gjøre beregningene i de to oppgavene. Men de som ønsker det kan bruke et annet programmeringsspråk (f.eks. Python eller R). Uansett må du angi hvilke kommandoer du har brukt for å komme fram til svarene dine. For å få godkjent besvarelsen, må du ha minst 65 % riktig *på hver av de to oppgavene*.

LYKKE TIL!

Oppgave 1. Rulett er en klassiker blant hasardspillene. Ruletthjulet er formet som en skål og kan rotere om midtaksen. Se figuren.



En liten kule spretter tilfeldig omkring i skålen under rotasjonen og blir liggende på ett av de 37 nummererte feltene når ruletthjulet stanser. Hver av feltene nummerert $1, 2, \ldots, 36$ er merket med sort eller rød farge, mens feltet nummerert 0 er grønnt.

Spilleren setter innsatsen på grupper av innsatsfelt, for eksempel de røde feltene, feltene $1, 2, \ldots, 6$ eller ett enkelt felt. Det er ikke tillatt å sette innsats på feltet nummerert 0.

Hvis en spiller har satt 100 kroner på en gruppe som består av k innsatsfelt, og kulen stopper på ett av dem, vinner spilleren og hun mottar en gevinst på $100 \cdot (36/k)$ kroner. Hvis kulen stopper på ett av de øvrige feltene, taper spilleren og hun får ingen ting. Uansett beholder kasinoet innsatsen på 100 kroner. Spillerens *nettogevinst* blir altså $100 \cdot \left(\frac{36}{k} - 1\right)$ kroner hvis spilleren vinner, og den blir -100 kroner hvis hun taper. (Negativ nettogevinst svarer til tap.)

Vi betrakter først en spiller som en kveld er med i 20 spilleomganger og hver gang satser 100 kroner på 18 innsatsfelt.

a) La X være antall ganger hun vinner i de 20 spilleomgangene. Forklar at X er binomisk fordelt med $n = 20$ og $p = 18/37$. Bestem $E(X)$ og $SD(X)$.

b) La Y være den samlete nettogevinsten til spilleren i de 20 spilleomgangene. Uttrykk Y ved X og bestem $E(Y)$ og $SD(Y)$.

c) Hva er sannsynligheten for at spilleren vinner minst 1000 kroner i løpet av kvelden (dvs. $Y \geq 1000$)? Hva er sannsynligheten for at hun taper minst 1000 kroner (dvs. $Y \leq -1000$)?

Vi betrakter så en spiller som en kveld er med i 20 spilleomganger og hver gang satser 100 kroner på seks innsatsfelt.

d) Hva er sannsynligheten for at denne spilleren vinner minst 1000 kroner i løpet av kvelden? Hva er sannsynligheten for at han taper minst 1000 kroner?

Endelig betrakter vi en spiller som gjentatte ganger satser 100 kroner på ett innsatsfelt. Han spiller helt til han vinner én gang, og da stopper han å spille.

e) La Z være antall omganger han spiller. Bestem punktsannsynligheten til Z.

f) Hva er sannsynligheten for at denne spilleren vinner minst 1000 kroner i løpet av kvelden. Hva er sannsynligheten for at han taper minst 1000 kroner?

Oppgave 2. Vi skal i denne oppgaven se hvordan en kan bestemme premien (= prisen) til en privat pensjonsforsikring. Framstillingen er en forenkling av det som gjøres i et forsikringsselskap. Men oppgaven illustrerer likevel prinsippet for beregning av pensjonsforsikringspremier. Forenklingene består blant annet i at vi:

- regner med fast rente
- ser bort fra indeksjustering av pensjonen
- ser bort fra selskapets omkostninger og fortjeneste
- benytter dødelighetsopplysninger fra Statistisk sentralbyrå over dødeligheten i den norske befolkningen (i perioden 2011-2015) i stedet for dødeligheten blant forsikrede
- regner som om inn- og utbetalingene bare gjøres én gang hvert år, nemlig på en persons fødselsdag

For å være konkrete vil vi anta at en 35 år gammel mann tegner en pensjonsforsikring som vil gi han en årlig pensjon på 100 000 kroner fra han fyller 70 år og så lenge han lever[1]. Hvis han dør før han fyller 70 år utbetales ingen ting. For denne pensjonsforsikringen må mannen hvert år til og med sin 69 årsdag betale en viss premie (så sant han er i live).

De innbetalingene mannen gjør til forsikringsselskapet og de utbetalingene han får fra selskapet er stokastiske størrelser. For hvor mye mannen betaler inn i premie og hvor mye han vil få utbetalt i pensjon vil avhenge av hvor gammel han blir. Premien bestemmes slik at forventningsverdien til nåverdien av premieinnbetalingene er lik forventningsverdien til nåverdien av pensjonsutbetalingene. Det gir en "rettferdig premie" (når vi ser bort fra selskapets omkostninger og fortjeneste). For hvis selskapet tegner mange pensjonsforsikringer av den typen vi har beskrevet, vil gjennomsnittlig inn- og utbetaling pr. polise bli like store.

Vi lar den stokastiske variabelen X angi mannens *gjenstående levetid* i hele år, dvs. levetiden i hele år fratrukket 35 år. Vi vil først bestemme punktsannsynligheten $p(x) = P(X = x)$ for denne stokastiske variabelen. Til det vil vi bruke den tabellen over ett-årige dødssannsynligheter som er gitt på kurssiden.

a) La q_x være sannsynligheten for at en x år gammel person skal dø i løpet av ett år. Forklar at da er den kumulative fordelingsfunksjonen til X gitt ved

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - \prod_{y=0}^{x} (1 - q_{35+y}) \, .$$

b) Vis at punktsannsynligheten er gitt ved

$$p(x) = P(X = x) = F(x) - F(x-1) \quad \text{for } x = 0, 1, 2, \ldots, 71$$

når vi regner 106 år som den høyest mulige levealder.

c) Bruk dødelighetstabellen gitt på kurssiden og resultatene i a) og b) til å bestemme punktsannsynligheten $p(x)$ for $x = 0, 1, 2, \ldots, 71$ og lag et plott av punktsannsynligheten. Tips om

[1] Pensjonsforsikringer koster i dag det samme for kvinner og menn. En tar altså ikke hensyn til at dødeligheten er forskjellig for de to kjønn. Prisen på pensjonsforsikringen vil derfor bli den samme om det er en 35 år gammel kvinne som tegner pensjonsforsikringen.

hvordan du kan gjøre beregningene i MATLAB er gitt i kolonnen for "Ressurser/pensum" til forelesningen tirsdag 20. februar[2].

Mannen betaler inn premier til forsikringsselskapet hvert år fra han er 35 år, mens eventuelle pensjonssutbetalinger først kommer senere. For å ta hensyn til denne forskjellen i tid mellom inn- og utbetalinger benyttes nåverdiene av disse. Nåverdien av et beløp på B kroner som betales om k år, er det beløpet en må sette i banken i dag for å ha B kroner om k år når det beregnes renter og renters rente. Vi vil i denne oppgaven regner med at forsikringsselskapet benytter en rentefot på 3% pro anno. Da er nåverdien av B kroner som betales om k år lik $B/1.03^k$.

Vi vil så se nærmere på nåverdiene av inn- og utbetalingene og deres forventningsverdier. Vi ser først på pensjonsutbetalingene. Hvis mannen dør før han blir 70 år, dvs. hvis $X \leq 34$, får han ikke utbetalt noe i pensjon. Hvis han blir minst 70 år, får han utbetalt 100 000 kroner hvert år fra og med sin 70 årsdag og så lenge han er i live. Vi får nåverdien av alle pensjonsutbetalingene ved å summere nåverdiene av hver av dem.

d) Forklar at nåverdien av mannens samlede pensjonsutbetalinger blir $h(X) = 0$ hvis $X \leq 34$ og

$$h(X) = \sum_{k=35}^{X} \frac{100\,000}{1.03^k} = \frac{100\,000}{1.03^{35}} \cdot \frac{1 - (1/1.03)^{X-34}}{1 - 1/1.03}$$

hvis $X \geq 35$.

e) Vis at forventet nåverdi av pensjonsutbetalingene kan gis som

$$E[h(X)] = \sum_{x=0}^{71} h(x)p(x) = \frac{100\,000}{1.03^{35}} \cdot \frac{P(X \geq 35) - \sum_{x=35}^{71} (1/1.03)^{x-34}\, p(x)}{1 - 1/1.03}$$

f) Bruk formelen i punkt e) og punktsannsynligheten du fant i punkt c) til å beregne forventet nåverdi av pensjonsutbetalingene.

Vi ser så på premieinnbetalingene. Vi antar at mannen betaler en årlig premie på K kroner pr. år fra og med sin 35 årsdag og til og med sin 69 årsdag (men selvfølgelig bare hvis han er i live).

g) Forklar at nåverdien av mannens samlede premieinnbetalinger blir $K \cdot g(X)$, der

$$g(X) = \sum_{k=0}^{\min(X,34)} \frac{1}{1.03^k}$$

h) Vis at forventet nåverdi av mannens samlede premieinnbetalinger kan gis som $K \cdot E[g(X)]$, der

$$E[g(X)] = \sum_{x=0}^{71} g(x)p(x) = \frac{1 - \sum_{x=0}^{34} (1/1.03)^{x+1}\, p(x) - (1/1.03)^{35}\, P(X \geq 35)}{1 - 1/1.03}$$

i) Bruk formelen i punkt h) og punktsannsynligheten du fant i punkt c) til å beregne $E[g(X)]$.

Den årlige premien K bestemmes slik at forventet nåverdi av premieinnbetalingene blir lik forventet nåverdi av pensjonssutbetalingene, dvs. slik at $K \cdot E[g(X)] = E[h(X)]$.

j) Bestem den årlige premien K.

[2]Merk at disse kommandoene er gitt for notatet om livsforsikring for en 30 år gammel kvinne, ikke for pensjonsforsikringen i denne oppgaven.