MEK2200 – Oblig 2

Jonas Gahr Sturtzel Lunde (`jonassl`)

November 23, 2017

Eksamen ME 115 - Vår 2001

Oppgave 2

a)

Vi tar utgangspunkt i bevegelsesligningen for isotropt lineært elastiske stoffer.

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \frac{\lambda + \mu}{\rho}\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}^v \tag{1}$$

Vi har ingen eksterne krefter, så $\boldsymbol{f}^v = 0$. Forskyvningsfeltet er også divergensfritt, ettersom $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial v(x,z,t)}{\partial y} = 0$. Setter vi inn for $\boldsymbol{u} = [0, v, 0]$, får vi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{2}$$

Dette gjelder selvsagt for begge de elastiske stoffene, slik at vi får de to ligningene

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{\mu_1}{\rho_1}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = \frac{\mu_2}{\rho_2}\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2}\right) \tag{4}$$

Dette gjenkjenner vi som bølgeligningen, med bølgehastigheter

$$c_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}} \tag{5}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\rho_2}} \tag{6}$$

b)

Vi modellerer forskyvningsfeltene som

$$v_1 = \hat{v}_1(z)\sin(kx - \omega t) \tag{7}$$

$$v_2 = \hat{v}_2(z)\sin(kx - \omega t) \tag{8}$$

Vi setter disse ligningene inn i bølgeligningen 2 og får

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\hat{v}\sin(kx-\omega t)) = c_i^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\hat{v}\sin(kx-\omega t)) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\hat{v}\sin(kx-\omega t))\right)$$
$$\omega^2\hat{v}\sin(kx-\omega t) = c_i^2k^2\hat{v}\sin(kx-\omega t) + c_i^2\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial z^2}\sin(kx-\omega t)$$
$$\omega^2\hat{v} = c_i^2k^2\hat{v} + c_i^2\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial z^2}$$
$$\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial z^2} = \hat{v}k^2\left(\frac{\omega^2}{c_1^2k^2} - 1\right)$$

Ved å introduserer bølgehastigheten $c = \frac{\omega}{k}$ får vi

$$\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial z^2} = \hat{v}k^2\left(\frac{c^2}{c_i^2} - 1\right) \tag{9}$$

Setter vi inn for

$$\hat{v} = v_1 \qquad k_1^2 = k^2\left(\frac{c^2}{c_1^2} - 1\right)$$

og

$$\hat{v} = v_2 \qquad k_2^2 = k^2\left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)$$

får vi ligningene

$$\frac{\partial^2\hat{v}_1}{\partial z^2} = -k_1^2\hat{v}_1 \tag{10}$$
$$\frac{\partial^2\hat{v}_2}{\partial z^2} = k_2^2\hat{v}_2 \tag{11}$$

Ligning 10 har løsninger på formen

$$v_1(z) = C_1\cos k_1z + C_2\cos k_1z$$

mens ligning 11 har løsninger på formen

$$\hat{v}_2(z) = C_3e^{k_2z} + C_4e^{-k_2z}$$

For at bølgetallene k_1 og k_2 skal være reelle, må vi kreve at $c^2 \geq c_1^2$ og at $c^2 \leq c_2^2$.

c)

Ettersom bølgene skal dø ut i dypet har vi en betingelse om at

$$v_2(z=-\infty) = 0 \tag{12}$$

I grensesjiktet mellom lagene må vi kreve at hastighetsprofilen er lik for de to stoffene

$$v_1(z=0) = v_2(z=0) \tag{13}$$

Vi kan også kreve at det er et kontinuerlig skjærstress og normalstress i grensesjiktet, eller at

$$P_{zx}^I = P_{zx}^{II}\Big|_{z=0}, \qquad P_{zy}^I = P_{zy}^{II}\Big|_{z=0}, \qquad P_{zz}^I = P_{zz}^{II}\Big|_{z=0} \tag{14}$$

Vi har også at skjærstresset på overflaten, $z = H$, skal være 0:

$$P_{zx}^I = P_{zy}^I = 0\Big|_{z=H} \tag{15}$$

d)

Ligningene

$$\frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial z^2} = -k_1^2 \hat{v}_1 \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{v}_2}{\partial z^2} = k_2^2 \hat{v}_2 \tag{17}$$

har som kjent løsninger

$$v_1 = C_1 \cos k_1 z + C_2 \sin k_1 z$$
$$v_2 = C_3 e^{k_2 z} + C_4 e^{-k_2 z}$$

Ved bruk av grensebetingelsen 12 har vi at

$$v_2(z = -\infty) = C_4 \cdot \infty = 0$$

som setter et krav om at $C_4 = 0$, slik at $v_2(z) = C_3 e^{kz}$

Grensebetingelsen 13 gir et krav om at

$$v_1(z = 0) = v_2(z = 0)$$
$$C_1 = C_3$$

slik at vi får

$$v_2(z) = C_1 e^{k_2 z}$$

Betingelsen om kontinuerlig skjærstress mellom de to mediene gir at

$$P_{zy}^{I} = P_{zy}^{II}\Big|_{z=0}$$
$$2\mu_1 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\right) = 2\mu_2 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\right)\Big|_{z=0}$$
$$\mu_1(-C_1 k_1 \sin k_1 z + C_2 k_1 \cos k_1 z) = \mu_2\big(C_1 k_2 e^{k_2 z}\big)\Big|_{z=0}$$
$$C_2 = C_1 \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

som betyr at

$$v_1(z) = C_1 \cos k_1 z + C_1 \frac{\mu_1}{\mu_2} \sin k_1 z$$

I grensen $kH \to 0$ får vi at

$$k_2 = 0$$
$$k_2^2 = 0$$
$$k^2\left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) = 0$$

Betingelsen om ingen skjærstress ved den frie overflaten, $z = H$, gir at

$$P_{zy}^{I} = 0 = 2\mu_1 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\right) = \mu_2\left(-C_1 k_1 \sin k_1 z + C_1 k_1 \frac{\mu_1}{\mu_2} \cos k_1 z\right)\Big|_{z=H}$$
$$\mu_2 C_1 k_1 \sin k_1 H = \mu_2 C_1 k_1 \frac{\mu_1}{\mu_2} \cos k_1 H$$
$$\tan k_1 H = \frac{\mu_2 k_2}{\mu_1 k_1}$$

Ved grensen $k_1 H \to 0$ får vi at

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\mu_2 k_2}{\mu_1 k_1} \\
k_2 &= 0 \\
k^2\left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) &= 0 \\
c^2 &= c_2^2
\end{aligned}
$$

Oppgave 3

a)

Vi starter med Navier Stokes ligning for inkompressible newtonske fluider.

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}^v$$

Strømmen er stasjonær, så vi stryker akselerasjonsleddet. Det er heller ingen eksterne krefter. Vi kan også anta at trykket er relativt konstant over det tynne grensesjiktet. Vi ser på x-komponenten av N.S. med disse forenklingene, som blir

$$\left(u\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u$$

Ettersom flaten er lang og grensesjiktet smalt, vil edringene over grensesjiktets utstrekning være betraktelig større enn edringene langs platen. Hastigheten på tvers av grensesjiktet vil også være liten i forhold til langs platen. Vi kan anta følgende relasjoner:

$$u \gg w, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \gg \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

som videre forenkler ligningen til

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{18}$$

Merk at vi ikke stryker leddene $u\frac{\partial u}{\partial x}$ eller $w\frac{\partial u}{\partial z}$, fordi begge inneholder en liten og en stor størrelse.

b)

Meget nære platen kan det ikke være noen hastighet, etter no-slip og no-penetration betingelsene. Høyresiden av ligning 18 forsvinner, og vi får

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Integrerer vi opp dette får vi

$$u(z) = \frac{C}{\nu}z + C_2$$

der vi med en gang ser at $C_2 = 0$, ettersom det ikke skal være strøm ved $z = 0$.

c)

Skjærspenningen er gitt som

$$P_{zx}\Big|_{z=0} = 2\mu\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = \mu u_0\frac{2}{\pi\delta}\cos\left(\frac{2\cdot 0}{\pi\delta}\right) = \frac{2\mu u_0}{\pi\delta} = \frac{2}{5\pi}\mu\sqrt{\frac{u_0^3}{\nu x}}$$

d)

Kraften per lengdeenhet som virker på platen vil så vidt jeg vet bare være definer som spenningsvektoren i retningen vi ønsker å se på. Den totale skjærkraften som virker på platen vil være gitt som den integrerte av spenningstensoren over flatens utstrekning:

$$F = \int_0^\infty \boldsymbol{P}_n \cdot \boldsymbol{t} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty P_{zx} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{2}{5\pi} \mu \sqrt{\frac{u_0^3}{\nu x}} \, \mathrm{d}x$$

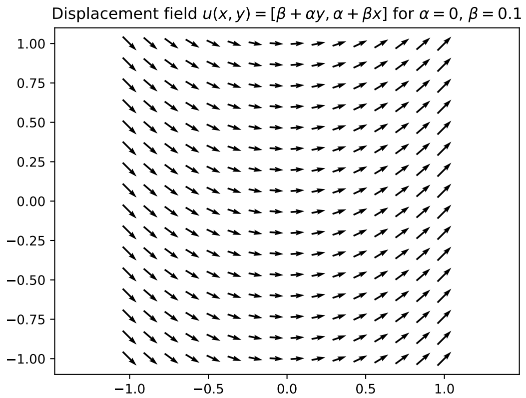
Dette integralet konvergerer ikke, så jeg er ikke helt sikker på hvor jeg skal herifra.

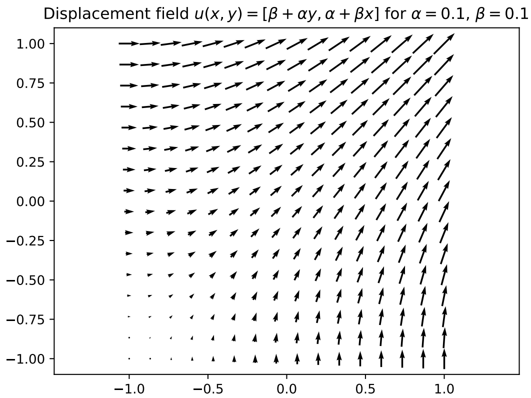
Eksamen MEK3220 - Høst 2012

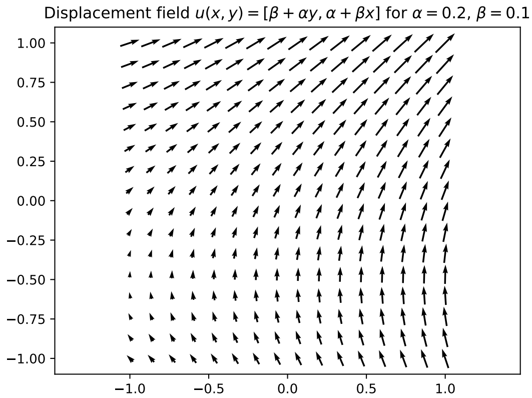
Oppgave 2

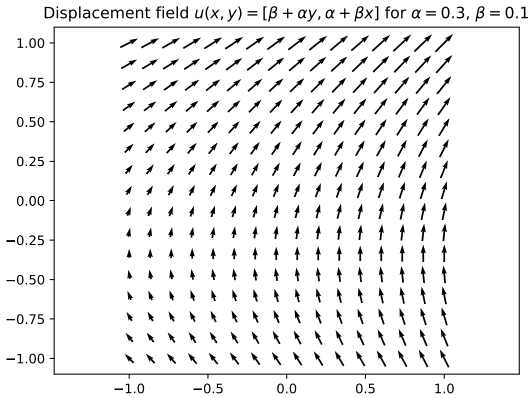
a)

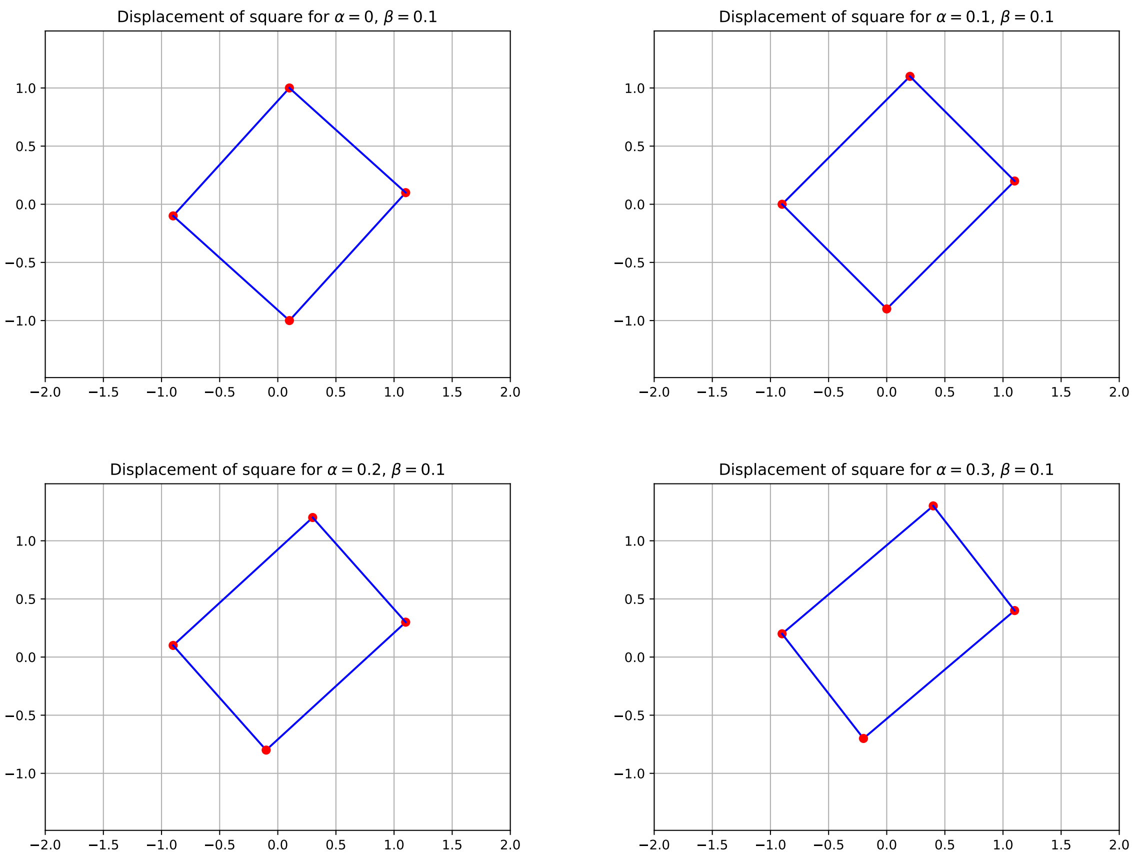
Under ser vi forskyvningsfeltet for et utvalgs sett med α og β verdier.











Forskyvningen kan representeres som en lineærtransformasjon ved hjelp av forskyvningstensoren

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Forskyvningen av et punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_2$ kan skrives som

$$\left(\hat{D} + \hat{I}\right)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

Endringen av areal i en lineærtransformasjon er bestemt av determinanten til forskyvningsmatrisen, gitt som

$$\det\left(\hat{D} + \hat{I}\right) = (1 \cdot 1) - (\beta \cdot \alpha) = 1 - \alpha\beta$$

Arealet endres med en faktor $1 - \alpha\beta$.

b)

To punkter $\boldsymbol{x}_1 = (x_1,\ y_1)$ og $\boldsymbol{x}_2 = (x_2,\ y_2)$ vil forskyves en vektoriell avstand $\boldsymbol{u}_1 = (\beta + \alpha y_1,\ \alpha + \beta x_1)$ og $\boldsymbol{u}_2 = (\beta + \alpha y_2,\ \alpha + \beta x_2)$, som gjør at forskyvningsforskjellen blir

$$\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 = (\alpha(y_2 - y_1),\ \beta(x_2 - x_1)) = (\alpha \Delta y,\ \beta \Delta x)$$

Tensoren for relativt forskyvningsforskjeller ble funnet i forrige oppgave 19.

c)

Oppgave 3

a)

Fluidet kan ikke ha hastighet i z-retning, ettersom det ville måttet oppstå eller forsvinne mot grenseplatene. Det er ingen krefter til å drive fluidet i y-retning. Vi har da bare en hastighet i x-retning. Denne hastigheten kan ikke være x-avhengig, ettersom vi har å gjøre med et inkompresibelt fluid, og dette ville innebære opphopning a fluidet. Det er ingen grunn til at hastigheten skal være y-avhengig, i og med at y-aksen er helt symmetrisk.

Vi tar utgangspunkt i Navier Stokes ligning for hastigheten til et inkompressibelt Newtonsk fluid.

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}^v$$

Her stryker vi først ledd, fordi strømningen er stasjonær, og andre ledd fordi $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = \left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{u} = 0$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u(z) + f_z^v$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2} - \sin(\alpha)g \tag{20}$$

Ettersom vi har med viskøs teori å gjøre, må vi kreve at hastigheten i grensesjiktene til platene er lik hastigheten til platene ("no-slip"). Dette gir grensebetingelsene

$$u(z=0) = 0$$
$$u(z=h) = U$$

b)

Under antagelsen om at $\nabla p = 0$, har vi at

$$\frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2} = \sin(\alpha)\frac{\rho g}{\mu}$$

som gir

$$u(z) = \frac{1}{2}\sin(\alpha)\frac{\rho g}{\mu}z^2 + Cz + D$$

Grensebetingelsen $u(z=0) = 0$ gir at

$$u(0) = D = 0$$

mens betingelsen $u(z=h) = U$ gir

$$\frac{1}{2}\sin(\alpha)\frac{\rho g}{\mu}h^2 + Ch = U$$
$$C = \frac{U}{h} - \frac{1}{2}\sin(\alpha)\frac{\rho g}{\mu}h$$

slik at vi kan definere $u(z)$ som

$$u(z) = \frac{1}{2}\sin(\alpha)\frac{\rho g}{\mu}\left(z^2 - hz\right) + \frac{z}{h}U$$

c)

Med en trykkgradient $\frac{\partial p}{\partial x} = -\beta$ og et trykk $p(x=0)=0$ i origo, er trykket åpenbart gitt som

$$p(x) = p_0 - \beta x$$

Vi løser for hastighetsfeltet ved å sette trykkgrandenten i ligning 20.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin(\alpha)\frac{g}{\mu} - \frac{\beta}{\mu}$$

som gir et hastighetsfelt

$$u(z) = \frac{z^2}{2\mu}(\sin(\alpha)g - \beta) + Cz + D = \gamma z^2 + Cz + D$$

hvor vi har introdusert $\gamma = \frac{\sin(\alpha)g-\beta}{2\mu}$. Vi har $C = 0$ etter samme logikk som sist, og $u(z=h) = U$ gir

$$C = \frac{U}{h} - \gamma h$$

som gir hastighetsfeltet

$$u(z) = \gamma z^2 + Cz = \gamma z^2 + \frac{U}{h}z - \gamma hz = \gamma z^2 - \gamma hz + \frac{U}{h}z$$

For at strømningen skal bevege seg netto oppover, må strømingsfluksen i x-retning være positiv.

$$\int_0^h u(z)\,\mathrm{d}z = \left[\frac{1}{6}\gamma z^3 - \frac{1}{2}\gamma hz^2 + \frac{1}{2}\frac{U}{h}z^2\right]_0^h = \frac{1}{6}\gamma h^3 - \frac{1}{2}\gamma h^3 + \frac{1}{2}Uh = -\frac{1}{3}\gamma h^3 + \frac{1}{2}Uh$$

Setter vi inn for γ og løser for når fluksen er større enn 0, får vi

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}\left[\frac{\sin(\alpha)g-\beta}{2\mu}\right]h^3 + \frac{1}{2}Uh > 0 \\ \frac{1}{6\mu}\beta h^3 > \frac{1}{6\mu}\sin(\alpha)gh^3 - \frac{1}{2}Uh \\ \beta > \sin(\alpha)g - 3\frac{\mu}{h^2}U \end{aligned}$$

d)

Vi finner tøyningstensoren som

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(2\gamma hz - \gamma h + \frac{U}{h}\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(2\gamma hz - \gamma h + \frac{U}{h}\right) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette gjør energidissipasjonen til

$$\Delta = 2\mu\epsilon_{ij}^2 = 2\mu \cdot 2\left[\frac{1}{2}\left(2\gamma hz - \gamma h + \frac{U}{h}\right)\right]^2 = \mu\left(2\gamma hz - \gamma h + \frac{U}{h}\right)^2$$