

MEK2200 – Oblig 1

Jonas Gahr Sturtzel Lunde (jonass1)

October 5, 2017

1 Korte Oppgaver

1.1 Vannstråle

1.1.1

Min venn påstår at strømningshastigheten er større på innsiden av strålen enn på utsiden. Dette har han intet grunnlag for å påstå. Selv om han kunne argumentert for dette, gjelder ikke Bernoulli på kryss av strømlinjer. Ettersom det umulig kan ligge strømlinjer normalt på strømmens bevegelsesretning, kan man ikke benytte Bernoulli på kryss av bevegelsesretningen.

1.1.2

Jeg vet ikke helt om det refereres til påstanden om at strømningshastigheten er høyere på innsiden, eller påstanden om at Bernoulli er gjeldende. Man trenger vel ikke gjøre mer enn å måle strømningshastigheten for å se om den er høyere på innsiden. At Bernoulli ikke gjelder er åpenbart, ettersom å følge en strømlinje er en av betingelsene i utledningen.

1.2 Atmosfærestrømning

Jeg må innrømme jeg er smålig forvirret over hvordan Buckingham's pi teorem fungerer på såpas store ligninger. I heftet vi har fått om dimensjonsanalyse gjøres det alltid på meget små og åpenbare ligninger, der alle parametere blir brukt i skaleringen. I dette tilfeller skal åpenbart ikke alle parametere regnes med, ettersom det er minst 7-8 av dem (litt avhengig av hvordan du teller). Ettersom det kun er 3 dimensjoner, ville dette gitt veldig mange dimensjonsløse grupper. Vi skal etterpå se at det bare er én slik. Det må derfor bare være 4 av parameterene i ligningen som "teller"... Jeg har åpenbart ikke skjønt helt hvordan Buckingham fungerer, men jeg mistenker det er snakk om u , r , μ og ρ . Dette er i hvert fall parameterene vi bruker til å skalere ligningen. I så fall får vi:

Parametere	Enheter	Dimensjoner
ρ	kg/m^3	$[M][L^{-3}]$
$u = \mathbf{u} $	m/s	$[L][T^{-1}]$
$L = \mathbf{r} $	m	$[L]$
μ	kg/sm	$[M][T^{-1}][L^{-1}]$

Noe som gir 4 parametere, 3 dimensjoner, og dermed $4 - 3 = 1$ dimensjonsløse grupper. Vi bruker de fire parameterne til å skalere leddene i ligningen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{u} \hat{\mathbf{u}}}{\partial \frac{L}{u} \hat{t}} = \frac{u^2}{L} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{t}} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= \frac{u^2}{L} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} &= \frac{u^2}{L} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \hat{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} &= \frac{u^2}{L} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \hat{\mathbf{r}} \\ \nabla P &= \rho \frac{u^2}{L} \nabla \hat{P} \\ \nabla^2 \mathbf{u} &= \frac{u}{L^2} \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

Hvor vi har skrevet ut den partikkelderiverte i sine to ledd. Vi setter dette inn i ligningen, og får:

$$\rho \frac{u^2}{L} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{t}} + \rho \frac{u^2}{L} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\mathbf{u}} + 2\rho \frac{u^2}{L} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \hat{\mathbf{u}} + \rho \frac{u^2}{L} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \hat{\mathbf{r}} = -\rho \frac{u^2}{L} \hat{\nabla} \hat{P} + \mu \frac{u}{L^2} \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{u}}$$

Som, ved å dele på $\rho \frac{u^2}{L}$, blir

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\mathbf{u}} + 2\hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \hat{\mathbf{u}} + \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \hat{\mathbf{r}} = -\hat{\nabla} \hat{P} + \mu \text{Re}^{-1} \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{u}}$$

der vi har innført det dimensjonsløse Reynolds tallet $\text{Re} = \frac{\rho u L}{\mu}$. Dette er altså vår ene pi-gruppe. Vi kunne også funnet den ved å bare se på hvordan vi kunne kombinert våre 4 parametere til et dimensjonsløst tall, men dette krevde å vite hva disse 4 var, som jeg ikke hadde noen klar argumentasjon for.

1.3 Aquaporinkanaler

Her starter jeg med å argumentere for at kanalens lengde ikke bør ha noen påvirkning på volumraten i et utsnitt av kanalen, ettersom ingen av faktorene som kunne påvirket volumraten (hastighet, rørets tykkelse, viskøse motstandskrefter) er funksjoner av kanalens lengde. Vi har da 4 parameterene og 3 dimensjoner å forholde oss til.

Parametere	Enheter	Dimensjoner
Q	m^3/s	$[L^3][T^{-1}]$
R	m	$[L]$
P	kg/s^2m	$[M][T^{-2}][L^{-1}]$
μ	kg/sm	$[M][T^{-1}][L^{-1}]$

der Q er volumraten. Vi får da altså $4 - 3 = 1$ dimensjonsløs parameter. Denne kan da bestemmes ganske entydig som

$$\Pi = \frac{Q\mu}{PR^3}$$

Dette betyr at volumraten går som

$$Q = \Pi \frac{PR^3}{\mu}$$

Dette gir intuitivt mening. Vi forventer at volumraten er proporsjonal med trykk, og omvendt proporsjonal med viskositet. For et ikke-viskøst fluid forventer vi at volumraten går som R^2 (altså arealet), men for et viskøst fluid kan det se ut til å gå som R^3 istedenfor. Dette kan være fordi den gjennomsnittlige hastigheten til fluidet blir en funksjon av R , ettersom fluidets friksjon med kanalveggene blir relativt sett mindre betydningsfull etterhvert som R øker.

1.4 Hastighetsfelt

- (i) $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$ dersom vi bare ser på $t > 0$, da platen har startet. Fluidet starter i ro, og det virker bare krefter som kan akselerere fluidet i positiv x-retning. Dersom vi også ser på tiden før platen startet, kan den også være 0. Akselerasjonen vil for såvidt også være 0 for fluidpartikler meget høyt over bakken i en periode etter $t = 0$, ettersom hastigheten bruker tid på å forplante seg.
- (ii) $u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, ettersom $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Dette er fordi hastigheten er den samme bortover x-planet. Alle punkter en gitt høyde over bakken vil ha samme hastighet.
- (iii) $v \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, ettersom $v = 0$. v er hastigheten i y-retning. Det er ingen initiell hastighet i y-retning, og det finnes ingen krefter som kan skape det.
- (iv) $\omega_z > 0$. Dette kan vi se for oss om vi plasserer et objekt hvor som helst i feltet. Ettersom hastighetsfeltet alltid faller med økende høyde, vil objektet alltid oppleve en større kraft på undersiden enn oversiden, og objektet vil rotere. Det må da være positiv virvling overalt i feltet.

Sirkulasjonen er gitt som et integral om en lukket kurve:

$$\Gamma = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{c}$$

Vi velger denne lukkede kurven å være et kvadrat som starter i origo, og har sidekanter parallelle med aksene. Videre antar vi at lengden på kvadratet, H , er såpass stort at hastighetsfeltet ved $y = H$ er neglisjerbart. For de to sidene parallelle med y-aksen vil det ikke bli noe sirkulasjonsbidrag, ettersom $v = 0$. Vi sitter da bare igjen med sidekanten ved $y = 0$ som bidrar til sirkulasjonen:

$$\Gamma = \int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}$$

Hastighetsfeltet er her konstant lik U , og vi får

$$\Gamma = Ux$$

1.5 Impulsligningen

Impulsligningen kan blant annet skrives på formen

$$\mathbf{I} = \mathbf{P} + \mathbf{F}$$

Her er \mathbf{I} endringen av bevegelsesmengde innenfor et volum (både med hensyn på flyt av bevegelsesmengde inn og ut, og bevegelsen av volumet selv). \mathbf{P} og \mathbf{F} er kreftene som virker på volumet, og må dermed være balansert med endringen av bevegelsesmengde (Newtons andre lov). \mathbf{P} er trykkekrefter, integrert over volum-flaten, og \mathbf{F} er volumkrefter, integrert over volumet.

2 Lange oppgaver

2.1 Potensialstrømning

2.1.1

Vi vet at et komplekst strømning er gitt som $w(z) = w(x + iy) = \phi + i\psi$, der ϕ er hastighetspotensialet, og ψ er strømlinjene. Vi har at

$$\begin{aligned}w(z) &= \left(\frac{m - i\Gamma}{2\pi}\right) \ln z = \left(\frac{m - i\Gamma}{2\pi}\right) \ln(re^{i\theta}) = \left(\frac{m - i\Gamma}{2\pi}\right) (\ln(r) + i\theta) \\&= \frac{m\theta - \Gamma \ln(r)}{2\pi} i + \frac{m \ln(r) + \Gamma \theta}{2\pi} = \phi + i\psi\end{aligned}$$

som betyr at

$$\phi = \frac{m\theta - \Gamma \ln(r)}{2\pi}$$

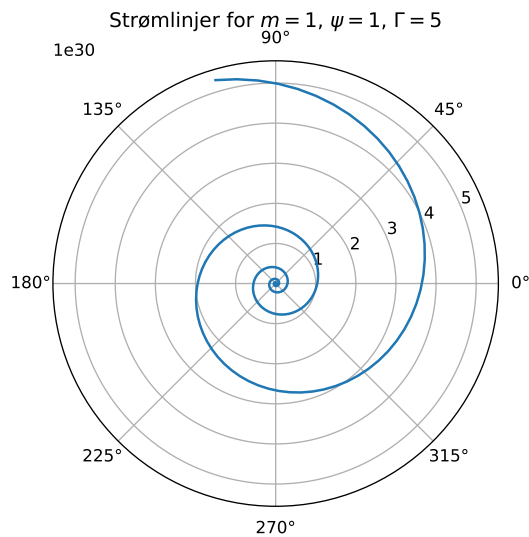
$$\psi = \frac{m \ln(r) + \Gamma \theta}{2\pi}$$

For å illustrere strømlinjene setter vi ψ til en konstant, og løser for $r(\theta)$:

$$\ln(r) = -\frac{2 - \pi\psi + m\theta}{2\pi}$$

$$r(\theta) = e^{(m\theta - 2\pi\psi)/\Gamma}$$

En rask tur innom Python gir oss denne figuren



2.1.2

Vi tar uttrykket vårt for w , og deriverer med hensyn på z :

$$w'(z) = \left(\frac{m - i\Gamma}{2\pi}\right) \frac{d}{dz} \ln(z) = \left(\frac{m}{2\pi} - i\frac{\Gamma}{2\pi}\right) \frac{1}{z} = \left(\frac{m}{2\pi r} - i\frac{\Gamma}{2\pi r}\right) e^{-i\theta} = (u_r - iu_\theta) e^{-i\theta}$$

som da gir at

$$u_r = \frac{m}{2\pi r}, \quad u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

2.1.3

Vi har at

$$\frac{dr}{dt} = u_r = \frac{m}{2\pi r}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r^2}$$

Vi integrerer opp hastighetene fra $t = 0$ for å finne posisjon.

$$r(t) = \int_0^t \frac{m}{2\pi r} = \frac{m}{2\pi r} t$$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{\Gamma}{2\pi r^2} = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} t$$

2.2 Rankine-virvel - en forenklet tornado

Vi ser på en inkompressibel, friksjonsfri strømming gitt i sylinderkoordinater som

$$u_\theta = \begin{cases} \Gamma r & r < a \\ \frac{\Gamma a^2}{r} & r > a \end{cases}$$
$$u_r = 0$$
$$u_z = 0$$

Fordi vi kan stryke relativt mange ledd fra Navier Stokes, setter vi den opp på vektor-form, og ikke i sin forferdelige sylinderform:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}_e$$

Vi ser på friksjonsfri strøm, som stryker viskositetsleddet. Vi har også stasjonær strømming, som reduserer ligningen til

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g}$$

der vi har satt inn den eneste eksterne kraften, gravitasjon.

Vi kan nå bruke definisjonen av divergens i sylinderkoordinater (vi bare bytter om rekkefølgen på komponentene), og får:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z} = \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

ettersom $u_r = u_z = 0$.

Vi bruker dette videre på \mathbf{u} , og får at

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{u} = \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_{\theta i_\theta}$$

Lengre kom jeg desverre ikke.

2.3 Viskøs strømming

2.3.1

Vi har en stasjonær strøm, som betyr at det ikke fåregår noe akselerasjon i systemet vårt, og summen av alle krefter på strømmen må ifølge Newtons første lov være 0. Kreftene som virker nedover i kanalen er tyngdekraften, mg , og kreftene som virker oppover er friksjonskrefter med kanalveggene.

Vi antar at kanalen har en dybde L_y . I et utsnitt av kanalen med høyde L_z vil det være en masse $\rho_1 \cdot h_1 \cdot L_z \cdot L_y$ fra fluid 1, og en masse $\rho_2 \cdot h_2 \cdot L_z \cdot L_y$ fra fluid 2. Tyngdens akselerasjon på disse to massene må balanseren av kraften på kanalveggen. Vi får da at kraften på veggene må være

$$F = mg = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) L_z L_y g = (\rho_1 h_1 + \rho_2 (H - h_1)) L_z L_y g$$

Kraft per areal blir da

$$\frac{F}{A} = \frac{mg}{L_z L_y} = (\rho_1 (H - h_1) + \rho_2 h_2) g$$

2.3.2

Vi har altså to fluider, med tetthet ρ_1 og ρ_2 , og viskositet ν . Vi modellerer hastighetsprofilen i de to fluidene som $\mathbf{u}_1 = u_1(x)\mathbf{k}$ og $\mathbf{u}_2 = u_2(x)\mathbf{k}$. Begge er kun funksjoner av x , og har bare z -komponenter. Vi har no-slip langs både veggene og mellom de to fluidene, som gir grensebetingelsene

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 0 \\ u_2(H) &= 0 \\ u_1(h_1) &= u_2(h_1) \\ \frac{\partial u_1(h_1)}{\partial x} &= \frac{\partial u_2(h_1)}{\partial x} \end{aligned}$$

Den siste er betingelsen om at spenningen er kontinuerlig i grensen mellom fluidene. Vi har også konstant trykk, $\nabla P = 0$, og stasjonær strøm $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$.

Vi setter opp Navier Stokes ligning

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}$$

Vi har stasjonær strøm, som stryker det første leddet. Det konvekktive leddet blir også 0, ettersom ingen av hastighetskomponentene er funksjoner av sin egen dimensjon (ingen akselerasjon i bevegelsesretningen). Vi har heller ingen trykkgradient. De to gjenværende leddene har begge bare z -komponent, så de to andre komponentene av vektor-ligningen faller. Vi sitter igjen med ligningen i z -retning:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\frac{g}{\nu} \mathbf{k} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2}{dx^2} u(x) = -\frac{g}{\nu}$$

Vi husker at vi har to hastighetsprofiler å forholde oss til $u_1(x)$ og $u_2(x)$. Begge følger betingelsene vi har satt opp. Vi integrerer opp to ganger med hensyn på x , som gir oss de to 2-ordens polynomene

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{\rho_1 g}{\nu} x^2 + Ax + B \\ u_2(x) &= \frac{\rho_2 g}{\nu} x^2 + Cx + D \end{aligned}$$

Ettersom vi har 4 grensebetingelser, og 4 ukjente, er dette løsbart. Vi har at

$$u_1(0) = B = 0$$

Videre har vi at

$$\begin{aligned} u_2(H) &= \frac{\rho_2 g}{\nu} H^2 + CH + D = 0 \\ D &= -\left(\frac{\rho_2 g H^2}{\nu} + CH\right) \end{aligned}$$

og at

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(h_1)}{\partial x} &= \frac{\partial u_2(h_1)}{\partial x} \\ 2\frac{\rho_1 g}{\nu} x + A &= 2\frac{\rho_2 g}{\nu} x + C \\ A &= C - 2\frac{g}{\nu} x(\rho_2 - \rho_1) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}u_1(h_1) &= u_2(h_2) \\ \frac{\rho_1 g}{\nu} h_1^2 + A h_1 &= \frac{\rho_2 g}{\nu} h_1^2 + C h_1 - \left(\frac{\rho_2 g H^2}{\nu} + C H \right) \\ \frac{\rho_1 g}{\nu} h_1^2 + C - 2 \frac{g}{\nu} x (\rho_2 - \rho_1) h_1 &= \frac{\rho_2 g}{\nu} h_1^2 + C h_1 - \left(\frac{\rho_2 g H^2}{\nu} + C H \right)\end{aligned}$$

Dette var så langt jeg kom. Det gjenstår bare å løse disse litt tunge ligningene for C og A, som er trivielt, men tidkrevende.