п. 1. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

1.1. Определение поля $\mathbb{C} = R^2$:

[1] $\mathbb{C}_z \overset{def}{=} \{\cancel{z=}(x, y) : x, y \in R\}$: $x = \operatorname{Re} z$, y

$\theta = (0, 0)$, $\mathbb{1} = (1, 0)$, $i = (0, 1)$; $z = z' \iff x =$

(1) $\mathbb{C}$ – аддитивная группа :

п. 1. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$

1.1. Определение поля $\mathbb{C} = R^2$

1.2. Алг. форма к.ч. в $\mathbb{C}$

1.3. Тригон. форма к.ч. в $\mathbb{C}$

1.4. Расширенная к.пл. $\overline{\mathbb{C}}$. Сфера Римана

1.5. Топология в $\mathbb{C}$ и в $\overline{\mathbb{C}}$.

п. 1. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

1.1. Определение поля $\mathbb{C} = R^2$;

[1] $\mathbb{C}_z \overset{def}{=} \{\cancel{z=}(x,y) : x, y \in R\}$: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$;

$\theta = (0,0)$, $\mathbb{1} = (1,0)$, $i = (0,1)$; $z = z' \iff x = x' \,\&\, y = y'$;

(1) $\mathbb{C}$ — аддитивная группа;

$z + z' \overset{def}{=} (x+x', y+y')$: $z+z' = z'+z$, $z+(z'+z'') = (z+z')+z''$;

$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists(!)\ -z = (-x,-y)$: $z + (-z) = \theta$;

(2) $\mathbb{C} \setminus \{\theta\}$ — мультипликативная группа;

$z \cdot z' \overset{def}{=} (x\cdot x' - y \cdot y', x y' + x' \cdot y)$: $z\cdot z' = z'\cdot z$, $z\cdot(z'\cdot z'') = (z\cdot z')\cdot z''$;

$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{\theta\}\ \exists(!)\ z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$: $z \cdot z^{-1} = \mathbb{1}$;

(3) Дистрибутивность в $\mathbb{C}$ операций сл. и умн.;

$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$: $z\cdot(z'+z'') = z\cdot z' + z \cdot z''$;

(4) $(\mathbb{C}; +, \cdot; \theta, \mathbb{1})$ — поле без делителей нуля;

$(\mathbb{C}; +, \theta, \mathbb{1})$ — аддит. гр.; $(\mathbb{C}; \cdot, \theta, \mathbb{1})$ — мульт. гр.;

закон дистр. в $\mathbb{C}$; нет делителей нуля в $\mathbb{C}$:

$\forall z \cdot z' \in \mathbb{C}$: $(z\cdot z' = \theta \Rightarrow z = \theta \vee z' = \theta)$;

(5) $\boxed{i^2 = (-1,0)}$: $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0-1, 0\cdot1+1\cdot0) = (-1,0)$;

[2] Поле действительных чисел R является подполем поля к.ч. $\mathbb{C}$:

(1) $R = (R) = (R,0) \hookrightarrow (R,R) = \mathbb{C}$: $x = (x) = (x,0)$;

$0 = (0) = (0,0) = \theta$, $1 = (1) = (1,0) = \mathbb{1}$;

$\boxed{i^2 = -1}$: $i^2 = (-1,0) = (-1) = -1$;

(2) $(x)+(x') = (x+x')$; $(x)\cdot(x') = (x\cdot x')$;

$(-x) = -(x)$, $\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(1)}{(x)}$;

1.2. Алгебраическая форма к.ч. в $\mathbb{C}$;

[1] $\forall z \in \mathbb{C}: \boxed{z = x + i\cdot y}$; $\boxed{i^2 = -1}$;

(1) $\boxed{z + z' = (x+x') + i(y+y')}$, $\boxed{z\cdot z' = (x\cdot x' - y\cdot y') + i(x\cdot y' + x'\cdot y)}$;

(2) $z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = (x) + i(y) = x + iy$;

(3) $z\cdot z' = (x+iy)(x'+iy') = x\cdot x' + x\cdot iy' + iy\cdot x' + iy\cdot iy' =$
$= (x\cdot x' + y\cdot y'\cdot i^2) + i(x\cdot y' + x'\cdot y) = (x\cdot x' - y\cdot y') + i(x\cdot y' + x'\cdot y)$;

[2] Операция сопряжения над к.ч. в $\mathbb{C}$: $\boxed{\bar z \overset{def}{=} x - iy}$;

(1) $\bar{\bar z} = z$; $z + \bar z = 2x$, $z - \bar z = 2iy$; $\boxed{z\cdot\bar z = x^2 + y^2 \in R}$;

(2) $\overline{z+z'} = \bar z + \bar z'$, $\overline{z\cdot z'} = \bar z\cdot\bar z'$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar z}{\bar z'}$; V

[3] Модуль к.ч. в $\mathbb{C}$: $\boxed{|z| \overset{def}{=} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\cdot\bar z} \in R}$;

(1) $\boxed{|x|, |y| \le |z| \le |x| + |y|}$; $|z|^2 = z\cdot\bar z$, $|z| = |\bar z| = |-z|$;

(2) $\frac{1}{z} = \frac{\bar z}{z\cdot\bar z} = \frac{\bar z}{|z|^2}$; $|z\cdot z'| = |z|\cdot|z'|$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$; N

[4] Скалярное произведение к.ч. в $\mathbb{C}$

(1) $\langle z, z'\rangle \overset{def}{=} x\cdot x' + y\cdot y'$; $\|z\| = \sqrt{\langle z, z\rangle} = |z|$;

(2) Неравенство (Δ): $\boxed{|z + z'| \le |z| + |z'|}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{\big||z| - |z'|\big| \le |z - z'|}$;

(3) Свойства скалярного произв. к.ч.:

$\langle z, z'\rangle = \frac{1}{2}(z\cdot\bar z' + \bar z\cdot z') = \langle \bar z, \bar z'\rangle$;

$z\cdot z' = \langle z, \bar z'\rangle + i\cdot\langle z, i\cdot\bar z'\rangle$;

$\langle z, iz'\rangle = -\langle iz, z'\rangle$; $\langle z, z'\rangle = \langle iz, iz'\rangle$;

1.3. Тригонометрическая форма к.ч. в $\mathbb{C}$

[1] $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\theta\} \ \exists!\ \arg z \in (-\pi, \pi]$:

(1) $\boxed{z = |z| \cdot \{\cos(\arg z) + i \cdot \sin(\arg z)\}}$

(2) $z = x + iy$: $\left|\frac{x}{|z|}\right|, \left|\frac{y}{|z|}\right| \le 1$, $\left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|z|}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

$\exists!\ \alpha \in (-\pi, \pi]$: $\cos\alpha = \frac{x}{|z|}$ & $\sin\alpha = \frac{y}{|z|}$; $\alpha = \arg z$;

(3) Критерий рав. к.ч.:

$\boxed{z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'| \ \& \ \arg z = \arg z'}$;

(4) $z = z' \Leftrightarrow x = x' \ \& \ y = y' \Leftrightarrow |z|^2 = x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = |z'|^2$ &

& $\cos(\arg z) = \frac{x}{|z|} = \frac{x'}{|z'|} = \cos(\arg z')$ &

& $\sin(\arg z) = \frac{y}{|z|} = \frac{y'}{|z'|} = \sin(\arg z') \Leftrightarrow |z| = |z'| \ \& \ \arg z = \arg z'$;

[2] Формула Муавра для произведения к.ч. в $\mathbb{C}$:

(1) $\boxed{z \cdot z' = |z| \cdot |z'| \cdot \{\cos(\arg z + \arg z') + i \cdot \sin(\arg z + \arg z')\}}$; V

(2) $\boxed{z^n = |z|^n \cdot \{\cos(n \cdot \arg z) + i \cdot \sin(n \cdot \arg z)\}}$; $n = \overline{0, +\infty}$;

(3) $\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\{\cos(\arg z) - i \cdot \sin(\arg z)\}}$; $\boxed{\arg(\bar z) = -\arg z}$;

$\frac{1}{z} = \frac{\bar z}{z \cdot \bar z} = \frac{\bar z}{|z|^2}$

(4) $\arg(+1) = 0$, $\arg(-1) = \pi$;

$\arg(\pm i) = \pm\frac{\pi}{2}$; $\arg(\bar z) = -\arg z$; $\arg(-z) = \arg z \pm \pi$;

[3] Корень натуральной степени к.ч. в $\mathbb{C}$:

(1) $w = u + iv$: $\boxed{w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|} \ \& \ \arg w = \frac{\arg z + 2\pi k}{n}; \ k = \overline{0, n-1}}$

(2) $w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z \Leftrightarrow |w|^n = |w^n| = |z|$ & 1

& $n \cdot \arg w = \arg w^n + 2\pi k = \arg z + 2\pi k$; $k = \overline{0, n-1}$;

1.4. Расшир. комп. плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ и сфера Римана

[1] $\mathbb{C} = R^2$; $\boxed{\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}} = R^2 \cup \{\infty\} \hookrightarrow \overline{R^2} \times R^1$;

(1) $S_{\frac{1}{2}}(0,0,\frac{1}{2}) \subset R^3_{(u,v,w)}$: $N = (0,0,1) \in S_{\frac{1}{2}}(0,0,\frac{1}{2})$

(2) $\mathbb{C}_z = R^2_{(u,v)} \subset R^3_{(u,v,w)}$;

(3) $z = x + iy = (x,y) \to \tilde{z} = (x,y,0) \to z' = (u,v,w) \in S_{\frac{1}{2}}(0,0,\frac{1}{2})$;

$u^2 + v^2 + (w - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \boxed{u^2 + v^2 = w(1-w)}$

$Nz' \parallel N\tilde{z}$: $\frac{u-0}{x-0} = \frac{v-0}{y-0} = \frac{w-1}{0-1} \Rightarrow \boxed{x = \frac{u}{1-w},\ y = \frac{v}{1-w}}$

$\Rightarrow u = x \cdot (1-w),\ v = y(1-w)$;

$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{u^2+v^2}{(1-w)^2} = \frac{w(1-w)}{(1-w)^2} = \frac{w}{1-w} \Rightarrow \boxed{w = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}}$

$\Rightarrow 1 - w = \frac{1}{1+|z|^2}$; $u = \frac{x}{1+|z|^2}$, $v = \frac{y}{1+|z|^2}$, $w = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$;

[2]

(1) $\left\{ \begin{array}{l} \forall z \in \mathbb{C}_z\ \exists(!)\ z' = (u,v,w) \in S_{\frac{1}{2}}(0,0,\frac{1}{2})\ \& \\ Nz' \parallel N\tilde{z} : u = \frac{x}{1+|z|^2},\ v = \frac{y}{1+|z|^2},\ w = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \end{array} \right\} \&$

(2) $\left\{ \begin{array}{l} \forall z' = (u,v,w) \in S_{\frac{1}{2}}(0,0,\frac{1}{2}) \setminus \{N\} \\ \exists(!)\ z = x+iy \in \mathbb{C}_z : \tilde{z} = (x,y,0) ; Nz' \parallel N\tilde{z} ; \\ \quad x = \frac{u}{1-w},\ y = \frac{v}{1-w} \end{array} \right\}$

(3) $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longleftrightarrow S_{\frac{1}{2}}(0,0,\frac{1}{2})$; $\{\infty\} \Leftrightarrow \{N\}$

[3] $B_\delta(z_0) \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ – окр. т. $z_0 \in \mathbb{C}$

$B_\delta(\infty) \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/\delta\} \cup \{\infty\}$ – окр. т. $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$

1.5. Топология в $\mathbb{C}$ и в $\overline{\mathbb{C}}$:

[1] Топология в $\mathbb{C} \cong R^2$ (!):

(1) Окрестности т. в $\mathbb{C}$:

$\forall z_0 \in \mathbb{C} \quad B_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ – открытый круг;

$O(z_0)$ – окр. т. $z_0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists B_\delta(z_0) \subseteq O(z_0)$;

(2) Открытые множества в $\mathbb{C}$:

$G \subseteq \mathbb{C} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall z_0 \in G \; \exists B_\delta(z_0) \subseteq G$; $\tau(\mathbb{C}) = \{G \subseteq \mathbb{C}\}$;

$\varnothing, \mathbb{C} \in \tau(\mathbb{C})$; $\bigcup_\alpha G_\alpha = G$, $\bigcap_1^n G_k = G$;

(3) Замкнутые множества в $\mathbb{C}$:

$F \subseteq \mathbb{C} \overset{def}{\Longleftrightarrow} F^c = \mathbb{C} \setminus F = G \subset \mathbb{C} \Longleftrightarrow \cancel{\forall}$

$\Longleftrightarrow \forall z_0 \notin F \; \exists B_\delta(z_0) \cap F = \varnothing$: $\beta(\mathbb{C}) = \{F \subseteq \mathbb{C}\}$;

$\varnothing, \mathbb{C} \in \beta(\mathbb{C})$; $\bigcup_1^n F_k = F$, $\bigcap_\alpha F_\alpha = F$;

(4) Компактные множества в $\mathbb{C}$:

$K \subseteq \mathbb{C} \overset{def}{\Longleftrightarrow} K = F \in \beta(\mathbb{C})$ & $K \subseteq B_R(\theta)$

[2] Топология в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

(1) $\forall z_0 \in \mathbb{C} : O(z_0) \subset \overline{\mathbb{C}} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists B_\delta(z_0) \subseteq O(z_0)$;

$O(\infty) \subset \overline{\mathbb{C}}$ – окр. т. $\infty \in \overline{\mathbb{C}} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists B_\delta(\theta) : B^c_\delta(\theta) \subseteq O(\infty)$

(2) Открытые множества в $\overline{\mathbb{C}}$:

$G \subseteq \overline{\mathbb{C}} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall z_0 \in G \; \exists O(z_0) \subset G \Longleftrightarrow$

$\forall z_0 \in G \setminus \{\infty\} \; \exists B_\delta(z_0) \subset G$ &

& $(\infty \in G \Rightarrow \exists B^c_\delta(\theta) \subseteq G)$: $\tau(\overline{G}) = \{G \subseteq \overline{\mathbb{C}}\}$;

$\varnothing, \overline{\mathbb{C}} \in \tau(\overline{\mathbb{C}})$; $\bigcup_\alpha G_\alpha = G$, $\bigcap_1^n G_k = G$;

п. 2. Последовательности и ряды к.ч. в $\mathbb{C}$

2.1. Предел последовательности к.ч. в $\mathbb{C}$

[1] Предел и фундаментальность в $\mathbb{C}$;

п. 2. Последовательности и ряды к.ч.

2.1. Предел посл. к.ч. в $\mathbb{C}$. ~~Ф. Эйлер~~а

2.2. ~~Ряды к.ч. в $\mathbb{C}$~~ Комплексная формула II замечат. предела

2.3. Комплексная экспонента

2.4. Сх. и абс. сх. ряда к.ч.

2.5 Компл. ряд. экспоненты

2.6. Компл. ст. ряд. Круг. сх.

(3) $\forall \alpha \neq 2\pi k \; \nexists \lim\limits_{+\infty} \cos(n\alpha) \; \& \; \nexists \lim\limits_{+\infty} \sin(n\alpha)$

(4) $z^n = \cos(\alpha n) + i\sin(\alpha n)$; (от пр.); $\exists A = \lim\limits_{+\infty} \cos(\alpha n) \Longrightarrow \exists B = \lim\limits_{+\infty}$

п. 2. Последовательности и ряды к.ч. в $\mathbb{C}$

2.1. Предел последовательности к.ч. в $\mathbb{C}$

[1] Предел и фундаментальность в $\mathbb{C}$:

(1) $(z_n \to z_0 : \mathbb{C}) \overset{def}{\iff} z_0 = \lim\limits_{+\infty} z_n \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0 \ |z - z_0| < \varepsilon$;

(2) $(z_n \to z_0 : \mathbb{C}) \iff (x_n \to x_0 : R) \& (y_n \to y_0 : R)$: $|x|, |y| \le |z| \le |x| + |y|$;

(3) $(z_n \to : \mathbb{C}) \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon \exists n_0 \forall n, m \ge n_0 : |z_n - z_m| < \varepsilon \iff$

$(x_n \to : R) \& (y_n \to : R) : |x|, |y| \le |z| \le |x| + |y|$;

(4) Критерий Коши сходимости послед в $\mathbb{C}$:

$\mathbb{C}$: $(z_n \to z_0 : \mathbb{C}) \iff (z_n \to : \mathbb{C})$: (5);

(5) Критерий Коши сходимости послед в R:

(!) R: $(\alpha_n \to \alpha_0 : R) \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon \exists n_0 \forall n \ge n_0 : |\alpha_n - \alpha_0| < \varepsilon \ \boxed{\iff}$

$\boxed{\iff} \forall \varepsilon \exists n_0 \forall n, m \ge n_0 \ |\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon \overset{def}{\iff} (\alpha_n \to : R)$;

[2] Бесконечный предел последовательности к.ч.

(1) $(z_n \to \infty : \mathbb{C}) \overset{def}{\iff} \infty = \lim\limits_{+\infty} z_n \iff \forall \varepsilon \exists n_0 \forall n \ge n_0 : |z_n| > \frac{1}{\varepsilon}$

(2) $\lim\limits_{+\infty} z_n = \infty, \theta \iff \lim\limits_{+\infty} |z_n| = +\infty, 0$;

$\lim\limits_{+\infty} z_n = \infty, \theta \iff \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{z_n} = \theta, \infty$;

(3) Предел послед. эл. геометрической прогр в $\mathbb{C}$:

$|z| < 1 : \lim\limits_{+\infty} z^n = \theta$; $|z| > 1 : \lim\limits_{+\infty} z^n = \infty$;

$R : \lim\limits_{+\infty} \alpha^n = 0 : 0 < \alpha < 1$; $\lim\limits_{+\infty} \alpha^n = +\infty : 1 < \alpha$;

[3] Последовательность эл. геометр. прогр. в $\mathbb{C}$:

(1) $\exists \lim\limits_{+\infty} z^n = \theta : |z| < 1$; $\exists \lim\limits_{+\infty} z^n = \infty : |z| > 1$; $\lim\limits_{+\infty} 1^n = 1$;

(2) $\boxed{\nexists \lim\limits_{+\infty} z^n : |z| = 1}$: $\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2}|z - 1| \ \forall n : |z^{n+1} - z^n| = |z|^n \cdot |z - 1| = 2\varepsilon_0 > \varepsilon_0$

(3) $\forall \alpha \ne 2\pi k \ \nexists \lim\limits_{+\infty} \cos(n\alpha) \ \& \ \nexists \lim\limits_{+\infty} \sin(n\alpha)$

(4) $z^n = \cos(\alpha n) + i \sin(\alpha n)$: (от $\vee$) : $\exists A = \lim\limits_{+\infty} \cos(\alpha n) \implies \exists B = \lim\limits_{+\infty} \sin(\alpha n)$

$\implies \exists \lim\limits_{+\infty} z^n = A + iB : |z| = 1 \ \& \ \nexists \lim\limits_{+\infty} z^n$: $\implies \cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha \cdot \cos\alpha - \sin n\alpha \cdot \sin\alpha$

$\implies A \cdot \cos\alpha - B \sin\alpha = A$

2.2. Комплексная форма II-замечательного предела

[1] $\mathbb{C}: \boxed{\forall z_0\in\mathbb{C}\ \exists \lim\limits_{+\infty}\left(1+\frac{z_0}{n}\right)^n = e^{x_0}(\cos y_0 + i\cdot\sin y_0)}$

(1) $R: \forall \alpha_0\in R\ \exists \lim\limits_{+\infty}\left(1+\frac{\alpha_0}{n}\right)^n =: e^{\alpha_0}\in R$ - доказано на 1-ом курс.

(2) $R: \forall(\lim\limits_{+\infty}\alpha_n=\alpha_0)\ \exists \lim\limits_{+\infty}\left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^n = e^{\alpha_0}$

(3) Крит. сх. посл. $\boxed{K2}$ в тригонометрич. форме:

$\mathbb{C}: (z_n\to z_0\neq\theta : \mathbb{C}) \Longleftrightarrow (|z_n|\to|z_0| : R)\ \&\ (\cos\varphi_n\to\cos\varphi_0,\ \sin\varphi_n\to\sin\varphi_0 : R)$:

$(x_n\to x_0)\ \&\ (y_n\to y_0) \Longleftrightarrow (x_n^2+y_n^2\to x_0^2+y_0^2)\ \&\ \left(\frac{x_n^2}{x_n^2+y_n^2}\to\frac{x_0^2}{x_0^2+y_0^2}\right)\ \&\ \left(\frac{y_n^2}{x_n^2+y_n^2}\to\frac{y_0^2}{x_0^2+y_0^2}\right)$;

(4) $\mathbb{C}: \forall\alpha_0\in R\ \exists \lim\limits_{+\infty}\left(1+\frac{i\alpha_0}{n}\right)^n = \cos\alpha_0 + i\sin\alpha_0$;

(5) $\mathbb{C}: \forall(\lim\limits_{+\infty}\alpha_n=\alpha_0)\ \exists \lim\limits_{+\infty}\left(1+\frac{i\alpha_n}{n}\right)^n = \cos\alpha_0 + i\sin\alpha_0$;

(6) $\mathbb{C}: \forall z_0\in\mathbb{C}\ \exists \lim\limits_{+\infty}\left(1+\frac{z_0}{n}\right)^n = e^{x_0}\cdot(\cos y_0 + i\sin y_0)$:

[2] Доказательство [1]:

(2) $\frac{1+\frac{\alpha_n}{n}}{1+\frac{\alpha_0}{n}} = 1+\frac{\alpha_n-\alpha_0}{n+\alpha_0};\ 1+n\cdot\alpha\le(1+\alpha)^n : -1<\alpha\ \boxed{\text{Н-Б}} \Longrightarrow$

$1+n\cdot\frac{\alpha_n-\alpha_0}{n+\alpha_0} \le \left(1+\frac{\alpha_n-\alpha_0}{n+\alpha_0}\right)^n \le \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha_n-\alpha_0}{n+\alpha_0}\right)^n} \le \frac{1}{1-n\cdot\frac{\alpha_n-\alpha_0}{n+\alpha_0}}$:

$\lim\limits_{+\infty}\left(1+\frac{n}{n+\alpha_0}(\alpha_n-\alpha_0)\right) = 1 = \lim\limits_{+\infty}\left(1-\frac{n}{n-\alpha_0}(\alpha_n-\alpha_0)\right) \Longrightarrow \exists\lim\limits_{+\infty}\left(\frac{1+\frac{\alpha_n}{n}}{1+\frac{\alpha_0}{n}}\right)^n = 1$

(4) $\lim\limits_{+\infty}\left(1+\frac{i\alpha_0}{n}\right)^n = \cos\alpha_0 + i\sin\alpha_0$:

(*) $z_n = 1+\frac{i\alpha_0}{n} : \lim\limits_{+\infty} z_n = 1 \Rightarrow \lim\limits_{+\infty}|z_n| = 1\ \&\ \lim\limits_{+\infty}\varphi_n = 0;\ \lim\limits_{+\infty}\cos\varphi_n = \lim\limits_{+\infty}\frac{1}{|z_n|} = 1\ \&$

$\&\ \lim\limits_{+\infty}\sin\varphi_n = \lim\frac{\alpha_0}{n\cdot|z_n|} = 0$; (**) $\lim\limits_{+\infty}|z_n^n|^2 = \lim\limits_{+\infty}\left(1+\frac{\alpha_0^2}{n^2}\right)^n =$

$= \lim\limits_{+\infty}\left(1+\frac{\frac{\alpha_0^2}{n}}{n}\right)^n = e^0 = 1;\ \lim\limits_{+\infty}\arg(z_n^n) = \lim\limits_{+\infty} n\cdot\varphi_n = \lim\limits_{+\infty}\frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n}\cdot(n\cdot\sin\varphi_n) =$

$= 1\cdot\lim\limits_{+\infty}\frac{n\cdot\frac{\alpha_0}{n}}{|z_n|} = \alpha_0 \Longrightarrow \lim\limits_{+\infty}|z_n^n| = 1\ \&\ \lim\limits_{+\infty}\cos(\arg z_n^n) = \cos\alpha_0\ \&$

$\&\ \lim\limits_{+\infty}\sin(\arg z_n^n) = \sin\alpha_0 \Longrightarrow \lim\limits_{+\infty} z_n^n = \cos\alpha_0 + i\sin\alpha_0$;

(5) = (4) $\lim\limits_{+\infty}\left(1+\frac{i\alpha_n}{n}\right)^n = \cos\alpha_0 + i\cdot\sin\alpha_0 : \alpha_0 = \lim\limits_{+\infty}\alpha_n$

(6) $\left(1+\frac{z_0}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x_0}{n}\right)+i\frac{y_0}{n}\right]^n = \left(1+\frac{x_0}{n}\right)^n\left[1+\frac{i}{n}\left(\frac{n\cdot y_0}{n+x_0}\right)\right]^n \Longrightarrow$

$\exists\lim\limits_{+\infty}\left(1+\frac{z_0}{n}\right)^n = \lim\limits_{+\infty}\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^n\lim\limits_{+\infty}\left[1+\frac{i}{n}\left(\frac{n y_0}{n+x_0}\right)\right]^n = e^{x_0}\cdot(\cos y_0 + i\cdot\sin y_0)$

2.3. Комплексная экспонента к.ч. в $\mathbb{C}$:

[1] Определение: $\boxed{e^z := e^x(\cos y + i\sin y)}$: $z\in\mathbb{C}$: $\boxed{e^z = e^{z+2\pi i}}$

(1) $\mathbb{R}: e^x := \lim\limits_{+\infty}(1+\frac{x}{n})^n : x\in\mathbb{R}$;

(2) $\mathbb{C}: \forall z\in\mathbb{C}\ \exists \lim\limits_{+\infty}(1+\frac{z}{n})^n = e^x\cdot(\cos y + i\sin y)$;

(3) Формула Эйлера: $\boxed{e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha}$: $z = i\alpha$

(4) Показат. форма к.ч. в $\mathbb{C}$:

$\boxed{z = |z|\cdot e^{i\cdot\arg z}}$: $z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))$

[2] Определение тригон. функций от к.ч.

(1) $\boxed{\cos z = \frac12(e^{iz}+e^{-iz})}$, $\boxed{\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})}$;

(2) $\begin{cases} e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \\ e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha \end{cases} \overset{(\pm)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2\cos\alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} \\ 2i\cdot\sin\alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \end{cases}$

(3) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; $|\cos z| \leq 1$ (?) : $\cos(i\ln 2) = \frac54 > 1$

(4) Гиперболич. функции к.ч.:

$\operatorname{ch} z = \frac12(e^z+e^{-z})$, $\operatorname{sh} z = \frac12(e^z - e^{-z})$;

$\operatorname{ch}(iz) = \cos z$, $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$; $i\operatorname{sh}(iz) = \sin z$, $\sin(iz) = i\cdot\operatorname{sh} z$

[3] Определение натур. логарифма к.ч.

(1) $\boxed{\ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)}$: $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$: $k\in\mathbb{Z}$

(2) $w = u+iv$; $w = \ln z \overset{def}{\Leftrightarrow} z = e^w \Leftrightarrow e^{\ln z} = z = |z|e^{i(\arg z)} = e^{\ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)}$

$\Leftrightarrow \ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$: $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$;

(3) $\ln(-1) = i\pi(2k+1)$: $\ln(-1) = \ln|-1| + i(\pi + 2\pi k) = \pi i(2k+1)$;

$\ln(i) = i\frac{\pi}{2}(4k+1)$: $\ln(i) = \ln|i| + i(\frac{\pi}{2}+2\pi k) = \frac{\pi i}{2}(4k+1)$;

[4] Комплексная степень к.ч.

(1) $w = u+iv$: $\boxed{w^z \overset{def}{=} e^{z\cdot\ln w}}$: $w \neq 0$

(2) $1^i = 1$: $1^i = e^{i\ln 1} = e^{i(0+i(0+2\pi k))} = e^{-2\pi k} = e^0 = 1$: $k=0$

$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$: $i^i = e^{i\ln i} = e^{i\cdot i\frac{\pi}{2}(4k+1)} = e^{-\frac{\pi}{2}(4k+1)} = e^{-\frac{\pi}{2}}$: $k=0$

$(-1)^{\sqrt2} = \cos(\pi\sqrt2) + i\sin(\pi\sqrt2)$: $(-1)^{\sqrt2} = e^{\sqrt2\ln(-1)} = e^{\sqrt2\cdot\pi i(2k+1)} = e^{i\pi\sqrt2}$: $k=0$

2.4. Сходимость и абсолютная сходимость ряда к.ч.

[1] Сходимость и сумма ряда к.ч.

(1) Определение сх. и суммы ряда к.ч.:

$$(\sum z_n - \boxed{сх} : \mathbb{C}) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \lim_{+\infty}(\sum_{k=0}^{n} z_k) = \lim_{+\infty} S_n = S : \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \lim_{+\infty}(\sum_{0}^{n} z_k)};$$

(2) Критерий сх. ряда к.ч.:

$$(\sum z_n - \boxed{сх} : \mathbb{C}) \Leftrightarrow (\sum x_n, \sum y_n - \boxed{сх} : R) : \boxed{\sum_{0}^{+\infty} z_n = \sum_{0}^{+\infty} x_n + i \sum_{0}^{+\infty} y_n};$$

(3) Критерий Коши сх. ряда к.ч.:

$$(\sum z_n - \boxed{сх} : \mathbb{C}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0, p : |\sum^{n+p} z_k| < \varepsilon \Leftrightarrow (\sum z_n - \boxed{фунд} : \mathbb{C})$$

(4) R: $(\sum \alpha_n - \boxed{сх} : R) \Leftrightarrow \forall \varepsilon\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0, p : |\sum_{n+1}^{n+p} \alpha_k| < \varepsilon \overset{def}{\Leftrightarrow} (\sum \alpha_n - \boxed{фунд} : R)$

(5) Сходимость и сумма ряда из эл. геом. прогр. в $\mathbb{C}$;

$$(\sum_{0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} : |z|<1) \,\&\, (\sum_{0}^{+\infty} z^n = \infty : 1<|z| \vee z=1) \,\&$$

$$(\sum z^n - \boxed{расх} : |z|=1 \,\&\, z \neq 1) ; \quad (\sum_{k=0}^{n} z^k)(1-z) = 1 - z^{n+1} ;$$

$$(\lim_{+\infty} z^n = 0 : |z|<1) \,\&\, (\lim_{+\infty} z^n = \infty : 1<|z|) \,\&\, (\nexists \lim_{+\infty} z^n : |z|=1 \,\&\, z \neq 1)$$

[2] Абсолютная сх. ряда к.ч.;

(1) $(\sum z_n - \boxed{аб.сх} : \mathbb{C}) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\sum |z_n| - \boxed{сх} : R) \Leftrightarrow (\sum x_n, \sum y_n - \boxed{аб.сх} : R)$;

(2) $(\sum z_n - \boxed{аб.сх} : \mathbb{C}) \Rightarrow (\sum z_n - \boxed{сх} : \mathbb{C})$

(3) Ряд эл. геом. прогр. аб.сх.: $(\sum z^n - \boxed{аб.сх} : |z|<1)$: $|z^n| = |z|^n$;

$(\sum \alpha^n - \boxed{сх} : 0<\alpha<1)$

[3] Свойства аб.сх. ряд к.ч.

(1) Любая перестановка аб.сх. ряда к.ч. явл. аб.сх.

$$(\sum z_k - \boxed{аб.сх} : \mathbb{C}) \Rightarrow \forall (\sum z_{n_k} - \boxed{аб.сх} : \mathbb{C}) ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{k=0}^{+\infty} z_{n_k} ;$$

(2) Произведение 2х аб.сх. рядов к.ч. явл. аб.сх. рядом к.ч.

$$(\sum z'_n, \sum z''_n - \boxed{аб.сх} : \mathbb{C}) \Rightarrow (\sum z_n - \boxed{аб.сх} : \mathbb{C}) : z_n = \sum_{k=0}^{n} z'_k \cdot z''_{n-k} ;$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} z'_n) \cdot (\sum_{n=0}^{+\infty} z''_n)$$

2.5. Комплексный ряд экспоненты

[1] $$\boxed{e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}}$$

(1) $\left(e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}-\boxed{\text{абс. сх}}:\mathbb{R}\right)\ \&$

(2) $\left(\cos y=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot y^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iy)^{2n}}{(2n)!}-\boxed{\text{абс. сх}}:\mathbb{R}\right)\ \&$

$\left(\sin y=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot y^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!}-\boxed{\text{абс. сх}}:\mathbb{R}\right)$

$\Rightarrow\left(\cos y+i\sin y=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iy)^n}{n!}-\boxed{\text{абс. сх}}:\mathbb{C}\right)$

(3) $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}-\boxed{\text{абс. сх}}:\mathbb{C}\right)$; $\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{n!}(x+iy)^n=$

$=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot x^k\cdot(iy)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x^k}{k!}\right)\cdot\frac{(iy)^{n-k}}{(n-k)!}=$

$=\sum_{k=0}^{n}z'_k\cdot z''_{n-k}$; $\left(\sum_{k=0}^{+\infty}z'_k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}-\boxed{\text{абс. сх}}:\mathbb{C}\right)\ \&$

$\left(\sum_k z''_k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(iy)^n}{n!}-\boxed{\text{абс. сх}}:\mathbb{C}\right)$

(4) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(iy)^n}{n!}\right)=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z$

[2] Ряд для тригон. ф.

(1) $\cos z=\sum_0^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^{2n}}{(2n)!}$, $\sin z=\sum_0^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

(2) $\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\sum_0^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{i^n\cdot z^n}{n!}(1+(-1)^n)=\sum_0^{+\infty}\frac{i^{2n}\cdot z^{2n}}{(2n)!}$

(3) $\operatorname{ch} z=\sum_0^{+\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\operatorname{sh} z=\sum_0^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

(3) $\operatorname{sh} z=\frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z})=\frac{1}{2}\sum_0^{+\infty}\frac{z^n}{n!}(1-(-1)^n)=\sum_0^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

2.6. Комплексные степенные ряды:

Изм.: (!)

[1] Определен. ст. ряда. Круг сх. Примеры

(1) $\sum\limits_0^{+\infty} c_n (z - z_0)^n : (c_n)_0^{+\infty} \subset \mathbb{C},\ z_0, z \in \mathbb{C};\ \sum\limits_0^{+\infty} c_n z^n : z_0 = \theta;$

(2) Степен. ряд степен. числ.:

$\left(\sum\limits_0^{+\infty} z^n \to \frac{1}{1-z} : |z| < 1\right) - \boxed{\text{аб. сх}} : \left(\sum |z|^n \to \frac{1}{1-|z|} : (-1, +1)\right);$

$\left(\sum z^n \not\to : |z| \geq 1\right) : |z^n| = |z|^n \not\to +\theta;$

(3) Модифицированная I теорема Абеля;

$\left(\sum\limits_0^{+\infty} c_n z^n\right) : (c_n z_0^n) \subseteq B_M(\theta) \Rightarrow \forall |z| < |z_0| \left(\sum c_n z^n - \boxed{\text{аб. сх}} : \mathbb{C}\right)$

(4) $|z| < |z_0| \Rightarrow q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1 : |c_n z^n| = |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \cdot q^n \,\&\, \left(\sum q^n - \boxed{\text{сх}} : R\right)$

$\Rightarrow \left(\sum |c_n z^n| - \boxed{\text{сх}} : R\right) \Rightarrow \left(\sum c_n z^n - \boxed{\text{аб. сх}} : \mathbb{C}\right)$

(5) Сущ. круга сх. для любого комп. ст. ряда:

$\forall \left(\sum\limits_0^{+\infty} c_n z^n\right) \exists R = \sup\{|z_0| : (c_n z_0^n) \subseteq B_M(\theta)\} : \left(\sum\limits_0^{+\infty} c_n z^n - B_R(\theta) - \boxed{\text{аб. сх.}}\right)$

$\&\, \left(\sum\limits_0^{+\infty} c_n z^n - \overset{c}{B}_R[\theta] - \boxed{\text{расх}}\right) \&\, \left(\sum c_n z^n - S_R[\theta] - \boxed{\text{необх. допол. исслед}}\right);$

(6) Формула Коши-Адамара для вычис. рад. кр. сх.

$\left(\sum\limits_0^{+\infty} c_n z^n - \boxed{\text{аб. сх.}} : B_R(\theta)\right) \,\&\, \Lambda = \lim\limits_{+\infty} \sup |c_n|^{1/n} \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{\Lambda}} : \Lambda = 0 \Rightarrow R = +\infty;\ \Lambda = +\infty \Rightarrow R = 0$

(6') $\left(\sum\limits_0^{+\infty} c_n z^n - \boxed{\text{аб. сх}} : B_R(\theta)\right) \,\&\, \lambda = \lim\limits_{+\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \Leftrightarrow \boxed{R = \frac{1}{\lambda}}$

[2] Примеры

(1) $\left(\sum\limits^{+\infty} n! \cdot z^n : B_0(\theta) = \{\theta\}\right) : \forall r \in R \setminus \{0\}\ (n! r^n) \not\subseteq (-M, +M);$

(2) $\left(\sum\limits^{+\infty} n \cdot z^n : B_1(\theta)\right) : \lambda = \lim\limits_{+\infty} \frac{n+1}{n} = 1;\ S_1(\theta) - \boxed{\text{расх}} : \lim\limits_{+\infty} n \cdot z = \infty;$

(3) $\left(\sum\limits^{+\infty} \frac{z^n}{n} : B_1(\theta)\right) : \lambda = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n+1} : \frac{n}{1} = 1;\ S_1(\theta) - \boxed{\text{сх}} - (!) - \text{пр. Дирихле};$

(4) $\left(\sum\limits_0^{+\infty} \frac{z^n}{n^2} : B_1(\theta)\right) : B_1[\theta] - \boxed{\text{сх. рав}} : \left|\frac{z^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \left(\sum \frac{1}{n^2} - \boxed{\text{сх}} : R\right);$

(5) $\left(\sum\limits_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!} : \mathbb{C} = B_\infty(\theta)\right)$

[3] Произведение Коши ст. комп. рядов:

$\left(\sum\limits_0^{+\infty} a_n z^n : B_{R'}(\theta)\right) \,\&\, \left(\sum\limits_0^{+\infty} b_n z^n : B_{R''}(\theta)\right) : c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \Rightarrow$

$\left(\sum\limits_0^{+\infty} c_n z^n : B_R(\theta)\right) : R \geq \min(R', R'') :$

$\left(\sum\limits_0^{+\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum\limits_0^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum\limits_0^{+\infty} c_n z^n : |z| < \min(R', R'')$

[1] Определение и примеры КФДП:

(1) $z(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + i \cdot y(t) : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^1_t \to$

$x(t), y(t) : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^1_t \to \mathbb{R}^1$:

(2) Отрезок как КФДП : $[z_1, z_2] \subset \mathbb{C}$:

$[z_1, z_2] = \{ z(t) = z + t(z_2 - z$ ... $\subset \mathbb{C}$

п.3. КФДП

3.1. КФДП – предел и непрерывность,

3.2. КФДП – дифф. и производная

3.3. КФДП – интегрирование

3.4. КФДП – Кривые в $\mathbb{C}$

3.5. КФДП – Области в $\mathbb{C}$. Т. Жордана.

п. 3. Комплексно-значные функции действительного переменного – КФДП – $\boxed{\text{Z-Ф-1-П}}$;

3.1. КФДП – предел и непрерывность;

[1] Определение и примеры КФДП:

(1) $z(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + i\cdot y(t) : [\alpha, \beta] \subset R^1_t \to \mathbb{C} = R^2$;
$x(t), y(t) : [\alpha, \beta] \subset R^1_t \to R^1$;

(2) Отрезок как КФДП: $[z_1, z_2] \subset \mathbb{C}$;
$[z_1, z_2] = \{ z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) : t \in [0, 1] \} \subset \mathbb{C}$

(3) Окружность как КФДП: $S_R(z_0) \subset \mathbb{C}$;
$S_R(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R \} = \cancel{\{x(t) = x(t), y(t)\} = x(t) = x}$
$= \{ z(t) = z_0 + Re^{it} : t \in [0, 2\pi] \} =$
$= \{ z(t) = (x(t), y(t)) : x(t) = x_0 + R\cos t,\ y(t) = y_0 + R\sin t : t \in [0, 2\pi] \}$

[2] КФДП – предел и непрерывность в точке;

(1) $z_0 = \lim\limits_{t \to t_0} z(t) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall t \in [\alpha, \beta]\ (0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |z(t) - z_0| < \varepsilon)$
$\Longleftrightarrow x_0 = \lim\limits_{t \to t_0} x(t)\ \&\ y_0 = \lim\limits_{t \to t_0} y(t)$

(2) $z(t) - t_0 \in [\alpha, \beta]$ – Н $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall t \in [\alpha, \beta]\ (|t - t_0| < \delta \Rightarrow |z(t) - z(t_0)| < \varepsilon)$
$\Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{t \to t_0} z(t) = z(t_0)$

[3] КФДП – непрерывность на множестве;

(1) $z(t) = x(t) + iy(t) - [\alpha, \beta]$ – Н $\overset{def}{\Longleftrightarrow} z(t) - t \in [\alpha, \beta]$ – Н

(2) КФДП: Н-КФДП как мн. точек в $\mathbb{C}$ – явл. ком
$z(t) : [\alpha, \beta] \subset R^1_t \to \mathbb{C} = R^2$ – Н $\Rightarrow L(z(t)) = \{ z(t) \in \mathbb{C} : t \in [\alpha, \beta] \} \subset \mathbb{C}$;
$L(z(t)) \subset \mathbb{C}$ – ком. мн.: $\overline{L(z)} = L(z) \subseteq B_R(\theta)$;

(3) Теоремы Коши, Кантора и Вейерштрасса;
$z(t) : [\alpha, \beta] \subset R^1_t \to \mathbb{C} = R^2$ – Н $\Longrightarrow |z(t)| - [\alpha, \beta]$ – Н:

– теорема Коши о промежуточных значениях:
$\forall c \in (|z(t')|, |z(t'')|)\ \exists t_0 \in (t', t'') : |z(t_0)| = c$;

– теорема Кантора о равномерной непрерывн.:
$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall t', t'' \in [\alpha, \beta]\ (|t' - t''| < \delta \Rightarrow ||z(t')| - |z(t'')|| < \varepsilon)$;

– Теорема Вейерштрасса:
$\exists -\infty < m = \inf\{|z(t)|\} \le |z(t)| \le \sup\{|z(t)|\} = M < +\infty$;
$\exists \underline{t}, \overline{t} \in [\alpha, \beta] : |z(\underline{t})| = m\ \&\ |z(\overline{t})| = M$;

5. Если $f(z) = 3z^2 - 4i$, тогда значение производно… $z_0 = 4 + i$ равно…

3.2. КФДП – дифференцируемость:

[1] Определение дифф-ти и производной КФДП:

(1) $z(t) - t_0 - \boxed{д} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \Delta z(t_0, \Delta t) = w_0 \cdot \Delta t + \bar{o}(\Delta t) \cdot \Delta t : w_0 \in \mathbb{C}_z$;

(2) $z'(t_0) \overset{def}{=} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta z(t_0, \Delta t)}{\Delta t} \in \mathbb{C}_z$;

(3) Критерий дифференцируемости:

$z(t) - t_0 - \boxed{д} \Longleftrightarrow \exists z'(t_0) : \Delta z(t_0, \Delta t) = z'(t_0) \cdot \Delta t + \bar{o}(\Delta t) \cdot \Delta t$;

(4) Координатный критерий дифференцируемости:

$z(t) - t_0 - \boxed{д} \Longleftrightarrow x(t), y(t) - t_0 - \boxed{д} : \boxed{z'(t) = x'(t) + i \cdot y'(t)}$ (!!);

(5) Непрерывность дифф. КФДП:

$z(t) - t_0 - \boxed{д} \Longrightarrow z(t) - t_0 - (н)$;

[2] Правила дифференцирования КФДП:

(1) $[z_1(t) + z_2(t)]' = z_1'(t) + z_2'(t)$; $[z_0 \cdot z(t)]' = z_0 \cdot z'(t)$;

(2) $[z_1(t) \cdot z_2(t)]' = z_1'(t) \cdot z_2(t) + z_1(t) \cdot z_2'(t)$;

(3) $\left[\dfrac{1}{z(t)}\right]' = -\dfrac{1}{z^2(t)} \cdot z'(t)$; $\left[\dfrac{z_1(t)}{z_2(t)}\right]' = \dfrac{z_1'(t) \cdot z_2(t) - z_1(t) \cdot z_2'(t)}{z_2^2(t)}$;

□ $\Delta\left[\dfrac{1}{z}\right](t_0, \Delta t) = -\dfrac{\Delta z(t_0, \Delta t)}{z(t_0) \cdot z(t_0 + \Delta t)}$, $\Delta[z_1 \cdot z_2](t_0, \Delta t) = \Delta z_1(t_0, \Delta t) \cdot z_2(t_0 + \Delta t) +$
$+ z_1(t_0) \cdot \Delta z_2(t_0 + \Delta t)$ ■

(4) $z(t) - t_0 - \boxed{д} : t = \varphi(\xi) - \xi_0 - \boxed{д} : t_0 = \varphi(\xi_0) \Longrightarrow$
$z(\varphi(\xi)) - \xi_0 - \boxed{д} : [z(\varphi(\xi_0))]' = z'(t_0) \cdot \varphi'(\xi_0)$

(5) Доказать формулы: $[\overline{z(t)}]' = \overline{z'(t)}$;

$[|z(t)|]' = \dfrac{\operatorname{Re}(z(t) \cdot \overline{z'(t)})}{|z(t)|} = |z(t)| \cdot \operatorname{Re}\left[\dfrac{z'(t)}{z(t)}\right]$;

$[\arg z(t)]' = \operatorname{Im}\left[\dfrac{z'(t)}{z(t)}\right]$, $\left[\dfrac{z(t)}{|z(t)|}\right]' = i \cdot \dfrac{z(t)}{|z(t)|} \cdot \operatorname{Im}\left[\dfrac{z'(t)}{z(t)}\right]$;

(6) $[|z(t)|]' = [\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}]' = \dfrac{1}{\cancel{2}|z|}[\cancel{2}x \cdot x' + \cancel{2}y \cdot y'] = \dfrac{\langle z, z' \rangle}{|z|} =$
$= \dfrac{1}{|z|} \operatorname{Re}(\bar{z} \cdot z') = \dfrac{1}{|z|} \cdot \dfrac{1}{2}(\bar{z} \cdot z' + z \cdot \bar{z}') = |z| \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\bar{z} \cdot z' + z \cdot \bar{z}'}{z \cdot \bar{z}} =$
$= |z| \cdot \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z'}{z} + \overline{\left[\dfrac{z'}{z}\right]}\right) = |z| \cdot \operatorname{Re} \dfrac{z'(t)}{z(t)}$;

3.3. КФДП – интегрирование:

[1] Определение и свойства инт. КФДП;

(1) $z(t)=(x(t),y(t))=x(t)+iy(t): [\alpha,\beta]\subset R^1_t \to \mathbb{C}=R^2$ – (И):

$$\int_\alpha^\beta z(t)dt \overset{def}{=} \left(\int_\alpha^\beta x(t)dt, \int_\alpha^\beta y(t)dt\right) = \int_\alpha^\beta x(t)dt + i\int_\alpha^\beta y(t)dt;$$

$$\boxed{\int_\alpha^\beta z(t)dt = \int_\alpha^\beta x(t)dt + i\int_\alpha^\beta y(t)dt};$$

(2) Линейность:

$$\int_\alpha^\beta (z_1(t)+z_2(t))dt = \int_\alpha^\beta z_1(t)dt + \int_\alpha^\beta z_2(t)dt; \quad \int_\alpha^\beta z_0\cdot z(t)dt = z_0\cdot\int_\alpha^\beta z(t)dt;$$

(3) Замена переменной:

$t=\varphi(\xi): [a,b]_\xi \subset R^1_\xi \to [m,M]\subset R^1_t$ – $\boxed{Н\text{-}Д}$;

$z(t): [m,M]_t\subset R^1_t \to \mathbb{C}$ – $\boxed{Н}$ $\Rightarrow z(\varphi(\xi))\cdot\varphi'(\xi)$ – $[a,b]$ – (И):

$$\boxed{\int_a^b z(\varphi(\xi))\cdot\varphi'(\xi)d\xi = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} z(t)dt};$$

(4) Модуль интеграла от КФДП меньше инт. от мод. КФДП

$$\left|\int_\alpha^\beta z(t)dt\right| \le \int_\alpha^\beta |z(t)|dt \le \sup_{[\alpha,\beta]}\{|z(t)|\}\cdot|\beta-\alpha|;$$

□ $|\int z|^2 = |\int x + i\int y|^2 = (\int x)^2+(\int y)^2 = (\int x)\cdot\int_\alpha^\beta x(t)dt + (\int y)\cdot \int_\alpha^\beta y(t)dt =$

$= \int_\alpha^\beta [(\int x)\cdot x(t) + (\int y)\cdot y(t)]dt = \int_\alpha^\beta \langle(\int x,\int y),(x(t),y(t))\rangle dt \le$

$\le \int_\alpha^\beta \|(\int x,\int y)\|\cdot\|(x(t),y(t))\| dt = |\int z|\cdot\int_\alpha^\beta|z(t)|dt$ ■

[2] Интегральное неравенство К-Б-Шварца;

(1) $$\left|\int_\alpha^\beta z_1(t)\cdot z_2(t)dt\right|^2 \le \int_\alpha^\beta |z_1(t)|^2dt\cdot\int_\alpha^\beta|z_2(t)|^2dt$$

(2) $|\int z_1\cdot z_2|^2 \le (\int |z_1|\cdot|z_2|)^2 \boxed{\le} \int|z_1|^2\cdot\int|z_2|^2$;

$\boxed{3}$: R^2: $0\le \iint_{[a,b]^2} [f(x)\cdot g(y)-f(y)\cdot g(x)]^2 dxdy =$

$= \iint_{[a,b]^2}[f^2(x)\cdot g^2(y) - 2f(x)\cdot g(x)\cdot f(y)g(y) + f^2(y)\cdot g^2(x)]dxdy =$

$= \int f^2\cdot\int g^2 - 2(\int f\cdot g)^2 + \int f^2\cdot\int g^2 = 2[\int f^2\cdot\int g^2 - (\int f\cdot g)^2] \Rightarrow (\int f\cdot g)^2 \le \int f^2\int g^2$;

3.4. КФДП – кривые в $\mathbb{C}$:

[1] Кривые в $\mathbb{C}$ $\exists$ НКФДП:

(1) $z(t)=x(t)+iy(t)$ – $[\alpha,\beta]$ – н $\Longmapsto$ $L(z(t))=\{z(t): t\in[\alpha,\beta]\}\subset\mathbb{C}$ – $\boxed{к}$ (!!)

(1) Отрезок и окружность – кривые в $\mathbb{C}$:

$[z_1,z_2]=\{z(t)=z_1+t(z_2-z_1): t\in[0,1]\}\subset\mathbb{C}$ – к;

$S_R(z_0)=\{z(t)=z_0+R\cdot e^{it}: t\in[0,2\pi]\}\subset\mathbb{C}$ – к;

[2] Гладкая кривая в $\mathbb{C}$ ÷ $\boxed{ГК}$:

(1) $L(z(t))\subset\mathbb{C}$ – $\boxed{ГК}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, z'(t)$ – $[\alpha,\beta]$ – н: $|z'(t)|\neq 0$;

Для $\boxed{ГК}$ в каждой точке существует кас. век;

(2) $L(z(t))\subset\mathbb{C}$ – $\boxed{ГК}$ $\Rightarrow$ $\forall t_0\in[\alpha,\beta]$ $\exists\, w_0\in\mathbb{C}$ – $\boxed{KV}$ к $L(z(t))$ в т. $z_0=z(t_0)$;

$w_0\in\mathbb{C}$ – $\boxed{KV}$ – $L(z(t))$ в т. $z_0=z(t_0)$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\lim\limits_{\Delta t}\alpha(\Delta t)=0$: $\alpha(\Delta t)=\angle(w_0,\Delta z(t_0,\Delta t))$; $\boxed{w_0=z'(t_0)}$

(3) $$\cos(\alpha(\Delta t))=\frac{\langle z'(t_0),\Delta z(t_0,\Delta t)\rangle}{|z'(t_0)|\cdot|\Delta z(t_0,\Delta t)|}=\frac{\langle z'(t_0),\frac{\Delta z(t_0,\Delta t)}{\Delta t}\rangle}{|z'(t_0)|\cdot\left|\frac{\Delta z(t_0,\Delta t)}{\Delta t}\right|}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{\Delta t\to 0}\cos(\alpha(\Delta t))=\frac{\langle z'(t_0),z'(t_0)\rangle}{|z'(t_0)|\cdot|z'(t_0)|}=1=\cos 0\Rightarrow\lim_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta t)=0$$

(4) Отрезок и окружность в $\mathbb{C}$ – $\boxed{ГК}$:

$[z_1,z_2]$: $z'(t)=z_2-z_1$: $t\in[0,1]$ – $\boxed{KV}$;

$S_R(z_0)$: $z'(t)=Re^{it}\cdot i=R(-\sin t,\cos t)$: $t\in[0,2\pi]$ – $\boxed{KV}$;

[3] Спрямляемая кривая в $\mathbb{C}$ ÷ $\boxed{СК}$:

(1) $L(z(t))$ – $\boxed{СК}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\sup\limits_{\tau}\{S(L,z(t),\tau)\}=l(L)<+\infty$:

$S(L,z(t),\tau)=\sum\limits_{k=1}^{n}|\Delta z(t_{k-1},\Delta t)|$: $\tau=\{\alpha=t_0<t_1<\ldots<t_n=\beta\}$

(2) $\boxed{ГК}$ в $\mathbb{C}$ является спрямляемой кривой в $\mathbb{C}$:

$L(z(t))$ $\boxed{НДКФДП}$ $\Rightarrow$ $L(z(t))$ – $\boxed{СК}$: $\boxed{l(L)=\int_{\alpha}^{\beta}|z'(t)|\,dt}$;

3.5. КФДП — Области в $\mathbb{C}$. Т. Жордана

[1] Область в $\mathbb{C}$ — открытое и линейно-связное мн-во:

(1) $G \subset \mathbb{C}$ — $\boxed{\text{обл.}} \overset{def}{\Longleftrightarrow} G = \overset{\circ}{G}$ & G — $\boxed{\text{лин.-связ. мн.}}$ $\boxed{ЛСМ}$;

(2) $\overset{\circ}{G} = G \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall z_0 \in G\ \exists B_\delta(z_0) \subset G$ — опр. откр. мн.;

(3) $G \subseteq G$ — $\boxed{ЛСМ} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall z', z'' \in G\ \exists L[z', z''] \subset G$

(4) Примеры областей в $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, $\mathbb{C} \setminus [z', z'']$;

$B_\delta(z_0)$, $B_\delta[z_0]$; $K_{(r,R)}(z_0) = B_R(z_0) \cap B^c_r[z_0]$; $K_{(r,R)}[z_0]$;

(5) Пример в $\mathbb{C}$ мн., которое не явл. обл.: $B_1(z') \cup B_1(z'')$: $|z' - z''| > 2$

[2] Теорема Жордана:

(1) Кривая наз. $\boxed{\text{простой}}$, если у неё нет т. самопересеч.

$L(z(t))$ — $\boxed{ПК} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall t', t'' \in (\alpha, \beta): (t' \neq t'' \Rightarrow z(t') \neq z(t''))$;

(2) Кривая наз. $\boxed{\text{замкнутой}}$, если у неё совпад. нач. и кон. т.

$L(z(t))$ — $\boxed{ЗК} \overset{def}{\Longleftrightarrow} z(\alpha) = z(\beta)$;

(3) Т. Жордана: Любая $\boxed{ПЗК}$ в $\mathbb{C}$ разбивает её ~~[illegible]~~ точно на две непересек. области, для каждой из которых она является границей. Одна из двух областей является огр. мн. и называется внутр., другая из двух областей является неогр. мн. и называется внеш.

(4) $\forall L(z(t)) \subset \mathbb{C}$ — $\boxed{ПЗК}$ $\exists (!)\ G_L \subset B_R(0)$ — $\boxed{ВОБ}$ &

$\exists (!)\ \tilde{G}_L = \mathbb{C} \setminus \{G_L \cup L\}$ — $\boxed{ВнОБ}$: $\partial G_L = L = \partial \tilde{G}_L$; $G_L \cap \tilde{G}_L = \varnothing$;

(!)(5) $\forall \ell \subset G_L$ — $\boxed{ПЗК}$: $G_\ell \subset G_L$

[3] Примеры обл. в $\mathbb{C}$

(1) Круг: $B_R(z_0) = G_{S_R(z_0)}$: $S_R(z_0)$: $z(t) = z_0 + Re^{it}$: $t \in [0, 2\pi]$;

(2) Внутренность Δ: $\Delta[z_1, z_2, z_3] = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1]$ — $\boxed{ПЗК}$;

$\Delta[z_1, z_2, z_3] = G_\Delta$;

(3) Внутренность многоугольника М безсамопересеч.:

$m[z_0, z_1, \ldots, z_n] = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} [z_k, z_{k+1}] \cup [z_n, z_0]$ — $\boxed{ПЗК}$;

$M[z_0, z_1, \ldots, z_n] = G_m \subset \mathbb{C}$;

[4] Понятие связной компоненты множества

(1) $G \subset \mathbb{C}$: $z_0 \in G$: $\exists G_{z_0} \overset{def}{=} \{z \in G : \exists L[z_0, z] \subset G\}$ — $\boxed{ЛСМ}$;

(2) $\forall z', z'' \in G$: $G_{z'} = G_{z''}$ ⓥ $G_{z'} \cap G_{z''} = \varnothing$

п. 4. КФКП – предел, непрерывность, диф и инт.

4.1. КФКП = 2-Ф-2-П : Примеры(!) :

[1] Определение КФКП:

(1) $W = f(z) : \mathcal{U}_z \subset \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w : \mathbb{C}_z = \mathbb{R}^2_{(x,y)}, \mathbb{C}_w = \mathbb{R}^2_{(u,v)}$;

$z = (x,y) = x + iy$, $w = (u,v) = u + iv$:

(2) $f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y) : \mathcal{U}_{(x,y)} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$u = u(x,y), v = v(x,y) : \mathcal{U}_{(x,y)} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ – $\boxed{\text{ВФ2П}}$

(3) $f(z) = (u(z), v(z))$ – КФКП $= \boxed{\text{2Ф2П}}$

[2] Степенная КФКП : $\boxed{w = z^n : \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w}$ $(n > 0)$:

(1) $w = z^n = |z|^n [\cos(\arg z\cdot n) + i\cdot\sin(\arg z\cdot n)) : z = |z|\cdot e^{i\cdot\arg z}$

$\tilde{u}(r,\varphi) = r^n\cdot\cos(\varphi\cdot n)$; $\tilde{v}(r,\varphi) = r^n\cdot\sin(\varphi\cdot n)$

(2) $W = P_n(z) = a_0 + a_1\cdot z + \dots + a_n\cdot z^n$; $W = R(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_n(z)}$;

[3] Показательная $\boxed{\text{КФКП}}$; логарифмическая $\boxed{\text{КФКП}}$:

(1) $w = e^z = e^x(\cos y + i\cdot\sin y) : \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w$;

$u(x,y) = e^x\cdot\cos y, v(x,y) = e^x\cdot\sin y : \mathbb{R}^2_{(x,y)} \to \mathbb{R}^1_{u,v}$

(2) $w = \ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k) : \mathbb{C}_z \setminus \{\theta\} \to \mathbb{C}_w$:

$u(x,y) = \ln|z| : \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \to \mathbb{R}^1_u$, $v(x,y) = \arg z : \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \to \mathbb{R}^1$;

(3) $w = z_0^z = e^{z\cdot\ln z_0} : \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w : z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\theta\}$;

(4) $w = z^{z_0} = e^{z_0\cdot\ln z} : \mathbb{C}_z \setminus \{\theta\} \to \mathbb{C}_w$;

[4] Тригонометрические и гиперболические $\boxed{\text{КФКП}}$

(1) $w = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $w = \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) : \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w$;

(2) $w = \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $w = \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) : \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w$;

(3) $w = \cos z : u = \cos x\cdot\operatorname{ch} y, v = -\sin x\cdot\operatorname{sh} y$;

$w = \sin z : u = \sin x\cdot\operatorname{sh} y, v = +\cos x\operatorname{ch} y$;

(4) $w = \operatorname{ch} z : u = \operatorname{ch} x\cdot\cos y, v = \operatorname{sh} x\cdot\sin y$;

$w = \operatorname{sh} z : u = \operatorname{sh} x\cdot\cos y, v = \operatorname{ch} x\cdot\sin y$;

4.2. ТФКП – предел и непрерывность:

[1] Предел и непрерывность в точке:

(1) <u>Определение</u>: $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$$w_0 = \lim_{z\to z_0} f(z) \overset{def}{\Longleftrightarrow} u_0 = \lim_{(x_0,y_0)} u(x,y)\ \&\ v_0 = \lim_{(x_0,y_0)} v(x,y):$$

$$\lim_{z_0} f(z) = \lim_{z_0} u(z) + i \lim_{z_0} v(z)$$

$$f(z) - z_0 - \boxed{н} \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(z_0) = \lim_{z_0} f(z) \Leftrightarrow u(z_0) = \lim_{z_0} u(z)\ \&\ v(z_0) = \lim_{z_0} v(z)$$

$$\Leftrightarrow u(z), v(z) - z_0 - н;$$

(2) <u>Свойства</u>: $\lim_{z_0}(f+g) = \lim_{z_0} f + \lim_{z_0} g$, $\lim_{z_0}(f\cdot g) = \lim_{z_0} f \cdot \lim_{z_0} g$,

$\lim_{z_0} \frac{f}{g} = \lim_{z_0} f / \lim_{z_0} g$; $f(z), g(z) - z_0 - н \Rightarrow f+g, f\cdot g, \frac{f}{g} - z_0 - н$;

(3) <u>Основные ТФКП н во всех внутренних т. обл. опр.</u>:

$w = e^z - \mathbb{C}_z - н$; $w = P_n(z) - \mathbb{C}_z - н$; $R(z) - н : Q_m(z) \neq \theta$;

$w = \sin z$, $w = \cos z$, $w = \operatorname{ch} z$, $w = \operatorname{sh} z - \mathbb{C}_z - н$;

$w = \ln z - \mathbb{C}_z \setminus \{\theta\}\ н$; $w = z_0^z$, $w = z^{z_0} - н$

(4) $e^z - \mathbb{C}_z - н$: $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y - R^2 - н$: $e^x, \sin y, \cos y - R^2 - н$;

[2] ТФКП – непрерывность на комп. мн-ве

(1) $w = f(z) - K \subset \mathbb{C} - н \Leftrightarrow u(z), v(z) - K \subset \mathbb{C} - н$

(2) <u>Тh Кантора</u>: $f(z) - K \subset \mathbb{C} - н \Rightarrow f(z) - K \subset \mathbb{C} - \boxed{р.н}$;

(3) <u>Тh Вейерштрасса</u>: $f(z) - K \subset \mathbb{C} - н \Rightarrow |f(z)| - K \subset \mathbb{C} - н$

$\Rightarrow \exists\ -\infty < m = \inf_K \{|f(z)|\} \le f(z) \le \sup_K \{|f(z)|\} = M < +\infty$;

$\exists\ z', z'' \in K : |f(z')| = m\ \&\ |f(z'')| = M$;

4.3. ТФКП – дифференцируемость в точке

[1] Определ. диф.-и производной КФКП в т.:

(1) $w = f(z) : B_\delta(z_0) \subset \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w$;

(2) $f(z)$ – z_0 – $\boxed{д}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \Delta f(z_0, \Delta z) = w_0 \cdot \Delta z + \bar{o}(\Delta z) \cdot \Delta z : \exists w_0 \in \mathbb{C}$;

$\Longleftrightarrow \Delta f(z_0, \Delta z) = w_0 \cdot \Delta z + \bar{o}(\Delta z) |\Delta z| : \exists w_0 \in \mathbb{C}$;

(3) Опред. произв КФКП в т.:

$$f'(z_0) \overset{def}{=} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} \in \mathbb{C} ;$$

(4) Крит. диф. КФКП в т.

$f(z)$ – z_0 – $\boxed{д} \Longleftrightarrow \exists f'(z_0) \in \mathbb{C} : \Delta f(z_0, \Delta z) = f'(z_0) \cdot \Delta z + \bar{o}(\Delta z) \Delta z$

□ ($\Rightarrow$) $f(z)$ – z_0 – $\boxed{д} \Rightarrow \frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} = w_0 + \bar{o}(\Delta z) \Rightarrow \exists f'(z_0) = w_0$;

($\Leftarrow$) $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} \Rightarrow f'(z_0) - \frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} = \bar{o}(\Delta z)$) ■

(5) КФКП – $\boxed{д}$ в т. явл. КФКП – Н в т.:

$f(z)$ – z_0 – д $\Rightarrow f(z)$ – z_0 – Н : $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta f(z_0, \Delta z) = f'(z_0) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$;

[2] Правила выч. произв. в т. КФКП:

(1) $f(z), g(z)$ – $z_0 \in B_\delta(z_0)$ – $\boxed{д} \Rightarrow f(z) + g(z),\ f(z) \cdot g(z)$;

$\frac{1}{g(z)}, \frac{f(z)}{g(z)}$ – $z_0 \in B_\delta(z)$ – $\boxed{д}$;

(2) $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$, $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) g(z_0) + f(z_0) g'(z_0)$;

$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) g(z_0) - f(z_0) g'(z_0)}{g^2(z_0)}$;

[3] Диф. и правило выч. произв в т. слож КФКП и обр. КФКП

(1) $w = f(z) : B_\delta(z_0) \subset \mathbb{C}_z \to B_\delta(w_0) \subset \mathbb{C}_w : w_0 = f(z_0)$ – z_0 – $\boxed{д}$ &

$g(w) : B_\delta(w_0) \subset \mathbb{C}_w \to \mathbb{C}$ – w_0 – $\boxed{д} \Rightarrow (g \circ f)(z) = g(f(z)) : B_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ –

– z_0 – $\boxed{д}$: $[g \circ f]'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$;

(2) $w = f(z) : B_\delta(z_0) \to B_\delta(w_0) \subset \mathbb{C}_w : w_0 = f(z_0)$ – z_0 – $\boxed{д}$ &

$z = g(w) : B_\sigma(w_0) \to B_\delta(z_0) \subset \mathbb{C}_z : g(f(z)) = z : z \in B_\delta(z_0)$ – w_0 – $\boxed{н}$

$\Rightarrow g(w)$ – w_0 – $\boxed{д}$: $g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$

[4] Диф. в $\mathbb{C}$ степ. $\boxed{КФКП}$: $z' = 1$; $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$; $\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}$;

4.4. ТФКП – диф. в т. и условия Коши–Римана в т.:

[1] Координатный критерий диф. в т. КФКП $= \boxed{\text{ЗКР}}$:

(1) $w = f(z) : B_\delta(z_0) \subset \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w : z = x + iy,\ w = u + iv$:

$f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y) : B_\delta((x_0,y_0)) \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)} \to \mathbb{R}^2_{(u,v)}$;

(2) Необходимая часть критерия: $\boxed{4.4'[1]}$

$f(z) - z_0 - \boxed{\text{д}} \Rightarrow u(x,y), v(x,y) : B_\delta((x_0,y_0)) \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)} \to \mathbb{R}^1 - (x_0,y_0) - \boxed{\text{д}}$:

$u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0)$ & $u'_y(x_0,y_0) = -v'_x(x_0,y_0)$ &

$f'(z_0) = u'_x(x_0,y_0) + i\,v'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) - i\cdot u'_y(x_0,y_0)$;

(3) Достаточная часть критерия: $\boxed{4.4'[2],[3]}$

$u(x,y), v(x,y) : B_\delta((x_0,y_0)) \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)} \to \mathbb{R}^1 - (x_0,y_0) - \boxed{\text{д}}$:

$u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0)$ & $u'_y(x_0,y_0) = -v'_x(x_0,y_0) \Rightarrow$

$f(z) - z_0 - \boxed{\text{д}} : f'(z_0) = u'_x(x_0,y_0) + i\,v'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) - i\cdot u'_y(x_0,y_0)$;

(4) Критерий диф. КФКП в т. и условия Коши–Римана:

$f(z) - z_0 - \boxed{\text{д}} \Leftrightarrow u(x,y), v(x,y) - (x_0,y_0) - \boxed{\text{д}} : \boxed{u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0)\ \&\ v'_x(x_0,y_0) = -u'_y(x_0,y_0)}$

$f'(z_0) = u'_x(x_0,y_0) + i\,v'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) - i\,u'_y(x_0,y_0)$;

[2] (1) Комплексная экспонента явл. $\boxed{\text{ДКФКП}}$;

$w = e^z - z \in \mathbb{C}_z - \boxed{\text{д}} : \boxed{(e^z)' = e^z}$: $u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$:

$u'_x = e^x \cos y,\ u'_y = -e^x \sin y;\ v'_x = e^x \sin y,\ v'_y = e^x \cos y - (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 - \text{н}$

$\Rightarrow u(x,y), v(x,y) - (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 - \boxed{\text{д}} : u'_x = v'_y$ & $v'_x = -u'_y : \mathbb{R}^2_{(x,y)}$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) - \cancel{z}\ \mathbb{C} - \boxed{\text{д}} : (e^z)' = \boxed{u'_x + i\,v'_x} = e^z : z \in \mathbb{C}$;

(2) Примеры $\boxed{\text{КФКП}}$ которые не являются $\boxed{\text{ДКФКП}}$:

$w = \bar{z} = x - iy : u = x,\ v = -y : u'_x = 1 \neq -1 = v'_y \Rightarrow \nexists (\bar{z})'$ в $\mathbb{C}$;

$w = |z|^2 = x^2 + y^2 : u = x^2 + y^2,\ v = 0 : u'_x = 2x \neq 0 = v'_y : x \neq 0$ &

$v'_x = 0 \neq -2y = -u'_y : y \neq 0 \Rightarrow \nexists (|z|^2)' : \mathbb{C} \setminus \{\theta\}$;

$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$

4.4.* Доказательство критерия дифф. $\boxed{\text{КФКП}}$ в т.

[1] Дифф. $\boxed{\text{КФКП}}$ в т. влечёт выполнение усл. Коши-Римана

(1) $f(z)-z_0-\boxed{\text{д}}\Rightarrow\exists\, u'_x(x_0,y_0)=v'_y(x_0,y_0)\ \&\ \exists\, v'_x(x_0,y_0)=-u'_y(x_0,y_0)$;

(2) $f(z)-z_0-\boxed{\text{д}}\Rightarrow\exists\, f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f(z_0,\Delta z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z=\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(z_0,\Delta x)}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u((x_0,y_0),(\Delta x,0))+i\cdot\Delta v((x_0,y_0),(\Delta x,0))}{\Delta x}=\boxed{u'_x(x_0,y_0)+iv'_x(x_0,y_0)=f'(z_0)}$

(3) $f(z)-z_0-\boxed{\text{д}}\Rightarrow\exists\, f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f(z_0,\Delta z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z=i\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta f(z_0,i\Delta y)}{i\cdot\Delta y}=$

$=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta u((x_0,y_0),(0,\Delta y))+i\cdot\Delta v((x_0,y_0),(0,\Delta y))}{i\cdot\Delta y}=\boxed{\frac{1}{i}u'_y(x_0,y_0)+\frac{i}{i}v'_y(x_0,y_0)=f'(z_0)}$

[2] Эквив. формы записи дифф. в т. $\boxed{\text{КФКП}}$ и дифф. в т. $\boxed{\text{ВФ2П}}$:

(1) $w=f(z)=u(z)+i\cdot v(z)-z_0-\boxed{\text{д}}\overset{def}{\Leftrightarrow}\exists\, w_0=u_0+iv_0\in\mathbb{C}: f'(z_0)=w_0$:

$\Delta u(z_0,\Delta z)+i\cdot\Delta v(z_0,\Delta z)=\Delta f(z_0,\Delta z)=w_0\Delta z+\bar o(\Delta z)\cdot|\Delta z|=$

$=(u_0+iv_0)(\Delta x+i\Delta y)+(\bar o_x(\Delta z)+i\bar o_y(\Delta z))\cdot\|(\Delta x,\Delta y)\|\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta u(z_0,\Delta z)=(u_0\Delta x-v_0\Delta y)+\bar o_x(\Delta x,\Delta y)\cdot\|(\Delta x,\Delta y)\|\\ \Delta v(z_0,\Delta z)=(v_0\Delta x+u_0\Delta y)+\bar o_y(\Delta x,\Delta y)\cdot\|(\Delta x,\Delta y)\|\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta u((x_0,y_0),(\Delta x,\Delta y))=\langle(u_0,-v_0),(\Delta x,\Delta y)\rangle+\bar o_x(\Delta x,\Delta y)\cdot\|(\Delta x,\Delta y)\|\\ \Delta v((x_0,y_0),(\Delta x,\Delta y))=\langle(v_0,u_0),(\Delta x,\Delta y)\rangle+\bar o_y(\Delta x,\Delta y)\cdot\|(\Delta x,\Delta y)\|\end{cases}$$

(2) $u(x,y)-(x_0,y_0)-\boxed{\text{д}}\overset{def}{\Leftrightarrow}\exists\, u'(x_0,y_0)=(u_1,u_2): u_1=u'_x(x_0,y_0)\ \&\ u_2=u'_y(x_0,y_0)$:

$\Delta u((x_0,y_0),(\Delta x,\Delta y))=\langle u'(x_0,y_0),(\Delta x,\Delta y)\rangle+\bar o_u(\Delta x,\Delta y)\cdot\|(\Delta x,\Delta y)\|$;

$v(x,y)-(x_0,y_0)-\boxed{\text{д}}\overset{def}{\Leftrightarrow}\exists\, v'(x_0,y_0)=(v_1,v_2)\in R^2: v_1=v'_x(x_0,y_0)\ \&\ v_2=v'_y(x_0,y_0)$:

$\Delta v((x_0,y_0),(\Delta x,\Delta y))=\langle v'(x_0,y_0),(\Delta x,\Delta y)\rangle+\bar o_v(\Delta x,\Delta y)\cdot\|(\Delta x,\Delta y)\|$;

[3] Доказательство критерия дифф. $\boxed{\text{КФКП}}$ в т.

(1) Доказат. необход. части критер.

$f(z)-z_0-\boxed{\text{д}}: w_0=f'(z_0)$:[2](1),(2) $\Rightarrow$

$u(x,y)-(x_0,y_0)-\boxed{\text{д}}: (u'_x(x_0,y_0),u'_y(x_0,y_0))=u'(x_0,y_0)=(u_0,-v_0)\ \&$

$v(x,y)-(x_0,y_0)-\boxed{\text{д}}: (v'_x(x_0,y_0),v'_y(x_0,y_0))=v'(x_0,y_0)=(v_0,u_0)$;

(2) Доказат. достат. части крит.

$u(x,y),v(x,y)-(x_0,y_0)-\boxed{\text{д}}: u'(x_0,y_0)=(u'_x(x_0,y_0),u'_y(x_0,y_0)),\ v'(x_0,y_0)=(v'_x(x_0,y_0),v'_y(x_0,y_0))$

:[2](2)(1) $\Rightarrow f(z)-z_0-\boxed{\text{д}}: f'(z_0)=u'_x(x_0,y_0)+iv'_x(x_0,y_0)=v'_y(x_0,y_0)-iu'_y(x_0,y_0)$;

(3) Взаимная связь произв. $\boxed{\text{КФКП}}$ в т. и произв. вект. действ. и мн. час.

$f'(z_0)=\overline{u'(x_0,y_0)}=i\cdot\overline{v'(x_0,y_0)}\ \&\ u'(x_0,y_0)=\overline{f'(z_0)}\ \&\ v'(x_0,y_0)=i\cdot\overline{f'(z_0)}$;

(4) Компл. форма усл. $\boxed{\text{К-Р}}$: $\boxed{u'(x_0,y_0)=-i\cdot v'(x_0,y_0)}$;

4.4.(11) Критерий дифф в т. КФКП в поляр коорд

[1] Необходимая часть критерия:

(1) Дифф в т. $\boxed{2Ф2П}$ – переход к полярным коор:

$\{x = r\cdot\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi\} : (0,+\infty)_r \times (-\pi, +\pi]_\varphi \subset \mathbb{R}^2_{(r,\varphi)} \to \mathbb{R}^2_{(x,y)} - \boxed{д}$:

$x' = (\cos\varphi, -r\sin\varphi),\ y' = (\sin\varphi, r\cos\varphi) - (r,\varphi) - \boxed{н} \Rightarrow x, y - (r,\varphi) - \boxed{д}$;

(2) Необходимая часть критерия:

$w = f(z) - z - \boxed{д} \Longrightarrow \tilde{u}(r,\varphi), \tilde{v}(r,\varphi) - (r,\varphi) - \boxed{д}$; $z = r\cdot e^{i\varphi}$:

$\tilde{u}(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi),\ \tilde{v}(r,\varphi) = v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$:

$\boxed{\tilde{u}'_r(r,\varphi)\cdot r = \tilde{v}'_\varphi(r,\varphi)\ \&\ \tilde{v}'_r(r,\varphi)\cdot r = -\tilde{u}'_\varphi(r,\varphi)}$ – Усл. $\boxed{К-Р}$;

$f'(z) = \frac{r}{z}(\tilde{u}'_r(r,\varphi) + i\cdot\tilde{v}'_r(r,\varphi)) = \frac{1}{z}(\tilde{v}'_\varphi(r,\varphi) - i\cdot\tilde{u}'_\varphi(r,\varphi))$

(3) $f(z) - z - \boxed{д} \Rightarrow u(x,y), v(x,y) - (x,y) - \boxed{д}$: $u'_x(x,y) = v'_y(x,y),\ v'_x(x,y) = -u'_y(x,y)$

$\Rightarrow \tilde{u}(r,\varphi), \tilde{v}(r,\varphi) - (r,\varphi) - \boxed{д}$: $\tilde{u}'_r = u'_x\cos\varphi + u'_y\sin\varphi = \frac{1}{r}\langle u', z\rangle$;

$\tilde{v}'_\varphi = v'_x(-r\sin\varphi) + v'_y\cdot r\cos\varphi = u'_y\cdot y + u'_x\cdot x = \langle u', z\rangle \Rightarrow \boxed{r\cdot\tilde{u}'_r = \langle u', z\rangle = \tilde{v}'_\varphi}$;

$\tilde{v}'_r = v'_x\cos\varphi + v'_y\sin\varphi = \frac{1}{r}\langle v', z\rangle$; $\tilde{u}'_\varphi = u'_x(-r\sin\varphi) + u'_y\cdot r\cos\varphi = -v'_y\cdot y - v'_x\cdot x = -\langle v', z\rangle$

$\Rightarrow \boxed{r\cdot\tilde{v}'_r = \langle v', z\rangle = -\tilde{u}'_\varphi}$: $\frac{r}{z}(\tilde{u}'_r + i\tilde{v}'_r) = \frac{1}{z}(\langle u', z\rangle + i\langle v', z\rangle) =$

$= \frac{1}{z}(u'_x\cdot x + u'_y\cdot y + iv'_x\cdot x + iv'_y\cdot y) = \frac{1}{z}(u'_x\cdot x - v'_x\cdot y + iv'_x\cdot x + iu'_x\cdot y) = \frac{1}{z}(u'_x\cdot z + iv'_x\cdot z) = f'(z)$

[2] Достаточная часть критерия:

(1) Дифф в т. $\boxed{2Ф2П}$ – обр. к перех к поляр. коор:

$\{r = \sqrt{x^2+y^2},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\} : \mathbb{R}^2_{(x,y)} \setminus \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)} \to \mathbb{R}^2_{(r,\varphi)} - \boxed{д}$:

$r' = \frac{(x,y)}{r},\ \varphi' = \frac{(-y,x)}{r^2} - (x,y) - (н) \Rightarrow r, \varphi - (x,y) - \boxed{д}$

(2) Достаточная часть критерия:

$\tilde{u}(r,\varphi), \tilde{v}(r,\varphi) - (r,\varphi) - \boxed{д}$: $r\cdot\tilde{u}'_r(r,\varphi) = \tilde{v}'_\varphi(r,\varphi)\ \&\ r\cdot\tilde{v}'_r(r,\varphi) = -\tilde{u}'_\varphi(r,\varphi) \Longrightarrow$

$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) - z = (x,y) - \boxed{д}$: $u(x,y) = \tilde{u}(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\frac{y}{x})$,

$v(x,y) = \tilde{v}(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\frac{y}{x})$:

(3) $u(x,y) - (x,y) - \boxed{д}$: $u'_x(x,y) = v'_y(x,y)\ \&\ v'_x(x,y) = -u'_y(x,y) \Rightarrow f(z) - z_0 - \boxed{д}$;

$u'_x = \tilde{u}'_r\cdot\frac{x}{r} + \tilde{u}'_\varphi\cdot\frac{-y}{r^2},\ v'_y = \tilde{v}'_r\cdot\frac{y}{r} + \tilde{v}'_\varphi\cdot\frac{x}{r^2} = -\tilde{u}'_\varphi\frac{y}{r^2} + r\cdot\tilde{u}'_r\cdot\frac{x}{r^2} = u'_x \Rightarrow u'_x = v'_y$;

$u'_y = \tilde{u}'_r\cdot\frac{y}{r} + \tilde{u}'_\varphi\cdot\frac{x}{r^2},\ v'_x = \tilde{v}'_r\cdot\frac{x}{r} + \tilde{v}'_\varphi\cdot\frac{-y}{r^2} = -\tilde{u}'_\varphi\frac{x}{r^2} + r\cdot\tilde{u}'_r\cdot\frac{-y}{r^2} = -u'_y \Rightarrow v'_x = -u'_y$;

[3] Дифф и произв комплексного логарифма:

(1) $W = \ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k) : \mathbb{C}\setminus\{0\} - \boxed{д}$ $\boxed{(\ln z)' = \frac{1}{z}}$

(2) $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \tilde{u}(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \ln r$; $\tilde{u}'_r = \frac{1}{r},\ \tilde{u}'_\varphi = 0$;

$v(x,y) = \arg z + 2\pi k = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2\pi k \Rightarrow \tilde{v}(r,\varphi) = v(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} + 2\pi k = \varphi + 2\pi k$:

$\tilde{v}'_\varphi = 1,\ \tilde{v}'_r = 0 \Rightarrow \tilde{u}, \tilde{v} - (r,\varphi) - \boxed{д}$: $r\cdot\tilde{u}'_r = r\cdot\frac{1}{r} = 1 = \tilde{v}'_\varphi\ \&\ r\cdot\tilde{v}'_r = r\cdot 0 = \tilde{u}'_\varphi$

$\Rightarrow \ln z - z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} - \boxed{д}$: $(\ln z)' = \frac{r}{z}(\tilde{u}'_r + i\tilde{v}'_r) = \frac{r}{z}(\frac{1}{r} + i\cdot 0) = \frac{1}{z} \Rightarrow (\ln z)' = \frac{1}{z}$;

4.5. Формальные производные в т. $\boxed{\text{КФКП}}$. Геометрич. смысл модуля и аргум. произ. в т. $\boxed{\text{КФКП}}$.

[1] Формальные производные $\boxed{\text{КФКП}}$ в т.:

(1) $w = f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ – (x_0, y_0) – $\boxed{д} \Leftrightarrow$
$u(x,y),\ v(x,y)$ – (x_0, y_0) – $\boxed{д}$

(2) Определение формальных производных:

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right),$$

$$\bar\partial f = \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right);$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

(3) Критерий диф. в т. $\boxed{\text{КФКП}}$ в терм. фор. произ.:

$f(x,y)$ – (x_0,y_0) – $\boxed{д}$: $f(z)$ – z_0 – $\boxed{д} \Leftrightarrow \bar\partial f(z_0) = 0$: $\partial f(z_0) = f'(z_0)$;

$f(z)$ – z_0 – $\boxed{д} \Leftrightarrow u'_x = v'_y \ \& \ u'_y = -v'_x : (x_0, y_0) \Leftrightarrow \bar\partial f(z_0) = 0$;

$$\partial f(z_0) = \frac{1}{2}\left((u'_x + v'_y)(x_0,y_0) + i(-u'_y + v'_x)(x_0,y_0)\right) = u'_x(x_0,y_0) + i\cdot v'_x(x_0,y_0) = f'(z_0);$$

[2] Геометрический смысл модуля произв в т. $\boxed{\text{КФКП}}$:

(1) $w = f(z)$ – z_0 – $\boxed{д} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z}$:

$\Delta f(z_0, \Delta z) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ – результат действ. от $f(z)$ на Δz

(2) $|f'(z_0)| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{|\Delta f(z_0, \Delta z)|}{|\Delta z|}$ – коэф. „растяж" в т. z_0 при $w = f(z)$ – – не зависит от направл. Δz;

[3] Геометрич. смысл аргумента произ. в т. $\boxed{\text{КФКП}}$:

(1) $w = f(z)$ – z_0 – $\boxed{д}$: $L(z(t)) \ni z_0$: $z'(t) \neq \theta \Rightarrow f(L(z(t))) = \ell(w(t)) \ni w_0 = f(z_0)$;
$w(t) = f(z(t))$: $w'(t_0) = f'(z_0)\cdot z'(t_0) \neq \theta$: $\boxed{f'(z_0) \neq \theta} \Rightarrow \boxed{f'(z_0) = \dfrac{w'(t_0)}{z'(t_0)}}$;

(2) $\boxed{\arg f'(z_0) = \arg w'(t_0) - \arg z'(t)}$ – угол поворота касат. век $z'(t_0)$ к $L(z(t))$ в т. $z_0 = z(t_0)$ при отобр $w = f(z)$ до угла касат. $w'(t_0)$ к $\ell(w(t)) = f(L(z(t)))$ в т. $w_0 = w(t_0)$

(3) $f'(z_0) \neq \theta$: $\tilde L(\tilde z(t)) \ni z_0 = \tilde z(t'_0)$: $\tilde z'(t'_0) \neq \theta$ – кас. век к $\tilde L$ в т. z_0 $\Rightarrow$
$f(\tilde L(\tilde z(t))) = \tilde\ell(\tilde w(t)) \ni w_0 = f(z_0)$: $\tilde w(t) = f(\tilde z(t))$; $\tilde w'(t'_0) = f'(z_0)\cdot \tilde z'(t'_0) \neq \theta \Rightarrow$
$f'(z_0) = \dfrac{\tilde w'(t'_0)}{\tilde z'(t'_0)} \Rightarrow \boxed{\measuredangle(\tilde w'(t'_0), w'(t'_0)) = \measuredangle(\tilde z'(t_0), z'(t_0))}$;

$\square$ $\arg \tilde w'(t'_0) - \arg \tilde z'(t'_0) = \arg f'(z_0) = \arg w'(t_0) - \arg z'(t_0)$ $\square$

4.6. КФКП – дифф. в т. области = $\boxed{\text{АКФКП}}$:

[1] $\boxed{\text{АКФКП}}$ – опред. и критерий:

(1) $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) : G_z \subset \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w$:

$f(z) - G_z - \boxed{\text{ан}} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall z_0 \in G_z : f(z) - z_0 - \boxed{\text{д}}$

(2) Критерий анал. $\boxed{\text{КФКП}}$ с $\boxed{\text{н-д}}$ действ. и мн. частными

$u'_x(z), u'_y(z); v'_x(z), v'_y(z) : G_z \subset R^2 \to R^1$ – Ⓗ:

$f(z) - G_z - \boxed{\text{ан}} \Longleftrightarrow u'_x(z) = v'_y(z) \;\&\; v'_x(z) = -u'_y(z) : z \in G_z$;

$\left\{ \begin{array}{l} h(x,y) : B(x_0,y_0) \subset R^2 \to R^1 : \exists\, h'_x(x,y), h'_y(x,y) : B(x_0,y_0) \subset R^2 \to R^1 - (x_0,y_0) - Ⓗ \\ \Longrightarrow h(x,y) - (x_0,y_0) - \boxed{\text{д}} \end{array} \right\}$ – Дост. призн. дифф. ВФ 2П

(3) крит. ан. $\boxed{\text{КФКП}}$ непр. в обл. – Монтель, Лумана, Меньшов:

$f(z) - G_z -$ Ⓗ $: G_z \subset \mathbb{C}_z - \boxed{\text{обл.}}$:

$f(z) - G_z\, \boxed{\text{ан}} \Longleftrightarrow u'_x(z) = v'_y(z) \;\&\; v'_x(z) = -u'_y(z) : z \in G_z$;

[2]

п.5. Ряды КФКП. Регулярные КФКП являются АКФКП

5.1. Последовательности КФКП. Обл. сх. Равном. сх.

[1] Область поточеч. сх. посл. КФКП.

(1) $(f_n(z)\to f_0(z_0): D_z\subseteq\mathbb{C}) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall z_0\in D_z: f(z_0)=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z_0) \Longleftrightarrow$

$(u_n(z)\to u_0(z): D_z\subseteq\mathbb{C}) \,\&\, (v_n(z)\to v_0(z): D_z\subseteq\mathbb{C})$;

(2) Область сх. степен. послед. в $\mathbb{C}$:

① $\lim\limits_{+\infty} z^n=\theta: |z|<1$; $\lim\limits_{+\infty} z^n=\infty: |z|>1$; $\nexists\lim\limits_{+\infty} z^n: |z|=1 \,\&\, z\neq 1$;

② $\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{1+z^n}=1:|z|<1$; $\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{1+z^n}=\theta:|z|>1$; $\nexists \lim\frac{1}{1+z^n}: |z|=1\,\&\,z\neq1$;

(3) Критерий Коши поточеч. сх.

$(f_n(z)\to f_0(z): D_z\subseteq\mathbb{C})\Leftrightarrow(f_n(z)\to: D_z\subseteq\mathbb{C})\overset{def}{\Longleftrightarrow}\forall z_0\in D_z\, (f_n(z_0)\to:\mathbb{C})$;

[2] Равномерная сх. посл. $\boxed{\text{КФКП}}$:

(1) Опред. равн. сх. и равн. фунд. посл. $\boxed{\text{КФКП}}$:

$(f_n(z)\rightrightarrows f_0(z): D_z\subseteq\mathbb{C})\overset{def}{\Longleftrightarrow}\forall\varepsilon\,\exists n_0\,\forall n\geq n_0: \sup\limits_{D_z}|f_n(z)-f_0(z)|<\varepsilon$;

$(f_n(z)\rightrightarrows: D_z\subseteq\mathbb{C})\overset{def}{\Longleftrightarrow}\forall\varepsilon\,\exists n_0\,\forall n\geq n_0,p: \sup\limits_{D_z}|f_{n+p}(z)-f_n(z)|<\varepsilon$;

(!)(2) Критерий Коши равн. сх. посл. $\boxed{\text{КФКП}}$

$(f_n(z)\rightrightarrows f_0(z): D_z\subseteq\mathbb{C})\Leftrightarrow(f_n(z)\rightrightarrows: D_z\subseteq\mathbb{C})$

(3) Равн. сх. степ. посл. внутри един. круга:

① $(z^n\rightrightarrows\theta: B_\sigma[\theta]): \sigma<1: |z^n|\leq\sigma^n: B_\sigma[\theta] \,\&\, (\sigma^n\to0:\mathbb{R})$;

② $(\frac{1}{1+z^n}\rightrightarrows 1: B_\sigma[\theta]): \sigma<1: \left|\frac{1}{1+z^n}-1\right|=\frac{|z|^n}{|1+z^n|}\leq\frac{\sigma^n}{1-\sigma}: B_\sigma[\theta] \,\&\, (\sigma^n\to0:\mathbb{R})$:

$1-\sigma<1-\sigma^n<1-|z|^n=1-|-z^n|\leq|1-(-z^n)|=|1+z^n| \Rightarrow \frac{1}{|1+z^n|}<\frac{1}{1-\sigma}$;

③ $(\frac{1}{1+z^n}\rightrightarrows\theta: B^C_\sigma(\theta)): \sigma>1: \frac{1}{1+z^n}=\frac{(1/z)^n}{(1/z)^n+1}: 1/z\in B_{\frac{1}{\sigma}}[\theta]$;

[3] Свойства рав. сх. посл. $\boxed{\text{КФКП}}$

(1) Н. равн. предела Н-КФКП: $(f_n\rightrightarrows f_0: D_z\subseteq\mathbb{C}): f_n(z)-D_z-(Н) \Rightarrow f_0(z)-D_z-(Н)$;

(2) $(f_n(z)\rightrightarrows f_0(z): D_z\subseteq\mathbb{C}): |g(z)|\leq M: D_z \Rightarrow (f_n(z)\cdot g(z)\rightrightarrows f_0(z)\cdot g(z): D_z\subseteq\mathbb{C})$;

(3) $(f_n(z)\rightrightarrows f_0(z): D_z\subseteq\mathbb{C}); z=\varphi(\zeta): D_\zeta\to D_z \Rightarrow (f_n(\varphi(\zeta))\rightrightarrows f_0(\varphi(\zeta)): D_\zeta\subseteq\mathbb{C}_\zeta)$;

(4) Инт. равн. предела посл. $\boxed{\text{И-КФКП}}$:

$(f_n(z)\rightrightarrows f_0(z): L(z(t))): f_n(z)-L(z)-\boxed{И} \Rightarrow f_0(z)-L(z)-\boxed{И}$:

$$\int_L f_0(z)dz=\lim_{+\infty}\int_L f_n(z)dz:$$

$\left|\int_L f_0(z)dz-\int_L f_n(z)dz\right|\leq\sup\limits_{L(z)}|f_0(z)-f_n(z)|\cdot l(L)$;

5.2. Ряды КФКП. Обл. сх. Равн. сход.

[1] Область поточечной сх. ряда КФКП:

(1) $\left(\sum f_n(z) \to F(z) : D_z \subseteq \mathbb{C}\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\sum_{k=0}^{n} f_k(z) = S_n(z) \to F(z) : D_z\right)$
$\Longleftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} u_k(z) \to u_F(z) : D_z\right) \& \left(\sum_{k=0}^{n} v_k(z) \to v_F(z) : D_z\right)$

(2) Область поточеч. сх. ряда степен. посл. КФКП;
$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \to \frac{1}{1-z} : B_1(\theta)\right) : (1+z+\ldots+z^n)(1-z) = 1-z^{n+1}; \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}};$

[2] Равном. сх. ряда КФКП. Критерий Коши:

(1) $\left(\sum f_n(z) \rightrightarrows F(z) : D_z \subseteq \mathbb{C}\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\sum_{k=0}^{n} f_k(z) = S_n(z) \rightrightarrows F(z) : D_z\right);$
$\left(\sum f_n(z) \rightrightarrows\, : D_z \subseteq \mathbb{C}\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\sum_{k=0}^{n} f_k(z) = S_n(z) \rightrightarrows\, : D_z \subseteq \mathbb{C}\right);$

(2) Критерий Коши рав. сх. ряда КФКП:
$\left(\sum f_n(z) \rightrightarrows F(z) : D_z \subseteq \mathbb{C}\right) \Longleftrightarrow \left(\sum f_n(z) \rightrightarrows\, : D_z \subseteq \mathbb{C}\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$
$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0, p : \sup_{D_z}\left\{\left|\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(z)\right|\right\} < \varepsilon;$

[3] Свойства равн. сх. ряда КФКП:

(1) Н. суммы рав. сх. ряда Н-КФКП:
$\left(\sum f_n(z) \rightrightarrows F(z) : D_z \subseteq \mathbb{C}\right) : f_n(z) - D_z - \text{Н} \Rightarrow F(z) - D_z - \text{Н};$

(2) $\left(\sum f_n(z) \rightrightarrows F(z) : D_z \subseteq \mathbb{C}\right) : |g(z)| \leq M : D_z \Rightarrow \left(\sum f_n \cdot g \rightrightarrows F \cdot g : D_z \subseteq \mathbb{C}\right);$

(3) $\left(\sum f_n(z) \rightrightarrows F(z) : D_z \subseteq \mathbb{C}_z\right) : z = z(\xi) : D_\xi \to D_z \Rightarrow \left(\sum f_n(z(\xi)) \rightrightarrows F(z(\xi)) : D_\xi \subseteq \mathbb{C}_\xi\right);$

(4) Признак Вейерштрасса рав. сх. ряда КФКП;
$\left(\sum a_n \to\, : R\right) : |f_n(z)| \leq a_n : D_z \Rightarrow \left(\sum |f_n(z)| \rightrightarrows\, : D_z\right) \Rightarrow \left(\sum f_n(z) \rightrightarrows\, : D_z\right);$
$\left|\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(z)\right| \leq \sum_{k=1}^{p} |f_{n+k}(z)| \leq \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} < \varepsilon : \forall n \geq n_0, p;$

(5) Равномер. сх. ряда ст. посл. КФКП внутри единич. кр.
$\left(\sum z^n \rightrightarrows \frac{1}{1-z} : B_\delta[\theta]\right) : \delta < 1 : |z^n| = |z|^n \leq \delta^n : B_\delta[\theta] \& \left(\sum \delta^n \to\, : R\right)$

(6) Почленн. инт. суммы равн. сх. ряда Н. КФКП:
$\left(\sum f_n(z) \rightrightarrows F(z) : L(z(t))\right) : f_n(z) - L - \boxed{\text{Н}} \Rightarrow F(z) - L - \boxed{\text{Н}}:$

$\left(\sum \int_L f_n(z)\,dz \to \int_L F(z)\,dz : \mathbb{C}\right):$

$\left(\sum \int_{L[z_0, z']} f_n(z)\,dz \rightrightarrows \int_{L[z_0, z']} F(z)\,dz : z' \in L_z \subset \mathbb{C}\right)$

5.3. Комплексный степенной ряд = $\boxed{КСР}$;

[1] Непрерывность суммы комплексного степенного ряда внутри круга сх.

(1) $\forall \left(\sum_0^{+\infty} c_n z^n\right) \exists (!)\ R \in [0, +\infty] : \left(\sum_0^{+\infty} |c_n| \cdot |z|^n \to : |z| \in (-R, +R)\right)$;

$R = \frac{1}{\Lambda} : \Lambda = \overline{\lim_{+\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$; $\lambda = \lim_{+\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \Rightarrow R = \frac{1}{\lambda}$;

(2) **Равн. сх. $\boxed{КСР}$ „внутри" круга сходимости**:

$\left(\sum_0^{+\infty} c_n z^n \rightrightarrows : B_{R-\delta}[\theta]\right) : 0 < \delta : \left(\sum_0^{+\infty} |c_n| \cdot |z^n| \rightrightarrows : B_{R-\delta}[\theta]\right)$;

$\square\ \exists\ R - \delta \leq |z_0| < R : \left(\sum_0^{+\infty} |c_n| |z_0^n| \to : R\right) : |c_n| \cdot |z^n| \leq |c_n| \cdot |z_0^n| : B_{R-\delta}[\theta]$

$\Rightarrow \left(\sum_0^{+\infty} |c_n| \cdot |z^n| \rightrightarrows : B_{R-\delta}[\theta]\right) \Rightarrow \left(\sum c_n z^n \rightrightarrows : B_{R-\delta}[\theta]\right)$ ■

(3) $\left(\sum_0^{+\infty} c_n z^n \to : B_R(\theta)\right) \Rightarrow f(z) = \sum_0^{+\infty} c_n z^n - B_R(\theta) - \boxed{\text{непрерывна}}$;

$\square\ \forall z_0 \in B_R(\theta)\ \exists \delta : z_0 \in B_{R-\delta}(\theta) : \left(\sum_0 c_n z^n \rightrightarrows f(z) : B_{R-\delta}(\theta)\right) \Rightarrow f(z) - z_0$ Н ■

(4) **Принцип единственности для суммы $\boxed{КСР}$**;

$\left(\sum_0^{+\infty} c_n z^n : B_R(\theta)\right) : f(z) = \sum_0^{+\infty} c_n z^n : B_R(\theta) : \lim_{+\infty} z_m = \theta$;

$f(z_m) = \theta : m \geq m_0 \Rightarrow c_n = 0 : \forall n \geq 0 : f(z) \equiv \theta : B_R(\theta)$

(5) $c_0 = f(\theta) \overset{Н}{=} \lim_{+\infty} f(z_m) = \theta \Rightarrow f(z) = \sum_1^{+\infty} c_n z^n = z \cdot \sum_1^{+\infty} c_n \cdot z^{n-1} = z \cdot f_1(z) : B_R(\theta)$;

$f_1(z) = \sum_1^{+\infty} c_n z^{n-1} : B_R(\theta) - Н \Rightarrow c_1 = f_1(\theta) \overset{Н}{=} \lim_{+\infty} f_1(z_m) = \lim \theta = \theta \Rightarrow$

$f_1(z) = \sum_2 c_n z^{n-1} = z \cdot f_2(z) : B_R(\theta) : f_2(z_m) = \theta : f_2(z) = \sum_2^{+\infty} c_n \cdot z^{n-2} \Rightarrow$

$c_2 = f_2(\theta) \overset{Н}{=} \lim_{+\infty} f_2(z_m) = \theta \Rightarrow f_2(z) = \sum_3 c_n z^{n-2} \ldots \Rightarrow \forall n \geq 0 : c_n = \theta$ □

(6) **Общий принцип единств. для суммы $\boxed{КСР}$**:

$f(z) = \sum_0^{+\infty} a_n z^n : B_{R'}(\theta)$ & $g(z) = \sum_0^{+\infty} b_n z^n : B_{R''}(\theta)$ & $\exists \lim_{+\infty} z_m = \theta$:

$f(z_m) = g(z_m) : m \geq m_0 \Rightarrow a_n = b_n : \forall n \geq 0 : f(z) \equiv g(z) : B_R(\theta) : R' = R = R''$

(7) **Интеграл суммы $\boxed{КСР}$ „внутри" круга сх.**

$f(z) = \sum_0^{+\infty} c_n z^n : B_R(\theta) \Rightarrow \forall L(z(t)) : z(t) : [a, b]_t \subset \mathbb{R}^1_t \to B_R(\theta)$:

$$\int_L f(z) = \sum_0^{+\infty} \frac{c_n}{n+1}(z_2^n - z_1^n) : L[z_1, z_2]$$

[8] Вторая теорема Абеля (без док-ва):

$f(z) = \sum_0^{+\infty} c_n z^n : B_1(\theta) : \exists \sum_0^{+\infty} c_n \cdot 1^n = f(1) \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

5.3. Комплексный степенной ряд: КСР:

5.3. $\boxed{\text{КСР}}$ - <u>Комплексный степенной ряд</u>

[2] <u>Сумма КСР является D-КФКП в круге сходимости</u>

(1) $f(z)=\sum\limits_{0}^{+\infty} c_n z^n : B_R(\theta) \Rightarrow g(z)=\sum\limits_{1}^{+\infty} n\cdot c_n\cdot z^{n-1}=\sum\limits_{0}^{+\infty}(n+1)\cdot c_{n+1}\cdot z^n : B_R(\theta)$;

$\exists f'(z)=g(z): B_R(\theta)$; $\forall k>1\ \exists f^{(k)}(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+k)!}{n!}c_{n+k}\cdot z^n : B_R(\theta)$

(2) $\frac{\Delta f(z_0,\Delta z)}{\Delta z}=\sum\limits_{0}^{+\infty} c_n[(z_0+\Delta z)^n-z_0^n]\cdot\frac{1}{\Delta z}\overset{(*)}{=}\sum\limits^{+\infty} c_n\cdot q_n(\Delta z): q_n(\theta)=n\cdot z_0^{n-1}$;

$q_n(\Delta z)\cdot\Delta z\boxed{=}(z_0+\Delta z)^n-z_0^n=\Delta z[(z_0+\Delta z)^{n-1}+(z_0+\Delta z)^{n-2}\cdot z_0^1+\ldots+(z_0+\Delta z)^1\cdot z_0^{n-2}+z_0^{n-1}]$;

$\{(a+b)^n-a^n=[(a+b)-a]\cdot[(a+b)^{n-1}+(a+b)^{n-2}\cdot b^1+\ldots+(a+b)^1\cdot b^{n-2}+b^{n-1}]\}$

(3) $\delta=s-|z_0|<s<t<R: |\Delta z|<\delta \Rightarrow |q_n(\Delta z)|\le n\cdot(|z_0|+|\Delta z|)^{n-1}\le n\cdot s^{n-1}$

$\Rightarrow |c_n\cdot q_n(\Delta z)|\le |c_n|\cdot t^n\cdot\frac{1}{s}\cdot n\left(\frac{s}{t}\right)^n\le M(t)\cdot\frac{1}{s}\cdot n\cdot\left(\frac{s}{t}\right)^n$;

$\left(\sum\limits_{0}^{+\infty} n\cdot\left(\frac{s}{t}\right)^n<+\infty\right): \lim\limits_{+\infty}\sqrt[n]{n\left(\frac{s}{t}\right)^n}=1\cdot\frac{s}{t}<1$; $M(t)=\sup\limits_{n\ge 1}\{|c_n|\cdot t^n\}<+\infty : t<R$

(4) $\left(\frac{\Delta f(z_0,\Delta z)}{\Delta z}=\sum\limits_{1}^{+\infty} c_n\cdot q_n(\Delta z)\rightrightarrows : \Delta z\in B_\delta(\theta)\right)$:

$|c_n\cdot q_n(\Delta z)|\le\frac{1}{s}M(t)\cdot n\left(\frac{s}{t}\right)^n : B_\delta(\theta)\ \&\ \left(\sum n\left(\frac{s}{t}\right)^n<+\infty\right) \Rightarrow$

$\frac{\Delta f(z_0,\Delta z)}{\Delta z}$ - $\Delta z\in B_\delta(\theta)$ - H $\Rightarrow \exists f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0,\Delta z)}{\Delta z}=$

$=\lim\limits_{\Delta z\to\theta}\sum\limits_{1}^{+\infty} c_n\cdot q_n(\Delta z)=\sum\limits_{1}^{+\infty} c_n\cdot q_n(\theta)=\sum\limits_{1}^{+\infty} c_n\cdot n\cdot z_0^{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists f'(z_0)=\sum\limits_{1}^{+\infty} c_n\cdot n\cdot z_0^{n-1}=g(z_0): z_0\in B_R(\theta)$;

(5) $\exists f^{(2)}(z_0)=g'(z_0)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty} c_n\cdot n(n-1)z_0^{n-2}=\sum\limits_{0}^{+\infty} c_{n+2}\cdot n\cdot(n+1)z_0^n : B_R(\theta)\ldots$

$\exists f^{(k)}(z_0)=\sum\limits_{n=k}^{+\infty} c_n\cdot n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))z_0^{n-k}=\sum\limits_{n=k}^{+\infty} c_n\frac{n!}{(n-k)!}\cdot z_0^{n-k}=$

$=\sum\limits_{m=0}^{+\infty} c_{m+k}\frac{(m+k)!}{m!}\cdot z_0^m=\sum\limits_{0}^{+\infty} c_{n+k}\cdot\frac{(n+k)!}{n!}z_0^n : z_0\in B_R(\theta)$;

~~[3] Сумма КСР является регулярной КФКП в круге сх.~~

~~$\forall z_0\in B_R(\theta)\ \exists\left(f(z)=\sum\limits_{0}(c_n(z_0)(z-z_0)^n : B_r(z_0)\right)$; $r=R-|z_0|$~~

~~$\left(f(z)=\sum\limits_{0}^{+\infty} c_n z^n : B_R(\theta)\right)$~~

5.3. Комплексный степенной ряд: КСР:

[3] Коэф. КСР.:

(1) $f(z)=\sum^{+\infty} c_n z^n : B_R(\theta) \Rightarrow \forall k \geq 1\ f^{(k)}(\theta)=c_k \cdot k! \Rightarrow$

$f(z)=\sum_0^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!} z^n : B_R(\theta)$ – КСР является КСР Т своей су

(2) $\forall k \geq 1 : f^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n+k)}(\theta)}{n!} z^n : B_R(\theta)$

(3) Сумма КСР в круге сх. явл. D-КФКП, более того сумма КСР в круге сх. явл беск-дифф.

(4) $f(z)=\sum_0^{+\infty} c_n \cdot \cancel{z}^n : B_R(\theta) \Rightarrow \exists F(z)=\sum_0^{+\infty} \frac{c_n \cdot z^{n+1}}{n+1} : B_R(\theta) : F'(z)=f(z)$

5.4. Определение и свойства регулярной КФКП в области: $\boxed{\text{Р-КФКП}}$

[1] Опред. и свойства РКФКП:

(1) $w=f(z) : G_z \subseteq \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w$ – G-$\boxed{\text{рег}}$ $\Leftrightarrow$

$\forall z_0 \in G_z\ \exists B_\delta(z_0) \subseteq G_z : f(z)=\sum_0^{+\infty} c_n (z-z_0)^n : B_\delta(z_0)$

(2) Сумма и произведение Р-КФКП в обл. яв. Р-КФКП

$f(z), g(z)$ – G_z-$\boxed{\text{рег}}$ $\Rightarrow f(z)+g(z),\ f(z)\cdot g(z)$ – G_z-$\boxed{\text{рег}}$

(3) Пример Р-КФКП: $w=\frac{1}{z} : B_{|z_0|}(z_0)$ – $\boxed{\text{Р-КФКП}}$;

$\boxed{\frac{1}{z}=\sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z-z_0)^n : B_{|z_0|}(z_0)}$: $\square\ \left|-\frac{z-z_0}{z_0}\right|<1$:

$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-z_0)+z_0}=\frac{1}{z_0}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-z_0}{z_0}\right)}=\frac{1}{z_0}\cdot\sum_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z_0^n}(z-z_0)^n=\sum_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}}(z-z_0)^n$ ■

(4) Пример Р-КФКП: $\frac{1}{z_0+\Delta z}=\sum_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}}\cdot(\Delta z)^n : B_{|z_0|}(\theta)$

(5) Сумма КСР явл. Р-КФКП внутри круга сх.

$f(z)=\sum_0^{+\infty}\frac{c_n}{n!}z^n : B_R(\theta) \Rightarrow \forall z_0 \in B_R(\theta) : f(z_0+\Delta z)=\sum_0^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(\Delta z)^n$: $|\Delta z|<R-|z_0|$

[2] Р-КФКП в обл. явл. А-КФКП в обл.: $\boxed{P(G_z) \subseteq A(G_z)}$

п. 6. Аналитические и регулярные КФКП – АКФКП, РКФКП.
Интегральная теорема Коши – ИТК:

$\boxed{6.1.}$ АКФКП: $w = f(z) = u(z) + i\cdot v(z) : G_z \subset \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w$:

$f(z) - G_z - \boxed{\text{ан}} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall z_0 \in G_z : f(z) - z_0 - \boxed{\text{д}}$

[1] Крит. $\boxed{\text{ан}}$ КФКП с $\boxed{\text{н-д}}$ компонент:

$f(z): u'_x(z), u'_y(z); v'_x(z), v'_y(z) - G_z - \boxed{\text{н}}$:

$f(z) - G_z - \boxed{\text{ан}} \Longleftrightarrow \boxed{u'_x(z) = v'_y(z) \;\&\; u'_y(z) = -v'_x(z)} : z \in G : \boxed{\text{К-Р}}$

□ $f(z) - z_0 \in G - \boxed{\text{д}} \Longleftrightarrow u(z), v(z) - z_0 \in G - \boxed{\text{д}} \;\&\; u'_x(z_0) = v'_y(z_0) \;\&\; u'_y(z_0) = -v'_x(z_0)$:

$h(z): B_\delta(z_0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1 : h'_x, h'_y - z_0 - \boxed{\text{н}} \Rightarrow h(z) - z_0 \in \mathbb{R}^2 - \boxed{\text{д}}$ ■

[2] Крит. $\boxed{\text{ан}}$ КФКП (Н) в общ. – П. Монтель, Г. Лумен, Д.Е. Меньшов

$f(z) - G - \boxed{\text{н}} : f(z) - G - \boxed{\text{ан}} \Longleftrightarrow u'_x(z) = v'_y(z) \;\&\; u'_y = -v'_y(z) : G : \boxed{\text{К-Р}}$

[3] Свойства $\boxed{\text{АКФКП}}$:

(1) $f(z), g(z) - G_z - \boxed{\text{ан}} \Rightarrow f(z) + g(z), f(z)\cdot g(z), \dfrac{f(z)}{g(z)} - G_z - \boxed{\text{ан}}$;

(2) $f(z) - G_z - \boxed{\text{ан}} \;\&\; g(w) - G_w - \boxed{\text{ан}} : f(G_z) \subseteq G_w \Rightarrow g(f(z)) - G_z - \boxed{\text{ан}}$

(3) Аналитич. элем. $\boxed{\text{КФКП}}$:

$z^n - \mathbb{C}_z - \boxed{\text{ан}}$; $0 \le n$; $z^n - \mathbb{C}_z - \{0\} - \boxed{\text{ан}} : n < 0$;

$e^z - \mathbb{C}_z - \boxed{\text{ан}}$; $\sin z, \cos z - \mathbb{C}_z - \boxed{\text{ан}}$.

$\boxed{6.2.}$ РКФКП: $w = f(z) = u(z) + i\cdot v(z) : G_z \subset \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w$:

$f(z) - G_z - \boxed{\text{рег}} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall z_0 \in G_z \;\exists B_\delta(z_0) \subset G_z : f(z) = \sum_0^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$

[1] $\boxed{\text{РКФКП}}$ является $\boxed{\text{АКФКП}}$: (5.17):

$f(z) - G_z - \boxed{\text{рег}} \Rightarrow f(z) - G_z - \boxed{\text{ан}}$

□ 5.3.[5]: $f(z) = \sum_0^{+\infty} c_n (z - z_0)^n : B_\delta(z_0) \Rightarrow \exists f'(z) = \sum_1^{+\infty} n\cdot c_n (z - z_0)^{n-1} : B_\delta(z_0)$ ■

[2] $\boxed{\text{РКФКП}}$ является $\boxed{\text{Б-д}}$ – бесконечно-дифференцир.:

$f(z) - G_z - \boxed{\text{рег}} \Rightarrow \forall n \ge 1 \;\exists f^{(n)}(z) : G_z \subset \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w$:

$\forall z_0 \in G_z \;\exists B_\delta(z_0) \subseteq G_z : f(z) = \sum_0^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

$n!\,c_n =$

$\boxed{6.3.}$ Интегральная теорема Коши $\boxed{\text{ИТК}}$ для $\boxed{\text{ОСОБ}}$:

[1] $\boxed{\text{ИТК}}$ для $\boxed{\text{АКФКП}}$ с $\boxed{\text{н-д}}$ част. и пр. компонент в односв. обл.

$w = f(z) = u(z) + i\,v(z) : G_z \subset \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w \; : \; G_z - \boxed{\text{од-св-об}}$;

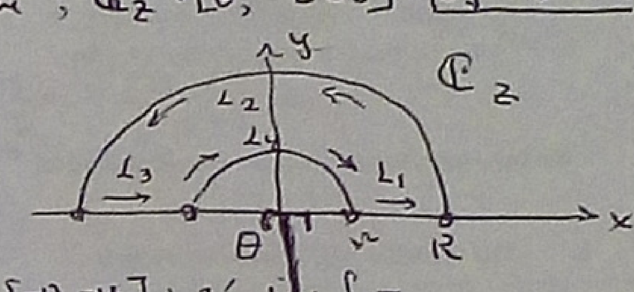
$u'_x, u'_y ; v'_x, v'_y - G_z - \text{н-д} \;\Longrightarrow\; \forall L \subset G_z - \boxed{\text{П-З-К-Г-К}} \;\; \boxed{\oint_L f(z)\,dz = \theta}$

$\square \; \oint_L f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta (u+iv)(x' + iy')\,dt = \int_\alpha^\beta (u x' - v y')\,dt + i\int_\alpha^\beta (v x' + u\cdot y')\,dt =$

$= \oint_L u\,dx - v\,dy + i\oint_L v\,dx + u\,dy \overset{\boxed{\text{ФГ}}}{=} \iint_{G_L} \big(\underbrace{-v'_x - u'_y}_{\boxed{\text{У-К-Р}}}\big)\,dx\,dy + i\iint_{G_L}\big(\underbrace{u'_x - v'_y}_{\boxed{\text{У-К-Р}}}\big)\,dx\,dy = \theta$ ■

[2] $\boxed{\int_{0+0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}}$: $f(z) = \frac{e^{iz}}{z} - \mathbb{C}_z \setminus \{\theta\} - \text{ан}$; $\mathbb{C}_z \setminus [\theta, -i\infty] - \boxed{\text{од-св-об}}$

$f(x) = \frac{e^{ix}}{x} = \frac{\cos x}{x} + i\,\frac{\sin x}{x}$



$L_{(r,R)} = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 - \boxed{\text{П-З-К-Г-К}} \;\Longrightarrow$

$\theta = \oint_{L(r,R)} f(z)\,dz = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} + \int_{L_4}$:

(L_1) : $z = x \in [r, R] : z' = 1 : \int_{L_1} = \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx$; (L_3) : $z = x \in [-R, -r] : z' = 1 : \int_{L_3} =$

$= \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \int_R^r \frac{e^{-it}}{-t}(-1)\,dt = -\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x}\,dx \;\Longrightarrow\; \int_{L_1} + \int_{L_3} = \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\,dx = 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx \;\Longrightarrow$

$\boxed{\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}} [\mathcal{I}_1(r,R) + \mathcal{I}_3(r,R)] = 2i\int_{0+0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx}$ (L_2) : $z = Re^{it} : [0, \pi] : z' = iRe^{it}$:

$\int_{L_2} = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}}\, iRe^{it}\,dt = i\int_0^\pi e^{iRe^{it}}\,dt = i\int_0^\pi e^{iR\cos t - R\sin t}\,dt \;\Longrightarrow$

$\left|\int_{L_2}\right| \le \int_0^\pi e^{-R\sin t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,dt \overset{(\le)}{\le} 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\cdot\frac{2}{\pi}t}\,dt = \frac{2\cdot\pi}{-2\cdot R}\, e^{-\frac{2R}{\pi}t}\Big|_0^{\pi/2} =$

$= \frac{\pi}{R}\left(1 - \frac{1}{e^R}\right) \;\Longrightarrow\; \boxed{\lim_{R\to+\infty} \mathcal{I}_{L_2}(R) = \theta}$ (L_4) : $z = re^{it} : [\pi, 0] : z' = re^{it}\cdot i$:

$\int_{L_4} = -\int_0^\pi \frac{e^{ire^{it}}}{re^{it}}\, re^{it}\, i\,dt = -i\int_0^\pi e^{ire^{it}}\,dt$ $\boxed{\lim_{r\to 0} \int_{L_4}(r) = -i\int_0^\pi d\varphi = -i\pi}$:

$\lim_{\theta} e^{iz} = 1 \Rightarrow \forall \varepsilon\; \exists \delta\; (|z| < \delta \Rightarrow |e^{iz} - 1| < \varepsilon \Rightarrow$

$r < \delta : \left|\int_0^\pi (e^{ire^{i\varphi}} - 1)\,d\varphi\right| \le \int_0^\pi \varepsilon\,d\varphi = \pi\varepsilon) \;\Longrightarrow\; \lim_{r\to 0} \int_0^\pi e^{ire^{it}}\,dt = \int_0^\pi d\varphi = \pi$

$\Longrightarrow\; \theta = \oint_{L(r,R)} = \int_{L_1(r,R)} + \int_{L_3(r,R)} + \int_{L_2(R)} + \int_{L_4(r)} \;\Rightarrow\; \theta = 2i\int_{0+0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx + \theta - i\pi$

$(\le)$ $\frac{\sin\varphi}{\varphi} \ge \frac{2}{\pi} : [0, \frac{\pi}{2}] : \alpha(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\varphi} - (\downarrow) - (0, \frac{\pi}{2}) : \frac{\sin\varphi}{\varphi} = \alpha(\varphi) \ge \alpha(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$

$(\downarrow)$ $\alpha'(\varphi) = \frac{\cos\varphi\cdot\varphi - \sin\varphi}{\varphi^2} = \frac{\cos\varphi}{\varphi^2}(\varphi - \operatorname{tg}\varphi) < 0$; $0 < \varphi < \operatorname{tg}\varphi$ ■

$\boxed{6.3}$ ИТК:

[3] $\boxed{\text{ИТК}}$ - $\boxed{\text{АКФ КП}}$ - односвяз обл.

(1) $\boxed{\text{ИТК}}$ - $\boxed{\text{АКФКП}}$ - в одно-связ ОБ - $\boxed{\text{ОСОБ}}$:

$w = f(z) - G_z - \boxed{\text{ан}}$ & $G_z - \boxed{\text{ОСОБ}}$: $\partial G_z - \boxed{\text{1СМ}}$: $\partial G_z = \mathcal{L}_0 - \boxed{\text{П-3-КГК}}$

$\Longrightarrow \forall \mathcal{L} \subset G_z : \oint_L f(z)\,dz = \theta : L - \boxed{\text{П-3-КГК}} \Longleftrightarrow$

$\forall L'[z_0, z_1], L''[z_0, z_1] \subset G_z : \exists \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz \overset{def}{=} \int_{L'} f(z)\,dz = \int_{L''} f(z)\,dz$

(2) $\forall \Delta \subset G_z : \oint_\Delta f(z)\,dz = \theta : \Delta(z_0, z_1, z_2) \subset G_z$; $\Delta_3 = G_\Delta$;

(3) $\forall P \subset G_z : \oint_P f(z)\,dz = \theta : P = \Delta(z_0, z_1, \dots, z_n, z_0) : \Delta_{n+1} = G_P = \sum_{k=1}^{m} \Delta_3^k$;

(4) Лемма Гурса: $\forall L_0[z_0, z'] \subset G_z, 0 < \varepsilon_0\ \exists P_0[z_0, z'] = \bigcup_{k=1}^{m} [z_{k-1}, z_k] \subset G_z$:

$z_k \in L : k = \overline{0,m}, z' = z_m : |\int_{L_0} f(z)\,dz - \int_{P_0} f(z)\,dz| < \varepsilon_0$

(5) $|\oint_L f(z)\,dz| = |\oint_L f(z)\,dz - \oint_P f(z)\,dz| < \varepsilon : \forall \varepsilon \Rightarrow |\oint_L f(z)\,dz| = 0$

$\boxed{(2)}$ $\forall \Delta \subset G\ \oint_\Delta f(z)\,dz = \theta$: $0 \le \alpha_0 = |\oint_\Delta f(z)\,dz|$: $\Delta = \bigcup_{i=\overline{1,4}} \Delta^i$: $\Delta = \bigcup_{\overline{1,4}} \Delta^i$:

$\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4$ - образованы 3-я средними линиями Δ : Чертеж:

$l_0 = l(\Delta), d_0 = diam(\Delta)$; $l(\Delta^i) = \frac{l_0}{2}, d(\Delta^i) \le \frac{d_0}{2}$;

$\oint_\Delta f(z)\,dz = \sum_1^4 \oint_{\Delta^i} f(z)\,dz \Rightarrow \exists \Delta_1 = \Delta^{i*} : 0 < \frac{\alpha_0}{4} \le |\oint_{\Delta_1} f(z)\,dz| : l_1 = l(\Delta_1) = \frac{l_0}{2^1}$,

$d_1 = d(\Delta_1) \le \frac{d_0}{2^1}$: $\Delta_1 = \bigcup_{\overline{1,4}} \Delta_1^i$: $\oint_{\Delta_1} f(z)\,dz = \sum_1^4 \oint_{\Delta_1^i} f(z)\,dz \Rightarrow \exists \Delta_2 = \Delta_2^{i_2}$:

$0 < \frac{\alpha_0}{4^2} \le |\oint_{\Delta_2} f(z)\,dz| : l_2 = l(\Delta_2) = \frac{l_0}{2^2}, d_2 = d(\Delta_2) \le \frac{d_0}{2^2} \Rightarrow \dots \Rightarrow$

$\exists \{\Delta_n - \Downarrow\} : |\oint_{\Delta_n} f(z)\,dz| \ge \frac{\alpha_0}{4^n} : l_n = \frac{l_0}{2^n}, d_n \le \frac{l_0}{2^n} : \exists! z_0 = \bigcap_1^{+\infty} \Delta_n$;

$f(z) - z_0 - \boxed{\text{д}} \Rightarrow \forall \varepsilon\ \exists \delta_0, n_0 : \Delta_{n_0} \subseteq B_\delta(z_0) : |\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)| < \varepsilon$

$\Rightarrow |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon \cdot |z - z_0| \le \varepsilon \frac{d_0}{2^{n_0}}$; $\oint_{\Delta_{n_0}} dz = \theta = \oint_{\Delta_{n_0}} z\,dz$;

$\Rightarrow \oint_{\Delta_{n_0}} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]\,dz = \oint_{\Delta_{n_0}} f(z)\,dz - \theta \Rightarrow \forall \varepsilon\ \exists n_0$

$\frac{\alpha_0}{4^{n_0}} \le |\oint_{\Delta_{n_0}} f(z)\,dz| \le \frac{\varepsilon \cdot d_0}{2^{n_0}} l(\Delta_{n_0}) = \frac{\varepsilon d_0 \cdot l_0}{2^{n_0} \cdot 2^{n_0}} \Rightarrow \forall \varepsilon\ 0 \le \alpha_0 \le \varepsilon \cdot d_0 \cdot l_0 \Rightarrow \alpha_0 = 0.$

$\boxed{(4)}$ Лемма Гурса: $\forall L_0(z_0, z'] \subset G_z, 0 < \varepsilon_0\ \exists P_0[z_0, z'] = \bigcup_1^m [z_{k-1}, z_k] \subset G_z$:

$\sup\{|z - \tilde{z}| : z \in [z_{k-1}, z_k], \tilde{z} \in L[z_{k-1}, z_k]\} < \frac{\varepsilon_0}{l(L_0) \cdot 2} \Rightarrow |\int_{[z_{k-1}, z_k]} f(z)\,dz - \int_{L[z_{k-1}, z_k]} f(z)\,dz| \le$

$\le |\int_{[z_{k-1}, z_k]} f(z)\,dz - f(z_k)(z_k - z_{k-1})| + |\int_{L[z_{k-1}, z_k]} f(z)\,dz - f(z_k)(z_k - z_{k-1})| =$

$= |\int_{[z_{k-1}, z_k]} [f(z) - f(z_k)]\,dz| + |\int_{L[z_{k-1}, z_k]} [f(z) - f(z_k)]\,dz| \le \frac{\varepsilon_0}{2 l_0} \cdot |z_k - z_{k-1}| + \frac{\varepsilon_0}{2 l_0} l_k : l_k = l(L[z_{k-1}, z_k])$

$\le \frac{\varepsilon_0 l_k}{2 l_0} \cdot 2 = \frac{\varepsilon_0 l_k}{l_0} \Rightarrow |\oint_{L_0} f(z)\,dz - \oint_{P_0} f(z)\,dz| \le \sum_1^m |\int_{[z_{k-1}, z_k]} f(z)\,dz - \int_{L[z_{k-1}, z_k]} f(z)\,dz| < \sum_1^m \frac{\varepsilon_0 l_k}{l_0} = \varepsilon_0$

---

(6) Усилен $\boxed{\text{ИТК}}$: $f(z) - G_L - \boxed{\text{ан}}$ & $\overline{G_L} - \boxed{\text{н}} \Rightarrow \boxed{\oint_L f(z)\,dz = \theta}$ без д... □

6.4. <u>ИТК – АКФКП – $(m+1)$-связн.</u> $\boxed{\text{ОБ}}$:

[1] $G(L_0, \{L_k\}_1^m) = G_{L_0} \cap (\bigcap_{k=1}^{m} \tilde{G}_{L_k})$ – $(m+1)$-св $\boxed{\text{ОБ}}$:

$L_0, L_k : k = \overline{1,m}$ – $\boxed{\text{П-З-КГК}}$: $L_k \subset G_{L_0} : k = \overline{1,m}$;

$\overline{G}_{L_i} \cap \overline{G}_{L_j} = \varnothing : i \neq j$

(1) $B_R(z_0)$ – $\boxed{\text{1-св}}$ $\boxed{\text{ОБ}}$: $L_0 = S_R(z_0)$

$K_{(R,r)}(z_0)$ – $\boxed{(1+1=2)\text{-св}}$. $\boxed{\text{ОБ}}$: $L_0 = S_R(z_0)$, $L_1 = S_r(z_0)$

[2] $\underset{G_0'}{\overset{\shortparallel}{G(L_0', \{L_k'\}_1^m)}} \subset G(L_0, \{L_k'\}_1^n) = G_0$;

$w = f(z) : G_0 \subset \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w$ – $\boxed{\text{АКФКП}}$:

$$\boxed{\oint_{L_0'} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \oint_{L_k'} f(z)\,dz}$$

[3] $G_0 = G(L_0, L_1) = G_{L_0} \cap \tilde{G}_{L_1}$ – $\boxed{\text{2-х}}$ св. об.:

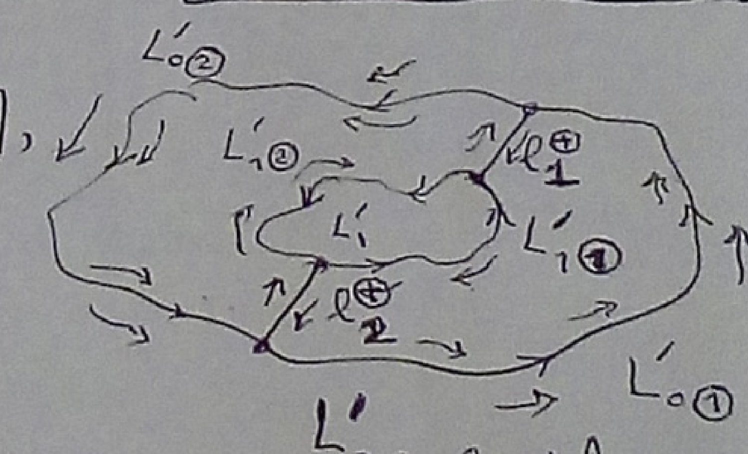
$w = f(z) : G_0 \subset \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w$ – $\boxed{\text{АКФКП}}$ $\Rightarrow$

$\forall L_0', L_1' \subset G_0 : L_1' \subset G_{L_0'}$ & $L_1 \subset G_{L_1'}$ $\quad \boxed{\oint_{L_0'} f(z)\,dz = \oint_{L_1'} f(z)\,dz}$

□ $L_0'^{\oplus} = L_{0①}' \cup L_{0②}'$ & $L_1'^{\ominus} = L_{1①}'^{\ominus} \cup L_{1②}'^{\ominus}$;

$L_2 = L_{0①}' \cup \ell_1^{\oplus} \cup L_{1①}'^{\ominus} \cup \ell_2^{\oplus}$ – $\boxed{\text{П-З-КГК}}$,

$L_3 = L_{0②}' \cup \ell_2^{\ominus} \cup L_{1②}'^{\ominus} \cup \ell_1^{\ominus}$ – $\boxed{\text{П-З-КГК}}$



$\Rightarrow f(z)$ – G_{L_2}, G_{L_3} – $\boxed{\text{ан}}$ $\Longrightarrow$

$\oint_{L_2} f(z)\,dz = \theta = \oint_{L_3} f(z)\,dz \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = \oint_{L_{0①}' \cup L_{0②}'} f(z)\,dz + \oint_{L_{1①}'^{\ominus} \cup L_{1②}'^{\ominus}} f(z)\,dz = \oint_{L_0'^{\oplus}} f(z)\,dz + \oint_{L_1'^{\ominus}} f(z)\,dz =$

$= \oint_{L_0'^{\oplus}} f(z)\,dz - \oint_{L_1'^{\oplus}} f(z)\,dz \Rightarrow \oint_{L_0'} f(z)\,dz = \oint_{L_1'} f(z)\,dz$ ☒

6.5. Существование первообразной для $\boxed{АКФКП}$ в односвязной области.

[1] Существование первообразной для $\boxed{НКФКП}$ в односвязной обл с инт не завис. от пути ин

(1) $w=f(z): \overline{G_z}\subset\mathbb{C}_z\to\mathbb{C}_w-\boxed{н}: G_z$ - односвязн. обл.:

$\forall L\subset G_z: \oint_L f(z)\,dz=0 \iff \forall L'(z_1,z_2), L''(z_1,z_2): \int_{L'} f(z)\,dz=\int_{L''} f(z)\,dz$

$\Rightarrow \exists F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi: G_z\subset\mathbb{C}_z\to\mathbb{C}_w-\boxed{од}: F'_z(z)=f(z)$

(2) $\frac{\Delta F(z,\Delta z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\left\{\int_z^{z+\Delta z} f(\xi)\,d\xi-f(z)[(z+\Delta z)-z]\right\}\boxed{=}(1)$

$=\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}[f(\xi)-f(z)]\,d\xi;\ f(\xi)-z\in G_z-\boxed{н}\Rightarrow\forall\varepsilon\ \exists\delta$

$(|\Delta z|<\delta\Rightarrow \sup_{\xi\in[z,z+\Delta z]}|f(\xi)-f(z)|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{\Delta F(z,\Delta z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\frac{1}{\Delta z}(\varepsilon\cdot\Delta z)=\varepsilon)$

$\Rightarrow\exists F'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta F(z,\Delta z)}{\Delta z}=f(z): z\in G_z$ ⊠

[2] Сущ первообр. для $\boxed{АКФКП}$ в односвяз. обл.

$w=f(z): \overline{G_z}\subset\mathbb{C}_z\to\mathbb{C}_w-\boxed{ан}\cdot G_z$ - односвяз. обл.:

$\Rightarrow\exists F(z)=\int_{L[z_0,z]} f(\xi)\,d\xi: G_z\subset\mathbb{C}_z\to\mathbb{C}_w-\boxed{од}: F'(z)=f(z)$

[3] Единств. первообр. для $\boxed{АКФКП}$ в односвяз обл

$w=f(z): \overline{G_z}\subset\mathbb{C}_z\to\mathbb{C}_w-\boxed{ан}: G_z$ - односвяз. обл.:

$\exists\Phi'(z)=f(z): G_z\Rightarrow\exists c_0\in\mathbb{C}: \Phi(z)=F(z)+c_0: G_z: c_0=\Phi(z_0);$ $F(z_0)=0$

$\exists\varphi(z)=\Phi(z)-F(z)=u(z)+i\cdot v(z)-G_z-\boxed{ан}\Rightarrow$

$0=\varphi'(z)=u'_x(z)+i\cdot v'_x(z)=v'_y(z)-i\cdot u'_y(z): z\in G_z\Rightarrow$

$u'_x(z)=0=u'_y(z)\ \&\ v'_x(z)=0=v'_y(z): G_z \Rightarrow\ ?$

$\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}: u(z)=\alpha\ \&\ v(z)=\beta: G\Rightarrow$

$\exists c_0=\alpha+i\beta=u(z)+i\,v(z)=\varphi(z)=\Phi(z)-F(z): G_z$ ⊠

[4] Формула $\boxed{Н\text{-}Л}$: $\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi=\Phi(z)-\Phi(z_0): \Phi'(z)=f(z): G_z$

□ $\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi=F(z)=\Phi(z)-c_0=\Phi(z)-\Phi(z_0)$ ⊠

[5] Первообразная для суммы $\boxed{КСР}$ в кр. сх. (10.08):

$f(z)=\sum_0^{+\infty}c_n z^n: B_\sigma(0)\Rightarrow F(z)=\sum_0^{+\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1}+c_0: B_\sigma(0)$

п.7. Интегральная формула Коши – $\boxed{\text{ИФК}}$.
Интеграл типа Коши – $\boxed{\text{ИТиК}}$.

7.1. ИФК : $w = f(z) : G_z$ – $\boxed{\text{ан}}$; $L \subset G_z : G_L \subset G_z$! $\boxed{z_0 \in G_L}$

[1] $z_0 \in G_L \Rightarrow \oint_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$ $\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-z_0} dz}$ $\boxed{\text{ИФК}}$

(1) $\exists B_{\delta_0}(z_0) \subset G_L \Rightarrow \forall \delta < \delta_0 : \frac{f(z)}{z-z_0} - z \in G(L, S_{\frac{\delta}{2}}(z_0)) = G_L \cap B^c_{\frac{\delta}{2}}[z_0]$

– $\boxed{\text{ан}}$ в 2-х связ. $\boxed{\text{ОБ}}$: $\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \oint \frac{f(z)}{z-z_0} dz =$ $\quad S_\delta(z_0) = \gamma : |z - z_0| = \delta$

$= \int_{S_\delta(z_0)} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz + f(z_0) \oint \frac{dz}{z-z_0} = J(\delta) + 2\pi i \cdot f(z_0)$:

$\oint_{S_\delta(z_0)} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\delta e^{it} i}{\delta e^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$

$S_\delta(z_0) : z - z_0 = \delta e^{it} : [0, 2\pi]$, $z' = \delta \cdot e^{it} \cdot i$

(2) $J(\delta) = \oint_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz - 2\pi i \cdot f(z_0) = J_0 = \text{const}$ (!) ;

$|J_0| = \left| \oint_{S_\delta(z_0)} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} [f(z_0+\delta e^{it}) - f(z_0)] \frac{\delta e^{it} \cdot i}{\delta \cdot e^{it}} dt \right| =$

$= \left| \int_0^{2\pi} [f(z_0+\delta e^{it}) - f(z_0)] dt \right| \le \sup_{[0,2\pi]} |f(z_0+\delta e^{it}) - f(z_0)| \cdot 2\pi \le$

$\le \sup_{B_\delta[z_0]} |f(z) - f(z_0)| \cdot 2\pi = \omega(f, B_\delta[z_0]) \cdot 2\pi \Rightarrow \boxed{|J_0| \le 2\pi \cdot \omega(f, B_\delta[z_0])}$

(3) $f(z)$ – z_0 – $\boxed{\text{Н}}$ $\Rightarrow \forall \varepsilon \; \exists \delta : \sup_{B_\delta[z_0]} |f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \Rightarrow |J_0| < 2\pi \cdot \frac{\varepsilon}{2\pi} = \varepsilon$

$\Rightarrow |J_0| = 0 \Rightarrow J_0 = \Theta \Rightarrow \oint_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$

---

[2] $z_0 \in \tilde{G}_L \Rightarrow \oint_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \Theta$; $z_0 \in G_z \cap \tilde{G}_L$;

$z_0 \in \tilde{G}_L \Rightarrow \exists B_\delta(z_0) \cap G_0 = \varnothing : G_L \subset G_0 \subset G_z : \frac{f(z)}{z-z_0} - z \in G_0$ – $\boxed{\text{ан}}$

$\overset{\boxed{\text{ИТК}}}{\Rightarrow} \oint_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \Theta$

[3] $z_0 \in L$: $\nexists$ и значение $\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz$ требует доп. исслед.

[4] Теорема о среднем : $w = f(z)$ – $B_{\delta_0}(z_0)$ – $\boxed{\text{ан}}$ $\Rightarrow \forall \delta < \delta_0$

$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{it}) dt}$ $\square$ $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_\delta[z_0]} \frac{f(z)}{z-z_0} dz =$

$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0+\delta e^{it}) \frac{\delta e^{it} \cdot i}{\delta e^{it}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{it}) dt$ ☒

7.2. Принцип „максимума" модуля $\boxed{АК+КП}$ в $B_\delta(z_0)$

[1] $w=f(z): B_\delta(z_0)\subset \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w - B_\delta(z_0)$ - $\boxed{\text{ан}}$ &
$w=f(z)\neq const : B_\delta(z_0) \mapsto \boxed{|f(z_0)| < \sup\limits_{B_\delta(z_0)} |f(z)|} = M$

(1) $|f(z_0)| \leq M = \sup\limits_{B_\delta(z_0)} |f(z)|$:

$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+\delta_0 e^{it})\,dt : \delta_0<\delta \Rightarrow |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot \sup\limits_{S_{\delta_0}(z_0)} |f(z)|\cdot 2\pi \leq M$;

(2) $|f(z_0)| \neq M$:

(от пр.) $|f(z_0)| = M \Rightarrow |f(z)| = \overset{const}{\overset{\shortparallel}{M}} : B_\delta(z_0)$ $\boxed{\Rightarrow \cancel{|f(z)|\ const : B_\delta(z_0)}}$;

$\boxed{\mapsto} f(z)=const : B_\delta(z_0)$ & $f(z)\neq const : B_\delta(z_0)$ - против.

(3) $\Rightarrow$ $|f(z_0)| = M \Rightarrow |f(z)| = M : B_\delta(z_0)$:

~~[illegible]~~

$\exists z'\in B_\delta(z_0) : |f(z')| < M \Rightarrow \exists\,(t_0-\delta, t_0+\delta)$:

$|f(z_0+|z'-z_0|e^{it})| < M \Rightarrow \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |f(z_0+|z'-z_0|\cdot e^{it})|\,dt < M\cdot 2\delta$

$\mapsto M = |f(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_0-\pi}^{t_0-2\pi} f(z_0+|z'-z_0|\cdot e^{it})\,dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_0-\pi}^{t_0-\delta} |\ldots|\,dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |\ldots|\,dt +$

$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_0+\delta}^{t_0+\pi} |\ldots|\,dt \leq \frac{1}{2\pi} M\left[(-\delta+\pi)+(\pi-\delta)\right] + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |\ldots|\,dt < \frac{M}{\pi}(\pi-\delta) + \frac{M}{2\pi}(2\delta) = M$

$\Rightarrow M<M$ - против $\Rightarrow |f(z)| = M : B_\delta(z_0)$

(4) $\boxed{\mapsto}$ $|f(z)| = M : B_\delta(z_0) \Rightarrow f(z) = const : B_\delta(z_0)$:

$0 < M^2 = u^2(z)+v^2(z) : B_\delta(z_0) : f(z) = u(z)+iv(z)$ &

$\begin{Bmatrix} 0 = 2u'_x u + 2v'_x\cdot v \\ 0 = 2u'_y\cdot u + 2v'_y v \end{Bmatrix} : B_\delta(z_0) \overset{(КР)}{\Longrightarrow} \begin{Bmatrix} u'_x\cdot u - u'_y\cdot v = 0 \\ u'_x\cdot v + u'_y\cdot u = 0 \end{Bmatrix} : B_\delta(z_0)$:

$\Delta(z) = u^2+v^2 = M > 0 : B_\delta(z_0) \Rightarrow u'_x(z) = 0 = u'_y(z) : B_\delta(z_0)$ &

$v'_y(z) = u'_x(z) = 0 = u'_y(z) = -v'_x(z) : B_\delta(z_0) \Longrightarrow u(z) = c_1$ & $v(z) = c_2 : B_\delta(z_0)$

$\Rightarrow f(z) = c_1 + i c_2 = c_0 = const : B_\delta(z_0)$

(5) $|f(z_0)| \neq M = \sup\limits_{B_\delta(z_0)} |f(z)| \Rightarrow |f(z_0)| < \sup\limits_{B_\delta(z_0)} |f(z)| = M$

[2] $w=f(z): G_z \subset \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w - G_z$ $\boxed{\text{ан}}$: $f(z)\neq const$

$\Rightarrow \forall z_0 \in G_z : |f(z_0)|\ \boxed{<}\ \sup\{|f(z)| : z\in G_z\}$

Z.3. Интеграл типа Коши – $\boxed{\text{ИТиК}}$

[1] ИТиК – определение, аналитичность и беск. дифф.

(1) $w=f(z): L\subset\mathbb{C}_z\to\mathbb{C}_w$ – Н : L – $\boxed{\text{П-КГК}}$ $\models\Rightarrow$ – $\boxed{\text{ИТиК}}$

$\exists\, F(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(z)}{z-z_0}dz\ ;\ \mathbb{C}_{z_0}\setminus L\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

(2) $F(z_0)$ – $z_0\in\mathbb{C}\setminus L$ – $\boxed{\text{д}}$: $F'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$

□ $z_0\notin L\Rightarrow 0<d=\inf\limits_{z\in L}|z-z_0| : \delta<d\ \&\ \delta=d-\delta\ ;\ |\Delta z|<\delta$:

$\frac{\Delta F(z_0,\Delta z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(z)}{(z-(z_0+\Delta z))(z-z_0)}\ \models\Rightarrow\ \frac{\Delta F(z_0,\Delta z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz=$

$=\int_L\frac{\Delta z\cdot f(z)\,dz}{(z-(z_0+\Delta z))(z-z_0)^2}\Rightarrow\left|\frac{\Delta F(z_0,\Delta z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}\right|\le\frac{|\Delta z|\cdot M(f)\cdot\ell(L)}{\delta\cdot\delta^2}$

$\Rightarrow\exists\, F'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta F(z_0,\Delta z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$ $\boxtimes$

(!) (3) $\forall n>1\ \exists\, F^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_L\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}$

[2] $\boxed{\text{АФКП}}$ ан. $\boxed{\text{б-д}}$; ОИФК:

(1) $w=f(z): G_z\subset\mathbb{C}_z\to\mathbb{C}_w$ – $\boxed{\text{ан}}$ $\models\Rightarrow\forall n>1\ \exists\, f^{(n)}(z): z\in G_z$;

(2) $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz : z_0\in G_L\subset\mathbb{C}_z$ – $\boxed{\text{ОИФК}}$

□ $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)}{z-z_0}dz$ – $z_0\in G_L$ – $\boxed{\text{ИТиК}}$ $\Rightarrow\forall n\ge 1$

$\exists\, f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ $\boxtimes$

(3) Теорема Морера – обращение $\boxed{\text{ИТК}}$ для $\boxed{\text{НКФКП}}$:

$w=f(z): G_z\subset\mathbb{C}_z\to\mathbb{C}_w$ – $\boxed{\text{н}}$: G_z – $\boxed{\text{ОдСвОБ}}$;

$\forall\oint_L f(z)dz=\Theta : L\subset G_z\Rightarrow w=f(z)$ – G_z – $\boxed{\text{ан}}$

□ $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\xi)d\xi : G_z\to\mathbb{C}$ – $\boxed{\text{ан}}$: $F'(z)=f(z): G_z\overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$\forall n\ge 1\ \exists\, f^{(n)}(z)=F^{(n+1)}(z): G_z$ $\boxtimes$

[3] Теорема о среднем для произв. $\boxed{\text{АКФКП}}$; $R<\delta_0$

$w=f(z): B_{\delta_0}(z_0)\to\mathbb{C}$ – $\boxed{\text{ан}}$ $\Rightarrow\forall n\ge 1$ $\boxed{f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{it})e^{-int}dt}$

□ $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{S_R(z_0)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{n!}{2\pi\cancel{i}}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{it})\cdot\frac{\cancel{R}e^{it}\cancel{i}}{R^{n+\cancel{1}}e^{it(n+1)}}dt$ $\boxtimes$

(*) $F(\infty)=\lim\limits_{\infty}F(z_0)=\Theta : |F(z_0)|\le\frac{\ell(L)M_f}{2\pi(|z_0|-\rho)} : L\subset B_\rho(\Theta)$