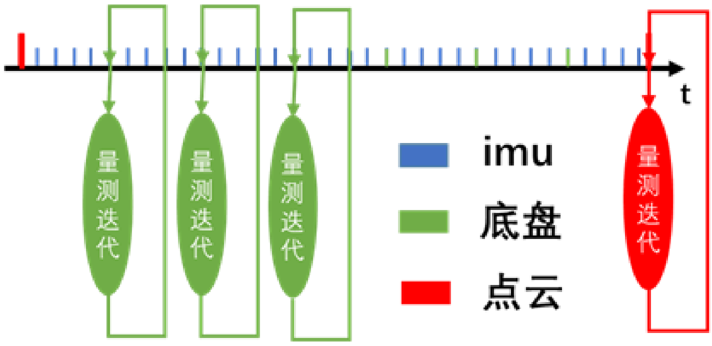
二自由度模型作观测的FAST-LIO改

本文在FAST-LIO的imu-lidar的ESIKF算法基础上，添加了一个车辆二自由度动力学模型作为观测方程，基本思路如下所示：



保持imu作为状态预测和协方差预测，当收到一帧底盘观测的前轮转角信息和车速信息时，将当前状态投影到车辆坐标系V下，构建出残差表达式。因此，本文进行了添加二自由度模型的ESIKF算法的观测方程及其雅可比推导。

车辆二自由度模型

不再赘述，给出稳态响应时的质心侧偏角和横摆角速度表达式：

$$\beta = \frac{1 - \frac{m}{2l}\frac{l_f}{l_r k_r}v^2}{1 + Kv^2}\frac{l_r}{l}\alpha$$
$$\omega = \frac{1}{1 + Kv^2}\frac{v}{l}\alpha$$

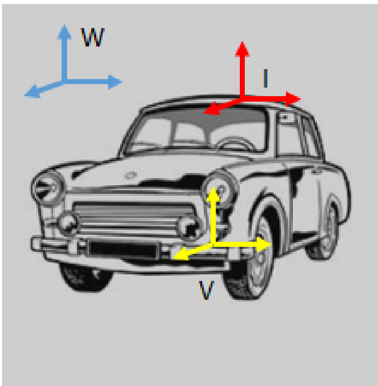
其中$l = l_r + l_f$，K为稳定性因数：

$$K = \frac{m}{l^2}\left(\frac{l_f}{k_r} - \frac{l_r}{k_f}\right)$$

状态量

$$\mathbf{x} = [{}^G\mathbf{p}_I^\top, {}^G\mathbf{R}_I^\top, {}^I\mathbf{R}_L^\top, {}^I\mathbf{p}_L^\top, {}^G\mathbf{v}_I^\top, \mathbf{b}_\omega^\top, \mathbf{b}_\mathbf{a}^\top, {}^G\mathbf{g}^\top, {}^I\mathbf{R}_V^\top, {}^I\mathbf{p}_V^\top] \in \mathcal{M}$$

其中G代表大地坐标系；V代表车辆坐标系，原点在质心上；I代表imu坐标系；$\mathbf{R}$和$\mathbf{p}$分别代表旋转和平移；增加了${}^I\mathbf{R}_V^\top, {}^I\mathbf{p}_V^\top$车辆到imu的外参。



量测更新

ESIKF本质是一个MAP问题，在其在量测更新的过程中引入了高斯牛顿迭代的思想，与上一节一样，我们要最小化如下式子：

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}_k^\kappa}\left(\left\|\mathbf{x}_k \boxminus \hat{\mathbf{x}}_k\right\|^2_{\hat{\mathbf{P}}_k^{-1}} + \sum_{j=1}^{m}\left\|\mathbf{z}_j^\kappa + \mathbf{H}_j^\kappa \tilde{\mathbf{x}}_k^\kappa\right\|^2_{\mathbf{R}_j^{-1}}\right)$$

其中，$\hat{\mathbf{x}}_k$是估计值，$\mathbf{x}_k$是真实值，$\mathbf{z}$是残差，$\mathbf{H}_j^\kappa$是在第κ次迭代时第j个残差函数对误差状态的雅可比(代入误差为0时的值)，m代表观测方程的个数，κ代表迭代数，$\hat{\mathbf{P}}$和$\mathbf{R}_j$分别是状态递推得到的的协方差矩阵和观测方程的协方差矩阵。由于$\sum_{j=1}^m$的存在，我们重新进行整理，可以组成一个大矩阵$\mathbf{H}=\left[\mathbf{H}_1^{\kappa\top},\ldots,\mathbf{H}_m^{\kappa\top}\right]^\top$，$\mathbf{R}=\operatorname{diag}\left(\mathbf{R}_1,\cdots\mathbf{R}_m\right)$，$\mathbf{P}=\left(\mathbf{J}^\kappa\right)^{-1}\hat{\mathbf{P}}_k\left(\mathbf{J}^\kappa\right)^{-\top}$，$\mathbf{J}^\kappa$是第$\kappa$次迭代时"状态残差"对误差状态的雅可比(代入误差为0时的值)。

在这一部分，需要知道两个雅可比，一个是第κ次迭代时，"状态残差"对误差状态的雅可比$\mathbf{J}^\kappa$；另一个是第κ次迭代时，测量残差对误差状态的雅可比$\mathbf{H}^\kappa$。先来看$\mathbf{J}^\kappa$

$$\mathbf{J}^\kappa=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times15} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{A}\left({}^G\hat{\mathbf{R}}_{I_k}^\kappa\boxminus{}^G\hat{\mathbf{R}}_{I_k}\right)^{-T} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times15} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{A}\left({}^I\hat{\mathbf{R}}_{L_k}^\kappa\boxminus{}^I\hat{\mathbf{R}}_{L_k}\right)^{-T} & \mathbf{0}_{3\times15} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\\ \mathbf{0}_{15\times3} & \mathbf{0}_{15\times3} & \mathbf{0}_{15\times3} & \mathbf{I}_{15\times15} & \mathbf{0}_{15\times3} & \mathbf{0}_{15\times3}\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times15} & \mathbf{A}\left({}^I\hat{\mathbf{R}}_{V_k}^\kappa\boxminus{}^I\hat{\mathbf{R}}_{V_k}\right)^{-T} & \mathbf{0}_{3\times3}\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times15} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3}\end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{gathered}\mathbf{A}(\mathbf{u})^{-1}=\mathbf{I}-\frac{1}{2}\lfloor\mathbf{u}\rfloor_\wedge+(1-\boldsymbol{\alpha}(\|\mathbf{u}\|))\frac{\lfloor\mathbf{u}\rfloor_\Lambda^2}{\|\mathbf{u}\|^2}\\ \alpha(\mathrm{m})=\frac{\mathrm{m}}{2}\cot\left(\frac{\mathrm{m}}{2}\right)=\frac{\mathrm{m}}{2}\frac{\cos(\mathrm{m}/2)}{\sin(\mathrm{m}/2)}\end{gathered}$$

是SO(3)上的右雅可比。

然后来看$\mathbf{H}^\kappa$，首先我们将车辆看做一个刚体，在地面系下车辆上imu位置的速度转化到车辆中心，即将${}^G\mathbf{v}_{I_k}^\kappa$转到${}^G\mathbf{v}_{V_k}^\kappa$，根据刚体运动学公式，有**(与VINS-Vehicle式(9)一致)**:

$${}^G\mathbf{v}_{V_k}^\kappa={}^G\mathbf{v}_{I_k}^\kappa-{}^G\mathbf{R}_{I_k}^\kappa[\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_\omega]_\times{}^V\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top V}\mathbf{p}_{I_k}^\kappa$$

写出观测残差的表达式:

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_1^\kappa&={}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa{}^G\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}{}^G\mathbf{v}_{V_k}^\kappa-\mathbf{v}_m=\mathbf{0}_{3\times1}\\ \mathbf{z}_2^\kappa&=\mathbf{e}_3^\top{}^I\mathbf{R}_{V_k}^{\kappa\top}(\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_{\omega_k}^\kappa)-\frac{1}{1+Kv_m^2}\frac{v_m}{l}\alpha=\mathbf{0}_{1\times1}\end{aligned}$$

在$\mathbf{z}_1^\kappa$中带入${}^G\mathbf{v}_{V_k}^\kappa$，有

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_1^\kappa&={}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa{}^G\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}({}^G\mathbf{v}_{I_k}^\kappa-{}^G\mathbf{R}_{I_k}^\kappa[\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_\omega]_\times{}^V\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top V}\mathbf{p}_{I_k}^\kappa)-\mathbf{v}_m\\ &={}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa{}^G\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}{}^G\mathbf{v}_{I_k}^\kappa-{}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa[\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_\omega]_\times{}^V\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top V}\mathbf{p}_{I_k}^\kappa-\mathbf{v}_m\end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{v}_m=\begin{bmatrix}v_m\cos(\beta)\\ v_m\sin(\beta)\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

可见其能优化的变量为15维，即${}^G\mathbf{R}_I$，${}^G\mathbf{v}_I$，$\mathbf{b}_\omega$，${}^I\mathbf{R}_V$, ${}^I\mathbf{p}_V$

对$\mathbf{z}_1^\kappa$和$\mathbf{z}_2^\kappa$添加一个扰动

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_1^\kappa(\hat{\mathbf{x}}_k^\kappa\boxplus\widetilde{\mathbf{x}}_k^\kappa)=&{}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa\exp\left({}^V\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_I^\kappa\right){}^G\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}\exp\left(-{}^G\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_I^\kappa\right)({}^G\mathbf{v}_{I_k}^\kappa+{}^G\widetilde{\mathbf{v}}_I^\kappa)\\ &-{}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa\exp\left({}^V\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_I^\kappa\right)[\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_\omega-\widetilde{\mathbf{b}}_\omega^\kappa]_\times{}^V\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}\exp\left(-{}^V\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_I^\kappa\right)({}^V\mathbf{p}_{I_k}^\kappa+{}^V\widetilde{\mathbf{p}}_I^\kappa)-\mathbf{v}_m\\ \mathbf{z}_2^\kappa(\hat{\mathbf{x}}_k^\kappa\boxplus\widetilde{\mathbf{x}}_k^\kappa)=&\mathbf{e}_3^\top{}^I\mathbf{R}_{V_k}^{\kappa\top}\exp\left(-{}^I\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_V^\kappa\right)(\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_{\omega_k}^\kappa-\widetilde{\mathbf{b}}_\omega^\kappa)-\frac{1}{1+Kv_m^2}\frac{v_m}{l}\alpha\end{aligned}$$

BCH近似公式原地展开得到:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{z}_1^\kappa(\hat{\mathbf{x}}_k^\kappa \boxplus \widetilde{\mathbf{x}}_k^\kappa) &= {}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa(\mathbf{I}+[{}^V\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_I^\kappa]_\times){}^G\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}(\mathbf{I}-[{}^G\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_I^\kappa]_\times)({}^G\mathbf{v}_{I_k}^\kappa+{}^G\widetilde{\mathbf{v}}_I^\kappa) \\
&\quad - {}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa(\mathbf{I}+[{}^V\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_I^\kappa]_\times)[\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_\omega-\widetilde{\mathbf{b}}_\omega^\kappa]_\times{}^V\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}(\mathbf{I}-[{}^V\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_I^\kappa]_\times)({}^V\mathbf{p}_{I_k}^\kappa+{}^V\widetilde{\mathbf{p}}_I^\kappa)-\mathbf{v}_m \\
\mathbf{z}_2^\kappa(\hat{\mathbf{x}}_k^\kappa \boxplus \widetilde{\mathbf{x}}_k^\kappa) &= \mathbf{e}_3^\top{}^I\mathbf{R}_{V_k}^{\kappa\top}(\mathbf{I}-[{}^I\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_V^\kappa]_\times)(\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_{\omega_k}^\kappa-\widetilde{\mathbf{b}}_\omega^\kappa)-\frac{1}{1+Kv_m^2}\frac{v_m}{l}\alpha
\end{aligned}
$$

将叉积交换顺序，去掉小量得到：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{z}_1^\kappa(\hat{\mathbf{x}}_k^\kappa \boxplus \widetilde{\mathbf{x}}_k^\kappa) &= \mathbf{z}_1^\kappa(\hat{\mathbf{x}}_k^\kappa) \boxplus (-{}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa{}^G\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}[{}^G\mathbf{v}_{I_k}^\kappa]_\times{}^G\mathbf{R}_{I_k}^\kappa{}^V\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_I^\kappa+{}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa{}^G\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}[{}^G\mathbf{v}_{I_k}^\kappa]_\times{}^G\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_I^\kappa+{}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa{}^G\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}{}^G\widetilde{\mathbf{v}}_I^\kappa \\
&\quad + {}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa[\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_{\omega_k}^\kappa]_\times{}^V\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}[{}^V\mathbf{p}_{I_k}^\kappa]_\times{}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa[\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_{\omega_k}^\kappa]_\times{}^V\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_I^\kappa-[{}^V\mathbf{p}_{I_k}^\kappa]_\times{}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa\widetilde{\mathbf{b}}_\omega^\kappa \\
&\quad - {}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa[\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_{\omega_k}^\kappa]_\times{}^V\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}[{}^V\mathbf{p}_{I_k}^\kappa]_\times{}^V\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_I^\kappa-{}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa[\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_{\omega_k}^\kappa]_\times{}^V\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}{}^V\widetilde{\mathbf{p}}_{I_k}^\kappa) \\
\mathbf{z}_2^\kappa(\hat{\mathbf{x}}_k^\kappa \boxplus \widetilde{\mathbf{x}}_k^\kappa) &= \mathbf{z}_2^\kappa(\hat{\mathbf{x}}_k^\kappa) \boxplus \mathbf{e}_3^\top(-{}^I\mathbf{R}_{V_k}^{\kappa\top}[\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_{\omega_k}^\kappa]_\times{}^I\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_V^\kappa-{}^I\mathbf{R}_{V_k}^{\kappa\top}\widetilde{\mathbf{b}}_\omega^\kappa)
\end{aligned}
$$

其中用到了$[Ab]_\times = A[b]_\times A^\top$，$A$是一个旋转矩阵(单位正交阵)，$b$是一个$3 \times 3$向量，所以

$$
\mathbf{H}_1^{\kappa\top} = \left[{}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa{}^G\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}[{}^G\mathbf{v}_{I_k}^\kappa]_\times, {}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa{}^G\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}, -[{}^V\mathbf{p}_{I_k}^\kappa]_\times{}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa, \mathbf{A}, -{}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa[\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_{\omega_k}^\kappa]_\times{}^V\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}\right]
$$

$$
\mathbf{H}_2^{\kappa\top} = \mathbf{e}_3^\top\left[\mathbf{0}_{6\times3}, -{}^I\mathbf{R}_{V_k}^{\kappa\top}[\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_{\omega_k}^\kappa]_\times, -{}^I\mathbf{R}_{V_k}^{\kappa\top}, \mathbf{0}_{3\times3}\right]
$$

$$
\mathbf{H}^\kappa = \left[\mathbf{H}_1^{\kappa\top}, \mathbf{H}_2^{\kappa\top}\right]^\top
$$

其中，
$\mathbf{A} = -{}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa{}^G\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}[{}^G\mathbf{v}_{I_k}^\kappa]_\times{}^G\mathbf{R}_{I_k}^\kappa+{}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa[\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_{\omega_k}^\kappa]_\times{}^V\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}[{}^V\mathbf{p}_{I_k}^\kappa]_\times{}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa[\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_{\omega_k}^\kappa]_\times-{}^V\mathbf{R}_{I_k}^\kappa[\boldsymbol{\omega}_m-\mathbf{b}_{\omega_k}^\kappa]_\times{}^V\mathbf{R}_{I_k}^{\kappa\top}[{}^V\mathbf{p}_{I_k}^\kappa]_\times$

至此，完成了$\mathbf{H}^\kappa$的计算，然后计算这一轮迭代的误差卡尔曼增益和量测更新：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \left(\mathbf{H}^\top\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{P}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{H}^\top\mathbf{R}^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_k^{\kappa+1} &= \hat{\mathbf{x}}_k^\kappa \boxplus \left(-\mathbf{K}\mathbf{z}_k^\kappa-(\mathbf{I}-\mathbf{K}\mathbf{H})(\mathbf{J}^\kappa)^{-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_k^\kappa \boxminus \hat{\mathbf{x}}_k\right)\right)
\end{aligned}
$$

重复上述迭代，直到$\left\|\hat{\mathbf{x}}_k^{\kappa+1} \boxminus \hat{\mathbf{x}}_k^\kappa\right\| < \epsilon$，迭代收敛。最终我们得到$\overline{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^{\kappa+1}$和$\overline{\mathbf{P}}_k = (\mathbf{I}-\mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{P}$作为下一个阶段状态预测的初值。