高等数学测试题(上册期中)

一、填空题 （每题 4 分，共计 24 分）

1. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{cosx-1}=$________________.

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\le 0\end{cases}$ 在 x 连续, 则 $ab=$__________________.

3. 已知 $f'(3)=2$ ，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$________________.

4. 当 $x=$________时, 函数 $y=x2^x$ 取得极小值.

5. 曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为__________________.

6. 设曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 经过 $(-2,44)$ ，$x=-2$ 为驻点，$(1,-10)$ 为拐点, 则 a ，b ，c ，d 分别为___________________.

二、选择题（每题 4 分，共计 20 分）

1. 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$ ，则下列断言正确的是（　　）

（A）若 $\{x_n\}$ 发散, 则 $\{y_n\}$ 必发散

（B）若 $\{x_n\}$ 无界, 则 $\{y_n\}$ 必有界

（C）若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小

（D）若 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 无穷小, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\frac{5}{3}}\ sin\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处 $f(x)$ （　　）

（A）不连续　　　　（B）连续, 但不可导

（C）可导, 但导数不连续　　　　（D）可导, 且导数连续

3. 设 $f(x)=\frac{x^2-x}{|x|\ (x^2-1)}$ ，则下列结论中错误的是（　　）

（A）$x=-1$，$x=0$，$x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点

（B）$x=-1$ 为无穷间断点

（C）$x=0$ 为可去间断点

（D）$x=1$ 为第一类间断点

4.曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7 \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 处的曲率半径为（　　）

（A）$\frac{\sqrt{10}}{50}$　　（B）$\frac{\sqrt{10}}{100}$　　（C）$10\sqrt{10}$　　（D）$5\sqrt{10}$

5.设 $f(x) = f(-x)$ ，且在 $(0, \infty)$ 内二阶可导，又 $f'(x) > 0$ ， $f''(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内的单调性和图形的凹凸性是（　　）

（A）单调增，凸　　（B）单调减，凸

（C）单调增，凹　　（D）单调减，凹

三、计算、证明题（共计 56 分）

1.求下列极限：（每小题 5 分，共 10 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 + 3^n}$;

（2）$\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{ln(1+x)^{(1+x)}}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$.

2.（10 分）设 $0 < k < 1$ ， $f(x) = kx - arctanx$. 证明：$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 中有唯一的零点，即存在唯一的 $x_0 \in (0, +\infty)$ ，使 $f(x_0) = 0$.

3.（12 分）设 $y = y(x)$ 是由 $sin\ xy = ln\frac{x+e}{y} + 1$ 确定的隐函数，求 $y'(0)$.

4. （12 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $f(a) = f(b) = 0$ ，求证：存在 $\xi \in (a, b)$ ，使 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

5. （12 分）求函数 $f(x) = ln\frac{1+x}{1-x}$ 的麦克劳林公式（含佩亚诺型余项）.