山东大学 2019-2020 学年第一学期高等数学(1)课程试卷

评分标准

一、填空题(本大题包含 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.请将答案填在如下指定位置)

1._2^{x^2}__2.__$\frac{1}{e}$___3.__0___4.__0___5.___$-2xe^{-x^4}dx$___

1.设$f(x)=x^2,g(x)=2^x$,则$g(f(x))=$________________.

2.$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=$______________.

3.$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=$_______________.

4.函数$\sqrt{1+x^2}$在$x=0$处的 3 阶导数是_______________.

5.$d\left(\int_{x^2}^{0}e^{-t^2}dt\right)=$______________________________.

二、选择题(本大题包含 5 小题，每小题 3 分，共 15 分.请将答案填在如下指定位置)

1.__D____2.__B____3.___C___4.__C___5.___B___

1.设数列x_n,y_n满足$\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=0$,则下列断言正确的是

A.若x_n发散,则y_n必发散.B.若x_n无界,则y_n必有界.

C.若x_n有界,则y_n必为无穷小.D.若$\frac{1}{x_n}$为无穷小,则y_n必为无穷小.

2.假设$f(x)=o(x)(x\to 0)$,则下述结论不一定成立的是

A.$f(x)$在$x\to 0$时是无穷小量.

B.$f(0)=0$.

C.若$x=0$是$f(x)$的间断点,则一定是可去间断点.

D.若$f(x)$在$x=0$连续,则在$x=0$可导.

3.方程$x^3+5x-c=0$ (c是大于零的常数) _____.

A.有两个正根　　B.无正根　　C.只有一个正根　　D.不能确定有几个正根

4.下列点不可能是函数的极值点的是

A.驻点. B.不可导的点.

C.可导但导数不为零的点. D.一阶二阶导数都为零的点.

5.具有特解$y_1=-1,y_2=3e^x-1,y_3=2e^{-x}+e^x-1$的二阶常系数线性微分方程的通解为

A.$-C_1+C_2e^x+e^{-x}$.B.$C_1e^{-x}+C_2e^x-1$.

C.$-C_1+C_2e^{-x}+e^x$D.$3C_1e^{-x}+2C_2e^x$.

三、计算题(本大题包含 7 小题，每小题 6 分，共 42 分.请将答案写在后面试卷纸上,要写出解答步骤)

1.求微分方程$y'-2xy=e^{x^2}\cos x,y|_{x=0}=1$的特解.

解利用公式或变异系数法都可以,下面是凑微分法.

原微分方程可写为$e^{-x^2}dy-2xye^{-x^2}dx=\cos x dx$,
即$e^{-x^2}dy+yde^{-x^2}=\cos x dx$,所以$d\left(ye^{-x^2}\right)=d(\sin x)$,
通解为$ye^{-x^2}=\sin x+C$,即$y=e^{x^2}(\sin x+C)$……………………………….….(5 分)
特解为$y=e^{x^2}(\sin x+1)$…………………………………………..…………..….(6 分)

2.已知$\begin{cases}x=\arcsin t\\ y=\sqrt{1-t^2}\end{cases}$,求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}=-t$,…………………………………………………..……(3 分)

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=-\sqrt{1-t^2}$……………………………………………..……….(6 分)

3.设函数$f(x)$在$x\neq 0$时有定义,经过点$(-1,1)$和$(1,2)$,且可导,其导函数$f'(x)=\frac{1}{x}$,求$f(x)$.

解$f(x)=\int\frac{1}{x}dx=\begin{cases}\ln x+C_1, x>0\\ \ln(-x)+C_2, x<0\end{cases}$,……………………………………...……(4 分)
由两个函数值确定出$C_1=2$,$C_2=1$,
因此$f(x)=\begin{cases}\ln x+2, x>0\\ \ln(-x)+1, x<0\end{cases}$……………………………………………………..…..(6 分)

4.计算不定积分$\int e^{\sqrt{2x+1}}dx$.
解令$t=\sqrt{2x+1}$,则$x=\frac{1}{2}(t^2-1)$, $dx=tdt$,

$$\int e^{\sqrt{2x+1}}dx=\int te^t dt \text{……………………… ……………………….(3 分)}$$
$$=\int tde^t=te^t-\int e^t dt$$
$$=te^t-e^t+C=e^{\sqrt{2x+1}}\left(\sqrt{2x+1}-1\right)+C \text{………….(6 分)}$$

5.求圆盘$(x-2)^2+y^2\leq 1$绕y轴旋转而成的旋转体的体积.
解所求体积为
$\int_{-1}^{1}\pi[\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2]dy$………………………………………(3 分)

$=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy=4\pi^2$……………………………………………………….(6 分)

6. n是某正整数,已知当$x\to 0$时,$x\sin x^n$是比$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$低阶而比$e^{x^2}-1$高阶的无穷小量,求n.
解由$x\sin x^n=x^{n+1}+o(x^{n+1})$,
$$(1-\cos x)\ln(1+x^2)=\left(\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(x^2+o(x^2)\right)=\frac{1}{2}x^4+o(x^4),$$
$e^{x^2}-1=x^2+o(x^2)$…………………………………………… ………..(4 分)
和已知条件得
$2<n+1<4$,即$1<n<3$,所以$n=2$……………………………………..(6 分)

7.求微分方程$y''+2y'+y=xe^{-x}$的通解.
解对应的齐次线性方程的特征方程为$\lambda^2+2\lambda+1=0$,解得特征根为$-1,-1$,所以对应的齐次线性方程的通解为$(C_1+C_2x)e^{-x}$……………………………………………(3 分)

设原方程的特解为Ax^3e^{-x},代入原方程可得$A=\frac{1}{6}$,

所以原方程的通解为$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{6}x^3\mathrm{e}^{-x}(C_1,C_2$为任意常数)……………..(6 分)

四、综合题(第一小题 13 分,第二小题 10 分,共 23 分.请将答案写在后面试卷纸上,要写出解答步骤)

1.讨论$y=|x+2|\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$的渐近线、单调区间、极值、凹凸区间、拐点，并作图.

解定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

由$x\to+\infty$时,$|x+2|\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=(x+2)(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)=x+1+o(1)$,知$y=x+1$是$x\to+\infty$时的渐近线,

由$x\to-\infty$时,$|x+2|\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=-(x+2)(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)=-x-1+o(1)$,知$y=-x-1$是$x\to-\infty$时的渐近线,

由$x\to0+$时,$|x+2|\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\to0$,$x\to0-$时,$|x+2|\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\to+\infty$,所以$x=0$是$x\to0-$时的渐近线…………………………………………………………………………….(5 分)

由$f'(x)=\begin{cases}-\frac{x^2+x+2}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x<-2\\ \frac{x^2+x+2}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & -2<x\neq0\end{cases}$，知在$(-\infty,-2)$严格单调减,在$(-2,0)$和$(0,+\infty)$严格单调增,点$(-2,0)$是极小值点…………………………………...………...(8 分)

由$f''(x)=\begin{cases}\frac{3x-2}{x^4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x<-2\\ \frac{2-3x}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & -2<x\neq0\end{cases}$,知$x=\frac{2}{3}$时$f''(x)=0$,而且在$(-\infty,-2)$和$\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$上是凸的,在区间$(-2,0)$和$\left(0,\frac{2}{3}\right)$上是凹的,$x=\frac{2}{3}$处是拐点……………....(11 分)

图像…………………………………………………………………………………(13 分)

2. 设函数$f(x)$在$[0,1]$连续,$(0,1)$可导,$f(x)$在$[0,1]$上的最大值是2020,$f(0)=0$,$f(1)=2018$,证明存在$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=2019$.

证设$f(x)$在点α取最大值2020,即$f(\alpha)=2020$,$\alpha\in(0,1)$.

构造函数$F(x)=f(x)-2019x$,$x\in[0,1]$.$F(x)$在$[0,1]$连续,$(0,1)$可导.$F(0)=0$.

……………… ………….(4 分)

由$F(1)=f(1)-2019=-1<0$,$F(\alpha)=f(\alpha)-2019\alpha=2020-2019\alpha>0$,由于$F(x)$在$[\alpha,1]$连续及零点存在定理知存在$\beta\in(\alpha,1)$,使得$F(\beta)=0$………………(8 分)

由$F(x)$在$[0,\beta]$连续,$(0,\beta)$可导,$F(0)=F(\beta)=0$及 Rolle 定理知存在$\xi\in(0,\beta)\subseteq(0,1)$,使得$F'(\xi)=0$, 即$f'(\xi)=2019$. …………………………… …..(10 分)

另证如能正确地利用达布定理证明也给满分.由 Lagrange 中值定理可得存在$\xi_1\in(0,\alpha)$,使得$f'(\xi_1)=\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}=\frac{2020}{\alpha}>2019$,存在$\xi_2\in(0,1)$,使得$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=2018<2019$,即有$f'(\xi_1)>2019>f'(\xi_2)$,而$f(x)$在以$\xi_1,\xi_2$为端点的闭区间上可微,由达布定理知存在$\xi$介于$\xi_1,\xi_2$之间,使得$f'(\xi)=2019$.