2012-2013 学年第一学期高等数学试题（A）

一、填空题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）

1。极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[(\frac{2+\cos x}{3})^{\frac{1}{x}}-1\right]$ 等于__________

2。设函数 $y=y\left(x\right)$ 是由方程 $xy+e^{y}=x+1$ 确定的隐函数，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=$____

3。$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$_____

4。微分方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x}=\frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x}$ 满足初始条件 $y\left(2\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 的特解是________

5。$\int xf\left(x\right)dx=\arcsin x+C$，则 $\int\frac{1}{f\left(x\right)}dx==$_______

二、选择题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf\left(x\right)+\ln\left(1-2x\right)}{x^2}=4$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)-2}{x}$ 为（　　）

（A）等于 2　（B）等于 4　（C）等于 6　（D）等于 8

2. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\pi x}{1+\left(2x\right)^{2n}}$，则 $f(x)$ 的间断点（　　）

（A）有三个　（B）有两个　（C）有一个　（D）不存在

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在 4 阶导数，又设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{x-\sin x}=1$，则（　　）

（A）$f'(0)=1$　（B）$f''(0)=1$　（C）$f'''(0)=1$　（D）$f^{(4)}(0)=1$

4. 若 $3a^2-5b<0$，则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ 根的个数为（　　）

（A）1　（B）3　（C）5　（D）0

5. 设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)dx-2$，则 $f\left(x\right)=$（　　）

（A）$3x^2+C$　（B）$x^3-\frac{10}{3}$　（C）x^3+C　（D）$3x^2-\frac{10}{3}$

三、（10 分）求微分方程 $y''+2y'-3y=xe^{x}$ 的通解。

四、（10 分）$f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf\left(x\right)-\ln\left(1+x\right)}{x^3}=2$，

求 $f\left(0\right),f'(0),f''\left(0\right)$。

五、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且 $f\left(1\right)=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}xf\left(x\right)dx$。

证明：存在 $\xi\in\left(0.1\right)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

六、（10 分）设 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，

证明：$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx<\frac{1}{2}\left[f\left(a\right)+f\left(b\right)\right]$。

七、（10 分）$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，且当 $x\geq0$ 时 $f(x)F\left(x\right)=\frac{xe^{x}}{2\left(1+x\right)^{2}}$，

已知 $F\left(0\right)=1, F(x)>0$，求 $f\left(x\right)$。

八、（10 分）设直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^{2}$ 所围成的图形的面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成的图形面积为 S_2，并且 $a<1$，

（1）试确定 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值；

（2）求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。