习题 6.1

7. $\|\vec{w}\| = \sqrt{3^2+(-1)^2+(-5)^2}$
$= \sqrt{35}$

9. $\dfrac{\vec{a}}{\|a\|} = \dfrac{1}{\sqrt{(-30)^2+(40)^2}}\begin{bmatrix}-30\\40\end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix}-\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}$

13. $\text{dist}(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{(10+1)^2+(-3+5)^2}$
$= 5\sqrt{5}$

17. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -12+2+10+0=0$
$\therefore \vec{u},\vec{v}$ 正交

22. $\vec{u}\cdot\vec{u} = u_1^2+u_2^2+u_3^2 \geq 0$
当 $u_1=u_2=u_3=0$ 时
即 $\vec{u}=\vec{0}$ 时
$\vec{u}\cdot\vec{u}=0$

24T. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$
$= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{v}+\vec{v}) + (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$
$= \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2+\vec{u}^2-2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2$
$= 2\vec{u}^2+2\vec{v}^2 = 2\|\vec{u}\|^2+2\|\vec{v}\|^2$

29T 设 W 中向量 $\vec{n}=c_1\vec{v}_1+\cdots+c_p\vec{v}_p$
$\vec{x}\cdot\vec{n} = \vec{x}\cdot c_1\vec{u} + \cdots + \vec{x}\cdot c_p\vec{v}_p$
$= 0+\cdots+0 = 0$
$\therefore \vec{x}$ 与 W 中任一向量正交

31T. 解
$\forall x \in W^\perp$ 且 $x \in \vec{w}$
则 $\vec{x}\cdot\vec{x}=\vec{0}$
由 22 题知 $\vec{x}=\vec{0}$

习题 6.2

1. 解
$\vec{a}\cdot\vec{b} = -5+8-3=0$
$\vec{b}\cdot\vec{c} = 15-8-7=0$
$\vec{c}\cdot\vec{a} = -3-6+21 \neq 0$
$\therefore$ 不是正交集

13. 解
$\hat{y} = \dfrac{\vec{y}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\cdot\vec{u} = -\frac{1}{5}\vec{u} = \begin{bmatrix}-\frac{4}{5}\\ \frac{2}{5}\end{bmatrix}$
$\hat{y}+\vec{z}=\vec{y}$
$\vec{z} = \vec{y}-\hat{y} = \begin{bmatrix}\frac{14}{5}\\ \frac{28}{5}\end{bmatrix}$

23. 解
a) 对 正交集线性无关便可
b) 对 可以由 $c_j = \dfrac{\vec{y}\cdot\vec{u}_j}{\vec{u}_j\cdot\vec{u}_j}\vec{u}_j$ 求得
c) 错，单位化只改变大小，不改变是否正交
d) 对，有单位正交列，则 $UU^T=I$，则 $U^T=U^{-1}$
e) 错，应为 $\|\vec{y}-\hat{y}\|$

24. 解

a) 错，若 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 线性相关，

$\vec{a}=k\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=k|\vec{b}|^2\neq 0$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ 不正交 ∴假

b) 假，是正交集，但不一定是单位正交集

c) 真，定理7

d) 真 $\hat{y}=\frac{\vec{y}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\cdot\vec{v}$

$=\frac{\vec{y}\cdot c\vec{v}}{c\vec{v}\cdot c\vec{v}}\cdot c\vec{v}$

e) 真，各列线性无关 $\Longleftrightarrow$ 可逆

25. 解

先证 b：

设 $U=[\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3]$，$m\times 3$

$\vec{x}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ $\vec{y}=\begin{bmatrix}d\\e\\f\end{bmatrix}$

$U\vec{x}=[a\vec{u}_1\ \ b\vec{u}_2\ \ c\vec{u}_3]$

$U\vec{y}=[d\vec{u}_1\ \ e\vec{u}_2\ \ f\vec{u}_3]$

$U\vec{x}\cdot U\vec{y}=ad(\vec{u}_1)^2+be(\vec{u}_2)^2+cf(\vec{u}_3)^2$

$=ad+be+cf$ ∴得证

$\vec{x}\cdot\vec{y}=ad+be+cf$

证 a.

令 $\vec{x}=\vec{y}$

则 $(U\vec{x})^2=||U\vec{x}||^2=||\vec{x}||^2$

∴ $||U\vec{x}||=||\vec{x}||$

28.

U的行向量 = U^T 的列向量

∵ U是 $n\times n$ 正交矩阵

∴ $UU^T=I$

∴ $(U^T)^{-1}U^T=I$

$U^T=U^{-1}$

由 $U^T(U^T)^T=I$ 知 U^T 是具有单位正交列向量

∴ U^T 有……

∴ U的行向量构成 R^n 单位正交基

习题 6.3

1. 解

$\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1+\frac{\vec{x}\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2+\frac{\vec{x}\cdot\vec{u}_3}{\vec{u}_3\cdot\vec{u}_3}\vec{u}_3$

$=\begin{bmatrix}0\\-8/9\\32/9\\8/9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2/3\\-10/9\\-2/9\\-2/9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2/3\\0\\2/3\\-8/3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0\\-2\\4\\-2\end{bmatrix}=-\frac{8}{9}u_1+(-\frac{2}{9})u_2+\frac{2}{3}u_3$

$\hat{x}+n\vec{u}_4=\vec{x}$

∴ $n\vec{u}_4=\begin{bmatrix}10\\-6\\-2\\2\end{bmatrix}$ $n=2$

$x=-\frac{8}{9}u_1-\frac{2}{9}u_2+\frac{2}{3}u_3+2u_4$

3. 解

$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = -1+1=0$

∴ $\vec{u}_1$、$\vec{u}_2$ 是正交集

$$\text{proj}_{\text{span}\{u_1,u_2\}}\vec{y} = \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2$$

$$= \frac{3}{2}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

习题 陆、点、肆

叁：$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\text{proj}_W \vec{u}_2 = \frac{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

∴ $\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \text{proj}_W\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$

∴ $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} \right\}$

柒：$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 \cdot \frac{1}{\|\vec{v}_1\|} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{30} \\ -5/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{30} \end{bmatrix}$

$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 \cdot \frac{1}{\|\vec{v}_2\|} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

∴ $\{\vec{v}_1', \vec{v}_2'\}$

拾壹：$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \hat{\vec{u}}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \cancel{\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

$$= \cancel{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \left(\frac{\vec{u}_3\cdot\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\vec{v}_1 + \frac{\vec{u}_3\cdot\vec{v}_2}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2}\vec{v}_2 \right)$$

$$= \vec{u}_3 - 4\vec{v}_1 + \frac{3}{2}\vec{v}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

∴ $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$

拾叁：

$R = Q^{-1}A = Q^TA$

$$= \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & -3/6 & 1/6 \\ -1/6 & 5/6 & 1/6 & 3/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

拾伍：

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & \cancel{1/\sqrt{5}}\ 1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{5} & -1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{5} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$R = Q^TA = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{5} & \cancel{1}0 & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{5} & -1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{5} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

指柒.

a) 错. 正交基 没有

b) 真. 格拉姆方法

c) 真. Q 有单位正交列 $\Leftrightarrow$ Q 可逆

$Q^{-1}A = R$

又 ∵ Q 有单位正交列 $\Leftrightarrow QQ^T = I \Leftrightarrow Q^T = Q^{-1}$

∴ $R = Q^TA$

指摘.

a) 真. 正交集线性无关且其维数与 W 相同. 因此为 W 的一个基

b) 真. 若 $\vec{x} - \mathrm{proj}_W\vec{x} = \vec{0}$

则 $\vec{x} = \mathrm{proj}_W\vec{x} = \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{v_1}}{\vec{v_1}\cdot\vec{v_1}}\vec{v_1}$

则 $\vec{x} \in W$

c) ~~真~~假. 构成 A 的列空间的标准正交基

习题 6.5

1. 解

b) $A^TA = \cancel{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ -11 & 22 \end{bmatrix}$

$A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -11 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix}$, $\cancel{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}}$

$\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

12T 解

(a)

$\hat{b} = \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{v_1}}{\vec{v_1}\cdot\vec{v_1}}\vec{v_1} + \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{v_2}}{\vec{v_2}\cdot\vec{v_2}}\vec{v_2} + \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{v_3}}{\vec{v_3}\cdot\vec{v_3}}\vec{v_3}$

$= \frac{1}{3}\vec{v_1} + \frac{14}{3}\vec{v_2} + (-\frac{5}{3})\vec{v_3}$

$= \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\hat{x} = b - \hat{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

15T. 解 $\hat{x} = R^{-1}Q^T\vec{b}$

$R^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & -5/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R^{-1}Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 7/9 & -8/9 & 11/9 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$

$R^{-1}Q^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 7/9 & -8/9 & 11/9 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

10T

$\hat{x} = R^{-1}Q^T\vec{b}$

$= \begin{bmatrix} 2/10 & 3/10 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 61/20 \\ 9/4 \end{bmatrix}$

17T 解

a) 真 定义

b) 错. $\hat{b} \in \text{col}A$

c) 错 $\|\vec{b}-A\hat{x}\| \le \|\vec{b}-A\vec{x}\|$

d) 错 $A^TA\vec{x}=A^T\vec{b}$ 的非空解

e) 真 . A各列线性无关

$\Leftrightarrow$ A可逆 , A^T可逆

$\Leftrightarrow$ A^TA 可逆

$\Leftrightarrow$ $\vec{x}=(A^TA)^{-1}A^T\vec{b}$

$\Leftrightarrow$ $\vec{x}$ 唯一

18T. 解

a) 真 都使 $\|A\vec{x}-\vec{b}\|=0$

b) ~~真~~假 $A\hat{x}$ 最接近 $\vec{b}$

c) 真. $\hat{b}=A\hat{x}$ 且

$\vec{b}-\hat{b}$ 垂直于 col A ($\in \text{Nul}A^T$)

d) 假, (A^TA) 不一定可逆

e) 对

f) 不一定, 看矩阵是否可逆.

$\hat{x}=(A^TA)^{-1}A^T\vec{b}=R^{-1}Q^T\vec{b}$

19T 解

a) $A\vec{x}=\vec{0}$

~~AT~~ $A^TA\vec{x}=A^T\vec{0}=\vec{0}$

b) ∵ $A^TA\vec{x}=\vec{0}$

∴ $\vec{x}^TA^TA\vec{x}=\vec{x}^T\cdot\vec{0}=\vec{0}$

∵ $\vec{x}^TA^TA\vec{x}=\vec{0}$

∴ $(A\vec{x})^TA\vec{x}=\vec{0}$

∴ $\|A\vec{x}\|^2=\vec{0}$

∴ $A\vec{x}=0$

习题 7.1

1. $A-\lambda I=\begin{bmatrix}3-\lambda & 5\\ 5 & -7-\lambda\end{bmatrix}=\vec{0}$

则 $\det(A-\lambda I)=0$

则 $(3-\lambda)(-7-\lambda)-25=0$

解得 ~~无解~~ , $\Delta>0$

∴对称 $A=A^T$, 对称

2. $\det(A-\lambda I)=(3-\lambda)(-3-\lambda)-25=0$

则 $\lambda^2=34$ 故 $\lambda_1=\sqrt{34}$ $\lambda_2=-\sqrt{34}$

矩阵可以正交对角化

∴对称

3. $\det(A-\lambda I)=(2-\lambda)(4-\lambda)-6=0$

$\Delta>0$

矩阵可正交~~对角化~~

不可逆 不对称

4.

$\det(A-\lambda I) = \det\begin{vmatrix} -\lambda & 8 & 3 \\ 8 & -\lambda & -4 \\ 3 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

有3个解 可知 A 可以正交对角化，∴ A有对称性 不对称

5T.

$\det(A-\lambda I) = \det\begin{vmatrix} -6-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -6-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -6-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-6-\lambda)\cdot\left[(-6-\lambda)^2 - 4\right] = 0$

∴ 可~~是~~不对称矩阵

6T. 非对称

7T. 解

$0.6\times0.8 - 0.8\times0.6 = 0$

∴正交

$\therefore P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$

8T $1-1=0$ ∴正交

$P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

9T $-\frac{4}{5}\times\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\times\frac{4}{5} = 0$ ∴正交

$P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

10T $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = 0$

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} = 0$

$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\times\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = 0$

∴正交

$P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

13T. 解

$\det(A-\lambda I) = (3-\lambda)^2 - 1 = 0$

解得 $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 4$

$\lambda=2$时 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，$x_1 = -x_2$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}$

$\therefore \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda=4$时 $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $x_1 = x_2$

$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 0$ ∴

$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

23T. 解

$A-5I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

∴ $A-5I=0$ 有解，且 $x_1 = -x_2 - x_3$

即 $\begin{bmatrix} -x_2-x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}x_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}x_3$

$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\vec{v}$ ∴是

$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{u}_2 - \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = 5$
$\lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = 5$

∴ A: $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

25T 解

a). 对，充分必要条件

b) ~~错~~对 ~~$A^T=A^{-1}$~~ 对称矩阵

c) 错，可能有n个，但有重复

d) 对错 $\vec{a}$ 在 $\vec{v}$ 上投影.

则 $\hat{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\cdot\vec{v} = \cancel{a}(\vec{v}\cdot\vec{v}^T)\vec{a}$

26T 解

a) 错.对，充分必要条件

b) B被正交对角化 $\Leftrightarrow$ B对称

c) A正交 $\Leftrightarrow$ $A^T=A^{-1}$ 假

真

d) 对 谱定理

25b：对称矩阵的不同特征空间的任意两个特征向量正交.

25.d. $(UU^T)^T = (U^T)^T U^T = UU^T$

$\therefore UU^T$ 是对称矩阵

投影矩阵，

$P^2=P$，$P^T=P$

$P^2=(UU^T)(UU^T) = \|U\|\cdot\vec{U}\cdot\vec{U}^T \neq P$

$\therefore$ 不是投影

26T.c). A可正交对角化 $\Leftrightarrow$ A是对称

正交矩阵不一定是对称.

正交. $A^T = A^{-1}$

对称：$A^T = A$

$A=A^{-1}$：$A^2=I$

习题 7.2

1.(a) $x^TAx = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix}5 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

$= 5x_1^2+\frac{2}{3}x_1x_2+x_2^2$

2. a)

$x^TAx = [x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

$= 3x_1^2+2x_2^2+4x_1x_2+2x_2x_3$

5、解 a

$\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ -3 & 2 & -2\\ 4 & -2 & -5\end{bmatrix}$

b.

$\begin{bmatrix}0 & 3 & 2\\ 3 & 0 & -5\\ 2 & -5 & 0\end{bmatrix}$

7. 解

$A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 5 & 1\end{bmatrix}$

$\vec{x}=P\vec{y}$

$x^TAx = y^TP^TAP\vec{y}$

$= y^T(P^TAP)y$

$D = P^TAP$. $A=PDP^{-1}$

$\det(A-\lambda I)=0$，$\lambda_1=-4$ $\lambda_2=6$

$v_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ $v_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$\therefore P=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$

$[y_1\ y_2]\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$

$= -4y_1^2+6y_2^2$

8) 解

$$A=\begin{bmatrix}9&-4&4\\-4&7&0\\4&0&11\end{bmatrix}$$

$\lambda=3$ 时，$A-\lambda I=\begin{bmatrix}6&-4&4\\-4&4&0\\4&0&8\end{bmatrix}$ 成立

$$x_1=\begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$\lambda=9$ 时，$A-\lambda I=\begin{bmatrix}0&-4&4\\-4&-2&0\\4&0&2\end{bmatrix}$

$$x_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\-2\end{bmatrix}$$

$\lambda=15$ 时 $A-\lambda I=\begin{bmatrix}-6&-4&4\\-4&-8&0\\4&0&-4\end{bmatrix}$

$x_3=\begin{bmatrix}-2\\1\\-2\end{bmatrix}$ x_1、x_2、x_3 分别正交

$P=\begin{bmatrix}-2&1&-2\\-2&-2&1\\1&-2&-2\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&9&0\\0&0&15\end{bmatrix}$

新 $x^TDx=3x_1^2+9x_2^2+15x_3^2$

9. $\begin{bmatrix}4&-2\\-2&4\end{bmatrix}$；$\lambda_1=2$ $\lambda_2=6$

$\lambda=2$：$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $\lambda=6$：$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

$\therefore P=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}2&0\\0&6\end{bmatrix}$

新：$2y_1^2+6y_2^2$

y^TDy，$y=x=Py$

16.

$$\begin{bmatrix}4&84&0&3\\48&4&3&0\\0&3&4&4\\3&0&4&4\end{bmatrix}$$

21T. 解

a) 对，定义

b) 对 对角矩阵只在对角线上有值，$x_1^2\cdot a_{11}+x_2^2\cdot a_{22}+\cdots$

c) 错 所有 $\vec{x}\neq\vec{0}$

d) 对，定理5

e) 对 P由A的特征向量构成 $A=PDP^{-1}$

f) 对

22T. 解 a) $Q=x^TIx=x^Tx=\|x\|^2$

b) 对 x^TAx

$=(Py)^TA(Py)$

$=y^T(P^TAP)y$

$=y^T(P^{-1}AP)y$

$=y^TDy$

c) $ax^2+bxy+dy^2=c$ 对

d) 对 半正：≥0 半负 ≤0，不定怎

e) 错 $x^TAx<0$，则 A为负定 特征值为负

28T. 解

$x^TAx > 0$，则A的特征值 $\lambda > 0$

$x^TA^{-1}x$

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$$\frac{1}{\lambda}\vec{x} = A^{-1}\vec{x}$$

$$A^{-1}\vec{x} = \frac{1}{\lambda}\vec{x}$$

∴ A^{-1}的特征值为 $\frac{1}{\lambda} > 0$

∴ $x^TA^{-1}x$ 是正定的。