山东大学

习题 4.1

5. $(p+q)t=(a+b)t^2\in p(t)$

$a=0$ 时 $0\in p(t)$

$\alpha p(t)=a\cdot\alpha t^2\in p(t)$

∴是

6. $(p+q)t=(a+b)+t^2\in p(t)$

但 0 不在 $p(t)$ 中

∴不是

7. $n\cdot p(t)$ 当 n 为非整数时

不在其中

∴不是

8. $p(0)=0$

$(p+q)(0)=p(0)+q(0)=0$

$cp(0)=c\cdot 0=0$

∴是

9. $H=\begin{bmatrix}1\\ \frac{3}{2}\end{bmatrix}S$

∴ $\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\ \frac{3}{2}\end{bmatrix}$

$(a+b)\vec{v}\in H$

$0\cdot\vec{v}\in H$

$c\vec{v}\in H$

19. $(g+y)(t)=g(t)+y(t)$

$=c_1\cos\omega t+c_2\cos\omega t+d_1\cos\omega t+d_2\cos\omega t$

$=(c_1+d_1)\cos\omega t+(c_2+d_2)\cos\omega t\in V$

$ny(t)=c_1n\cos\omega t+c_2n\sin\omega t\in V$

$c_1=c_2=0$ 时 $0\in V$

∴是一个向量空间

20. a.

$[a,b]$ 上全体实值函数的向量空间的零空间在 $C[a,b]$ 上

$C[a,b]$ 上加法、标量乘法封闭

b. 对于 $(f+g)$: $f(a)=f(b)$

$g(a)=g(b)$

则 $(f+g)(a)=(f+g)(b)$

对 $c\cdot f()$: $cf(a)=cf(b)$

∴是 $C[a,b]$ 的一个子空间

25. $w+0=0+w=w$

26. (a) $(a+b)+c=a+(b+c)$

(b) $(-u)+u=0$

(c) $0+w=w+0=w$

山东大学

4.2

1. 解

$$A\vec{w}=\begin{bmatrix}3&-5&-3\\6&-2&0\\-8&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\-4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\vec{0}$$

∴ 是 $\vec{w}\in \mathrm{Nul}\,A$

3. 解

$$\begin{bmatrix}1&3&5&0&0\\0&1&4&-2&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}x_1+3x_2+5x_3=0\\x_2+4x_3-2x_4=0\end{bmatrix}$$

∴ $x_1=7x_3-6x_4$
$x_2=-4x_3+2x_4$

$$\therefore\begin{bmatrix}7x_3-6x_4\\-4x_3+2x_4\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\sim\underbrace{\begin{bmatrix}7\\-4\\1\\0\end{bmatrix}}_{\vec{v}_1}x_3+\underbrace{\begin{bmatrix}-6\\2\\0\\1\end{bmatrix}}_{\vec{v}_2}x_4$$

$\mathrm{Nul}\,A=\mathrm{span}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$

5. 解

$$\begin{bmatrix}1&-2&0&4&0&0\\0&0&1&-9&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}x_1=2x_2-4x_4\\x_3=9x_4\\x_5=0\end{bmatrix}$$

$$\therefore\begin{bmatrix}x_1\ 2x_2-4x_4\\x_2\\9x_4\\x_4\\0\end{bmatrix}\sim\underbrace{\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{\vec{v}_1}x_2+\underbrace{\begin{bmatrix}-4\\0\\9\\1\\0\end{bmatrix}}_{\vec{v}_2}x_4$$

$\mathrm{Nul}\,A=\mathrm{span}\{\vec{v}_1+\vec{v}_2\}$

7. 解

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\2-a-b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}a+\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}b+\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$$

$\because n\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\notin W$ ∴ 不封闭 不是

9. 解

$a=2b+4c$

$d=\frac{4}{3}b+\frac{7}{3}c$

$$\therefore\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2b+4c\\b\\c\\\frac{4}{3}b+\frac{7}{3}c\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}2\\1\\0\\4/3\end{bmatrix}}_{\vec{v}_1}b+\underbrace{\begin{bmatrix}4\\0\\1\\7/3\end{bmatrix}}_{\vec{v}_2}c$$

$=\mathrm{span}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ ∴ 是

山东大学

15.

原式 $=\begin{bmatrix}0\\1\\4\\3\end{bmatrix}r+\begin{bmatrix}2\\1\\1\\-1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}3\\-2\\0\\-1\end{bmatrix}t$

$\therefore A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\1 & 1 & -2\\4 & 1 & 0\\3 & -1 & -1\end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix}-6 & 12 & 2\\-3 & 6 & 1\end{bmatrix}$

$\sim\begin{bmatrix}-3 & 6 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore$ w 在 Col A 中

$\begin{bmatrix}-6 & 12\\-3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\vec{0}$

$\therefore$ w 在 Nul A 中

30. $x\in V$，$T(x)\in W$

w 零向量在 T 的值域中

$w\in V$，$\because$ 线性变换

$\therefore T(x)+T(w)\in$ 值域

且 $cT(x)\in$ 值域

$\therefore$ 为 W 的子空间

习题 4.3

15. $\begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & 1 & 2\\0 & 1 & -4 & -3 & 1\\-3 & 2 & 1 & -8 & -6\\2 & -3 & 6 & 7 & 9\end{bmatrix}$

$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & 1 & 2\\0 & 1 & -4 & -3 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore$ 为 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -3\\-3 & 2 & -8\\2 & -3 & 7\end{bmatrix}$

16.

$\begin{bmatrix}1 & -2 & 6 & 5 & 0\\0 & 1 & -1 & -3 & 3\\0 & -1 & 2 & 3 & -1\\1 & 1 & -1 & -4 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 6 & 5 & 0\\0 & 1 & -1 & -3 & 3\\0 & 0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\sim$ 为 $\{\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\}$

19. $v_3=\frac{4}{3}v_1+\frac{2}{3}v_2$

$\therefore$ 为 $\{v_1,v_2\}$

20.

$\{v_2, v_3\}$

山东大学

21T. 解

a) $c_1\vec{v_1}=0$ 的解仅有 $c_1=0$

∴假

b) 假，$\{\vec{v_1} \cdots \vec{v_n}\}$ 不一定线性无关

c) 真：$n\times n$ 可逆 ⇒ 该矩阵的列生成 R^n

d) 不可能小的，假

e) 假，初等行变换不会改变列间线性相关关系

22T. 解

a) 假，需满足 $span\{\ \}=H$

b) 真，生成且线性无关

c) 不可能大，真，要生成

d) 假，线性无关且生成

e) 真 线性无关且生成

23T 解

∵ $R^4=span\{v_1,\cdots,v_4\}$，则 $[\vec{v_1}\ \vec{v_2}\ \vec{v_3}\ \vec{v_4}]$ 可逆，则 $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3},\vec{v_4}$ 线性无关

则是 R^4 的一个基

24. 解

线性无关 ⇒ $[\vec{v_1} \cdots \vec{v_n}]$ 可逆

⇒ $\vec{v_1} \cdots \vec{v_n}$ 生成 R^n ⇒ 是 R^n 的一个基

26. 解

∵ $\sin 2t = 2\sin t\cos t$

∴ $\{\sin t, \sin 2t\}$ 便是.

习题 4.4

1. 解

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 5 \\ -5 & 6 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -2 & 34 \end{array}\right]$$

$\therefore x = \begin{bmatrix} -21 \\ -17 \end{bmatrix}$

$x = B[x]_B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$

5. 解

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$，$[x]_B = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}$

9. 解

$B^{-1} = \frac{1}{16+9}\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{8}{25} & -\frac{1}{25} \\ \frac{9}{25} & \frac{2}{25} \end{bmatrix}$

山东大学

10. B^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/8 & 23/8 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5/4 & -27/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/8 & -11/8 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/8 & 23/8 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -5/4 & -27/4 & -1/2 \\ -1/8 & -11/8 & -1/4 \\ 5/8 & 23/8 & 1/4 \end{bmatrix}$$

11. $[\vec{x}]_B = B^{-1}\vec{x}$

$$= \frac{1}{18-20}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5/2 & -3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

13.

$p(t) = 1+t^2+4(t+t^2)+2t^2$

$\quad = 4(1+t^2)+10(t^2+t)-3(1+2t+t^2)$

$\therefore$ 有 $[x]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ -3 \end{bmatrix}$

23. $\forall \vec{u}, \vec{w} \in V$, 使 $[\vec{u}]_B = [\vec{w}]_B$

则 $B[\vec{u}_B] = B[\vec{w}_B]$

则 $\vec{u} = \vec{w}$

24. $\forall R^n$ 中 $\vec{y}$,

$\because$ B是基 $\therefore$ B列向量线性无关

~~$\therefore$ 存在使 $B[\vec{x}_B] = \vec{y}$~~

$\therefore \exists u$ 使 $B[\vec{u}_B]_B = \vec{u}$

或, $\forall \vec{y} \in R^n$, $\exists \vec{u} \in U$, 使 $B\vec{y} = \vec{u}$

25. 充分性: $B[\vec{u}_1]_B = \vec{u}_1$

$\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ 线性无关. 则

$[\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_p]\vec{x} = 0$ 仅有平凡解 ①

令 $\big[[u_1]_B\ [u_2]_B \cdots [u_p]_B\big]\vec{y} = \vec{0}$ ②

则 $[B^{-1}\vec{u}_1 \cdots B^{-1}\vec{u}_p]\vec{y} = 0$

则 $B^{-1}[\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_p]\vec{y} = 0$

则 $\vec{y}$ 仅有平凡解

~~$\therefore$ 是线性无关的~~

同理反证必要性

山东大学

26. 充分性：

$c_1\vec{u}_1+\cdots+c_p\vec{u}_p=\vec{w}$

即 $[\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_p]\vec{x}=\vec{w}$

~~令设~~

~~$c_1[\vec{u}_1]_B+\cdots+c_p[\vec{u}_p]_B=[\vec{w}]_B$~~

则

$c_1B\vec{u}_1+\cdots+c_pB\vec{u}_p=B\vec{w}$

则 $c_1[\vec{u}_1]_B+\cdots+c_p[\vec{u}_p]_B=[\vec{w}]_B$

必要性.

$c_1[\vec{u}_1]_B+\cdots+c_p[\vec{u}_p]_B=[\vec{w}]_B$

则

$c_1B^{-1}\vec{u}_1+\cdots+c_pB^{-1}\vec{u}_p=B^{-1}\vec{w}$

则 ∵ B^{-1} 可逆

∴ $c_1\vec{u}_1+\cdots+c_p\vec{u}_p=\vec{w}$

习题 4.5

1. 解

a. 原 $=\underset{\vec{v}_1}{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}s+\underset{\vec{v}_2}{\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix}}t$

∴是 $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ 构成一组基

维数：2

2. $\begin{bmatrix}4\\-3\\0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}t$

$\{\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2\}$，2维

7. $A=\begin{bmatrix}1&-3&1&0\\0&1&-2&0\\0&2&-1&0\end{bmatrix}$

$\sim\begin{bmatrix}1&-3&1&0\\0&1&-2&0\\0&0&3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-3&1&0\\0&1&-2&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$

$\{(0,0,0)\}$ 0维

13. Nul A：2维

Col A：3维

14. Nul A：3维

Col A：3维

27. ∵ $P=\{1,t,t^2,\cdots,t^n\}$

其基中含有n个向量

不是由一个有限集生成的

∴是一个无穷维空间

习题 4.6

1. 解 rank A = 2

dim Nul A = 2

Col A的基：$\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\2\\-6\end{bmatrix}\right\}$

~~Row A的基：$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\\5\\-6\end{bmatrix}\right\}$~~

Nul A的基：$\left\{\begin{bmatrix}1\\5/2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

山东大学

4. 解

rank$A=3$

dim Nul$A=3$

Col$A$的基: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_6\}$

Row$A$的基: $\{(1,1,-3,7,9,-9),$
$(0,1,-1,3,4,-3),$
$(0,0,0,1,-1,-2)\}$

Nul$A$的基: $\begin{bmatrix} 4x_3 - \cancel{4x_4} - 9x_5 + \cancel{6}x_6 \\ x_3 \cancel{-3x_4} - 7x_5 + 3x_6 \\ x_3 \quad -3 \\ x_5 + 2x_6 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$

$\therefore$ 为 $\cancel{\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$ 为 $\begin{bmatrix} 4 & -9 & -2 \\ 1 & -7 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. 解

rank$A+$dim Nul$A=8$

dim Nul$A=5$

dim Row$A=$rank$A=3$

rank$A^T=$dim Row$A=3$

7. 解 rank$A=4$

$\therefore$ dim Col$A=4$ dim Nul$A=7-4=3$

$\therefore$ Col$A$ 生成 R^4

但 Nul$A$ 是 R^7 的一个 ~~R^3~~ 三维子空间

9. 解

dim Nul$A=4$

$\therefore$ rank$A=2$

11. 解

dim Nul$A=2$

$\therefore$ rank$A=3$

dim Row$A=$rank$A=3$

13. 解

$(\text{rank}A)_{max}=5$

$(\text{rank}A)_{max}=5$

~~$\because$ rank$A=$~~

① $\because$ A最多有5个主元列

② rank$A$中元素为R^5的元素

故rank$A$中元素个数不能超过5

15T.

2. 2时 rank$A=6$, 满足

rank$A$中元素为R^6

山东大学

28T. 解

a) $\dim \mathrm{Row} A = \mathrm{rank} A^T = \mathrm{rank} A$

$\dim \mathrm{Row} A + \dim \mathrm{Nul} A$

$= \mathrm{rank} A + \dim \mathrm{Nul} A = n$

b) $\dim \mathrm{Col} A + \dim \mathrm{Nul} A^T$

$= \dim \mathrm{Row} A^T + \dim \mathrm{Nul} A^T$

$= \cancel{\dim}\ \mathrm{Rank} A^T + \dim \mathrm{Nul} A^T$

$= m$

29. 解

$A\vec{x} = \vec{b}\ \ \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ 有解

$\Longleftrightarrow$ A 是可逆矩阵

$\Longleftrightarrow$ A^T 是可逆矩阵

$\Longleftrightarrow$ $A^T\vec{x} = \vec{0}$ 仅有平凡解

31. 解

$$\vec{u}\vec{v}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} [a\ b\ c] = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -3a & -3b & -3c \\ 5a & 5b & 5c \end{bmatrix}$$

$$= a\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \cancel{+ (a+b+c)\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}}$$

$\therefore$ $\mathrm{col} A$ 的基为 0 或 $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\mathrm{rank} A \le 1$

习题 4.7

1. 解

a) $[\vec{b}_1]_C = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$ $[\vec{b}_2]_C = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\therefore \underset{C\leftarrow B}{P} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\underset{C\leftarrow B}{P} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\therefore \underset{C\leftarrow B}{P} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

b) $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\underset{C\leftarrow B}{P} [\vec{x}]_B = [\vec{x}]_C$

$\therefore [\vec{x}]_C = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

7. 解

$\left[\begin{array}{cc|c} 7 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & -5 \end{array}\right]$ x_1: $\begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ x_2: $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\therefore c_1 = -2b_1 - 5b_2$

$c_2 = b_1 + 3b_2$

$b_1 = -3c_1 - 5c_2$

$b_2 = \cancel{2c_2+}\ c_1 + 2c_2$

$\therefore \underset{C\leftarrow B}{P} = \begin{bmatrix} -3 & \cancel{-5}\ 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

$\underset{B\leftarrow C}{P} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

山东大学

补充习题

12T. 解

a) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵

则 AB 为 $m\times p$ 矩阵

$\forall \vec{\alpha} \in \text{rank}AB$，则 $\vec{\alpha}\in R^m$

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & \cdots \\ a_{21}b_{11}+\cdots+a_{2n}b_{n1} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

易知，AB 的列向量是 A 的列向量的线性组合，即

AB 的列空间中每个向量属于 A 的列空间

即 $\text{rank}AB \le \text{rank}A$

b) 由 a) 知，$\text{rank}AB\le\text{rank}A$

则 $\text{rank}(AB)^T=\text{rank}B^TA^T$

$\le \text{rank}B^T$

∵ $\text{rank}(AB)^T=\text{rank}AB$

$\text{rank}B^T=\text{rank}B$

∴ $\text{rank}AB\le\text{rank}B$

13T 解

~~$\text{rank}PA\le\text{rank}P$~~

$\text{rank}PA\le\text{rank}A$

$\text{rank}A=\text{rank}P^{-1}(PA)\le\text{rank}PA$

∴ $\text{rank}PA=\text{rank}A$

14T 解

∵ Q 可逆

∴ $\text{rank}(AQ)^T=\text{rank}Q^TA^T=\text{rank}A^T$

由13知

$\text{rank}Q^TA^T=\text{rank}A^T$

又 $\text{rank}(AQ)^T=\text{rank}AQ$

$\text{rank}A^T=\text{rank}A$

∴ $\text{rank}AQ=\text{rank}A$

15T 解

由12知 $\text{rank}AB\le n$

∵ $AB=0$

∴ $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_n\in \text{Nul}A$

∴ ~~col B~~ $\text{col}B$ 是 $\text{Nul}A$ 的子空间

∴ $\dim\text{col}B\le\dim\text{Nul}A$

$n=\text{rank}A+\dim\text{Nul}A$

$\ge\text{rank}A+\text{rank}B$