2011-12 学年第一学期高等数学试题（A）

一、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1。设$0<a<b$，则$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a^{-n}+b^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}=$______

2。设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3\quad+\quad t^2\end{cases}$所确定，则$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$______

3。设$\varphi(x)$是x到离x最近的整数的距离，则$\int_0^{100}\varphi(x)dx=$______

4。曲线$y=-x^3+x^2+2x$与x轴所围图形的面积$A=$______

5。已知$f(x)$的一个原函数为$\dfrac{\sin x}{x}$，则$\int x^3 f'(x)dx=$______

二、选择题(每小题 4 分，共 20 分)

1．下列命题中正确的一个是（　　）

（A）　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\ge\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$，则$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)\ge g(x)$；

（B）　若$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>g(x)$且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x),\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

（C）　若$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>g(x)$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\ge\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

（D）　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$，则$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>g(x)$。

2．设$f(x)$在x_0处可导，则$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{2h}=$（　　）

（A）$-f'(x_0)$　（B）$f'(-x_0)$　（C）$f'(x_0)$　（D）$2f'(x_0)$

3．设$y=f(x)$在点x_0的某邻域内具有连续的三阶导数，且

$f'(x_0)=f''(x_0)=0,f'''(x_0)<0$，则（　　）

（A）$f(x_0)$是$f(x)$的极大值　　（B）$f(x_0)$是$f(x)$的极小值

（C）$(x_0,f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点　　（D）以上都不对

4．设$F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t dt$，则$F(x)$（　　）

（A）为正常数　（B）为负常数　（C）恒为零　（D）不为常数

5.若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f\left(x\right)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln 2$，则 $f(x)=$（　　　　）。

（A）$e^x\ln 2$　　　（B）$e^{2x}\ln 2$　　　（C）$e^x+\ln 2$　　　（D）$e^{2x}+\ln 2$

三、解答题(每小题 10 分，共 60 分)

1. 求极限（1）$\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}$（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 $a,b,c>0$。

2。设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{g\left(x\right)}{x}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 可导，且在 $x=0$ 处二阶导数 $g''\left(0\right)$ 存在，且 $g\left(0\right)=g'\left(0\right)=0$，试求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

3。已知函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，$f(x)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上可导，且满足 $f\left(1\right)=k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f\left(x\right)dx$，其中 $k>1$，证明：至少存在一点 $\xi\in\left(0,1\right)$，使得 $f'\left(\xi\right)=\left(1-\xi^{-1}\right)f\left(\xi\right)$。

4. 求 $\int_0^x f\left(t\right)g\left(x-t\right)dt,\left(x\geq 0\right)$，其中当 $x\geq 0$ 时，$f\left(x\right)=x$，　$g(x)=\begin{cases}\sin x, 0\leq x<\frac{\pi}{2}\\ 0, \quad x\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$。

5. 求微分方程 $3\left(1+x^2\right)y'+2xy=2xy^4$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解。

6. (1) 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$

(2) 设 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，且 $1\leq f(x)\leq 2$，证明：$\int_0^1 f\left(x\right)dx\int_0^1\frac{1}{f\left(x\right)}dx\leq\frac{9}{8}$。