山东大学 2018-2019 学年第一学期 工科高等数学(1) 课程试卷(A)评分标准

（评分细则由各任课老师制定）

一.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} =$ ____0______.

2. $(\ln|x|)' =$ _$\frac{1}{x}$__________.

3. 函数 $\ln(1-x)$ 的带佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式是 ______ $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}+o(x^n)$ _____.

4. 函数 $y=f(x)$ 对任意的x都有 $\Delta y=(2x+5)\Delta x+o(\Delta x), \Delta x\to 0$，且 $f(0)=0$，则 $f(x)=$ x^2+5x_______.

5. $\int_{-2}^{2}(1+x^3)\sqrt{4-x^2}dx =$ ___2π_______.

二. CACBA

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n} =$ C

A. 1 B. 2 C. 3 D. 5

2. 当 $x\to 0$ 时，$x^2-\sin^2 x$ 是 x 的 A

A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小 C. 同阶无穷小，但不等价 D. 等价无穷小

3. 设 $\delta>0$，$f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，且当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，$|f(x)|\le\sin^2 x$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的 C

A. 间断点 B. 连续但不可导的点 C. 可导点且有 $f'(0)=0$ D. 可导点但 $f'(0)\neq 0$

4. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=f^2(x)$，则 $f^{(n)}(x)=$B

A. $n[f(x)]^{n+1}$ B. $n![f(x)]^{n+1}$ C. $[f(x)]^{2n}$ D. $n![f(x)]^{2n}$

5. 设 $f(x)=\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$，$0\le x\le 1$，则函数 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 上 A

A. 单调增, $f''(x)>0$ B. 单调增, $f''(x)<0$

C. 单调减, $f''(x)>0$ D. 单调减, $f''(x)<0$

三.

1. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}\right)$.

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x-1)-\ln x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{(e^x-1)x} \text{ ....(3 分)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-e^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2} \text{ ....(6 分)}$$

或用 Taylor 展开

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\frac{\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln(1+\frac{1}{2}x+o(x)\right)$........................(3 分)

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}(\frac{1}{2}x+o(x))\right)=\frac{1}{2}$..(6 分)

2. 求由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 所确定的函数$\mathrm{y}=\mathrm{y}(\mathrm{x})$的一阶和二阶导数 .

解 $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$..(3 分)

$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2}=\frac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$..(6 分)

3. 计算$\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

解 原式$=-\frac{1}{2}\int\ln x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx$. . . . . (2 分)

$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx$··(4 分)

$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C$··(6 分)

4. 计算$\int_0^{\pi}\left(\int_0^{x}\frac{\sin t}{\pi-t}dt\right)dx$.

解 利用分部积分，

原式$=\mathrm{x}\int_0^{x}\frac{\sin t}{\pi-t}dt\,\Big|_{x=0}^{\pi}-\int_0^{\pi}x\frac{\sin x}{\pi-x}dx$..(2 分)

$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi-t}dt-\int_0^{\pi}t\frac{\sin t}{\pi-t}dt$

$=\int_0^{\pi}(\pi-t)\frac{\sin t}{\pi-t}dt=\int_0^{\pi}\sin t dt=2$.. (6 分)

5. 求由曲线$y=\sqrt{x}$和直线$y=x-2$及x轴围成的区域绕x轴旋转形成的旋转体的体积.

解

原式$=\int_0^4\pi x dx-\int_2^4\pi(x-2)^2dx$..(2 分)

$=\frac{\pi x^2}{2}\Big|_0^4-\frac{\pi(x-2)^2}{3}\Big|_2^4$

$=8\pi-\frac{8}{3}\pi=\frac{16}{3}\pi$..(6 分)

6. 设k为常数，讨论函数$f(x)=ln\,x-\frac{x}{e}+k$的渐近线，单调性，极值，零点，凹凸性.

解：此函数的定义域为$(0，+\infty)$.

由$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$知$x=0$是铅直渐近线，

由$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x-\frac{x}{e}+k}{x}=-\frac{1}{e}$，而$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+\frac{x}{e})$不存在，所以此函数无斜渐近线 ....(2 分)

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$，$f(x)$在$(0，+\infty)$是凸的.

而当$x=e$时，$f'(x)=0$, 当$x\in(0,e)$时，$f'(x)>0$，严格单调增； 当$x\in(e,+\infty)$时，$f'(x)<0$，严格单调减. 极大值$f(e)=k$ . ...(4 分)

由于函数$f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$在$(0,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, 因此当$k>0$时$f(x)$在$(0,+\infty)$内有两个零点. 当$k=0$时$f(x)$在$(0,+\infty)$内有一个零点$x=e$, 当$k<0$时$f(x)$在$(0,+\infty)$内无零点...(7 分)

7. 求微分方程$y''+y=\cos x$的通解.

解

考虑齐次方程$y''+y=0$，其特征方程为$\lambda^2+1=0$。可解得特征根为$\lambda_1=i$，$\lambda_2=-i$.

因而齐次方程的通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x$··(3 分)

设原方程有特解$y^*(x)=x(A\cos x+B\sin x)$

代入方程得$2(B\cos x-A\sin x)=\cos x$

比较系数得$A=0$，$B=\frac{1}{2}$，··(6 分)

故原方程的通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$·······························(7 分)

四.

1. 已知曲线任意一点处的切线和经过该切点与坐标原点的直线都成$\frac{\pi}{4}$的角，求此曲线方程.

两种情况做对一种即得满分（$\pm$其中一种）。

解一　曲线上任意一点（x, y），过此点的切线的倾角α的正切$\tan\alpha=\frac{dy}{dx}$，经过该切点与坐标原点的直线的倾角θ的正切$\tan\theta=\frac{y}{x}$，

因此$\frac{dy}{dx}=\tan\alpha=\tan\left(\theta\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta\pm1}{1\mp\tan\theta}=\frac{x\pm y}{x\mp y}$，即得微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\pm y}{x\mp y}，$$ ···(4 分)

解知得$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\pm arctan\frac{y}{x}}$，C为任意常数··(8 分)

解二　令曲线由极坐标形式$r=r(\theta)$表示， 则此曲线以极角θ为参数的参数方程形式为

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

曲线上任意一点(x,y)，过此点的切线的倾角α的正切

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta},$$

$$\text{而}\tan\alpha = \tan\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\theta \pm 1}{1 \mp \tan\theta}$$

由此得$r'(\theta) = \pm r(\theta)$，………………………………………………………………(6分)

解此微分方程得所求曲线 $r = Ce^{\pm\theta}$，其中 C 为任意常数……………………..(8分)

2. 函数$f(x)$满足$f(0) = f(1) = 0$，$f''(x)$ 在$[0,1]$上存在且连续，证明对任意的$x \in [0,1]$，都有 $|f(x)| \le \frac{1}{8}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|$.

证一 首先对$x = 0,1$结论显然成立………………………………………………………………(1分)

其次证$x \in (0,1)$时结论也成立．令$F(t) = f(t) - \frac{f(x)}{(1-x)x}t(1-t)$，………………(4分)

则有$F(0) = F(x) = F(1) = 0$，则由Rolle定理，存在$\xi_1 \in (0,x)$，使得$f'(\xi_1) = 0$；存在$\xi_2 \in (x,1)$，使得$f'(\xi_2) = 0$. 再利用一次 Rolle 定理，知存在$\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subseteq (0,1)$，使得$f''(\xi) = 0$，即$f''(\xi) + \frac{2f(x)}{(1-x)x} = 0$，……………………………………………….(6分)

所以有$f(x) = \frac{1}{2}x(x-1)f''(\xi)$，因此可得

$$|f(x)| = \frac{1}{2}|x(x-1)||f''(\xi)|$$

$$\le \frac{1}{2}\max_{x\in(0,1)}[x(1-x)]\max_{x\in(0,1)}|f''(x)| \le \frac{1}{8}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|.$$

综上对任意的$x \in [0,1\}$，都有 $|f(x)| \le \frac{1}{8}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|$………………………………(8分)

证二 首先对 x=0, 1 结论显然成立.

其次证$x \in (0,1)$时结论也成立．由 Taylor 中值定理，得

存在存在$\xi_1 \in (0,x)$，使得$0 = f(0) = f(x) - f'(x)x + \frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2$；

存在存在$\xi_2 \in (x,1)$，使得$0 = f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2$

…………………………………(4分)

则有 $f(x) = (1-x)f(x) + xf(x) = \frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2(x-1) - \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2x$，

所以有

$$|f(x)| \le \frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|\max_{x\in[0,1]}[x^2(1-x) + (1-x)^2x] = \frac{1}{8}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|.$$

……………………(8分)