本科高等数学作业卷(一)

一、填空题

1. 设 $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=3f(x)-2x$,则 $f(x)$ = $\underline{\dfrac{3x}{4}+\dfrac{x+1}{4(x-1)},(x\neq 1)}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x, x\le 0\\ x+x^2, x>0\end{cases}$ ，则 $f[f(x)]$ = $\underline{\begin{cases}x\ , & x\le 0\\ x+2x^2+2x^3+x^4\ , & x>0\end{cases}}$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)=$ $\underline{-50}$.

4. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$ $\underline{\ln 2}$

5 判断极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 是否存在. $\underline{\text{不存在}}$.

6.极坐标方程 $r=\dfrac{1}{2\sin\theta-3\cos\theta}$ 所对应的直角坐标方程为 $\underline{2y-3x=1}$

7.平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4\right\}$ 用极坐标形式可表示为 D= $\underline{\left\{(r,\theta)\middle|1\le r\le 2, 0\le\theta\le 2\pi\right\}}$

二、选择题

1. 下列命题中正确的一个是（ D ）

(A) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\ge\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\Rightarrow\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\ge g(x)$；

(B) 若 $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在,

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

(C)若 $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有 $f(x)>g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\ge\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;

(D)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\Rightarrow\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>g(x)$.

2. 当 $x\to 1$ 时, 函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限为（ D ）

(A) 等于 2　(B) 等于 0　(C) 为 ∞　(D) 不存在但不为 ∞

3. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,其中 a,b 是常数,则（ C ）

(A) $a=1, b=1$　(B) $a=-1, b=1$　(C) $a=1, b=-1$　(D) $a=-1, b=-1$

4. 数列 $\{x_n\}$ 收敛于实数 a 等价于: 对任给 $\varepsilon>0$，（ D ）

(A)在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内有数列的无穷多项　(B 在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内有数列的有穷多项

(C)在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 外有数列的无穷多项　(D)在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 外有数列的有穷多项

5.曲线的极坐标方程 $r=\dfrac{1}{1-2\cos\theta}$,则曲线的图形是（ D ）

(A) 圆　(B) 椭圆　(C) 抛物线　(D) 双曲线

三、计算、证明题

1. 判别下列函数的奇、偶性:(1) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; (2)$g(x)=x^3\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$

解 (1)$\because f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-f(x)$,故 $f(x)$为奇

(2)$\because g(-x)=-x^3\left(\dfrac{1}{a^{-x}-1}+\dfrac{1}{2}\right)=-x^3\left(\dfrac{a^x}{1-a^x}+\dfrac{1}{2}\right)=x^3\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)=g(x)$,故 $g(x)$为偶函数

2. 设 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}, x\in(-\infty,+\infty)$,判别 $f(x)$ 是否为周期函数?若是,求其周期.

解 $\because \forall x\in(-\infty,+\infty)$有 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\geq\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow f(x)\geq\dfrac{1}{2}$

$$f(x+1)=f\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\right]=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left[\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right]^2}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}$$

$$=\frac{1}{2}+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]=f(x)$$ 故 $f(x)$是周期为 1 的周期函数

3. 设 $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$,求 y 的反函数.

解 由 $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$ 得 $x=\dfrac{1}{4}\left[\left(\dfrac{1-y}{1+y}\right)^2-1\right]=-\dfrac{y}{(1+y)^2}$,故的反函数为 $y=-\dfrac{x}{(1+x)^2}, x\neq-1$

4. 已知 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}=b$,求 a 和 b

解 $\because \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}=b$,而 $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$,必有 $\lim\limits_{x\to-1}(x^3-ax^2-x+4)=4-a=0\Rightarrow a=4$

$$b=\lim_{x\to-1}\frac{x^3-4x^2-x+4}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x^2-1)(x-4)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x-1)(x-4)=10$$

5. 求极限 (1)$\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$; (2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2}\right)$

解 (1)$\because \left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq1$有界,$\lim\limits_{x\to0}x^2=0 \quad \therefore \lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$

$$(2)\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-2}}=0$$

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, x>0\\ a+x^2, x\leq0\end{cases}$,问 a 为何值时 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在?极限值为多少?

解 $\because \lim\limits_{x\to0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to0+0}\sin x=0, \lim\limits_{x\to0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to0+0}\left(a+x^2\right)=a$, 故当 $a=0$ 时 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在

此时 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

本科高等数学作业卷(二)

一、填空题

1. 设 $f(x)$在 x=2 连续且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}$ 存在,则 $f(2)$ =<u> 3 </u>.

2.设 $f(x)=\begin{cases} xe^{2x}, & x<0 \\ b, & x=0 \\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x}+a, & x>0 \end{cases}$,当 a =<u> -2 </u> ,b = <u> 0 </u> 时 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续.

3.设 $0<a<b$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{-n}+b^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}=$ <u> $\dfrac{1}{a}$ </u> .

4.若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-\sin 6x}{x^3}=36$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=$ <u> 36 </u> .

二、选择题

1. $f(x)=\begin{cases} x-1, & 0<x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 3 \end{cases}$ 在 x=1 处间断是因为（ D ）

(A) $f(x)$在$x=1$无定义 (B) $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)$不存在 (C) $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)$不存在 (D) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在

2. 当 $x\to 0$ 时 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是（ D ）

(A)无穷小量 (B)无穷大量 (C)有界量非无穷小量 (D)无界但非无穷大

3.下列命题正确的是（ C ）

(A)设 $f(x)$为有界函数且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)f(x)$ =0,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$

(B)设$\alpha(x)$为 $x\to x_0$时的无穷小量且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=a\ne 0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=\infty$

(C)设$\alpha(x)$为 $x\to x_0$时的无穷大量且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta(x)=a$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$

(D 设$\alpha(x)$为无界函数且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)f(x)$ =0,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$

4. 设 $x\to 0$ 时 $ax^2+bx+c-\cos x$ 是比 x^2 高阶的无穷小，其中 a,b,c 为常数，则（ C ）

(A) $a=\dfrac{1}{2},b=0,c=1$ (B) $a=-\dfrac{1}{2},b=c=0$ (C) $a=-\dfrac{1}{2},b=0,c=1$ (D) $a=\dfrac{1}{2},b=c=0$

三、计算、证明题

1. 求极限 (1).$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$; (2).$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x+3^x+4^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$; (3).$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

(4).$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$; (5).$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$

解 (1) $\lim\limits_{x\to0+0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1=\lim\limits_{x\to0-0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$

(2) 原极限 $=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\frac{2^x+3^x+4^x-3}{3}\right)}=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2^x+3^x+4^x-3}{x}\right)}=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{(2^x-1)+(3^x-1)+(4^x-1)}{x}}=e^{\frac{1}{3}(\ln2+\ln3+\ln4)}=24^{\frac{1}{3}}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}\dfrac{1}{\cos x\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}\right]$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{2x^2}\right)\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x\cdot\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\cos x}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\dfrac{1}{2}(1+0)=\dfrac{1}{2}$

(5) 由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=\dfrac{1}{2}$

2. 设 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$，其中 $a>0$, $x_0>0$.证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求其极限.

证 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\geq\sqrt{a}$，数列 $\{x_n\}$ 有下界 $\sqrt{a}$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\leq\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{x_n^2}{x_n}\right)$

所以 $\{x_n\}$ 单调不增,故 $\{x_n\}$ 存在极限.令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，则 $l=\dfrac{1}{2}\left(l+\dfrac{a}{l}\right)\Rightarrow l=\sqrt{a}$

3. 已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}$, $(x>0)$, (1) 求 $f(x)$ ； (2) 函数 $f(x)$在定义域内是否连续?

解 (1)当 $x<e$ 时 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln e^n+\ln\left[1+(x/e)^n\right]}{n}=1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(x/e)^n}{n}=1$

当 $x>e$ 时, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln x^n+\ln\left[1+(e/x)^n\right]}{n}=\ln x+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(e/x)^n}{n}=\ln x$

当 $x=e$ 时 $f(e)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln2+n}{n}=1$ $\quad\therefore\quad f(x)=\begin{cases}1, & x\leq e\\ \ln x, & x>e\end{cases}$

(2) 由 $\lim\limits_{x\to e-0}f(x)=\lim\limits_{x\to e+0}f(x)=f(e)$ 知 $f(x)$ 在 $x=e$ 连续

当 $x<e$ 时 $f(x)=1$ 连续; 当 $x\geq e$ 时 $f(x)=\ln x$ 连续.故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续

4. 证明方程 $x\cdot2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

解 设 $f(x)=x\cdot2^x-1$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内连续且 $f(0)=-1<0$, $f(1)=1>0$

根据根的存在定理知方程 $x\cdot2^x=1$ 至少有一个小于 1 的根

本科高等数学作业卷(三)

一、填空题

1.设 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, x\le 0\\ \ln(1+ax), x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 可导,则 $a=$ $\underline{\quad 2 \quad}$.

2.设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$ $\underline{\quad n! \quad}$.

3.设 $y=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sin\frac{1}{x}$，则 $y'=\underline{-\frac{1}{x^2}\left(\sec^2\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}}$

4.设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\underline{\frac{(6t+5)(t+1)}{t}}$.

5.设 $y=\sin^4 x-\cos^4 x$，则 $y^{(n)}=\underline{2^n\sin\left(2x+\frac{n-1}{2}\pi\right)}$.

二、选择题

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{2h}=$ (A)

(A) $-f'(x_0)$ (B) $f'(-x_0)$ (C) $f'(x_0)$ (D) $2f'(x_0)$

2.设 $f(x)=\begin{cases}\frac{|x^2-1|}{x-1}, & x\ne 1\\ 2, & x=1\end{cases}$，在 $x=1$ 处 $f(x)$ 为(A)

(A)不连续 (B)连续, 不可导 (C)可导, 但导数不连续 (D)可导, 且导数连续

3.已知函数 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 则(B)

(A) $f'(x)=\varphi(x)$ (B) $f'(a)=\varphi(a)$ (C) $f'(x)=\varphi(a)+\varphi'(x)$ (D) $f'(a)=\varphi'(a)$

4.设 $y=1+\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$ 隐含 $y=f(x)$,则 $\mathrm{d}y|_{x=0}=$ (D)

(A) $2\mathrm{d}x$ (B) $-\mathrm{d}x$ (C) $-2\mathrm{d}x$ (D) $\mathrm{d}x$

5. 设函数 $f(u)$ 可导, $y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为0.1, 则 $f'(1)=$ (D)

(A) −1 (B) 0.1 (C) 1 (D) 0.5 (E) 0.6

三、计算、证明题

1.求下列函数的导数:

(1) $y=2x\mathrm{e}^x\ln x$ (2) $y=\frac{x+\ln x}{x-\ln x}$ (3) $y=\ln^3(x^2)$

(4) $y=x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ (5) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$ (6) $y=x\cdot(1+x)^{x^2}$

解 (1) $y'=2\mathrm{e}^x(\ln x+x\ln x+1)$ (2) $y'=\frac{(1+\frac{1}{x})(x-\ln x)-(1-\frac{1}{x})(x+\ln x)}{(x-\ln x)^2}=\frac{2-2\ln x}{(x-\ln x)^2}$

(3) $y'=\left[\ln^3(x^2)\right]'=[(2\ln x)^3]'=8(\ln^3 x)'=\frac{24}{x}\ln^2 x$ (4) $y'=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

(5) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ (6) 两边取对数再求导得 $y' = (1+x)^{x^2} \cdot \left[1+2x^2\ln(1+x)+\dfrac{x^3}{1+x}\right]$

2.讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\cos x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$:(1)在 $x=0$ 处的连续性和可导性；(2)求 $f'(x)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\cos x}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x-\sin x\cos x}{x\sin x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^2}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos 2x}{2x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\sin 2x}{2}\right]=\lim_{x\to 0}\sin 2x=0=f(0)\qquad \therefore f(x)在x=0处连续$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{6x}=\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{2}{3}$$

$\therefore f(x)在x=0处可导$

(2) $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}+\dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{2}{3}, & x=0\end{cases}$

3.方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}$,$(x>0,y>0)$, 确定函数 $y=f(x)$, 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $y^{\frac{1}{x}}=x^{\frac{1}{y}}, \dfrac{1}{x}\ln y=\dfrac{1}{y}\ln x, y\ln y=x\ln x$, 等式两边对 x 求导,

得 $(\ln y+1)\dfrac{dy}{dx}=\ln x+1$ 即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\ln x+1}{\ln y+1}$

所以 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{1}{x}(\ln y+1)-(\ln x+1)\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}}{(\ln y+1)^2}=\dfrac{y(\ln y+1)^2-x(\ln x+1)^2}{xy(\ln y+1)^3}$

4.若曲线 $y=x^2+ax+b$ 与 $2y=xy^3-1$ 在点 $(1,-1)$ 处相切，求常数 a,b.

解：由 $(1,-1)$ 为曲线 $y_1(x)=x^2+ax+b$ 的切点知 $y_1(1)=-1$,即 $1+a+b=-1$.

曲线 $y=y_2(x)$ 由方程 $2y=xy^3-1$ 所确定，等式两端关于 x 求导得

$2y'=y^3+3xy^2\cdot y'$ 从而 $y_2'=\dfrac{y^3}{2-3xy^2}$ $\Rightarrow$ $y_2'\big|_{(1,-1)}=1$.

曲线 $y=y_1(x)$ 在点 $(1,-1)$ 处切线斜率为 $y_1'(1)=(2x+a)\big|_{x=1}=2+a$

两曲线共切线，所以 $y_1'(1)=y_2'(1)$.即 $2+a=1$,得 $a=-1$. 代入 $1+a+b=-1$,有 $b=-1$.

综上得 $a=b=-1$.

本科高等数学作业卷(四)

一、填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x =$ ___0___.

2.若$a>0,b>0$均为常数，则$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}} =$ ___$(ab)^{\frac{3}{2}}$___.

3. 设 $x\in[-1,1]$，则 $\arcsin x+\arccos x =$ ___$\dfrac{\pi}{2}$___.

二、选择题

1.下列函数在区间$[-1,1]$上不满足罗尔定理条件的是（ B ）

(A) $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$ (B) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ (C) $f(x)=1+\cos x$ (D) $f(x)=\begin{cases} 1-x^3,\ 0\le x<1 \\ 1-x^2, -1\le x<0 \end{cases}$

2. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$为（ C ）

(A) 0 (B) 6 (C) 36 (D) ∞

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=$（ D ）

(A) 0 (B) 1 (C) $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ (D) $-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$

三、计算、证明题

1. 不用求出函数 $y=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数, 说明方程 $f'(x)=0$有几个实根, 并指出它们所在的范围.

解 $\because f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$ 由罗尔定理知:

存在$\xi_1\in(1,2),\xi_2\in(2,3),\xi_3\in(3,4)$使得$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$

$\therefore f'(x)=0$有3个分别位于区间$(1,2),(2,3),(3,4)$内的根

2. 假设函数$f(x)$在$[1,2]$上有二阶导数, 并且$f(1)=f(2)=0$, 又$F(x)=(x-1)^2 f(x)$.

证明:在$(1,2)$内至少存在一点ξ, 使得$F''(\xi)=0$

证明：$F(1)=0$，$F(2)=0$.则$F(x)$在$[1,2]$上满足罗尔定理条件，故在$(1,2)$内存在一点η,使得 $F'(\eta)=0$

又因为 $F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2 f'(x)$

所以$F'(1)=0$.又$F'(x)$在$[1,2]$上可导，则$F'(x)$在$[1,2]$上满足罗尔定理条件,

故 $\exists\ \xi\ (1<\xi<\eta<2)$ 使 $F''(\xi)=0$

3. 设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续, 在 (a,b) 内可导. 证明: 在 (a,b) 内至少存在一点ξ, 使

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$$

证 作辅助函数 $F(x)=xf(x)$，则$F(x)$在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理的条件，

从而在(a,b)内至少存在一点ξ，使$\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi)$.可见 $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

4.求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right]^{nx}$,$(a_1>0,a_2>0,\cdots,a_n>0)$

解　设 $y=\left[\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right]^{nx}$ 　则 $\ln y=nx[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\{nx[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]\}=n\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n}{\frac{1}{x}}$$

$$=n\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}}{(-\frac{1}{x^2})}\cdot[a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1(-\frac{1}{x^2})+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n(-\frac{1}{x^2})]$$

$$=n\lim_{x\to\infty}\frac{a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n}{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}=n\frac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}=\ln(a_1\cdot a_2\cdots\cdots a_n)$$

所以　$\lim\limits_{x\to\infty}y=a_1\cdot a_2\cdots\cdots a_n$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, x\neq 0\\ 0,\quad ,x=0\end{cases}$,其中 $g(x)$ 可导, 且在 $x=0$ 处二阶导数 $g''(0)$ 存在,

且 $g(0)=g'(0)=0$, 试求 $f'(x)$, 讨论 $f'(x)$ 连续性.

解: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)-g'(0)}{x}=\dfrac{1}{2}g''(0)$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)-g(x)}{x^2}, x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}g''(0),\qquad x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}$$

$$=g''(0)-\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\frac{1}{2}g''(0)=f'(0)$$

$\therefore f'(x)$ 连续

本科高等数学作业卷(五)

1.设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内具有连续的四阶导数, 若$f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$,

且 $f^{(4)}(x_0)<0$，则（ B ）

(A) $f(x)$ 在点 x_0 取得极小值　　(B) $f(x)$ 在点 x_0 取得极大值

(C) 点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点　　(D) $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内单调减少

2.按 $x-4$的乘幂展开多项式：$x^4-5x^3+x^2-3x+4$.

解　因为 $f(4)=-56$, $f'(4)=(4x^3-15x^2+2x-3)|_{x=4}=21$

$f''(4)=(12x^2-30x+2)|_{x=4}=74$, $f'''(4)=(24x-30)|_{x=4}=66$, $f^{(4)}(4)=(24)|_{x=4}=24$

故按$(x-4)$的乘幂展开多项式为

$$x^4-5x^3+x^2-3x+4$$

$$=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f'''(4)}{4!}(x-4)^4$$

$$=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$$

3.求函数 $f(x)=xe^x$ 的 n 阶麦克劳林公式.

解　$f(x)=xe^x$　$f'(1+x)e^x$, $f''(t)=e^x(2+x)\cdots$, $f^{(k)}(x)=e^x(k+x)$

$$f(x)=xe^x=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}$$

$$=0+1\cdot x+\frac{1}{2!}\cdot 2\cdot x^2+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot n\cdot x^n+\frac{1}{(n+1)!}e^{\xi}((n+1)|+\xi)\cdot x^{n+1}$$

$$=x+x^2+\frac{1}{2!}x^3+\cdots\frac{1}{(n-1)!}x^n+\frac{1}{(n+1)!}e^{\xi}\left[(n+1)+\xi\right]x^{n+1},(\xi=\theta x,0<\theta<1)$$

4.求函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ 在$x=0$点处带拉格朗日型余项的n阶泰勒展开式.

解　$\because f(x)=\dfrac{2}{1+x}-1$, $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^k 2\cdot k!}{(1+x)^{k+1}}$　$(k=1,2,3,\cdots,n+1)$

$$\therefore f(x)=1-2x+2x^2-\cdots+(-1)^n 2x^n+(-1)^{n+1}\frac{2x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}},(0<\theta<1)$$

5.设 $f(x)=\dfrac{x^5}{(1-x)(1+x)}$, 求 $f^{(9)}(0)$.

解　$f(x)=\dfrac{x^5}{(1-x)(1+x)}=x^5\cdot\dfrac{1}{1-x^2}=x^5\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^2)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n+5}$, 另一方面

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(9)}(0)}{9!}x^9+\cdots$$

比较两式得 $\dfrac{f^{(9)}(0)}{9!}x^9=x^9$, 从而 $f^{(9)}(0)=9!$

6.利用麦克劳林公式求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^4}\left\{\left[1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-0(x^4)\right]-\left[1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2!}(-\dfrac{x^2}{2})^2+0(x^4)\right]\right\}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}\left[\frac{x^4}{4!}-\frac{x^4}{8}+0(x^4)\right]=-\frac{1}{12}$$

7.应用三阶泰勒公式求 $\sin18^\circ$ 的近似值，并估计误差.

解 令$f(x)=\sin x$,则 $f(0)=0$

$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x$, $f^{(4)}(x)=\sin x$

$f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1,\ f^{(4)}(0)=0$

$$\therefore \sin18^o=\sin\frac{\pi}{10}\approx f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2+\frac{f'''(0)}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3=0+\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3\approx 0.3090$$

$$误差=|R_3|=\left|\frac{\sin\xi}{4!}x^4\right|_{\xi\in(0,\frac{\pi}{10})}\le\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4=4.06\times10^{-4}$$

本科高等数学作业卷(六)

一、填空题

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二次可导，且 $xf''(x)-f'(x)>0$，则 $\dfrac{f'(x)}{x}$ 在区间 $(0,a)$ 内的单调 增加

2. 设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点个数为 2

3. 点 $(0,1)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2+c$ 的拐点，则 a、b、c 应满足 $a\neq 0, b=0, c=1$

4. 函数 $f(x)=x+\sqrt{1-x}$ 在 $[-5,1]$ 上的最大值为 $\dfrac{5}{4}$.

5. 曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right),(x>0)$ 的渐近线方程为 $y=x+\dfrac{1}{e}$.

二、选择题

1. 若 $f(-x)=f(x),(-\infty<x<+\infty)$. 在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$ 且 $f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内有（ C ）

(A) $f'(x)>0, f''(x)<0$　　(B) $f'(x)>0, f''(x)>0$

(C) $f'(x)<0, f''(x)<0$　　(D) $f'(x)<0, f''(x)>0$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足 $f'''(x)>0$，且 $f''(0)=0$. 则 $f'(1)$、$f'(0)$、$f(1)-f(0)$ 和 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序为（ B ）

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\ln(1+x^2)}=-2$，则（ C ）

(A) $f'(0)$ 不存在　　(B) $f'(0)$ 存在但非零　　(C) $f(0)$ 为极大值　　(D) $f(0)$ 为极小值

4. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则（ C ）

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　(C) 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

三、计算、证明题

1. 求 $y=x^2-2\ln|x|$ 的增减区间与极值.

解 $y=\begin{cases}x^2-2\ln x, x>0\\ x^2-2\ln(-x), x<0\end{cases}$

$x>0$ 时 $y'=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x^2-1)}{x}=0$, $x=1$ 为驻点. $y''=2+\dfrac{2}{x^2}>0$. 故 $x=1$ 取极小值

$x<0$ 时 $y'=2x-\dfrac{2}{x}=0$, $x=-1$ 是驻点. $y''=2+\dfrac{2}{x^2}>0$，故 $x=-1$ 时取极小值

单增区间 $(-1,0),(1,+\infty)$；单减区间 $(-\infty,-1),(0,1)$，极小值 $y(-1)=y(1)=1$

区间	$(-\infty,-1)$	x=-1	(-1,0)	(0,1)	x=1	(1,+ ∞)
$f'(x)$	—	0	+	—	0	+
$f(x)$	↘	极小值=1	↗	↘	极小值=1	↗

2.试证：$x > \sin x > x - \dfrac{x^3}{6}, (x > 0)$

证 设 $f(x) = x - \sin x$, 则 $f'(x) = 1 - \cos x \ge 0, (x > 0) \quad \Rightarrow f(x)$在$(0, +\infty)$上单增

故当 $x > 0$ 时 $f(x) > f(0) = 0$, 即$x > \sin x$.

设$g(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}, g'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}, g''(x) = -\sin x + x = f(x) > 0, x > 0$

故$g'(x)$在$(0, +\infty)$上单增, 即当$x > 0$时$g'(x) > g'(0) = 0 \quad \Rightarrow g(x)$在$(0, +\infty)$上单增

当$x > 0$时$g(x) > g(0) = 0$, 即$\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$.综上所述得 $x > \sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$.

3. 设$f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值, 点 $(2,4)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点. 又若$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, 求$f(x)$及其极值.

解 设 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$， $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ ，$f''(x) = 6x + 2a$

由 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处取得极值得$f'(1) = 0$， 即 $3 + 2a + b = 0$

由点 $(2,4)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的点知 $8 + 4a + 2b + c = 4$

由点 $(2,4)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点知 $f''(2) = 0$, 即 $12 + 2a = 0$

解得 $a = -6$, $b = 9$, $c = 2$. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3) = 0$ 得驻点 $x = 1$, $x = 3$

$f''(x) = 6x - 12$, $f''(1) = -6 < 0$, $f''(3) = 6 > 0$

从而 $f(x)$ 在 $x = 1$ 取得极大值$f(1) = 6$; $f(x)$ 在 $x = 3$ 取得极小值$f(3) = 2$

4. 过抛物线$y = x^2$上的一点$M_0(x_0, y_0)$作切线, $(0 \le x_0 \le 1)$, 问M_0取在何处时，该切线与直线$x = 1$和x轴所围成的三角形面积最大？并求最大值.

解 $y' = 2x$, 点x_0处切线方程为$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$. 令$y = 0$得$x = \dfrac{x_0}{2}$; 令$x = 1$得$y = 2x_0 - x_0^2$

$$\therefore S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x_0}{2}\right)\cdot(2x_0 - x_0^2) = \frac{1}{2}\left(2x_0 - 2x_0^2 + \frac{x_0^3}{2}\right), S' = \frac{1}{2}\left(2 - 4x_0 + \frac{3}{2}x_0^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{2}{3} \text{或} x_0 = 2(\text{舍去}), \text{故在} M_0\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right) \text{处所围} \Delta \text{面积达极大} S_{max} = S\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$$

本科高等数学作业卷(七)

一、 填空题

1. 设 $\int f(x)e^{-\frac{1}{x}}dx=-e^{-\frac{1}{x}}+C$，则 $f(x)=$ $\underline{-\frac{1}{x^2}}$.

2. 设 $f'(\ln x)=1+x$，则 $f(x)=$ $\underline{\int(1+e^x)dx=x+e^x+C}$

3. 设 $\frac{4}{1-x^2}f(x)=\frac{d}{dx}[f(x)]^2$，且 $f(0)=0$，则 $f(x)=$ $\underline{\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}$.

4. $\int\frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx=$ $\underline{\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C}$.

5. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$，则 $\int xf'(x)dx=$ $\underline{2\ln x-\ln^2 x+C}$.

二、选择题

1. 若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数是（ B ）

(A) $1+\sin x$　(B) $1-\sin x$　(C) $1+\cos x$　(D) $1-\cos x$

2. 若 $\int df(x)=\int dg(x)$，则不一定成立的是（ A ）

(A) $f(x)=g(x)$　(B) $f'(x)=g'(x)$　(C) $df(x)=dg(x)$　(D) $d\int f'(x)dx=d\int g'(x)dx$

3. 设 $f(x)$ 为连续函数，$\int f(x)dx=F(x)+C$，则正确的是（ C ）

(A) $\int f(ax+b)dx=F(ax+b)+C$　(B) $\int f(x^n)x^{n-1}dx=F(x^n)+C$

(C) $\int f(\ln ax)\frac{1}{x}dx=F(\ln ax)+C, a\neq 0$　(D) $\int f(e^{-x})e^{-x}dx=F(e^{-x})+C$

4. 下列函数中，是 $e^{|x|}$ 的原函数的为（ C ）

(A) $\begin{cases}e^x, & x\geq 0\\ -e^{-x}, & x<0\end{cases}$　(B) $\begin{cases}e^x, & x\geq 0\\ 1-e^{-x}, & x<0\end{cases}$　(C) $\begin{cases}e^x, & x\geq 0\\ 2-e^{-x}, & x<0\end{cases}$　(D) $\begin{cases}e^x, & x\geq 0\\ 3-e^{-x}, & x<0\end{cases}$

5. $\int\left(\ln\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)dx=$（ A ）

(A) $x\ln\ln x+C$　(B) $x\ln x+C$　(C) $2\ln\ln x+C$　(D) $x\ln\ln x+\int\frac{2}{\ln x}dx$

三、计算、证明题

1. 计算下列不定积分

$$(1).\int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x;\quad (2).\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x;\quad (3).\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x;\quad (4).\int\frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x;\quad (5).\int x\arctan x\mathrm{d}x$$

解 (1). $\int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}(x\ln x)=-\frac{1}{x\ln x}+C$

(2). $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}\mathrm{d}\sqrt{x}=2\int\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}\arctan\sqrt{x}=\left(\arctan\sqrt{x}\right)^2+C$

(3). $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]}{1+\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C$

(4). $\int\frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\int\frac{\arg\tan\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}\frac{1}{x}=-\int\arg\tan\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\arg\tan\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)^2+C$

(5). $\int x\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\arctan x\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}x^2\cdot\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}x^2\cdot\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\cdot\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$

2. 设 $f(x)$的一个原函数为$\frac{\sin x}{x}$，求$\int xf'(2x)\mathrm{d}x$.

解 $\because\int f(x)dx=\frac{\sin x}{x}\quad\therefore f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，令 $2x=y$,得

$\int xf'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int yf'(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int y\mathrm{d}f(y)=\frac{1}{4}\left[yf(y)-\int f(y)\mathrm{d}y\right]$

$=\frac{1}{4}\left[2x\frac{2x\cos 2x-\sin 2x}{4x^2}-\frac{\sin 2x}{2x}\right]=\frac{1}{4}\left(\cos 2x-\frac{\sin 2x}{x}\right)$

本科高等数学作业卷(八)

一、填空题

1. $\int_{-1}^{1}\left(x^2\ln\frac{2-x}{2+x}+\frac{x}{\sqrt{5-4x}}\right)dx=$ $\underline{\frac{1}{6}}$.

2.设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geq 0\\ \dfrac{1}{1+e^x}, & x<0\end{cases}$,则$\int_0^2 f(x-1)dx=$ $\underline{\ln(1+e)}$.

3.设$f(x)$可导且$\int_0^x e^t f(t)dt=e^x f(x)+x^2+x+1$, 则

$f(0)=$ $\underline{-1}$, $f'(x)=$ $\underline{-(2x+1)e^{-x}}$, $f(x)=$ $\underline{(2x+3)e^{-x}-4}$

二、选择题

1.下列不等式成立的是(D)

(A)$\int_0^1 x^3dx>\int_0^1 x^2dx$　　(B)$\int_{-1}^{-2} x^2dx>\int_{-1}^{-2} x^3dx$

(C)$\int_0^1 e^{x^2}dx>\int_1^2 e^{x^2}dx$　　(D)$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx>\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx$

2.已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为偶函数, 且 $F(x)=\int_a^x (x+2t)f(-t)dt$,则(B)

(A)对 a 的任意取值, 均为偶函数　　(B)仅当 $a=0$ 时, 为偶函数

(C)对 a 的任意取值, 均为奇函数　　(D)仅当 $a=0$ 时, 为奇函数

3.设$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导且$f(0)=0$, 并有反函数 $g(x)$,若 $\int_0^{f(x)} g(t)\,dt=x^2e^x$, 则 $f(x)=$(C)

(A)$(2+x)e^x-3$　　(B)$(2+x)e^x+C$　　(C)$(1+x)e^x-1$　　(D)$(3+x)e^x+C$

4.$[a,b]$上$f(x)>0$, $f'(x)<0$, $f''(x)>0$. $S_1=\int_a^b f(x)dx$, $S_2=f(b)(b-a)$, $S_3=f(a)(b-a)$,则(B)

(A)$S_1<S_2<S_3$　　(B)$S_2<S_1<S_3$　　(C)$S_3<S_1<S_2$　　(D)$S_2<S_3<S_1$

5.设 $A=\int_0^1\frac{e^t}{1+t}dt$, 用 A 表示 $I=\int_{a-1}^{a}\frac{e^{-t}}{t-a-1}dt$ 的值, 则 $I=$(B)

(A) e^aA　　(B) $-e^{-a}A$　　(C) $e^{-a}A$　　(D) $-A$

三、计算、证明题

1.$\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}\mathrm{d}x$

解 $\because \max(x,x^2)=\begin{cases} x^2, & -2\le x<0 \\ x, & 0\le x<1 \\ x^2, & 1\le x<2 \end{cases}$ $\therefore \int_{-2}^{2}\max(x,x^2)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}x^2\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{11}{2}$

2.设 $f(t)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$，求 $F(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})$.

解 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t \underset{\text{令}\frac{1}{t}=u}{=\!=\!=} \int_1^x\frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u}}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u=\int_1^x\frac{\ln u}{u(1+u)}\mathrm{d}u \underset{\text{将}u\text{换成}t}{=\!=\!=\!=} \int_1^x\frac{\ln t}{t(1+t)}\mathrm{d}t$

$$F(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{\ln t}{t(1+t)}\mathrm{d}t=\int_1^x\left[\frac{\ln t}{1+t}+\frac{\ln t}{t(1+t)}\right]\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(\ln t)^2\Big|_{t=1}^{t=x}=\frac{1}{2}\ln^2 x$$

3.在第一象限内，求曲线$y=-x^2+1$上的一点，使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴围成的图形面积最小，并求此最小面积.

解 设所求点为$P(x,y)$,因 $y'=-2x,(x>0)$, 故过点 $P(x,y)$ 的切线方程为$Y-y=-2x(X-x)$

切线在 y 轴上的截距 $b=x^2+1$;在 x 轴上的截距 $a=\frac{x^2+1}{2x}$

所求面积$S(x)=\frac{1}{2}ab-\int_0^1\left(-x^2+1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(x^3+2x+\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{3}$,令$S'(x)=\frac{1}{4}\left(3x-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

得驻点$x_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$,再由 $S''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)>0$ 知 $x_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时$S(x_0)$ 取得极小值, 且当$0<x<1$时

仅有此一个极小值点, 故此极小值点即为$S(x)$ 在 $0<x<1$ 上的最小值.

$x_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$时$y_0=\frac{2}{3}$,$S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{9}\left(2\sqrt{3}-3\right)$.所求点为$P\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{3}\right)$,所求最小面积为$\frac{2}{9}\left(2\sqrt{3}-3\right)$.

4.$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$

解 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\left[\ln x\Big|_1^b-\frac{1}{2}\int_1^b\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}\right]$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln b-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^b\right]=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln b-\frac{1}{2}\ln\left(b^2+1\right)+\frac{1}{2}\ln 2\right]=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{2}\ln 2\right)=\frac{1}{2}\ln 2$$

本科高等数学作业卷(九)

一、填空题

1.过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$且满足$y'\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$的曲线方程为$y=\frac{1}{\arcsin x}\left(x-\frac{1}{2}\right)$或 $y\arcsin x=x-\frac{1}{2}$.

2.设 $y=\mathrm{e}^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$ $(C_1,C_2$为任意常数)为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程为 $y''-2y'+2=0$.

3.微分方程 $xy''+3y'=0$的通解为 $y=C_1+\frac{C_2}{x^2}$.

4.微分方程 $y''+2y'+5y=0$的通解为 $y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

5.设 $y_1(x)$ 是方程 $y+p(x)y=f_1(x)$的一个解, $y_2(x)$ 是方程 $y'+p(x)y=f_2(x)$的一个解，则 $y=y_1(x)+y_2(x)$ 是方程 $y'+p(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的解.

二、选择题

1.由 $x^2-xy+y^2=c$ 确定的隐函数满足的微分方程是(A)

(A) $(x-2y)y'=2x-y$　(B) $(x-2y)y'=2x$　(C) $xy'=2x-y$　(D) $-2yy'=2x-y$

2.已知函数$y=y(x)$在任意点x处的增量$\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$, 且当$\Delta x\to 0$时, α是Δx的高阶无穷小

$y(0)=\pi$,则 $y(1)=$(D)

(A)2π　(B)π　(C)$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$　(D)$\pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$

3.微分方程 $y''-y=\mathrm{e}^x+1$的一个特解应具有形式(B),(式中a,b为常数)

(A) $a\mathrm{e}^x+b$　(B) $ax\mathrm{e}^x+b$　(C) $a\mathrm{e}^x+bx$　(D) $ax\mathrm{e}^x+bx$

三、计算、证明题

1.求方程$(x+1)y'+1=2\mathrm{e}^{-y}$ 的通解.

解 分离变量得$\frac{\mathrm{d}y}{2\mathrm{e}^{-y}-1}=\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$, 两端积分得$\ln\left(2-\mathrm{e}^y\right)=-\ln(x+1)+\ln C\Rightarrow (x+1)(2-\mathrm{e}^y)=C$

2.求初值问题$\begin{cases}(y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0\\ y|_{x=1}=0\end{cases}$ $(x>0)$ 的解.

解 原方程可化为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$,令$y=xu$,得$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\sqrt{1+u^2}$,即$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$

解得 $\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)=\ln\left(Cx\right)$, $C>0$为任意常数,$\therefore u+\sqrt{1+u^2}=Cx$,即$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=Cx$,即

$y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$,由$y\big|_{x=1}=0$得$C=1$,故初值问题解为$y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2$或 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$

3.对任意$x>0$, 曲线$y=f(x)$上点$(x,f(x))$处的切线在y轴上的截距等于$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 求$f(x)$

解　曲线$y=f(x)$上点$(x,f(x))$处的切线方程为$Y-f(x)=f'(x)(X-x)$

令$X=0$,得截距$Y=f(x)-xf'(x)$.由题意知$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)-xf'(x)$, 即

$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x[f(x)-xf'(x)]$.对$x$求导并化简得 $xf''(x)+f'(x)=0$,即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(xf'(x)\right)=0$

积分得 $xf'(x)=C_1, f'(x)=\frac{C_1}{x}$, 再积分得 $f(x)=C_1\ln x+C_2$(其中C_1,C_2为任意常数)

4.设$f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中$f$为连续函数，求$f(x)$.

解 由$f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$的两边对 x 求导得 $f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

两边再对 x 求导得$f''(x)=-\sin x-f(x)$, 即 $f''(x)+f(x)=-\sin x$

这是二阶常系数非齐次线性微分方程, 初始条件 $y|_{x=0}=f(0)=0, y'|_{x=0}=f'(0)=1$

对应齐次方程通解 $Y=C_1\sin x+C_2\cos x$, 设非齐次方程特解为 $y^*=x\left(a\sin x+b\cos x\right)$

用待定系数法求得 $a=0,b=\frac{1}{2}$;于是 $y^*=\frac{x}{2}\cos x$, 非齐次方程的通解为

$y=Y+y^*=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{x}{2}\cos x$,由初始条件定出$C_1=\frac{1}{2};C_2=0$, 从而

$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$

5.已知$y_1=3, y_2=3+x^2, y_3=3+\mathrm{e}^x$是二阶线性非齐次方程的解，求它的通解和该方程.

解　$y_2-y_1=x^2$，$y_3-y_1=\mathrm{e}^x$ 是齐次方程的解 $\frac{y_3-y}{y_2-y_1}\neq$常数

$\therefore c_1x^2+c_2\mathrm{e}^x$ 为齐次方程的通解, 而$y_1=3$是非齐次方程的特解

故非齐次方程通解为 $y=c_1x^2+c_2\mathrm{e}^x+3$, $\Rightarrow y'=2c_1x+c_2\mathrm{e}^x$； $y''=2c_1+c_2\mathrm{e}^x$

$c_2\mathrm{e}^x=y'-2c_1x=y''-2c_1 \quad \Rightarrow 2c_1(1-x)=y''-y' \quad \Rightarrow c_1=\frac{y''-y'}{2(1-x)}$

又由$c_2\mathrm{e}^x=y-(c_1x^2+3)=y'-2c_1x$得$y-y'-3=c_1(x^2-2x)$, 将$c_1$代入得

$y-y'-3=\frac{y''-y'}{2(1-x)}(x^2-2x) \quad \Rightarrow 2(1-x)(y-y'-3)=(y''-y')(x^2-2x)$

整理得该方程为$(2x-x^2)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=6(1-x)$

本科高等数学作业卷(十)

一、填空题

1.若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和序列为 $S_n = \frac{2n}{n+1}$，则 $u_n =$ $\underline{\frac{2}{n(n+1)}}$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n =$ $\underline{\ 2\ }$.

2.级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) =$ $\underline{-\sqrt{2}+1}$.

3.级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$的敛散性为__发散__.

二、选择题

1.若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则(A)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1})$ 收敛　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛　(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n-1}$ 收敛　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛

2.若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ 收敛, 则(C)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中至少有一个收敛

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 不一定收敛　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n + b_n|$ 收敛

3. 给定两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，已知 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \rho$, 当$\rho$为何值时, 不能判断这两个正项级数有相同的敛散性的是(A)

(A) $\rho=0$　(B) $\rho=\frac{1}{2}$　(C) $\rho=1$　(D) $\rho=2$

三、计算、证明题

1.判断级数敛散性: $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{3^n}+\cdots$

解　级数由收敛级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 相减得到, 由性质知收敛.

2.讨论级数 $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}+\cdots$ 的敛散性. 若收敛，求其和.

解　$u_n=\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$$S_n=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_n=2$

3.判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2}{1+n^3}$ 的敛散性.

解　因为 $\frac{n^2+1}{n^3+1}\geq\frac{n^2+1}{n^3+n}=\frac{1}{n}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2}{1+n^3}$ 发散.

4.判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 的敛散性.

解　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}}{\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\mathrm{e}}<1$

所以级数收敛.

5.判断级数的敛散性: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$，其中 $a_n\to a(n\to\infty)$, a_n,b,a 均为正数.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{a}$, 故

若 $b<a$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ 收敛; 若 $b>a$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ 发散; 若 $b=a$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ 敛散性不能确定

6.设 $u_n\neq0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，试判别 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 的敛散性.

解　由 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=\infty$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 发散.

本科高等数学作业卷(十一)

一、填空题

1.若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+a}{n}$ 收敛，则 a 的取值范围是 $\underline{\quad a=0\quad}$.

2.级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 的敛散性为 $\underline{\quad\text{条件收敛}\quad}$.

二、选择题

1.若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 是(D)

(A)绝对收敛　(B)条件收敛　(C)发散　(D)可能收敛, 也可能发散

2.设 $0\le a_n<\frac{1}{n}\,(n=1,2,\cdots)$，则下列级数中肯定收敛的是(D)

(A)$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$　(B)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$　(C)$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$　(D)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$

3.若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛, 则(B)

(A)$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛　(B)$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 未必收敛　(C)$\lim_{n\to\infty}u_n=0$　(D)$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

三、计算、证明题

1. 判断下列级数是否收敛？若收敛，指出是绝对收敛还是条件收敛？

(1). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^3}{3^n}$;　(2). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\pi}{1+n^2}$;　(3). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;　(4). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n\sin\frac{\pi x}{5}}{n^n}$

解 (1). $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^3}=\frac{1}{3}$, 故原级数绝对收敛;

(2). 由交错级数判别法知 $\sum_{n-1}^{\infty}u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n-1}^{\infty}u_n=\sum_{n-1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$ 发散, 故原级数条件收敛;

(3). $\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\ne0$, 故原级数发散;

(4). $|u_n|=\left|\frac{n!2^n\sin\frac{\pi x}{5}}{n^n}\right|\le\frac{n!2^n}{n^n}=v_n,\ \lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!2^n}=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$

由正项级数比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 敛, $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 从而原级数绝对收敛.

2.设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，且 $a_n \le c_n \le b_n \ (n=1,2,\cdots)$，试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$也收敛.

证　$\because 0 \le c_n - a_n \ \therefore \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n)$为正项级数,且由正项级数的比较判别法知其收敛.

而$c_n = (c_n - a_n) + a_n$,由$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n)$及$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的收敛性知原级数收敛.

3.设 $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

证　$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \underline{\underline{令x = n\pi + t}} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n\pi + t)}{n\pi + t} \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{(-1)^n \sin t}{n\pi + t} \mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t} \mathrm{d}t$

$= (-1)^n \frac{\sin \xi}{n\pi + \xi}$,其中$\xi \in (0, \pi)$.由交错级数判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin \xi}{n\pi + \xi}$收敛，从而$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

本科高等数学作业卷(十二)

一、填空题

1.若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛域为$(-8,8]$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_nx^n}{n(n-1)}$的收敛半径为_8_,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{3n+1}$的收敛域为_$(-2,2]$_.

2.设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为2,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x+1)^{n+1}$的收敛区间为_$(-3,1)$_.

二、选择题

1.若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处收敛，则此级数在$x=2$处(B).

(A)条件收敛. (B)绝对收敛. (C)发散. (D)敛散性不变.

2.若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$x=3$处收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-\frac{1}{2})^n$在$x=-3$处(C)

(A)条件收敛 (B)绝对收敛 (C)发散 (D)敛散性不变.

三、计算、证明题

1.求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\frac{x^n}{n}$的收敛区间，并讨论该区间端点处的收敛性.

解 收敛半径$R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[3^{n+1}+(-2)^{n+1}\right](n+1)}{\left[3^n+(-2)^n\right]n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right](n+1)}{\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]n}=3$,收敛区间为$(-3,3)$

当$x=3$时因为$\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}>\frac{1}{2n}$,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,以原级数在点$x=3$发散

当$x=-3$时因为$\frac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=(-1)^n\frac{1}{n}-\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$

都收敛,所以原级数在点$x=-3$处收敛.

2.求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$的收敛域及和函数$S(x)$,并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$的和$S$.

解 先求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$的收敛域. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

在端点$x=1$处级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$,发散;在$x=1$处级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n-1}$发散.故收敛域为$(-1,1)$

再求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$和的和函数$S(x)$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\left(1-\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},x\in(-1,1).$$

最后求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$的和$S$,$S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=\frac{1}{2}\cdot S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=2$.

3.求幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$的和函数, 并求级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$的和$S$.

解　先求得幂级数收敛半径$R=1$,收敛区间为$(-1,1)$.设幂级数的和函数为$S(x)$,则

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^n$$

其中$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$,　$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}(x\neq 0)$

设$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$,则$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},(|x|<1)$

$$\therefore g(x)=g(x)-g(0)=\int_0^x g'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x)$$

而$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}=g(x)-x-\frac{x^2}{2}=-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}$

故$S(x)=\frac{x}{2}[-\ln(1-x)]-\frac{1}{2x}\left[-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}\right]=\frac{2+x}{4}+\frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x),(|x|<1且x\neq 0)$

当$x=0$时$S(x)=0$.令$x=\frac{1}{2}\in(-1,1)$,得$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n^2-1)2^n}=S(\frac{1}{2})=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$

4.将$f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$展开成$(x-5)$的幂级数.

解 $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{2+x-5}-\frac{1}{3+x-5}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-5}{2}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-5}{3}}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-5)^n,(3<x<7)$$

5.将$f(x)=\int_0^x\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$展开成$x$的幂级数.

解　$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1},\frac{\ln(1+x)}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

$$f(x)=\int_0^x\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n x^n}{n+1}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)^2},x\in(-1,1)$$

本科高等数学作业卷(十三)

一、填空题

1.设$f(x)=\begin{cases} x+\pi, -\pi \le x < 0 \\ x-\pi, 0 \le x < \pi \end{cases}$为$T=2\pi$的周期函数，则其傅里叶级数$x=\dfrac{5\pi}{2}$处收敛于 $\underline{-\dfrac{1}{2}\pi}$

2.设函数 $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi < x < \pi)$的傅里叶展开式为$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin nx)$,

则其中系数b_3的值为 $\underline{\dfrac{2}{3}\pi}$.

3.已知$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi < x \le 0 \\ 1+x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$的傅里叶级数为$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其和函数

为$S(x)$，则$S(1)=\underline{\ 2\ }$，$S(0)=\underline{\dfrac{1}{2}}$，$S(\pi)=\underline{\dfrac{1}{2}}$.

4.设$f(x)=x^2, 0\le x\le 1, S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots$，则$S(-\dfrac{1}{2})=\underline{-\dfrac{1}{4}}$.

二、选择题

1.设函数$f(x)$以2π为周期，且在闭区间$[-\pi,\pi]$上有$f(x)=\begin{cases} 1-x, -\pi \le x \le 0 \\ 1+x,\ 0 \le x \le \pi \end{cases}$,

则 $f(x)$的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于(A)

(A)$1+\pi$　　(B)$1-\pi$　　(C)1　　(D) 0

三、计算、证明题

1.将函数 $f(x)=\begin{cases} 0, -\pi < x \le 0 \\ x, 0 < x \le \pi \end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

解　所给函数满足收敛定理的条件，傅立叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\cdot\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.\text{当 } n=1,2,3,\ldots\text{时}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\cdot\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{-1+(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\cdot\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{x\cos nx}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

所以$f(x)$的傅立叶级数展开式为 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$

当$x=\pm\pi$时，傅立叶级数收敛于$\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\dfrac{0+\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

2.将函数 $f(x)=\begin{cases}k,-2\le x<0\\0,0\le x\le 2\end{cases}$ (常数$k\neq 0$) 展开成傅里叶级数.

解 $\frac{T}{2}=2$,故由公式得傅立叶系数为

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}k\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\left(\frac{k}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{0}=0,(n=1,2,\cdots)$$

$$n=0\text{时}a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}k\mathrm{d}x=k$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}k\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\left(-\frac{k}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{0}=\frac{k}{n\pi}\left[-1+(-1)^n\right],n=1,2,\ldots$$

$$\therefore f(x)=\frac{k}{2}-\frac{k}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}+\cdots\right),(-2<x<0\text{ 及 }0<x<2).$$

3.将函数 $f(x)=\cos x$ 在区间$[0,\pi]$上展开成正弦级数.

解 对 $f(x)$进行奇延拓,令$l=\pi$,得$a_n=0,(n=0,1,2,\cdots)$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x\right]\mathrm{d}x,\text{当}n=1\text{时}b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x=0$$

$$\text{当}n\neq 1\text{时}b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{-\cos(n-1)x}{n-1}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2n}{\pi}\left[\frac{(-1)^n+1}{n^2-1}\right]=\begin{cases}0\quad, & n=2k+1;\\ \dfrac{8k}{\pi(2k-1)(2k+1)}, & n=2k.\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\cos x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n^2-1}n\cdot\sin nx=\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1\cdot 3}+\frac{2\sin 4x}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{k\sin 2k\pi}{(2k-1)(2k+1)}+\cdots\right),$$

$(0\le x\le\pi)$.级数在 $x=0,x=\pi$ 处收敛于$\frac{1}{2}\left[f(0+0)+f(\pi-0)\right]=0$.

4.将函数 $f(x)=x-1,(0\le x\le 2)$展开成周期为4的余弦级数.

解 $a_0=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x=0.$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^2(x-1)\mathrm{d}\sin\frac{n\pi x}{2}=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0, & n=2k\\ -\dfrac{8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1\end{cases};(k=1,2,\cdots)$$

$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2},x\in[0,2]$$

本科高等数学作业卷(十四)

一、填空题

1.已知向量 $\vec{a}=a_x\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+a_x\vec{j}-7\vec{k}$, 则当 a_x= <u>4</u> 时, $\vec{a}$ 垂直于 $\vec{b}$.

2.已知$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 都是单位向量, 且满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, 则$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$ <u>$-\dfrac{3}{2}$</u> .

3.已知两条直线的方程是$L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$; $L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$

则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是 <u>$x-3y+z+2=0$</u> .

4.过点 $M_0(2,4,0)$ 且与直线 L_1: $\begin{cases}x+2z-1=0\\ y-3z-2=0\end{cases}$ 平行的直线方程是 <u>$\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z}{1}$</u> .

二、选择题

1.已知 $\vec{a},\vec{b}$ 均为非零向量，而 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$,则（ D ）

(A)$\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$ (B)$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ (C)$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ (D)$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

2.设三向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足关系式: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$, 则必有（ D ）

(A) $\vec{a}=\vec{0}$ 或 $\vec{b}=\vec{c}$ (B) $\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$ (C)当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时 $\vec{b}=\vec{c}$ (D) $\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})$

3.设有直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\ 2y+z=3\end{cases}$, 则 L_1 与 L_2 的夹角为（ C ）

(A)$\dfrac{\pi}{6}$ (B)$\dfrac{\pi}{4}$ (C)$\dfrac{\pi}{3}$ (D)$\dfrac{\pi}{2}$

4.在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中, 与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线（ B ）

(A)只有1条 (B)只有2条 (C)至少有3条 (D)不存在

三、计算、证明题

1.设 $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$，$\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$，且三向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 长度相等，两两的夹角也相等，求 $\vec{c}$.

解　设 $\vec{c}=\{x,y,z\}$,由题意有 $x^2+y^2+z^2=2$ ，$\dfrac{x+y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{1}{2}$ ，$\dfrac{y+z}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{1}{2}$

将第一式代入后两式得 $x+y=1, y+z=1$,再与第一式联立解得

$x=1, y=0, z=1$ 和 $x=-\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{4}{3}$，$z=-\dfrac{1}{3}$.故 $\vec{c}=\{1,0,1\}$ 或 $\vec{c}=\dfrac{-1}{3}\{1,-4,1\}$

2.设向量 $\vec{a}=\alpha\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$，$\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+\gamma\vec{k}$ 共线, 求实数 α,γ.

解：$\because$ $\vec{a}$与$\vec{b}$共线　$\therefore \dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{5}{1}=\dfrac{-1}{\gamma}$　得 $\alpha=15, \gamma=-\dfrac{1}{5}$

3.求过 z 轴及点(1,1,1)的平面方程.

解法一　因平面过 z 轴(可看成母线平行于 z 轴的柱面,且过原点),故其方程为 $Ax+By=0$.将点(1,1,1)代入解得 $B=-A$ 再代入上式得平面方程：$x-y=0$.

解法二　平面过向径 $\{0,0,1\}$ 和 $\{1,1,1\}$,故可取 $\vec{n}=\{0,0,1\}\times\{1,1,1\}=\vec{j}-\vec{i}=\{-1,1,0\}$

又平面过点(0,0,0),其方程为 $-x+y=0$ 即 $x-y=0$

4.求直线 $L:\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $\pi: 4x-y+z=1$ 上的投影直线方程.

解　求 L 在 π 上的投影直线方程, 即找一与 π 垂直且过 L 的平面 π_1.π_1 与 π 的交线即为投影直线方程.过 L 的平面束方程为 $\lambda(2x-4y+z)+\mu(3x-y-2z-9)=0$

即　$(2\lambda+3\mu)x+(-4\lambda-\mu)y+(\lambda-2\mu)z-9\mu=0$　　(1)

$\pi_1\perp\pi \quad\Rightarrow\quad 4\cdot(2\lambda+3\mu)-1\cdot(-4\lambda-\mu)+1\cdot(\lambda-2\mu)=0$　解得 $\lambda=-\dfrac{11}{13}\mu$

代回 (1) 得平面 π_1 的方程为　$17x+31y-37z-117=0$

所求投影直线方程为　$\begin{cases}17x+31y-37z-117=0\\4x-y+z-1=0\end{cases}$.

5.设直线 $L:\begin{cases}x+y+b=0\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 π 上, 平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 (1,−2,5), 求 a, b.

解　点 $(1,-2,5)$ 处曲面法向量 $\vec{n}=\{2,-4,-1\}$,切平面方程：$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$

即　$2x-4y-z-5=0$　(1),由 $L:\begin{cases}x+y+b=0\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y=-x-b\\z=x-3+a(-x-b)\end{cases}$,代入 (1) 得

$(5+a)x+4b+ab-2=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}5+a=0\\4b+ab-2=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}a=-5\\b=-2\end{cases}$

本科高等数学作业卷(十五)

一、填空题

1. 设 $z=x^2y-x^3y^2+\mathrm{e}^{-xy}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ $\underline{2xy-3x^2y^2-y\mathrm{e}^{-xy}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(-1,0)}=$ $\underline{2}$.

2. 设 $z=\sqrt{ax^3-by^3}$，则 $z\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=$ $\underline{\dfrac{3}{2}\left(ax^2+by^2\right)}$.

3. 设 $u=x^{yz}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$ $\underline{yzx^{yz-1}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=$ $\underline{zx^{yz}\ln x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=$ $\underline{yx^{yz}\ln x}$.

4. 设 $z=xyf(\dfrac{y}{x})$，$f(u)$可导，则 $xz_x+yz_y=$ $\underline{2z}$.

5. 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{-xy}-2z=\mathrm{e}^z$ 给出的隐函数，则在 $x=0,y=1$ 处的全微分 $\mathrm{d}z=$ $\underline{-\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x}$

二、选择题

1. 设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处存在对 x,y 的偏导数，则 $f_x'(x_0,y_0)=$（ B ）

(A) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$　(B) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0)-f(x_0-\Delta x,y_0)}{\Delta x}$

(C) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$　(D) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

2. 利用变量替换 $u=x,v=\dfrac{y}{x}$，一定可以把方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$ 化为新方程（ A ）

(A)$u\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$　(B)$v\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$　(C)$u\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$　(D)$v\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$

3. 若函数$f(x,y)$在 (x_0,y_0)处存在偏导数 $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处(D)

(A)连续　(B)可微　(C)有极值　(D)可能有极值

4. 设$z=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$，则点$(\dfrac{1}{2},-1)$是该函数的（ B ）

(A)驻点，但不是极值点　(B)驻点，且是极小值点

(C)驻点，且是极大值点　(D)偏导数不存在的点

三、计算、证明题

1.设$z=f(u,v)$具有二阶连续偏导数，其中$u=xy, v=x^2+y^2$,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\because \dfrac{\partial z}{\partial x}=y\,f_1'+2x\,f_2'$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\,f_1'+2y\,f_2'$

$\therefore \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f_2'+y^2 f_{11}''+4xy\,f_{12}''+4x^2 f_{22}'',\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+xy\,f_{11}''+2(x^2+y^2)f_{12}''+4xy\,f_{22}''$

2.设函数$z=\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} tf(x^2+y^2-t^2)\mathrm{d}t$,其中函数有连续的导数, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 令$u=x^2+y^2-t^2$, 则 $z=\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} tf(x^2+y^2-t^2)\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{2}\int_{x^2+y^2}^{0} f(u)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2} f(u)\mathrm{d}u$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2} f(u)\mathrm{d}u\right]=\dfrac{1}{2}\cdot f(x^2+y^2)\cdot 2x=x\,f(x^2+y^2)$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[x\,f(x^2+y^2)\right]=x\,f'(x^2+y^2)\cdot 2y=2xy\,f'(x^2+y^2)$.

3.求函数 $z=\mathrm{e}^{-x}(x-y^3+3y)$ 的极值.

解 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{-x}(1-x+y^3-3y)=0\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=-3\mathrm{e}^{-x}(y^2-1)=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ 驻点$P_1(-1,1), P_2(3,-1)$, $f(P_1)=\mathrm{e}$为极大值; $f(P_2)$不是极值

4.周长为$2a$的矩形绕它的一边旋转可得到一个圆柱体. 问矩形边长各为多少时, 可使圆柱体体积最大.

解 设矩形边长为 x, y,则 $x+y=a, V=\pi y^2 x$ (绕长为 x 的边旋转),

设$F(x,y)=\pi y^2 x+\lambda(x+y-a)$

$\begin{cases}F_x'=\pi y^2+\lambda=0\\ F_y'=2\pi xy+\lambda=0\\ x+y-a=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{a}{3}\\[2mm] y=\dfrac{2}{3}a\end{cases}$

$\Rightarrow$ 所以绕短边旋转得体积的极大值 $\Rightarrow V_{\max}=\dfrac{4\pi a^3}{27}$

本科高等数学作业卷(十六)

一、填空题

1.设 $f(x)$ 是有界闭区域 $D: x^2+y^2 \le a^2$ 上的连续函数, 则 $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{1}{\pi a^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ $\underline{f(0,0)}$.

2.改变积分次序: $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$ $\underline{\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y}$.

3.设D区域为$|x|+|y|\le 1$，则 $\iint\limits_D xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ $\underline{\ 0\ }$.

4.设D区域为$x^2+y^2\le R^2$，则$\iint\limits_D(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ $\underline{\dfrac{\pi R^4}{4}(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2})}$.

二、选择题

1.设D是由顶点为$O(0,0)$、$A(10,1)$和$B(1,1)$的三角形所围成的区域, 则$\iint\limits_D\sqrt{xy-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(C)

(A)3 (B)5 (C)6 (D)10

2.设区域 $D: x^2+y^2\le 1$, f 是区域 D 上的连续函数, 则$\iint\limits_D f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(C)

(A)$2\pi\int_0^1\rho f(\rho)\mathrm{d}\rho$ (B)$4\pi\int_0^1\rho f(\rho)\mathrm{d}\rho$ (C)$2\pi\int_0^1\rho f(\rho^2)\mathrm{d}\rho$ (D)$4\pi\int_0^1\rho f(\rho^2)\mathrm{d}\rho$

3.下面关于累次积分改变积分次序错误的是(D)

(A) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{2x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_2^4\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x$

(B) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^3}^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}}f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

(D) $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)\mathrm{d}x$

4.已知D为$1\le x^2+y^2\le 4$, 则二重积分 $\iint\limits_D\dfrac{\sin\pi\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值为(B)

(A)正 (B)负 (C)零 (D)不一定

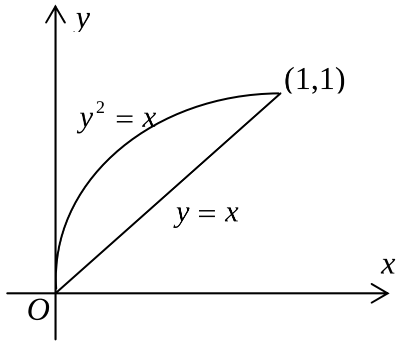
三、计算、证明题

1.计算$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由直线 $y^2=x$ 与直线 $y=x-2$ 所围成的区域.

解 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}xy\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}y(x^2\big|_{y^2}^{y+2})\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(y^3+4y^2+4y-y^5)\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}(\frac{y^4}{4}+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{1}{6}y^6)\bigg|_{-1}^{2}=\frac{45}{8}.$$

2.计算$\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由抛物线 $y^2=x$ 与直线 $y=x$ 所围成的区域.



解 $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)\mathrm{d}y$

$=\int_0^1\sin y\mathrm{d}y-\int_0^1 y\sin y\mathrm{d}y=1-\sin 1.$

3.计算$\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$

解 因为$\int\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$不能用有限形式的初等函数表示，所以需要改变积分顺序，

设 $D_1:\begin{cases}1\le x\le 2\\ \sqrt{x}\le y\le x\end{cases}, D_2:\begin{cases}2\le x\le 4\\ \sqrt{x}\le y\le 2\end{cases}, D=D_1+D_2:\begin{cases}1\le y\le 2\\ y\le x\le y^2\end{cases}$

则 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x=-\int_1^2\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2y}\Big|_y^{y^2}\mathrm{d}y$

$=-\int_1^2\frac{2y}{\pi}(\cos\frac{\pi}{2}y-\cos\frac{\pi}{2})\mathrm{d}y=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi}{2}y\mathrm{d}y=-\frac{4}{\pi^2}\int_1^2 y\mathrm{d}\sin\frac{\pi y}{2}=\frac{4}{\pi^3}(2+\pi)$

4.计算$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$，其中区域$D$为曲线 $x^2+y^2=4, x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x, y=0$

所围成的第一象限的区域..

解 $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\theta r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_1^2 r\mathrm{d}r=\frac{3\pi^2}{64}.$

本科高等数学作业卷(十七)

一、填空题

1.设 Ω 为 $x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+xyz^2-3)\mathrm{d}V=$ $\underline{\;-4\pi\;}$.

2.将三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2)\mathrm{d}V$ 化为球面坐标系下的三次积分, 其中

$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0$, 则 $\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2)\mathrm{d}V=$ $\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(r^2\sin^2\theta)r^2\mathrm{d}r}$.

二、选择题

1.有界闭区域Ω由平面$x+y+z+1=0, x+y+x+2=0$及三个坐标面围成, 设

$I_1=\iiint\limits_{\Omega}[\ln(x+y+z+3)]^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, I_2=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 不计算 I_1, I_2 的具体值,

利用三重积分的性质可知（ A ）

(A)$I_1\le I_2$　　(B)I_1, I_2的大小不具体计算不能进行比较

(C)$I_1\ge I_2$　　(D)I_1, I_2的值计算不出来, 故无法比较它们的大小

2.设 Ω由$z=x^2+y^2$与$z=1$所围区域在第一卦限的部分, 则$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}V\ne$（ B ）

(A)$\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{z}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{z-x^2}}f(x,y,z)\mathrm{d}y$　　(B)$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

(C)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\mathrm{d}z$　　(D)$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}z$

三、计算、证明题

1.计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 由平面 $y=x, z=0, y=0, x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 所围区域.

解 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}y\cos(x+z)\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^x y(1-\sin x)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}x^2(1-\sin x)\mathrm{d}x=1+\frac{\pi^3}{48}-\frac{\pi}{2}$

2.求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$, Ω 由曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的立体

解法1 $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4 r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^8 r^2\mathrm{d}z=2\pi\int_0^4 r^3(8-\frac{r^2}{2})\mathrm{d}r=\frac{1024\pi}{3}$.

解法2 $I=\int_0^8\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^8\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^2\, r\mathrm{d}r=\frac{1024\pi}{3}$.

3.计算 $\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$所围的空间闭区域.

解 在球面坐标中Ω可表示为:$0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, 0\le r\le R$

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\mathrm{d}r$$

$$=\frac{-R^5}{5}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2\varphi)\mathrm{d}\cos\varphi=\frac{1}{5}\pi R^5\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{12}\sqrt{2}\right).$$

4.设函数$f(x)$ 连续, $\Omega_t: 0\le z\le h, x^2+y^2\le t^2, F(t)=\iiint\limits_{\Omega_t}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}V$,求 $\dfrac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}$ 和 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$

解 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega_t}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t r\mathrm{d}r\int_0^h[z^2+f(r^2)]\mathrm{d}z=2\pi\int_0^t(\frac{1}{3}h^3+hf(r^2))r\mathrm{d}r$

$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=2\pi\left[\dfrac{1}{3}h^3+hf(t^2)\right]t$, 又因为 $\lim\limits_{t\to 0^+}2\pi\int_0^t(\frac{1}{3}h^3+hf(t^2))r\mathrm{d}r=\lim\limits_{t\to 0^+}F(t)=0$

$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$ 是 "$\dfrac{0}{0}$" 型, 由洛必塔法得 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{2\pi t\left[\frac{1}{3}h^3+hf(t^2)\right]}{2t}=\pi\left[\dfrac{1}{3}h^3+hf(0)\right]$

本科高等数学作业卷(十八)

一、填空题

1.设平面曲线 L 为下半周 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ $\underline{\ \pi\ }$.

2.设曲面S是 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$被平面$z=2$所截下的有限部分, 则曲面积分$\iint\limits_S z\mathrm{d}S=$ $\underline{\frac{2\pi}{15}\left(25\sqrt{5}+1\right)}$.

二、选择题

1.设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长为 a，则 $\oint\limits_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=($ B $)$

(A)0　　(B)$12a$　　(C)$-12a$　　(D)$2a$

2.设 S 是平面 $x+y+z=4$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 截出的有限部分, 则曲面积分$\iint\limits_S y\mathrm{dS}$=(A)

(A)0　　(B)$\frac{4}{3}\sqrt{3}$　　(C)$4\sqrt{3}$　　(D)π

三、计算、证明题

1.计算 $\oint_L (x+y)\mathrm{d}s$, 其中 L为连结 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ 三点的闭折线.

解　$L=OA+AB+BO, \oint_L (x+y)\mathrm{d}s=\int_{OA}(x+y)\mathrm{d}s+\int_{AB}(x+y)\mathrm{d}s+\int_{BO}(x+y)\mathrm{d}s$

$OA: y=0,(0\le x\le 1), \int_{OA}(x+y)\mathrm{d}s=\int_0^1 (x+0)\sqrt{1+0}\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

$AB: y=1-x,(0\le x\le 1), \int_{AB}(x+y)\mathrm{d}s=\int_0^1 (x+1-x)\sqrt{1+(-1)^2}\mathrm{d}x=\sqrt{2};$

同理$BO: x=0,(0\le y\le 1), \int_{BO}(x+y)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}$.　　$\therefore \oint_L (x+y)\mathrm{d}s=\sqrt{2}+1$.

2.求摆线 $\begin{cases} x=1-\cos t \\ y=1-\sin t \end{cases}$ 一拱$(0\le t\le 2\pi)$的弧长.

解　$x'(t)=\sin t, y'(t)=1-\cos t, \mathrm{d}s=\sqrt{\sin^2 t+(1-\cos t)^2}\ \mathrm{d}t=\sqrt{2\cdot(1-\cos t)}\ \mathrm{d}t=2\sin\frac{t}{2}$

$\therefore s=\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8$

3.计算 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$, 其中 L 是由 $r=2, \theta=0, \theta=\dfrac{\pi}{4}$ $(r,\theta$ 为极坐标) 所围的边界.

解　记 $L_1:\theta=0; L_2:r=2, 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}; L_3:\theta=\dfrac{\pi}{4}, 0\le r\le 2$, 则

$$\oint_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^2 e^x\mathrm{d}x=e^2-1;\quad \oint_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^2\mathrm{d}s=e^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}s=e^2\times\frac{2\pi\times 2}{8}=\frac{\pi}{2}e^2$$

$$\oint_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^2 e^r\mathrm{d}r=e^2-1, \therefore \oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=2(e^2-1)+\frac{\pi}{2}e^2$$

4.计算 $\oiint_\Sigma z\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是由平面 $z=0, z=4$ 及圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 所围成的圆柱体的整个边界曲面.

解　曲面 Σ 在平面 $z=0$ 及 $z=4$ 上的部分依次记为 Σ_1 及 Σ_2; Σ 在 yoz 平面前后的柱面部分依次记为 Σ_3 及 Σ_4, 于是 $\oiint_\Sigma z\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma_1} z\mathrm{d}S+\oiint_{\Sigma_2} z\mathrm{d}S+\oiint_{\Sigma_3} z\mathrm{d}S+\oiint_{\Sigma_4} z\mathrm{d}S$

在 Σ_1 上, 被积函数 $f(x,y,z)=0$, 因此 $\iint_{\Sigma_1} y\mathrm{d}S=0$

在 Σ_2 上, $z=4$ 且 Σ_2 在 xoy 面上的投影为圆域 $D_{xy}=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=R^2\right\}$, $\therefore \iint_{\Sigma_1} y\mathrm{d}S=0$

在 Σ_2 上, $z=4$ 且 Σ_2 在 xoy 面上的投影为圆域 $D_{xy}=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=R^2\right\}$,

$$\therefore \iint_{\Sigma_2} y\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}} 4\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi R^2$$

在 Σ_3 上, $x=\sqrt{R^2-y^2}$ 且 Σ_3 在 yoz 面上的投影 D_{yz} 是由直线 $z=0, z=4, y=-R$ 及 $y=R$ 所围成的矩形域, 因此

$$\iint_{\Sigma_3} y\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}} z\sqrt{1+x_y{}^2+y_z{}^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}} z\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=R\int_0^4 z\mathrm{d}z\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-y^2}}=8\pi R$$

在 Σ_4 上, $x=-\sqrt{R^2-y^2}$, $\therefore \iint_{\Sigma_4} y\mathrm{d}S=8\pi R$　　故 $\iint_\Sigma y\mathrm{d}S=4\pi R(4+R)$.

5.计算曲面积分 $\iint_\Sigma z\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\le 2x$ 内的部分.

解　Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 $D: x^2+y^2\le 2x$.　$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2+(\dfrac{\partial z}{\partial y})^2}\,\sigma=\sqrt{2}\mathrm{d}\sigma$.

$$\therefore \iint_\Sigma z\mathrm{d}S=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r^2\mathrm{d}r=\frac{16}{3}\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{32}{9}\sqrt{2}$$

本科高等数学作业卷(十九)

一、填空题

1.设 L 是由原点 O 沿抛物线 $y=x^2$ 到点 $A(1,1)$，再由点 A 沿直线 $y=x$ 到原点的封闭曲线, 则曲线积分 $\oint_L \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=$ $\underline{\frac{\pi}{4}-1}$.

2.设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$, 则曲线积分 $\oint_L(2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y$ 的值是 $\underline{-18\pi}$.

二、选择题

1. 设曲线积分 $\int_l[f(x)-\mathrm{e}^x]\sin y\mathrm{d}x-f(x)\cos y\mathrm{d}y$ 与路径无关,其中 $f(x)$ 具有一阶导数, 且 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 等于 (B)

(A) $\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}{2}$ (B) $\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ (C) $\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}-1$ (D) $1-\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$

2.已知 $\frac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分, 则 a 等于 (D)

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

三、计算、证明题

1.计算 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$，其中 L 为:

(1) 沿抛物线 $y=x^2$ 从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧；

(2)沿直线 $y=x$ 从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的直线段；

(3)连接 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,1)$ 的有向折线.

解 (1) $L:y=x^2, x$ 从 0 到1, $\int_L 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_0^1(2x\cdot x^2+x^2\cdot 2x)\mathrm{d}x=\int_0^1 4x^3\mathrm{d}x=1$

(2) $L:y=x, x$从 0 到1, $\int_L 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_0^1(2x^2+x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1 3x^2\mathrm{d}x=1$

(3) $L=OA+OB$, 其中 $OA:y=0, x$从 0 到1, $AB:x=1, y$从 0 到1,

$$\therefore \int_L 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_{OA}2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y+\int_{AB}2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 2x\cdot 0\mathrm{d}x+x^2\cdot 0+\int_0^1 2\cdot 1\cdot y\cdot 0+1\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y=1$$

2.计算 $\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$，其中 L 由 $A(a,0)$(其中$a>0$)经 $x^2+y^2=ax$ 上半圆周沿逆时针方向至 $O(0,0)$

解 L为非闭曲线直接计算较繁, 作辅助线OA, 则在闭曲线$L+OA$上由格林公式得

$$\oint_{L+OA}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y=\iint_D\left[\mathrm{e}^x\cos y-(\mathrm{e}^x\cos y-m)\right]\mathrm{d}\sigma=\iint_D m\mathrm{d}\sigma=\frac{m\pi a^2}{8}$$

而 $OA:x$从0到a, $\therefore \int_{OA}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y=0$

$$\therefore \int_L(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y=\oint_{L+OA}-\int_{OA}=\frac{m\pi a^2}{8}$$

3.计算曲线积分 $I=\int_C (y+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+2x+2y^2)\mathrm{d}y$，其中 C 是由点 $A(4,0)$ 到点 $O(0,0)$的上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$.

解法1　曲线C的参数方程是$\begin{cases} x=2+2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}, 0\le t\le \pi$

$$I=\int_0^{\pi}\left\{\left[2\sin t+2(2+2\cos t)\cdot 2\sin t\right](-2\sin t)+\left[4(1+\cos t)^2+4(1+\cos t)+8\sin^2 t\right]\cdot 2\cos t\right\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}(-20\sin^2 t-16\sin^2 t+24\cos t+24\cos^2 t)\mathrm{d}t=2\pi$$

解法2　取直线段$\overline{OA}: y=0, 0\le x\le 4$, 于是$C+\overline{OA}$构成闭曲线, 设此闭曲线所围的区域为D, 如图6−14, 则由格林公式有

$$\oint_{C+\overline{OA}}(y+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+2x+y^2)\mathrm{d}y=\iint_D\left[(2x+2)-(1+2x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2=2\pi$$

$$\int_{\overline{OA}}(y+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+2x+y^2)\mathrm{d}y=0$$

$$\therefore I=\oint_{C+\overline{OA}}(y+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+2x+y^2)\mathrm{d}y-\int_{\overline{OA}}(y+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+2x+y^2)\mathrm{d}y=2\pi$$

4.设函数Q(x,y)在xOy平面上具有一阶连续偏导数,曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+\mathrm{Q}(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关,并且对任意 t 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$, 求Q$(x,y)$.

解. 由曲线积分与路径无关的条件知 $\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}=\dfrac{\partial(2xy)}{\partial y}=2x$

$\therefore \mathrm{Q}(x,y)=x^2+\mathrm{C}(y)$, 其中$C(y)$为待定系数

又 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\left[t^2+\mathrm{C}(y)\right]\mathrm{d}y=t^2+\int_0^1\mathrm{C}(y)\mathrm{d}y$

$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^t\left[1^2+\mathrm{C}(y)\right]\mathrm{d}y=t+\int_0^t\mathrm{C}(y)\mathrm{d}y$

由题设知 $t^2+\int_0^1\mathrm{C}(y)\mathrm{d}y=t+\int_0^t\mathrm{C}(y)\mathrm{d}y$，两边对$t$求导得 $2t=1+\mathrm{C}(t)$,

$\mathrm{C}(t)=2t-1$，从而 $\mathrm{C}(y)=2y-1$, 所以 $\mathrm{Q}(x,y)=x^2+2y-1$.

5.计算 $\int_\Gamma x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$ 为从点 $A(1,1,1)$ 到 $B(2,3,4)$ 的直线段.

解　AB的方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$, 化为参数方程: $x=t+1, y=2t+1, z=3t+1, t$从0到1

$$\int_T x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y+1)\mathrm{d}z=\int_0^1\left[(t+1)+2(2t+1)+3(t+1+2t+1-1)\right]\mathrm{d}t=\int_0^1(14\mathrm{t}+6)\mathrm{d}t=13$$

本科高等数学作业卷(二十)

一、填空题

1.设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 的外侧面, 则曲面积分 $\iint\limits_{S} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值是__36π__.

2.设 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=2$ 所围成封闭曲面的外侧, 流体在点 (x,y,z) 的流速为 $\vec{V}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，则在单位时间内流过曲面 S 的流量为__8π__.

二、选择题

1.由分片光滑的封闭曲面Σ(取其外侧)所围立体的体积 $V=$ (C)

(A) $\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (B) $\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(C) $\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (D) $\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} -x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

三、计算、证明题

1.计算 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 表面外侧, 且 $0\le z\le a$.

解法1 补充 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\le a^2\\ z=a\end{cases}$ 取上侧,则在 Σ_1 上: $z=a \quad\Rightarrow\quad dz=0$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3a\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3a\cdot\pi a^2=3\pi a^3$$

$$\therefore\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=6\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V-3\pi a^3=6\times\frac{1}{3}\pi a^3-3\pi a^3=-\pi a^3$$

解法2 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 取下侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}}\{x,2y,3z\}\cdot\{-z_x',-z_y',1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=-\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\{x,2y,3z\}\cdot\left\{-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(\frac{-x^2-2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+3\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-3\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\left(\frac{r^2+r^2\sin^2\theta}{r}-3r\right)r\,\mathrm{d}r=a^3\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta=-\pi a^3$$

2.计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y-z)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$, $z=3$ 所围成的空间区域 Ω 的整个边界外侧.

解　$P=(y-z)x, Q=0, R=x-y, \dfrac{\partial P}{\partial x}=y-z, \dfrac{\partial Q}{\partial y}=0, \dfrac{\partial R}{\partial z}=0$

利用高斯公式把所给曲面积分化为三重积分，再利用柱面坐标计算三重积分：

$$\oiint_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y-z)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}(y-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^3(r\sin\theta-z)\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{9}{2}\pi$$

3.计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(y-x^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-z^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-y^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为 抛物面 $z=x^2+y^2$ 上 $0\le z\le a^2$ 的部分的下侧.

解　设 Ω 是由已知曲面 Σ 及平面 $\Sigma_1: z=a^2, x^2+y^2\le a^2$ 所围成的空间闭区域，由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(y-x^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-z^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-y^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}(-2x+2y+1)\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V\quad\left(\text{因}\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}y\mathrm{d}V=0\right)$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{a^2}\mathrm{d}z=\iint_{x^2+y^2\le a^2}\left(a^2-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\left(a^2-r^2\right)r\mathrm{d}r=\frac{\pi a^4}{2}$$

在 Σ_1 上，$z=a^2$，$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，$\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$，取 Σ_1 上侧，得

$$\iint_{\Sigma_1}(y-x^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-z^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-y^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{x^2+y2\le a^2}(a^2-y^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a(a^2-r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta)r\mathrm{d}r=\pi a^4$$

$$\therefore\iint_{\Sigma}=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=-\frac{1}{2}\pi a^4$$

4.计算曲面积分 $\iint_S(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为有向曲面 $z=x^2+y^2, (0\le z\le 1)$.

其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

解　以 S_1 表示法向量指向 z 轴负向的有向平面 $z=1(x^2+y^2\le 1)$，

D 为 S_1 在 xOy 平面上的投影区域，则 $\iint_{S_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(-\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=-\pi$

设 Ω 表示由 S 和 S_1 所围成的空间区域，则由高斯公式知

$$\oiint_{S+S_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint_D(2+1)\mathrm{d}V=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1\mathrm{d}z$$

$$=-6\pi\int_0^1(r-r^3)\mathrm{d}r=-6\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1=-\frac{3}{2}\pi.$$

因此 $\iint_S(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\dfrac{3}{2}\pi-(-\pi)=-\dfrac{\pi}{2}$

本科高等数学作业卷测试题(一)

一、填空题

1.设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{t}\right)^{2t}$，则 $f(\ln 2)=$ __4__.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=$ __0__.

3.设 $y=f(x)$ 是可导函数，则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)-f^2(1)}{x-1}=$ __$2f(1)f'(1)$__.

4.若 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ 3x, & 0\le x<1 \\ e^{2ax}-e^{ax}+1, & x\ge 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则 $a=$ __$\ln 2$__.

5.设 $y=\sin[f(x^2)]$，其中 f 具有二阶导数，则

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ __$2f'(x^2)\cos[f(x^2)]+4x^2\left\{f''(x^2)\cos[f(x^2)]-[f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\right\}$__

6. 设 $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-2}$，则 $f(x)$ 的间断点为 __0__，属于第 __I__ 类间断点.

二、选择题

1. 已知 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{1-\sqrt{2-x}}, & x<1 \\ \left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{a}{x-1}}, & x>1 \end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，则 $a=$ (D)

(A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) $\ln 2$

2.当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是(D)

(A)无穷小 (B)无穷大 (C)有界但非无穷小 (D)无界但非无穷大

3.设 $F(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, x\ne 0 \\ f(0), x=0 \end{cases}$，其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)\ne 0$，$f(0)=0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的(B)

(A)连续点 (B)第一类间断点 (C)第二类间断点 (D)不能确定

4. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，则以下说法成立的是(B)

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小 (B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小 (D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

5.设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0 \\ x^2g(x), & x\le 0 \end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(D)

(A) 极限不存在 (B) 极限存在，但不连续 (C) 连续，但不可导 (D) 可导

三、计算、证明题

1. 设 $x_1=10,\ x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\quad(n=1,2,\cdots)$, 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.

证 由归纳法知 $\{x_n\}$ 单调减少有下界 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\Rightarrow x_n>0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 令 $\lim\limits_{n\to\infty}=a$

对 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取极限得 $a=\sqrt{6+a}$, 从而 $a^2-a-6=0$, 故极限值应取 $a=3$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$ ，问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续？若不连续，修改函数在 $x=1$ 处的定义，使之连续.

解 $$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{\ln[1+\cos(x-1)-1]}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{\cos(x-1)-1}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{-\sin(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-x+1}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{4}{\pi^2},$$ $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续, 若要连续应 $f(1)=-\dfrac{4}{\pi^2}$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}ax^2+b, & x\geq 1\\ x\cos\dfrac{\pi}{2}x, & x<1\end{cases}$, 讨论 a,b 为何值时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

解 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, $f(x)$ 必在 $x=1$ 处连续, 即 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$, 即 $a+b=0$

$\Rightarrow b=-a$. $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导必有 $-\dfrac{\pi}{2}=f_-'(1)=f_+'(1)=2a\Rightarrow 2a=-\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow a=-\dfrac{\pi}{4},\ b=\dfrac{\pi}{4}$

4. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=f'(t)\\ y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$ 所确定, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{t f''(t)}{f''(t)}=t,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt}=\frac{dt/dt}{dx/dt}=\frac{1}{f''(t)}$$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

解 $$\because\ f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{x\arctan\frac{1}{x^2}-0}{x}=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\left(\operatorname{arccot}\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}\right)=\frac{\pi}{2}=f'(0)$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

6. 设函数 $f(x)$ 对所有的实数 a,b 满足 $f(a+b)=e^af(b)+e^bf(a)$, 且 $f'(0)=e$, 证明 $f'(x)=f(x)+e^{x+1}$

证 令 $a=b=0$ 得 $f(0)=0$, $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{e^xf(\Delta x)+e^{\Delta x}f(x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=e^x\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}+f(x)\lim_{\Delta x\to0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^xf'(0)+f(x)\cdot1=f(x)+e^{x+1}$$

本科高等数学作业卷测试题(二)

一、填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}=$ $\underline{\dfrac{1}{6}}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x^2}}{\sin x}+\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]=$ $\underline{\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=$ $\underline{-\dfrac{1}{12}}$

4. 设 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$，则当 $x=$ $\underline{0}$ 时，$f(x)$无极值；当 $x=$ $\underline{\dfrac{1}{3}}$ 时，$f(x)$取得极大值 $\underline{\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}}$；

   当 $x=$ $\underline{1}$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $\underline{0}$.

5. 若$z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，且当$y=1$时$z=x$，则函数$f(x)=$ $\underline{x^3+3x^2+3x}$.

6. 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 且 $f'(x_0)\neq 0$.当自变量 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时函数增量为 Δy, $f(x)$ 在 x_0 处微分记为 $\mathrm{d}y$, 则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}=$ $\underline{0}$.

二、选择题

1. 若 $3a^2-5b<0$, 则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ 根的个数为（ B ）

   (A)0　(B)1　(C)3　(D)5

2. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 则在点 $x=a$ 处（ B ）

   (A) $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a)\neq 0$　(B) $f(x)$ 取得极大值

   (C) $f(x)$ 取得极小值　(D) $f(x)$ 的导数不存在

3. 函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在$(0,+\infty)$为(A)

   (A) 单调增加.　(B) 单调减少　(C) 不增　(D) 不减

4. 设 $f(x)$是连续函数,满足$f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-2$,则 $f(x)=$(B).

   (A)$3x^2+C$　(B)$3x^2-\dfrac{10}{3}$　(C)x^3+C　(D)$x^3-\dfrac{10}{3}$

5. 关于广义积分$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$,正确的说法是(B)

   (A)广义积分收敛　(B)广义积分发散　(C)广义积分值等于-2　(D)不确定

三、计算、证明题

1.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1, g'(0)=-1$.

(1)求 $f'(x)$；(2)讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

解（1） $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{g''(0)-1}{2}, & x=0\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)+xg''(x)-g'(x)+e^{-x}-(x+1)e^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\dfrac{g''(0)-1}{2}=f'(0)$

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，而 $f'(x)$ 在 $x\neq 0$ 处是连续函数，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为连续函数.

2. 设函数 $f(x)$ 在原点的某邻域内二阶可微，且 $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=2$,

试证明：当 $x\to 0$ 时，$f(x)-x$ 与 x^2 是等价无穷小.

证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\dfrac{1}{2}f''(0)=1$

3.设 $x\in(0,1)$，证明 $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$

证：令 $\varphi(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$，则有 $\varphi(0)=0, \varphi'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x, \varphi'(0)=0$

当 $x\in(0,1)$ 时 $\varphi''(x)=\dfrac{2}{1+x}[\ln(1+x)-x]<0$，故 $\varphi'(x)<0, \Rightarrow \varphi(x)<0$，即 $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$.

4.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=-\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$

证 作 $\Phi(x)=x^2f(x)$，$\Phi(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件.至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使

$\Phi'(\xi)=\xi^2f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$. 由于 $\xi\neq 0$，可知必有 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=-\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$

5.讨论方程 $\ln x=ax, (a>0)$ 有几个实根，并指出这些根所在的范围.

解 设 $f(x)=\ln x-ax\ (a>0)$, $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=0$ 得驻点 $x=\dfrac{1}{a}$. 当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 单增

当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时 $f'(x)<0$，即 $f(x)$ 单减.因此 $f(\dfrac{1}{a})=\ln\dfrac{1}{a}-1$ 为 $f(x)$ 极大值，亦为最大值

又可判断当 $x\to 0^+$ 或 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to-\infty$. 从而据连续函数介值定理得

(1)当 $f(\dfrac{1}{a})>0$ 即 $a<\dfrac{1}{e}$ 时曲线 $f(x)$ 与 x 轴在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 与 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上各有一交点，即有两实根；

(2)当 $f(\dfrac{1}{a})=0$ 即 $a=\dfrac{1}{e}$ 时曲线 $f(x)$ 与 x 轴仅有一交点，即仅有一个实根;

(3)当 $f(\dfrac{1}{a})<0$ 即 $a>\dfrac{1}{e}$ 时曲线 $f(x)$ 与 x 轴无交点，即无实根.

6.设 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\frac{\pi}{2}+\Delta x)-f(\frac{\pi}{2})}{\Delta x}=\dfrac{1}{2}$，已知 $f(x)=ax\sin x$，求常数 a.

解 $f'(\dfrac{\pi}{2})=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\frac{\pi}{2}+\Delta x)-f(\frac{\pi}{2})}{\Delta x}=\dfrac{1}{2}$, $f'(x)=a(\sin x+x\cos x)$ $\quad\therefore f'(\dfrac{\pi}{2})=a$ $\quad\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$

本科高等数学作业卷测试题(三)

一、填空题

1.设 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，则 $\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$ $\underline{-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C}$.

2.$\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=$ $\underline{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{\mathrm{e}^{x^2}-1}=$ $\underline{\frac{1}{2}}$.

4. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, 则 $f(x)=$ $\underline{x-1}$.

5.当 $x\geq0$ 时, $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^{x^2(1+x)}f(t)\mathrm{d}t=x$, 则 $f(2)=$ $\underline{\frac{1}{5}}$.

6.设 $f(x)$ 为连续函数, 则 $\int_0^a\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\mathrm{d}x=$ $\underline{\frac{a}{2}}$.

7.微分方程 $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$ 的通解为 $\underline{(x-4)y^4=Cx}$.

二、选择题

1.下列不等式成立的是（ D ）

(A)$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x>\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ (B)$\int_{-1}^{-2}x^2\mathrm{d}x>\int_{-1}^{-2}x^3\mathrm{d}x$ (C)$\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x>\int_1^2\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$ (D)$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x>\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$

2.若 $I=\frac{1}{s}\int_0^{st}f(t+\frac{x}{s})\mathrm{d}x\quad(s>0,t>0)$, 则 I 之值（ C ）

(A) 依赖于 s,t,x (B) 依赖于 t 和 s (C) 依赖于 t, 不依赖于 s (D) 依赖于 s, 不依赖于 t

3.$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cdot\cos x}{1+\sin^2x\cdot\cos^2x}\mathrm{d}x=$（ C ）

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cdot\cos x}{1+\sin^2x\cdot\cos^2x}\mathrm{d}x$ (B) 2 (C) 0 (D)都不对

4.设线性无关的函数$y_1(x),y_2(x),y_3(x)$都是二阶非齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的解, C_1,C_2是任意常数, 则该非齐次方程的通解是（ D ）

(A)$C_1y_1+C_2y_2+y_3$ (B)$C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

(C)$C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$ (D)$C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

三、计算、证明题

1.(1).$\int\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$ (2).$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$ (3).设 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$, 求 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

(2) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\arcsin\sqrt{x}=(\arcsin\sqrt{x})^2\Big|_{1/2}^{1}=\frac{3}{16}\pi^2$.

(3) $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} xf'(x)\mathrm{d}x = \pi f(\pi) - \int_0^{\pi} xf'(x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi - t}\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} x\frac{\sin x}{\pi - x}\mathrm{d}x = 2$

2.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续且单减，$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t$，讨论$F(x)$的单调性.

解 $F'(x)=\left[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right]' = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x) - 2xf(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - xf(x)$

$= x[f(\xi)-f(x)]$，其中ξ介于0与x之间. 当$x>0$时$f(\xi)-f(x)>0, F'(x)>0; F'(0)=0;$

当$x<0$时$f(\xi)-f(x)<0, F'(x)>0$.因此得$F'(x)\ge 0$，故 $x\in(-\infty,+\infty)$时$F(x)$单调递增

3.设 $f(x)$ 在$[0,1]$上可微且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

证：设$F(x)=xf(x)$，由积分中值定理知存在$\eta\in(0,\frac{1}{2})$，使$\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} F(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}F(\eta)$

$\because f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{1}{2}F(\eta)=F(\eta), F(1)=f(1)=F(\eta)$，$F(x)$在$[\eta,1]$上连续

在$(\eta,1)$内可导，故由罗尔定理知存在$\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$使得$F'(\xi)=0$.即$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

4.求微分方程 $x^2y''=(y')^2+2xy'$ 的通解.

解 令$y'=p$，则 $y''=p'$，原方程化为$x^2p'=p^2+2xp$，即 $p'-\frac{2}{x}p=\frac{1}{x^2}p^2$

此方程为贝努里方程. 令$p^{-1}=z$ 得 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}z=\frac{1}{x^2}$，解得 $z=\frac{1}{x^2}(-x+C_1)$，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2}{-x+C_1}$

分离变量得 $\mathrm{d}y=\frac{x^2}{-x+C_1}\mathrm{d}x$，两端积分得 $y=-\frac{1}{2}(x-C_1)^2-C_1^2\ln|x-C_1|+C_2$

5.设连续函数$f(x)$满足$f(x)=\sin ax-\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t, (a>0)$，求$f(x)$.

解 令 $x-t=u$，$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u = x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$ 代入方程有

$f(x)=\sin ax - x\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u + \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$，$f(0)=0$，关于$x$求导有

$f'(x)=a\cos ax-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u - xf(x)+xf(x) \Rightarrow f'(x)=a\cos ax-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$

令 $x=0, f'(0)=a$，关于x再求导得$f''(x)+f(x)=-a^2\sin ax$，$r^2+1=0 \quad \Rightarrow r=\pm i$

(1) $a=1$时 $y^*=x(A\cos x+B\sin x)$，得$A=\frac{1}{2}, B=0$，$\therefore f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$

由$f(0)=0$得$c_1=0$，$c_2=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$

(2) $a\ne 1$时$y^*=A\cos x+B\sin x$得 $A=0, B=\frac{a^2}{a^2-1}$，$y^*=\frac{a^2}{a^2-1}\sin ax$，

$f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{a^2}{a^2-1}\sin ax$

由$f(0)=0, f'(0)=a$ 得$c_1=0, c_2=\frac{a}{1-a^2} \quad \Rightarrow f(x)=\frac{a}{1-a^2}\cdot\sin x+\frac{a^2}{a^2-1}\sin ax$

综上得 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x, a=1\\ \frac{a}{1-a^2}\cdot\sin x+\frac{a^2}{a^2-1}\sin ax, a\ne 1\end{cases}$

本科高等数学作业卷测试题(四)

一、填空题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n\cdot n!}{(2n)^n}=$ __0__.

2. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛域为 __$[-1,1)$__.

3. 若 $f(x)=x(0\le x\le 2)$ 展开成以2为周期的傅立叶级数，

$f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$，则系数 $a_0=$ __2__.

4. 积分 $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy=$ __$\dfrac{1}{2}(1-e^{-4})$__.

5. 设 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$，则 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=$ __4__.

6. 设 $u=\arcsin\dfrac{z}{x+y}$，则 $du=$ __$\dfrac{1}{\sqrt{(x+y)^2-z^2}}\left[-\dfrac{z}{x+y}(dx+dy)+dz\right]$__.

二、选择题

1. 设 α 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 为（ C ）

(A)绝对收敛　(B)条件收敛　(C)发散　(D)收敛性与 α 的取值有关

2. 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1,),(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\cdot\sin y)dxdy=$（ A ）

(A) $2\iint\limits_D\cos x\cdot\sin y\,dxdy$　(B) $2\iint\limits_{D_1}xy\,dxdy$　(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\cdot\sin y)dxdy$　(D) 0

3. 设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$，则直线 L（ C ）

(A)平行于 π　(B)在 π 上　(C)垂直于 π　(D)与 π 斜交

4. 设函数 $z=f(x,y)$，有 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$，且 $f(x,0)=1$，$f_y'(x,0)=x$，则 $f(x,y)=$（ B ）

(A) $1-xy+y^2$　(B) $1+xy+y^2$　(C) $1-x^2y+y^2$　(D) $1+x^2y+y^2$

三、计算、证明题

1. 判断下列正项级数的敛散性：(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

解 (1) 由比较判别法知级数收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}=0<1$，由比值判别法知级数收敛

2.设有两条抛物线$y=nx^2+\frac{1}{n}$和$y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$，记它们交点的横坐标的绝对值为a_n.

(1)求这两条抛物线所围成的平面图形的面积S_n；　(2)求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$的和.

解　由 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 与 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$ 得 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，因图形关于 y 轴对称，

$$\therefore S_n=2\int_0^{a_n}\left[nx^2+\frac{1}{n}-(n+1)x^2-\frac{1}{n+1}\right]dx=2\int_0^{a_n}\left[\frac{1}{n(n+1)}-x^2\right]dx=\frac{4}{3}\frac{1}{n(n+1)\sqrt{n(n+1)}}$$

$$\therefore \frac{S_n}{a_n}=\frac{4}{3}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),\text{从而}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{4}{3}.$$

3.把 $f(x)=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

解

$$f'(x)=\frac{1}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x^4}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n},(-1<x<1)$$

$$f(x)=\int_0^x f'(x)dx=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},(-1<x<1)$$

4.设有一力$\vec{F}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$，求 $\vec{F}$ 在 $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ 方向上的分力.

解

$$P_{rj\vec{a}}\vec{F}=\frac{\vec{F}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1-2+2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

$$\left(P_{rj\vec{a}}\vec{F}\right)\cdot\vec{a}^0=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})=\frac{1}{3}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

5.求过直线 L_1 且平行于直线 L_2 的平面方程, 其中 $L_1:\begin{cases}2x+y-z-1=0\\3x-y+2z-2=0\end{cases}$, $L_2:\begin{cases}5x+y-z+4=0\\x-y-z-4=0\end{cases}$

解　$\vec{s}_1=\{1,-7,-5\},\vec{s}_2=\{-2,4,-6\}$

过L_1平面束方程为$\lambda(2x+y-z-1)+\mu(3x-y+2z-2)=0$

即 $2\lambda+3\mu)\ x+(\lambda-\mu)y+(-\lambda+2\mu)z-\lambda-2\mu=0$

由 $\vec{n}\cdot\vec{s}_2=0$ 得 $-2\cdot(2\lambda+3\mu)+(\lambda-\mu)4+(-\lambda+2\lambda)(-6)=0\quad\Rightarrow\frac{\mu}{\lambda}=\frac{3}{11}$

$\therefore$ 平面方程为　$31x+8y-5z-17=0$

6.设在区间$[a,b]$上$f(x)$连续且恒大于零, 试用二重积分证明 $\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\ge(b-a)^2$

证明 $\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx=\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(y)}dy=\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}dxdy$, 其中$D$为$a\le x\le b,a\le y\le b$

同样有　$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx=\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}dxdy$

所以 $2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\iint\limits_D [\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{f^2(x)+f^2(y)}{f(x)f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\geq\iint\limits_D \frac{2f(x)f(y)}{f(x)f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2(b-a)^2$ 即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geq(b-a)^2$

7.设 $z=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}$，求 $\mathrm{d}z$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}-(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\frac{y}{x^2})=(2x+y)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=2y\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}-(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(\frac{1}{x})=(2y-x)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}$

故 $\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}[(2x+y)\mathrm{d}x+(2y-x)\mathrm{d}y]$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}-(2x+y)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(\frac{1}{x})=\frac{y^2-xy-x^2}{x^2+y^2}\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}$

8.在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 内的一切内接长方体(指各边分别平行于坐标轴)中，求体积最大的内接长方体的体积.

解 设x,y,z为长方体在第一卦限中的顶点坐标，则长方体的体积$V=8xyz$

因(x,y,z)在椭球面上，故$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, F(x,y,z,\lambda)=8xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$

由$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$得$8yz+\frac{2x}{a^2}\lambda=0;8zx+\frac{2y}{b^2}\lambda=0;8xy+\frac{2z}{c^2}\lambda=0;\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

此方程组在第一卦限$(x>0,y>0,z>0)$只有一组解 $x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}$

下面说明这组解即为所求的解，事实上，这个问题是求连续函数

$V=8xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ 在闭域 $x\geq0,y\geq0,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq1$上的最大值问题，

因为在边界上函数 $V=0$,所以最大值不可能在边界上达到，又在开域$x>0,y>0$,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$内，只有一个可疑点$\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$,故这个可疑点是最大值点.故长方体

的最大体积为$\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

本科高等数学作业卷测试题(五)

一、填空题

1.曲面$x^2+y^2+z^2=2z$与$x^2+y^2=z^2$所围成并包含点$(0,0,1)$的立体体积等于 $\underline{\ \pi\ }$.

2.设L是由点$O(0,0)$经过点$A(1,0)$到点$B(0,1)$的折线，则曲线积分$\int_L (x+y)\mathrm{d}s=$ $\underline{\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}}$.

3.设S是曲面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，则 $\displaystyle\oiint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ $\underline{\dfrac{12\pi}{5}}$.

4.以向量$\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$和$\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}$为边的三角形面积为 $\underline{\dfrac{75}{4}}$,其中$|\vec{m}|=5,|\vec{n}|=3,(\vec{m},\vec{n})=\dfrac{\pi}{6}$.

5.曲线$\begin{cases}x=t\\ y=t^2\\ z=t^3\end{cases}$上点$M$处切线平行于平面$x+2y+z=4$, 则$M$坐标是$\underline{\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27}\right)\text{或}(-1,1,-1)}$

6.设函数$f(x,y,z)=\mathrm{e}^x yz^2$, 其中$z=z(x,y)$由$x+y+z+xyz=0$确定, 则$f_x'(0,1,-1)=$ $\underline{\ 1\ }$.

二、选择题

1.设Ω是由曲面$x^2+y^2\le 1, z=1, z=0$所围成的闭区域, 则$\displaystyle\iiint_{\Omega}\left[\mathrm{e}^{z^3}\tan(x^2y^3)+3\right]\mathrm{d}V=$(B)

(A)0　(B)3π　(C)π　(D)3

2.设L为正向圆周$x^2+y^2=2$在第一象限的部分，则曲线积分$\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=$(A)

(A)$\dfrac{3}{2}\pi$　(B)$\dfrac{3}{2}$　(C)$\dfrac{1}{2}\pi$　(D)π

3.$(2x\cos y-y^2\sin x)\mathrm{d}x+(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$的原函数为(D)

(A)$-y^2\cos x+x^2\cos y+C$　(B)$y^2\cos y+x^2\sin x+C$

(C)$x^2\cos x+y^2\sin y+C$　(D)$\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y-y^2\sin x)\mathrm{d}x+(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y+C$

4.已知曲面$z=4-x^2-y^2$上点P处的切平面平行于平面$2x+2y+z-1=0$, 则点P坐标是(C)

(A)$(1,-1,2)$　(B)$(-1,1,2)$　(C)$(1,1,2)$　(D)$(-1,-1,2)$

三、计算、证明题

1.计算$\displaystyle\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由球面 $x^2+y^2+z^2=4$与抛物面$x^2+y^2=3z$所围成.

解 $$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}} r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} z\mathrm{d}z=\pi\int_0^{\sqrt{3}} r(4-r^2-\frac{r^4}{9})\mathrm{d}r=\frac{13}{4}\pi.$$

2.计算$\displaystyle\iiint_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$是由$\begin{cases}x^2+y^2+z^2\le R^2\\ x^2+y^2+(z-R)^2\le R^2\end{cases}$所确定.

解 $$\iiint_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} r\mathrm{d}r\int_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} z^2\mathrm{d}z=\frac{59}{480}\pi R^5$$

3.求$\displaystyle\oint_L (1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})\mathrm{d}x+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}+x^2)\mathrm{d}y$, 其中$L$是由曲线$x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y, x-\sqrt{3}y=0, y-\sqrt{3}x=0$所围成的区域的边界, 按逆时针方向.

解 由格林公式$$\oint_L (1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})\mathrm{d}x+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}+x^2)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint_D 2x\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} 2r\cdot\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r=\frac{14}{3}.$$

4.设S为椭圆面$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分，点$P(x,y,z)\in S$，$\pi$ 为S在P点处的切平面

$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，求 $\iint_S \dfrac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

解　点 $P(x,y,z)$处S的法向量为$\{x,y,2z\}$，π: $xX+yY+2zZ-2=0$，$\rho(x,y,z)=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}$

$$\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\iint_S\frac{z}{2}\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\mathrm{d}S=\iint_D\frac{z}{2}\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\frac{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}{2z}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{4}\iint_D(x^2+y^2+4z^2)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4}\iint_D(4-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma=\frac{3}{2}\pi.$$

5.计算 $\oiint_\Sigma 2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$ 是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$

所围成立体的表面外侧.

解　由高斯公式 $\oiint_\Sigma 2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega z\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\mathrm{d}r=\dfrac{\pi}{2}$

6.设 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ为平面$x-y+z=1$在第四卦限部分的上侧，

求 $I=\iint_\Sigma[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

解　Σ上侧法向量的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，则

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma[f(x,y,z)+x-2f(x,y,z)-y+f(x,y,z)+z]\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma[x-y+z]\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$$

7. 直线L: $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$绕 z 轴旋转一周，求旋转曲面的方程.

解　设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 L 上一点，则 $x_0=1$.即$P_0(1,y_0,z_0)$.当直线 L 绕 z 轴旋转时$z=z_0$ 保持不变.

动点 P 到 z 轴的距离保持不变，即 $r^2=1+y_0^2=x^2+y^2$. 又由直线方程 $y_0=z_0$ 知

$r^2=x^2+y^2=1+y_0^2=1+z_0^2=1+z^2$，　故此旋转曲面为单叶双曲面　$x^2+y^2-z^2=1$.

8.设变换$\begin{cases}u=x-2y\\v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数$a$.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2\dfrac{\partial z}{\partial u}+a\dfrac{\partial z}{\partial v}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

将上述结果代入原方程，经整理后得 $(10+5a)\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$

依题意知 a 应满足　$6+a-a^2=0$，且$10+5a\neq 0$　解之得　$a=3$.

本科高等数学作业卷测试题(六)

一、填空题

1.级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 3)^n}{2^n}$的和为$\underline{\dfrac{2}{2-\ln 3}}$.

2.若$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^{n+1}$的收敛域为$[-2,4)$,则级数$\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x+1)^n$的收敛区间为$\underline{(-4,2)}$.

3.设Ω是由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$围成的空间区域，Σ是Ω的整个边界的外侧，则 $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{(2-\sqrt{2})\pi R^3}$.

4.曲线$\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$绕 y 轴旋转一周得到的旋转曲面方程是$\underline{3x^2+2y^2+3z^2=12}$.

5.设L是由点$O(0,0)$到点$A(1,1)$的任意一段光滑曲线，则$\int_L(1-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y=\underline{-\dfrac{4}{3}}$.

二、选择题

1.常数$a>0$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{a}{n})$为(A)

(A)绝对收敛 (B)条件收敛 (C)发散 (D)收敛性与a的取值有关

2.累次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 可以写成(D)

(A)$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$ (B)$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$ (C)$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$ (D)$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

3.设空间域$\Omega_1:x^2+y^2+z^2\le R^2,z\ge 0$及$\Omega_2:x^2+y^2+z^2\le R^2,x\ge 0.y\ge 0,z\ge 0$,
则等式成立的是(C)

(A)$\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}x\mathrm{d}V$ (B)$\iiint\limits_{\Omega_1}y\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}y\mathrm{d}V$

(C)$\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}V$ (D)$\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyz\mathrm{d}V$

4.函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处偏导数存在是 $f(x,y)$ 在该点处(C)

(A)连续的充分条件 (B)连续的必要条件 (C)可微的必要条件 (D)可微的充分条件

三、计算、证明题

1.判断下列级数是绝对收敛还是条件收敛: (1)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$; (2)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{a}{n},(a>0)$

解 (1)绝对收敛; (2)条件收敛.

2.求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}$ 的收敛域, 并求其和函数$S(x)$.

解 收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^{n+1}}{n\,2^n}=2.$

$x=2$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散; $x=-2$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{n\,2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$ 收敛.

级数收敛域为$[-2,2)$. $\quad\because xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

$$\therefore[xS(x)]'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]'=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2-x}$$, 两边积分得

$x\cdot S(x)=-\ln(2-x)+\ln 2.$ 当 $x\neq 0$ 时 $S(x)=-\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$; 当 $x=0$ 时 $S(0)=\frac{1}{2}$

$$\therefore S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}=\begin{cases}-\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1-\frac{x}{2}\right), & -2\le x<2\text{且}x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

3.将 $f(x)=\sin ax,(-\pi\le x\le\pi, a$为整数$)$展成傅立叶级数.

解 由于 $f(x)$ 为奇函数, 故 $a_n=0, n=1,2,\cdots$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin ax\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(a-n)x-\cos(a+n)x]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(a-n)\pi}{a-n}-\frac{\sin(a+n)\pi}{a+n}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n\sin a\pi}{a-n}-\frac{(-1)^n\sin a\pi}{a+n}\right]=(-1)^n\frac{\sin a\pi\cdot 2n}{\pi(a^2-n^2)}$$

于是 $\sin ax=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{a^2-n^2}\sin nx,\quad(-\pi\le x\le\pi),$

在 $x=\pm\pi$ 时级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(-\pi^+)+f(\pi^-)]=0.$

4.计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}V$, 其中 Ω 是 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 的球体.

解 由对称性知 $\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}yz\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}xz\mathrm{d}V, \iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}V.$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}V+\iiint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}V+\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}V+2\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}V+2\iiint\limits_{\Omega}yz\mathrm{d}V+2\iiint\limits_{\Omega}xz\mathrm{d}V$$

$$=3\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}V=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^4\cos^2\varphi\mathrm{d}r=6\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^{R}r^4\mathrm{d}r=\frac{4}{5}\pi R^5.$$

5.设$f(x)$是非负连续函数，且$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$，计算：$\int_L x\mathrm{d}y-(y+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$，

其中L为沿 $y=f(x)$从点$O(0,0)$到$A(2,0)$的曲线段.

解 $\int_L x\mathrm{d}y-(y+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=-\oint-\int_{\overline{AO}}=-\iint_D 2\mathrm{d}\sigma+\int_2^0 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=-2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+1-\mathrm{e}^2=-1-\mathrm{e}^2.$

6.计算$\iint_\Sigma \dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$，其中$\Sigma$为下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧，$a$为大于零的常数

解 $I=\dfrac{1}{a}\iint_\Sigma ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1+I_2$

$$I_1=\frac{1}{a}\iint_\Sigma ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-2\iint_{D_{yz}}\sqrt{a^2-y^2-z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-2\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}r\mathrm{d}r=-\frac{2}{3}\pi a^3$$

$$I_2=\frac{1}{a}\iint_\Sigma (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\iint_{D_{xy}}[a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a[2a^2-2a\sqrt{a^2-r^2}-r^2]r\mathrm{d}r=\frac{1}{6}\pi a^3 \quad\Rightarrow\quad I=I_1+I_2=-\frac{1}{2}\pi a^3.$$

7.求曲面 $z=x^2+y^2+1$ 上点$M_0(1,-1,3)$ 处的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$所围空间区域的体积V.

解 曲面$z=x^2+y^2+1$在点$(1,-1,3)$处的法向量为$\left\{z_x\big|_{M_0},z_y\big|_{M_0},-1\right\}=\{2,-2,-1\}$

切平面方程为 $2(x-1)-2(y+1)-(z-3)=0$ 即 $z=2x-2y-1$

切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 的交线$\begin{cases}z=2x-2y-1\\ z=x^2+y^2\end{cases}$

在xOy平面上的投影曲线为$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=1\\ z=0\end{cases}$，其所围区域设为$D$

$$V=\iint_D[(2x-2y-1)-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D[1-(x-1)^2-(y+1)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2 r\mathrm{d}r=\pi-\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{2}\pi$$

8.设 $z=x^3f(xy,\dfrac{y}{x})$，f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^4f_1+x^2f_2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^5f_{11}+x^3f_{12}+x^3f_{21}+xf_{22}=x^5f_{11}+2x^3f_{12}+xf_{22}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4x^3f_1+x^4yf_{11}-x^2yf_{12}+2xf_2+x^2yf_{21}-yf_{22}=4x^3f_3+2xf_2+x^4yf_{11}-yf_{22}$$

本科高等数学(上册) 历年考试真题

一、填空题

1. 设 $s>0, I_n=\int_0^{+\infty} e^{-sx}x^n dx (n=1,2,\cdots)$，则 $I_n=$ $\underline{\dfrac{n!}{s^{n+1}}}$

2. 若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点(-1,0)，则 $b=$ __3____

3. 曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近方程为____$y=2x$________

4. 当 $0\le\theta\le\pi$ 时，曲线 $r=e^{\theta}$ 的弧长为 $\underline{\sqrt{2}(e^{\pi}-1)}$

5. 设 $f'(0)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3\sin x)-f(2\arctan x)}{x}=$ __2__

6. 设 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$ (C_1,C_2 为任意常数)为某二阶常系数线性齐次微分

   方程的通解,则该方程为 $\underline{\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+2y=0}$

二、选择题

7. 下列命题正确的是(D)

   (A) $f(x)$在点 x_0 连续的充要条件是 $f(x)$在 x_0 可导

   (B) 若 $f'(x)=x^2$（偶函数），则 $f(x)$必是奇函数

   (C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a$（常数），则 $f'(0)=a$

   (D) 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\ln(1-x^2)}{x}, & x\ne 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=-1$

8. 设 $f(x)=\ln^{10}x, g(x)=x, h(x)=e^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有(C)

   (A) $g(x)<h(x)<f(x)$　(B) $h(x)<g(x)<f(x)$　(C) $f(x)<g(x)<h(x)$　(D) $g(x)<f(x)<h(x)$

9. 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x (a\ne 0)$,则 a=(C)

   (A) 4e　(B) 3e　(C) 2e　(D)e

10. 积分 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,dx=$(B)

    (A) 0　(B) 4/3　(C) 1　(D) -1

11. 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为(C)

    (A) 1　(B)2　(C) 3　(D)无穷多个

12. 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内具有连续的四阶导数, 若 $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$, 且 $f^{(4)}(x_0)<0$, 则(B)

    (A) $f(x)$ 在点 x_0 取得极小值　(B) $f(x)$ 在点 x_0 取得极大值

    (C)点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点　(D) $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内单调减少

三、解答题

13.求微分方程 $y''+2y'+5y=\sin 2x$ 的通解.

解:对应齐次方程的特征方程为$\lambda^2+2\lambda+5=0$,解得特征根为$\lambda_1=-1+2i,\lambda_2=-1-2i$

齐次方程通解为:$y=C_1e^{-x}\sin 2x+C_2e^{-x}\cos 2x$, 设原方程特解:$y=A\sin 2x+B\cos 2x$

代入原方程, 比较同类项前面系数得:$A-4B=1,\ B+4A=0$解得$A=\dfrac{1}{17},B=-\dfrac{4}{17}$

所以方程特解:$y=\dfrac{1}{17}\sin 2x-\dfrac{4}{17}\cos 2x$

原方程通解为:$y=C_1e^{-x}\sin 2x+C_2e^{-x}\cos 2x+\dfrac{1}{17}\sin 2x-\dfrac{4}{17}\cos 2x,(C_1,C_2$为任意常数)

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$,

问 a 为何值时 $f(x)$在 $x=0$ 连续; a 为何值时 $x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点?

解: $\lim\limits_{x\to0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to0-0}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0-0}\dfrac{ax^3}{x-\arcsin x}=-6a$

$\lim\limits_{x\to0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2/4}$

$=\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{ae^{ax}+2x-a}{x/2}=\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{a^2e^{ax}+2}{1/2}=2(a^2+2)$

$\lim\limits_{x\to0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to0+0}f(x)$ 得 $a=-1$ 或 $a=-2$

当$a=-1$时,$\lim\limits_{x\to0}f(x)=6=f(0)$, $f(x)$在$x=0$连续.

当$a=-2$时,$\lim\limits_{x\to0}f(x)=12\neq f(0)$, $x=0$为$f(x)$的可去间断点

15. 设函数 $y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=1+2t^2\\ y=\displaystyle\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u\,du}{u}\ (t>1)\end{cases}$确定, 求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9}$

解:由$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{e^{1+2\ln t}}{1+2\ln t}\cdot\dfrac{2}{t}=\dfrac{2et}{1+2\ln t},\dfrac{dx}{dt}=4t$ 得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e}{2(1+2\ln t)}$

所以$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{e}{2}\cdot\dfrac{-1}{(1+2\ln t)^2}\cdot\dfrac{2}{t}\cdot\dfrac{1}{4t}=-\dfrac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}$

$x=9$时由$x=1+2t^2$及$t>1$得$t=2$, 故$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9}=-\left.\dfrac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}\right|_{t=2}=-\dfrac{e}{16(1+2\ln 2)^2}$

16. 设函数 $f(x)$有二阶连续导数, 且 $f(0)=f'(0)=0,\ f''(x)>0$,又设 $u=u(x)$是曲线

$y=y(x)$在点$(x, f(x))$处的切线在 x 轴上的截距，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{u(x)}$

解：在(x_0, y_0)处的切线方程 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，x轴上截距$u(x_0)=\dfrac{x_0 f'(x_0)-f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x}{u(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)}{xf'(x)-f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+xf''(x)}{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+xf''(x)}{xf''(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f'(x)}{x}\frac{1}{f''(x)}\right]=1+\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\frac{1}{f''(x)}=1+\frac{f''(0)}{f''(0)}=2$$

17. 已知 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$g'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$f(0)=g(0)=0$，试求 $\lim\limits_{x\to}\left[\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{g(x)}\right]$

解 $f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$，又$f(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

由$g'(x)=\dfrac{1}{1+x}$及$g(0)=0$知 $g(x)=\ln(1+x)$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\ \underline{\underline{洛必达法则}}\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1 \quad \therefore \ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x,(x\to 0)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x)\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$\ln(1+x)\sim x$；
$\underline{\underline{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)\sqrt{1+x^2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-(1+x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}-1\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}-1\right)=-\frac{1}{2}$$

18. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导,$f(0)=0,f(1)=1$，试证：对任意给定的正数 a,b，在$(0,1)$内存在不同的ξ,η，使得$\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$

证明：由条件知$0<\dfrac{a}{a+b}<1$，$f(0)=0$，$f(1)=1$，由连续函数的介值定理可知存在$c\in(0,1)$

使得$f(c)=\dfrac{a}{a+b} \quad \Rightarrow 1-f(c)=\dfrac{b}{a+b}$.对$f(x)$在$[0,c]$及$[c,1]$上分别用拉格朗日定理得

$$f(c)=f(c)-f(0)=f'(\xi)\cdot c,(0<\xi<c) \quad\Rightarrow\quad c=\frac{f(c)}{f'(\xi)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$f(1)-f(c)=f'(\eta)\cdot(1-c),(c<\eta<1) \quad\Rightarrow\quad 1-c=\frac{f(1)-f(c)}{f'(\eta)}=\frac{1-f(c)}{f'(\eta)} \quad \cdots \quad (2)$$

$$(1)+(2)得\ 1=\frac{f(c)}{f'(\xi)}+\frac{1-f(c)}{f'(\eta)}=\frac{a}{(a+b)f'(\xi)}+\frac{b}{(a+b)f'(\eta)}\Rightarrow\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$$

本科高等数学(下册) 历年考试真题

一、填空题

1.设D区域为$|x|+|y|\le 1$，则$\iint\limits_D xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ $\underline{\quad 0 \quad}$.

2.过点$M_0(2,4,0)$且与直线$L_1:\begin{cases} x+2z-1=0 \\ y-3z-2=0 \end{cases}$平行的直线方程是 $\underline{\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z}{1}}$.

3.设有一力$\vec{F}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$，则$\vec{F}$在$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$方向上的分力为 $\underline{\dfrac{1}{3}\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)}$.

4.设S为球面$x^2+y^2+z^2=9$的外侧面, 则曲面积分$\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的值是 $\underline{\quad 36\pi \quad}$.

5.级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{4^n}$的和为 $\underline{\quad \dfrac{4}{9} \quad}$.

二、选择题

6.设数列$\{a_n\}$单调减少,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,\cdots)$无界, 则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$的收敛域为（ C ）

(A)$(-1,1]$ (B)$[-1,1)$ (C)$[0,2)$ (D)$(0,2]$

7.设$0\le a_n<\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$, 则下列级数中肯定收敛的是（ D ）

(A)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (B)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ (C)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ (D)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$

8. 已知$f(x)$，$f(y)$在区域$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$上连续，

且$f(x)>0$，$f(y)>0$. 则$\iint\limits_D \dfrac{af(y)+bf(x)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（ B ）.

(A)$a-b$ (B)$a+b$ (C)$2(a+b)$ (D)$2(a-b)$

9. 设S是平面$x+y+z=4$被圆柱面$x^2+y^2=1$截出的有限部分,

则曲面积分$\iint\limits_S y\mathrm{d}S$的值是(A)

(A)0 (B)$\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$ (C)$4\sqrt{3}$ (D)π

10.设Ω是由椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$所围区域,则$\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$的值为（ B ）

(A)0 (B)$\dfrac{4}{15}\pi abc^3$ (C)$4\sqrt{3}$ (D)π

三、解答题

11. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f\left[xy,\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)\right]$，

求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解 $\because \frac{\partial g}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial \upsilon},\frac{\partial g}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial \upsilon}$

$\therefore \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial \upsilon}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial \upsilon^2}+\frac{\partial f}{\partial \upsilon},\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial \upsilon}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial \upsilon^2}-\frac{\partial f}{\partial \upsilon}$

故 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial g^2}=(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial \upsilon^2}=x^2+y^2$

12. 求过直线 L_1 且平行于直线 L_2 的平面方程, 其中 $L_1:\begin{cases}2x+y-z-1=0\\3x-y+2z-2=0\end{cases},L_2:\begin{cases}5x+y-z+4=0\\x-y-z-4=0\end{cases}$

解: $\vec{s}_1=\{1,-7,-5\},\vec{s}_2=\{-2,4,-6\}$, 过 L_1 的平面方程为 $\lambda(2x+y-z-1)+\mu(3x-y+2z-2)=0$

即 $(2\lambda+3\mu)x+(\lambda-\mu)y+(-\lambda+2\mu)z-\lambda-2\mu=0$, 由 $\vec{n}\cdot\vec{s}_2=0$ 得

$-2(2\lambda+3\mu)+(\lambda-\mu)+(-\lambda+2\mu)(-6)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mu}{\lambda}=\frac{3}{11}$

$\Rightarrow$ 平面方程为 $31x+8y-5z-17=0$

13. 计算 $\int_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 L 是沿 $y=\pi\cos x$ 由 $A(\pi,-\pi)$ 到 $B(-\pi,-\pi)$ 的曲线段.

解: 设 $C_{顺}:x^2+y^2=R^2$, 顺时针方向, $P(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2},Q(x,y)=-\frac{x-y}{x^2+y^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

由格林公式 $\int_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\int_{\overline{BA}}\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\oint_{C_{顺}}\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0$

$\int_{\overline{AB}}\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_{\pi}^{-\pi}\frac{x-\pi}{x^2+\pi^2}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{x^2+\pi^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$

$\oint_{C_{逆}}\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{(R\cos t+R\sin t)(-R\sin t)-(R\cos t-R\sin t)R\cos t}{R^2}\mathrm{d}t=-2\pi$

$\therefore\int_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_{\overline{AB}}\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\oint_{C_{逆}}\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=-\frac{3}{2}\pi$

14. 叙述并证明格林公式, 然后计算曲线积分 $\int_L\left(\mathrm{e}^x\sin y-my\right)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-my)\mathrm{d}y$,

其中曲线 L 为从点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$.

解: 格林公式的叙述和证明见课本, 此处略去. $\int_{\overline{ABO}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$

$=\oint_L(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y+\int_{\overline{AO}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$

$=\iint\limits_D\left[\mathrm{e}^x\cos y-\mathrm{e}^x\cos y+m\right]\mathrm{d}\sigma+\int_{\overline{AO}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$

$=m\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma+\int_a^0 0\mathrm{d}x=\frac{m\pi}{8}a^2$

15.(1)求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+2}{n!}x^{2n+1}$ 的收敛域, 并求其和函数;

(2)判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$的敛散性, 若此级数收敛,则求其和$S$.

解:(1).$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+4)x^{2n+3}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(2n+2)x^{2n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+4)x^2}{(n+1)(2n+2)}=0<1$,故级数收敛域为$(-\infty,+\infty)$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+2}{n!}x^{2n+1}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n!}\right]'=\left[x^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}\right]'=\left[x^2(\mathrm{e}^{x^2}-1)\right]'=2x(\mathrm{e}^{x^2}-1)+2x^3\mathrm{e}^{x^2}$$

(2).$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$的一般项$u_n=\arctan\frac{1}{2n^2}$, $n\to\infty$时 $\arctan\frac{1}{2n^2}\sim\frac{1}{2n^2}$ $\quad\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\arctan\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,所以$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$收敛.

$$\because S_1=\arctan\frac{1}{2};S_2=u_1+u_2=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{8}=\arctan\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}=\arctan\frac{2}{3},$$

$$S_3=S_2+u_3=\arctan\frac{2}{3}+\arctan\frac{1}{18}=\arctan\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}}=\arctan\frac{3}{4}....$$

由归纳法得$S_n=\arctan\frac{n}{n+1}$ $\quad\therefore S=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\arctan\frac{n}{n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$

16.设可导函数$f(x)$满足$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x+\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$, 求$f(x)$.

解: 设$u=x-t$,则$\mathrm{d}u=-\mathrm{d}t$

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x+\int_x^0(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=x+\int_0^x(x-u)f(u)\mathrm{d}u=x+x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$$

$\Rightarrow\quad f(x)=1+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)-xf(x)\quad\Rightarrow\quad f'(x)=f(x)$ 即$f(x)=C\cdot\mathrm{e}^x$

$\because f(0)=1\quad\therefore C=1$ 即 $f(x)=\mathrm{e}^x$

17.$\frac{(x+2y)\,\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$是否为某个二元函数$u(x,y)$的全微分?若是, 求$u(x,y)$.

解:设$P(x,y)=\frac{x+2y}{(x+y)^2}$,$Q(x,y)=\frac{y}{(x+y)^2}$,则$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2y}{(x+y)^3}=\frac{\partial P}{\partial y}$

当 $x+y\neq0$ 时曲线积分与路径无关

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{(x+2y)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}+C=\int_1^x\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_0^y\frac{y}{(x+y)^2}\mathrm{d}y+C$$

$$=\ln x\Big|_1^x+\left(\ln|x+y|+\frac{x}{x+y}\right)\Big|_0^y+C=\ln|x+y|+\frac{x}{x+y}-1+C=\ln|x+y|-\frac{y}{x+y}+C$$

18.设$f(x,y)$在圆域$x^2+y^2\le 1$上二阶连续可微, 且满足$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$,

计算 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

解:取$L:x^2+y^2=1$正向,$D:x^2+y^2\le 1$,$P(x,y)=-(x^2+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}$;$Q(x,y)=(x^2+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial x}$

则$\displaystyle\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\displaystyle=2\iint\limits_D(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D(x^2+y^2)(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y........(1)$

又$\displaystyle\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\oint_L-(x^2+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y$

$\displaystyle=\oint_L-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y=\iint\limits_D(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y........(2),$ (1),(2)两式相减得

$\displaystyle\iint\limits_D(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\iint\limits_D(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D(x^2+y^2)(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{\mathrm{e}})-(1-\frac{\pi}{\mathrm{e}})=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{\mathrm{e}}-1$

19.设函数 $f(u)$ 具有连续导数且$f(0)=0$, 求 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}V$

解:$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}V=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi r^4}\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(r)r^2\mathrm{d}r\right]$

$\displaystyle=\lim_{t\to 0}\frac{2\pi 2\int_0^1 f(r)r^2\mathrm{d}r}{\pi t^4}=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi f(t)t^2}{4\pi t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=f'(0)$

20. 证明函数$z=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$有无穷多个极大值点，但无极小值点.

证:$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\sin x(1+\mathrm{e}^y)=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^y(\cos x-1-y)=0\end{cases}$ 得无穷多个驻点:$\begin{cases}x=k\pi\\ y=\cos k\pi-1\end{cases}$,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

又$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\cos x(1+\mathrm{e}^y)$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\sin x\cdot\mathrm{e}^y$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(\cos x-2-y)\mathrm{e}^y$ $\Rightarrow$ $B\equiv 0$

当$k=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots$时$A=1+\mathrm{e}^{-2}$,$C=-\mathrm{e}^{-2}$ $\Rightarrow B^2-AC=\mathrm{e}^{-2}\left(1+\mathrm{e}^{-2}\right)>0$

当$k=0,\pm2,\pm4,\pm6,\cdots$时$A=-2<0$,$C=-1$ $\Rightarrow B^2-AC=-2<0$

故当$k=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots$时函数z不取极值;$k=0,\pm2,\pm4,\pm6,\cdots$时$z$有无穷多个极大值点.