第 1 章

P25 习题 1.2

6. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}+1 & x<0, \\ 1 & x=0, \\ 1+x\sin\frac{1}{x} & x>0, \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^{\frac{1}{x}}+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x\sin\frac{1}{x})=1$.

于是 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

7. 设函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$________

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\ln[a^1\cdot a^2\cdot\cdots\cdot a^n]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln a^{\frac{n(n+1)}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}\ln a=\frac{1}{2}\ln a$.

8. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x+1}-ax-b)=0$，求常数 a,b.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1+(x^2-1)}{x+1}-ax-b\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}+\lim\limits_{x\to\infty}(x-ax-1-b)=\lim\limits_{x\to\infty}(1-a)x-(1+b)=0$.

知 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-a)x=(1+b)$，由于 a,b 是常数，故当且仅当 $\begin{cases}1-a=0\\1+b=0\end{cases}$ 时上式成立，因此 $a=1$，$b=-1$.

9. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x-n}{\cos x-1}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)+(\cos^2 x-1)+\cdots+(\cos^n x-1)}{\cos x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos x+1)+\cdots+(\cos^{n-1}x+\cos^{n-2}x+\cdots+1)]$

$=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

P35 习题 1.3

1. 利用夹逼准则求极限

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi})$

解：令 $y_n=\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}$ 由题意可得 $\frac{n^2}{n^2+n\pi}<y_n<\frac{n^2}{n^2+\pi}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1$ 由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\right)=1$.

(2) 设 $0<a<b$**，求** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{-n}+b^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{-n}+b^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[a^{-n}\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)\right]^{\frac{1}{n}}=a^{-1}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$

$\because 1\le\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}\le 2^{\frac{1}{n}}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$.由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}=1$,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{-n}+b^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{-1}$.

2.利用单调有界原理求极限

(1)求数列 $\sqrt{2}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，…的极限；

解 $x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2+x_1},\cdots,x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$.

首先，$0<x_n<\sqrt{2+2}=2$，即数列 $\{x_n\}$ 是有界的；

其次，由于 $x_1>0$，所以 $x_2=\sqrt{2+x_1}>\sqrt{2}=x_1$；

假设 $x_k>x_{k-1}$，则有 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}>\sqrt{2+x_{k-1}}=x_k$.

故由归纳法知 $\{x_n\}$ 是单调递增数列. 根据单调有界数列必有极限知数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$ 等式两端同时取极限得 $a=\sqrt{2+a}$，解得 $a=2$ 或 $a=-1$(舍去). 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

(2)设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 由 $0<x_1<3$，知 $x_1, 3-x_1$ 均为正数，故

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2},$$

设 $0<x_k\leqslant\frac{3}{2}(k>1)$，则

$$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\frac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\frac{3}{2},$$

由数学归纳法知，对任意正整数 $n>1$ 均有 $0<x_n\leqslant\frac{3}{2}$，因而数列 $\{x_n\}$ 有界.

又当 $n>1$ 时，$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n$

$$=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geqslant 0,$$

因而有 $x_{n+1}\geqslant x_n(n>1)$，即数列 $\{x_n\}$ 单调增加. 由单调有界数列必有极限知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，在 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限，得 $a=\sqrt{a(3-a)}$，解之得 $a=\frac{3}{2}$，$a=0$（舍去）. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

3. (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}$;

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x^2+5)2}{(5x+3)x}\cdot\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}=\frac{6}{5}$.

3. (5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}\right]=\frac{3}{2}.$$

4. (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y$

$$=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x^2}{x^2+(b-a)x-ab}$$

$$= -\lim_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{b-a}{x}-\frac{ab}{x^2})$$
$$= -\lim_{x\to\infty} x(\frac{b-a}{x}-\frac{ab}{x^2})$$
$$= -\lim_{x\to\infty}(b-a-\frac{ab}{x})$$
$$= a-b$$

原式 $= \mathrm{e}^{a-b}$

4. (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n (a\neq\frac{1}{2})$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\dfrac{1-2a+\frac{1}{n}}{1-2a}=\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{1-2a}\cdot\dfrac{1}{n}\right)$

$$=\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1-2a}\cdot\frac{1}{n}\right)^n=\ln \mathrm{e}^{\frac{1}{1-2a}}=\frac{1}{1-2a}.$$

5. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，求常数 a.

解 左边 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}\cdot 3a+a}$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{3a}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^a=\mathrm{e}^{3a}.$$

由 $\mathrm{e}^{3a}=8$，得 $a=\ln 2$.

6. 利用等价无穷小代换求极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}$

解 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty} x\dfrac{2x}{x^2+1}=2.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\frac{1}{2}x^2)}{x^3}=\dfrac{1}{2}.$

或者$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$

解 原式$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{\sin x}\ln(1+3x)}=e^{2\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{x}}=e^6$.

7. 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，求$\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin 6x}{x}+f(x)}{x^2}=0,$

$\because \lim\limits_{x\to0}x^2=0$ $\therefore \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 6x}{x}+f(x)\right)=0$,

即 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-6\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{6x}=-6$.

P45 习题 1.4

2. 指出下列函数在指定点处间断点的类型，如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使之连续

（1） $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2},x=1,x=2;$

解 (1)由于$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$,所以 $x=1$ 为第一类间断点中的可去间断点. 可补充定义 $y(1)=-2$,使之连续；

由于$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty$,所以 $x=2$ 为第二类间断点(无穷)；

（2） $y=\dfrac{x}{\tan x},x=k\pi,x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

(2)由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}=1$,所以 $x=0$ 为第一类间断点中的可去间断点. 可补充定义 $y(0)=1$ 使之连续；

当 $k\neq0$ 时,由于$\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x}=\infty$,所以 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$为第二类间断点(无穷)；

由于 $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}=0$,所以 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为第一类间断点中的可去间断点.

可补充定义 $y(k\pi+\frac{\pi}{2})=0$ 使之连续；

(3)由于$\lim\limits_{x\to 0}\cos^2\frac{1}{x}$不存在，所以 $x=0$ 为第二类间断点(振荡)；

(5) $y=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & x>0 \\ \ln(1+x) & -1<x\le 0 \end{cases}$ $\quad x=0, x=1$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}y=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(1+x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}y=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1}$，所以 $x=0$ 为第一类间断点(跳跃)；

由于 $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to 1^-}y=\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+}y=\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，所以 $x=1$ 为第二类间断点.

(6) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}, x=0$

解 先求出 $f(x)$ 的解析表达式.

当 $x>0$ 时，$e^{nx}\to+\infty(n\to\infty)$，则 $f(x)=1$；

当 $x<0$ 时，$e^{nx}\to 0(n\to\infty)$，则 $f(x)=-1$.

又 $x=0$ 时，$f(0)=0$.

于是
$$f(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

显然，当 $x\neq 0$ 时，$f(x)$连续；而当 $x=0$ 时，函数的左、右极限不相等，从而 $f(x)$间断.

3. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，判别其类型.

解：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases} x & |x|<1 \\ 0 & |x|=1 \\ -x & |x|>1 \end{cases}$ 在 $x=1$时，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1, \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-1$

因此 $x=1$ 为第一类间断点

在$x=-1$时，$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=1, \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=-1$，因此$x=-1$为第一类间断点.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}$ 存在，求 $f(2)$.

解 由$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}$存在知$\lim\limits_{x\to 2}[f(x)-3]=0$，从而$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$. 另一方面，由 $f(x)$在 $x=2$ 连续，根据连续的定义得 $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)$. 所以 $f(2)=3$.

10. 设函数$f(x)$在$(a,b]$上连续，且 $x\to a+0$ 时函数$f(x)$的极限存在，
则函数$f(x)$在$(a,b]$上有界.

证 设$\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=A$,则对于$\varepsilon=1$，存在正数$\delta$，使当 $0<x-a<\delta$ 时，有
$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$,也就是$A-1<f(x)<A+1$
对于闭区间 $[a+\delta,b]$,由函数$f(x)$的连续性,必存在常数K,使对任一$x\in[a+\delta,b]$
有$\left|f(x)\right|\le K$ ，取$M=\max\{K,|1+A|,|A-1|\}$,

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $a<c<d<b$，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$，其中 p,q 为任意正常数.

解 令$F(x)=(p+q)f(x)-pf(c)-qf(d)$

$\because f(x)$在$[a,b]$上连续 $\therefore F(x)$在$[c,d]$上连续

则 $F(c)=(p+q)f(c)-pf(c)-qf(d)=q\left[f(c)-f(d)\right]$

$F(d)=(p+q)f(d)-pf(c)-qf(d)=p\left[f(d)-f(c)\right]$

故当$f(c)-f(d)=0$时，可知c,d均可取为此点；

而当$f(c)-f(d)\neq 0$时，又$p>0,q<0$;

$F(c)F(d)=-pq\left[f(c)-f(d)\right]^2<0$

由零点定理知，至少存在一点$\xi\in(c,d)\subset(a,b)$

使得$F(\xi)=0$,即$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$

第 2 章

P56 习题 2.1

3. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，按照导数定义，指出 A 表示什么？

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$

$A=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}\cdot(-1)=-f'(x_0)$；

(4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{h}=A$

$A=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{3h}\cdot 3=3f'(x_0)$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，设 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在

$A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$；

5. 设 $f(x)$ 为可导函数，且满足条件 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\dfrac{1}{2}f'(1)=-1$，

则 $f'(1)=-2$，而曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 $f'(1)=-2$.

6. 已知 $f'(x_0)=-1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x_0-2x)-f(x_0)]-[f(x_0-x)-f(x_0)]}{x}$

$=-2f'(x_0)+f'(x_0)=1$.

7. 已知 $f(x)$ 满足条件 $f(1+x)=af(x)$，且 $f'(0)=b$（常数 $a,b\neq 0$）求 $f'(1)$.

解 由题意得：$f(1)=af(0)$，

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)-f(1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{af(x)-af(0)}{x}=a\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=af'(0)=ab$.

即 $f'(1)=ab$.

P64 习题 2.2

2. 求下列函数在给定点处的导数

(3) $y=\arctan e^{x}-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

解 $y=\arctan e^{x}-\dfrac{1}{2}\ln e^{2x}+\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)=\arctan e^{x}-x+\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$，

故 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{x}}{1+e^{2x}}-1+\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}=\dfrac{e^{x}-1}{1+e^{2x}}$，从而 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\dfrac{e-1}{e^{2}+1}$.

3. 求下列函数的导数

(8) $y=e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$

解 $y'=e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^{2}}\right)+\sin\dfrac{1}{x}\cdot e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sec^{2}\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^{2}}\right)$

$=-\dfrac{1}{x^{2}}e^{\tan\frac{1}{x}}\left(\cos\dfrac{1}{x}+\tan\dfrac{1}{x}\cdot\sec\dfrac{1}{x}\right)$.

4. 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$， $f'(x)=\arctan x^{2}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 令 $u=\dfrac{3x-2}{3x+2}$，则 $y=f[u(x)]$，由链式法则，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=\arctan u^{2}\cdot\dfrac{12}{(3x+2)^{2}}$， $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\dfrac{12}{(0+2)^{2}}\cdot\arctan 1=\dfrac{3\pi}{4}$.

5. 已知 $h(x)=e^{1+g(x)}, h'(1)=1, g'(1)=2$, 求 $g(1)$.

解 在 $h(x)=e^{1+g(x)}$ 两端关于 x 求导数得 $h'(x)=e^{1+g(x)}\cdot g'(x)$.
将 $x=1$ 代入上式得

$h'(1)=e^{1+g(1)}\cdot g'(1)$， $e^{1+g(1)}=\dfrac{1}{2}$， $g(1)=-\ln 2-1$.

6. 设可导函数 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(\dfrac{1}{x})=\dfrac{c}{x}$，式中 a,b,c 为常数，且 $|a|\neq|b|$，求 $f'(x)$.

解 由已知得 $af(\dfrac{1}{x})+bf(x)=cx$. 解方程组

$$\begin{cases}af(x)+bf(\dfrac{1}{x})=\dfrac{c}{x}\\ bf(x)+af(\dfrac{1}{x})=cx\end{cases}\quad 得\quad f(x)=\frac{\dfrac{ac}{x}-bcx}{a^{2}-b^{2}}.$$

则 $f'(x)=\dfrac{1}{a^{2}-b^{2}}\left(-\dfrac{ac}{x^{2}}-bc\right)=-\dfrac{bcx^{2}+ac}{x^{2}(a^{2}-b^{2})}$.

7. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x}-1}=-1$，求 $f'(0)$.

解 因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x}-1}=-1$，所以由极限运算知$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$. 再由条件，函数$f(x)$在点$x=0$的邻域内连续，可得$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$从而由导数的定义知

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\sqrt{1+x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=-\frac{1}{2}.$$

注：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\dfrac{1}{2}$；抽象函数的导数一般用导数定义求.

8. 设$f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2} & x\neq0,\\ 0 & x=0,\end{cases}$试讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性.

解 因为$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x^2}-0}{x}=\dfrac{\pi}{2}$,

$$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\left(\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}\right)=\frac{\pi}{2}=f'(0).$$

所以$f'(x)$在$x=0$处是连续的.

P75 习题 2.3

8. 设函数$f(x)$在$x=2$的某领域内可导，且$f'(x)=e^{f(x)}, f(2)=1$, 求$f'''(2)$.

解 由$f'(x)=e^{f(x)}$，得

$$f''(x)=e^{f(x)}f'(x)=[e^{f(x)}]^2,$$

$$f'''(x)=e^{f(x)}[f'(x)]^2+e^{f(x)}f''(x)=e^{f(x)}[e^{f(x)}]^2+e^{f(x)}[e^{f(x)}]^2=2[e^{f(x)}]^3,$$

所以$f'''(2)=2[e^{f(2)}]^3=2e^3$.