第一章　行列式

1. 设 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\7&7&7&3&3\\3&2&4&5&2\\3&3&3&2&2\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}$，则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=$ ________.

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是三阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，且 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E}|=$ ________.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶正交阵，且 $|\boldsymbol{A}|<0$，$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=-4$，则 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=$ ________.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$，则 $|(k\boldsymbol{A})^*|=$ ________.

1.【解】$A_{31}+A_{32}+A_{33}=A_{31}+A_{32}+A_{33}+0A_{34}+0A_{35}$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\7&7&7&3&3\\1&1&1&0&0\\3&3&3&2&2\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&3&3\\1&1&1&0&0\\0&0&0&2&2\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}=0$$

2.【解】因为 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}|=0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\frac{1}{3},\frac{1}{2},1$，又 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\frac{1}{3},\frac{1}{2},1$，从而 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 的特征值为 $1,2,3$，则 $\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $3,4,5$，故 $|\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E}|=60$.

3.【解】$|\boldsymbol{A}|<0\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=-1$.

$$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}|=-|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=-4$$

4.【解】因为 $(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$，且 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，所以

$$|(k\boldsymbol{A})^*|=|k^{n-1}\boldsymbol{A}^*|=k^{n(n-1)}|\boldsymbol{A}|^{n-1}=k^{n(n-1)}a^{n-1}$$

2. 计算 $D=\begin{vmatrix}a^2&(a+2)^2&(a+4)^2\\b^2&(b+2)^2&(b+4)^2\\c^2&(c+2)^2&(c+4)^2\end{vmatrix}$.

3. 证明：$D=\begin{vmatrix}b+c&c+a&a+b\\b_1+c_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\b_2+c_2&c_2+a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}$.

4. 设 $D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}$.（1）计算 D；（2）求 $M_{31}+M_{33}+M_{34}$.

1.【解】$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48$

2.【解】$D=\begin{vmatrix}a^2&(a+2)^2&(a+4)^2\\b^2&(b+2)^2&(b+4)^2\\c^2&(c+2)^2&(c+4)^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a^2&4a+4&8a+16\\b^2&4b+4&8b+16\\c^2&4c+4&8c+16\end{vmatrix}=32\begin{vmatrix}a^2&a+1&a+2\\b^2&b+1&b+2\\c^2&c+1&c+2\end{vmatrix}$

$=32\begin{vmatrix}a^2&a+1&1\\b^2&b+1&1\\c^2&c+1&1\end{vmatrix}=32\begin{vmatrix}a^2&a&1\\b^2&b&1\\c^2&c&1\end{vmatrix}=-32\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}$

$=-32\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=-32(c-a)(c-b)(b-a)$

3.【证明】$D=\begin{vmatrix}b+c&c+a&a\\b_1+c_1&c_1+a_1&a_1\\b_2+c_2&c_2+a_2&a_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&a&a+b\\b_1&a_1&a_1+b_1\\b_2&a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&c+a&a+b\\c_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\c_2&c_2+a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}b&c+a&a\\b_1&c_1+a_1&a_1\\b_2&c_2+a_2&a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&a&a+b\\c_1&a_1&a_1+b_1\\c_2&a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}b&c&a\\b_1&c_1&a_1\\b_2&c_2&a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&a&b\\c_1&a_1&b_1\\c_2&a_2&b_2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}$

4.【解】

(1)$D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-1&2&0&6\\1&1&0&3\\2&-1&0&0\end{vmatrix}=1\times A_{13}=M_{13}$

$=\begin{vmatrix}-1&2&6\\1&1&3\\2&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2&6\\0&3&9\\0&3&12\end{vmatrix}=-9$

(2) $M_{31}+M_{33}+M_{34}=1\times A_{31}+0\times A_{32}+1\times A_{33}+(-1)\times A_{34}$

$=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\1&0&1&-1\\4&-6&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-5&-1&4\\-3&7&2&1\\1&0&0&0\\4&-6&-3&6\end{vmatrix}=1\times A_{31}=M_{31}$

$=\begin{vmatrix}-5&-1&4\\7&2&1\\-6&-3&6\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-5&-1&4\\7&2&1\\-2&-1&2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-5&-1&4\\-3&0&9\\3&0&-2\end{vmatrix}$

$=-3\times A_{12}=3\begin{vmatrix}-3&9\\3&-2\end{vmatrix}=-63$

第二章 矩阵

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$ ________.

2. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，且 $n\geqslant 2$，则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$ ________.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^2-9\boldsymbol{E})=$ ________.

4. $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ 的充分必要条件是________.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=4$，则 $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\right|=$ ________.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=4$，则 $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}\right|=$ ________.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为四阶矩阵，$|\boldsymbol{A}^*|=8$，则 $\left|\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-3\boldsymbol{A}^*\right|=$ ________.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，则 $|(-2\boldsymbol{A})^*|=$ ________.

9. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&2&0\\-1&2&-2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________.

10. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________.

1.【解】$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=3$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=3\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=3\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}^n=3^{n-1}\boldsymbol{A}=3^{n-1}\begin{pmatrix}2&1&1\\-2&-1&-1\\4&2&2\end{pmatrix}$.

2.【解】由 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{A}^n=2^{n-1}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^{n-1}=2^{n-2}\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{O}$.

3.【解】$(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^2-9\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

4.【解】$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^2$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

5.【解】$\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\right|=|2\boldsymbol{A}^{-1}|=2^3|\boldsymbol{A}^{-1}|=2$

6.【解】由 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=4\boldsymbol{A}^{-1}$ 得 $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}\right|=|(2\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}|=\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right|=\frac{1}{8}|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$.

7.【解】因为 $\boldsymbol{A}$ 为四阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}^*|=8$，所以 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^3=8$，于是 $|\boldsymbol{A}|=2$.

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}^*=2\boldsymbol{A}^{-1}$，故

$$\left|\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-3\boldsymbol{A}^*\right|=|4\boldsymbol{A}^{-1}-6\boldsymbol{A}^{-1}|=|(-2)\boldsymbol{A}^{-1}|=(-2)^4|\boldsymbol{A}^{-1}|=16\times\frac{1}{2}=8$$

8.【解】因为 $(-2\boldsymbol{A})^*=(-2)^2\boldsymbol{A}^*=4\boldsymbol{A}^*$，所以 $|(-2\boldsymbol{A})^*|=|4\boldsymbol{A}^*|=4^3|\boldsymbol{A}|^2=64\times 9=576$.

9.【解】$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}2&3&-1&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\-1&2&-2&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&0&1&0\\0&-1&-1&1&-2&0\\0&4&-2&0&1&1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&0&0&1&0\\0&1&1&-1&2&0\\0&0&-6&4&-7&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0&-\frac{1}{3}&\frac{5}{6}&\frac{1}{6}\\0&0&1&-\frac{2}{3}&\frac{7}{6}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4&-4&-2\\-2&5&1\\-4&7&-1\end{pmatrix}$.

10.【解】设 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\\&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$，于是 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1}&\\&\boldsymbol{A}_2^{-1}\end{pmatrix}$，

而 $\boldsymbol{A}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

5. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过若干次初等变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 （　　）

(A) $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$　　(B) $|\boldsymbol{A}| \neq |\boldsymbol{B}|$

(C) 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 则 $|\boldsymbol{B}| = 0$　　(D) 若 $|\boldsymbol{A}| > 0$ 则 $|\boldsymbol{B}| > 0$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AC}$，且 $r(\boldsymbol{A}) = r$，$r(\boldsymbol{B}) = r_1$，则 （　　）

(A) $r > r_1$　　(B) $r < r_1$

(C) $r \geqslant r_1$　　(D) r 与 r_1 的关系依矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的情况而定

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n \times m$ 阶矩阵，且 $m > n$，令 $r(\boldsymbol{AB}) = r$，则 （　　）

(A) $r > m$　　(B) $r = m$　　(C) $r < m$　　(D) $r \geqslant m$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为四阶非零矩阵，且 $r(\boldsymbol{A}^*) = 1$，则 （　　）

(A) $r(\boldsymbol{A}) = 1$　　(B) $r(\boldsymbol{A}) = 2$　　(C) $r(\boldsymbol{A}) = 3$　　(D) $r(\boldsymbol{A}) = 4$

9. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，其中 $\boldsymbol{B}$ 是非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，则 （　　）

(A) $r(\boldsymbol{B}) = n$　　(B) $r(\boldsymbol{B}) < n$

(C) $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2 = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$　　(D) $|\boldsymbol{A}| = 0$

10. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵，则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A} \\ 2\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 （　　）

(A) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^{-1} \\ 2\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^{-1} \\ 3\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1} \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^{-1} \\ \frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

11. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & 2a_{12} + a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & 2a_{22} + a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & 2a_{32} + a_{33} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的关系为 （　　）

(A) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$　　(B) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$

(C) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$　　(D) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$

5.【解】因为 $\boldsymbol{A}$ 经过若干次初等变换化为 $\boldsymbol{B}$，所以存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_s, \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$，使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}_1 \cdots \boldsymbol{Q}_t$，而 $\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_s, \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$ 都是可逆矩阵，所以 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$，若 $|\boldsymbol{A}| = 0$，即 $r(\boldsymbol{A}) < n$，则 $r(\boldsymbol{B}) < n$，即 $|\boldsymbol{B}| = 0$，选(C).

6.【解】因为 $r_1 = r(\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{AC}) \leqslant r(\boldsymbol{A}) = r$，所以选(C).

7.【解】显然 $\boldsymbol{AB}$ 为 m 阶矩阵，$r(\boldsymbol{A}) \leqslant n$，$r(\boldsymbol{B}) \leqslant n$，而 $r(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\} \leqslant n < m$，所以选(C).

8.【解】因为 $r(\boldsymbol{A}^*) = 1$，所以 $r(\boldsymbol{A}) = 4 - 1 = 3$，选(C).

9.【解】因为 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，所以 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leqslant n$，又因为 $\boldsymbol{B}$ 是非零矩阵，所以 $r(\boldsymbol{B}) \geqslant 1$，从而 $r(\boldsymbol{A}) < n$，于是 $|\boldsymbol{A}| = 0$，选(D).

10.【解】$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，因为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，

所以 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A} \\ 2\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^{-1} \\ \frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，选(D).

11.【解】$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{E}_{12}$，$\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{E}_{23}(2)$，显然 $\boldsymbol{A}$ 首先将第 2 列的两倍加到第 3 列，再将第 1 及第 2 列对调，所以 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{23}(2)\boldsymbol{E}_{12} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$，选(D).

6. 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$ $(a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$,求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

8. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 求:(1) $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}$;(2) $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})^{-1}$.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$,求 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}$;(2) 证明:当 $\boldsymbol{P}$ 可逆时,$\boldsymbol{Q}$ 也可逆.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{A}^2=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 证明:$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*$.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 证明:$r(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=n$.

13. 证明:若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则其逆矩阵必然唯一.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵,若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,证明:$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

6.【解】$(\boldsymbol{B}\,\vdots\,\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\text{则 }\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

7.【解】令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n-1}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=(a_n)$,

则 $A=\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}$，从而 $A^{-1}=\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

8.【解】(1) 由 $A^2+2A-3E=O$ 得 $A(A+2E)=3E$，$\frac{1}{3}A\cdot(A+2E)=E$，根据逆矩阵的定义，有 $(A+2E)^{-1}=\frac{1}{3}A$.

(2) 由 $A^2+2A-3E=O$ 得 $(A+4E)(A-2E)+5E=O$，则 $(A+4E)^{-1}=-\frac{1}{5}(A-2E)$.

9.【解】$E^k-A^k=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$，又 $E^k-A^k=E$，
所以 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

10. (1)【解】$PQ=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |A||B|E & O \\ O & |A||B|E \end{pmatrix}=|A||B|E$

(2)【证明】因为 $|P|=|A||B|$，所以当 P 可逆时，$|A||B|\neq 0$，而 $PQ=|A||B|E$，即 $\frac{1}{|A||B|}PQ=E$，于是 Q 可逆且 $Q^{-1}=\frac{1}{|A||B|}P$.

11.【证明】因为 $AA^*=|A|E$，又已知 $A^2=|A|E$，所以 $AA^*=A^2$，而 A 可逆，故 $A=A^*$.

12.【证明】由 $A^2-2A-8E=O$ 得 $(4E-A)(2E+A)=O$，根据矩阵秩的性质得 $r(4E-A)+r(2E+A)\leqslant n$. 又 $r(4E-A)+r(2E+A)\geqslant r[(4E-A)+(2E+A)]=r(6E)=n$，所以有 $r(4E-A)+r(2E+A)=n$.

13.【证明】设存在可逆阵 B,C，使得 $AB=AC=E$，于是 $A(B-C)=O$，故 $r(A)+r(B-C)\leqslant n$，因为 A 可逆，所以 $r(A)=n$，从而 $r(B-C)=0$，$B-C=O$，于是 $B=C$，即 A 的逆矩阵是唯一的.

14.【证明】因为 $r(A)=r(A^TA)$，而 $A^TA=O$，所以 $r(A)=0$，于是 $A=O$.

第三章 向量

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，$\boldsymbol{\beta}_2$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，对任意的常数 k 有 ( )

   (A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

   (C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

7. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$，记向量组(I)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$；(II)：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$；(III)：$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$，若向量组(III) 线性相关，则 ( )

   (A)(I)，(II) 都线性相关　　(B)(I) 线性相关

   (C)(II) 线性相关　　(D)(I)，(II) 至少有一个线性相关

8. 设向量组(I)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r_1，向量组(II)：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_2，且向量组(II) 可由向量组(I) 线性表示，则 ( )

   (A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1+r_2

   (B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1-r_2

   (C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1+r_2

   (D) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1

9. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分条件是 ( )

   (A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 都不是零向量

   (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量不成比例

   (C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一向量都不可由其余向量线性表示

   (D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一个部分向量组线性无关

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ ( )

   (A) 必有一列元素全为零

   (B) 必有两行元素对应成比例

   (C) 必有一列是其余列向量的线性组合

   (D) 任一列都是其余列向量的线性组合

6.【解】因为 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，$\boldsymbol{\beta}_2$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以 $k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 一定不可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，选(A).

7.【解】若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关，则 $r(\boldsymbol{A})=n$，$r(\boldsymbol{B})=n$，于是 $r(\boldsymbol{AB})=n$. 因为 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$ 线性相关，所以 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)<n$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 至少有一个线性相关，选(D).

8.【解】因为向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价，选(D).

9.【解】若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则其中任一向量都不可由其余向量线性表示，反之，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一向量都不可由其余向量线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 一定线性无关，因为若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则其中至少有一个向量可由其余向量线性表示，故选(C).

10.【解】因为 $|\boldsymbol{A}|=0$，所以 $r(\boldsymbol{A})<n$，从而 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量线性相关，于是其列向量中至少有一个向量可由其余向量线性表示，选(C).

5. 证明:若一个向量组中有一个部分向量组线性相关,则该向量组一定线性相关.

6. n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关,且与非零向量 $\boldsymbol{\beta}$ 正交. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

7. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为两两正交的非零向量组,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,举例说明逆命题不成立.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵($m>n$),且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$. 证明:$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

9. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关,而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关. 证明:向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示.

10. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\t+2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}t-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 线性相关,但任意两个向量线性无关,求参数 t.

11. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个线性无关的 n 维向量,且与向量 $\boldsymbol{\beta}$ 正交. 证明:向量 $\boldsymbol{\beta}$ 为零向量.

5.【证明】设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为一个向量组,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r(r<n)$ 线性相关,则存在不全为零的常数 $k_1,\cdots,k_r$,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$,于是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+0\boldsymbol{\alpha}_{r+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$,因为 $k_1,\cdots,k_r,0,\cdots,0$ 不全为零,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关.

6.【证明】令 $k_0\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\mathbf{0}$,由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 与非零向量 $\boldsymbol{\beta}$ 正交及 $(\boldsymbol{\beta},k_0\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1})=0$ 得 $k_0(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=0$,因为 $\boldsymbol{\beta}$ 为非零向量,所以 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=|\boldsymbol{\beta}|^2>0$,于是 $k_0=0$,故 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\mathbf{0}$,由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关得 $k_1=\cdots k_{n-1}=0$,于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

7.【证明】令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$,由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 两两正交及 $(\boldsymbol{\alpha}_1,k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n)=0$,得 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)=0$,而 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)=|\boldsymbol{\alpha}_1|^2>0$,于是 $k_1=0$,同理可证 $k_2=\cdots=k_n=0$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. 令 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$,显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 不正交.

8.【证明】首先 $r(\boldsymbol{B})\leqslant\min\{m,n\}=n$,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 得 $r(\boldsymbol{AB})=n$,而 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})$,所以 $r(\boldsymbol{B})\geqslant n$,从而 $r(\boldsymbol{B})=n$,于是 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

9.【证明】因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关,所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 也线性无关,又向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关,所以向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,从而 $\boldsymbol{\gamma}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示.

10.【解】向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关的充分必要条件是 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=0$，

而 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1 & 2 & t-1\\ t+2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=(t+1)(t+5)$，所以 $t=-1$ 或者 $t=-5$，

因为任意两个向量线性无关，所以 $t=-5$.

11.【证明】方法一

令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，所以 $\boldsymbol{A\beta}=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{\beta}$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,$ $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，所以 $r(\boldsymbol{A})=n$，从而方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 只有零解，即 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

方法二

(反证法)不妨设 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$，令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n+k_0\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，上式两边左乘 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 得

$$k_1\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n+k_0\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，所以 $k_0\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，即 $k_0|\boldsymbol{\beta}|^2=0$，从而 $k_0=0$，于是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$，再由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，得 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，矛盾(因为当向量的个数大于向量的维数时向量组一定线性相关)，所以 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

第四章　线性方程组

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，下列命题正确的是　　(　　)

(A) 若方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 只有零解，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(B) 若方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有非零解，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解

(C) 若方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 无解，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 一定有非零解

(D) 若方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 一定有非零解

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，则下列命题正确的是　　(　　)

(A) 若 $m<n$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有无穷多个解

(B) 若 $m>n$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有唯一解

(C) 若 $r(\boldsymbol{A})=n$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有唯一解

(D) 若 $r(\boldsymbol{A})=m$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有解

3. 设 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & t\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}$ 为三阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$，则　　(　　)

(A) 当 $t=6$ 时 $r(\boldsymbol{P})=1$　　(B) 当 $t=6$ 时 $r(\boldsymbol{P})=2$

(C) 当 $t\neq 6$ 时 $r(\boldsymbol{P})=1$　　(D) 当 $t\neq 6$ 时 $r(\boldsymbol{P})=2$

4. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，下列向量组中也是方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系的是　　(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+22\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3$

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同解，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为　　(　　)

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

1.【解】方程组$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1-x_2=0\\2x_1+2x_2=0\end{cases}$只有零解，而$\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1-x_2=2\\2x_1+2x_2=3\end{cases}$无解，故(A)不对；方程组$\begin{cases}x_1+x_2=0\\2x_1+2x_2=0\end{cases}$有非零解，而$\begin{cases}x_1+x_2=1\\2x_1+2x_2=3\end{cases}$无解，故(B)不对；方程组$\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1-x_2=2\\2x_1+2x_2=3\end{cases}$无解，但$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1-x_2=0\\2x_1+2x_2=0\end{cases}$只有零解，故(C)不对；若$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$有无穷多个解，则$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<n$，从而$r(\boldsymbol{A})<n$，故方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$一定有非零解，选(D).

2.【解】因为若$r(\boldsymbol{A})=m$(即$\boldsymbol{A}$为行满秩矩阵)，则$r(\overline{\boldsymbol{A}})=m$，于是$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$，即方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$一定有解，选(D).

3.【解】因为$\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$，所以$r(\boldsymbol{P})+r(\boldsymbol{Q})\leqslant 3$，因为$\boldsymbol{P}$为非零矩阵，所以$r(\boldsymbol{P})\geqslant 1$，而当$t\neq 6$时，$r(\boldsymbol{Q})=2$，则$r(\boldsymbol{P})\leqslant 1$，于是$r(\boldsymbol{P})=1$，选(C).

4.【解】根据齐次线性方程组解的结构，四个向量组皆为方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解向量组，容易验证四组中只有(C)组线性无关，所以选(C).

5.【解】选(D)，因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$为方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的两个线性无关解，也是基础解系，而$\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$为方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的一个特解，根据非齐次线性方程组通解结构，选(D).

2. 方程组

$$\begin{cases}6x_1-2x_2+3x_3+2x_4=4\\x_1-x_2+x_4=1\\2x_1+x_3+3x_4=2\end{cases}$$

有无解？若有解求出其通解.

3. 设$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}4\\5\\-3\\11\end{pmatrix}$为$\begin{cases}a_1x_1+2x_2+a_3x_3+a_4x_4=d_1\\4x_1+b_2x_2+3x_3+b_4x_4=d_2\\3x_1+c_2x_2+5x_3+c_4x_4=d_3\end{cases}$的三个解，求其通解.

4. $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\10\end{pmatrix}$，求极大线性无关组，并把其余向量用极大线性无关组线性表出.

5. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为四维列向量组，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系.

6. 设$\boldsymbol{A}$是3×4阶矩阵且$r(\boldsymbol{A})=1$，设$(1,-2,1,2)^{\mathrm{T}},(1,0,5,2)^{\mathrm{T}},(-1,2,0,1)^{\mathrm{T}},(2,-4,3,a+1)^{\mathrm{T}}$皆为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解. (1) 求常数$a$；(2) 求方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的通解.

7. 设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$线性无关，且$\boldsymbol{\alpha}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_5$，$\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+6\boldsymbol{\alpha}_5$，求方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的通解.

8. 四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有三个解向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 且 $r(\boldsymbol{A})=3$，设 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-6\\4\\-2\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\4\end{pmatrix}$，求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

9. $\boldsymbol{A}_{n\times n}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{B}_{n\times n}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)$，当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 是否有非零解？

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\b+3\\5\end{pmatrix}$.

(1)a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合？

(2)a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可唯一表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合？

2.**【解】**$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}6&-2&3&2&4\\1&-1&0&1&1\\2&0&1&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1\\6&-2&3&2&4\\2&0&1&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1\\0&4&3&-4&-2\\0&2&1&1&0\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1\\0&2&1&1&0\\0&0&1&-6&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1\\0&2&0&7&2\\0&0&1&-6&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{9}{2}&2\\0&1&0&\frac{7}{2}&1\\0&0&1&-6&-2\end{pmatrix}$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3<4$，所以原方程组有无穷多个解，其通解为

$$\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}-9\\-7\\12\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\0\end{pmatrix}(k\text{ 为任意常数}).$$

3.**【解】**$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&2&a_3&a_4\\4&b_2&3&b_4\\3&c_2&5&c_4\end{pmatrix}$，因为 $\boldsymbol{A}$ 有两行不成比例，所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$，又原方程组有三个线性无关解，所以 $4-r(\boldsymbol{A})+1=3$，即 $r(\boldsymbol{A})=2$，于是原方程组的通解为

$$k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+\boldsymbol{\eta}_1=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\6\\-3\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}(k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

4.【解】令 $A=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为一个极大线性无关组，

$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

5.【解】**方法一**

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 可得 $(x_1+3x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2+2x_3)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，因此 $\begin{cases}x_1+3x_3=0\\x_2+2x_3=0\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$.

方法二

由 $r(\boldsymbol{A})=2$ 可知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有一个线性无关的解向量，而 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，因此 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

6.【解】(1) 因为 $r(\boldsymbol{A})=1$，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有三个线性无关的解向量，故 $(1,-2,1,2)^{\mathrm{T}},(1,0,5,2)^{\mathrm{T}},(-1,2,0,1)^{\mathrm{T}},(2,-4,3,a+1)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，即

$\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\-2&0&2&-4\\1&5&0&3\\2&2&1&a+1\end{vmatrix}=0$，解得 $a=6$.

(2) 因为 $(1,-2,1,2)^{\mathrm{T}},(1,0,5,2)^{\mathrm{T}},(-1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k_1(1,-2,1,2)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,5,2)^{\mathrm{T}}+k_3(-1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$（$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数）.

7.【解】因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性表示，所以 $r(\boldsymbol{A})=3$，齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有两个线性无关的解向量.

由 $\boldsymbol{\alpha}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_5,\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+6\boldsymbol{\alpha}_5$ 得方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的两个解为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(3,-1,-1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(2,0,1,-1,6)^{\mathrm{T}}$$

故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k_1(3,-1,-1,0,-1)^{\mathrm{T}}+k_2(2,0,1,-1,6)^{\mathrm{T}}$（$k_1,k_2$ 为任意常数）.

8.【解】因为 $r(\boldsymbol{A})=3$，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解形式为 $k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$，其中 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$\boldsymbol{\eta}$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的特解，根据方程组解的结构的性质，

$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\-3\\6\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\-1\end{pmatrix}$,

所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}1\\4\\-3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\-1\end{pmatrix}$（$k$ 为任意常数）.

9.【解】方法一

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&0\\0&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix},\text{由 } r(\boldsymbol{A})=n$$

可知 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，而 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&0\\0&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|[1+(-1)^{n+1}]$，

当 n 为奇数时，$|\boldsymbol{B}|\neq 0$，方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解；

当 n 为偶数时，$|\boldsymbol{B}|=0$，方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

方法二

$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+x_n(\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$

$\Leftrightarrow(x_1+x_n)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$，

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，

$$\text{所以}\begin{cases}x_1+x_n=0\\x_1+x_2=0\\\cdots\\x_{n-1}+x_n=0\end{cases},D=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&0\\0&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1},$$

当 n 为奇数时，$|\boldsymbol{B}|\neq 0$，方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解；

当 n 为偶数时，$|\boldsymbol{B}|=0$，方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

10.【解】令 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}(*)$

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\ \vdots\ \boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix}$$

(1) 当 $a=-1,b\neq 0$ 时，因为 $r(\boldsymbol{A})=2\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，所以方程组 $(*)$ 无解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 不能表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合；

(2) 当 $a\neq -1$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 可唯一表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合.

第五章　矩阵的特征值和特征向量

18.【解】因为实对称矩阵不同的特征值对应的特征向量正交,所以有

$\xi_1^T\xi_2=-1+k=0\Rightarrow k=1\Rightarrow\lambda_1=8$ 对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

令 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的另一个特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,由不同特征值对应的特征向量正交,得

$x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,$\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

19.【证明】由 $(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$,得 $|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\cdot|b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,则 $|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 或者 $|b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$. 又由 $(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$,得 $r(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r(b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\leqslant n$.

同时 $r(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r(b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant r[(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})-(b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})]=r[(a-b)\boldsymbol{E}]=n$.

所以 $r(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r(b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$.

(1) 若 $|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\neq 0$,则 $r(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$,所以 $r(b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$,故 $\boldsymbol{A}=b\boldsymbol{E}$.

(2) 若 $|b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\neq 0$,则 $r(b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$,所以 $r(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$,故 $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{E}$.

(3) 若 $|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 且 $|b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,则 a,b 都是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

方程组 $(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有 $n-r(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 个线性无关的解向量,即特征值 a 对应的线性无关的特征向量个数为 $n-r(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 个;

方程组 $(b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有 $n-r(b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 个线性无关的解向量,即特征值 b 对应的线性无关的特征向量个数为 $n-r(b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 个.

因为 $n-r(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+n-r(b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$,所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量,所以 $\boldsymbol{A}$ 一定可以对角化.

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵,其三个特征值为 $-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1$,则 $|4\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{E}|=$ ________.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵,若 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ_0,则 $(\boldsymbol{A}^*)^2+3\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}$ 有特征值________.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 4,则 $\boldsymbol{A}$ 有特征值________,对应的特征向量为________.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\a+1\\3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-6\\3\\2a\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值对应的特征向量,则 $a=$ ________.

5. 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&x&3\\0&4&2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6&0&0\\2&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,则 $x=$ ________,$y=$ ________.

1.【解】$|\boldsymbol{A}|=-\frac{1}{4}$，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{4}$，$4\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{E}$ 的特征值为 5,1,2，于是 $|4\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{E}|=10$.

2.【解】因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $\lambda_0\neq 0$，$\boldsymbol{A}^*$ 对应的特征值为$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$，于是$(\boldsymbol{A}^*)^2+3\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}$ 对应的特征值为$\left(\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}\right)^2+3\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}+2$.

3.【解】因为 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 4，所以 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，于是 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 4，对应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

4.【解】因为实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交，所以有 $6+3a+3-6a=0$，$a=3$.

5.【解】因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以$\begin{cases}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})\\|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\end{cases}$，即$\begin{cases}3+x=5+y\\2x-12=-6y\end{cases}$，解得 $x=3$，$y=1$.

1. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,1,2$，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，令 $\boldsymbol{P}=(3\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 等于　　(　　)

(A) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值相同，则　　(　　)

(A)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角矩阵　　(B) 存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$

(C)$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$　　(D) 以上都不对

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，下列命题错误的是　　(　　)

(A) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，则 -1 一定是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

(B) 若 $r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})<n$，则 -1 一定是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

(C) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 -1，则 -1 一定是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

(D) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之积小于零，则 -1 一定是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

4. 与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的矩阵为　　(　　)

(A) $\begin{pmatrix}2&2&-1\\0&2&3\\0&0&5\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，下列结论正确的是　　(　　)

(A) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值的个数相等

(B) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一对角阵

(C) 若 $r(\boldsymbol{A})=r<n$，则 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换可化为$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

(D) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩与其非零特征值的个数相等

1.【解】显然 $3\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是特征值 1,2,−1 的特征向量,所以 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}$,选(C).

2.【解】令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,显然 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值,而 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{B})$,所以(A),(B),(C) 都不对,选(D).

3.【解】若 $r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})<n$,则 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$,于是 −1 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

若 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 −1,则 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$,根据特征值特征向量的定义,−1 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;若 $\boldsymbol{A}$ 的正交矩阵,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,令 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$(其中 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$),则 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$,于是 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda^2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$,即 $(\lambda^2-1)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=0$,而 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}>0$,故 $\lambda^2=1$,再由特征值之积为负得−1 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,选(A).

4.【解】$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,0,因为特征值都是单值,所以 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化,又因为给定的四个矩阵中只有选项(D) 中的矩阵特征值与 $\boldsymbol{A}$ 相同且可以对角化,所以选(D).

5.【解】(A) 不对,如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}$ 的两个特征值都是 0,但 $r(\boldsymbol{A})=1$;(B) 不对,因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 不一定保证 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可以对角化;(C) 不对,如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}$ 经过有限次行变换化为 $\begin{pmatrix}1&0&-8\\0&1&5\\0&0&0\end{pmatrix}$,经过行变换不能化为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$;因为 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化,所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$,于是 $r(\boldsymbol{A})=r\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$,故选(D).

10. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，其中 $a_1\neq 0$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$.

(1) 求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值及其对应的线性无关的特征向量.

11. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，求 $|6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|$.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，其对应的线性无关的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}$，证明：λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值，$\boldsymbol{X}$ 为特征向量. 若 $\boldsymbol{A}^2$ 有特征值 λ，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{X}$ 是否一定为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量?说明理由.

14. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵.

(1) 是否有 $\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$；(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $1,2,\cdots,n$，证明：$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$.

15. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维非零列向量，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$.

(1) 证明：$\boldsymbol{A}$ 可逆并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$；

(2) 证明：$\boldsymbol{\alpha}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

16. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ 有一个特征值为 3.

(1) 求 y；(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$ 为对角矩阵.

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵，$r(\boldsymbol{A})=1$，$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，设 $(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值对应的特征向量.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

18. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=8,\lambda_2=\lambda_3=2$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=8$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$，属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，求属于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的另一个特征向量.

19. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$ 且 $a\neq b$. 证明：$\boldsymbol{A}$ 可对角化.

10.【解】因为 $r(\boldsymbol{A})=1$，所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，其基础解系为

$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\left(-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\left(-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1\right)^{\mathrm{T}}$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$（$k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数）.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}$，其中 $k=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2>0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为 k，

因为 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}$，所以非零特征值 k 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$.

11.【解】方法一

由 $\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，得 $|6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=6^2(6-2^n)$.

方法二

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2(\lambda-2)=0$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=2$.

因为 $6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n$ 的特征值为 $6,6,6-2^n$，所以 $|6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=6^2(6-2^n)$.

方法三

因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵且 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=2$，所以存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{pmatrix}$，则 $|6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P}|=\begin{vmatrix}6&&\\&6&\\&&6-2^n\end{vmatrix}=6^2(6-2^n)$.

12.【解】方法一

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$，则

$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&2^n&\\&&3^n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$，于是 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&2^n&\\&&3^n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}$.

方法二

令 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\xi}_1+x_2\boldsymbol{\xi}_2+x_3\boldsymbol{\xi}_3$，解得 $x_1=2,x_2=-2,x_3=1$，则

$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_3=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-2^{n+1}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+3^n\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}$.

13.【解】由 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$ 得 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{AX})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{X})=\lambda\boldsymbol{AX}=\lambda^2\boldsymbol{X}$ 可知 λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值，$\boldsymbol{X}$ 为特征向量. 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}^2$ 的特征值为 $\lambda=0$，取 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，

显然 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=0\boldsymbol{X}$，但 $\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\neq 0\boldsymbol{X}$，即 $\boldsymbol{X}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，因此结论未必成立.

14. (1)【解】一般情况下，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 不等价，如

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}$，

因为 $r(\boldsymbol{AB})\neq r(\boldsymbol{BA})$，所以 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 不等价.

(2)【证明】因为 $|\boldsymbol{A}|=n!\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{ABP}=\boldsymbol{BA}$，故 $\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$.

15.【证明】(1) 因为 $A^2=\left(E-\frac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T\right)\left(E-\frac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T\right)=E-\frac{4}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T+\frac{4}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T=E$,

所以 A 可逆且 $A^{-1}=A$.

(2) 因为 $A\alpha=\left(E-\frac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T\right)\alpha=\alpha-2\alpha=-\alpha$,所以 α 是矩阵 A 的特征向量,其对应的特征值为 -1.

16.【解】(1) 因为 3 为 A 的特征值,所以 $|3E-A|=0$,解得 $y=2$.

(2) $(AP)^T(AP)=P^TA^TAP=P^TA^2P$,

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{pmatrix}$$,令 $A_1=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$,$|\lambda E-A_1|=0$ 得 $\lambda_1=1,\lambda_2=9$,

当 $\lambda=1$ 时,由 $(E-A_1)X=0$ 得 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$;$\lambda=9$ 时,由 $(9E-A_1)X=0$ 得 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,

单位化得 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$,$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,令 $P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,则 $(AP)^T(AP)=$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}.$$

17.【解】(1) $A^2-3A=O\Rightarrow|A||3E-A|=0\Rightarrow\lambda=0,3$,因为 $r(A)=1$,所以 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=0$.

(2) 设特征值 0 对应的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^T$,则 $x_1+x_2-x_3=0$,则 0 对应的特征向量为 $\alpha_2=(-1,1,0)^T$,$\alpha_3=(1,0,1)^T$,令

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix},P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix},A=P\begin{pmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}P^{-1}.$$

第六章 二次型

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，则 （　　）

(A) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$，使得 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$ 为对角矩阵

(B) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$，使得 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2$ 为对角矩阵

(C) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

2. n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是 （　　）

(A)$\boldsymbol{A}$ 无负特征值　　(B)$\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵

(C)$\boldsymbol{A}$ 的每个特征值都是单值　　(D)$\boldsymbol{A}^*$ 是正定矩阵

3. 下列说法正确的是 （　　）

(A) 任一个二次型的标准形是唯一的

(B) 若两个二次型的标准形相同，则两个二次型对应的矩阵的特征值相同

(C) 若一个二次型的标准形系数中没有负数，则该二次型为正定二次型

(D) 二次型的标准形不唯一，但规范形是唯一的

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆的实对称矩阵，则二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 与 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$ （　　）

(A) 规范形与标准形都不一定相同　　(B) 规范形相同但标准形不一定相同

(C) 标准形相同但规范形不一定相同　　(D) 规范形和标准形都相同

5. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵合同，则 $\boldsymbol{A}$ 是 （　　）

(A) 可逆矩阵　　(B) 实对称矩阵

(C) 正定矩阵　　(D) 正交矩阵

1.【解】因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$，选(D).

2.【解】$\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是正数，(A) 不对；若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 一定是满秩矩阵，但 $\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵只能保证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是非零常数，不能保证都是正数，(B) 不对；(C) 既不是充分条件又不是必要条件；显然(D) 既是充分条件又是必要条件.

3.【解】(A) 不对，如 $f=x_1x_2$，令 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\x_2=y_1+y_2\end{cases}$，则 $f=y_1^2-y_2^2$；若令 $\begin{cases}x_1=y_1-3y_2\\x_2=y_1+3y_2\end{cases}$，则 $f=y_1^2-9y_2^2$；(B) 不对，两个二次型标准形相同只能说明两个二次型正、负惯性指数相同，不能得到其对应的矩阵的特征值相同；(C) 不对，若一个二次型标准形系数没有负数，只能说明其负惯性指数为 0，不能保证其正惯性指数为 n；选(D)，因为二次型的规范形由其正、负惯性指数决定，故其规范形唯一.

4.【解】因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 合同，所以 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 与 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$ 规范形相同，但标准形不一定相同，即使是同一个二次型也有多种标准形，选(B).

5.【解】因为 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 合同，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，

从而 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=[(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}]^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{A}$，选(B).

2. 用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-4x_3^2$ 为标准形.

3. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2{}^2-3x_3{}^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

(1) 写出二次型的矩阵形式；

(2) 用正交变换法化二次型为标准形，并写出正交矩阵.

4. 用正交变换法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$ 为标准二次型.

5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(a-1)x_1^2+(a-1)x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2\,(a>0)$ 的秩为 2.

(1) 求 a；(2) 用正交变换法化二次型为标准形.

6. 设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$($\boldsymbol{A}$ 称为幂等阵).

求：(1) 二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 的标准形；(2) $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^n|$ 的值.

2.【解】$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-4x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2-4x_3^2$,

令$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=y_1\\x_2+x_3=y_2\\x_3=y_3\end{cases}$ 或$\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\x_2=y_2-y_3\\x_3=y_3\end{cases}$,即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$,其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$,

则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\overset{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}}{=\!=}y_1^2-y_2^2-4y_3^2$.

3.【解】(1) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}$,则

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$$

(2) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=-6$.

由 $(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_1=1$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,0,-1)^{\mathrm{T}}$,

由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_2=6$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,5,2)^{\mathrm{T}}$,

由 $(-6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_3=-6$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$,

单位化得 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{30}}(1,5,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$,

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}1&&\\&6&\\&&-6\end{pmatrix}$,则

$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\overset{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}}{=\!=}y_1{}^2+6y_2{}^2-6y_3{}^2$.

4.【解】$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$,其中 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&2\\2&\lambda-1&2\\2&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-3)^2=0$ 得 $\lambda_1=-3,\lambda_2=\lambda_3=3$.

由 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_1=-3$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,

将 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交化得 $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$,单位化得

$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$,

令 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，$Q^TAQ=\begin{pmatrix}-3 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{pmatrix}$，

则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xlongequal{X=QY}\boldsymbol{Y}^T(Q^TAQ)\boldsymbol{Y}=-3y_1^2+3y_2^2+3y_3^2$.

5.【解】(1)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a-1 & 1 & 0\\ 1 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，因为二次型的秩为 2，所以 $r(\boldsymbol{A})=2$，从而 $a=2$.

(2)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，由 $|\lambda E-\boldsymbol{A}|=0$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

当 $\lambda=2$ 时，由 $(2E-A)X=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=0$ 时，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda=0$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 两两正交，单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，

令 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$Q^TAQ=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，则 $f=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xlongequal{X=QY}\boldsymbol{Y}^T(Q^TAQ)\boldsymbol{Y}=2y_1^2+2y_2^2$.

6.【解】(1) 因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，所以 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 或者 1，
因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，由 $r(\boldsymbol{A})=r$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=1$(r 重)，$\lambda=0$($n-r$ 重)，则二次型 $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的标准形为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2$.
(2) 令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^n$，则 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda=n+1$(r 重)，$\lambda=1$($n-r$ 重)，故 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^n|=|\boldsymbol{B}|=(n+1)^r$.