2013-2014 学年第一学期高等数学试题（A）

一、填空题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）

1。设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\ln(1-2x), & x\le 0\\ 3+ae^{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$____

2。过点 $(1,2)$，且切线斜率为 $2x$ 的曲线方程为_________

3。极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x^2}-2}{e^{x^2}-1}=$___

4。设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}-x+y^3-0$ 确定，则 $y'=$____

5。$\int_{-1}^{3}|2-x|dx=$_____

二、计算题（共 6 小题，每题 10 分，共 60 分）

1. 求不定积分 $\int x\arctan x dx$

2. 设 $f(x)$ 连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0,\quad f'(0)\ne 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$

3. 设 $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$，求函数 $f(x)$ 的单调区间，极值，曲线 $y=f(x)$ 的凹凸性、拐点。

4. 求解微分方程 $y''-2y'+y=4xe^{x}$

5. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=0$，求 $f(0),f'(0),f''(0)$。

6. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=0,f''(x)>0$，并且在曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $(x,f(x))(x\ne 0)$ 处作此曲线的切线，此切线在 x 轴上的截距记为 u，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(u)}{uf(x)}$

三、证明题（共 2 小题，每题 10 分，共 20 分）

1. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$。证明：存在一点 $\xi\in[a,b]$，

   使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$。

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)=1$。

   证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $e^{\eta-\xi}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=1$。