习题 2.1

1. 解

$$-2A=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 2\\ -8 & 10 & -4\end{bmatrix}$$

$$B-2A=\begin{bmatrix}7 & -5 & 1\\ 1 & -4 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 0 & 2\\ -8 & 10 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -5 & 3\\ -7 & 6 & -7\end{bmatrix}$$

AC 无定义，A 列 ≠ C 行

$$CD=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 13\\ -7 & 6\end{bmatrix}$$

2. 解

$$A+2B=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 4 & -5 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}14 & -10 & 2\\ 2 & -8 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & -10 & 1\\ 6 & -13 & -4\end{bmatrix}$$

3C − E = [无意义] 行列不等

~~无意义，C列≠B~~ CB =

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7 & -5 & 1\\ 1 & -4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & \cancel{-18}\ -13 & -5\\ -13 & 6 & -5\end{bmatrix}$$

EB 无意义，E 列 ≠ B 行

5T.解

① $\begin{bmatrix}-1&2\\5&4\\2&-3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}-1&2\\5&4\\2&-3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-7\\7\\12\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}4\\-6\\-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&4\\7&-6\\12&-7\end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix}-1&2\\5&4\\2&-3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&-2\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&4\\7&-6\\12&-7\end{bmatrix}$

9T解

$AB=\begin{bmatrix}2&5\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-5\\3&k\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}23&-10+5k\\-9 \ \cancel{15+k}&15+k\end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix}4&-5\\3&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&5\\-3&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}23&15\\6-3k&15+k\end{bmatrix}$

$\therefore\begin{cases}-10+5k=15\\6-3k=-9\end{cases}\quad\therefore k=5$

10T.解

$AB=\begin{bmatrix}2&-3\\-4&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&4\\5&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-7\\2&24\end{bmatrix}$

$AC=\begin{bmatrix}2&-3\\-4&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-2\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-7\\2&24\end{bmatrix}$

$\therefore AB=AC$ 但 $B\neq C$

12T解 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}3&-6\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3a-6c&3b-6d\\-a+2c&-b+2d\end{bmatrix}$

$\therefore a=2c,\ b=2d$

$\therefore B=\begin{bmatrix}2&4\\1&2\end{bmatrix}$

15T.解

a. 错，左为 $[\vec{a_1}\ \vec{a_2}]\vec{b_1}$ 与 $[\vec{a_1}\ \vec{a_2}]\vec{b_2}$

b. 假 AB说反了

c. 真，结合律

d. 真，定理3

e. 假，相反顺序

山东大学

16T 解

a. 假，为 $[A\vec{b_1}, A\vec{b_2}, A\vec{b_3}]$

b. 错，第2列是

c. 对，结合律

d. $B^T A^T$（假）

e. 对 定理.3

23T 解

$CA = I_n$，则

∵ $A\vec{x} = \vec{0}$

∴ $C(A\vec{x}) = 0$

∴ $(CA)\vec{x} = 0$

∴ $I_n\vec{x} = 0$

∴ $\vec{x} = 0$

∴仅有平凡解

设 $C: n\times m$

则 $A: m\times n$

若 A的列数多于行数说明 $A\vec{x}=0$ 的解中有自由变量一定有非平凡解

24T 解：

$A\vec{x} = \vec{b}$

$A\vec{x} = I_m\vec{b}$

$A\vec{x} = AD\vec{b}$

$A(\vec{x} - D\vec{b}) = 0$

∴方程一定有一解 $\vec{x} = D\vec{b}$

若 A的行数多于列数

则 $A\vec{x} = \vec{b}$ 最多有一个解，

不满足对所有 $\vec{b}$ 都有解

25T 解

$CA = I_n$

$(CA)D = I_nD = D$

$C(AD) = D$

∴ $C = D$

$AD = I_m$

$C(AD) = CI_m$

$I_nD = CI_m$

又 $C = D$

~~∴ $I_nC = CI_m$~~

$CA = I_m$，∴ $A\vec{x}=0$ 只有平凡解

$AD = I_m$ ∴ $A\vec{x} = b$ 有解

~~∴ $A\vec{x} = 0$~~

且 A的列数 = A的行数 ~~(由23,24T)~~

$m = n$

27T. 解

$$u^T = [-2 \quad 3 \quad -4]$$

$$v^T = [a \quad b \quad c]$$

$$u^T v = [-2 \quad 3 \quad -4]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [-2a+3b-4c]$$

$$v^T u = [a \quad b \quad c]\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = [-2a+3b-4c]$$

$$\cancel{uv^T = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}[a \quad b \quad c] = [-2a+3b-4c]}$$

$$\cancel{vu^T = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}[-2 \quad 3 \quad -4] = [-2a+3b-4c]}$$

$$uv^T = vu^T = \begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 3a & 3b & 3c \\ -4a & -4b & -4c \end{bmatrix}$$

28T 解 $\quad u^T v = v^T u$ :

$u^T [a_1, a_2, \cdots, a_n]$

$v^T [b_1, \cdots, b_n]$

$$u^T v = v^T u = [a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n]$$

$$uv^T = vu^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}[b_1, \cdots b_n] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & \vdots & \\ a_n b_1 & a_n b_2 & a_n b_n \end{bmatrix}$$

山东大学

2.2

1. 解

$A^{-1}=\frac{1}{32-30}\begin{bmatrix}4 & -6\\ -5 & 8\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -6\\ -5 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -\frac{5}{2} & 4\end{bmatrix}$

2. 解

$A^{-1}=\frac{1}{12-14}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -7 & 3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

3 解

$A^{-1}=\frac{1}{-40+35}\begin{bmatrix}-5 & -5\\ 7 & 8\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}+1 & 1\\ -\frac{7}{5} & -\frac{8}{5}\end{bmatrix}$

5. 解

$\begin{bmatrix}8 & 6\\ 5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{32-30}\begin{bmatrix}4 & -6\\ -5 & 8\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -3\\ -\frac{5}{2} & 4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}7\\ -9\end{bmatrix}$

8. 解

$AD=I$

$A^{-1}(AD)=A^{-1}I$

$ID=A^{-1}I$

$D=A^{-1}$

9. 解

a. 对，定义

b 错 $A^{-1}B^{-1}\cdot AB\neq I$

应为 $B^{-1}A^{-1}$

c. 错 $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

$\therefore ad-bc\neq 0$

d. 对 $A$可逆，则 $x=A^{-1}b$ 相容

e. 对 $[A\ I]\to[I\ A^{-1}]$ 只需一步可逆

10. 解

a. 错，相反顺序来乘

b. 对 设 $(A^{-1})^{-1}=C$

则 $A^{-1}(A^{-1})^{-1}=A^{-1}C$

则 $A^{-1}C=I_n$

则 $AA^{-1}C=AI_n$

则 $C=A$

故 $(A^{-1})^{-1}=A$

c. 对 $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

$ad-bc=0$ ∴ $A^{-1}$ 不存在

d. 对 $[A \ \ I] \to [I \ \ A^{-1}]$

e. 错，将 $I_n$ 化简为 $A$

23T 解

∵ $A\vec{x}=\vec{0}$ 只有平凡解

∴ A的增广 $[A \ \ \vec{0}]$ 无自由变量

∴ 有 n个主元列

∵ $A\vec{x}=0$ 仅有平凡解，则化简后

可得 $[\vec{x}]=0$，即

$\begin{bmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \vdots\\ & & 1 & 0\end{bmatrix}$，与 $I_n$ 行等价

$[A \ \ I_n] \Rightarrow [I_n \ \ A^{-1}]$，可逆

24T 解 $A\vec{x}=\vec{b}$ 对 $\forall \vec{b}$ 有解

则 $[A \ \ \vec{b}]$ 中有自由变量

则 A 行等价于 $I_n$

则 A 可逆

31T 解

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\cancel{\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & & & \end{bmatrix}}$$

~~∴A不存在~~

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & 3/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & 3/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}8 & 3 & 1\\ 10 & 4 & 1\\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

山东大学

32 解

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 7 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 7 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 7 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 7 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & -\frac{3}{4} \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -3/10 & -7/20 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & -3/4 \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2, & 11/10, & 29/20 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -3/10 & -7/20 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & -3/4 \end{array}\right]$$

33 解

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

33T. 猜

$$A:\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & - \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & - \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & - \\ - & - & - & & & \end{bmatrix}$$

$$B:\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ 右推

如：二阶 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同理

34T

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \cdots \\ - & - & & & & \end{bmatrix}$$

贾星宇 20200030012?

# 山东大学

线性代数

习题2.3.

1. $ad-bc=-30+21\neq 0$
   ∴可逆
2. $ad-bc=+36-36=0$
   ∴不可逆
3. A各列线性无关
   ∴可逆
4. $A^T=\begin{bmatrix}-7 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 4\end{bmatrix}$
   仅有2个主元位置
   不可逆
5. $\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$
   仅有2个主元位置
   不可逆
6. $\sim\begin{bmatrix}1 & -5 & -4\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$
   2个主元位置
   不可逆
7. $\sim\begin{bmatrix}-1 & -3 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$
   ∴有四个(n个)主元位置
   ∴可逆.
8. 有4个(n个)主元位置
   ∴可逆

11T.

a). $A\vec{x}=\vec{0}$仅有平凡解 ⇒ A可逆
⇒ A行等价于n阶单位
∴为真

b) A各列生成$R^n$ ⇒ A可逆 ⇒ A各列线性无关

c) 若A的各列无法生成$R^n$，则存在$\vec{b}$使$A\vec{x}=\vec{b}$无解. ∴假

d) $A\vec{x}=0$有非平凡解 ⇒ A不可逆
⇒ A主元位置少于n个

e) $A^T$不可逆 ⇒ A不可逆（逆否命题成立）

12T.

a) $AD=I$ ⇒ A为可逆 ⇒ $CA=I$

b) A各列线性无关 ⇒ A可逆 ⇒ 生成$R^n$

d) A是n×n的，$A\vec{x}=\vec{b}$至少一个解，
⇒ A可逆 ⇒ A有n个主元位置 ⇒ 解唯一

g). 满射 ⇒ A可逆 ⇒ A有n个主元位置

e) $A\vec{x}=\vec{b}$不相容 ⇒ A不可逆 ⇒ 不是一对一的

山东大学

13T. $m \geq n$ 时:

$m=n$ 时, 下方全是0说明

矩阵有$n$个主元位置

∴矩阵可逆

14T $n \geq m$ 时:

此时 $A^T$有$n$个主元位置

$A^T$可逆, 则 $A$可逆

15T. 不可逆, 这两列线性相关

16T 不可逆, 仅在$A$各列生成$R^n$的情况下可逆

17T $A$可逆 ⇒ $A$的各列线性无关

$(A^{-1})^{-1}=A$ 即 $A^{-1}$可逆

则 $A^{-1}$各列线性无关

18T 不, 每个$\vec{b}$相容 ⇒ $C$可逆

⇒ $C$有6个主元位置

⇒ $C\vec{x}=\vec{b}$ 仅有一解

19T 由上题知, 有且仅有一解

20T. $EF=I$, 则 $E$可逆, $F$可逆, 则

$EF=I$ | $I=E^{-1}F^{-1}$

$E^{-1}EF=E^{-1}I$

$E^{-1}EFF^{-1}=E^{-1}IF^{-1}$

接20T:

设 $FE=A$,

则 $E=F^{-1}A$, $F=AE^{-1}$

$EF=F^{-1}AF$ $\quad FE=AE^{-1}E=AI=A$

设 $EF=I$, 则 $FM=I$

则 $FM=EF$

则 $F^{-1}FM=F^{-1}I$ $\quad$ 则 $M=F^{-1}$

又 $E=F^{-1}$ $\quad$ ∴ $M=E$

∴ $FE=EF=I$

21T 解

有多个解 ⇒ $G$有自由变量 ⇒ $G$不可逆

⇒ $G$无法生成$R^n$

22T 解. ∵ 对某个$\vec{b}$不相容

∴ $H$ 的各列无法生成 $R^n$

∴ $H$ 不可逆, $H\vec{x}=\vec{0}$ 不仅有平凡解

23T 解

不能化简为 $I_n$ ⇒ $K$不可逆

⇒ $K$的列无法生成 $R^n$

24T 解 $L\vec{x}=0$ 有平凡解 不能说明没有非平凡解 ∴ 不一定可逆

∴ 不一定可张成 $R^n$。

山东大学

25T 解:

由定理8，习题8:

$AB=I$

$A^{-1}(AB)=A^{-1}I$

$(A^{-1}A)B=A^{-1}I$

则 $B=A^{-1}$

则 $A=B^{-1}$

且 A,B由k.j知:可逆

26T 解

A各列线性无关

$\Rightarrow A^2$ 各列线性无关

$\Rightarrow A^2$ 各列生成 $R^n$

27T 解

AB可逆，则 ∃C,D

$C(AB)=I$

$(AB)D=I$

则 ∃矩阵 BD,使 $A(BD)=I$

则 A可逆.

28T 解 AB可逆，∃C,使:

$C(AB)=I$

则 $(CA)B=I$

则 ∃CA,使 $(CA)B=I$

∴B可逆.

33T 解 $T=\begin{bmatrix}-5 & 9\\ 4 & -7\end{bmatrix}$

$ad-bc=35-36\neq 0$ ∴T可逆

$T^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}-7 & -9\\ -4 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 9\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

34T 解. $T=\begin{bmatrix}6 & -8\\ -5 & 7\end{bmatrix}$

$ad-bc=42-40\neq 0$ ∴T可逆

$T^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}7 & 8\\ 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7/2 & 4\\ 5/2 & 3\end{bmatrix}$

35T 解: $T:R^n\to R^n$ 可逆

∴T是一对一的且T是映上的

(定理8),

或:

$R^n\to R^n$ 是一对一 $\Leftrightarrow A\vec{x}=\vec{0}$ 仅有平凡解

$\Leftrightarrow$ A可逆

$R^n\to R^n$ 映上 $\Leftrightarrow$ A各列生成 $R^n$

$\Leftrightarrow$ A可逆

山东大学

## 习题2.4

1T. $\begin{bmatrix} I & 0 \\ E & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} A & B \\ EA+C & EB+D \end{bmatrix}$

7T 解

$\begin{bmatrix} XA & XZ \\ YA+B & YZ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$

X列 = A行 = Z行

Y列 = A行 = Z行

$XA = YZ = I$

$XZ = YA+B = 0$

$X = A^{-1}$ $Y = -BA^{-1}$

$Z = Y^{-1} = -AB^{-1}$

21T. 解

a) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b). 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

则 $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ I_2 & B \end{bmatrix}$

$MM = \begin{bmatrix} A & 0 \\ I & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ I & B \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} A^2 & 0 \\ A+B & I+B^2 \end{bmatrix}$

$A^2 = I$ $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

$\therefore M^2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I$

24T 解: $n=2$ 时

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

A中 $ad-bc = 1 \neq 0$ $\therefore$ A 可逆

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = B$

设 $n=n$ 时 $A_n$可逆且其逆为$B_n$

则 $n=n+1$ 时，

$A_{n+1} = \left[\begin{array}{c|c} A_n & 0 \\ \hline D & I_{n+1} \end{array}\right]$, $D = [1\ 1\ 1 \cdots 1]$

$B_{n+1} = \begin{bmatrix} B_n & 0 \\ E & I_{n+1} \end{bmatrix}$ $E = [0\ 0\ 0 \cdots -1]$

$ad-bc = A_nI_n \neq 0$ $\therefore A_{n+1}$ 可逆

$A_{n+1}B_{n+1} = \begin{bmatrix} A_nB_n & 0 \\ DB_n+E & DE+I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n0 & 0I_a \end{bmatrix}$

$\therefore n=n+1$ 时 $A_{n+1}B_{n+1} = I_n$，A可逆且逆为B

山东大学

25T 解

$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&7&8\\0&5&6\end{bmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{5-6}\begin{bmatrix}5&-2\\-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&2\\3&-1\end{bmatrix}$

$\left[\begin{matrix}0&5&6\\0&7&8\\2&0&0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right]$

$\sim\left[\begin{matrix}2&0&0\\0&5&6\\0&0&2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0&0&1\\1&0&0\\7&-5&0\end{matrix}\right]$

$\sim\left[\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0&0&\frac{1}{2}\\-4&3&0\\7/2&-5/2&0\end{matrix}\right]$

$B^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1/2\\-4&3&0\\7/2&-5/2&0\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}$

$A^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1}&-A^{-1}\times 0\ \cancel{B}^{-1}\\0&B^{-1}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}A^{-1}&0\\0&B^{-1}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-5&2&0&0&0\\3&-1&0&0&0\\0&0&0&0&1/2\\0&0&\cancel{-4}0&3&\cancel{0}-4\\0&0&\cancel{7/2}0&-5/2&\cancel{0}7/2\end{bmatrix}$

习题2.5

2T 解

$\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3&-5\\0&-2&2\\0&0&2\end{bmatrix}\vec{x}=\vec{b}=\begin{bmatrix}2\\-4\\6\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}4&3&-5\\0&-2&2\\0&0&2\end{bmatrix}x=\left[\begin{matrix}1&0&0\\-1&1&0\\2&0&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}2\\-4\\6\end{matrix}\right]$

$=\begin{bmatrix}2\\-2\\2\end{bmatrix}$

$x=\left[\begin{matrix}4&3&-5\\0&-2&2\\0&0&2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}2\\-2\\2\end{matrix}\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\2\\1\end{bmatrix}$

10T 解.

$\begin{bmatrix}-5&3&4\\10&-8&-9\\15&1&2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}-5&3&4\\10&-8&-9\\0&10&14\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}-5&3&4\\0&-2\ {\scriptstyle\times5}&-1\\0&10&14\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}-5&3&4\\0&-2&-1\\0&0&9\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5&3&4\\10&-8&-9\\15&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&3&4\\0&-2&-1\\0&0&9\end{bmatrix}$$

$$E_3 \quad E_2 \quad E_1 \quad A = U$$

$$A=(E_3E_2E_1)^{-1}U=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}U$$

$$\therefore A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-3&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5&3&4\\0&-2&-1\\0&0&9\end{bmatrix}$$

19T 解 因为下三角矩阵且对角线元素非零，故有n个主元位置，A可逆.

例：
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\-3&1&0&0&1&0\\4&-1&1&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&3&1&0\\4&-1&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&3&1&0\\0&-1&1&-4&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&3&1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$ 为下三角.

山东大学

补充练习:

2T. 解

(1) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

$(C^{-1})^{-1} = \frac{1}{28-30} \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} -7/2 & 5/2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

3T 解

$AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A^3 = AAA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

$(I-A)(I+A+A^2)$

$= I + A + A^2 - A - A^2 - A^3$

$= I \cancel{+A+A} - A^3$

$= I$

4T 解

$(I + A + A^2 + \cdots + A^n)$

5T 解 $(A-I)^2 = 0$

$A(A^2 - I) = 2(A-I)$

$A(A-I)(A+I) = 2(A-I)$

$(A-I)(A^2 + AI + 2I) = 0$

证毕

$A^4 - A = 3(A-I)$

$A(A^3 - I) = 3(A-I)$

$A - I = 0$ ∴成立

9T 解

B可逆且 $B^{-1} = \frac{1}{7-6} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -3 & 13 \\ -8 & 27 \end{bmatrix}$

10T 解

A可逆 则 $A^T$ 可逆

∴ ∃ C，$CA = I$，$CA^T = I$

则 ∃ $C^2$，$C^2(A^TA) = CA^TCA = I$

∴可逆

$AA^{-1}A = A(A^TA)^{-1}A^TA$

∴ $I = I$.

证毕