

## 离散 2 透题

1. 从 1-9 不重复取 3 奇 3 偶，奇偶间隔排列，组合？

$$A_5^3 A_4^3 C_2^1$$

$$A_5^3 A_4^3 C_2^1$$

2.  $(x_1+x_2+\dots+x_t)^n$  展开后有多少不同项？

$$C_{n+t-1}^{t-1}$$

$$\text{隔板} \quad C(n+t-1, t-1)$$

3. 将一些球装入 5 箱，若至少有一箱有 6 个，则至少有几个球？

$$5 \times 5 + 1 = 26$$

4. 有  $n(m-1)+1$  只鸟进  $n$  个巢，问至少有一个巢内至少有多少只鸟？

$$m-1+1 = m$$

5. 18 本书给甲乙丙三人。甲乙至少 3 本至多 10 本，丙至少 2 本，求不同的分配方法。

$$3 \leq \text{甲} \leq 10$$

$$3 \leq \text{乙} \leq 10$$

$$2 \leq \text{丙}$$

$$0 \leq \text{甲}-3 \leq 7$$

$$0 \leq \text{乙}-3 \leq 7$$

$$0 \leq \text{丙}-2$$

$$\begin{array}{r} 21 \quad 28 \\ 10+11+15+13 \end{array}$$

找  $x^{10}$  项系数，

49

$$\begin{array}{ccccccc} (1+x+\dots+x^7) & (1+x+\dots+x^7) & (1+x+\dots+x^{10}) & & & & \\ x^0 & x^1+x & x^2+2x & x^3+3x^2 & x^4+6x^3 & x^5+10x^4 & x^6+10x^5 \\ 1 & 2 & 1+2=3 & 2+2=4 & 5 & 6 & \\ x^4+x^1 \cdot x^5+x^2 \cdot x^4+x^3 \cdot x^3+x^6 & x^3+x^7+x^{1+6} & x^2+x^{1+7/2+6/1+5+5/4+4} & x^1+x^{2+7/1+3+6/4+5} & & & \\ 7 & 8 & 7 & 6 & & & \end{array}$$

6. 求  $s=\{4 \text{ 个 } a, 4 \text{ 个 } b, 3 \text{ 个 } c, 3 \text{ 个 } d\}$  的 7 个的组合，求方法数

$$(1+x+\dots+x^4)^2 (1+x+x^2+x^3)^2 \text{ 的 } x^7 \text{ 项系数}$$

破书

7. 求  $X_1 + X_2 + X_3 = 1$  的整数解个数,  $X_1, X_2, X_3 \geq -5$

$$x_1', x_2', x_3' \geq 0$$

$$x_1' + x_2' + x_3' = 13$$

$$C(13+3-1, 2) = C(15, 2) = \frac{15 \times 14}{2} = 15 \times 7 = 105$$

8. 6 个人排周一到周六 6 天班, 甲不周一, 乙不周四, 丙不周六, 共多少种方式?

一 二 三 四 五 六

9. 5 个 app 分给 4 个人, 每人至少一个, 有多少个不同方案

不同的 app?

$$C(5-1+4-1, 3) = 4 \text{ 种}$$

10. 从正整数 1 到  $2n$  中任取  $n+1$  个数, 证明其中必定存在一个数是另一个数的倍数

设数  $2^j \cdot j$  ( $j$  为奇数)

当  $j \in [1, n]$  共  $n$  个数.

取  $n+1$  个数 由鸽巢原理有  $2^j$  数的  $j$  相同

$\therefore$  一定存在  $2^m \cdot j, 2^n \cdot j$  即是倍数关系

11. 设  $*$  是集合  $A$  上可结合的二元运算, 且  $a, b \in A$ , 若  $a*b = b*a$ , 则  $a=b$ , 证明  $ab \in A$ , 则  $a*b*a = a$

2. 在偶阶的有限群中，必存在  $a \neq e$ ，使得  $a^2 = e$ ，其中  $e$  是群的单位元

3. 设  $R$  是实数集， $M = \{ \langle a, b \rangle \mid a, b \in R, a \neq 0 \}$ ，定义  $\langle a, b \rangle$ 。

$\langle c, d \rangle = \langle ac, ad + b \rangle$  证明  $M$  对运算。构成群

4. 设  $\langle G, * \rangle$  是群， $a, b \in G$ ，试证明必存在唯一的  $y$  使得  $y * b = a$

5. 证明：对于剩余环  $\langle \mathbb{Z}_n, +_n, \times_n \rangle$ ， $n$  是素数当且仅当  $\mathbb{Z}_n$  中无零因子。

1. 设  $G$  是一个群,  $e$  是  $G$  的单位元,  $H$  是  $G$  的子群. 如下定义关系  $R$ :

$\forall a_1, a_2 \in G, \langle a_1, a_2 \rangle \in R \Leftrightarrow a_1 e a_2^{-1} \in H$ . 证明  $R$  是  $G$  上的等价关系.

2.  $\langle G, * \rangle$  是个群,  $x \in G$ , 定义  $G$  中的运算 “ $\Delta$ ” 为  $a \Delta b = a * x * b$ , 对  $\forall a, b \in G$ , 证明  $\langle G, \Delta \rangle$  也是群.

3.  $\langle G, * \rangle$  是群,  $\langle A, * \rangle, \langle B, * \rangle$  是其不同的子群, 证明  $A \cup B = G$ , 则  $A = G$  或  $B = G$

4.  $f_1, f_2$  是  $\langle A, \Delta \rangle$  到  $\langle B, * \rangle$  的同态, 设  $g$  是  $A$  到  $B$  的映射, 使对  $\forall a \in A$  有  $g(a) = f_1(a) * f_2(a)$ , 证明如果  $\langle B, * \rangle$  是可交换的半群  $g$  是  $A$  到  $B$  的同态。

5、 $\langle G, * \rangle$ 是群， $c = \{a \mid a \in G, \text{ 且 } \forall x \in G, a * x = x * a\}$  证明  $c$  是  $G$  的子群

6、记“开”为 1，关为 0，反应电路规律的代数系统， $\langle (0, 1), +, . \rangle$   
其中如图

证                      明                       $\langle (0, 1), +, . \rangle$ 是环

+	0	1
0	0	1
1	1	0

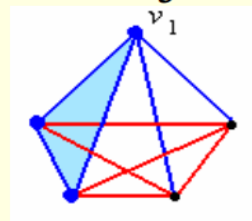
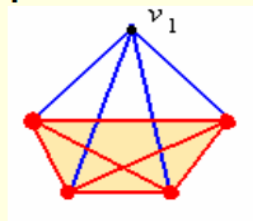
.	0	1
0	0	0
1	0	1

**命题 2:**

用红蓝两色涂色  $K_9$  的边，则或有一个红色  $K_4$ ，或有一个蓝色  $K_3$ .

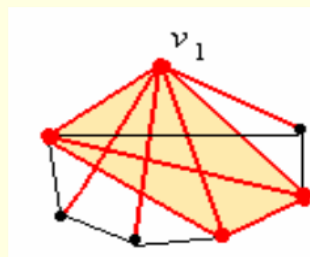
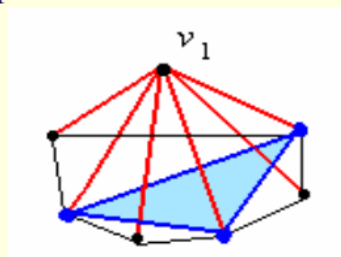
证：存在一个顶点关联4条蓝边或者6条红边。  
 否则蓝边数 $<4$ , 红边数 $<6$ , 则蓝边总数至多  
 $\lfloor (3 \times 9)/2 \rfloor = 13$ , 红边总数至多  $\lfloor (5 \times 9)/2 \rfloor = 22$ ,  
 总共35条边, 与 $K_9$ 边数为36矛盾.

设 $v_1$ 关联4条蓝边, 若对应4个顶点没有蓝边, 则  
 构成红 $K_4$ ; 有1条蓝边, 则构成兰 $K_3$ .



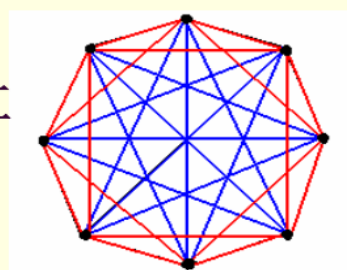
3

设 $v_1$ 关联6条红边, 对应6个顶点必有蓝 $K_3$ 或红 $K_3$ .



对于 $K_8$ , 存在一种涂色方案,  
 既没有蓝色三角形, 也没有红  
 色完全四边形.

$R(3,4)=9$ .



4

Example 3 证明  $(1-4x)^{-1/2}$  是下列序列的普通  
 生成函数。

$$\left( \binom{0}{0}, \binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \dots, \binom{2n}{n}, \dots \right)$$

证明：由牛顿二项式定理有

$$\begin{aligned}
 (1-4x)^{-1/2} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-4x)^k \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1/2(-1/2-1)(-1/2-2)\dots(-1/2-k+1)}{k!} (-4x)^k \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k (1 \times 3 \times \dots \times (2k-1))}{2^k \times k!} x^k \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k! (1 \times 3 \times \dots \times (2k-1))}{k! k!} x^k \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2 \times 4 \times \dots \times (2k)) (1 \times 3 \times \dots \times (2k-1))}{k! k!} x^k \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k! k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k \\
 &= \binom{0}{0} + \binom{2}{1} x + \binom{4}{2} x^2 + \dots + \binom{2k}{k} x^k + \dots
 \end{aligned}$$

由定义知， $(1-4x)^{-1/2}$  是序列  $(C(0,0), C(2,1), C(4,2), \dots, C(2n,n), \dots)$  的生成函数。

求1, 3, 5, 7, 9五个数字组成的n位数的个数，要求其中3, 7出现的次数为偶数，其他1, 5, 9出现次数不加限制。

解：

设满足条件的r位的个数为 $a_r$ ，则序列 $a_1, a_2, \dots$ 对应的指数型母函数为

$$G_x(x) = (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots)^2 (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots)^3$$

由于

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\therefore 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$G_x(x) = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 e^{3x} = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})e^{3x}$$

$$= \frac{1}{4}(e^{5x} + 2e^{3x} + e^x) = \frac{1}{4}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} x^n)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (5^n + 2 \cdot 3^n + 1) \frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{4}(5^n + 2 \cdot 3^n + 1)$$

14. 假设在一个淘汰锦标赛中有  $n=2^t$  个队，其中在第一轮有  $n/2$  场比赛， $n/2=2^{t-1}$  个赢的队进入第二轮比赛，依此进行。建立一个关于锦标赛的轮数的递推关系。

15. 在练习 14 的淘汰锦标赛中如果有 32 个队，需要进行多少轮比赛？

16. 求解练习 14 所描述的关于锦标赛轮数的递推关系。

14. If there is only one team, then no rounds are needed, so the base case is  $R(1) = 0$ . Since it takes one round to cut the number of teams in half, we have  $R(n) = 1 + R(n/2)$ .

16. The solution of this recurrence relation for  $n = 2^k$  is  $R(2^k) = k$ , for the same reason as in Exercise 10.

例： 从  $n$  个不同物体中可重复选取  $r$  个物体，每个物体至少选一次的方法数为： $\binom{r-1}{n-1}$

$$f(x) = (x + x^2 + \cdots)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r-1}{n-1} x^r$$