P191 习题 4.3

2. 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

(1) 星形线 $x = a\cos^3 t$ **,** $y = a\sin^3 t$ **;**

(2) 圆 $r = 2a\cos\theta$ **,** $a > 0$ **.**

$$(1) A = 4\int_0^a y\mathrm{d}x = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)\mathrm{d}t$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(\sin^4 t - \sin^6 t)\mathrm{d}t$$

$$= 12a^2\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}(1-\frac{5}{6})\right] = \frac{3}{8}\pi a^2$$

(2)解：面积元 $\mathrm{dA}=\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}4a^2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=2a^2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$

由对称性知总面积为第一象限面积的2倍，

则面积 $\mathrm{A}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2a^2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = 4a^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi a^2$

3. 计算下列各立体面积:

(4) 星形线 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ **绕** x **轴所围图形分别绕** x **轴和** y **轴旋转所得两个立体体积**(图 4.3.17);

解 星形线的参数方程是 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$，又由对称性

$$V_x = 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (a\sin^3 t)^2\mathrm{d}a\cos^3 t = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t\mathrm{d}t$$

$$= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 t - \sin^9 t)\mathrm{d}t = \frac{32}{105}\pi a^3.$$

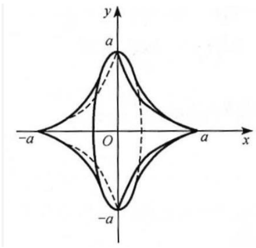

图 4.3.17

4. 计算下列各弧长: **(3) 计算星形线** $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t$ **的全长;**

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\cos t\sin t\mathrm{d}t \quad = 6a(\sin t)^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.$$

(4) 对数螺线 $\rho = e^{2\varphi}$ **上** $\varphi = 0$ **到** $\varphi = 2\pi$ **的一段弧;**

解 $s = \int_0^{2\pi}\sqrt{e^{4\varphi}+4e^{4\varphi}}\mathrm{d}\varphi = \sqrt{5}\int_0^{2\pi} e^{2\varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi}-1).$

(5) 在摆线 $x = a(t-\sin t)$ **,** $y - a(1-\cos t)$ **上求分摆线第一拱成** 1:3 **的点的坐标.**

解 第一拱总长为

$$s=\int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=8a.$$

设点 $M(x_0,y_0)$ 为摆线第一拱弧长为 1∶3，显然 $\overset{\frown}{OM}=2a$，即

$$2a\int_0^{t_0}\sin\frac{t}{2}dt=2a,$$

求得 $t_0=\frac{2}{3}\pi$. 于是 $x_0=a(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2})$，$y_0=\frac{3}{2}a$.

所求点为 $\left[a(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}),\frac{3}{2}a\right]$.

6. 已知 $y=a\sqrt{x}(a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0,y_0) 处有公切线,求

(1) 常数 a 的值及切点 (x_0,y_0);

(2) 两曲线与 x 轴围成的在 x 轴上方的图形面积.

解 (1)分别对 $y=a\sqrt{x}$ 和 $y=\ln\sqrt{x}$ 求导，得

$$y'=\frac{a}{2\sqrt{x}} \text{和} y'=\frac{1}{2x}.$$

由于两曲线在 (x_0,y_0) 处有公切线，可见

$$\frac{a}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2x_0}，\text{得 } x_0=\frac{1}{a^2};$$

将 $x_0=\frac{1}{a^2}$ 分别代入两曲线方程，有

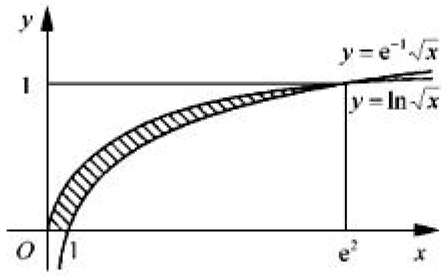

图 599

$$y_0=a\sqrt{\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{a^2}.$$

于是 $a=\frac{1}{e}$；$x_0=\frac{1}{a^2}=e^2$，$y_0=a\sqrt{x_0}=\frac{1}{e}\cdot\sqrt{e^2}=1$. 从而切点为 $(e^2,1)$.

(2)两曲线与 x 轴围成的平面图形的面积

$$S=\int_0^1(e^{2y}-e^2y^2)dy=\frac{1}{2}e^{2y}\Big|_0^1-\frac{1}{3}e^2y^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}e^2-\frac{1}{2}.$$

7. 半径等于 r **m** 的半球形水池，其中充满了水，把池内的水完全吸尽，需做多少功？（水的密度 $\rho=1000kg/m^3$，设重力加速度为 g）

解法一 建立坐标系如图 631(1)所示.

$$W=1000\pi g\int_r^0(r-h)[r^2-(r-h)^2]\mathrm{d}h$$

$$=1000\pi g\int_r^0[r^2(r-h)-(r-h)^3]\mathrm{d}h$$

$$=1000\pi g\cdot\left[-\frac{r^2}{2}(r-h)^2+\frac{1}{4}(r-h)^4\right]\Bigg|_r^0$$

$$=250\pi g r^4.$$

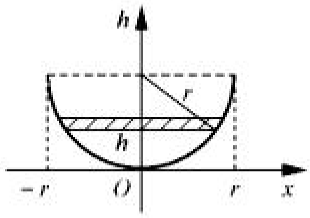

图 631(1)

解法二 建立坐标系如图 631(2)所示.

$$W=1000\pi g\int_0^r(r^2-h^2)h\mathrm{d}h$$

$$=1000\pi g\cdot\left(\frac{r^2}{2}h^2-\frac{h^4}{4}\right)\Bigg|_0^r$$

$$=250\pi g r^4.$$

故吸尽池内的水作的功为 $250\pi g r^4$(J).

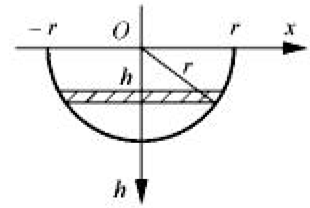

图 631(2)

9. 一底为 8cm,高为 6cm 的等腰三角形片，铅直地沉没在水中，顶在上，底在下且与水面平行，而顶离水面 3cm，试求它每面所受的压力（设重力加速度为 g）.

解 所受压力 $F=g\int_0^6(3+x)\cdot\frac{4}{3}x\mathrm{d}x=g\int_0^6\left(4x+\frac{4}{3}x^2\right)\mathrm{d}x=g\left(2x^2+\frac{4}{9}x^3\right)\Big|_0^6=168\mathrm{g}.$

或 0.168N.

12. 某闸门的形状与大小如图 **4.3.18** 所示，其中直线 l 为对称轴，闸门的上部为矩形 ABCD，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成.当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5:4，闸门矩形部分的高 h 应为多少米？

解法一 建立坐标系如图 635(1)所示，则抛物线的方程为

$$y=x^2,$$

闸门矩形部分承受的水压力

$$P_1=2\int_1^{h+1}\rho g(h+1-y)\mathrm{d}y$$

$$=2\rho g\left[(h+1)y-\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_1^{h+1}=\rho g h^2,$$

其中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度.

闸门下部承受的水压力

$$P_2=2\int_0^1\rho g(h+1-y)\sqrt{y}\mathrm{d}y$$

$$=2\rho g\left[\frac{2}{3}(h+1)y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]\Bigg|_0^1=4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right).$$

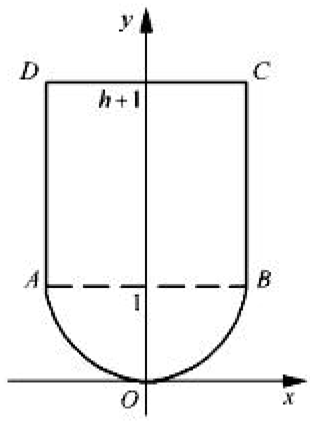

图 635(1)

由题意知

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{5}{4},\quad 即\quad \frac{h^2}{4(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15})}=\frac{5}{4},$$

解之得 $h=2, h=-\frac{1}{3}$(舍去)，故 $h=2$.

即闸门矩形部分的高应为 2m.

解法二 建立坐标系如图 635(2)所示，则抛物线方程为

$$x=h+1-y^2.$$

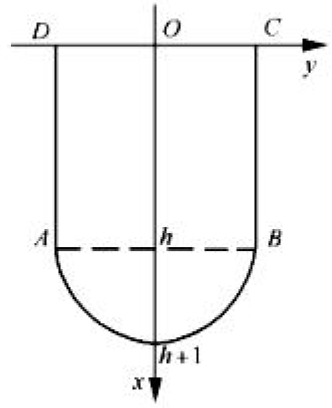

图 635(2)

闸门矩形部分承受的水压力为 $P_1=2\int_0^h \rho g x\mathrm{d}x=\rho g h^2$,

闸门下部承受的水压力为 $P_2=2\int_h^{h+1}\rho g x\sqrt{h+1-x}\mathrm{d}x$.

设 $\sqrt{h+1-x}=t$，得

$$P_2=4\rho g\int_0^1(h+1-t^2)t^2\mathrm{d}t=4\rho g\left[(h+1)\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]\Big|_0^1=4\rho g(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}).$$

以下同解法一.

13. 设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a\quad(0<a<2), x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域；D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0, x=a$ 所围成的平面区域.

(1) 求 D_2 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1, D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2；

(2) 当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？并求此最大值.

解 (1)如图 624.

$$V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{5}(32-a^5);$$

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\mathrm{d}y=2\pi a^4-\pi a^4=\pi a^4.$$

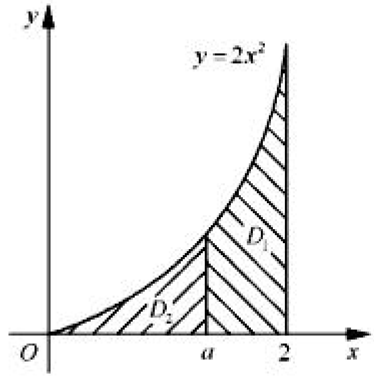

图 624

(2) 设 $V=V_1+V_2=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4$. 由

$$V'=4\pi a^3(1-a)=0,$$

得区间(0,2)内的唯一驻点 $a=1$.

当 $0<a<1$ 时，$V'>0$；当 $a>1$ 时，$V'<0$.

因此 $a=1$ 是极大值点即最大值点. 此时，V_1+V_2 取得最大值，等于 $\frac{129}{5}\pi$.