第 4 章

P153 习题 4.1

7. 计算下列有理函数积分：

（1）$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$；（2）$\int\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x+1)}\mathrm{d}x$；（3）$\int\frac{1}{x^2+2x+3}dx$.

(1) 解：设 $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$ 消去分母后，得 $1=A(x^2+1)+(Bx+C)\cdot x$

展开并比较两端 x的同次幂的系数，有 A＋B＝0 C＝0 A＝1

于是 A＝1，B＝－1，C＝0

于是有 $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$

所以 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C=\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+C$

(2) 解：$\int\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2-1+2}{(x^2-1)(x+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x+2\int\frac{1}{(x^2-1)(x+1)}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x+2\int\frac{1}{(x-1)(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int(\frac{1}{x-1}-\frac{x+3}{(x+1)^2})\mathrm{d}x$$

$$=\ln(x+1)+\frac{1}{2}\int(\frac{1}{x-1}-\frac{x+1+2}{(x+1)^2})\mathrm{d}x=\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+C$$

$$=\ln\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x+1}+C$$

(3) 解：$\int\frac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$

8. 求 $\int|x|\mathrm{d}x$.

解：$|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ 0, & x=0\\ x, & x>0\end{cases}$

$x\le 0$时，$\int|x|\mathrm{d}x=\int(-x)\mathrm{d}x=-\frac{x^2}{2}+C_1$； $x>0$时，$\int|x|\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+C_2$

由连续性知：$\lim\limits_{x\to0^-}(-\frac{x^2}{2}+C_1)=\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{x^2}{2}+C_2)$ 得$C_1=C_2$，记为C

$$\therefore\int|x|\mathrm{d}x=\begin{cases}-\frac{x^2}{2}+C, & x\le 0\\ \frac{x^2}{2}+C, & x>0\end{cases}$$

9. 用合适的方法求下列不定积分：

（1）$\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　　　　（2）$\displaystyle\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$；

（3）$\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$；　　　　（4）$\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2}e^x\mathrm{d}x$.

(1) 解: $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int \arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x} = 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} - 2\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}(\arcsin\sqrt{x})$

$$= 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} - 2\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} - \int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$$

$$= 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C$$

(2) 解: $\displaystyle\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x = 2\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x}) = (\arctan\sqrt{x})^2 + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x - \int \frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x - \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2}\left[\int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} - \int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}\right]$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C$$

(4) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\frac{1}{x} = \int \frac{1}{x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + \mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{x} - \int \frac{1}{x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{x} + C$

10. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$，求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

解：$\displaystyle\int xf'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f'(x)\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}f'(x)\cdot x^2 - \frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}\,f'(x)$

已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$

则 $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$　　$f'(x) = \dfrac{2-2\ln x}{x^2}$ 代入得

$\int xf'(x)\mathrm{d}x = 2\ln x - \ln^2 x + C$

11. 已知 $\int xf(x)\mathrm{d}x = \arcsin x + C$，求 $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$.

解:$\int xf(x)\mathrm{d}x = \arcsin x + C$，则$xf(x) = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

则$f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x = \int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

12. 设 $f(\ln x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$，计算 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解：已知$f(\ln x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

令 $\ln x = t$，则$x = e^t$，则$f(x) = \dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}\mathrm{d}x = \int \ln(1+e^x)\cdot e^{-x}\mathrm{d}x = -\int \ln(1+e^x)\mathrm{d}e^{-x}$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x = -e^{-x}\ln(1+e^x) + x - \int \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C$$

13. 设 $f(\sin^2 x) = \dfrac{x}{\sin x}$，求 $\int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)\mathrm{d}x$.

解：设 $\sin^2 x = t$ 则 $\sin x = \sqrt{t}$ $f(t) = \dfrac{\arcsin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$$

设 $t = \arcsin\sqrt{x}$ 则$\sqrt{x} = \sin t$

上式为 $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\mathrm{d}\sin^2 t = \int \frac{t\cdot 2\sin t\cos t}{\cos t}\mathrm{d}t = 2\int t\sin t\mathrm{d}t$

$$= -2\int t\mathrm{d}\cos t = -2(t\cos t - \int \cos t\mathrm{d}t) = -2t\cos t + 2\sin t + \mathrm{C}$$

$$= -2(\arcsin\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x} - \sqrt{x}) + \mathrm{C}$$

P173 习题 4.2

6. 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1, \\ 2+x & 1 < x \le 2, \end{cases}$$

求积分上限函数 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在[0,2]上的表达式.

解：若 $0\le x\le 1$ 则 $\varphi'(x)=f(x)=2x \quad \therefore \varphi(x)=x^2$

若 $1\le x\le 2$ 则 $\varphi(x)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=x^2\Big|_0^1+(\frac{t^2}{2}+2t)\Big|_1^x=-\frac{3}{2}+2x+x^2$

$$\therefore \varphi(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 1 \\ -\frac{3}{2}+2x+\frac{x^2}{2} & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

8. 求下列极限：（4） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{1-\cos x+x\sin x}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\arctan(1+x^2)}{\sin x+x\cos x+\sin x}$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(1+x^2)}{2\frac{\sin x}{x}+\cos x}=\dfrac{2\cdot\frac{\pi}{4}}{3}=\dfrac{\pi}{6}$.

12. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$. 证明存在一点 $\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$，由最值定理，知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 和最小值 m，即 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，故

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),$$

$$\int_a^b mg(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x,\quad m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\leqslant M.$$

由介值定理知，存在 $\xi\in[a,b]$，使

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x},\quad \text{即}\quad \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

14. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}, x\in[a,b].$$

证明：(2)方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根

解 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$，

$$F(a)=\int_b^a \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=-\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0,\quad F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0.$$

根据零点定理知，在 (a,b) 内至少存在一个根.

又因为 $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geqslant 2>0$，即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 内单调. 所以 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内有且只有一个根.

15. 设 $f(x)$ 是以 l 为周期的连续函数，证明 $\int_a^{a+l} f(x)\mathrm{d}x$ 的值与 a 无关.

解法一：$\int_a^{a+l} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^l f(x)\mathrm{d}x+\int_l^{a+l} f(x)\mathrm{d}x.$

令 $x=t+l$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t; x=l,\Rightarrow t=0; x=a+l,\Rightarrow t=a$

$\Rightarrow \int_l^{a+l} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(t+l)\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$

$\therefore \int_a^{a+l} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^l f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_a^l f(x)\mathrm{d}x=\int_0^l f(x)\mathrm{d}x$

解法二：只需证 $\int_l^{a+l} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^l f(x)\mathrm{d}x.$

$\because \int_a^{a+l} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^l f(x)\mathrm{d}x+\int_l^{a+l} f(x)\mathrm{d}x$

且 $\int_l^{a+l} f(x)\mathrm{d}x \overset{\text{设}x=t+l}{=} \int_0^a f(t+l)\mathrm{d}t \overset{f(x)\text{是周期函数}}{=} \int_0^a f(t)\mathrm{d}t$

$\therefore \int_a^{a+l} f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^l f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^l f(x)\mathrm{d}x.$

16. 求下列定积分：（5）$\int_1^e \sin(\ln x)\mathrm{d}x$；

解：设$\ln x = t$　则$x = e^t$　$\mathrm{d}x = e^t \mathrm{d}t$

当　$x=1$时，$t=0$　$x=e$时，$t=1$

$$\int_1^e \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin t \cdot e^t \mathrm{d}t = \int_0^1 \sin t \mathrm{d}e^t = \sin t e^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t \mathrm{d}\sin t$$

$$= e\sin 1 - \int_0^1 e^t \cos t \mathrm{d}t = e\sin 1 - \int_0^1 \cos t \mathrm{d}e^t = e\sin t - e^t \cos t\Big|_0^1 + \int_0^1 e^t \mathrm{d}\cos t$$

$$= e\sin 1 - e\cos 1 + 1 - \int_0^1 e^t \sin t \mathrm{d}t$$

移项得：

$$2\int_0^1 e^t \sin t \mathrm{d}t = e\sin 1 - e\cos 1 + 1$$

$$\therefore \int_1^e \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{e\sin 1 - e\cos 1 + 1}{2}$$

17. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^x}, & x<0, \\ \dfrac{1}{1+x}, & x \geq 0, \end{cases}$ **求** $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$**.**

解：设$x-1=t$

$$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t \overset{t=x}{=} \int_{-1}^0 \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x + \ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$= \int_{-1}^0 \mathrm{d}x - \int_{-1}^0 \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x + \ln 2 = 1 - \ln(1+e^x)\Big|_{-1}^0 + \ln 2 = 1 + \ln 2 - \ln 2 + \ln(1+e^{-1})$$

$$= 1 + \ln(1+e^{-1}) = \ln(1+e)$$

18. 求下列极限：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$**；**

（2） $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$**.**

(1)解：根据定积分的定义可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right) = \int_0^1 \sqrt{1+x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}}-1)$$

(2) $0 < \dfrac{x^n}{1+x} < x^n \Rightarrow 0 < \int \dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x < \int x^n \mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1}$

再使用夹逼准则

得到$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = 0$.

19. 求下列各题：

（1） $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin(x-t)^2\mathrm{d}t$；

（2）设 $f(x)$ **有一个原函数** $\dfrac{\sin x}{x}$**，求** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)\mathrm{d}x$；

（3） $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$.

(1)解: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin(x-t)^2\,\mathrm{d}t \overset{x-t=\mu}{=} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^0 \sin\mu^2\mathrm{d}\mu = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin\mu^2 d\mu = \sin x^2$

(2)解：$f(x) = (\dfrac{\sin x}{x})' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\mathrm{d}f(x) = xf(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = x\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{\sin x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{x\cos x-\sin x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{-\pi}{\pi} - \frac{-1}{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi} - 1$$

(3)解: $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x$

设 $x-1=\sin t$, 则 $x=\sin t+1$　$\mathrm{d}x = \cos t\mathrm{d}t$

当 $x=0$ 时，$t=-\dfrac{\pi}{2}$　$x=1$ 时，$t=0$

原式 $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos t\cdot\sin t\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 t\mathrm{d}t$

设 $t=\alpha-\dfrac{\pi}{2}$　　原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\alpha-\dfrac{\pi}{2})\mathrm{d}\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha\mathrm{d}\alpha = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4}$

20. 已知 $f(x)$ **连续，** $\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t = 1-\cos x$**，求** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ **的值.**

解：设 $x-t=u$

$$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t = -\int_x^0 (x-u)f(u)\mathrm{d}u = \int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u = \int_0^x xf(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$$

由已知得：$\int_0^x xf(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u = 1-\cos x$

两边求导得: $\int_0^x f(u)\mathrm{d}u + xf(x) - xf(x) = \sin x$

整理得：　$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = \sin x$

两边再求导得：$f(x) = \cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

21. 设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t|\mathrm{d}t$，

（1）当 n **为正整数，且** $n\pi \le x < (n+1)\pi$ **时，证明：** $2n \le S(x) < 2(n+1)$；

（2）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

解 (1) 因为 $|\cos x|\ge 0$, 且 $n\pi\le x<(n+1)\pi$, 所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x\le S(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x$$

又因为 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的函数, 在每个周期上积分值相等, 所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=2n,\quad \int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=2(n+1),$$

因此当 $n\pi\le x<(n+1)\pi$ 时, 有 $2n\le S(x)<2(n+1)$.

(2) 由(1)知, 当 $n\pi\le x<(n+1)\pi$ 时, 有 $\dfrac{2n}{(n+1)\pi}<\dfrac{S(x)}{x}<\dfrac{2(n+1)}{n\pi}$,

令 $x\to+\infty$, 由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}=\dfrac{2}{\pi}$.

22. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x$.

证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

证 由积分中值定理，得 $f(1)=e^{1-\xi_1^2}f(x),\ \xi_1\in[0,\dfrac{1}{3}]$

令 $F(x)=e^{1-x^2}f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[\xi_1,1]$ 上连续，在 $(\xi,1)$ 内可导，且

$F(1)=f(1)=e^{1-\xi_1^2}f(\xi_1)=F(\xi_1)$,

由罗尔定理，在 $(\xi_1,1)$ 内至少有一点 ξ，使得

$F'(\xi)=e^{1-\xi^2}[f'(\xi)-2\xi f(\xi)]=0$,

于是 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$, $\xi\in(\xi,1)\subset(0,1)$.

23. 已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同，写出此切线方程，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

解 由已知条件得 $f(0)=0$, $f'(0)=\dfrac{e^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2}\Big|_{x=0}=1$, 故所求切线方程为 $y=x$.

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2.$$