学院专业班级　　学号姓名

密　封　线

山东大学 2017--2018 学年上学期高等数学（1）课程试卷评分标准

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人
得分												

得分	阅卷人

一、填空题（本大题包含 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）。

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的 $\varepsilon-\delta$ 的定义是 _ $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 总有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ _.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=$ _ 0 _ .

3. 函数 $\ln(1+x)$ 的带佩亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式是 $x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$, $(x\to 0)$.

4. $\int\dfrac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx=\dfrac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$

5. 方程 $y'+2y=1$ 的通解为 $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{2}$.

$1-2y=Ce^x$.

$1=Ce^x=2y$

得分	阅卷人

二、选择题(请将答案写入下面每题的空格里。本大题包含 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）。

1.D　2. A　3. B　4. D　5. D

1. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{1+nx^2}$ 在 $x=0$

A. 连续. B. 是可去间断点.
C. 是跳跃间断点.　　D. 是第二类间断点.

2. 设当 $x\to 0$ 时, $\sqrt{1+x}-(1+ax+bx^2)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 则

A. $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{8}$.　B. $a=0, b=1$.　C. $a=\frac{1}{2}, b=1$.　D. $a=1, b=-\frac{1}{8}$.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶导数存在, 且 $f'(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x^2}=1$, 则

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

C. $(0,f(0))$ 是 $f(x)$ 的拐点.

D. $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0,f(0))$ 也不是 $f(x)$ 的拐点.

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 则下列论断不正确的是

A. 变上限积分函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

B. $f(x)$ 的两个原函数之差为常量函数.

C. $f(x)$ 的任意两个原函数之和必为 $2f(x)$ 的原函数.

D. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $G(u)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数, 则 $G(F(x))$ 必为 $G(f(x))$ 的原函数.

5. 令 $f(x)=x^3(1-x)^3$, 则 $f'''(x)$ 在 $(0,1)$ 内的零点个数为

A. 0.　B. 1.　C. 2.　D. 3.

得分	阅卷人

三、计算题(本大题包含 8 小题，前两小题每题 5 分，后六小题每题 6 分，共 46 分。请写出解答步骤)。

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$.

解

原式 $=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^2$ ……………………………………(3 分)

$=e^2$ ……………………………………………………(5 分)

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

解利用 Taylor 公式,

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{sinx-x}{x^2sinx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-x}{x^2(x+o(x))}$$ ……(3 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}$$

$$=-\frac{1}{6}$$ ……(5 分)

也可利用 L'Hospital 法则.

3. 求函数 $y=\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$ 的微分.

解直接求导,得

$$dy=\frac{\frac{\frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}-(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2}}{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}}dx$$ ……(3 分)

$$=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$$ ……(6 分)

也可利用微分形式的不变性.

4. 求高阶导数 $(x^2\sin 2x)^{(9)}\big|_{x=0}$.

解利用 Taylor 展开, 得

$$x^2sin2x=2x^3-\frac{2^3x^5}{3!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{2^{2m-1}x^{2m+1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m+2}),$$ ……(3 分)

所以, $\frac{(x^2\sin2x)^{(9)}|_{x=0}}{9!}=(-1)^{4-1}\frac{2^7}{7!}$, 由此得, $(x^2\sin2x)^{(9)}|_{x=0}=-9\cdot2^{10}$ ……(6 分)

9216

也可利用 Leibnitz 公式, 先求出 $(x^2\sin2x)^{(9)}$.

5. 计算不定积分 $\int\arctan\sqrt{x}dx$.

解利用分部积分及凑微分,得

$$原式=x\arctan\sqrt{x}-\int xd\arctan\sqrt{x}$$

$$=x\arctan\sqrt{x}-\int\frac{x}{1+x}d\sqrt{x}$$ ……(3 分)

$$=x\arctan\sqrt{x}-\int(1-\frac{1}{1+x})d\sqrt{x}$$

$$=x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+arctan\sqrt{x}+C$$ ……(6 分)

也可利用分部积分及换元积分法.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, x<0\\ e^{-x}, x\ge 0\end{cases}$, 计算定积分 $\int_1^3 f(x-2)dx$.

解

$$\int_1^3 f(x-2)dx\overset{t=x-2}{=}\int_{-1}^1 f(t)dt$$

$$=\int_{-1}^0(1+t^2)dt+\int_0^1 e^{-t}dt$$ ……(3 分)

$$=(t+\frac{t^3}{3})\Big|_{-1}^0-e^{-t}\Big|_0^1$$

$$=\frac{7}{3}-\frac{1}{e}$$ ……(6 分)

也可先计算 f(x-2), 后积分.

7. 求初值问题 $\begin{cases}xy'-\sqrt{x^2-y^2}=y\\ y|_{x=1}=0\end{cases}$ 的解.

解

原微分方程可化为

$$\frac{xdy-ydx}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x^2}dx$$

即

$$\frac{d(\frac{y}{x})}{\sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}}=\frac{sgn(x)}{x}dx$$

所以有

$$\arcsin\frac{y}{x}=sgn(x)ln|x|+C$$ ……(5 分)

特解为 $\arcsin\frac{y}{x}=sgn(x)ln|x|$ ……(6 分)

学院专业级 学号姓名 密 封 线

也可用常规方法化为齐次微分方程

8. 求微分方程 $y''-2y'+y=x(1+2e^x)$ 的通解.

解

对应的齐次线性方程的特征方程为 $r^2-2r+1=0$，特征根为 $r_{1,2}=1$

对应的齐次方程的通解为 $\bar{y}=(c_1x+c_2)e^x$……………………………………(3 分)

对应于自由项 x 的特解 $y_1^*=x+2$

对应于自由项 $2xe^x$ 的特解为 $y_2^*=\frac{1}{3}x^3e^x$

原方程通解为 $y=\bar{y}+y_1^*+y_2^*=(c_1x+c_2)e^x+x+2+\frac{1}{3}x^3e^x$……………………(6 分)

得分	阅卷人

四、综合题(本大题包含 2 小题，第一小题 8 分，第二小题 6 分，共 14 分,请写出解答步骤)。

1. 设一容器是由曲线 $x=1+0.5y-\sin y$（$0\le y\le 4\pi$ 米）绕 y 轴旋转而成的旋转体，现向此空容器中以每分钟 1 m^3 的速度向里注水，问何时水面上升的速度最慢？何时注满水？

解

容器由底面到高为 y 的容积

$$V(y)=\int_0^y \pi x^2dy=\int_0^y \pi(1+0.5y-\sin y)^2dy$$

$$=\pi\left(\frac{3}{2}y+\frac{1}{12}y^3+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{4}\sin 2y+2\cos y+y\cos y-\sin y-2\right)$$

t 分钟后注水的体积 V(y), $t=V(y)$，$V'(y)=\pi(1+0.5y-\sin y)^2$,

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\frac{dV}{dy}}=\frac{1}{\pi(1+0.5y-\sin y)^2}$$

……………………………………………………………(4 分)

求 $f(y)=1+0.5y-\sin y$ 在 $[0,4\pi]$ 的最大值

$$f'(y)=\frac{1}{2}-\cos y=0,\ y=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3},\frac{11\pi}{3}$$

$f_{max}=\max\{f\left(\frac{\pi}{3}\right),f\left(\frac{5\pi}{3}\right),f\left(\frac{7\pi}{3}\right),f\left(\frac{11\pi}{3}\right),f(0),f(4\pi)\}=f\left(\frac{11\pi}{3}\right)=1+\frac{11\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，即注水到高为 $\frac{11\pi}{3}$ 时水面上升的速度最慢。

注满水用的时间为 $t=$ V（4π）=π（$10\pi+\frac{16}{3}\pi^3+8\pi^2$）分钟…………………(8 分)

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且满足 $f'(x)>f(x)+e^x, f(0)=1$，证明对任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)>(1+x)e^x$.

题目写的有问题. ∵试卷上是: $x\in[0,+\infty)$ ∴应为: $f(x)\geq(1+x)e^x$.

证

由 $f'(x)>f(x)+e^x$ 可得

$$-e^{-x}f(+e^{-x}f'(x)>1,$$

即 $(e^{-x}f(x))'>1$……………………………………………………(3 分)

当 x>0 时，

$$\int_0^x (e^{-t}f(t))'dt>x$$

即 $e^{-x}f(x)-f(0)>x$,

所以 $f(x)>(1+x)e^x$ …………………………………………………………(6 分))

另解 设. $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}-1-x,\quad x\geq 0$

$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}-1>\frac{f(x)+e^x-f(x)}{e^x}-1=0.$

∴ $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单增,

~~又 g(0)~~ ∴ $x\geq 0$ 时. $g(x)\geq g(0)=0.$

∴ $x\geq 0$ 时. $\frac{f(x)}{e^x}\geq 1+x.$

② 设. $F(x)=f(x)-(1+x)e^x,\ x\geq 0$

$F'(x)=f'(x)-e^x-(1+x)e^x>f(x)+e^x-2e^x-xe^x$

$=f(x)-e^x-xe^x=f(x)-(1+x)e^x=F(x).$

~~$\therefore F'(0)>F(0)=f(0)-e^0=0$~~

i.e. $F'(x)>F(x)$

令 $G(x)=e^{-x}F(x).\Rightarrow G'(x)>0.\ \therefore x>0\Rightarrow G(x)>G(0)=0.$

i.e. $e^{-x}(f(x)-(1+x)e^x)>0$ ∴ $f(x)>(1+x)e^x$

学院专业级 学号姓名

密 封 线