第 5 章

P205 习题 5.2

4. 求下列初值问题的解:

(3) $\begin{cases}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx - xdy = 0, (x>0), \\ y|_{x=1}=0 \quad .\end{cases}$

解 原方程可化为$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$. 令 $y=xu$, 得

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\sqrt{1+u^2}, \quad 即 \quad \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x},$$

解得 $\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln(Cx)$, 其中 $C>0$ 为任意常数, 从而

$$u+\sqrt{1+u^2}=Cx, \quad 即 \quad \frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=Cx,$$

亦即 $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$.

将 $y|_{x=1}=0$ 代入, 得 $C=1$, 故初值问题的解为 $y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2$.

化简得 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$.

6. 设有微分方程 $y'-2y=\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)=\begin{cases}2, & x<1, \\ 0 & x>1.\end{cases}$ 试求在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=y(x)$,使之在 $x\neq 1$ 的区间内都满足方程,且 $y(0)=0$.

解 当 $x<1$ 时, 有 $y'-2y=2$, 其通解为

$$y=e^{\int 2dx}\left[\int 2e^{-\int 2dx}dx+C_1\right]=e^{2x}\left[\int 2e^{-2x}dx+C_1\right]=C_1e^{2x}-1 \quad (x<1).$$

由 $y(0)=0$, 得 $C_1=1$, 所以

$$y=e^{2x}-1 \quad (x<1).$$

当 $x>1$ 时, 有 $y'-2y=0$, 其通解为

$$y=C_2e^{\int 2dx}=C_2e^{2x} \quad (x>1).$$

由 $\lim\limits_{x\to 1^+}C_2e^{2x}=\lim\limits_{x\to 1^-}(e^{2x}-1)=e^2-1$ 得

$$C_2e^2=e^2-1, \quad 即 \quad C_2=1-e^{-2},$$

所以

$$y=(1-e^{-2})e^{2x} \quad (x>1).$$

于是, 若补充定义函数值 $y\big|_{x=1}=e^2-1$, 则得在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数

$$y(x)=\begin{cases}e^{2x}-1, & 若\ x\leqslant 1, \\ (1-e^{-2})e^{2x}, & 若\ x>1.\end{cases}$$

显然, $y(x)$ 满足题中所要求的全部条件.

P217 习题 5.3

2. 求下列初值问题的解:

(4) $(1+x^2)y''=2xy',\ y(0)=1,\ y'(0)=3.$

解 设 $y'=p$,则 $y''=\dfrac{dp}{dx}=p'$,代入方程 $(1+x^2)y''=2xy'$ 中可得

$$(1+x^2)\frac{dp}{dx}=2xp.$$

分离变量并两端积分可得

$$\int\frac{1}{p}dp=\int\frac{2x}{1+x^2}dx+C,\quad 即\quad \ln p=\ln(1+x^2)+C,$$

也即 $y'=p=C_1(1+x^2)$,其中 $C_1=e^C$.代入 $y'\big|_{x=0}=3$,则得 $C_1=3$,从而 $y'=p=3(1+x^2)$.

两端再积分 $y=3\int(1+x^2)dx=x^3+3x+C_2$,代入 $y\big|_{x=0}=1$,则得 $C_2=1$.

故原方程的特解为 $y=x^3+3x+1$.

8. (1) 设 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$ 为某二阶常系数齐次微分方程的通解, 求此微分方程;

解 由通解形式知该微分方程的特征根为 $r=1\pm i$,从而特征方程为 $r^2-2r+2=0$,微分方程应为 $y''-2y'+2y=0$.

(2) 已知 $y_1=xe^x+e^{2x},\ y_2=xe^x-e^{-x},\ y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性常系数非齐次微分方程的三个解,求此微分方程.

解法一 由题设知,e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解,且 xe^x 是非齐次方程的一个特解,故此方程是

$$y''-y'-2y=f(x).$$

将 $y=xe^x$ 代入上式,得

$$f(x)=(xe^x)''-(xe^x)'-2xe^x=2e^x+xe^x-e^x-xe^x-2xe^x=e^x-2xe^x.$$

因此所求方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.

解法二 由题设知,e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解,且 xe^x 是非齐次方程的一个特解,故 $y=xe^x+C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$ 是所求方程的解,由

$$y'=e^x+xe^x+2C_1e^{2x}-C_2e^{-x},\qquad y''=2e^x+xe^x+4C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$$

消去 C_1,C_2 得所求方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.

9. 设函数 $f(x),g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x),g'(x)=2e^x-f(x)$,且 $f(0)=0,g(0)=2$,求

$\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx$.

解 由 $f'(x)=g(x)$ 得 $f''(x)=g'(x)=2e^x-f(x)$. 于是有

$$\begin{cases} f''(x)+f(x)=2e^x \\ f(0)=0 \\ f'(0)=2 \end{cases}$$

解之得 $f(x)=\sin x-\cos x+e^x$. 又

$$\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx=\int_0^{\pi}\frac{g(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{f'(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx=\int_0^{\pi}d\,\frac{f(x)}{1+x}$$

$$=\frac{f(x)}{1+x}\Big|_0^{\pi}=\frac{f(\pi)}{1+\pi}-f(0)=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}.$$

P227 习题 5.5

5. 一个半球体状的雪堆,其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比,比例常数 $k>0$.假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状.已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内,融化了其体积的 $\frac{7}{8}$,问雪堆全部融化需要多少小时?

解法一:设雪堆在时刻 t 的体积 $V=\frac{2}{3}\pi r^3$,半球面面积 $S=2\pi r^2$,由题设知

$$\frac{dV}{dt}=2\pi r^2\frac{dr}{dt}=-KS=-2\pi Kr^2,$$

于是 $\frac{dr}{dt}=-K.$

积分得 $r=-Kt+C$, 由 $r|_{t=0}=r_0$,

有 $r=r_0-Kt$

又 $V\Big|_{t=3}=\frac{1}{8}V\Big|_{t=0}$,

即 $\frac{2}{3}\pi(r_0-3K)^3=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\pi r_0^3$

这样 $K=\frac{1}{6}r_0$, 从而 $r=r_0-\frac{1}{6}r_0t$

因雪堆全部融化时 $r=0$,故得 $t=6$,

即雪堆全部融化需 6 小时.

解法二：设雪堆在时刻 t 的体积 $V=\frac{2}{3}\pi r^3$，半球面面积 $S=2\pi r^2$，从而 $S=\sqrt[3]{18\pi V^2}$.

由题设知 $\frac{dV}{dt}=-KS=-\sqrt[3]{18\pi V^2}K$，

即 $\frac{dV}{\sqrt[3]{V^2}}=-\sqrt[3]{18\pi}Kdt$

积分得 $3\sqrt[3]{V}=-\sqrt[3]{18\pi}Kt+C$.

设 $V|_{t=0}=V_0$，得 $C=3\sqrt[3]{V_0}$，

故有 $3\sqrt[3]{V}=3\sqrt[3]{V_0}-\sqrt[3]{18\pi}Kt$.

又由 $V\Big|_{t=3}=\frac{1}{8}V_0$

得 $\frac{3}{2}\sqrt[3]{V_0}=3\sqrt[3]{V_0}-3\sqrt[3]{18\pi}K$，

从而 $K=\frac{\sqrt[3]{V_0}}{2\sqrt[3]{18\pi}}$，

故 $3\sqrt[3]{V}=3\sqrt[3]{V_0}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{V_0}t$.

令 $V=0$，得 $t=6$，

即雪堆全部融化需 6 小时.

6. 从船上向海中沉放某种探测仪器,按探测要求,需确定仪器的下沉深度 y **(**从海平面算起)与下沉速度 v 之间的函数关系.设仪器在重力作用下,从海平面由静止开始铅直下沉,在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用.设仪器的质量为 m，体积为 B，海水密度为 ρ，仪器所受阻力与下沉速度成正比,比例系数为 $k(k>0)$.试建立 y 与 v 所满足的微分方程,并求出 $y=y(v)$.

解 取沉放点为原点 O，Oy 轴正向铅直向下，则由牛顿第二定律得

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=mg-B\rho-kv,$$

将 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$ 代入以消去 t，得 v 与 y 之间的微分方程：

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=mg-B\rho-kv.$$

分离变量得 $\mathrm{d}y=\frac{mv}{mg-B\rho-kv}\mathrm{d}v$. 积分后得

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho-kv)+C.$$

由初始条件 $y\big|_{v=0}=0$ 定出 $C=\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho)$，故所求的函数关系式

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln\frac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}.$$