山东大学

习题5.1

1. 解

$A-\lambda I=\begin{bmatrix}3&2\\3&8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3-\lambda&2\\3&8-\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\cancel{3-\lambda}1&2&0\\3&6&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore$ 有非平凡解 $\therefore$ 是特征值

3. 解

$\begin{bmatrix}-3&1\\-3&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\29\end{bmatrix}$

$\therefore$ 不是特征向量

10. 解

$\begin{bmatrix}10&-9\\4&-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-9\\4&-6\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}6&-9&0\\4&-6&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore x_1=\frac{3}{2}x_2$

$\begin{bmatrix}x_2\cdot\frac{3}{2}\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}\vec{x_2}$

$\therefore$ 为 $\left\{\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}\right\}$

16. 解 $A-\lambda I=$

$\begin{bmatrix}-1&0&2&0\\1&-1&1&0\\0&1&-3&-4\\0&0&0&4\end{bmatrix}$

$\sim\begin{bmatrix}1&-1&1&0&0\\0&1&-3&-4&0\\0&0&0&4&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore x_4=0$

$x_2=3x_3$

$x_1=2x_3$

$\begin{bmatrix}2x_3\\3x_3\\x_3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\1\\0\end{bmatrix}x_3$

$\therefore$ 为 $\left\{\begin{bmatrix}2\\3\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

17. 解

$\begin{bmatrix}0&2-\lambda&5\\0&-\lambda&1\\0&\cancel{-2}0&\cancel{2}-\lambda\end{bmatrix}\vec{x}=\vec{0}$

$\begin{bmatrix}(2-\lambda)x_2+5x_3\\-\lambda x_2+x_3\\(-1-\lambda)x_3\end{bmatrix}=0$

$\cancel{\lambda_1=0}$ $\lambda_1=0$ $\cancel{\lambda_2=2}$ $\lambda_2=2$ $\lambda_3=-1$

19. 解：0

$\begin{bmatrix}1&2&3&0\\1&2&3&0\\1&2&3&0\end{bmatrix}$ 有非平凡解

20. 特：0 同上

特征向量：

$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$

33. 解

a) $x_{k+1} = c_1\lambda^{k+1}u + c_2\mu^{k+1}v$

$= c_1\lambda^k u\lambda + c_2\mu^k v\mu$

$= c_1\lambda^k A\vec{u} + c_2\mu^k A\vec{v}$

$= A(c_1\lambda^k\vec{u} + c_2\mu^k\vec{v})$

$= Ax_k$

b) 已证

习题 5.2

7. 解

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -4 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$\det(A-\lambda I) = (4-\lambda)(5-\lambda)+12$

令 $\det(A-\lambda I) = 0$

则 $\lambda^2-9\lambda+32=0$

λ无解，无特征值

9. 解

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 6 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$=(\lambda(\lambda-3)+6)^{(1-\lambda)} + (-1)\times 12$

$= -\lambda^3+4\lambda^2-9\lambda-6$

17. 解

$\det(A-\lambda I) = (3-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$

$\therefore$ 为 3, 1, 0, 1, 3

19. 解

由题干知，$A-\lambda I$ 的$\overset{\text{三角形}}{}$主对角线元素应为：

$\lambda_1-\lambda, \lambda_2-\lambda, \cdots, \lambda_n-\lambda$

$\therefore$ A的三角阵 主对角线元素应为

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

$\therefore \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$

20. 解

$\det(A^T-\lambda I) = \det((A-\lambda I)^T)$

$= \det(A^T-\lambda I)$

23. 解

$A = QR$

$Q^{-1}A = Q^{-1}QR = R$

$Q^{-1}AQ = RQ = A_1$

$\therefore$ A 相似于 A_1

24. 解

$\because$ A, B 相似 $\therefore$ 设 $A = QBQ^{-1}$

$\det A = \det(QBQ^{-1})$

$= \det Q \det B \det Q^{-1}$

$= \det Q \det Q^{-1} \det B$

$= \det B$

习题 5.3

3.解

$A^2=(PDP^{-1})(PDP^{-1})$

$=PD^2P^{-1}$

$A^3=PD^3P^{-1}$

$\cdots$

$A^k=PD^kP^{-1}$

$=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a^k&0\\0&b^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}a^k&0\\3a^k-3b^k&b^k\end{bmatrix}$

5.解

特征值：5，1，1.

$\lambda=5$ 时，基：$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

$\lambda=1$ 时 基：$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$

7.解

$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0\\6&-1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)=0$

$\lambda_1=1\quad\lambda_2=-1$

$\lambda=1$ 时有基 $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$

$\lambda=-1$ 时有基 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$\therefore P=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

$A=P^{-1}DP$ 验证通过

8.解

$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}5-\lambda&1\\0&5-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)^2$

$\therefore\lambda=5$，重数为2

$\lambda=5$ 时 基：$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ 维数 <2

因此不可以对角化

9.解

$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda&-1\\1&5-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(5-\lambda)+1$

$=\lambda^2-8\lambda+16=0$

解得 $\lambda=4$，重数为2

$\lambda=4$ 时 基：$\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ 维数 <2

$\therefore$ 不能 对角化

19.解

$\det(A-\lambda I)=(5-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda)$

$\lambda_1=5$（重数1）；$\lambda_2=3$（重数1）

$\lambda_3=2$（重数2）

$\lambda=5$ 时 基：$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

$\lambda=3$ 时 基：$\begin{bmatrix}3/2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

$\lambda=2$ 时 基 $\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\1\end{bmatrix}$

$\therefore P:\begin{bmatrix}1&3/2&-1&-1\\0&1&-1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad D:\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$

习题 5.4

20. 证明:

∵ A 相似于 B

∴ $A = PBP^{-1}$

$A^2 = (PBP^{-1})(PBP^{-1})$

$= PB(P^{-1}P)BP^{-1}$

$= PB^2P^{-1}$

∴ A^2 相似于 B^2

证毕.

21. 证明.

知: $B = PAP^{-1}$

$C = QAQ^{-1}$

则:

$P^{-1}BP = Q^{-1}CQ$

$B = PQ^{-1}CQP^{-1}$

$= (PQ^{-1})C\,(\cancel{Q^{-1}P})^{-1}$ PQ^{-1}

∴ B 相似于 C

22. 证:

A 可对角化且 B 相似于 A, 则

$A = PBP^{-1}$

∴ $P^{-1}AP = B$

∴ $P^{-1}A(P^{-1})^{-1} = B$

∴ B 可对角化

25. 解.

∵ A 与 B 相似

∴ $A = PBP^{-1}$

$tr A = tr\, PBP^{-1}$

$= tr\, BP^{-1}P$

$= tr B$

补充习题

3. 解

$(A-\lambda I)\vec{x} = 0$

则: $\cancel{a)\ (5I-A-\lambda I)\vec{x}}$

$\cancel{= 3I\cdot\vec{x} + (-A+\lambda I)\vec{x}}$

$\cancel{= 3I\cdot\vec{x}}$

a) $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$(5I-A)\vec{x} = 5\vec{x} - A\vec{x}$

$= 5\vec{x} - \lambda\vec{x}$

$= (5-\lambda)\vec{x}$

∴ 是特征向量, 特征值为 $(5-\lambda)$

b)

$(5I-3A+A^2)\vec{x} = 5\vec{x} - 3A\vec{x} + A^2\vec{x}$

$= 5\vec{x} - 3\lambda\vec{x} + A\lambda\vec{x}$

$= 5\vec{x} - 3\lambda\vec{x} + \lambda^2\vec{x}$

$= (5-3\lambda+\lambda^2)\vec{x}$

特征值为 $(5-3\lambda+\lambda^2)$.

57. 解：设 $\vec{x}$ 为 λ 对应的特征向量，则

$$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$$

$$P(A)=C_0I+C_1A+\cdots+C_nA^n$$

$$P(A)\vec{x}=C_0I\vec{x}+C_1A\vec{x}+\cdots+C_nA^n\vec{x}$$

$$=C_0\vec{x}+C_1\lambda\vec{x}+C_2\lambda\vec{x}A+\cdots+\cdots$$

$$=C_0\vec{x}+C_1\lambda\vec{x}+C_2\lambda^2\vec{x}+\cdots+C_n\lambda^n\vec{x}$$

$$=(C_0+C_1\lambda+\cdots+C_n\lambda^n)\vec{x}$$

$\therefore$ $\cancel{P(A)}$ $=P(\lambda)$

$\therefore P(A)$ 的一特征值为 $P(\lambda)$