Дифференциальная геометрия и топология

Часть I
Тензоры

1 Семинар 1. Определение и примеры тензоров

При работе с тензорами (если не оговорено противное) преполагается суммирование по обозначенным буквами повторяющимся верхним и нижним индексам (правило суммирования Эйнштейна).

1.1 Нахождение компонент тензоров

Задача 1.1. Найти компоненты тензора

$$T^i_j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 2, & i = j \end{cases}$$

после замены базиса с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 1.2. Найти компоненту T^{12}_1 тензора

$$T = e^1 \otimes e_2 \otimes e_2 + 2e^2 \otimes e_2 \otimes e_2$$

в базисе

$$f_1 = e_1 + 2e_2, \qquad f_2 = -e_1 - e_2.$$

Задача 1.3. Пусть T_{ijk} — кососимметричный тензор в пространстве $\mathbb{R}^3$, у которого компонента T_{123} равна 1 в базисе e_1, e_2, e_3. Вычислить его компоненты в базисе

$$f_1 = e_2 + e_3, \qquad f_2 = -e_3, \qquad f_3 = e_1.$$

1.2 Инвариантные тензоры

Определение 1. Тензор называется инвариантным, если его компоненты одинаковы во всех системах координат.

В этом разделе мы будем считать, что у поля $\mathbb{K}$, над которым рассматриваются[1] линейные пространства, $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$ (например, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

[1] Для полей конечной характеристики, например $\mathbb{Z}_2$, ответы могут быть другими.

Задача 1.4. Описать все инвариантные тензоры ранга 2.

Ответ:

- Только нулевые тензоры типа $(0,2)$ и $(2,0)$ являются инвариантными.
- Инвариантные тензоры типа $(1,1)$ — это скалярные операторы $\lambda\delta^i_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Решение: Единственные матрицы A и Q, которые удовлетворяют условиям

$$CAC^{-1} = A, \qquad \text{и} \qquad CQC^T = Q, \qquad \forall C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \tag{1}$$

это нулевая матрица $Q = 0$ и скалярная $A = \lambda E$. Действительно, для диагональных матриц

$$C = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

тождество (1) имеет вид

$$a^i_j = a^i_j \frac{\lambda_i}{\lambda_j}, \qquad q_{ij} = q_{ij}\lambda_i\lambda_j.$$

Получаем, что $Q = 0$, а A диагональна. Элементы на диагонали у A равны, т.к. она инвариантна относительно перестановки базисных векторов.

Задача 1.5. Доказать, что все ненулевые инвариантные тензоры имеют тип (p,p).

Задача 1.6. Доказать, что ненулевые инвариантные тензоры ранга ≤ 4 суть[2]

1. скаляры $c \in \mathbb{K}$;
2. скалярные операторы $\lambda\delta^i_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$;
3. и тензоры ранга 4 вида

$$\alpha\delta^{i_1}_{j_1}\delta^{i_2}_{j_2} - \beta\delta^{i_1}_{j_2}\delta^{i_2}_{j_1}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Задача 1.7. Пусть $T_{ij}v^iv^j$ — инвариант (т.е. в каждом базисе задан набор чисел T_{ij} так, что для любого вектора v число $T_{ij}v^iv^j$ не зависит от базиса). Доказать, что $T_{ij} + T_{ji}$ — тензор типа $(0,2)$.

Задача 1.8. Пусть для каждого базиса в $\mathbb{R}^n$ заданы набор чисел

$$S^1, \ldots, S^n,$$

причем для любого тензор T_i типа $(0,1)$ “свертка” S^iT_i не зависит от базиса. Доказать, что числа S^i образуют тензор типа $(1,0)$.

[2] При этом тензоры, не зависящие от каких-то своих индексов, в этом списке рассматриваются как тензоры меньшей валентности.

1.3 Тензорные поля

Пусть M — гладкое многообразие (поскольку утверждения в следующих задачах локальны, можно считать $M = \mathbb{R}^n$).

Задача 1.9. Пусть x — критическая точка гладкой функции f на M:

$$df|_x = 0.$$

Доказать, что гессиан функции

$$\operatorname{Hess} f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right),$$

является тензором типа $(0, 2)$ в точке $x \in M$ (т.е. на $T_x M$).

Задача 1.9 является частным случаем следующего общего факта.

Задача 1.10. Доказать, что если тензорное поле T типа (p, q) на многообразии M обращается в ноль в точке x:

$$T^I_J\big|_x = 0,$$

то частные производные $\dfrac{\partial T^I_J}{\partial x^k}$ образуют тензор типа $(p, q+1)$ на $T_x M$.

Замечание 1. В то же время легко видеть, что частные производные $\dfrac{\partial T^I_J}{\partial x^k}$ (ненулевого) тензорного поля T^I_J тензорным полем не являются. В дальнейшем будет изучено 2 тензорных аналога частной производной:

1. Производная Ли $L_v T$.

2. Ковариантная производная $\nabla_v T$, заданная на многообразиях с аффинной связностью ∇.

1.4 Дополнительные задачи

1.4.1 Частные производные

Задача 1.11. Пусть f — гладкая функция от переменных $x^1, \ldots, x^n$, а P — точка, в которой все ее производные до порядка $(k-1)$ включительно равны нулю. Доказать, что числа

$$A_{i_1 \ldots i_k} = \left. \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_k}} \right|_P,$$

являются компонентами некоторого тензора типа $(0, k)$.

Задача 1.12. Пусть $F(x^1, \ldots, x^n)$ — однородный многочлен степени k в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что числа

$$A_{i_1 \ldots i_k} = \frac{\partial^k F}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_k}}$$

являются компонентами тензора типа $(0, k)$.

1.4.2 Отображение тензорных пространств.

Утверждение о том, что линейные отображения

$$A : V \to V, \qquad B : V \to V^*$$

задают тензоры типа $(1,1)$ и $(0,2)$ соответственно можно немного обобщить.

Задача 1.13. Доказать, что полилинейное отображение

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q} \to V,$$

задает тензор типа $(p, q+1)$. Аналогично полилинейное отображение

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q} \to V^*,$$

задает тензор типа $(p+1, q)$.

Замечание 2. Задачу 1.13 можно использовать при доказательстве того, что тензор Римана, в каждой точке задающий полилинейное отображение

$$R_x : T_xM \times T_xM \times T_xM \to T_xM,$$

является тензором типа $(1,3)$.

Задача 1.14. Пусть $\mathcal{T}^m_n$ — пространство всех тензоров типа (m,n). Показать, что для любого линейного отображения тензорных пространств

$$F : \mathcal{T}^m_n \to \mathcal{T}^p_q$$

его компоненты в стандартном базисе образуют тензор типа $(p+n, q+m)$.

Указание: Речь идет о полилинейном отображении

$$F_T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p+n} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q+m} \to \mathbb{K},$$

которое на базисных элементах задается формулой

$$F_T\left(e^{i_1}, \dots, e^{i_{n+p}}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{m+q}}\right) =$$
$$= F\left(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_n} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_m}\right)\left(e^{i_{n+1}}, \dots, e^{i_{n+p}}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{m+q}}\right)$$

Замечание 3 (Можно ли “делить тензоры”?). Компоненты $F^{s_1\dots s_p\, j_1\dots j_n}_{t_1\dots t_q\, i_1\dots i_m}$ тензора из Задачи 1.14 задаются формулой

$$F(T)^{s_1\dots s_p}_{t_1\dots t_q} = \sum_{i_\alpha, j_\beta} F^{s_1\dots s_p\, j_1\dots j_n}_{t_1\dots t_q\, i_1\dots i_m} T^{i_1\dots i_m}_{j_1\dots j_n}$$

Несложно доказать даже чуть более общее утверждение: *если для каждого базиса задан набор чисел*

$$B^{s_1\dots s_p\, j_1\dots j_n}_{t_1\dots t_q\, i_1\dots i_m}$$

и для любого тензора $C \in \mathcal{T}^{m+k}_{n+l}$ “свертка”

$$A^{s_1\dots s_p\, u_1\dots u_k}_{t_1\dots t_q\, v_1\dots v_l} = \sum_{i_\alpha, j_\beta} B^{s_1\dots s_p\, j_1\dots j_n}_{t_1\dots t_q\, i_1\dots i_m} C^{i_1\dots i_m\, u_1\dots u_k}_{j_1\dots j_n\, v_1\dots v_l}$$

является тензором типа $(p+k, q+l)$, то набор чисел

$$B^{s_1\dots s_p\, j_1\dots j_n}_{t_1\dots t_q\, i_1\dots i_m}$$

задает тензор типа $(p+n, q+m)$.

1.5 Теоретический материал

1.5.1 Понятие тензора

Определение 2. Тензор T типа (p,q) на линейном пространстве V над полем $\mathbb{K}$ — это полилинейное отображение

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{q} \to \mathbb{K}.$$

Число $r = p + q$ называется валентностью или рангом[3] тензора T.

Примеры тензоров:

0. Тензор типа $(0,0)$ — скаляр $c \in \mathbb{K}$.
1. Тензор типа $(1,0)$ — вектор $v : V^* \to \mathbb{K}$.
2. Тензор типа $(0,1)$ — ковектор $\alpha : V \to \mathbb{K}$.
3. Тензор типа $(0,2)$ — билинейная форма $B : V \times V \to \mathbb{K}$.
4. Тензор типа $(2,0)$ — билинейная форма на V^*, т.е. $Q : V^* \times V^* \to \mathbb{K}$.
5. Тензор типа $(1,1)$ — линейный оператор $A : V^* \times V \to \mathbb{K}$.
6. Линейная форма объема на линейном пространстве V^n

   $$\Omega : \underbrace{V^n \times \dots \times V^n}_{n} \to \mathbb{K}$$

   является (абсолютно кососимметричным) тензором типа $(0,n)$ на V^n.

Замечание 4. Для любых линейных пространств V и W (над одним полем $\mathbb{K}$) задание билинейного отображения

$$P : V \times W \to \mathbb{K}$$

эквивалентно заданию линейного отображения

$$\hat{P} : V \to W^*.$$

Отображения P и $\hat{P}$ связаны формулой

$$P(v,w) = \hat{P}(v)(w), \qquad \forall v \in V, w \in W.$$

Поэтому для конечномерных пространств V существует два эквивалентных способа задания линейных операторов:

$$A : V \to V \qquad \leftrightsquigarrow \qquad \hat{A} : V^* \times V \to \mathbb{K}.$$

Замечание 5. Мы будем обычно рассматривать тензоры на конечномерных вещественных или комплексных пространствах (т.е. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). В дифференциальной геометрии тензоры обычно заданы на касательных пространствах к многообразиям.

[3] Термин “ранга” не очень удачен — для билинейных форм и операторов нужно отличать ранг тензора и ранг соответствующей матрицы.

1.5.2 Компоненты тензора

Введём естественный базис в пространстве тензоров. Пусть

- $e_1, \dots, e_n$ — базис V,
- $x^1, \dots, x^n$ — соответствующие (линейные) координаты[4] на V,
- $e^1, \dots, e^n$ — двойственный базис V^*, т.е.

$$e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Любой тензор задается набором из n^{p+q} своих компонент — значений на всевозможных наборах базисных векторов и ковекторов

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T\left(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}\right)$$

Получаем разложение по базису

$$T = \sum T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q},$$

где через $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$ обозначен тензор, который

- принимает значение 1 на наборе $\left(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}\right)$
- и равен 0 на любом другом наборе базисных векторов и ковекторов.

При замене координат $x^i \to x^{i'}$ компоненты меняются по тензорному закону

$$T^{i'_1 \dots i_p{}'}_{j_1{}' \dots j_q{}'} = \sum T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \frac{\partial x^{i_1{}'}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p{}'}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1{}'}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q{}'}} \qquad (2)$$

1.5.3 Тензорные поля

Определение 3. Тензорным полем типа (p, q) на гладком многообразии M называется семейство тензоров T_x, заданных на касательных пространствах $T_x M$, компоненты которых $T^I_J(x)$ гладко зависят от точки x в любых локальных координатах на M.

Замечание 6. Тензорные поля также определяют как соответствия, которые любым локальным координатам $x^1, \dots, x^n$ сопоставляет набор гладких функций $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x)$, которые при замене локальных координат $x^i \to x^{i'}$ меняется по тензорному закону (2).

[4] В дифференциальной геометрии, чтобы работало правило суммирования Эйенштейна, индексы у координат нужно писать сверху.

1.6 Примеры решения задач

1.6.1 Является ли объект тензором

Задача 1.15. Доказать, что числа

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

являются компонентами некоторого тензора типа $(1, 1)$.

Образует ли набор чисел

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

тензор типа $(0, 2)$?

Решение:

- Чтобы доказать, что δ^i_j — тензор, проверим, что при замене координат компоненты меняются по тензорному закону, т.е. что

  $$\delta^{i'}_{j'} = \delta^i_j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$$

  Действительно,

  $$\delta^i_j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j'}} = \begin{cases} 1, & \text{если } i' = j' \\ 0, & \text{если } i' \neq j' \end{cases}$$

  В предпоследнем равенстве мы воспользовались формулой для производной сложной функции:

  $$\frac{\partial f(y(x))}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}.$$

- Пусть C — матрица замены координат. Тогда в матричном виде тензорный закон для тензоров валентности 2 записывается следующим образом:

  – для тензоров т. $(1, 1)$ (т.е. для линейных операторов)

  $$A' = CAC^{-1}, \tag{3}$$

  – для тензоров т. $(0, 2)$ (т.е. для билинейных форм)

  $$B = C^T B' C \qquad \Leftrightarrow \qquad B' = \left(C^{-1}\right)^T BC^{-1}, \tag{4}$$

  – для тензоров т. $(2, 0)$ (т.е. для билинейных форм на V^*)

  $$Q' = CQC^T. \tag{5}$$

Здесь во всех пунктах штрихом обозначены матрицы тензоров в новых координатах.

Легко видеть, что если в каком-то базисе матрице билинейной формы единичная, то она не обязана быть единичной во всех остальных базисах[5]. Например, при гомотетии $C = \frac{1}{\lambda}E$ все коэффициенты билинейной формы умножатся на λ^2.

Замечание 7. В формулах (3) – (5) мы считаем, что координаты векторов и ковекторов (записанные в столбик) связаны соответственно по формулам

$$v' = Cv, \qquad \alpha = C^T\alpha'.$$

Формулы (3) – (5) несложно проверить, воспользовавшись тем, что значение тензора на наборе векторов и ковекторов не зависит от выбора базиса. Например для билинейных форм получаем

$$(u')^T B' v' = u^T C^T B' C v = u^T B v.$$

Замечание 8. Тензоры ранга 2 задаются матрицами, и полезно помнить, что некоторые тензорные выражения суть покомпонентная записать операций над матрицами. Например,

- выражение $a^i_j v^j$ соответствует умножению матрицы a^i_j на вектор-столбец v^j:

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots, & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & \dots & a^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_i v^i \\ \vdots \\ a^n_i v^i \end{pmatrix},$$

- а равенство

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} = \delta^{i'}_{j'}$$

является покомпонентной записью тождества

$$JJ^{-1} = E,$$

где J — матрица Якоби.

Задача 1.16. Если $G = (g_{ij})$ — невырожденный тензор типа $(0, 2)$ на V (т.е. невырожденная билинейная форма), то элементы обратной матрицы $G^{-1} = (g^{ij})$ являются компонентами тензора типа $(2, 0)$.

Решение-1: Обратная матрица G^{-1} меняется при замене координат по тому же закону, что и матрица билинейной формы на V^*:

$$\left(\left(C^{-1}\right)^T G C^{-1}\right)^{-1} = C G^{-1} C^T.$$

Решение-2: Билинейная форма задает линейное отображение

$$G : V \to V^*$$

[5]Единственное исключение — одномерное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$.

Если форма G невырождена, то это отображение является изоморфизмом. Остается заметить, что обратное отображение

$$G^{-1} : V^* \to V$$

задает билинейную форму на V^*.

Решение-3: Компоненты g^{ij} задаются формулой

$$g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j. \tag{6}$$

(Это покомпонентная запись формулы $G^{-1}G = E$.) Матрица G^{-1} определена однозначно, поэтому достаточно проверить, что формула останется верной, если g_{kj} и g^{ik} будут меняться как тензоры типа $(0,2)$ и $(2,0)$ соответственно.

$$g^{i'k'}g_{k'j'} = g^{ip}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^p}g_{qj}\frac{\partial x^q}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$$

Суммируя по k', получаем

$$g^{i'k'}g_{k'j'} = g^{ip}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}g_{qj}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\delta^q_p = g^{ip}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}g_{pj}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$$

Используя исходное равенство (6), получаем, что

$$g^{i'k'}g_{k'j'} = \delta^i_j\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \delta^{i'}_{j'},$$

что и требовалось доказать.

Замечание 9. Несложно показать, что для любого невырожденного тензора A типа (p,q) валентности 2 (т.е. $p+q=2$) элементы обратной матрицы образуют тензор типа (q,p).

1.6.2 Вычисление компонент тензора

Задача 1.17. Найти компоненту T^{11}_1 тензора

$$T = e^1 \otimes e_2 \otimes e_2 + 2e^2 \otimes e_2 \otimes e_2$$

в базисе

$$f_1 = 3e_2, \qquad f_2 = -e_1.$$

Ответ: $T^{11}_1 = \frac{2}{3}$.

Решение: По определению,

$$T^{11}_1 = T(f_1, f^1, f^1).$$

Выражение f_i через e_i мы знаем. Остается выразить f^i через e^j.

Лемма 1. *Если матрица перехода между базисами равна A, то матрица перехода между двойственными базисами равна $(A^T)^{-1}$. Иными словами,*

$$\big(e_1, \ \ldots, \ e_n\big) = \big(f_1, \ \ldots, \ f_n\big)\,A \quad \Rightarrow \quad \big(e^1, \ \ldots, \ e^n\big) = \big(f^1, \ \ldots, \ f^n\big)\,(A^T)^{-1}$$

Доказательство. Нужно доказать, что

$$\begin{pmatrix} e_1, & \dots, & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1, & \dots, & f_n \end{pmatrix} A \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix}$$

Достаточно рассмотреть значения базиса из ковекторов на базисе из векторов. С одной стороны,

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1, & \dots, & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1, & \dots, & f_n \end{pmatrix} A = EA = A$$

С другой стороны, если

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1, & \dots, & e_n \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1, & \dots, & e_n \end{pmatrix} = X.$$

Таким образом, $X = C$, что и требовалось доказать. □

В данном случае[6],

$$\begin{pmatrix} f_1, & f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1, & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}$$

Получаем,

$$\begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \end{pmatrix}$$

Находим компоненту тензора

$$T_1^{11} = T(f_1, f^1, f^1) = \left(e^1 \otimes e_2 \otimes e_2 + 2e^2 \otimes e_2 \otimes e_2\right) \left(3e_2, \frac{1}{3}e^2, \frac{1}{3}e^2\right) =$$
$$= e^1\left(3e_2\right) \cdot e_2 \left(\frac{1}{3}e^2\right) \cdot e_2 \left(\frac{1}{3}e^2\right) + 2e^2\left(3e_2\right) \cdot e_2 \left(\frac{1}{3}e^2\right) \cdot e_2 \left(\frac{1}{3}e^2\right) =$$
$$= 0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Замечание 10. Лемму 1 можно получить с использованием тензорного закона. Пусть M — многообразие, а $x^1, \dots, x^n$ — локальные координаты на нем. Тогда

- вектора $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dots \dfrac{\partial}{\partial x^n}$ образуют канонический базис T_xM,

[6]Далее формулы специально записаны излишне подробно. Чем больше пропущенных шагов, тем больше вероятность ошибки на тесте

- ковектора $dx^1, \dots, dx^n$ образуют канонический базис T_x^*M.

При замене координат канонические базисы связаны между собой при помощи матрицы Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}, & \dots & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^n} \\ \vdots, & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^1}, & \dots & \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

следующим образом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^{1'}}, \dots \frac{\partial}{\partial x^{n'}}\right) J, \qquad \begin{pmatrix} dx^{1'} \\ \vdots \\ dx^{n'} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix}$$

Задача 1.18. Пусть T_{ijk} — кососимметричный тензор в пространстве $\mathbb{R}^3$, у которого компоненты T_{123} равна 2 в базисе e_1, e_2, e_3. Вычислить его компоненты в базисе $f_1 = e_2, f_2 = -e_3, f_3 = e_1 + e_2$.

Замечание 11. Тензор (абсолютно) кососимметричен, если при перестановке любых двух индексов он меняет знак. У кососимметричного тензора

$$T_{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_n)} = \operatorname{sgn}(\sigma) T_{i_1\dots i_n}$$

для любой перестановки σ. В частности, компонента равна нулю, если какие-либо индексы совпадают.

Ответ: $T_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot(-2)$, остальные компоненты равны нулю.

Замечание 12. В ответе можно так же написать, что T — кососимметричный тензор и $T_{1'2'3'} = -2$.

Решение: После замены координат кососимметричный тензор останется кососимметричным, поэтому в данном случае достаточно найти компоненту $T_{1'2'3'}$.

$$\begin{gathered} T_{1'2'3'} = T(f_1, f_2, f_3) = T(e_2, -e_3, e_1 + e_2) = \\ = -T_{231} - T_{232} = -T_{123} - 0 = -2 \end{gathered}$$