Кафедра теории вероятностей

Теория случайных процессов. Лектор – профессор А.В.Булинский
(весенний семестр 2017 года)

ПРОГРАММА

1. Случайные функции (процессы, поля) как семейства случайных элементов. Траектории. Распределение случайного элемента. Независимость случайных элементов. Теорема Ломницкого – Улама (формулировка).

2. Случайные блуждания. Определение возвратности и невозвратности простого случайного блуждания по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$. Исследование возвратности простого блуждания с помощью аппарата характеристических функций. Теорема Пойа.

3. Ветвящиеся случайные процессы. Модель Гальтона – Ватсона. Нахождение вероятности вырождения с помощью производящей функции случайной величины, распределение которой описывает число потомков одной частицы. Докритические, критические и надкритические процессы.

4. Процессы восстановления. Исследование вспомогательного процесса восстановления, порожденного последовательностью независимых бернуллиевских величин, умноженных на константу.

5. Сравнение исходного процесса восстановления с построенным вспомогательным. Усиленный закон больших чисел для независимых, неотрицательных, одинаково распределенных величин. Доказательство элементарной теоремы восстановления.

6. Независимость приращений пуассоновского процесса (т.е. процесса восстановления, определенного с помощью независимых одинаково распределенных экспоненциальных величин). Парадокс времени ожидания.

7. Построение пространственного пуассоновского процесса, отвечающего σ-конечной мере интенсивности.

8. Функционал Лапласа точечного процесса. Характеризация пространственного точечного пуассоновского процесса с помощью функционала Лапласа.

9. Маркированный пуассоновский процесс. Анализ числа клиентов в системе массового обслуживания $M|G|\infty$.

10. Теорема Колмогорова о согласованных распределениях, условия согласованности на языке характеристических функций для действительных случайных процессов (доказательство необходимости упомянутых условий).

11. Теорема, дающая необходимые и достаточные условия существования (действительного) процесса, для которого приращения имеют заданные характеристические функции. Следствие, показывающее существование пуассоновского процесса интенсивности λ, вводимого как определенный процесс с независимыми приращениями.

12. Модификация процесса. Пример процесса, у которого траектории разрывны п.н., но существует п.н. непрерывная модификация.

13. Фильтрация, ее расширение. Марковские моменты, примеры, σ-алгебра $\mathcal{F}_\tau$, где τ – марковский момент.

14. Строго марковское свойство процесса $X = \{X(t), t \geq 0\}$, имеющего независимые стационарные приращения.

15. Конструкция винеровского процесса, использующая последовательность независимых стандартных гауссовских величин и функции Шаудера.

16. Недифференцируемость траекторий винеровского процесса (теорема Винера – Зигмунда – Пэли).

17. Принцип отражения. Теорема Башелье.

18. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Определения и примеры. Лемма о получении субмартингала из мартингала с помощью выпуклой функции.

19. Предсказуемые процессы. Разложение Дуба.

20. Дискретный вариант формулы Танаки.

21. Теорема Дуба об остановке.

22. Первое тождество Вальда. Задача о разорении игрока (применение следствия теоремы Дуба об остановке).

23. Марковские процессы с дискретным и непрерывным временем. Определения и примеры. Теорема, утверждающая, что процессы с независимыми приращениями являются марковскими.

24. Марковские цепи с дискретным и непрерывным временем. Переходные вероятности и их четыре свойства. Конечномерные распределения марковской цепи.

25. Компьютерное моделирование марковских цепей с дискретным временем и конечным числом состояний.

26. Однородные марковские цепи. Теорема о предельном поведении переходных вероятностей однородной марковской цепи с конечным или счетным пространством состояний и с дискретным или непрерывным временем. Стационарное распределение марковской цепи. Стационарные в узком смысле марковские цепи

27. Генератор (инфинитезимальная матрица) полугруппы переходных вероятностей стандартной однородной марковской цепи $X = \{X(t), t \geq 0\}$. Теорема, описывающая генератор стандартной однородной марковской цепи с конечным числом состояний.

28. Обратимые марковские цепи. Случайное блуждание на графах. Метод Монте-Карло с использованием марковских цепей (алгоритм Метрополиса - Хастингса).

29. Слабая сходимость вероятностных мер, заданных на метрическом пространстве. Сходимость по распределению случайных элементов со значениями в метрическом пространстве. Сохранение слабой сходимости случайных элементов под действием непрерывных отображений. Теорема Александрова (формулировка).

30. Слабая относительная компактность и плотность семейства вероятностных мер. Теорема Прохорова, критерий слабой сходимости вероятностных мер в пространстве $C[0,1]$, принцип инвариантности Донскера - Прохорова (формулировки).

31. Действительные и комплексные гауссовские процессы (теорема существования).

32. Ковариационные функции и их свойства. Гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром. Теорема Ароншайна (формулировка).Теорема Герглотца.

33. Ортогональные случайные меры и их свойства. Структурная мера.

34. Интеграл по ортогональной случайной мере. Свойства интеграла.

35. Теорема Карунена.

36. Процессы, стационарные в узком и широком смыслах. Связь этих понятий. Спектральное представление процессов, стационарных в широком смысле.

37. Определение и простейшие свойства интеграла Ито. Формула Ито (без доказательства).

38. Уравнение Ланжевена. Доказательство того, что при определенных условиях решением этого уравнения является процесс Орнштейна - Уленбека.

39. Пример дифференциального уравнения первого порядка (с данным начальным условием), имеющего континуум различных решений. Лемма Гронуолла.

40. Теорема существования и единственности сильного решения стохастического дифференциального уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А.В.Булинский, А.Н.Ширяев. Теория случайных процессов. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2005 (см. там же список литературы, насчитывающий 198 наименований).

[2] А.Н.Ширяев. Вероятность (т.1,2). Москва, МЦНМО, 2007.

Некоторые вопросы программы (например, 2–5,8,9,14 и др.) не изложены в [1] и [2], а рассматривались на лекциях.