

Булинский А.В.  
Ширяев А.Н.

# Теория случайных процессов



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 519.216.2

ББК 22.171

Б 90

Булинский А. В., Ширяев А. Н. **Теория случайных процессов.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 400 с. — ISBN 978-5-9221-0335-0.

Книга создана на основе лекций, прочитанных авторами в разные годы на механико-математическом ф-те МГУ им. М. В. Ломоносова. Материал значительно превышает рамки учебного курса, чтобы дать более глубокое представление о разнообразных разделах теории и ее применениях. Сложные доказательства вынесены в «Приложения». «Дополнения и упражнения» помогают в усвоении материала.

Для профессорско-преподавательского состава, научных работников, аспирантов и студентов старших курсов университетов.

Ил. 19. Библиогр. 198 назв.

## Оглавление

Предисловие . . . . .	6
-----------------------	---

Основные обозначения . . . . .	8
--------------------------------	---

Глава I. Случайные процессы. Распределения случайных процессов . . . . .	11
---	----

Предмет теории случайных процессов, некоторые задачи. Случайные элементы и их распределения. Теорема о монотонных классах. Пополнение вероятностного пространства. Предел измеримых отображений. Построение семейства независимых случайных элементов с заданными распределениями. Процессы частных сумм, эмпирические меры, процессы восстановления, модель страхования Крамера–Лундберга, пуассоновская случайная мера. Цилиндрическая  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}_T$ . Случайная функция как семейство случайных элементов и как одно измеримое отображение. Конечномерные распределения случайной функции. Теорема Колмогорова о согласованных мерах. Характеристическая функция меры на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ . Условия согласованности мер на евклидовых пространствах в терминах характеристических функций. Описание  $\mathcal{B}_T$  для бесконечного  $T$ . Процессы с непрерывными траекториями. Согласованность проекций меры. Эквивалентные случайные функции. Измеримые процессы.

Глава II. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновские и гауссовские процессы . . . . .	46
---	----

Критерий существования процесса с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс. Винеровский процесс (броуновское движение). Многомерное нормальное распределение. Построение действительной гауссовской случайной функции по функции среднего и ковариационной функции. Комплекснозначные гауссовские процессы. Неотрицательно определенные функции как ковариационные функции и как воспроизводящие ядра гильбертовых пространств. Теорема Парзена. Эквивалентность двух определений броуновского движения. Функции Хаара и Шаудера. Флуктуации последовательности стандартных гауссовских величин. Построение непрерывного винеровского процесса. Многомерное броуновское движение.

**Глава III. Броуновское движение.****Свойства траекторий . . . . . 76**

Недифференцируемость п.н. траекторий броуновского движения (винеровского процесса). Марковское свойство винеровского процесса. Фильтрация. Марковские моменты, их примеры.  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}_\tau$ , состоящая из событий, наблюдаемых до марковского момента  $\tau$ . Строго марковское свойство винеровского процесса. Принцип отражения. Закон нуля или единицы. Распределения, связанные с максимумом винеровского процесса на  $[0, t]$ . Закон повторного логарифма. Локальный закон повторного логарифма.

**Глава IV. Мартингалы.****Дискретное и непрерывное время . . . . . 108**

Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Примеры. Разложение Дуба. Компенсаторы. Дискретный вариант формулы Танака. Расширение фильтрации. Квадратическая характеристика. Квадратическая вариация. Теорема Дуба о свободном выборе. Применение к случайным блужданиям (задача о разорении). Максимальное и минимальное неравенство Дуба для субмартингалов. Лемма о числе пересечений. Теорема о сходимости субмартингалов. Ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона. Сходимость мартингалов в  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Теорема Леви. Фундаментальная теорема страховой математики. Некоторые неравенства для субмартингалов и мартингалов с непрерывным временем.

**Глава V. Слабая сходимость мер.****Принцип инвариантности . . . . . 147**

Слабая сходимость мер в метрических пространствах. Сходимость случайных элементов по распределению. Критерии слабой сходимости. Сохранение слабой сходимости под действием непрерывных отображений. Слабая сходимость мер в пространстве  $C(T, S)$ . Относительная слабая компактность и плотность семейства мер. Теорема Прохорова. Принцип инвариантности Донскера–Прохорова. Многомерная центральная предельная теорема Линдеберга, лемма о максимуме сумм независимых случайных величин. Схема доказательства критерия согласия Колмогорова. Броуновский мост как условный винеровский процесс. Метод одного вероятностного пространства, теорема Скорохода. Метризация слабой сходимости. Метрика Леви–Прохорова.

**Глава VI. Марковские процессы.****Дискретное и непрерывное время . . . . . 180**

Эквивалентные определения марковского процесса. Марковость процессов с независимыми приращениями со значениями в  $\mathbb{R}^d$ . Примеры. Цепи Маркова, их построение по переходным вероятностям и начальному распределению. Пуассоновский процесс как марковская цепь. Переходная функция марковского процесса. Нахождение переходной функции  $d$ -мерного броуновского движения. Конечномерные распределения марковского процесса, их выражение через начальное распределение и переходную

функцию. Однородные марковские процессы. Эргодическая теорема для однородных цепей Маркова. Следствия. Инвариантная мера. Инфинитезимальная матрица  $Q$  стохастической полугруппы  $(P(t))_{t \geq 0}$ . Обратная и прямая системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Стационарное распределение как собственный вектор матрицы  $Q^*$ . Формулы Эрланга. Модель системы массового обслуживания, приводящая к этим формулам.

## Глава VII. Стационарные процессы.

### Дискретное и непрерывное время . . . . . 225

Ортогональные случайные меры и их  $\sigma$ -конечные структурные меры. Построение ортогональной случайной меры, отвечающей данной структурной мере. Интеграл по ортогональной случайной мере, его свойства. Теорема Карунена о факторизации ковариационной функции и представлении процесса в виде интеграла по ортогональной случайной мере. Стационарные в широком смысле процессы и их ковариационные функции. Теорема Герглотца. Теорема Бохнера–Хинчина. Спектральное представление стационарных процессов с непрерывным и дискретным временем. Эргодичность в  $L^2(\Omega)$ . Процессы скользящего среднего. Статистическое оценивание ковариационной функции и спектральной плотности. Задача линейного прогноза. Регулярные и сингулярные процессы. Разложение Вольда. Регулярные процессы как физически осуществимые фильтры. Критерий Колмогорова регулярности процесса. Теорема Колмогорова–Сегё.

## Глава VIII. Интеграл Ито.

### Стохастические дифференциальные уравнения . . . . . 276

Стохастический интеграл для простых случайных функций по винеровскому процессу. Конструкция Ито стохастического интеграла для неупреждающих случайных функций. Свойства стохастического интеграла. Формула замены переменных Ито. Уравнение Ланжевена. Процесс Орнштейна–Уленбека. Теорема существования и единственности сильного решения стохастического дифференциального уравнения. Марковость решения стохастического дифференциального уравнения.

### Приложение 1. Доказательство теоремы Колмогорова . . . . . 317

### Приложение 2. Доказательство теоремы Прохорова . . . . . 323

### Приложение 3. Доказательства теорем Линдеберга и Дуба . . . . . 327

### Приложение 4. Доказательство теоремы Бохнера–Хинчина . . . . . 337

### Приложение 5. Доказательство теоремы Колмогорова–Сегё . . . . . 340

### Приложение 6. Доказательство строго марковского свойства семейства броуновских движений . . . . . 344

### Приложение 7. Вероятностное решение задачи Дирихле . . . . . 354

### Приложение 8. Большие отклонения . . . . . 364

### Заключительные замечания . . . . . 383

### Список литературы . . . . . 385

### Указатель . . . . . 393

## Предисловие

Настоящая книга возникла на основе лекций, прочитанных авторами в разные годы на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Теория случайных процессов изучается в 6-м семестре на базе общих курсов теории вероятностей (4-й семестр) и математической статистики (5-й семестр). Читатели заметят, что предлагаемый текст значительно выходит за рамки семестрового курса. Цель проведенного нами *расширения* — дать более глубокое представление о разнообразных ветвях теории и ее применениях. Стандартная программа перекрывается основным содержанием восьми глав. Технически сложные доказательства некоторых важных результатов отнесены в “Приложения”. Кроме того, каждая глава завершается разделом “Дополнения и упражнения”. Этот материал может быть использован для проведения семинарских занятий и подготовки специальных курсов.

Фундаментом всей теории случайных процессов явилась теорема Колмогорова о существовании процесса с заданной системой конечномерных распределений. В его классической монографии [34] она названа “основной теоремой”. До ее появления исследование случайных процессов как семейств случайных величин велось, главным образом, с точки зрения свойств их конечномерных распределений (например, прямые и обратные уравнения для марковских систем). “Основная теорема” дала возможность потраекторного анализа случайных процессов, заложив тем самым основы того направления, которое именуется ныне стохастическим анализом.

К особенностям книги относится, в частности, то, что теорема Колмогорова о согласованных распределениях доказывается в максимальной общности и обосновывается с различных точек зрения. Даны детальные доказательства принципа инвариантности Донскера–Прохорова, функционального закона повторного логарифма в форме Штрассена (с привлечением общей теории больших отклонений семейства мер), теоремы Скорохода о вложении случайного блуждания в винеровский процесс, различных форм строго марковского свойства броуновского движения и других глубоких результатов. К интересным применениям излагаемой теории относятся основная теорема страховой математики, устанавливаемая с помощью мартингальной техники, вывод известных в теории массового обслуживания формул Эрланга с учетом общих свойств марковских процессов, исследование уравнения Ланжевена, приводящего к процессу Орнштейна–Уленбека, основанное на теории стохастических дифференциальных уравнений, и т. д. Отметим, что рассматриваются и проблемы, связанные с результатами и методами других областей математики, например, вероятностный подход к решению классической задачи Дирихле, теория прогнозирования, использующая аппарат гильбертовых пространств, доказатель-

ство формулы Колмогорова–Сегё, опирающееся на методы теории функций. Дается также начальное представление о проблематике стохастической финансовой математики.

Теория случайных процессов — обширный бурно развивающийся раздел современной теории вероятностей, имеющий многочисленные приложения. Поэтому даже сжатый список литературы содержит почти 200 наименований. При ссылках на материал курса теории вероятностей, как правило, используется учебное пособие [85].

Остановимся подробнее на структуре книги.

В главе I даются определения основных понятий, используемых далее, а также устанавливается ряд вспомогательных результатов. В главе II изучается класс процессов с независимыми приращениями, важнейшим представителем которого является броуновское движение. Глава III полностью посвящена свойствам этого замечательного процесса. В IV, VI и VII главах излагается теория мартингалов, марковских процессов и стационарных процессов соответственно. Глава V содержит результаты, относящиеся к слабой сходимости вероятностных мер, в том числе мер в функциональных пространствах траекторий случайных процессов. В главе VIII рассматриваются вопросы стохастического интегрирования (главным образом, по броуновскому движению) и стохастические дифференциальные уравнения.

Все главы разбиты на отдельные параграфы. Нумерация определений, утверждений, примеров и формул в каждой главе начинается заново, причем отдельно занумерованы определения, отдельно — теоремы и т. п. Сказанное относится и к “Приложениям”. При ссылках на материал другой главы (приложения) указывается ее (его) номер, например, (II.10) — это формула (10) главы II, а (6.2) — формула (2) приложения 6. Конец доказательства обозначается значком  $\square$ . В разделах “Дополнения и упражнения” каждой из глав и приложений упражнения отмечены только номерами, а их текст сдвинут вправо по отношению к основному тексту.

Следует отметить, что курсы вероятностно-статистического цикла на механико-математическом факультете МГУ формировались под непосредственным влиянием А. Н. Колмогорова и Б. В. Гнеденко, долгие годы заведовавших кафедрой теории вероятностей. При работе над рукописью нам были также полезны обсуждения ее содержания с сотрудниками и аспирантами кафедры. Выражаем им свою искреннюю признательность.

Авторы благодарны Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку издания книги. Грант № 02-01-14077.

А. В. Булинский,  
А. Н. Ширяев

Кафедра теории вероятностей  
механико-математического факультета  
Московского государственного  
университета им. М. В. Ломоносова

## Основные обозначения

$:=$  — “положить по определению”

$\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел,  $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,

$\mathbb{Q}$  — множество рациональных чисел,

$\mathbb{Z}$  — множество целых чисел,

$\mathbb{Z}_+$  — множество целых неотрицательных чисел,

$\mathbb{R}$  — множество действительных чисел,  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,

$\mathbb{C}$  — множество комплексных чисел,

если  $a, b \in \mathbb{R}$ , то  $a \wedge b = \min\{a, b\}$ ,  $a \vee b = \max\{a, b\}$ ,  $a^+ = \max\{a, 0\}$ ,  $a^- = \max\{-a, 0\}$ ,

$[a]$  — целая часть числа  $a$ ,  $\operatorname{sgn} a$  — знак числа,

$\overline{A}$  — дополнение к множеству  $A$ ,

$\mathbf{1}_A$  — индикатор множества  $A$ ,

$[A]$  — замыкание множества  $A$  (в метрическом пространстве),

$\partial A$  — граница множества  $A$  (в метрическом пространстве),

$(S, \rho)$  — метрическое пространство  $S$  с метрикой  $\rho$ ,

$B_r(x)$  — замкнутый шар радиуса  $r$  с центром в точке  $x$ ,

$C(T, S)$  — пространство непрерывных функций на метрическом пространстве  $T$  со значениями в метрическом пространстве  $S$ ,

$C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$  — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем,

$\|\cdot\|_H$  — норма в банаховом (гильбертовом) пространстве  $H$ ,

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,

$E$  — символ математического ожидания,

$D$  — символ дисперсии,

$\operatorname{cov}(X, Y)$  — ковариация случайных величин  $X$  и  $Y$ ,

$E(X | \mathcal{A})$  — условное математическое ожидание  $X$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{A}$ ,

$X \in \mathcal{F} | \mathcal{B}$  означает, что отображение  $X$  измеримо относительно  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{B}$ ,

$\sigma\{\mathcal{M}\}$  — наименьшая  $\sigma$ -алгебра, порожденная системой  $\mathcal{M}$  подмножеств некоторого пространства  $S$  (с единицей  $S$ ),

$\mathcal{B}(S)$  —  $\sigma$ -алгебра борелевских подмножеств топологического пространства  $S$ ,

$\mathcal{B}_T$  — цилиндрическая  $\sigma$ -алгебра в произведении измеримых пространств  $(S_t, \mathcal{B}_t)$ ,  $t \in T$ ,

$P_X$  ( $P X^{-1}$  или  $\operatorname{Law}(X)$ ) — распределение случайного элемента  $X$ ,

$\sigma\{X_t, t \in T\}$  — наименьшая  $\sigma$ -алгебра, порожденная случайными элементами  $X_t$ ,  $t \in T$  (в  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ),

$Q_n \Rightarrow Q$  — слабая сходимость мер  $Q_n$  к мере  $Q$ ,

$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$  — сходимость  $X_n$  по распределению к  $X$ ,

$X_n \xrightarrow{P} X$  — сходимость  $X_n$  по вероятности к  $X$ ,

$\operatorname{mes}$  — мера Лебега,

$N(a, C)$  — нормальное распределение со средним  $a$  и ковариационной матрицей  $C$ ,

$W = \{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс (броуновское движение),

$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  — фильтрация,

$\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \in T}$  — естественная фильтрация процесса  $X = \{X_t, t \in T\}$ ,

$P(s, x, t, B)$  — переходная функция марковского процесса,

$p_{i,j}(t)$  — переходные вероятности однородной марковской цепи.



*Нашим родителям*

## Глава I

### Случайные процессы.

### Распределения случайных процессов

Предмет теории случайных процессов, некоторые задачи. Случайные элементы и их распределения. Теорема о монотонных классах. Пополнение вероятностного пространства. Предел измеримых отображений. Построение семейства независимых случайных элементов с заданными распределениями. Процессы частных сумм, эмпирические меры, процессы восстановления, модель страхования Крамера–Лундберга, пуассоновская случайная мера. Цилиндрическая  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}_T$ . Случайная функция как семейство случайных элементов и как одно измеримое отображение. Конечномерные распределения случайной функции. Теорема Колмогорова о согласованных мерах. Характеристическая функция меры на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ . Условия согласованности мер на евклидовых пространствах в терминах характеристических функций. Описание  $\mathcal{B}_T$  для бесконечного  $T$ . Процессы с непрерывными траекториями. Согласованность проекций меры. Эквивалентные случайные функции. Измеримые процессы.

§ 1. Важнейшей особенностью современной теории вероятностей является то, что ее методы и результаты представляют не только самостоятельный математический интерес, но и находят разнообразные приложения в других научных дисциплинах, таких как физика, химия, биология, финансовая математика и др., а также в технике. *В чем же специфика того раздела теории вероятностей, который называется “случайные процессы”?*

Вначале теория вероятностей имела дело со *случайными экспериментами* (подбрасывание монеты, игральной кости и т. п.), для которых подсчитывались вероятности, с которыми может произойти то или иное событие. Затем возникло понятие *случайной величины*, позволившее количественно описывать результаты проводимых экспериментов, например, размер выигрыша в лотерею. Наконец, в случайные эксперименты был явно введен *фактор времени*, что дало возможность строить *стохастические модели*, в основу которых легло понятие *случайного процесса*, описывающего динамику развития изучаемого случайного явления.

В 1827 году ботаник Р. Броун (R. Brown) обнаружил под микроскопом хаотическое движение частиц цветочной пыльцы в воде. Природа этого движения, названного броуновским, долго оставалась невыясненной. Только в конце 19 — начале 20 века было осознано, что оно представляет собой одно из проявлений теплового движения атомов и молекул вещества. Оказалось, что для описания процессов подобного рода требуются вероятностно-статистические подходы. Математические и физические модели броуновского движения и более общих *процессов диффузии* были построены

ны Л. Башелье, А. Эйнштейном, М. Смолуховским, С. Орнштейном, М. Планком, П. Ланжевеном, А. Фоккером, Н. Винером, П. Леви, А. Н. Колмогоровым, М. А. Леонтовичем и другими учеными. В 1997 году исследования Р. Мертона и М. Шоулса, в которых броуновское движение применялось в экономических моделях, были отмечены Нобелевской премией.

Прежде, чем переходить к систематическому изложению курса случайных процессов, остановимся на некоторых конкретных, но принципиально важных вопросах и задачах, большинство из которых будет рассмотрено в этой книге.

1°. Мы покажем, как изучение функционалов от броуновского движения позволяет, например, доказать знаменитый *критерий согласия Колмогорова*, являющийся одним из фундаментальных результатов математической статистики. Будет также объяснено, что с помощью броуновского движения могут быть решены очень важные “неслучайные” задачи, например, *задача Дирихле*: найти гармоническую в области  $G \subset \mathbb{R}^d$  функцию, которая принимает заданные значения на границе этой области (далее мы уточним формулировку).

2°. Упомянутые выше модели диффузии стимулировали развитие *теории стохастических дифференциальных уравнений*, требующей аппарата особого “стохастического исчисления”. Особенность связана, в частности, с тем, что траектории броуновского движения являются непрерывными, но, тем не менее, не дифференцируемыми ни в одной точке. Где могут пригодиться подобные уравнения? Например, с их помощью можно дать эффективный способ, применяемый на практике (восстановление изображения, теле- и радиовещание, распознавание образов и др.), выделения полезного сигнала, скрытого в помехах (*шуме*).

3°. Для многих практических целей очевидна важность *задач прогноза*: на основании наблюдений случайного процесса до момента времени  $t$  требуется предсказать его поведение в моменты  $t + s$  ( $s > 0$ ). Такие задачи возникают, например, при анализе эволюции курсов ценных бумаг на финансовом рынке, в связи с которым большой интерес представляет *задача хеджирования в опционах* (моделях купли-продажи акций в некоторый момент в будущем по заранее установленной цене, когда истинная цена самих акций подвержена случайным колебаниям).

4°. Представим себе деятельность страховой компании, которая, располагая определенным капиталом (пополняемым поступающими взносами), осуществляет в случайные моменты времени выплаты, размер которых также носит случайный характер. Каким образом описывать эти случайные моменты? Оказалось, что в подобных ситуациях возникает пуассоновский процесс, подробно изучаемый далее. Будет показано, как должны быть связаны между собой параметры в модели страхования Крамера–Лундберга для того, чтобы вероятность разорения компании не превосходила заданного (малого) числа  $\varepsilon$ .

5°. Наконец, упомянем разнообразные *задачи асимптотического анализа случайных объектов*. В качестве примера укажем на *формулы Эрланга*, позволяющие представить, что будет происходить “при больших временах” в модели, описывающей функционирование, скажем, телефонной станции, когда вызовы поступают в случайные моменты времени и длительности разговоров абонентов также случайны.

Подчеркнем, что в пунктах 3°–5° мы сталкиваемся с проблемами двух типов. Во-первых, *требуется построить содержательную математическую модель*

изучаемого явления, а во-вторых, точно поставить задачу и затем решить ее. Для всего этого требуется, разумеется, весьма существенное развитие теории. При знакомстве с основами этой теории мы увидим, сколь многочисленны привлекаемые к рассмотрению классы случайных процессов и сколь разнообразны методы их описания и исследования.

Первая глава носит во многом технический, вспомогательный характер. К ней желательно возвращаться для разъяснений при чтении последующих глав. При первом чтении можно ограничиться усвоением понятий случайного элемента (§ 2), его распределения (§ 6), определениями случайной функции (§ 7) и примерами из § 9, основанными на последовательности независимых случайных элементов, которые рассматриваются в § 8. Требуется также осознать, что имеется возможность строить на основе теоремы Колмогорова (§ 12) семейства зависимых случайных величин, отправляясь от должным образом согласованных распределений их всевозможных конечных наборов. Для построения процессов с независимыми приращениями и действительных гауссовских процессов в главе 2 используются упомянутые выше условия согласованности в терминах характеристических функций случайных векторов (§ 15).

**§ 2.** Все вероятностные рассмотрения будут далее предполагать заданным, согласно аксиоматике Колмогорова, некоторое вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , т.е. *измеримое пространство*  $(\Omega, \mathcal{F})$  с введенной на нем *вероятностной мерой*  $P$ . Напомним, что измеримое пространство — это пара, состоящая из некоторого множества и  $\sigma$ -алгебры его подмножеств (обычно обозначаемой рукописной буквой). *Мерой* называется неотрицательная счетно-аддитивная функция множеств, определенная на некоторой  $\sigma$ -алгебре измеримого пространства. В тех случаях, когда надо подчеркнуть особые свойства меры, например, ее конечность или  $\sigma$ -конечность, это всегда будет особо оговариваться. *Вероятностная мера*  $P$ , или просто *вероятность*, — это такая мера, что  $P(\Omega) = 1$ . Для краткости вероятностную меру часто называют просто мерой.

Прежде всего, нам потребуется понятие *случайной величины со значениями в абстрактном множестве*  $S$ . Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  и  $(S, \mathcal{B})$  — *измеримые пространства*  $(\Omega \neq \emptyset \text{ и } S \neq \emptyset)$ .

**Определение 1.** Отображение  $X: \Omega \rightarrow S$  называется  $\mathcal{F} | \mathcal{B}$ -*измеримым* (пишем  $X \in \mathcal{F} | \mathcal{B}$ ), если  $X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$ , т.е.  $X^{-1}(B) := \{\omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$  для любого  $B \in \mathcal{B}$ .

В теории вероятностей  $\mathcal{F} | \mathcal{B}$ -измеримые отображения принято называть *случайными элементами* или *случайными величинами со значениями в*  $S$ .

Для семейства  $\mathcal{M}$  подмножеств  $S$  обозначим  $\sigma\{\mathcal{M}\}$  *наименьшую*  $\sigma$ -алгебру с единицей  $S$ , содержащую  $\mathcal{M}$ . Если  $S$  — топологическое, в частности, метрическое пространство, то, по определению, *борелевская  $\sigma$ -алгебра*  $\mathcal{B}(S)$  есть  $\sigma$ -алгебра  $\sigma\{\mathcal{M}\}$ , где  $\mathcal{M}$  — совокупность *открытых* множеств в  $S$ . В случае  $S = \mathbb{R}^k$  (с евклидовой метрикой),  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$  и  $k > 1$  случайный элемент  $X$  ( $\mathcal{F} | \mathcal{B}$ -измеримый) называется *случайным вектором*, а если  $k = 1$ , то (действительной) *случайной величиной*. Когда  $X$  — действительная случайная величина на  $(\Omega, \mathcal{F})$ , то вместо  $\mathcal{F} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримости  $X$ , как правило, говорят просто об  $\mathcal{F}$ -измеримости.

**Лемма 1.** Пусть  $X: \Omega \rightarrow S$  (отображение  $X$  не предполагается измеримым относительно каких-либо  $\sigma$ -алгебр) и  $\mathcal{M}$  — некоторая совокупность подмножеств  $S$ . Тогда  $X \in \mathcal{A} \mid \sigma\{\mathcal{M}\}$ , где  $\mathcal{A} := \sigma\{X^{-1}(\mathcal{M})\}$ . При этом

$$\sigma\{X^{-1}(\mathcal{M})\} = X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\}).$$

**Доказательство.** Легко видеть, что семейство множеств

$$\mathcal{D} = \{D \subset S: X^{-1}(D) \in \mathcal{A}\}$$

есть  $\sigma$ -алгебра, так как  $\mathcal{A}$  является  $\sigma$ -алгеброй и взятие прообраза сохраняет теоретико-множественные операции. По построению  $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$ . Следовательно,  $\sigma\{\mathcal{M}\} \subset \mathcal{D}$  и, значит,  $X \in \mathcal{A} \mid \sigma\{\mathcal{M}\}$ , т.е.  $X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\}) \subset \mathcal{A}$ . Далее,  $X^{-1}(\mathcal{M}) \subset X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\})$ , причем  $X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\})$  есть  $\sigma$ -алгебра. Поэтому  $\mathcal{A} = \sigma\{X^{-1}(\mathcal{M})\} \subset X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\})$ . Итак,  $\mathcal{A} = X^{-1}(\sigma\{\mathcal{M}\})$ .  $\square$

**Следствие 1.** Пусть в дополнение к условиям доказанной леммы дана  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}$  в  $\Omega$ . Если  $X^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{F}$ , то  $X \in \mathcal{F} \mid \sigma\{\mathcal{M}\}$ .

**Доказательство** состоит в применении леммы 1 с учетом соотношения

$$\sigma\{X^{-1}(\mathcal{M})\} \subset \mathcal{F}. \quad \square$$

Смысл следствия заключается в том, что в случае  $\mathcal{B} = \sigma\{\mathcal{M}\}$  для доказательства  $\mathcal{F} \mid \mathcal{B}$ -измеримости  $X$  необязательно рассматривать прообразы *всех* множеств из  $\mathcal{B}$ , а достаточно убедиться, что  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$  лишь для множеств  $B$  из  $\mathcal{M}$ . Именно поэтому в определении случайного вектора  $X$  со значениями в  $\mathbb{R}^k$  достаточно только (объясните, почему это так) требовать, чтобы для любого  $z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{R}^k$  множество

$$\{\omega: X(\omega) \leq z\} := \{\omega: X_1(\omega) \leq z_1, \dots, X_k(\omega) \leq z_k\} \in \mathcal{F}.$$

**Замечание 1.** Полезно иметь в виду, что  $\sigma$ -алгебра может порождаться не только множествами, но и функциями. Запись  $\mathcal{A} = \sigma\{X_t, t \in T\}$ , где  $X_t: \Omega \rightarrow S_t$ ,  $(S_t, \mathcal{B}_t)$  — измеримые пространства,  $t \in T$ , означает, что  $\mathcal{A}$  — наименьшая  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\Omega$  такая, что  $X_t \in \mathcal{A} \mid \mathcal{B}_t$  для каждого  $t \in T$ . Легко видеть, что

$$\mathcal{A} = \sigma\{X_t^{-1}(B_t): B_t \in \mathcal{B}_t, t \in T\}$$

и если  $X_t \in \mathcal{F} \mid \mathcal{B}_t$  для  $t \in T$ , то, очевидно,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ .

**§ 3.** Наряду с  $\sigma$ -алгебрами нам придется иметь дело с более узкими классами множеств. Назовем  $\pi$ -системой совокупность  $\mathcal{C}$  подмножеств  $S$ , замкнутую относительно конечных пересечений, т.е. если  $A, B \in \mathcal{C}$ , то  $A \cap B \in \mathcal{C}$  (к  $\mathcal{C}$  всегда добавляем само множество  $S$ ). Определим  $\lambda$ -систему  $\mathcal{D}$  как класс подмножеств  $S$  со следующими свойствами:  $S \in \mathcal{D}$  и если  $A, B \in \mathcal{D}$ ,  $A \subset B$ , то  $B \setminus A \in \mathcal{D}$ , кроме того, если  $A_n \in \mathcal{D}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и  $A_n \uparrow A$  (т.е.  $A_n \subset A_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ), то  $A \in \mathcal{D}$ . Для любого класса  $\mathcal{K}$  подмножеств  $S$  существуют (объясните) наименьшая  $\pi$ -система  $\pi\{\mathcal{K}\}$  и наименьшая  $\lambda$ -система  $\lambda\{\mathcal{K}\}$  подмножеств  $S$ , содержащие  $\mathcal{K}$ . Система  $\mathcal{M}$  подмножеств  $S$  является  $\sigma$ -алгеброй в том и только том случае, когда  $\mathcal{M}$  есть одновременно  $\pi$ - и  $\lambda$ -система.

**Теорема 1** (о монотонных классах). Пусть  $\pi$ -система  $\mathcal{C}$  и  $\lambda$ -система  $\mathcal{D}$  подмножеств пространства  $S$  таковы, что  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ . Тогда  $\sigma\{\mathcal{C}\} = \lambda\{\mathcal{C}\} \subset \mathcal{D}$ .

**Доказательство.** Можно сразу считать, что  $\mathcal{D} = \lambda\{\mathcal{C}\}$ . Достаточно проверить, что  $\mathcal{D}$  является  $\pi$ -системой, так как в этом случае  $\mathcal{D}$  будет  $\sigma$ -алгеброй, содержащей  $\mathcal{C}$ . Итак, покажем, что  $A \cap B \in \mathcal{D}$ , если  $A, B \in \mathcal{D}$ . Фиксируем произвольное  $B \in \mathcal{C}$  и введем класс множеств  $\mathcal{F}_B = \{A \subset S: A \cap B \in \mathcal{D}\}$ . Тогда  $\mathcal{F}_B$  является  $\lambda$ -системой и  $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_B$ . Поэтому  $\mathcal{D} = \lambda\{\mathcal{C}\} \subset \mathcal{F}_B$ . Следовательно,  $A \cap B \in \mathcal{D}$  для любых  $A \in \mathcal{D}$  и  $B \in \mathcal{C}$ . Теперь возьмем произвольное  $A \in \mathcal{D}$  и рассмотрим класс множеств  $\mathcal{G}_A = \{B \subset S: A \cap B \in \mathcal{D}\}$ . Аналогично убеждаемся, что  $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}_A$  для каждого  $A \in \mathcal{D}$ . Таким образом, система  $\mathcal{D}$  замкнута относительно конечных пересечений и  $\sigma\{\mathcal{C}\} \subset \lambda\{\mathcal{C}\}$ . Очевидно,  $\lambda\{\mathcal{C}\} \subset \sigma\{\mathcal{C}\}$ .  $\square$

Теорема 1 доказана В. Серпинским. Широкое применение этого результата в теории вероятностей связано с работами Е. Б. Дынкина. Поэтому  $\lambda$ -системы называют также системами Дынкина или  $\mathcal{D}$ -системами.

Полезность приведенной выше теоремы о монотонных классах раскрывают, например, следующие утверждения.

**Лемма 2.** Пусть на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{F})$  заданы меры  $P$  и  $Q$ , причем  $\mathcal{F} = \sigma\{\mathcal{C}\}$ , где  $\mathcal{C}$  есть  $\pi$ -система подмножеств  $\Omega$ . Для совпадения мер  $P$  и  $Q$  на  $\mathcal{F}$  необходимо и достаточно, чтобы  $P = Q$  на  $\mathcal{C}$ .

**Доказательство.** Необходимость утверждения очевидна. Достаточность следует из того, что совокупность множеств  $A \in \mathcal{F}$ , для которых  $P(A) = Q(A)$ , образует  $\lambda$ -систему.  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство и  $\mathcal{A}$  — некоторая алгебра подмножеств из  $\mathcal{F}$ . Тогда для любого события  $C \in \sigma\{\mathcal{A}\}$  имеет место следующее свойство

$$\inf_{A \in \mathcal{A}} P(C \triangle A) = 0, \quad (1)$$

где  $C \triangle A = (C \setminus A) \cup (A \setminus C)$ . Тем самым, для каждого  $C \in \sigma\{\mathcal{A}\}$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует  $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$  такое, что  $P(C \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$ , откуда  $|P(C) - P(A_\varepsilon)| < \varepsilon$ .

**Доказательство.** Любое событие  $C$  из алгебры  $\mathcal{A}$ , являющейся  $\pi$ -системой, удовлетворяет соотношению (1). Легко проверить, что совокупность событий, для которых верно (1), есть  $\lambda$ -система. Требуемое утверждение следует из теоремы 1.  $\square$

**Лемма 4** (свойство регулярности меры). Пусть  $S$  — метрическое пространство и  $Q$  — мера на  $\mathcal{B}(S)$ . Тогда для каждого борелевского множества  $B$

$$Q(B) = \sup_F Q(F) = \inf_G Q(G), \quad (2)$$

где верхняя грань берется по всем замкнутым множествам  $F \subset B$ , а нижняя — по всем открытым множествам  $G \supset B$ .

**Доказательство.** Пусть  $\rho$  — метрика в  $S$  и  $\rho(x, D) = \inf\{\rho(x, y) : y \in D\}$ , где  $x \in S, D \subset S$ . Для  $\delta > 0$  и замкнутого множества  $F$  обозначим  $F^\delta = \{x \in S : \rho(x, F) < \delta\}$ . Легко видеть, что  $F^\delta$  — открытые множества и  $F^\delta \downarrow F$  при  $\delta \downarrow 0$ . Поэтому (2) справедливо для любого замкнутого множества  $B$ . Читателю предлагается доказать самостоятельно (или см. [2, с. 16]), что борелевские множества  $B$ , для которых верно (2), образуют  $\sigma$ -алгебру. Тогда утверждение леммы вытекает из того, что  $\mathcal{B}(S)$  — наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая все замкнутые подмножества  $S$ .

§ 4. В дальнейшем нам часто придется использовать операцию *пополнения исходного вероятностного пространства*  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Пусть  $\mathcal{N}$  — класс подмножеств  $\Omega$  таких, что  $C \in \mathcal{N} \iff \exists D \in \mathcal{F} : C \subset D$  и  $P(D) = 0$ . Пусть  $\overline{\mathcal{F}}$  — совокупность множеств вида  $A \cup C$ , где  $A \in \mathcal{F}$  и  $C \in \mathcal{N}$ . Легко видеть, что  $\overline{\mathcal{F}}$  есть  $\sigma$ -алгебра (называемая *пополнением  $\mathcal{F}$  по мере  $P$* ). *Продолжение меры  $P$  на  $\sigma$ -алгебру  $\overline{\mathcal{F}}$  задается формулой*

$$\overline{P}(A \cup C) = P(A), \quad \text{где } A \in \mathcal{F}, C \in \mathcal{N} \quad (3)$$

(тем самым множествам из  $\mathcal{N}$  приписана мера нуль). Нетрудно видеть, что  $\overline{P}$  является корректно определенной мерой на  $\overline{\mathcal{F}}$ . Корректность означает, что если  $F = A \cup C = B \cup D$ , где  $A, B \in \mathcal{F}$  и  $C, D \in \mathcal{N}$ , то  $\overline{P}(F) = P(A) = P(B)$ .

Пространство  $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{P})$  называется *пополнением* (по мере  $P$ ) вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Как правило, мы будем считать, что эта операция пополнения произведена изначально и не станем писать черту над  $\mathcal{F}$  и над  $P$  (при этом  $\mathcal{N}$  оказывается классом всех событий нулевой вероятности). Если  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ , то обычно к ней также добавляют класс  $P$ -нулевых множеств  $\mathcal{N}$ , получая при этом *расширенную  $\sigma$ -алгебру*  $\mathcal{A}^{(P)} = \mathcal{A} \cup \mathcal{N}$  (и продолжая меру на  $\mathcal{A}^{(P)}$  так же, как в (3)). Легко видеть, что  $\mathcal{A}^{(P)} = \sigma\{\mathcal{A}, \mathcal{N}\}$ . Заметим, что если взять сужение  $P|_{\mathcal{A}}$  меры  $P$  с  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}$  на  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$  и пополнить  $\mathcal{A}$  по мере  $P|_{\mathcal{A}}$ , то, вообще говоря, получится  $\sigma$ -алгебра, содержащаяся в  $\mathcal{A}^{(P)}$ . Когда вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  фиксировано, то вместо  $\mathcal{A}^{(P)}$  используется обозначение  $\overline{\mathcal{A}}$ .

§ 5. При различного рода аппроксимациях случайных элементов ключевую роль играют следующие утверждения.

**Лемма 5.** Пусть  $(M, \mathcal{G})$  — измеримое пространство,  $(S, \rho)$  — метрическое пространство с метрикой  $\rho$  и борелевской  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{B}(S)$ . Пусть  $h_n : M \rightarrow S$ ,  $h_n \in \mathcal{G} | \mathcal{B}(S)$  при  $n = 1, 2, \dots$ . Пусть  $h_n(x) \xrightarrow{\rho} h(x)$  для каждого  $x \in M$ , т. е.  $\rho(h_n(x), h(x)) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $h : M \rightarrow S$  есть  $\mathcal{G} | \mathcal{B}(S)$ -измеримое отображение.

**Доказательство.** Для любого замкнутого множества  $B \in \mathcal{B}(S)$

$$\{x : h(x) \in B\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq m} \{x : h_n(x) \in B^{(1/k)}\} \in \mathcal{G},$$

где  $B^{(\varepsilon)} = \{x \in S : \rho(x, B) < \varepsilon\}$ ,  $\rho(x, B) = \inf\{\rho(x, y) : y \in B\}$ . Поэтому требуемое утверждение вытекает из следствия 1.  $\square$

**Лемма 6.** Пусть в отличие от леммы 5 на  $(M, \mathcal{G})$  задана мера  $P$  и

$$h_n(x) \xrightarrow{P} h(x) \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для } P\text{-п.в. } x \in M$$

(т. е.  $P(x \in M: h_n(x) \not\xrightarrow{P} h(x), n \rightarrow \infty) = 0$ ). Тогда  $h$  является  $\overline{\mathcal{G}} | \mathcal{B}(S)$ -измеримым отображением, где  $\overline{\mathcal{G}}$  — пополнение  $\mathcal{G}$  по мере  $P$ .

**Доказательство.** Пусть  $h_n(x) \rightarrow h(x)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , для  $x \in M_0$ , где  $P(M_0) = 1$ . Выберем точку  $z_0 \in S$  и определим  $\tilde{h}_n(x) = h_n(x)$  для  $x \in M_0$  и  $\tilde{h}_n(x) = z_0$  для  $x \in M \setminus M_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\tilde{h}_n(x) \rightarrow \tilde{h}(x)$  для всех  $x \in M$ , где  $\tilde{h}(x) = h(x)$  при  $x \in M_0$  и  $\tilde{h}(x) = z_0$  при  $x \in M \setminus M_0$ . Очевидно,  $\tilde{h}_n \in \mathcal{G} | \mathcal{B}(S)$ . Из леммы 5 вытекает, что  $\tilde{h}$  является  $\mathcal{G} | \mathcal{B}(S)$ -измеримым отображением. Теперь учтем, что для любого  $B \in \mathcal{B}(S)$  прообраз

$$h^{-1}(B) = \{M_0 \cap \tilde{h}^{-1}(B)\} \cup \{(M \setminus M_0) \cap h^{-1}(B)\} \in \overline{\mathcal{G}},$$

поскольку  $M_0 \in \mathcal{G}$ ,  $\tilde{h}^{-1}(B) \in \mathcal{G}$  и  $(M \setminus M_0) \cap h^{-1}(B) \subset M \setminus M_0$ ,  $P(M \setminus M_0) = 0$ .  $\square$

**Лемма 7.** Пусть вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  полно и  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ . Действительная случайная величина  $Y(\omega)$  является  $\mathcal{A}$ -измеримой тогда и только тогда, когда найдется  $\mathcal{A}$ -измеримая действительная случайная величина  $Z(\omega)$  такая, что  $Y = Z$  ( $P$ -п.в.), т. е.  $P(\omega \in \Omega: Y(\omega) \neq Z(\omega)) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $Y \in \overline{\mathcal{A}} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Возьмем “простые функции”

$$Y_n(\omega) = \sum_{k=-2^n}^{2^n-1} kn2^{-n} \mathbf{1}_{\{\omega: Y(\omega) \in (kn2^{-n}, (k+1)n2^{-n}]\}}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

где, как обычно,  $\mathbf{1}_B(\cdot)$  — индикатор множества  $B$ ,

$$\mathbf{1}_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B. \end{cases} \quad (5)$$

(Вместо  $\mathbf{1}_B(x)$  часто используется запись  $\mathbf{1}_{\{B\}}$ .)

Очевидно,  $Y_n(\omega) \rightarrow Y(\omega)$  при  $n \rightarrow \infty$  для всех  $\omega \in \Omega$ , причем  $Y_n \in \overline{\mathcal{A}} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . По определению  $\sigma$ -алгебры  $\overline{\mathcal{A}}$  имеем

$$\{\omega: Y(\omega) \in (kn2^{-n}, (k+1)n2^{-n}]\} = A_{n,k} \cup C_{n,k},$$

где  $A_{n,k} \in \mathcal{A}$ , а  $C_{n,k} \in \mathcal{N}$  ( $k = -2^n, \dots, 2^n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ). Положим

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=-2^n}^{2^n-1} A_{n,k}.$$

Тогда  $A \in \mathcal{A}$  и  $P(A) = 1$ . Определим

$$Z_n(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega) \sum_{k=-2^n}^{2^n-1} kn2^{-n} \mathbf{1}_{A_{n,k}}(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad n \in \mathbb{N}.$$



Ясно, что  $Z_n \in \mathcal{A} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $Z_n = 0$  для  $\omega \notin A$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) и  $Z_n(\omega) \rightarrow Y(\omega)$  при  $n \rightarrow \infty$  для  $\omega \in A$ . По лемме 5 величина  $Z = \mathbf{1}_A Y \in \mathcal{A} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Кроме того,  $Z = Y$  (P-п.в.). Таким образом, искомая величина  $Z$  найдена.

Пусть теперь  $Z \in \mathcal{A} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$  и  $Y = Z$  п.н. (т.е. P-п.в.). Положим  $Z_n = Z$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $Z_n \rightarrow Y$  п.н. при  $n \rightarrow \infty$ , и по лемме 6 величина  $Y \in \overline{\mathcal{A}} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , что и требовалось показать.  $\square$

**§ 6.** Измеримые отображения позволяют переносить меру с исходного пространства на другие.

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  и  $(S, \mathcal{B})$  — измеримые пространства, причем на  $(\Omega, \mathcal{F})$  задана некоторая вероятностная мера P. Пусть  $X: \Omega \rightarrow S$  является  $\mathcal{F} \mid \mathcal{B}$ -измеримым отображением.

**Определение 2.** *Распределением, или распределением вероятностей, случайного элемента X называется мера на  $\mathcal{B}$ , обозначаемая  $P_X$  и задаваемая формулой*

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}. \quad (6)$$

Распределение  $X$  обозначается также  $P_X^{-1}$ ,  $\text{Law}(X)$  или  $\text{Law}(X \mid P)$ , если важно подчеркнуть, о какой конкретно мере P идет речь. Мету  $P_X$  называют *образом меры P* при (измеримом) отображении  $X$ .

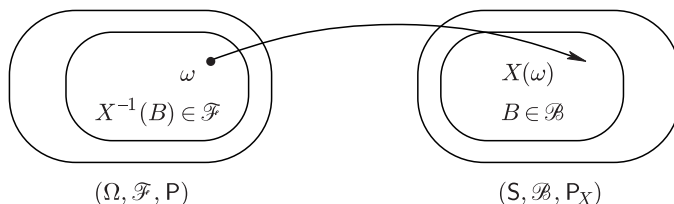


Рис. 1

Отметим, что изучение распределений  $\mathcal{F} \mid \mathcal{B}$ -измеримых случайных элементов, заданных на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  со значениями в  $S$ , и изучение мер на  $(S, \mathcal{B})$ , по сути дела, одно и то же. В самом деле, любой случайный элемент  $X$  индуцирует меру  $P_X$ . Обратное утверждение содержит элементарная

**Лемма 8.** *Любую вероятностную меру Q на  $(S, \mathcal{B})$  можно рассматривать как распределение некоторого случайного элемента X.*

Для доказательства достаточно взять  $\Omega = S$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ ,  $P = Q$  и  $X(\omega) = \omega$  (тождественное отображение).  $\square$

**§ 7.** Введем важное во всем дальнейшем понятие случайной функции и связанное с ним понятие случайного процесса.

**Определение 3.** Семейство  $X = \{X(t), t \in T\}$  случайных элементов  $X(t)$ , заданных при каждом  $t \in T$  на некотором измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{F})$ , принято называть *случайной функцией*.

Отметим здесь важные детали, уточняя и терминологию, и соответствующие обозначения.

В данном определении предполагается, что все случайные элементы  $X(t)$ ,  $t \in T$ , задаются на *одном и том же* измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Однако для многих целей полезно считать, что *области значений* случайных элементов  $X(t)$ ,  $t \in T$ , вообще говоря, различны. Точнее говоря, будем считать заданным семейство измеримых пространств  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ . Тогда на введенное выше семейство  $X = \{X(t), t \in T\}$  можно смотреть также как на *функцию*  $X = X(t, \omega)$ , определенную на  $T \times \Omega$ , принимающую при каждом  $t \in T$  значение из  $S_t$  и являющуюся  $\mathcal{F} | \mathcal{B}_t$ -измеримым отображением  $(X(t, \cdot): \Omega \rightarrow S_t)$ . В этом уточненном смысле функцию  $X = X(t, \omega)$  естественно называть случайной функцией, ассоциированной с измеримыми пространствами  $(\Omega, \mathcal{F})$  и  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ .

Элементарный пример случайной функции  $X = \{X(t), t \in T\}$ , принимающей при каждом  $t \in T$  действительные значения, получим, положив

$$X(t, \omega) = \xi(\omega)f(t),$$

где  $\xi$  — действительная случайная величина, заданная на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , а детерминированная функция  $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ . В следующей главе мы увидим, что ряд, составленный из такого рода случайных функций, может быть использован для описания броуновского движения.

**Определение 4.** При *фиксированном*  $\omega$  функцию  $X(\cdot, \omega)$ , или  $X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , называют *траекторией*, *реализацией* или *выборочной функцией*.

Аргумент  $\omega$  в записи случайной функции обычно опускают и пишут просто  $X(t)$  или  $X_t$ , мы используем оба обозначения в зависимости от контекста. Если  $T \subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ , то параметр  $t \in T$  интерпретируется как *время* и случайную функцию называют *случайным процессом*. Когда множество  $T$  — прямая, полупрямая, отрезок, интервал или полуинтервал, то говорят о случайном процессе с *непрерывным временем*, а при  $T \subset \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$  — о процессе с *дискретным временем* или о *случайной последовательности*. Если  $T \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d > 1$ , то  $X$  называют *случайным полем*.

Часто применяется процедура *дискретизации*, когда случайный процесс (поле)  $X = \{X_t, t \in T\}$  рассматривается лишь на конечном или счетном подмножестве  $T' \subset T$ . Например, вместо  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  изучается процесс с *шагом*  $\Delta > 0$ , т. е. процесс  $Y = \{X_{\Delta n}, n = 0, 1, 2, \dots\}$ .

Здесь же заметим, что исследование случайных полей, определенных на множестве  $T \subset \mathbb{R}^d$  ( $d > 1$ ), обычно не сводится к изучению случайных процессов путем перепараметризации (даже если между  $T$  и подмножеством прямой установлено взаимно-однозначное соответствие). Дело в том, что при описании зависимости систем случайных величин  $\{X_t, t \in U\}$  и  $\{X_t, t \in V\}$  в ряде задач существенную роль играет геометрическое расположение множеств  $U, V \subset T$ .

Термин случайный процесс используют и для обозначения любой случайной функции (не только при  $T \subset \mathbb{R}$ ). Вообще, классификация случайных функций, основанная на *структуре* параметрического множества  $T$  или на *типах* пространств  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ , в произведении которых лежат траектории этих функций, не является всеобъемлющей. Дело в том, что при описании тех или иных явлений

на первый план могут выдвигаться некоторые специальные требования к *свойствам* используемых (изучаемых) процессов. Примером могут служить весьма обширные (и вообще говоря, пересекающиеся) классы случайных функций, такие как процессы с независимыми приращениями, гауссовские процессы, мартингалы и т. д., подробно изучаемые в последующих главах.

§ 8. Сейчас мы напомним, предполагая заданным некоторое вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , понятие независимости  $\sigma$ -алгебр событий (и случайных элементов), чтобы привести ряд примеров случайных процессов.

**Определение 5.** Системы множеств (содержащие  $\Omega$ , в частности,  $\sigma$ -алгебры)  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \subset \mathcal{F}$  ( $n \geq 2$ ) называются *независимыми* (в совокупности), если

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) \quad (7)$$

для любых  $A_k \in \mathcal{A}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Бесконечное семейство систем множеств  $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{F}$  ( $\Omega \in \mathcal{A}_t$ ),  $t \in T$ , называется *независимым*, если набор  $\mathcal{A}_{t_1}, \dots, \mathcal{A}_{t_n}$  независим при всех  $n \geq 2$  и любых несовпадающих друг с другом точках  $t_1, \dots, t_n \in T$ .

**Лемма 9.** Пусть независимы  $\pi$ -системы  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n \subset \mathcal{F}$  ( $n \geq 2$ ). Тогда независимы  $\sigma$ -алгебры  $\sigma\{\mathcal{M}_1\}, \dots, \sigma\{\mathcal{M}_n\}$ . Если независимы  $\sigma$ -алгебры, то независимы и их расширения классом  $\mathcal{N}$  нулевых событий.

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{D}_1$  — система таких подмножеств  $\mathcal{F}$ , что (7) справедливо для любых  $A_1 \in \mathcal{D}_1$  и всех  $A_k \in \mathcal{M}_k$ ,  $k = 2, \dots, n$ . Очевидно,  $\mathcal{D}_1$  есть  $\lambda$ -система, причем  $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{D}_1$ . По теореме 1 получаем, что  $\sigma\{\mathcal{M}_1\} \subset \mathcal{D}_1$ . Аналогично рассматривается система  $\mathcal{D}_2$ , состоящая из событий  $A_2$ , для которых верно (7) при всех  $A_1 \in \sigma\{\mathcal{M}_1\}$  и  $A_k \in \mathcal{M}_k$ , где  $k = 3, \dots, n$ . Действуя таким образом, приходим к первому утверждению леммы.

Второе утверждение очевидно, поскольку любое событие  $A$  из  $\sigma$ -алгебры  $\overline{\mathcal{G}}$ , т. е. из расширения  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{G}$  классом  $\mathcal{N}$ , имеет вид  $A = C \cup D$ , где  $C \in \mathcal{G}$  и  $D \in \mathcal{N}$ .  $\square$

Независимость (в совокупности) семейства случайных величин  $\{X_t, t \in T\}$ , заданных на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и принимающих при каждом  $t \in T$  значения в каком-либо измеримом пространстве  $(S_t, \mathcal{B}_t)$ , означает независимость порожденных ими  $\sigma$ -алгебр  $\sigma\{X_t\} = X^{-1}(\mathcal{B}_t)$ ,  $t \in T$ .

Таким образом, величины  $X_t$ ,  $t \in T$  (множество  $T$  содержит не менее двух элементов), *независимы* в том и только том случае, если

$$P(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n) = \prod_{k=1}^n P(X_{t_k} \in B_k) \quad (8)$$

для всех  $n \geq 2$ , любых несовпадающих точек  $t_1, \dots, t_n \in T$  и произвольных множеств  $B_k \in \mathcal{B}_{t_k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

В связи с данным определением независимых случайных элементов представляет интерес следующий результат.

**Теорема 2** (Ломницкий–Улам, [161]). Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  — произвольное семейство измеримых пространств и пусть при любом  $t \in T$  на  $(S_t, \mathcal{B}_t)$  задана мера  $Q_t$ . Тогда существует вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и семейство независимых случайных элементов  $X_t: \Omega \rightarrow S_t$ ,  $X_t \in \mathcal{F} | \mathcal{B}_t$ , таких, что  $P_{X_t} = Q_t$  на  $\mathcal{B}_t$  при каждом  $t \in T$ .

Иначе говоря, всегда можно построить семейство независимых случайных элементов с любыми наперед заданными распределениями. Заметим, что бывают ситуации, когда действительно удобно рассматривать не только одно и то же пространство  $(S, \mathcal{B})$  в качестве  $(S_t, \mathcal{B}_t)$  при всех  $t \in T$  (см. пример 6).

Ниже в § 12 результат этой теоремы комментируется в связи с теоремой Колмогорова (теорема 4), см. также упражнение 1.

§ 9. Далее мы неоднократно увидим, что многие важные процессы удается строить, отправляясь от последовательности независимых случайных элементов. Приведем ряд примеров такого рода. Отметим, что для построения последовательности независимых действительных случайных величин достаточно совершенно элементарных средств, как показывают упражнения 2 и 3.

**Пример 1.** Пусть  $\xi_0, \xi_1, \dots$  — независимые случайные векторы, заданные на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и принимающие значения в пространстве  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 1$ ). Случайный процесс (с дискретным временем)

$$S_n = \sum_{j=0}^n \xi_j, \quad n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}, \quad (9)$$

принято называть *случайным блужданием*.

Если представить себе частицу, которая в нулевой момент времени находится в точке  $\xi_0$  и в каждый (дискретный) момент времени  $n \in \mathbb{N}$  смещается на величину  $\xi_n$ , то тогда вектор  $(n, S_n)$  будет давать координаты этой частицы во времени и пространстве.

**Пример 2.** Для последовательности  $\xi_1, \xi_2, \dots$  независимых одинаково распределенных невырожденных неотрицательных случайных величин процесс восстановления определяется формулой

$$X_0(\omega) = 0, \quad X_t(\omega) = \sup \left\{ n: \sum_{j \leq n} \xi_j(\omega) \leq t \right\}, \quad t > 0. \quad (10)$$

Всюду считаем сумму по пустому множеству равной нулю, поэтому  $X_t(\omega) = 0$ , если  $\xi_1(\omega) > t$ . Вообще говоря, так определенные величины  $X_t(\omega)$  принимают значения в  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ; при этом  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  считается состоящей из множеств  $B$  и  $B \cup \{\infty\}$ , где  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Название “процесс восстановления” объясняет следующая интерпретация. Пусть, начиная с  $t_0 = 0$ , в моменты, отделенные друг от друга промежутками  $\xi_j$ , происходят поломки некоторого устройства (например, перегорает электрическая лампочка), и вышедшее из строя устройство или его неисправный блок мгновенно заменяется идентичным новым. Тогда  $X_t(\omega)$  есть число замен (“восстановлений”) на промежутке  $(0, t]$ . Траекторию процесса  $X = \{X_t(\omega), t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)\}$  дает рис. 2.

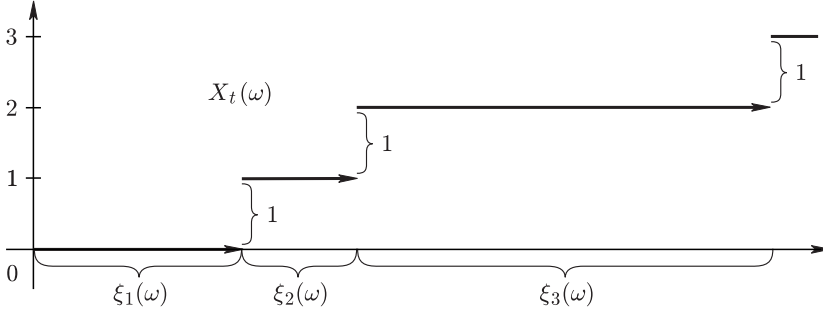


Рис. 2

**Пример 3.** Рассмотрим на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  две последовательности неотрицательных случайных величин  $\{\xi_j, j \in \mathbb{N}\}$  и  $\{\eta_j, j \in \mathbb{N}\}$  таких, что  $\{\xi_j, \eta_j, j \in \mathbb{N}\}$  независимы в совокупности и  $\text{Law}(\xi_j) = \text{Law}(\xi_1)$ ,  $\text{Law}(\eta_j) = \text{Law}(\eta_1)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Для положительных констант  $y_0$  и  $c$  определим процесс

$$Y_t(\omega) = y_0 + ct - \sum_{j=1}^{X_t(\omega)} \eta_j(\omega), \quad t \geq 0, \quad (11)$$

где  $X_t(\omega)$  задается формулой (10). Процессы вида (11) используются в *модели страхования Крамера–Лундберга* (см., например, [86; с. 99]), в которой  $y_0$  — начальный капитал компании,  $c$  — скорость поступления взносов,  $\eta_j$  — размер выплаты в случайный момент  $\tau_j = \sum_{i=1}^j \xi_i$  ( $j \in \mathbb{N}$ ), а  $Y_t$  интерпретируется как капитал компании в момент  $t$ .

**Пример 4.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные векторы, заданные на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и принимающие значения в  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 1$ ). Введем *эмпирические меры*

$$\mathbb{P}_n(B, \omega) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_B(\xi_j(\omega)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Пользуясь определением 3, легко видеть, что формула (12) при каждом  $n \in \mathbb{N}$  задает случайный процесс, индексированный *борелевскими множествами*  $B$ , т. е. здесь  $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ .

Вместо индикатора  $\mathbf{1}_B$  в (12) можно было бы взять функцию  $f$  из некоторого класса  $\mathcal{H}$ . Тогда при должной измеримости  $f$  получится случайный процесс, индексированный *семейством функций*.

**Пример 5.** Пусть  $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$  — *случайное поле*, образованное независимыми одинаково распределенными векторами со значениями в  $\mathbb{R}^m$ . Пусть  $\mu$  есть  $\sigma$ -конечная мера<sup>\*)</sup> на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ,  $d \geq 1$ . Определим *процесс частных сумм*

$$S_n(B, \omega) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \zeta_j(\omega) \mu(nB \cap C_j), \quad B \in \mathcal{B}([0, 1]^d), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

<sup>\*)</sup>  $\mu$  есть  $\sigma$ -конечная мера на  $(S, \mathcal{B})$ , если  $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ , где  $S_n \in \mathcal{B}$  и  $\mu(S_n) < \infty$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ .

где  $C_j = (j-1, j] = (j_1-1, j_1] \times \cdots \times (j_d-1, j_d]$  — единичный куб с *верхней вершиной* в точке  $j \in \mathbb{Z}^d$ ,  $nB = \{x = ny, y \in B\}$ .

Другими словами, в отличие от (9) здесь берутся определенным образом *взвешенные частные суммы*.

**Пример 6.** Пусть  $\lambda$  есть конечная мера ( $\lambda \neq 0$ ), заданная на некотором измеримом пространстве  $(S, \mathcal{B})$ . Пусть  $Y, X_1, X_2, \dots$  — независимые случайные элементы на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  такие, что  $Y$  — действительная пуассоновская величина с параметром  $\lambda(S)$ , а  $X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные величины, являющиеся  $\mathcal{F} \mid \mathcal{B}$ -измеримыми, для которых  $P_{X_1}(B) = \lambda(B)/\lambda(S)$  при  $B \in \mathcal{B}$ . Возможность такого построения вытекает из теоремы 2. (Обратите внимание, что здесь мы имеем дело с величинами  $Y$  и  $X_k$  со значениями в *разных* пространствах.) Введем на  $\mathcal{B} \times \Omega$  функцию  $Z(B, \omega)$ , положив

$$Z(B, \omega) = \sum_{j=1}^{Y(\omega)} \mathbf{1}_B(X_j(\omega)) \quad (14)$$

( $Z(B, \omega) = 0$ , когда  $Y(\omega) = 0$ ). Формула (14) определяет так называемую *пуассоновскую случайную меру с мерой интенсивности* (или *ведущей мерой*)  $\lambda$ . Случай  $\sigma$ -конечной меры  $\lambda$  обсуждается в дополнении к этой главе.

§ 10. Рассмотрим более пристально данное ранее определение случайной функции.

Покажем, что случайную функцию  $X = \{X(t, \omega), t \in T\}$ , понимаемую как *семейство* случайных элементов  $X(t, \cdot), t \in T$ , удобно представлять себе и как *один* случайный элемент на  $(\Omega, \mathcal{F})$  со значениями в соответствующем измеримом *пространстве функций*, заданных на  $T$ .

Идея этого соответствия проста. Каждому  $\omega \in \Omega$  сопоставляется целая *траектория*  $X(\cdot, \omega)$ , т. е. вводится *отображение*  $\mathbf{X}$  формулой

$$\mathbf{X}(\omega) := X(\cdot, \omega). \quad (15)$$

Поскольку нам все время приходится иметь дело с измеримыми объектами, то следует разобраться с вопросом измеримости введенного отображения (15).

С этой целью рассмотрим декартово произведение  $S_T = \prod_{t \in T} S_t$  (обозначаемое также как  $\times_{t \in T} S_t$  или  $S^T$ , когда  $S_t = S$  при всех  $t \in T$ ), состоящее из функций  $y = y(t)$ , заданных на  $T$  и таких, что  $y(t) \in S_t$  для  $t \in T$ . Каждая траектория случайного процесса  $X = \{X(t), t \in T\}$  является *элементом* пространства  $S_T$ .

Выясним, для какого класса  $\mathcal{M}$  множеств  $B \subset S_T$  заведомо можно утверждать, что  $\{\omega: \mathbf{X}(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ . Тогда следствие 1 обеспечит, что отображение  $\mathbf{X}$  будет  $\mathcal{F} \mid \sigma\{\mathcal{M}\}$ -измеримым.

Возьмем в качестве  $\mathcal{M}$  совокупность *элементарных цилиндров*, т. е. множеств вида

$$C_T(t, B_t) = \{y \in S_T: y(t) \in B_t\},$$

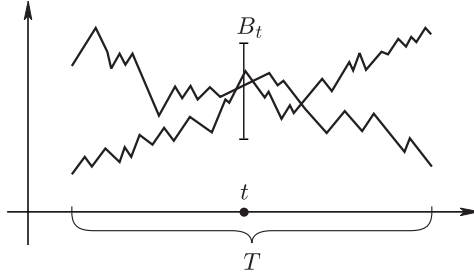


Рис. 3

где  $B_t \in \mathcal{B}_t$ ,  $t \in T$  (здесь варьируются и  $t$  и  $B_t$ ). Образно говоря,  $C_T(t, B_t)$  состоит из тех функций  $y \in S_T$ , которые в точке  $t$  проходят через “ворота”  $B_t$  (см. рис. 3).

Заметим, что  $\{\omega: \mathbf{X}(\omega) \in C_T(t, B_t)\} = \{\omega: X(t, \omega) \in B_t\} \in \mathcal{F}$ , поскольку  $X(t, \cdot) \in \mathcal{F} | \mathcal{B}_t$  при любом  $t \in T$ .

Введем следующее определение.

**Определение 6.**  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}_T$  в пространстве  $S_T$ , порожденная совокупностью  $\mathcal{M}$  элементарных цилиндров, называется *цилиндрической  $\sigma$ -алгеброй*.

Для  $\mathcal{B}_T$  используется также обозначение  $\bigotimes_{t \in T} \mathcal{B}_t$ , называемое произведением  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{B}_t$ ,  $t \in T$ . Если  $S_t = S$  и  $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}$  при всех  $t \in T$ , то вместо  $\mathcal{B}_T$  пишут также  $\mathcal{B}^T$ .

По следствию 1 отображение  $\mathbf{X}$ , введенное в (15), является  $\mathcal{F} | \mathcal{B}_T$ -измеримым.

Весьма примечательно, что справедлив и обратный результат. Для пояснения этого определим *координатные отображения*  $\pi_{T,t}: S_T \rightarrow S_t$ , положив

$$\pi_{T,t}y = y(t), \quad \text{где } t \in T, \quad y \in S_T. \quad (16)$$

Легко видеть, что  $\pi_{T,t} \in \mathcal{B}_T | \mathcal{B}_t$  для любого  $t \in T$ , поскольку прообраз любого множества  $B_t \in \mathcal{B}_t$  есть элементарный цилиндр в пространстве  $S_T$ . В соответствии с замечанием 1 можно сказать, что  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}_T$  порождается семейством координатных отображений  $\pi_{T,t}$ ,  $t \in T$ , т. е.

$$\mathcal{B}_T = \sigma\{\pi_{T,t}^{-1}\mathcal{B}_t: t \in T\}, \quad \text{где } \pi_{T,t}^{-1}\mathcal{B}_t = \{\pi_{T,t}^{-1}B_t: B_t \in \mathcal{B}_t\}. \quad (17)$$

Ясно, что  $X(t, \omega) = \pi_{T,t}\mathbf{X}(\omega)$  при любых  $t \in T$  и  $\omega \in \Omega$ . Суперпозиция измеримых отображений дает измеримое (относительно соответствующих  $\sigma$ -алгебр) отображение. Тем самым, имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.** *Эквивалентное определение случайной функции  $X = \{X(t), t \in T\}$  состоит в том, что отображение (15) является  $\mathcal{F} | \mathcal{B}_T$ -измеримым. Иначе говоря, семейство  $X = \{X(t), t \in T\}$  есть семейство  $\mathcal{F} | \mathcal{B}_t$ -измеримых случайных элементов  $X(t)$ ,  $t \in T$ , в том и только в том случае, когда отображение (15) является  $\mathcal{F} | \mathcal{B}_T$ -измеримым.*

Отметим, что в этой теореме несущественно, снабжено или нет измеримое пространство  $(\Omega, \mathcal{F})$  какой-либо вероятностной мерой  $P$ .

Очевидно,  $\mathcal{B}_T$  порождается также  $\pi$ -системой, состоящей из всевозможных конечных пересечений элементарных цилиндров.

Из теоремы 3 вытекает, что каждая случайная функция  $X = X(t, \omega)$ , рассматриваемая как случайный элемент  $\mathbf{X}$ , индуцирует распределение вероятностей  $\mathbf{P}_X$  на  $(S_T, \mathcal{B}_T)$  (далее пишем просто  $\mathbf{P}_X$ ). Таким образом, всегда можно говорить о вероятности  $\mathbf{P}(\omega: X(\cdot, \omega) \in B)$ , если множество  $B$  принадлежит  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}_T$ .

§ 11. Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  — семейство измеримых пространств. Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  и любых не совпадающих друг с другом точек  $t_1, \dots, t_n \in T$  введем  $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_n}$  как наименьшую  $\sigma$ -алгебру пространства  $S_{t_1, \dots, t_n} = S_{t_1} \times \dots \times S_{t_n}$ , порожденную “прямоугольниками” вида  $B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}$ , где  $B_{t_k} \in \mathcal{B}_{t_k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Пусть  $X = \{X(t), t \in T\}$  — случайная функция, заданная на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  и ассоциированная с семейством измеримых пространств  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ . При всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $t_1, \dots, t_n \in T$  случайный вектор  $\xi = (X(t_1), \dots, X(t_n))$  будет  $\mathcal{F} | \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_n}$ -измеримым отображением по следствию 1, поскольку

$$\xi^{-1}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = \bigcap_{k=1}^n \{X(t_k) \in B_{t_k}\} \in \mathcal{F}.$$

**Определение 7.** Для  $n \in \mathbb{N}$  и  $t_1, \dots, t_n \in T$  меры  $\mathbf{P}_{t_1, \dots, t_n}$ , являющиеся распределениями на  $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_n}$  случайных векторов  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ , называются *конечными распределениями* случайной функции  $X = \{X(t), t \in T\}$ .

Итак, для “прямоугольника”  $C = B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}$

$$\mathbf{P}_{t_1, \dots, t_n}(C) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \{X(t_k) \in B_{t_k}\}\right). \quad (18)$$

Из (18) сразу вытекает, что для каждого  $n \geq 2$ , всех  $t_k \in T$  и  $B_{t_k} \in \mathcal{B}_{t_k}$  ( $k = 1, \dots, n$ ), а также любой перестановки  $(i_1, \dots, i_n)$  набора  $(1, \dots, n)$  выполняются следующие условия симметрии и согласованности:

- 1°.  $\mathbf{P}_{t_1, \dots, t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = \mathbf{P}_{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}}(B_{t_{i_1}} \times \dots \times B_{t_{i_n}})$ ,
- 2°.  $\mathbf{P}_{t_1, \dots, t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{n-1}} \times S_{t_n}) = \mathbf{P}_{t_1, \dots, t_{n-1}}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{n-1}})$ .

Действительно, 1° справедливо, поскольку правая часть (18) не меняется от того, в каком порядке пересекаются события, а 2° верно, так как  $\{X(t_n) \in S_{t_n}\} = \Omega$ .

Заметим, что условия 1° и 2° *равносильны* условиям 1° и 3°, где 3° означает, что взятие  $B_{t_m} = S_{t_m}$  для любого  $m = 1, \dots, n$  в  $\mathbf{P}_{t_1, \dots, t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n})$  приводит в записи этой функции к одновременному “выкидыванию”  $t_m$  и  $B_{t_m}$ :

$$\begin{aligned} 3^\circ. \mathbf{P}_{t_1, \dots, t_m, \dots, t_n}(B_{t_1} \times \dots \times S_{t_m} \times \dots \times B_{t_n}) &= \\ &= \mathbf{P}_{t_1, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{m-1}} \times B_{t_{m+1}} \times \dots \times B_{t_n}). \end{aligned}$$

**Замечание 2.** В наборах  $(t_1, \dots, t_n)$ , индексирующих меры  $\mathbf{P}_{t_1, \dots, t_n}$ , имеет смысл рассматривать *не совпадающие* между собой точки  $t_1, \dots, t_n$ . Дело в том, что в противном случае можно было бы осуществить редукцию к более “короткому” вектору, состоящему из *различных* точек  $t_k \in T$ , например,

$$\mathbf{P}_{t, t}(B' \times B'') = \mathbf{P}(X_t \in B', X_t \in B'') = \mathbf{P}(X_t \in B' \cap B'') = \mathbf{P}_t(B' \cap B'').$$



§ 12. Теорема 2 (Ломницкий–Улам) утверждала, что по любому семейству мер  $Q_t$ ,  $t \in T$ , определенных на измеримых пространствах  $(S_t, \mathcal{B}_t)$ ,  $t \in T$ , можно всегда построить (единое) вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и семейство *независимых* (по мере  $P$ ) случайных элементов  $X_t = X_t(\omega)$ ,  $t \in T$ , таких, что  $P_{X_t} = Q_t$ , т. е.  $\text{Law}(X_t | P) = Q_t$ .

Важно отметить здесь следующие два обстоятельства. С одной стороны, в этой теореме нет никаких требований *топологического* характера относительно природы пространств  $(S_t, \mathcal{B}_t)$ ,  $t \in T$ . Предполагается только, что это — *измеримые пространства*. С другой стороны, эта теорема не отвечает на вопрос о том, можно ли построить вероятностное пространство и семейство случайных элементов  $X_t$ ,  $t \in T$ , на нем такие, чтобы *совместные* распределения случайных элементов  $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$  совпадали бы с *a priori* заданными распределениями вероятностей  $Q_{t_1, \dots, t_n}$ . Теорема Ломницкого–Улама утверждает лишь то, что требуемые построения можно осуществить, когда меры  $Q_{t_1, \dots, t_n}$  являются прямым произведением “одномерных” распределений  $Q_{t_1}, \dots, Q_{t_n}$  ( $n \geq 1$  и  $t_1, \dots, t_n$  — несовпадающие друг с другом точки из множества  $T$ ).

В этой связи замечательна теорема Колмогорова (впервые опубликованная в 1933 году в его монографии “Основные понятия теории вероятностей” на немецком языке; см. также на русском языке [34]), для формулировки которой понадобится следующее определение.

**Определение 8.** Измеримые пространства  $(S, \mathcal{B})$  и  $(V, \mathcal{A})$  называются *изоморфными* (пишем  $(S, \mathcal{B}) \sim (V, \mathcal{A})$ ), если существует взаимно-однозначное отображение  $h: S \rightarrow V$  такое, что  $h \in \mathcal{B} | \mathcal{A}$  и  $h^{-1} \in \mathcal{A} | \mathcal{B}$ . Если  $V$  — борелевское подмножество отрезка  $[0, 1]$  и  $\mathcal{A}$  есть  $\sigma$ -алгебра борелевских подмножеств  $V$  (т. е.  $\mathcal{A} = V \cap \mathcal{B}([0, 1])$ ), то изоморфное ему пространство  $(S, \mathcal{B})$  называется *борелевским пространством*.

Напомним, что топологическое пространство  $(S, \mathcal{B})$  называется *польским*, если имеется метрика, превращающая  $S$  в полное сепарабельное метрическое пространство. Польским, например, будет пространство  $\mathbb{R}^m$  с евклидовой метрикой. Известно (см., например, [41; том 1]), что любое борелевское подмножество польского пространства с  $\sigma$ -алгеброй своих борелевских подмножеств является борелевским пространством.

**Теорема 4** (Колмогоров). Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  — семейство борелевских пространств. Пусть на пространствах  $(S_{t_1, \dots, t_n}, \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_n})$ , где  $n \in \mathbb{N}$  и несовпадающие друг с другом точки  $t_1, \dots, t_n \in T$ , заданы меры  $P_{t_1, \dots, t_n}$ , удовлетворяющие условиям симметрии и согласованности 1° и 2° (см. § 11). Тогда существуют вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и определенная на нем случайная функция  $X = \{X(t), t \in T\}$  такие, что конечномерными распределениями  $X$  являются меры  $P_{t_1, \dots, t_n}$ .

**Доказательство** этой теоремы вместе с ее эквивалентными формулировками дается в приложении 1.

Первоначальный вариант теоремы Колмогорова относился к построению семейств *действительных* случайных величин  $X_t$ ,  $t \in T$  (индексированных точками произвольного множества  $T$ ), по системе согласованных *совместных функций распределения* конечных наборов этих величин. Доказательство, данное Колмогоровым, охватывает (с должными изменениями) и более общую ситуацию,

рассмотренную нами выше. В этой связи отметим, что в случае  $T = \mathbb{N}$  сформулированная теорема Колмогорова превращается в теорему Даниеля (см. [112]). Поэтому в случае произвольного множества  $T$  и любого семейства борелевских пространств  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  говорят также о теореме Даниеля–Колмогорова.

**Замечание 3.** Пусть случайная функция  $X = \{X(t), t \in T\}$  определена на множестве  $T \subset \mathbb{R}$ . Тогда в силу условия 1° можно рассматривать конечномерные распределения только для  $t_1 < \dots < t_n$ . С другой стороны, пусть на пространствах  $(S_{t_1, \dots, t_n}, \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_n})$  заданы меры  $P_{t_1, \dots, t_n}$ , где  $t_1 < \dots < t_n$ ,  $t_k \in T \subset \mathbb{R}$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Если эти меры удовлетворяют условию 3°, то по теореме Колмогорова найдется случайная функция  $X = \{X(t), t \in T\}$  такая, что ее конечномерными распределениями, индексированными векторами  $(t_1, \dots, t_n)$  с  $t_1 < \dots < t_n$ , будут меры  $P_{t_1, \dots, t_n}$ .

§ 13. Дадим еще одну форму *условий симметрии и согласованности* мер  $P_{t_1, \dots, t_n}$ , которую используем далее.

Для  $n \geq 2$ ,  $t_1, \dots, t_n \in T$  и перестановки  $(i_1, \dots, i_n)$  набора  $(1, \dots, n)$  определим отображения  $\psi_n: T^n \rightarrow T^n$  и  $\Psi_n: S_{t_1} \times \dots \times S_{t_n} \rightarrow S_{t_{i_1}} \times \dots \times S_{t_{i_n}}$ , положив

$$\psi_n(t_1, \dots, t_n) = (t_{i_1}, \dots, t_{i_n}), \quad \Psi_n(x_1, \dots, x_n) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}). \quad (19)$$

Введем отображения  $\theta_n: T^n \rightarrow T^{n-1}$  и  $\Theta_n: S_{t_1} \times \dots \times S_{t_n} \rightarrow S_{t_1} \times \dots \times S_{t_{n-1}}$ :

$$\theta_n(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_{n-1}), \quad \Theta_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}). \quad (20)$$

Большие и малые буквы для одинаковых по своей сути отображений подчеркивают их действие на разных множествах. Индекс  $n$  у отображений (19) и (20) будем опускать для упрощения записи, а также не будем отмечать их зависимость от точек  $t_1, \dots, t_n$  и  $x_1, \dots, x_n$ .

**Лемма 10.** Для каждого  $n \geq 2$  и всех  $\tau = (t_1, \dots, t_n)$ , где  $t_1, \dots, t_n$  — не совпадающие друг с другом точки множества  $T$ , условия согласованности 1° и 2° (или 1° и 3°) мер  $P_\tau = P_{t_1, \dots, t_n}$  эквивалентны следующим двум условиям:

$$(A) P_{\psi\tau} = P_\tau \Psi^{-1} \quad \text{и} \quad (B) P_{\theta\tau} = P_\tau \Theta^{-1}.$$

**Доказательство.** Следует рассмотреть  $\pi$ -систему, состоящую из “прямоугольников”  $B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}$  в пространстве  $S_{t_1, \dots, t_n}$ , где  $t_1, \dots, t_n \in T$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), и воспользоваться леммой 2. □

§ 14. При построении случайных процессов, принимающих действительные значения, часто удобно использовать взаимно-однозначное соответствие между мерами на евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  (с борелевской  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ) и их характеристическими функциями.

**Определение 9.** Характеристической функцией меры  $Q$  на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  называется функция

$$\varphi_Q(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i\langle \lambda, x \rangle\} Q(dx), \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad (21)$$

где  $\langle \lambda, x \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ ,  $i^2 = -1$ .

Хорошо известно (см., например, [85; гл. II, § 3]), что мера  $Q$  на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  полностью определяется заданием *функции распределения*  $F(x) = Q((-\infty, x])$ , где  $(-\infty, x] = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . В каждой точке  $x$ , в которой эта функция распределения  $F = F(x)$  *непрерывна*, ее значение определяется по характеристической функции *формулой обращения*:

$$F(x) = (2\pi)^{-n} \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \int_{(-\infty, x]} dy \int_{\mathbb{R}^n} d\lambda \exp\{-i(\lambda, y) - \sigma^2 |\lambda|^2 / 2\} \varphi_Q(\lambda), \quad (22)$$

где  $|\lambda|^2 = \langle \lambda, \lambda \rangle$ ,  $d\lambda$  и  $dy$  обозначают интегрирование по мере Лебега (ср. с теоремой 3 § 12 гл. II в [85]). Зная функцию  $F = F(x)$  в точках ее непрерывности, однозначно восстанавливаем  $F$  всюду. Значит, по характеристической функции однозначно восстанавливается и мера  $Q$  на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . Заметим, что если  $\varphi_Q \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), d\lambda)$ , то в (22) можно положить  $\sigma = 0$  и не брать предел по  $\sigma$ .

Напомним также формулу *замены переменных* в интеграле Лебега. Пусть  $(S, \mathcal{B})$ ,  $(V, \mathcal{A})$  — измеримые пространства,  $g: S \rightarrow V$  является  $\mathcal{B} | \mathcal{A}$ -измеримым отображением и  $h: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $h \in \mathcal{A} | \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . Тогда в предположении существования приводимых ниже интегралов

$$\int_S h(g(x)) Q(dx) = \int_V h(y) (Qg^{-1})(dy), \quad (23)$$

где интеграл от вектор-функции берется покомпонентно, а мера  $Q$  определена на  $(S, \mathcal{B})$ . Оба интеграла в (23) существуют или не существуют одновременно, а если существуют, то, тем самым, и равны (см. [85; гл. II, § 6]).

Пусть на измеримом пространстве  $(S, \mathcal{B})$  заданы  $\sigma$ -конечные меры  $\mu$  и  $\nu$ . Мера  $\mu$  называется *абсолютно непрерывной* относительно меры  $\nu$  (пишем  $\mu \ll \nu$ ), если равенство  $\nu(A) = 0$  влечет  $\mu(A) = 0$ . По теореме Радона–Никодима (см., например, [35; с. 405])  $\mu \ll \nu$  тогда и только тогда, когда существует функция  $f \in L^1(S, \mathcal{B}, \nu)$ , называемая плотностью меры  $\mu$  по мере  $\nu$  и обозначаемая  $d\mu/d\nu$  такая, что

$$\mu(A) = \int_A f(x) \nu(dx), \quad A \in \mathcal{B}. \quad (24)$$

Известно, что в случае, когда  $\mu \ll \nu$ , для функции  $h: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $h \in \mathcal{B} | \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , справедлива формула

$$\int_S h(x) \mu(dx) = \int_S h(x) f(x) \nu(dx); \quad (25)$$

оба интеграла здесь существуют лишь одновременно (и в этом случае они, следовательно, совпадают).

**Определение 10.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство. *Характеристической функцией* случайного вектора  $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $Y \in \mathcal{F} | \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ) называется функция

$$\varphi_Y(\lambda) = E \exp\{i \langle \lambda, Y \rangle\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad (26)$$

где  $E$  — усреднение по мере  $P$ .

Из формул (21) и (23) видим, что

$$\begin{aligned}\varphi_Y(\lambda) &= \int_{\Omega} \exp\{i\langle \lambda, Y(\omega) \rangle\} P(d\omega) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i\langle \lambda, z \rangle\} P_Y^{-1}(dz) = \varphi_{P_Y}(\lambda),\end{aligned}\quad (27)$$

т. е. характеристическая функция вектора  $Y$  совпадает с характеристической функцией его распределения вероятностей.

**§ 15.** Пусть семейство мер  $P_\tau$ ,  $\tau = (t_1, \dots, t_n)$ , на пространствах  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  индексируется не совпадающими друг с другом точками  $t_1, \dots, t_n$  (варьируются  $n \in \mathbb{N}$  и  $t_1, \dots, t_n$  из  $T$ ). Обозначим  $\varphi_\tau = \varphi_\tau(\lambda)$  характеристическую функцию меры  $P_\tau$ .

Если меры  $P_\tau$  — конечномерные распределения процесса  $X = \{X(t), t \in T\}$ , то тогда  $\varphi_\tau$  может быть представлена в виде:

$$\varphi_\tau(\lambda) = E \exp\left\{i \sum_{k=1}^n X(t_k) \lambda_k\right\}, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (28)$$

Отсюда видно, что характеристическая функция  $\varphi_\tau(\lambda)$  не должна меняться при одновременной перестановке координат векторов  $\tau$  и  $\lambda$ , и характеристическая функция, индексированная “укороченным” вектором  $\tau$ , получается из характеристической функции  $\varphi_\tau$  подстановкой в ее аргументы  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  нулей на места “выкидываемых” в векторе  $\tau$  координат.

Оказывается, эти простые условия в точности эквивалентны условиям симметрии и согласованности мер 1° и 2° (см. § 11).

**Теорема 5.** Для симметрии и согласованности мер  $P_\tau$ ,  $\tau = (t_1, \dots, t_n) \in T^n$ , заданных на пространствах  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))_{n \geq 1}$ , необходимо и достаточно, чтобы для любых  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tau \in T^n$  и  $n \geq 2$ , одновременно выполнялись следующие два условия:

$$(a) \quad \varphi_{\psi\tau}(\Psi\lambda) = \varphi_\tau(\lambda) \quad \text{и} \quad (b) \quad \varphi_{\theta\tau}(\Theta\lambda) = \varphi_\tau(\Theta\lambda, 0),$$

где отображения  $\psi$ ,  $\Psi$ ,  $\theta$  и  $\Theta$  определены в § 13 (с  $S_t = \mathbb{R}$ ,  $t \in T$ ), а  $(\Theta\lambda, 0) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0)$  для  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ .

**Доказательство.** В силу взаимно-однозначного соответствия между мерой на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  и характеристическими функциями условия (А) и (В) леммы 10 равносильны тому, что при  $n \geq 2$

$$\varphi_{\psi\tau}(\lambda) = \varphi_{P_\tau\Psi^{-1}}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad (29)$$

$$\varphi_{\theta\tau}(\mu) = \varphi_{P_\tau\Theta^{-1}}(\mu), \quad \mu \in \mathbb{R}^{n-1} \quad (30)$$

(напомним, что  $\varphi_\tau = \varphi_{P_\tau}$ ). По лемме 8 найдется случайный вектор  $Y_\tau$  со значениями в  $\mathbb{R}^n$ , такой что  $P_\tau = P_{Y_\tau}$ . Тогда  $P_\tau\Psi^{-1}$  есть распределение вектора  $\Psi Y_\tau$ , поскольку  $P_{Y_\tau\Psi^{-1}}(B) = P(Y_\tau \in \Psi^{-1}(B)) = P(\Psi Y_\tau \in B)$ . Далее,

$$\varphi_{\Psi Y_\tau}(\lambda) = E \exp\{i\langle \Psi Y_\tau, \lambda \rangle\} = E \exp\{i\langle Y_\tau, \Psi^* \lambda \rangle\} = \varphi_{Y_\tau}(\Psi^{-1}\lambda), \quad (31)$$

где мы отождествили  $\Psi$  с ортогональной матрицей, задающей это отображение (тогда  $\Psi^* = \Psi^{-1}$ ,  $\Psi^*$  — транспонированная матрица  $\Psi$ ). Согласно (31) условие (29) принимает вид  $\varphi_{\psi\tau}(\lambda) = \varphi_\tau(\Psi^{-1}\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ , что эквивалентно условию (а).

Аналогично,

$$\begin{aligned}\varphi_{\Theta Y_\tau}(\mu) &= \mathbf{E} \exp\{i\langle \Theta Y_\tau, \mu \rangle\} = \\ &= \mathbf{E} \exp\{i\langle Y_\tau, (\mu, 0) \rangle\} = \varphi_{Y_\tau}((\mu, 0)), \quad \mu \in \mathbb{R}^{n-1}.\end{aligned}\quad (32)$$

Таким образом, (30) равносильно условию (b).  $\square$

**Замечание 4.** Пусть  $X = \{(X_1(t), \dots, X_m(t)), t \in T\}$  — (векторный) случайный процесс со значениями в  $\mathbb{R}^m$ . Для произвольного  $n \in \mathbb{N}$  и любых  $t_1, \dots, t_n \in T$  рассмотрим вектор  $\xi_{t_1, \dots, t_n} = (X_1(t_1), \dots, X_m(t_1), \dots, X_1(t_n), \dots, X_m(t_n))$ , имеющий на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{mn})$  распределение  $P_{t_1, \dots, t_n}$  с характеристической функцией  $\phi_{t_1, \dots, t_n}(\lambda)$ , где  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda_j = (\lambda_j^{(1)}, \dots, \lambda_j^{(m)}) \in \mathbb{R}^m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Теорема 5 верна и для *векторного* случая (для мер  $P_\tau$ , заданных на пространствах  $(\mathbb{R}^{mn}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{mn}))_{n \geq 1}$ ). В этом (векторном) случае в условии (а) одновременно переставляются  $t_1, \dots, t_n$  и  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , а в условии (b) вектор  $\lambda_n$  приравнивается нулю в  $\mathbb{R}^m$ .

**§ 16.** Рассмотрим подробнее структуру  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{B}_T$ . Нам понадобятся некоторые новые понятия. Для *подмножества*  $U \subset T$  (включение  $\subset$  не предполагается, вообще говоря, строгим) аналогично пространству  $S_T$  и  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}_T$  определяются пространство  $S_U$  и  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}_U$ . Заметим, что  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}_U$  для конечного множества  $U = \{t_1, \dots, t_n\}$  близка по смыслу к  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_n}$ , введенной в § 11. Отличие состоит в том, что, когда оперируют функциями (а не векторами), неважно, в каком порядке занумерованы точки множества  $U$ . Если  $V \subset U \subset T$ , то определим *отображение* (“проектирование”)  $\pi_{U,V}: S_U \rightarrow S_V$  формулой

$$\pi_{U,V}y = y|_V, \quad y \in S_U, \quad (33)$$

где  $y|_V$  есть *сужение* на множество  $V$  функции  $y$ , заданной на множестве  $U$  (см. рис. 4). Когда  $V$  состоит из одной точки  $t$ , то вместо  $\pi_{T, \{t\}}$  пишем, как в (16),  $\pi_{T,t}$ .

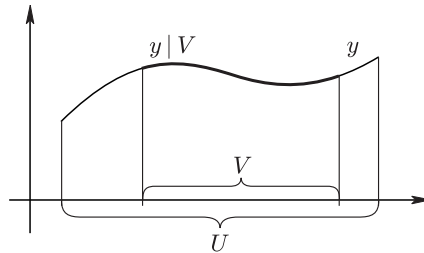


Рис. 4

Из следствия 1 вытекает, что

$$\pi_{U,V}^{-1} \mathcal{B}_V \subset \mathcal{B}_U \quad \text{для } V \subset U \subset T, \quad (34)$$

т. е.  $\pi_{U,V} \in \mathcal{B}_U | \mathcal{B}_V$  (прообраз элементарного цилиндра из  $\mathcal{S}_V$  есть элементарный цилиндр в  $\mathcal{S}_U$ ). Отметим также, что  $\pi_{T,V} = \pi_{U,V} \pi_{T,U}$  для  $V \subset U \subset T$ . Поэтому

$$\pi_{T,V}^{-1}(B_V) = \pi_{T,U}^{-1}(\pi_{U,V}^{-1}(B_V)), \quad (35)$$

где  $B_V$  — произвольное множество из  $\mathcal{B}_V$ .

Для любого множества  $U \subset T$  существует естественное вложение  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{B}_U$  в  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{B}_T$ . С этой целью определим

$$\mathcal{B}_{T,U} = \pi_{T,U}^{-1} \mathcal{B}_U, \quad U \subset T.$$

Нетрудно видеть, что эта система множеств  $\mathcal{B}_{T,U}$  является  $\sigma$ -алгеброй, содержащейся в  $\mathcal{B}_T$  как прообраз  $\sigma$ -алгебры при измеримом отображении (см. (34)).

Между множествами из  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{B}_U$  и  $\mathcal{B}_{T,U}$  можно установить *взаимно-однозначное соответствие*:

$$\mathcal{B}_U \ni B_U \longleftrightarrow \tilde{B}_U = B_U \times \prod_{t \in T \setminus U} S_t \in \mathcal{B}_{T,U}, \quad (36)$$

причем  $B_U \cap B'_U = \emptyset \iff \tilde{B}_U \cap \tilde{B}'_U = \emptyset$ .

Кроме того, для  $V \subset U \subset T$ , согласно (35) и (34),

$$\mathcal{B}_{T,V} = \pi_{T,V}^{-1} \mathcal{B}_V = \pi_{T,U}^{-1}(\pi_{U,V}^{-1} \mathcal{B}_V) \subset \pi_{T,U}^{-1} \mathcal{B}_U = \mathcal{B}_{T,U}. \quad (37)$$

Обозначим

$$\mathcal{C}_T = \bigcup_{J \in F(T)} \mathcal{B}_{T,J},$$

где  $F(T)$  — совокупность *конечных* подмножеств  $T$  (т. е.  $C \in \mathcal{C}_T \iff \exists J \in F(T): C \in \mathcal{B}_{T,J}$ ).

Учитывая (37), видим, что  $\mathcal{C}_T$  есть (“цилиндрическая”) *алгебра*, состоящая из всевозможных *цилиндров*  $C = \pi_{T,J}^{-1} B_J$ , где *основание цилиндра*  $B_J \in \mathcal{B}_J$ ,  $J \in F(T)$  (разумеется,  $C$  можно записать также в виде  $C = B_J \times \prod_{t \in T \setminus J} S_t$ ).

Для того, чтобы пояснить происхождение названия *цилиндр* в данном контексте возьмем в плоскости  $x_3 = 0$  пространства  $\mathbb{R}^3$  множество  $B$  и все его точки “умножим” на прямую  $\mathbb{R}$ . Полученное таким образом множество

$$B \times \mathbb{R} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: (x_1, x_2) \in B, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

является, очевидно, *цилиндром* в обычном геометрическом смысле.

§ 17. Известно, что одна и та же  $\sigma$ -алгебра может порождаться разными системами множеств. Применительно к  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}_T$  имеет место следующая теорема.

**Теорема 6.** Пусть  $T$  — бесконечное множество и  $N(T)$  — совокупность счетных подмножеств  $T$ . Тогда для  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{B}_T$  справедливы следующие представления:

$$\mathcal{B}_T = \sigma\{\mathcal{C}_T\} \quad \text{и} \quad \mathcal{B}_T = \bigcup_{U \in N(T)} \mathcal{B}_{T,U}. \quad (38)$$

**Доказательство.** Поскольку  $\mathcal{B}_{T,U} \subset \mathcal{B}_T$  для каждого  $U \subset T$ , то  $\mathcal{C}_T \subset \mathcal{B}_T$  и  $\sigma\{\mathcal{C}_T\} \subset \mathcal{B}_T$ . С другой стороны,  $\pi_{T,t}^{-1}\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_{T,\{t\}} \subset \mathcal{C}_T$ , поэтому  $\mathcal{B}_T \subset \sigma\{\mathcal{C}_T\}$  в силу (17). Первое соотношение (38) установлено.

Покажем, что  $\mathcal{A} = \bigcup_{U \in N(T)} \mathcal{B}_{T,U}$  есть  $\sigma$ -алгебра. Пусть  $A_n \in \mathcal{A}$ , т. е.  $A_n \in \mathcal{B}_{T,U_n}$  для некоторого  $U_n \in N(T)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Из (37) получаем, что  $\mathcal{B}_{T,U_n} \subset \mathcal{B}_{T,U}$ , где  $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \in N(T)$ . Следовательно,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}_{T,U} \subset \mathcal{A}$ . Очевидно, система множеств  $\mathcal{A}$  имеет и остальные свойства  $\sigma$ -алгебры. В то же время для любого  $t \in T$  можно взять (так как  $T$  бесконечно) множество  $U(t) \in N(T)$  такое, что  $t \in U(t)$ . Тогда  $\mathcal{B}_{T,\{t\}} \subset \mathcal{B}_{T,U(t)} \subset \mathcal{A}$  при каждом  $t \in T$ . В итоге  $\mathcal{B}_T \subset \mathcal{A}$ . Кроме того,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_T$ , так как  $\mathcal{B}_{T,U} \subset \mathcal{B}_T$  для любого  $U \subset T$ . Значит,  $\mathcal{B}_T = \mathcal{A}$ , что доказывает второе соотношение (38).  $\square$

Наглядно теорема 6 утверждает, что принадлежность функции  $y$  ( $y$  из  $S_T$ ) множеству  $B$  цилиндрической  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{B}_T$  определяется только ее значениями на некотором **счетном** множестве  $U \subset T$  (выбор  $U$  зависит лишь от множества  $B$ ; если само  $T$  счетно, то (38) сводится к тривиальному равенству  $\mathcal{B}_T = \mathcal{B}_{T,T}$ ).

Пусть  $T = [0, 1]$  и  $S_t = \mathbb{R}$  для  $t \in T$ . Тогда из сказанного следует, например, что  $C[0, 1] \notin \mathcal{B}_T$ , где  $C[0, 1]$  — множество непрерывных действительных функций на отрезке  $[0, 1]$ . Множество  $M_\alpha = \left\{ y \in S_T : \sup_{t \in T} y(t) \leq \alpha \right\}$  при любом  $\alpha \in \mathbb{R}$  есть несчетное пересечение (по  $t \in [0, 1]$ ) элементарных цилиндров  $\{y \in S_T : y(t) \leq \alpha\}$ , поэтому, исходя из свойств  $\sigma$ -алгебры, нельзя утверждать, что  $M_\alpha \in \mathcal{B}_T$ . Однако теперь мы можем сказать больше: “ $M_\alpha$  заведомо не входит в  $\mathcal{B}_T$  при каждом  $\alpha \in \mathbb{R}$ ”.

Итак, в случае несчетного  $T$  возникают серьезные трудности в связи с тем, что многие интересные множества в пространстве траекторий *не входят* в цилиндрическую  $\sigma$ -алгебру. Поэтому, вообще говоря, неизвестно, можно ли говорить о соответствующей им вероятности содержать траектории процесса (см. упражнение 22).

**§ 18.** Если (п. в.) траектории процесса  $X = \{X(t), t \in T\}$  лежат в “хорошем” подмножестве пространства всех траекторий  $S_T$ , то ситуация упрощается. Для иллюстрации этого положения потребуются вспомогательные утверждения.

**Лемма 11.** Пусть  $S_t$ ,  $t \in T$ , — сепарабельные метрические пространства с метриками  $\rho_t$  и борелевскими  $\sigma$ -алгебрами  $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}(S_t)$ ; по-прежнему,  $F(T)$  — совокупность конечных подмножеств  $T$ . Тогда пространство  $S_J$ ,  $J \in F(T)$ , функций  $y = y(t)$ , заданных на  $J$  и таких, что  $y(t) \in S_t$ , снабженное метрикой

$$\rho_J(x, y) = \max_{t \in J} \rho_t(x(t), y(t)), \quad x, y \in S_J, \quad (39)$$

является сепарабельным метрическим пространством. При этом  $\mathcal{B}_J = \mathcal{B}(S_J)$ , т. е. цилиндрическая  $\sigma$ -алгебра совпадает с борелевской. Если, кроме того,

пространства  $S_t$ ,  $t \in T$ , полны (тем самым являются польскими), то  $S_J$  — польское пространство.

**Доказательство.** Очевидно, функция  $\rho_J$  обладает всеми свойствами метрики. Сходимость в этой метрике функций  $y_n(\cdot) \in S_J$  равносильна тому, что  $y_n(t)$  сходятся в  $(S_t, \rho_t)$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $t \in J$ . Легко видеть, что  $(S_J, \rho_J)$  — сепарабельное пространство.

“Проектирование”  $\pi_{J,t}: S_J \rightarrow S_t$ , определяемое формулой  $\pi_{J,t}y = y(t)$ , есть непрерывное отображение  $(S_J, \rho_J)$  в  $(S_t, \rho_t)$  для каждого  $t \in J$ . Поэтому  $\pi_{J,t}^{-1}(G_t) \in \mathcal{B}(S_J)$  для любого открытого множества  $G_t \in \mathcal{B}(S_t)$ . По следствию 1 имеем  $\pi_{J,t}^{-1}B_t \in \mathcal{B}(S_J)$  для любого  $B_t \in \mathcal{B}(S_t)$ . Из (17) видим, что  $\mathcal{B}_J \subset \mathcal{B}(S_J)$ . Подчеркнем, что для последнего включения не требуется сепарабельность  $S_t$ ,  $t \in T$ .

Пусть теперь  $G$  — любое открытое множество в  $(S_J, \rho_J)$ . В силу сепарабельности метрического пространства  $(S_J, \rho_J)$  множество  $G$  можно представить в виде счетного объединения открытых шаров (проверьте это в качестве упражнения или см. [35; гл. II, § 5, п. 3]). Шар  $B_\varepsilon(y) = \{z \in S_J: \rho_J(z, y) < \varepsilon\}$  является “прямоугольником” в  $S_J$ . Следовательно, любое открытое множество  $G$  представимо в виде счетного объединения “прямоугольников” из  $\mathcal{B}_J$ . Поэтому  $\mathcal{B}(S_J) \subset \mathcal{B}_J$ .

Если пространства  $S_t$ ,  $t \in J$ , полны, то полно и  $S_J$ .  $\square$

**Замечание 5.** Мы установили, что в сепарабельном метрическом пространстве борелевская  $\sigma$ -алгебра совпадает с  $\sigma$ -алгеброй, порожденной открытыми (значит, и замкнутыми) шарами. В несепарабельном пространстве упомянутые  $\sigma$ -алгебры могут, вообще говоря, не совпадать.

Пусть  $T$  — компакт в некотором метрическом пространстве  $V$ , а  $S$  — некоторое польское пространство с метрикой  $\rho$ . Введем пространство  $C(T, S)$  непрерывных функций  $x = x(t)$ , заданных на множестве  $T$  и принимающих при каждом  $t$  значения в  $S$ . Снабдим это пространство равномерной метрикой

$$\rho_C(x, y) = \sup_{t \in T} \rho(x(t), y(t)), \quad x, y \in C(T, S). \quad (40)$$

Цилиндрическую  $\sigma$ -алгебру в пространстве  $C(T, S)$  определим как  $\sigma$ -алгебру, порожденную системой  $\mathcal{C}_T \cap C(T, S)$ . Иначе говоря, в каждом цилиндре пространства  $S_T$  оставляем лишь непрерывные функции, а затем берем наименьшую  $\sigma$ -алгебру в  $C(T, S)$ , содержащую эти “непрерывные цилиндры”.

**Лемма 12.** Введенное пространство  $C(T, S)$  непрерывных функций является польским. В этом пространстве борелевская  $\sigma$ -алгебра совпадает с цилиндрической.

**Доказательство.** Первое утверждение элементарно и не обсуждается. Аналогично доказательству леммы 11 убеждаемся, что цилиндрическая  $\sigma$ -алгебра пространства  $C(T, S)$  содержится в его борелевской  $\sigma$ -алгебре. Для проверки обратного включения возьмем счетное всюду плотное в  $T$  множество  $M$ . Тогда замкнутый шар  $B_r(x) = \{y \in C(T, S): \rho_C(x, y) \leq r\}$ , где  $x \in C(T, S)$  и  $r \geq 0$ , можно представить в виде

$$B_r(x) = \bigcap_{t \in M} \{y \in C(T, S): \rho(x(t), y(t)) \leq r\}, \quad (41)$$



т. е. как счетное пересечение цилиндрических множеств в  $C(T, S)$ . Искомое утверждение вытекает из замечания 5.  $\square$

С теоремой 3 интересно сопоставить следующий результат.

**Теорема 7.** Пусть  $X = \{X(t), t \in T\}$  такая случайная функция, заданная на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , что п. в. ее траектории лежат в описанном выше пространстве  $C(T, S)$ . Тогда случайный элемент  $\mathbf{X}$ , введенный в (15), является  $\mathcal{F} \mid \mathcal{B}(C(T, S))$ -измеримым отображением.

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{\Omega}$  обозначает множество тех точек  $\omega \in \Omega$ , для которых траектория  $X(\cdot, \omega)$  непрерывна на  $T$  (по условию  $P(\tilde{\Omega}) = 1$ ). Пользуясь (41), получаем

$$\{\omega: \mathbf{X}(\omega) \in B_r(x)\} = \bigcap_{t \in M} \{\omega \in \tilde{\Omega}: \rho(x(t), X(t, \omega)) \leq r\} \cup \{\omega \notin \tilde{\Omega}: \mathbf{X}(\omega) \in B_r(x)\}.$$

Учитывая непрерывность функции  $\rho$ , имеем  $\{\omega: \rho(x(t), X(t, \omega)) \leq r\} \in \mathcal{F}$  при всех  $x(\cdot) \in C(T, S)$ ,  $t \in T$  и  $r \geq 0$ . Множество  $\{\omega \notin \tilde{\Omega}: \mathbf{X}(\omega) \in B_r(x)\} \subset \Omega \setminus \tilde{\Omega}$ , а вероятностное пространство (как было оговорено ранее) всегда предполагается полным, значит, это множество также принадлежит  $\mathcal{F}$ .

Требуемая измеримость  $\mathbf{X}$  следует из замечания 5.  $\square$

**Пример 7.** Рассмотрим  $T = [0, 1]$  и  $S = \mathbb{R}$  (с евклидовой метрикой  $\rho$ ). Покажем, что для процесса  $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$  с п. н. непрерывными траекториями множество  $\left\{ \sup_{t \in [0, 1]} X(t) \leq \alpha \right\} \in \mathcal{F}$  при любом  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Функционал  $h(x(\cdot)) := \sup_{t \in [0, 1]} x(t)$ , где  $x \in C([0, 1])$ , есть непрерывное отображение пространства  $(C([0, 1]), \rho_C)$  в  $(\mathbb{R}, \rho)$ , следовательно,  $h \in \mathcal{B}(C([0, 1])) \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Кроме того,  $\mathbf{X} \in \mathcal{F} \mid \mathcal{B}(C([0, 1]))$  по теореме 7. Очевидно,

$$\left\{ \omega: \sup_{t \in [0, 1]} X(t, \omega) \leq \alpha \right\} = \left\{ \omega: h(\mathbf{X}(\omega)) \leq \alpha \right\}$$

при каждом  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Суперпозиция измеримых отображений дает измеримое (относительно соответствующих  $\sigma$ -алгебр) отображение. Требуемое утверждение получено.

**§ 19.** Если на измеримом пространстве  $(S_T, \mathcal{B}_T)$  задана мера  $Q$ , то в соответствии с леммой 8 случайная функция  $X = \{X(t), t \in T\}$ , имеющая своим распределением вероятностей меру  $Q$  (т. е.  $P_X = Q$ ), может быть определена следующим образом:

$$X(t, \omega) = \omega(t) \quad \text{для } \omega(\cdot) \in S_T, \quad t \in T. \quad (42)$$

Формулой (42) задается (см. (16)) семейство *координатных отображений* пространства  $S_T$ ; при этом также говорят, что рассматриваемый процесс  $X$  *непосредственно задан* или является *координатным*.

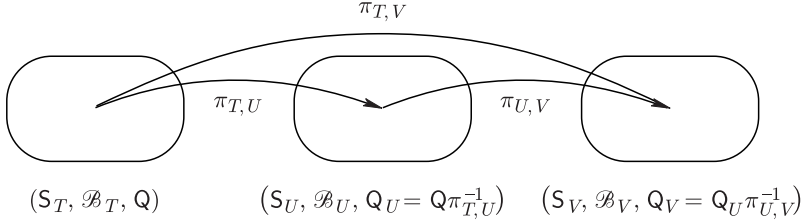


Рис. 5

Пусть на  $(S_T, \mathcal{B}_T)$  имеется мера  $Q$ . Тогда на “суженных” пространствах  $(S_U, \mathcal{B}_U)$ ,  $U \subset T$ , возникают меры  $Q_U := Q\pi_{T,U}^{-1}$  (“проекции” или *образы меры*  $Q$ ).

Для  $V \subset U \subset T$ , учитывая (6) и (35), имеем

$$Q\pi_{T,V}^{-1} = Q(\pi_{T,U}^{-1}\pi_{U,V}^{-1}) = (Q\pi_{T,U}^{-1})\pi_{U,V}^{-1}.$$

Тем самым получены условия, называемые *условиями согласованности проекций меры*  $Q$  на “суженных” пространствах:

$$Q_V = Q_U\pi_{U,V}^{-1} \text{ на } \mathcal{B}_V \text{ при всех } V \subset U \subset T. \quad (43)$$

Дадим простое условие, эквивалентное (43) для конечных множеств  $V, U$  (обозначаемых далее  $I$  и  $J$  соответственно) из  $T$ . Из леммы 2 вытекает, что семейство мер  $Q_J$  на  $(S_J, \mathcal{B}_J)$ , где  $J \in F(T)$ , согласовано тогда и только тогда, когда

$$Q_I(B_I) = Q_J\pi_{J,I}^{-1}(B_I) \quad (44)$$

для любого “прямоугольника”  $B_I = \{y \in S_I : y(t) \in B_t, t \in I\}$  ( $B_t \in \mathcal{B}_t, t \in I$ ), всех  $J \in F(T)$  и  $I \subset J$ .

Удобство обращения с мерами, индексированными множествами (а не упорядоченными наборами точек) состоит в том, что вместо двух типов условий симметрии и согласованности, введенных в § 11, возникает одна система условий согласованности. При этом формула (43) позволяет лучше понять смысл согласованности условных распределений, используемых для построения гиббсовских случайных полей (см., например, [15]).

**§ 20.** Обратимся к вопросу о том, какие случайные функции и в каком смысле могут считаться “неотличимыми”.

**Определение 11.** Процессы  $X = \{X_t, t \in T\}$  и  $Y = \{Y_t, t \in T\}$ , заданные на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и для  $t \in T$  принимающие значения в  $(S_t, \mathcal{B}_t)$ , называются *эквивалентными* (или *стохастически эквивалентными*), если

$$P(\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)) = 0 \text{ для каждого } t \in T.$$

При этом предполагается, что множества  $\{\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} \in \mathcal{F}$ . Очевидно, для процессов  $X$  и  $Y$  со значениями в пространстве  $\mathbb{R}^m$  последнее предположение выполнено автоматически. Любой процесс  $Y$ , эквивалентный  $X$ , называется *модификацией* или *версией* процесса  $X$  (тогда и  $X$  является модификацией  $Y$ ).

Традиционный *пример эквивалентных процессов* ( $X$  и  $Y$ ), но в то же самое время с “сильно отличающимися” траекториями, строится следующим образом:  $T = \Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ ,  $P$  — мера Лебега на  $[0, 1]$ ,  $X_t(\omega) = \mathbf{1}_{\{t\}}(\omega)$ ,  $Y_t(\omega) \equiv 0$ ,  $t \in T$ ,  $\omega \in \Omega$ . Отметим, что все траектории  $X$  *разрывны*, а все траектории  $Y$  — *непрерывны*.

**Определение 12.** Процессы  $X$  и  $Y$  (возможно, заданные на разных вероятностных пространствах, но при каждом  $t \in T$  принимающие значения в одном и том же пространстве  $(S_t, \mathcal{B}_t)$ ), называются *стохастически эквивалентными в широком смысле*, если у них одни и те же распределения вероятностей, т. е. когда  $\text{Law}(X) = \text{Law}(Y)$  (на  $\mathcal{B}_T$ ).

Пусть  $X = \{X_t, t \in T\}$  и  $Y = \{Y_t, t \in T\}$  — случайные процессы с траекториями в пространстве  $S_T$ . Тогда из леммы 2 вытекает, что  $\text{Law}(X) = \text{Law}(Y)$  в том и только том случае, когда

$$\text{Law}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = \text{Law}(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}), \quad t_1, \dots, t_n \in T, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (45)$$

т. е. когда совпадают все конечномерные распределения этих процессов.

Легко видеть, что эквивалентные процессы являются стохастически эквивалентными в широком смысле.

**Определение 13.** Процессы  $X = \{X_t, t \in T\}$  и  $Y = \{Y_t, t \in T\}$ , определенные на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и принимающие при каждом  $t \in T$  значения в  $(S_t, \mathcal{B}_t)$ , называются (стохастически) *неразличимыми*, если

$$P(\omega: X_t(\omega) \neq Y_t(\omega) \text{ для некоторого } t \in T) = 0,$$

т. е. с *вероятностью* 1 совпадают траектории этих процессов.

Заметим, что в данном определении предполагается, что  $P$ -мера множества  $A = \{\omega: X_t(\omega) \neq Y_t(\omega) \text{ для некоторого } t \in T\}$  определена (и более того, равна нулю), т. е.  $A \in \mathcal{F}$ .

Если вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  является *полным*, то из верного при каждом  $s \in T$  включения  $\{\omega: X_s(\omega) \neq Y_s(\omega)\} \subset \{\omega: X_t(\omega) \neq Y_t(\omega) \text{ для некоторого } t \in T\}$  вытекает, что неразличимые процессы являются эквивалентными.

§ 21. В связи с теоремой Колмогорова и построениями процессов с заданными конечномерными распределениями отметим ряд обстоятельств.

Теорема Колмогорова утверждает, что, отправляясь от системы согласованных конечномерных распределений вероятностей, *можно построить* случайную функцию с теми же самыми конечномерными распределениями. Важно при этом подчеркнуть, что в теореме Колмогорова случайная функция  $X = \{X(t, \omega), t \in T\}$  строится *координатным* образом:  $X(t, \omega) = \omega(t)$ ,  $t \in T$ . Это означает, что траекториями  $X$  могут быть *любые функции*  $\omega = \omega(t)$ ,  $t \in T$ , принимающие при каждом  $t \in T$  значения в  $(S_t, \mathcal{B}_t)$ . Тем самым, в этой теореме остается открытым вопрос о том, насколько же “хороши”, так сказать, “типичные” траектории того или иного процесса  $X$ , построенного по *заданным* конечномерным распределениям.

Далее многие утверждения содержат следующие слова: “Пусть  $X = \{X_t, t \in T\}$  — случайный процесс на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ”. При этом структура самого вероятностного пространства вовсе не уточняется, особенно тогда, когда основной интерес связан с распределениями вероятностей процесса  $X$ . В то же самое время часто возникает необходимость рассмотрения на заданном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  других, помимо  $X$ , случайных объектов. В этой ситуации надо, чтобы вероятностное пространство было достаточно “богато” и на нем можно было бы определить новые объекты.

Одна из возможных процедур, позволяющая учесть такое требование, состоит в рассмотрении наряду с  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  его *расширения*.

Именно, пусть  $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$  — некоторое иное вероятностное пространство. Определим новое вероятностное пространство  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ , полагая

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times \Omega', \quad \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', \quad \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \otimes \mathbf{P}'.$$

Здесь  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$  есть  $\sigma$ -алгебра в  $\Omega \times \Omega'$ , порожденная “прямоугольниками” вида  $A \times A'$ , где  $A \in \mathcal{F}$  и  $A' \in \mathcal{F}'$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}(A \times A') := \mathbf{P}(A)\mathbf{P}'(A')$  для  $A \in \mathcal{F}$  и  $A' \in \mathcal{F}'$ , а затем однозначно продолжается до меры  $\tilde{\mathbf{P}}$  на  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Если  $X = \{X_t(\omega), t \in T\}$  — случайный процесс на  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , то его можно естественным образом считать также заданным и на  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ . Действительно, для  $\tilde{\omega} = (\omega, \omega')$  положим

$$\tilde{X}_t(\tilde{\omega}) = X_t(\omega), \quad t \in T. \quad (46)$$

Очевидно, для так определенного процесса  $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t, t \in T\}$  справедливо следующее свойство:

$$\text{Law}(\tilde{X} | \tilde{\mathbf{P}}) = \text{Law}(X | \mathbf{P}), \quad (47)$$

т. е. распределения вероятностей  $\tilde{\mathbf{P}}_{\tilde{X}}$  и  $\mathbf{P}_X$  на  $\mathcal{B}_T$  совпадают.

Конечно, вероятностное пространство  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$  “богаче”, нежели пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Поэтому очень часто в вероятностных рассуждениях сразу подразумевают, что исходное вероятностное пространство “достаточно богато”.

В том случае, когда  $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}') = ([0, 1], \overline{\mathcal{B}}([0, 1]), \lambda)$ , где  $\lambda$  — лебеговская мера и  $\overline{\mathcal{B}}[0, 1]$  — лебеговское пополнение борелевской  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{B}([0, 1])$ , расширение  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$  принято называть *стандартным* расширением пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ .

**§ 22.** Как правило, наиболее важен случай процесса  $X = \{X_t, t \in T\}$ , для которого величины  $X_t$  при каждом  $t$  принимают значения в одном и том же измеримом пространстве  $(S, \mathcal{B})$ . В этом случае часто возникает необходимость в дополнительных *условиях на измеримость* процесса. Первым шагом в этом направлении является следующее

**Определение 14.** Пусть  $(T, \mathcal{A})$  — измеримое пространство. Случайный процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$ , определенный на  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  и принимающий при каждом  $t \in T$  значения в измеримом пространстве  $(S, \mathcal{B})$ , называется *измеримым*, если отображение

$$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega) \in S, \quad (t, \omega) \in T \times \Omega, \quad (48)$$

является  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{F} | \mathcal{B}$ -измеримым.

В связи с этим определением важно подчеркнуть следующее принципиально важное обстоятельство: здесь мы рассматриваем случайный процесс  $X = \{X_t(\omega), t \in T\}$  не как функцию от  $t$  при заданном  $\omega$  или как функцию от  $\omega$  при заданном  $t$ , а как измеримое отображение  $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ . Иначе говоря, мы рассматриваем процесс  $X$  как (измеримую) функцию пары  $(t, \omega)$ .

Чаще всего  $S$  — метрическое пространство и  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(S)$ . Если  $T$  — дискретное множество (конечное или счетное) и  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра всех подмножеств  $T$ , то процесс  $X$ , очевидно, измерим.

Основной смысл введения этого понятия измеримости процесса состоит в том, что, рассматривая *случайное время*  $\tau = \tau(\omega)$  ( $\tau \in \mathcal{F} \mid \mathcal{A}$ ), мы всегда будем получать (см. упражнение 27) случайную величину  $X_{\tau(\omega)}(\omega)$ .

Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  — последовательность независимых одинаково распределенных величин, принимающих значения в измеримом пространстве  $(S, \mathcal{B})$ . В следующем примере показано, что наличие *случайного индекса*  $\tau$  приводит к тому, что распределение  $X_\tau$  может отличаться от распределения  $X_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

**Пример 8.** Для описанной выше последовательности  $X, X_1, X_2, \dots$  и некоторого множества  $B \in \mathcal{B}$  с  $P_X(B) > 0$  определим (расширенную, т. е. со значениями в  $\overline{\mathbb{R}}$ ) случайную величину  $\tau$ :

$$\tau(\omega) = \inf \{n \in \mathbb{N}: X_n(\omega) \in B\} \quad (49)$$

( $\tau(\omega) := \infty$ , если  $X_n(\omega) \notin B$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ ).

Покажем, что  $\tau < \infty$  п. н. и найдем распределение  $X_\tau$ . (Если  $\tau(\omega) = \infty$ , то полагаем, например,  $X_\tau(\omega) = X(\omega)$ , т. е. считаем  $X_\infty(\omega) = X(\omega)$ .)

Заметим, что  $\{\tau = 1\} = \{X_1 \in B\}$ ,  $\{\tau = n\} = \{X_1 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\}$  для  $n \geq 2$ . Поэтому

$$P(\tau = n) = P(X \in B)(1 - P(X \in B))^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Следовательно,  $\tau < \infty$  п. н. Для любого множества  $C \in \mathcal{B}$  получаем

$$\begin{aligned} P(X_\tau \in C) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X_\tau \in C, \tau = n) = \\ &= P(X_1 \in BC) + \sum_{n \geq 2} P(X_n \in BC, X_1 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X \in BC)(1 - P(X \in B))^{n-1} = \\ &= P(X \in BC)/P(X \in B) = P_X(C \mid B). \end{aligned}$$

Интересно отметить, что распределение  $X_\tau$  будет совпадать с распределением  $X$ , если только  $B$  не зависит от любого  $C \in \mathcal{B}$  (в вероятностном пространстве  $(S, \mathcal{B}, P_X)$ ), что возможно лишь для  $B$  с  $P_X(B) = 1$ .

## Дополнения и упражнения

1. С помощью теоремы Колмогорова (теорема 4) получите частный случай теоремы Ломницкого–Улама (теорема 2) для семейства борелевских пространств.

Интересно отметить, что в элементарном случае, когда требуется построить последовательность независимых действительных случайных величин с заданными распределениями, это легко сделать непосредственно (без теоремы Колмогорова) следующим образом.

Пусть  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$  и  $P = \text{mes}$  (мера Лебега). Рассмотрим двоичное разложение числа  $\omega \in \Omega$ :

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) 2^{-k}, \quad (50)$$

где коэффициенты  $a_k(\omega)$  равны 0 или 1. Представление (50) неоднозначно. Предполагается, что в неоднозначных случаях рассматриваются только представления с бесконечным количеством нулей среди коэффициентов  $a_k(\omega)$ .

2. Проверьте, что величины  $a_1(\omega), a_2(\omega), \dots$ , введенные в (50), образуют последовательность независимых случайных величин на указанном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , причем такую, что

$$P(a_k = 1) = P(a_k = 0) = 1/2, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (51)$$

Докажите, что если на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  имеется последовательность независимых случайных величин, удовлетворяющих условию (51), то случайная величина  $\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) 2^{-k}$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[0, 1]$ .

3. Докажите, что если  $F$  — некоторая функция распределения и  $U$  — равномерно распределенная на отрезке  $[0, 1]$  случайная величина (заданная на некотором вероятностном пространстве), то  $X(\omega) = F^{\text{inv}}(U(\omega))$  является случайной величиной с функцией распределения  $F$  (обобщенная обратная функция  $F^{\text{inv}}(x) = \inf\{y: F(y) \geq x\}$ ,  $x \in [0, 1]$ ; если  $F(y) < 1$  для всех  $y \in \mathbb{R}$ , то  $F^{\text{inv}}(1) := +\infty$ ; если  $F(y) > 0$  для всех  $y \in \mathbb{R}$ , то  $F^{\text{inv}}(0) := -\infty$ ).

Расположим величины  $a_1, a_2, \dots$ , фигурирующие в (50), в виде таблицы

$$\begin{array}{cccc} b_{11}(\omega), & b_{12}(\omega), & \dots \\ b_{21}(\omega), & b_{22}(\omega), & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

(например,  $b_{11} = a_1, b_{12} = a_2, b_{21} = a_3, b_{31} = a_4, b_{22} = a_5, b_{13} = a_6, \dots$ ) и определим величины  $U_n(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}(\omega) 2^{-k}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Из упражнений 2 и 3 следует, что для любых заданных функций распределения  $F_1, F_2, \dots$  величины (со значениями в  $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ )  $X_n = F_n^{\text{inv}}(U_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , будут независимы и  $P(X_n \leq x) = F_n(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- 4 (сравните с теоремой 6). Приведите пример семейства  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{A}_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , состоящих из некоторых подмножеств  $\Omega$  таких, что  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$  не является  $\sigma$ -алгеброй.
5. Получите обобщение леммы 7 на случайные элементы со значениями в борелевском пространстве.
6. Пусть множество  $G$  состоит из функций  $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , которые не убывают по каждому аргументу. Покажите, что  $G \notin \mathcal{B}_T$  ( $S_t = \mathbb{R}$ ,  $t \in T = \mathbb{R}^d$ ). Тем не менее, найдите  $P_X(G)$ , где  $X = \{X_t = \xi(1 + f(t)\eta), t \in \mathbb{R}^d\}$ ,  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  является невозрастающей по каждой переменной функцией, а  $\xi$  и  $\eta$  — независимые величины, равномерно распределенные на отрезке  $[-1, 2]$ .

- 7 (сравните с упражнением 2). Докажите, что на  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \mathbf{P})$ , где  $\mathbf{P}$  — мера Лебега, невозможно построить (континуальное) семейство  $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$  независимых бернуллиевских величин, т. е. таких случайных величин  $X_t, t \in \mathbb{R}$ , что

$$\mathbf{P}(X_t = 0) = \mathbf{P}(X_t = 1) = 1/2 \text{ при каждом } t.$$

8. Докажите, что ни на каком вероятностном пространстве *невозможно* задать семейство независимых одинаково распределенных действительных невырожденных случайных величин  $X(t, \omega), t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega$ , так, чтобы с вероятностью 1 траектории  $X(\cdot, \omega)$  были *непрерывны* на  $\mathbb{R}$ .
- 9 (сравните с теоремой 4). Пусть  $C(\mathbb{R})$  — пространство действительных функций, непрерывных на  $\mathbb{R}$ . Зададим на цилиндрических множествах вида  $D_J = \{x \in C(\mathbb{R}) : x(t) \in B_t, t \in J\}$ , где  $B_t \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), t \in J$  и  $J \in F(\mathbb{R})$  ( $F(\mathbb{R})$  — совокупность конечных подмножеств  $\mathbb{R}$ ), функции

$$\mathbf{Q}_J(D_J) := \prod_{t \in J} \mathbf{Q}_0(B_t),$$

здесь  $\mathbf{Q}_0$  — некоторая мера на  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Можно ли ввести меру  $\mathbf{P}$  на  $\sigma$ -алгебре цилиндрических множеств пространства  $C(\mathbb{R})$  так, чтобы  $\mathbf{P}(D_J) = \mathbf{Q}_J(D_J)$  для всех  $J \in F(\mathbb{R})$  и любых введенных выше цилиндров  $D_J$ ?

10. Как выглядят траектории процесса (11)?
11. Пусть  $m = 1$  в определении (13), т. е.  $\{\zeta_j\}$  — независимые одинаково распределенные скалярные случайные величины, и пусть  $d = 1$ . Положим

$$X_n(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_n([0, t], \omega), \quad t \in [0, 1].$$

Постройте график траектории этого процесса в следующих случаях:

- а)  $\mu$  — мера Лебега на  $\mathbb{R}$ ; б)  $\mu$  — *считающая мера*, т. е.

$$\mu(B) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_B(j), \quad B \subset \mathbb{R}.$$

О процессах, возникающих в пунктах а) и б) упражнения 11 (соответственно с траекториями в пространстве  $C[0, 1]$  и в пространстве Скорохода  $D[0, 1]$ , вводимом далее), рекомендуется прочитать главы 2 и 3 монографии [2].

12. Пусть  $m = 1$  в определении (12). Положим

$$F_n^*(x, \omega) = \mathbf{P}_n((-\infty, x], \omega), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Постройте график траектории процесса  $F_n^*(x, \omega)$ , который принято называть *эмпирической функцией распределения*. В чем будет отличие случаев, когда  $\xi_j$  равномерно распределены на  $[0, 1]$  и когда  $\xi_j$  — бернуллиевские величины с  $\mathbf{P}(\xi_j = 1) = p, \mathbf{P}(\xi_j = 0) = 1 - p, 0 < p < 1$ ?

Введем следующее определение.

**Определение 15.** Класс множеств  $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$  называется *конечно-аппроксимируемым* относительно меры  $\mathbf{Q}$ , заданной на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ , если при любом  $\varepsilon > 0$  можно указать множества  $S_1^{(\varepsilon)}, \dots, S_N^{(\varepsilon)} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ , где  $N = N(\varepsilon)$ , такие, что для каждого  $B \in \mathcal{M}$  найдутся  $S_i^{(\varepsilon)}$  и  $S_j^{(\varepsilon)}$  со свойствами  $S_i^{(\varepsilon)} \subset B \subset S_j^{(\varepsilon)}$  и  $\mathbf{Q}(S_j^{(\varepsilon)} \setminus S_i^{(\varepsilon)}) < \varepsilon$ .

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 8** (см. [3; с. 421]). Пусть  $\mathcal{M}$  — класс множеств, являющийся конечно-аппроксимируемым относительно меры  $\mathbf{Q}$ . Пусть  $P_n(B, \omega)$  — процесс, определенный формулой (12), и соответствующие векторы имеют закон распределения  $P_{\xi_1} = \mathbf{Q}$ . Тогда

$$\sup_{B \in \mathcal{M}} |P_n(B, \omega) - \mathbf{Q}(B)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (52)$$

для всех  $\omega \in \tilde{\Omega}$ , где  $\Omega \setminus \tilde{\Omega} \subset \Omega_0$  и  $P(\Omega_0) = 0$ . Иначе говоря, если вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  полно, то в (52) имеет место сходимость почти наверное.

- 13.** Докажите, что класс  $\mathcal{M} = \{(-\infty, x], x \in \mathbb{R}^m\}$ , т. е. совокупность множеств вида  $(-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_m], (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ , является конечно-аппроксимируемым относительно любой (вероятностной) меры  $\mathbf{Q}$ . Тем самым справедлив *многомерный вариант теоремы Гливенко–Кантелли* о п.н. равномерной сходимости при  $n \rightarrow \infty$  эмпирических функций распределения  $F_n^*(x, \omega) := P_n((-\infty, x], \omega)$  к функции распределения  $F_{\xi_1}(x)$ :

$$\sup_x |F_n^*(x, \omega) - F_{\xi_1}(x)| \rightarrow 0 \quad (P\text{-п.н.}).$$

- 14.** Докажите, что если мера  $\mathbf{Q} = P_{\xi_1}$  является *абсолютно непрерывной* относительно меры Лебега в  $\mathbb{R}^m$ , то утверждение (52) также справедливо для класса  $\mathcal{M}$ , являющегося классом выпуклых множеств. (Это утверждение, вытекающее из упражнения 13 при  $m = 1$ , становится нетривиальным и не вытекающим из него, если  $m \geq 2$ .)
- 15.** Покажите, что утверждение, содержащееся в упражнении 14, может стать неверным, если отказаться от условия абсолютной непрерывности  $\mathbf{Q}$  относительно меры Лебега (при  $m \geq 2$ ).

Об исследовании эмпирических мер, а также эмпирических процессов, индексированных *семейством* функций, см., например, [120].

Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}([0, 1]^d)$ ,  $d \geq 1$ . Для функции  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  обозначим

$$\|F\|_{\mathcal{A}} = \sup_{A \in \mathcal{A}} |F(A)|.$$

Положим  $F_\delta(A) = \text{mes}(A^{(\delta)})$ ,  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\delta > 0$  и  $A^{(\delta)} = \{x \in \mathbb{R}^d : \rho(x, \partial A) < \delta\}$ ,  $\rho(x, \partial A) = \inf_{y \in \partial A} \rho(x, y)$ ,  $\rho$  — евклидова метрика и  $\text{mes}$  — мера Лебега в  $\mathbb{R}^d$ .



Предположим, что класс множеств  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}([0, 1]^d)$  таков, что

$$\|F_\delta\|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0, \quad \text{при } \delta \rightarrow 0+. \quad (53)$$

**16.** Докажите, что свойство (53) выполнено, если  $\mathcal{A}$  — класс прямоугольников вида  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d] \subset [0, 1]^d$ .

Справедлив следующий *равномерный усиленный закон больших чисел*.

**Теорема 9** ([96]). Пусть  $\{X_j, j \in \mathbb{N}^d\}$  — случайное поле, состоящее из независимых одинаково распределенных действительных величин со средним  $c_0$ . Пусть класс множеств  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}([0, 1]^d)$  удовлетворяет условию (53). Тогда

$$\|n^{-d}S_n(\cdot) - c_0 \text{mes}(\cdot)\|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0 \quad \text{п. н. при } n \rightarrow \infty,$$

здесь  $S_n(A) = \sum_{j \in nA} X_j$ ,  $nA = \{x = ny, y \in A\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , т. е. с нормировкой  $n^{-d}$  рассматривается процесс частных сумм (13), где  $\mu$  — считающая мера.

О центральной предельной теореме и законе повторного логарифма для процессов, индексированных множествами, см., например, [90, 94].

Процессы восстановления (10) играют важную роль в прикладных исследованиях. Процесс восстановления называется *дискретным*, если распределение  $\xi_1$  — решетчатое, т. е. сосредоточено на множестве вида  $k\lambda$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ , а  $\lambda > 0$  — параметр, называемый “шагом распределения” (если  $\xi_1$  — неотрицательная величина, то  $k = 0, 1, 2, \dots$ ). В противном случае процесс восстановления называется *непрерывным*. Определим *функцию восстановления*  $u(t)$ ,  $t > 0$ , как *среднее число* восстановлений на промежутке  $(0, t]$ , т. е.  $u(t) = \mathbb{E} X_t$ .

**17.** Докажите, что  $u(t) < \infty$  для всех  $t > 0$ .

Имеет место следующая *основная теорема теории восстановления* (см., например, [78; т. 2, с. 408]).

**Теорема 10** (Блэкуэлл). Для непрерывного процесса восстановления

$$u(t+s) - u(t) \rightarrow s/c$$

при  $t \rightarrow \infty$  для любого фиксированного  $s > 0$ , где  $c = \mathbb{E} \xi_1$  (считаем формально  $s/\infty = 0$ ). Для дискретного процесса восстановления утверждение верно при  $s$ , кратных шагу  $\lambda$  распределения  $\xi_1$ .

Наглядно “почти очевидно”, что если среднее время жизни электрических лампочек есть  $c$ , то за время  $s$  “в среднем” требуется  $s/c$  замен. Однако получить утверждение теоремы 10 довольно сложно. Вероятностное доказательство этой теоремы можно прочитать, например, в [1; с. 46–50] или [190; п. 8 гл. 2]. О процессах восстановления см. также [4; гл. 9], [78; том 2, гл. 11], [125; гл. 5], [131; гл. 25], [146; гл. 8].

**18.** Объясните, почему функция  $Z(B, \cdot)$ , определенная согласно (14), является при каждом  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$  случайной величиной со значениями в пространстве  $(\mathbb{Z}_+, \mathcal{A})$ , где  $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\} = \{0\} \cup \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра всех подмножеств  $\mathbb{Z}_+$ . (Отсюда вытекает, что  $Z = \{Z(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{S})\}$  — действительный случайный процесс, индексированный множествами  $\mathcal{B}(\mathbb{S})$ .)

Пусть  $\lambda$  есть  $\sigma$ -конечная мера на некотором измеримом пространстве  $(S, \mathcal{B})$  ( $S = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$ , где  $S_m \in \mathcal{B}$ ,  $S_m \cap S_k = \emptyset$  при  $m \neq k$  и  $0 < \lambda(S_m) < \infty$ ,  $m, k \in \mathbb{N}$ ). В этом случае *конструкцию пуассоновской случайной меры (14) легко модифицировать следующим образом.*

Построим на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  счетную совокупность независимых величин

$$Y^{(1)}, X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, Y^{(m)}, X_1^{(m)}, X_2^{(m)}, \dots$$

таких, что  $Y^{(m)}$  имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda_m = \lambda(S_m)$  и  $\text{Law}(X_j^{(m)}) = \lambda(\cdot)/\lambda(S_m)$  на  $\mathcal{B}_m = \mathcal{B} \cap S_m$ ;  $m, j \in \mathbb{N}$ . Пусть  $Z_m(B, \omega)$  для  $B \in \mathcal{B}_m$  определяется согласно (14) с заменой  $Y$  на  $Y^{(m)}$  и  $X_j$  на  $X_j^{(m)}$ . Положим

$$Z(B, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(B \cap S_m, \omega), \quad B \in \mathcal{B}, \quad \omega \in \Omega. \quad (54)$$

Отметим, что  $Z(B, \omega)$  может принимать и бесконечные значения.

**19.** Докажите, что если  $\lambda(B) = \infty$  для некоторого  $B \in \mathcal{B}$ , то  $Z(B) = \infty$  п. н., а если  $\lambda(B) < \infty$ , то  $Z(B) < \infty$  п. н.

**Теорема 11** (см. [12; с. 23]). *Процесс (54), называемый пуассоновской случайной мерой, обладает следующими свойствами:*

1. Для любого  $n \in \mathbb{N}$  и любых непересекающихся множеств  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$  величины  $Z(B_1, \cdot), \dots, Z(B_n, \cdot)$  независимы.
2. Для каждого  $B \in \mathcal{B}$  величина  $Z(B, \cdot)$  имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda(B)$ .
3. Траектории  $Z(\cdot, \omega)$  являются целочисленными мерами на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}$ .

Уточним, что пуассоновскую величину с параметром  $\lambda = \infty$  мы понимаем как величину, равную бесконечности с вероятностью единица.

Величину  $Z(B)$  можно интерпретировать как число “случайных точек”, попавших во множество  $B \in \mathcal{B}$ . В этой связи интерес представляет следующее упражнение.

**20** (см. [32; с. 370]). Пусть  $B \in \mathcal{B}$  таково, что  $0 < \lambda(B) < \infty$ , где  $\lambda$  есть  $\sigma$ -конечная мера на  $(S, \mathcal{B})$ . Пусть  $B = \bigcup_{q=1}^n B_q$ , где  $B_q \in \mathcal{B}$ ,  $B_j \cap B_q = \emptyset$  при  $q \neq j$  ( $q, j = 1, \dots, n$ ). Докажите, что для любых  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+$  и  $k = \sum_{q=1}^n k_q$  верно равенство

$$\begin{aligned} P\left(Z(B_1) = k_1, \dots, Z(B_n) = k_n \mid Z(B) = k\right) &= \\ &= \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} \left(\frac{\lambda(B_1)}{\lambda(B)}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\lambda(B_n)}{\lambda(B)}\right)^{k_n}. \end{aligned}$$

Таким образом, если  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ,  $d \geq 1$ , то при фиксированном числе “пуассоновских точек”, попавших во множество  $B$  (конечного и ненулевого объема) их местоположение можно рассматривать как такое, какое имеют  $k$  независимых случайных величин, *равномерно* распределенных в  $B$ .

Случайным точечным процессам и полям (не только пуассоновским), как важным моделям, используемым в физике, технике и других областях, посвящена обширная литература (см., например, [10, 13, 111, 145, 151, 156, 178]).

Обратимся к вопросам, связанным с *отождествлением* (см. §20) случайных функций.

**21.** Приведите пример действительных процессов  $X = \{X_t, t \in T\}$  и  $Y = \{Y_t, t \in T\}$ , заданных на одном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , таких, что  $P_X = P_Y$  на  $\mathcal{B}_T$ , но  $X$  и  $Y$  (стохастически) *неэквивалентны*. Приведите пример, когда  $P_X \neq P_Y$ , но распределения  $X_t$  и  $Y_t$  совпадают при каждом  $t \in T$ .

**22.** Приведите пример (действительного) процесса  $X = \{X_t, t \in T\}$  и множеств  $D, L \notin \mathcal{B}_T$  таких, что  $\{\omega: X(\cdot, \omega) \in D\} \in \mathcal{F}$  и  $\{\omega: X(\cdot, \omega) \in L\} \notin \mathcal{F}$ .

**23.** Приведите пример эквивалентных процессов  $X = \{X_t, t \in T\}$  и  $Y = \{Y_t, t \in T\}$ , а также множества  $D \notin \mathcal{B}_T$  таких, что  $A = \{\omega: X(\cdot, \omega) \in D\} \in \mathcal{F}$  и  $B = \{\omega: Y(\cdot, \omega) \in D\} \in \mathcal{F}$ , но  $P(A) \neq P(B)$ .

Упражнения 22 и 23 показывают, что *не всегда* можно говорить о *вероятности попадания* процесса во множество, не входящее в цилиндрическую  $\sigma$ -алгебру, но если это и возможно, то вероятность попадания в такое множество *не обязана определяться* конечномерными распределениями процесса.

**24.** Приведите пример (стохастически) эквивалентных процессов таких, что они не являются неразличимыми.

В связи с тем, что многие важные для теории и приложений множества *не входят* в  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{B}_T$  (см. теорему 6), Дж. Дубом было предложено понятие *сепарабельности* процесса, которое позволяет в определенных случаях строить версию процесса, поведение которой, по сути дела, задается значениями на счетном параметрическом множестве.

**Определение 16.** Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  имеется случайный процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$ , где  $T$  — топологическое пространство, принимающий при каждом  $t \in T$  значения в польском пространстве  $(S, \rho)$ . Процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$  называется *сепарабельным по отношению к множеству сепарабельности*  $T_0 \subset T$ , если  $T_0$  — счетное всюду плотное в  $T$  множество и существует событие  $N \in \mathcal{F}$  такое, что  $P(N) = 0$  и для всех  $t \in T, \omega \in \Omega \setminus N$

$$X_t(\omega) \in \left[ \bigcap_{\substack{G \ni t \\ G \in \mathcal{J}}} \{X_s(\omega), s \in G \cap T_0\} \right], \quad (55)$$

здесь  $[B]$  обозначает замыкание множества  $B$ , а  $\mathcal{J}$  — совокупность открытых множеств в  $(S, \rho)$ .

Процесс  $X$  называют *сепарабельным*, если в качестве множества сепарабельности  $T_0$  может быть взято любое счетное всюду плотное подмножество  $T$ .

**Теорема 12** (см. [153; с. 128]). Пусть  $(S, \rho)$  — компактное метрическое пространство, и  $(T, \delta)$  — псевдометрическое пространство. Тогда случайный процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$ , определенный на  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  и при каждом  $t \in T$  принимающий значения в  $(S, \rho)$ , имеет сепарабельную модификацию. Если  $S$  — локально компактное пространство, то теорема действует при одноточечной компактификации  $S$ .

В качестве упражнения можно сравнить определение 16 с определениями, приведенными в [101; с. 111], где рассмотрен случай  $T = [0, 1]$ ,  $S = \mathbb{R}$ . О сепарабельных процессах см. также [12, 25].

**Теорема 13** ([79]). Пусть выполнены условия теоремы 12 и процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$  является стохастически непрерывным на  $T$ , т. е. для каждого  $t \in T$  и любого  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbf{P}(\rho(X_s, X_t) > \varepsilon) = 0. \quad (56)$$

Тогда у процесса  $X$  существует модификация, являющаяся сепарабельной и измеримой.

25. Докажите, что если  $S$  — сепарабельное метрическое пространство, то под знаком вероятности в (56) стоит событие, т. е. множество, принадлежащее  $\mathcal{F}$  (указание: воспользуйтесь леммой 11).
26. Докажите, что если процесс измерим (см. определение 14), то каждая его траектория является  $\mathcal{A} | \mathcal{B}$ -измеримой функцией. Верно ли обратное утверждение? Приведите пример процесса, не имеющего измеримой модификации.
27. Пусть  $X = \{X_t, t \in T\}$  — измеримый процесс и  $\tau: \Omega \rightarrow T$ ,  $\tau \in \mathcal{F} | \mathcal{A}$ . Докажите, что тогда  $Y(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$  есть  $\mathcal{F} | \mathcal{B}$ -измеримая величина. Покажите, что если отказаться от условия измеримости процесса  $X$ , то сформулированное утверждение не обязано выполняться.

Случайные величины  $X_\tau$ , порожденные, скажем, “случайным числом случайных величин”  $\left(X_\tau = \sum_{k \leq \tau} \xi_k\right)$ , где  $\tau$  — целочисленная случайная величина, используются в многочисленных приложениях, например, в теории страхования. При этом для таких случайно индексированных сумм возникают эффекты, которые не наблюдаются для сумм детерминированного числа слагаемых (см., например, [133]).

28. Пусть почти все траектории процесса  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  являются непрерывными справа на  $[0, \infty)$ . Докажите, что такой процесс имеет измеримую модификацию.

Различные постановки задач о построении процессов с заданными свойствами траекторий изложены, например, в [12] на с. 120–130. В дополнении к главе II мы также затронем некоторые вопросы, относящиеся к этой проблематике.

## Глава II

### Процессы с независимыми приращениями.

#### Пуассоновские и гауссовские процессы

Критерий существования процесса с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс. Винеровский процесс (броуновское движение). Многомерное нормальное распределение. Построение действительной гауссовской случайной функции по функции среднего и ковариационной функции. Комплекснозначные гауссовские процессы. Неотрицательно определенные функции как ковариационные функции и как воспроизводящие ядра гильбертовых пространств. Теорема Парзена. Эквивалентность двух определений броуновского движения. Функции Хаара и Шаудера. Флуктуации последовательности стандартных гауссовских величин. Построение непрерывного винеровского процесса. Многомерное броуновское движение.

**§ 1.** В этой главе изучается специальный, но обширный и важный класс случайных процессов, имеющих *независимые приращения*. При первом чтении можно опустить § 6 о комплекснозначных гауссовских процессах и § 7, в котором рассматриваются случайные процессы, индексированные семействами функций. Особое внимание желательно обратить на пуассоновский и винеровский процессы (вводимые в параграфах 2 и 3), широко используемые в последующих главах.

**Определение 1.** Действительный случайный процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  называется *процессом с независимыми приращениями*, если для любого  $n \in \mathbb{N}$  и всех  $t_0, t_1, \dots, t_n$  таких, что  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , величины  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  независимы в совокупности.

**Теорема 1.** Пусть  $\{\varphi(s, t; \cdot)\}$ , где  $0 \leq s < t < \infty$ , — семейство характеристических функций, отвечающих некоторому семейству  $Q_{s,t}, 0 \leq s < t < \infty$ , вероятностных мер на  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Для существования случайного процесса  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  с независимыми приращениями такого, что характеристическая функция случайной величины  $X_t - X_s$  есть  $\varphi(s, t; \cdot)$  при любых  $0 \leq s < t < \infty$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi(s, t; \nu) = \varphi(s, u; \nu) \varphi(u, t; \nu) \quad (1)$$

для всех  $0 \leq s < u < t < \infty, \nu \in \mathbb{R}$ . При этом распределение вероятностей  $Q_0$  величины  $X_0$  может быть выбрано каким угодно.

**Доказательство.** Необходимость условия (1) очевидна, поскольку характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

Пусть теперь выполнено условие (1). Допустим, что удалось построить некоторое вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и искомый процесс  $X$ , причем  $\text{Law}(X_0 | P) = Q_0$ . Тогда характеристическая функция величины  $X_0$  равна  $\varphi_{Q_0}(\lambda)$ , а характеристическая функция вектора  $\xi = (X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$  для  $n \in \mathbb{N}$  и  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  есть

$$\varphi_\xi(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi_{Q_0}(\lambda_0) \varphi(t_0, t_1; \lambda_1) \cdots \varphi(t_{n-1}, t_n; \lambda_n).$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} X_{t_0} \\ X_{t_1} \\ X_{t_2} \\ \dots \\ X_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t_0} \\ X_{t_1} - X_{t_0} \\ X_{t_2} - X_{t_1} \\ \dots \\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Для любого случайного вектора  $\eta \in \mathbb{R}^q$ , любой матрицы  $A = (a_{k,m})_{k,m=1}^q$ , где  $a_{k,m} \in \mathbb{R}$  ( $k, m = 1, \dots, q$ ), и всех  $\lambda \in \mathbb{R}^q$

$$\varphi_{A\eta}(\lambda) = E \exp\{i\langle \lambda, A\eta \rangle\} = E \exp\{i\langle A^* \lambda, \eta \rangle\} = \varphi_\eta(A^* \lambda), \quad (3)$$

где  $A^*$  — транспонированная матрица  $A$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^q$ .

Следовательно, при  $n \in \mathbb{N}$  и  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  конечномерные распределения самого процесса  $X$  должны задаваться характеристическими функциями

$$\varphi_{t_0, t_1, \dots, t_n}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi_\xi(A^* \lambda) = \varphi_{Q_0}(\mu_0) \varphi(0, t_1; \mu_1) \cdots \varphi(t_{n-1}, t_n; \mu_n),$$

где  $\mu = A^* \lambda$  и  $A$  — треугольная матрица, фигурирующая в (2):  $\mu_0 = \lambda_0 + \dots + \lambda_n$ ,  $\mu_1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \dots, \mu_n = \lambda_n$ . Кроме того, мы должны иметь  $\varphi_{t_0}(\lambda_0) = \varphi_{Q_0}(\lambda_0)$ , и  $\varphi_{t_1, \dots, t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi_{t_0, t_1, \dots, t_n}(0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$  при  $n \in \mathbb{N}$  и  $0 < t_1 < \dots < t_n$ .

Итак, *предположив* существование искомого процесса  $X$ , мы выяснили, какие характеристические функции должны быть у его конечномерных распределений.

Отправляясь от заданных функций  $\varphi_{Q_0}(\cdot)$  и  $\varphi(s, t; \cdot)$ , где  $0 \leq s < t < \infty$ , введем теперь описанным выше способом характеристические функции  $\varphi_{t_0}, \varphi_{t_0, t_1, \dots, t_n}$  и  $\varphi_{t_1, \dots, t_n}$  ( $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n, n \in \mathbb{N}$ ) и воспользуемся теоремой 5 главы I.

Условие (а) этой теоремы не требует проверки в силу замечания 3 главы I, а условие (б), точнее, условие (б'), означающее подстановку 0 в  $\varphi_\tau(\lambda)$  вместо любого аргумента  $\lambda_m$ , так же выполнено, поскольку согласно (1) для  $1 \leq m \leq n$

$$\begin{aligned} \varphi(t_{m-1}, t_m; 0 + \lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n) \varphi(t_m, t_{m+1}; \lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n) = \\ = \varphi(t_{m-1}, t_{m+1}; \lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n). \end{aligned}$$

Тем самым, выполнены условия согласованности и, значит, существование требуемого процесса с независимыми приращениями вытекает из теоремы 5 главы I. Очевидно, что распределение  $X_0$  будет искомым распределением  $Q_0$ .  $\square$

**Замечание 1.** Определение действительного процесса с независимыми приращениями распространяется и на процессы со значениями в  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 1$ ). При этом теорема 1 остается в силе с незначительной модификацией в ее доказательстве. Так, в матрицу, фигурирующую в (2), вместо единиц следует вписать  $I_m$  — единичные матрицы  $m$ -го порядка, и рассматривать  $\lambda_k \in \mathbb{R}^m$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ .

**Замечание 2.** Процесс с независимыми приращениями может быть определен не только на полупрямой  $[0, \infty)$ . Если  $T = \mathbb{N}$  и процесс  $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$  имеет независимые приращения (т.е.  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  независимы для  $1 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , где  $t_i \in \mathbb{N}$  при  $i = 1, \dots, n$  и  $n \in \mathbb{N}$ ), то процесс  $X$  будет иметь простую структуру:  $X_t = \xi_1 + \dots + \xi_t$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , где  $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$  — последовательность независимых величин. Тем самым, процессы с независимыми приращениями — естественное обобщение случайных последовательностей, являющихся суммами независимых случайных величин.

§ 2. Напомним, что неотрицательная счетно-аддитивная функция  $m$  на  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  (или на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ ) называется локально конечной мерой, если  $m([a, b]) < \infty$  для любых  $-\infty < a \leq b < \infty$ .

**Определение 2.** Пуассоновским процессом с ведущей мерой  $m$  (где  $m$  — локально конечная мера,  $m(\mathbb{R}) = \infty$ ) называется случайный процесс  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  такой, что

- 1)  $N(0) = 0$  п. н.;
- 2) процесс  $N$  имеет независимые приращения;
- 3) величины  $N(t) - N(s)$ , где  $0 \leq s < t < \infty$ , распределены по закону Пуассона с параметром  $m((s, t])$ .

В частности, если  $m((s, t]) = (t - s)\lambda$ ,  $0 \leq s < t < \infty$ ,  $\lambda > 0$ , то говорят о стандартном пуассоновском процессе с постоянной интенсивностью  $\lambda$ .

Условимся считать, что пуассоновское распределение с нулевым параметром имеет случайная величина, тождественно равная нулю.

Существование пуассоновского процесса следует из теоремы 1. Действительно, если бы такой процесс имелся, то согласно 3) мы получили бы

$$\varphi(s, t; \nu) = \varphi_{N_t - N_s}(\nu) = e^{m((s, t])(e^{i\nu} - 1)}, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Для так определенной функции  $\varphi(s, t; \nu)$ ,  $0 \leq s < t < \infty$ ,  $\nu \in \mathbb{R}$ , условие (1) выполнено, поскольку  $m((s, t]) = m((s, u]) + m((u, t])$ , что позволяет воспользоваться теоремой 1. В качестве начального распределения  $Q_0$  надо взять меру, сосредоточенную в точке 0.

Следующий результат интересен тем, что объясняет как устроены траектории пуассоновского процесса.

**Теорема 2** (явная конструкция пуассоновского процесса). Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые случайные величины, имеющие экспоненциальное распределение с плотностью

$$p_{\xi_i}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\lambda$  — положительный параметр,  $i \in \mathbb{N}$ . Тогда соответствующий процесс восстановления (I.10) является пуассоновским процессом интенсивности  $\lambda$ .

Эта теорема не доказывается, поскольку она есть частный случай общего построения марковских цепей с помощью *инфинитезимальной матрицы* (см. упражнение 33 главы VI).

**Пример 1.** Пусть процесс  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$  определяется согласно формуле (I.11), где величины  $\xi_1, \xi_2, \dots$  имеют показательное распределение с параметром  $\lambda > 0$ . Покажем, что процесс  $Y$  имеет независимые приращения.

Заметим, что если  $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$  — действительный процесс с независимыми приращениями и  $h = h(t)$  — неслучайная действительная функция на  $[0, \infty)$ , то  $\{Z_t + h(t), t \geq 0\}$  — также процесс с независимыми приращениями. Поэтому процесс  $Y$  (см. (I.11)) будет иметь независимые приращения, если этим свойством обладает  $S = \{S_t, t \geq 0\}$ , где  $S_t = \sum_{j=1}^{X_t} \eta_j$ . В силу теоремы 2 процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$ , задаваемый формулой (I.10), является пуассоновским процессом интенсивности  $\lambda$ .

Положим  $\phi(\nu) = \mathbb{E} e^{i\nu\eta_1}$ ,  $\nu \in \mathbb{R}$ . Учитывая независимость приращений пуассоновского процесса, а также независимость последовательностей  $\{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  и  $\{\eta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  (т. е. независимость порожденных ими  $\sigma$ -алгебр), имеем для  $0 \leq s < t$  и  $\nu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{i\nu(S_t - S_s)} &= \sum_{k,m=0}^{\infty} \mathbb{E} e^{i\nu(S_t - S_s)} \mathbf{1}\{X_s = k\} \mathbf{1}\{X_t - X_s = m\} = \\ &= \sum_{k,m=0}^{\infty} \mathbb{E} \exp \left\{ i\nu \sum_{j=k+1}^{k+m} \eta_j \right\} P(X_s = k) P(X_t - X_s = m) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_s = k) \sum_{m=0}^{\infty} (\phi(\nu))^m \frac{(\lambda(t-s))^m}{m!} e^{-\lambda(t-s)} = \\ &= e^{\lambda(t-s)(\phi(\nu)-1)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично вычисляется совместная характеристическая функция набора приращений процесса  $\{S_t, t \geq 0\}$ , откуда следует требуемое утверждение.

§ 3. Введем один из самых важных случайных процессов.

**Определение 3.** Винеровским процессом, или броуновским движением, называется случайный процесс  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  такой, что

- 1)  $W(0) = 0$  п. н.;
- 2) процесс  $W$  имеет независимые приращения;
- 3) величины  $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$  при всех  $0 \leq s < t < \infty$ , т. е. величины  $W(t) - W(s)$  имеют гауссовское (нормальное) распределение с параметрами 0 и  $t-s$ .

Существование процесса, обладающего свойствами 1)–3), вытекает из теоремы 1, поскольку

$$e^{-\frac{(t-s)\nu^2}{2}} = e^{-\frac{(u-s)\nu^2}{2}} e^{-\frac{(t-u)\nu^2}{2}}, \quad 0 \leq s < u < t, \quad \nu \in \mathbb{R},$$

что обеспечивает выполнение условия (1).



Для винеровского процесса  $W(t) = W(t) - W(0) \sim N(0, t)$ , поэтому  $EW(t) = 0$  при всех  $t \geq 0$ . Если  $0 \leq s \leq t$ , то ковариация

$$\text{cov}(W(s), W(t)) = \text{cov}(W(s), W(t) - W(s) + W(s)) = D(W(s) - W(0)) = s,$$

где  $D$  обозначает дисперсию. Тем самым, для винеровского процесса  $W$

$$EW(t) = 0, \quad \text{cov}(W(s), W(t)) = \min\{s, t\} \quad \text{при } s, t \in [0, \infty). \quad (6)$$

**Замечание 3.** Обычно в определение винеровского процесса включают еще требование *непрерывности п. н.* (т. е. непрерывности с вероятностью единица) его траекторий. Далее мы увидим, что это свойство действительно всегда можно считать выполненным наряду со свойствами 1)–3).

**Определение 4.** Многомерным ( $m$ -мерным) броуновским движением  $W = \{W(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t)), t \geq 0\}$  называется процесс со значениями в  $\mathbb{R}^m$ , составленный из  $m$  независимых (непрерывных) броуновских движений  $\{W_k(t), t \geq 0\}$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

Независимость процессов в этом определении понимается как независимость порожденных ими  $\sigma$ -алгебр (см. замечание 1 главы I). Такой процесс  $W$  легко получим, задав на некоторых вероятностных пространствах  $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, P_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , соответствующие броуновские движения  $W_k = \{W_k(t), t \geq 0\}$ . Далее берем

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = \bigotimes_{k=1}^m (\Omega_k, \mathcal{F}_k, P_k)$$

и доопределяем  $W_k$  на  $\Omega$  аналогично формуле (I.46).

§ 4. Перейдем к изучению *гауссовских случайных функций*. С этой целью, прежде всего, напомним, что случайный вектор  $Y$  в  $\mathbb{R}^n$  называется *нормальным* или *гауссовским* (обозначение:  $Y \sim N(a, C)$ ), если для  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  его характеристическая функция  $\varphi_Y(\lambda) = E \exp\{i\langle \lambda, Y \rangle\}$  имеет вид

$$\varphi_Y(\lambda) = \exp\left\{i\langle a, \lambda \rangle - \frac{1}{2}\langle C\lambda, \lambda \rangle\right\} = \exp\left\{i \sum_{k=1}^n a_k \lambda_k - \frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^n c_{km} \lambda_k \lambda_m\right\}, \quad (7)$$

где  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $C = (c_{km})_{k,m=1}^n$  — симметричная неотрицательно определенная матрица с действительными элементами,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ , задающее евклидову норму (с векторами мы оперируем как со столбцами). *Неотрицательная определенность матрицы  $C$*  (запись  $C \geq 0$ ) означает, что  $\langle C\lambda, \lambda \rangle \geq 0$  для всех  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ . Легко проверить, что требуемые условия  $C \geq 0$  и  $C = C^*$  равносильны выполнению лишь *одного* условия:

$$\sum_{k,l=1}^n c_{kl} z_k \bar{z}_l \geq 0 \quad (8)$$

для любых комплексных  $z_1, \dots, z_n$  ( $\bar{z} = u - iv$  для  $z = u + iv$ , где  $u, v \in \mathbb{R}$ ).

Известно (см., например, [85; т. 1, с. 383]), что для описанных выше матриц  $C$  и любого вектора  $a \in \mathbb{R}^n$  функция, стоящая в правой части (7), является характеристической функцией некоторого случайного вектора  $Y$ . Если  $C > 0$ , т. е.  $\langle C\lambda, \lambda \rangle > 0$  для любого  $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ , то случайный вектор  $Y$  имеет плотность (по мере Лебега) распределения вероятностей

$$p_Y(x) = (2\pi)^{-n/2} |C|^{-1/2} \exp\{-\langle C^{-1}(x-a), x-a \rangle\},$$

где  $|C|$  — определитель  $C$ .

Для  $Y \sim N(a, C)$  нетрудно установить, что

$$a_k = \mathbf{E} Y_k, \quad c_{km} = \text{cov}(Y_k, Y_m), \quad k, m = 1, \dots, n \quad (n \geq 1). \quad (9)$$

**Определение 5.** Действительная случайная функция  $X = \{X(t), t \in T\}$ , заданная на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , называется *гауссовской*, если все ее конечномерные распределения являются гауссовскими.

Другими словами,  $X$  — гауссовский процесс, если  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$  есть гауссовский вектор для каждого  $n \in \mathbb{N}$  и любого конечного набора точек  $t_1, \dots, t_n \in T$ . Это свойство достаточно потребовать лишь для наборов  $(t_1, \dots, t_n)$ , состоящих из различных точек, что, в частности, вытекает из следующей элементарной леммы, которая нам понадобится и далее.

**Лемма 1.** Вектор  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  является гауссовским в  $\mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда  $\langle \tau, Y \rangle = \sum_{k=1}^n \tau_k Y_k$  есть гауссовская случайная величина для всех  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$ .

**Доказательство.** Пусть  $Y \sim N(a, C)$ . Тогда в силу (7) для любого  $\nu \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{E} e^{i\nu \langle \tau, Y \rangle} = \mathbf{E} e^{i\langle \nu \tau, Y \rangle} = \exp\left\{i\langle a, \nu \tau \rangle - \frac{1}{2} \langle C \nu \tau, \nu \tau \rangle\right\} = \exp\left\{i\langle a, \tau \rangle \nu - \frac{1}{2} \langle C \tau, \tau \rangle \nu^2\right\},$$

т. е.  $\langle \tau, Y \rangle \sim N(\langle a, \tau \rangle, \langle C \tau, \tau \rangle)$  (как обычно,  $\nu \tau = (\nu \tau_1, \dots, \nu \tau_n)$ ).

Обратно, пусть скалярная случайная величина  $\langle \tau, Y \rangle \sim N(a_\tau, \sigma_\tau^2)$ . Тогда (см. (9) при  $n = 1$ )

$$\begin{aligned} a_\tau &= \mathbf{E} \langle \tau, Y \rangle = \sum_{k=1}^n \tau_k \mathbf{E} Y_k = \langle \tau, \mathbf{E} Y \rangle, \\ \sigma_\tau^2 &= \mathbf{D} \langle \tau, Y \rangle = \mathbf{D} \left( \sum_{k=1}^n \tau_k Y_k \right) = \\ &= \sum_{k, m=1}^n \tau_k \tau_m \text{cov}(Y_k, Y_m) = \sum_{k, m=1}^n \tau_k \tau_m c_{km} = \langle C \tau, \tau \rangle; \end{aligned} \quad (10)$$

здесь мы учли, что  $\mathbf{E} Y_j^2 < \infty$ ,  $j = 1, \dots, n$  (выбрав вектор  $\tau$  с компонентами  $\tau_j = 1$  и  $\tau_k = 0$  при  $k \neq j$ , видим, что  $Y_j$  — гауссовская величина). Для любого  $\nu \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{E} e^{i\nu \langle \tau, Y \rangle} = \exp\left\{i\nu a_\tau - \frac{1}{2} \sigma_\tau^2 \nu^2\right\}. \quad (11)$$

Подставив в (11)  $\nu = 1$  и взяв  $a_\tau, \sigma_\tau^2$  из (10), получим формулу (7), означающую, что вектор  $Y$  является гауссовским.  $\square$

§ 5. Покажем, как описываются действительные гауссовские процессы. Для этого нам потребуется следующее определение.

**Определение 6.** Действительная функция  $r = r(s, t)$ , заданная на  $T \times T$ , называется *неотрицательно определенной*, если для каждого  $n \in \mathbb{N}$  и любого набора точек  $t_1, \dots, t_n \in T$  неотрицательно определены матрицы  $(r(t_k, t_m))_{k,m=1}^n$ .

**Теорема 3.** Пусть имеются произвольная действительная функция  $a = a(t)$  и симметричная неотрицательно определенная действительная функция  $r = r(s, t)$ , где  $s, t \in T$ . Тогда найдутся вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и заданная на нем гауссовская случайная функция  $X = \{X(t), t \in T\}$ , такие, что  $EX(t) = a(t)$  и  $\text{cov}(X(s), X(t)) = r(s, t)$  при всех  $s, t \in T$ .

**Доказательство.** Для любого  $n \in \mathbb{N}$  и любого  $\tau = (t_1, \dots, t_n) \in T^n$  введем на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  меры  $Q_\tau$ , отвечающие характеристическим функциям вида (7), где  $a = (a(t_1), \dots, a(t_n))$  и  $c_{km} = r(t_k, t_m)$ . Для мер  $Q_\tau$  очевидным образом выполнены условия (а) и (б) теоремы 5 главы I, обеспечивающие свойство согласованности этих мер. Поэтому по теореме Колмогорова (теорема 4 главы I) найдутся вероятностное пространство и на нем случайная функция  $X$ , имеющая своими конечномерными распределениями гауссовские меры  $Q_\tau$ . Понятно из построения, что  $EX(t) = a(t)$  и  $\text{cov}(X(s), X(t)) = r(s, t)$ .  $\square$

Отметим, что для любой действительной случайной функции  $X = \{X(t), t \in T\}$  с конечными моментами  $EX^2(t)$ , где  $t \in T$ , при всех  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_1, \dots, t_n \in T$  и  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  выполнено неравенство

$$\sum_{k,m=1}^n \text{cov}(X(t_k), X(t_m)) \lambda_k \lambda_m = \text{cov} \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k X(t_k), \sum_{m=1}^n \lambda_m X(t_m) \right) \geq 0. \quad (12)$$

Ясно также, что  $\text{cov}(X(s), X(t)) = \text{cov}(X(t), X(s))$ . Поэтому условия, налагаемые в теореме 3 на функцию  $r = r(s, t)$ , являются не только достаточными, но и необходимыми для существования действительной гауссовской случайной функции с ковариационной функцией  $r = r(s, t)$ . Следовательно, класс неотрицательно определенных действительных функций совпадает с классом ковариационных функций (действительных) гауссовских процессов.

§ 6. Обратимся к рассмотрению комплекснозначных (или  $\mathbb{C}$ -значных) гауссовских процессов. Для этого дадим несколько определений.

**Определение 7.** Комплекснозначная функция  $R = R(s, t)$ ,  $s, t \in T$ , где  $T$  — некоторое непустое множество, называется *неотрицательно определенной*, если для каждого  $n \in \mathbb{N}$ , любых  $t_1, \dots, t_n \in T$  и всех  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k,m=1}^n z_k \bar{z}_m R(t_k, t_m) \geq 0. \quad (13)$$

**Определение 8.** Случайная функция  $X = \{X(t), t \in T\}$  (действительная или комплекснозначная) называется  $L^2$ -процессом, если  $\mathbb{E}|X(t)|^2 < \infty$  для  $t \in T$ . Ковариационная функция  $r = r(s, t)$  этого процесса вводится формулой

$$r(s, t) = \mathbb{E} (X(s) - \mathbb{E} X(s)) \overline{(X(t) - \mathbb{E} X(t))}, \quad s, t \in T. \quad (14)$$

**Определение 9.** Пусть  $\xi(t), \eta(t)$  — действительные процессы. Случайная функция  $X = \{X(t) = \xi(t) + i\eta(t), t \in T\}$  со значениями в  $\mathbb{C}$  называется *гауссовской*, если  $\{(\xi(t), \eta(t)), t \in T\}$  — гауссовский процесс в  $\mathbb{R}^2$ , т. е. для любого  $n \in \mathbb{N}$  и всех  $t_1, \dots, t_n \in T$  вектор  $(\xi(t_1), \eta(t_1), \dots, \xi(t_n), \eta(t_n))$  является гауссовским.

**Теорема 4.** Для всех  $s, t \in T$  класс неотрицательно определенных комплекснозначных функций  $R = R(s, t)$  совпадает с классом ковариационных функций  $r = r(s, t)$   $L^2$ -процессов  $X = \{X(t), t \in T\}$  и, более того, совпадает с классом ковариационных функций комплекснозначных гауссовских процессов  $X = \{X(t), t \in T\}$ .

**Доказательство.** Если  $X = \{X(t), t \in T\}$  есть  $L^2$ -процесс, то для каждого  $n \in \mathbb{N}$ , любых  $t_1, \dots, t_n \in T$  и всех  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  имеем

$$\sum_{k,m=1}^n z_k \bar{z}_m r(t_k, t_m) = \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n z_k X(t_k) \right|^2 \geq 0,$$

т. е. ковариационная функция  $r = r(s, t)$  является неотрицательно определенной.

Пусть теперь  $R = R(s, t)$ ,  $s, t \in T$ , — неотрицательно определенная функция. Положим  $R_1(s, t) = \operatorname{Re} R(s, t)$  и  $R_2(s, t) = \operatorname{Im} R(s, t)$ ,  $s, t \in T$ . Для  $z_k = u_k + iv_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , неравенство (13) после выделения действительной и мнимой частей примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{k,m=1}^n R_1(t_k, t_m)(u_k u_m + v_k v_m) + \sum_{k,m=1}^n R_2(t_k, t_m)(u_k v_m - v_k u_m) + \\ & + i \left[ \sum_{k,m=1}^n R_1(t_k, t_m)(v_k u_m - u_k v_m) + \sum_{k,m=1}^n R_2(t_k, t_m)(u_k u_m + v_k v_m) \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (13) при  $n = 1$  видим, что  $R(t, t) \geq 0$  для всех  $t \in T$ . При  $n = 2$ , любых  $t_1, t_2 \in T$  и  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  согласно (13) имеем

$$|z_1|^2 R(t_1, t_1) + z_1 \bar{z}_2 R(t_1, t_2) + \bar{z}_1 z_2 R(t_2, t_1) + |z_2|^2 R(t_2, t_2) \geq 0.$$

Следовательно,  $z_1 \bar{z}_2 R(t_1, t_2) + \bar{z}_1 z_2 R(t_2, t_1)$  — действительное число. В частности, при  $z_1 = z_2 = 1$  получаем, что  $R(t_1, t_2) + R(t_2, t_1) \in \mathbb{R}$  для всех  $t_1, t_2 \in T$ . Выбрав  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = i$ , приходим к тому, что  $R(t_1, t_2) - R(t_2, t_1)$  есть чисто мнимое число. Таким образом,  $\overline{R_1(s, t)} = R_1(t, s)$  и  $\overline{R_2(s, t)} = -R_2(t, s)$  при  $s, t \in T$ . Иначе говоря,  $\overline{R(s, t)} = \overline{R(t, s)}$  для любых  $s, t \in T$ , т. е. имеет место свойство *эрмитовой сопряженности* функции  $R(s, t)$ . Поэтому неравенство (15) можно переписать в виде  $\langle C\lambda, \lambda \rangle \geq 0$ , где  $\lambda = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение

в  $\mathbb{R}^{2n}$ , а матрица  $C$  — симметричная неотрицательно определенная с действительными элементами, состоящая из четырех блоков:

$$C = \left( \begin{array}{c|c} R_1(t_k, t_m) & R_2(t_k, t_m) \\ \hline -R_2(t_k, t_m) & R_1(t_k, t_m) \end{array} \right)_{k,m=1,\dots,n}. \quad (16)$$

В силу замечания 4 главы I существует гауссовский процесс  $\{(\xi(t), \eta(t)), t \in T\}$  со значениями в  $\mathbb{R}^2$  при каждом  $t$  такой, что для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $t_1, \dots, t_n \in T$  вектор  $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n), \eta(t_1), \dots, \eta(t_n)) \sim N(0, C)$ , где матрица ковариаций  $C$  задается формулой (16). Возьмем

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi(t) - i\eta(t)), \quad t \in T. \quad (17)$$

Тогда для  $s, t \in T$  (принимая во внимание, что  $-R_2(t, s) = R_2(s, t)$ ,  $s, t \in T$ ) имеем

$$\mathbb{E} X(s) \overline{X(t)} = \frac{1}{2}(R_1(s, t) - iR_2(t, s) + iR_2(s, t) + R_1(s, t)) = R(s, t). \quad \square$$

**Пример 2.** Пусть  $f(t)$  — комплекснозначная (в частности, действительная) функция, определенная на некотором множестве  $T$ . Тогда функция

$$R(s, t) = f(s) \overline{f(t)}, \quad s, t \in T,$$

является неотрицательно определенной.

Действительно, справедливость условия (13) очевидна.

**Замечание 4.** Если функция  $R = R(s, t)$  является неотрицательно определенной на множестве  $T \times T$ , то при любой константе  $c \geq 0$  этим же свойством обладает функция  $cR(s, t)$ . Пусть  $R_n = R_n(s, t)$  — неотрицательно определенные функции на  $T \times T$  при  $n = 1, \dots, N$ . Тогда функция  $\sum_{n=1}^N R_n(s, t)$  неотрицательно определена на  $T \times T$ . Если  $R_n(s, t) \rightarrow R(s, t)$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждой  $s, t \in T$ , то функция  $R = R(s, t)$  также является неотрицательно определенной (на  $T \times T$ ).

**Определение 10.** Функция  $\varphi = \varphi(t)$ , где  $t \in T \subset \mathbb{R}$ , называется *неотрицательно определенной*, если  $s - t \in T$  при  $s, t \in T$  и функция  $R(s, t) = \varphi(s - t)$  неотрицательно определена.

Пусть  $\xi$  — действительная случайная величина с характеристической функцией  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Легко видеть, что  $\varphi$  является неотрицательно определенной функцией на  $\mathbb{R}$ . Таким образом, получаем

**Пример 3.** Следующие функции являются ковариационными функциями  $L^2$ -процессов, заданных на  $\mathbb{R}$ :

$$r(s, t) = \cos(s - t), \quad r(s, t) = \exp\{ia(s - t) - (s - t)^2 \sigma^2 / 2\}, \quad \text{где } a \in \mathbb{R}, \quad \sigma \geq 0;$$

$$r(s, t) = \exp\{-\lambda|s - t|\}, \quad r(s, t) = \exp\{\lambda(\exp\{i(s - t)\} - 1)\}, \quad \text{где } \lambda > 0;$$

$$r(s, t) = (a - b|s - t|)\mathbf{1}_{[-a/b, a/b]}(s - t), \quad \text{где } a \geq 0, \quad b > 0.$$

Рассмотренный выше пример позволяет в силу теоремы 4 немедленно вводить гауссовские процессы с указанными ковариационными функциями.

В главе VII мы вернемся к рассмотрению случайных процессов, ковариационные функции которых зависят от разности аргументов.

§ 7. Покажем, что свойство неотрицательной определенности функций тесно связано с природой важного класса гильбертовых пространств.

**Определение 11.** Функция  $K: T \times T \rightarrow \mathbb{C}$  называется *воспроизводящим ядром* гильбертова пространства  $H$ , состоящего из некоторых комплекснозначных функций, определенных на множестве  $T$ , если

1°.  $K(t, \cdot) \in H$  для любого  $t \in T$ ,

2°.  $\langle f, K(t, \cdot) \rangle = f(t)$  для любых  $f \in H$  и  $t \in T$ ,

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $H$ .

**Теорема 5** (Ароншайн). *Для того чтобы комплекснозначная функция  $K$  была воспроизводящим ядром некоторого гильбертова пространства, необходимо и достаточно, чтобы она была неотрицательно определена.*

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $K$  — воспроизводящее ядро. Для любых  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_1, \dots, t_n \in T$ ,  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  имеем

$$\sum_{j,q=1}^n z_j \bar{z}_q K(t_j, t_q) = \sum_{j,q=1}^n z_j \bar{z}_q \langle K(t_j, \cdot), K(t_q, \cdot) \rangle = \left\| \sum_{j=1}^n z_j K(t_j, \cdot) \right\|^2 \geq 0,$$

здесь  $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$ ,  $u \in H$ .

Достаточность. Пусть  $K$  — неотрицательно определенная функция на  $T \times T$ . Рассмотрим  $\text{Lin}(K)$  — линейную оболочку функций  $K(t, \cdot)$ ,  $t \in T$ . Для  $f, g \in \text{Lin}(K)$ , т. е. для функций вида

$$f = \sum_{j=1}^n a_j K(t_j, \cdot), \quad g = \sum_{q=1}^m b_q K(s_q, \cdot), \quad (18)$$

где  $a_j, b_q \in \mathbb{C}$ ,  $t_j, s_q \in T$  ( $j = 1, \dots, n$ ;  $q = 1, \dots, m$ ;  $n, m \in \mathbb{N}$ ), положим

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{q=1}^m a_j \bar{b}_q K(t_j, s_q). \quad (19)$$

В частности,

$$\langle f, K(s_q, \cdot) \rangle = \sum_{j=1}^n a_j K(t_j, s_q) = f(s_q). \quad (20)$$

Поскольку  $s_q$  — произвольная точка из  $T$ , получаем, что для любой функции  $f \in \text{Lin}(K)$  справедливо свойство 2°. Кроме того,  $\langle f, f \rangle = \sum_{j=1}^n f(t_j) \bar{a}_j$ , поэтому  $\langle f, f \rangle = 0$  для  $f \equiv 0$ .

Рассмотрев для  $\alpha \in \mathbb{R}$  дискриминант квадратного трехчлена  $\langle \alpha f + g, \alpha f + g \rangle \geq 0$ , стандартным способом получаем неравенство Коши–Буняковского–Шварца:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|, \quad (21)$$

где  $\|h\| := \langle h, h \rangle^{1/2}$ , а элементы  $f, g, h \in \text{Lin}(K)$ .

Заметим, что функция  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обладает на  $\text{Lin}(K)$  всеми свойствами скалярного произведения. Пусть  $\langle f, f \rangle = 0$  для  $f \in \text{Lin}(K)$ , тогда  $\langle f, g \rangle = 0$  при любых  $g \in \text{Lin}(K)$  в силу (21). Из (20) видим, что  $f(s_q) = 0$  для произвольной точки  $s_q \in T$ . Поэтому равенство  $\langle f, f \rangle = 0$  влечет соотношение  $f \equiv 0$ . Остальные свойства скалярного произведения очевидны. Подчеркнем, что его задание формулой (19) корректно, т. е.  $\langle f, g \rangle$  не зависит от способа представления  $f$  и  $g$  в виде (18). В самом деле, если для элементов  $\text{Lin}(K)$  имеем  $f(t) = \tilde{f}(t)$  и  $g(t) = \tilde{g}(t)$  при всех  $t \in T$ , то

$$|\langle f, g \rangle - \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle| = |\langle f - \tilde{f}, g \rangle + \langle \tilde{f}, g - \tilde{g} \rangle| \leq \|f - \tilde{f}\| \|g\| + \|\tilde{f}\| \|g - \tilde{g}\|,$$

а  $\|f - \tilde{f}\| = \|g - \tilde{g}\| = 0$ , как отмечалось ранее.

Пополним  $\text{Lin}(K)$  по норме  $\|\cdot\|$ , рассматривая, как обычно (см., например, [35; гл. 2, § 3, п. 4]), классы “эквивалентных” фундаментальных последовательностей.

Пусть  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  — фундаментальная последовательность функций в  $\text{Lin}(K)$ , т. е.  $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$  при  $n, m \rightarrow \infty$ . Используя (21), при каждом  $t \in T$  имеем

$$|f_n(t) - f_m(t)| = |\langle f_n - f_m, K(t, \cdot) \rangle| \leq \|f_n - f_m\| (K(t, t))^{1/2},$$

где учтено, что  $\|K(t, \cdot)\|^2 = \langle K(t, \cdot), K(t, \cdot) \rangle = K(t, t)$  по доказанному свойству 2° (для функций из  $\text{Lin}(K)$ ). Таким образом, последовательность  $\{f_n(t)\}_{n \geq 1}$  определяет единственную функцию  $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$  на  $T$ .

Если фундаментальные последовательности  $\{f_n(\cdot)\}_{n \geq 1}$  и  $\{g_n(\cdot)\}_{n \geq 1}$  функций из  $\text{Lin}(K)$  определяют соответственно функции  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$ , то полагаем

$$\langle f, g \rangle := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g_n \rangle.$$

Легко проверить, что этот предел существует и не зависит от выбора фундаментальных последовательностей, задающих  $f$  и  $g$ . Пополнение  $\text{Lin}(K)$  обозначим  $H$ , при этом функции  $f \in \text{Lin}(K)$  естественно отождествляются с последовательностями  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  такими, что  $f_n = f$  при каждом  $n \in \mathbb{N}$ . Теперь нетрудно убедиться, что  $H$  является гильбертовым пространством, имеющим функцию  $K$  воспроизводящим ядром.  $\square$

Согласно теореме 4 класс неотрицательно определенных функций совпадает с классом ковариационных функций. Поэтому *любую ковариационную функцию  $r = r(s, t)$ ,  $s, t \in T$ , можно рассматривать как воспроизводящее ядро некоторого гильбертова пространства  $H$*  со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Следовательно,

$$r(s, t) = \langle r(s, \cdot), r(t, \cdot) \rangle. \quad (22)$$

Из доказательства теоремы 5 мы даже знаем, каково “минимальное”  $H$ , полученное пополнением линейной оболочки функций  $r(t, \cdot)$ , где  $t \in T$ .

Для  $L^2$ -процесса  $X = \{X(t), t \in T\}$  обозначим  $L^2[X]$  замыкание в среднем квадратическом  $\text{Lin}(X)$ , т. е. замыкание линейной оболочки величин  $X(t)$ ,  $t \in T$ .

**Теорема 6** (Парзен). Пусть  $X = \{X(t), t \in T\}$  есть центрированный  $L^2$ -процесс, заданный на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , с нулевым средним и ковариационной функцией  $r = r(s, t)$ ,  $s, t \in T$ . Пусть  $H$  — “минимальное” гильбертово пространство с воспроизводящим ядром  $r = r(s, t)$  и скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Тогда на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  существует центрированный  $L^2$ -процесс  $Y = \{Y(h), h \in H\}$  такой, что

$$\begin{aligned} X(t) &= Y(r(t, \cdot)) \text{ для каждого } t \in T, \\ (Y(h), Y(g)) &= \langle h, g \rangle \text{ для любых } h, g \in H, \end{aligned}$$

где равенство случайных величин понимается (как всегда) п. н. и  $(\xi, \eta) = E \xi \bar{\eta}$  для  $\xi, \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . При этом пространства  $L^2[X]$  и  $H$  изометричны.

**Доказательство.** Для  $h = \sum_{k=1}^n c_k r(t_k, \cdot) \in H$ ,  $c_k \in \mathbb{C}$ ,  $t_k \in T$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $n \geq 1$ , положим

$$Y(h) = \sum_{k=1}^n c_k X(t_k). \quad (23)$$

Для указанной функции  $h$  и функции  $g = \sum_{q=1}^m d_q r(s_q, \cdot)$ , где  $d_q \in \mathbb{C}$ ,  $s_q \in T$ ,  $q = 1, \dots, m$ ,  $m \geq 1$ , очевидно,

$$(Y(h), Y(g)) = \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^m c_k \bar{d}_q E X(t_k) \bar{X}(t_q) = \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^m c_k \bar{d}_q r(t_k, t_q) = \langle h, g \rangle.$$

Легко видеть, что определение (23) корректно и продолжение изометрического отображения  $h \mapsto Y(h)$  с  $\text{Lin}(X)$  на  $H$  обладает искомыми свойствами.  $\square$

§ 8. Винеровский процесс входит в класс гауссовских процессов, как показывает

**Теорема 7.** Определение 3 винеровского процесса  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  эквивалентно следующему:

- 1°.  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  — гауссовский процесс;
- 2°.  $E W(t) = 0$ ,  $t \in [0, \infty)$ ;
- 3°.  $\text{cov}(W(t), W(s)) = \min\{t, s\}$ , где  $t, s \in [0, \infty)$ .

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что по теореме 3 процесс со свойствами 1°–3° действительно существует. В самом деле, из формулы (6) видим, что винеровский процесс имеет ковариационную функцию  $r(s, t) = \min\{s, t\}$ , где  $s, t \in [0, \infty)$ . Поэтому свойство неотрицательной определенности этой функции следует из (12).

Пусть для процесса  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  справедливы условия 1°–3°. Проверим, что выполнены требования 1)–3) определения 3.

Свойство 1) очевидно, так как  $DW(0) = \text{cov}(W(0), W(0)) = \min\{0, 0\} = 0$ . Для установления 2) воспользуемся тем, что в  $\mathbb{R}^n$  для гауссовского вектора  $Y \sim N(a, C)$  и матрицы  $A = (a_{k,m})_{k,m=1}^n$  с действительными (неслучайными) элементами из (7) и (3) имеем

$$AY \sim N(Aa, ACA^*). \quad (24)$$



Пусть  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ . Выбрав соответствующую матрицу  $A$ , преобразуем гауссовский случайный вектор  $(W(0), W(t_1), \dots, W(t_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ :

$$\begin{pmatrix} W(0) \\ W(t_1) - W(0) \\ W(t_2) - W(t_1) \\ \dots \\ W(t_n) - W(t_{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(0) \\ W(t_1) \\ W(t_2) \\ \dots \\ W(t_n) \end{pmatrix}.$$

Согласно (24) вектор  $(W(0), W(t_1) - W(0), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1}))$  является гауссовским.

Напомним, что компоненты гауссовского вектора *независимы* тогда и только тогда, когда матрица ковариаций *диагональна*. (Это следует из того, что вектор имеет *независимые* компоненты тогда и только тогда, когда его характеристическая функция *распадается в произведение* характеристических функций компонент; для гауссовского вектора надо воспользоваться формулой (7).) В рассматриваемом случае это свойство “диагональности” выполнено, поскольку

$$\begin{aligned} \text{cov}(W(t_{k+1}) - W(t_k), W(t_{m+1}) - W(t_m)) &= \\ &= \min\{t_{k+1}, t_{m+1}\} - \min\{t_{k+1}, t_m\} - \\ &\quad - \min\{t_k, t_{m+1}\} + \min\{t_k, t_m\} = 0 \quad \text{при } k \neq m. \end{aligned} \quad (25)$$

Следовательно, у построенного процесса приращения независимы, т. е. справедливо свойство 2). Величина  $W(t) - W(s)$  имеет нормальное распределение (вектор, составленный из части компонент гауссовского вектора, является гауссовским) с нулевым средним, и аналогично (25) находим, что  $D(W(t) - W(s)) = t - s$  при  $t \geq s$ . Таким образом, свойство 3) также установлено.

Обратно. Пусть для процесса  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  выполнено определение 3. Тогда справедливо (6), т. е. условия 2° и 3°. Гауссовость процесса  $W$ , т. е. 1°, получаем, снова воспользовавшись (24).  $\square$

**§ 9.** Покажем, как можно дать *явную конструкцию* винеровского процесса, который будет иметь с вероятностью 1 непрерывные траектории.

Вначале построим требуемый процесс на отрезке  $[0, 1]$ . С этой целью введем *функции Хаара*  $H_k(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned} H_1(t) &\equiv 1, \quad H_2(t) = \mathbf{1}_{[0, 1/2]}(t) - \mathbf{1}_{(1/2, 1]}(t), \quad \dots, \\ H_k(t) &= 2^{n/2}(\mathbf{1}_{I_{n,k}}(t) - \mathbf{1}_{J_{n,k}}(t)), \quad 2^n < k \leq 2^{n+1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= [a_{n,k}, a_{n,k} + 2^{-n-1}], \quad J_{n,k} = (a_{n,k} + 2^{-n-1}, a_{n,k} + 2^{-n}], \\ a_{n,k} &= 2^{-n}(k - 2^n - 1) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

(см. рис. 6 для  $k > 2$ ).

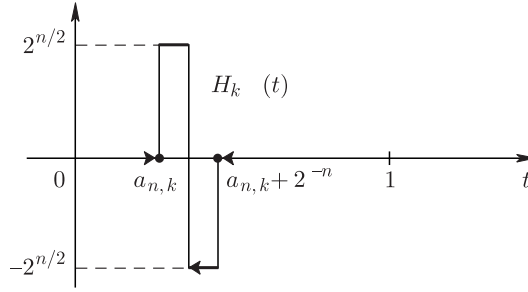


Рис. 6

Система функций  $\{H_k\}$  является *полной и ортонормированной* в пространстве  $L^2[0, 1]$  с мерой Лебега и скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt, \quad f, g \in L^2[0, 1].$$

Действительно, ортонормированность системы  $\{H_k\}$  очевидна, а ее полнота вытекает из того, что с помощью линейных комбинаций функций  $H_k$  можно записать *индикаторы* промежутков с двоично рациональными концами. Так, например,

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{[0, 1/2]} &= (H_1 + H_2)/2, \quad \mathbf{1}_{(1/2, 1]} = (H_1 - H_2)/2, \\ \mathbf{1}_{[0, 1/4]} &= (\mathbf{1}_{[0, 1/2]} + (1/\sqrt{2})H_2)/2, \quad \mathbf{1}_{(1/4, 1/2]} = (\mathbf{1}_{[0, 1/2]} - (1/\sqrt{2})H_2)/2, \quad \dots, \\ \mathbf{1}_{[a_{n,k}, a_{n,k} + 2^{-n-1}]} &= (\mathbf{1}_{[a_{n,k}, a_{n,k} + 2^{-n}]} + 2^{-n/2}H_k)/2 \quad \text{для } 2^n < k \leq 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Следовательно, любую функцию  $f \in L^2[0, 1]$  можно представить в виде

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, H_k \rangle H_k, \quad (26)$$

где ряд в правой части (26) сходится в  $L^2[0, 1]$ . Отметим также, что согласно *равенству Парсеваля*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, H_k \rangle \langle g, H_k \rangle. \quad (27)$$

По функциям Хаара определим теперь *функции Шаудера* (см. рис. 7):

$$S_k(t) = \int_0^t H_k(y) dy \equiv \langle \mathbf{1}_{[0, t]}, H_k \rangle, \quad t \in [0, 1], \quad k \in \mathbb{N}.$$

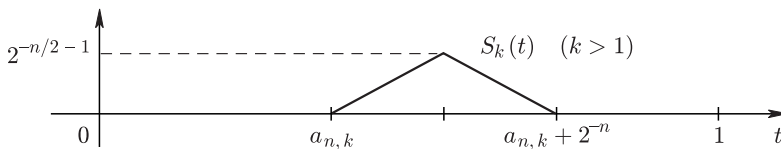


Рис. 7

Нам понадобятся далее следующие две леммы.

**Лемма 2.** Пусть числовая последовательность  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$  такова, что  $a_k = O(k^\varepsilon)$  при  $k \rightarrow \infty$  для некоторого  $\varepsilon < 1/2$ . Тогда ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t)$  сходится равномерно на  $[0, 1]$  и, следовательно, задает непрерывную на  $[0, 1]$  функцию.

**Доказательство.** Достаточно показать, что

$$R_m := \sup_{t \in [0, 1]} \sum_{k > 2^m} |a_k| S_k(t) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty$$

( $S_k(t) \geq 0$  при любых  $k \in \mathbb{N}$  и  $t \geq 0$ ).

Имеем  $|a_k| \leq ck^\varepsilon$  для каждого  $k \geq 1$  и некоторого  $c > 0$ . Поэтому для всех  $t \in [0, 1]$  и  $n \geq 1$

$$\sum_{2^n < k \leq 2^{n+1}} |a_k| S_k(t) \leq c 2^{(n+1)\varepsilon} \sum_{2^n < k \leq 2^{n+1}} S_k(t) \leq c 2^{(n+1)\varepsilon} 2^{-n/2-1} \leq c 2^{\varepsilon-n(1/2-\varepsilon)};$$

мы учли здесь, что  $t$  попадает только в один из непересекающихся носителей функций  $S_k$ ,  $2^n < k \leq 2^{n+1}$ , и то, что  $0 \leq S_k(t) \leq 2^{-n/2-1}$  для рассматриваемых  $k$ . По условию  $\varepsilon < 1/2$ . Следовательно,

$$R_m \leq c 2^\varepsilon \sum_{n \geq m} 2^{-n(1/2-\varepsilon)} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad \square$$

**Лемма 3.** Пусть на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  заданы (необязательно независимые) величины  $\xi_k \sim N(0, 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда для любого  $c > 2^{1/2}$  и  $\mathbb{P}$ -почти всех  $\omega \in \Omega$  можно указать  $N_0 = N_0(\omega, c) \in \mathbb{N}$  такое, что

$$|\xi_k(\omega)| < c(\ln k)^{1/2} \quad \text{при всех } k \geq N_0.$$

**Доказательство.** Для  $\xi \sim N(0, 1)$  и любого  $x > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi \geq x) &= (2\pi)^{-1/2} \int_x^\infty \exp\{-y^2/2\} dy = (2\pi)^{-1/2} \int_x^\infty (-1/y) d(e^{-y^2/2}) = \\ &= (2\pi)^{-1/2} \left( x^{-1} e^{-x^2/2} - \int_x^\infty y^{-2} e^{-y^2/2} dy \right) \leq x^{-1} (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Следовательно, при любом  $x > 0$

$$\mathbb{P}(|\xi| \geq x) \leq x^{-1} (2/\pi)^{1/2} e^{-x^2/2}. \quad (29)$$

Поэтому для  $c > 2^{1/2}$

$$\sum_{k \geq 2} \mathbb{P}(|\xi_k| \geq c(\ln k)^{1/2}) \leq c^{-1} (2/\pi)^{1/2} \sum_{k \geq 2} k^{-c^2/2} (\ln k)^{-1/2} < \infty.$$

Отсюда требуемое утверждение следует по *лемме Бореля–Кантелли* (см. [85; т. 1, с. 327]), утверждающей, что если  $\sum_k \mathbf{P}(A_k) < \infty$ , то *бесконечное* число событий  $A_k$  произойдет лишь с нулевой вероятностью, т. е.  $\mathbf{P}\left(\bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 0$ .  $\square$

Полезно отметить, что наряду с (28) верно соотношение

$$\mathbf{P}(\xi \geq x) \sim x^{-1}(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2} \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (30)$$

§ 10. Перейдем непосредственно к описанию явной конструкции винеровского процесса (на отрезке  $[0, 1]$ ) с помощью последовательности независимых стандартных гауссовских величин.

**Теорема 8.** Пусть  $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$  — последовательность независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение  $N(0, 1)$  и заданных на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Положим для  $t \in [0, 1]$ ,  $\omega \in \Omega$

$$W(t, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) S_k(t). \quad (31)$$

Тогда  $W = \{W(t), t \in [0, 1]\}$  есть винеровский процесс на  $[0, 1]$ , к тому же имеющий с вероятностью единица непрерывные траектории.

**Доказательство.** Равномерная на  $[0, 1]$  сходимость п. н. ряда в (31) и непрерывность п. н. траекторий процесса  $W = \{W(t), t \in [0, 1]\}$ , построенного с помощью (31), следует из лемм 2 и 3. Проверим теперь выполнение требований 1°, 2° и 3°, содержащихся в теореме 7. Для этого покажем, что ряд (31) не только п. н. равномерно сходится на  $[0, 1]$ , но и при каждом  $t \in [0, 1]$  сходится в среднем квадратическом.

С этой целью обозначим  $Z_n(t) = \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t)$ . Для  $n, m \in \mathbb{N}$  и  $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|Z_{n+m}(t) - Z_n(t)|^2 &= \mathbf{E} \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} \xi_k S_k(t) \right|^2 = \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+m} \sum_{l=n+1}^{n+m} S_k(t) S_l(t) \mathbf{E} \xi_k \xi_l = \sum_{k=n+1}^{n+m} S_k^2(t). \end{aligned}$$

Имеем  $\sum_{k=1}^{\infty} S_k^2(t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-k/2-1})^2 < \infty$ , поэтому полнота пространства  $L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  обеспечивает при каждом  $t \in [0, 1]$  наличие  $L^2$ -предела  $Z(t)$  у последовательности  $\{Z_n(t)\}$ , т. е.  $\mathbf{E}|Z_n(t) - Z(t)|^2 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Из (31) мы знаем, что  $Z_n(t) \rightarrow W(t)$  п. н. при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $t \in [0, 1]$ . Отсюда вытекает, что  $Z(t) = W(t)$  п. н., поскольку (см., например, [85; т. 1, с. 328]) как сходимость п. н., так и сходимость в среднем квадратическом влекут сходимость по вероятности, а предел по вероятности последовательности случайных величин определен однозначно с точностью до эквивалентности.

Таким образом,  $Z_n(t) \xrightarrow{L^2(\Omega)} W(t)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , для  $t \in [0, 1]$ .

Найдем среднее и ковариационную функцию процесса  $W$ , определенного в (31). Поскольку  $\mathbb{E} Z_n(t) = 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $t \in [0, 1]$ , то

$$|\mathbb{E} W(t)| = |\mathbb{E} W(t) - \mathbb{E} Z_n(t)| \leq (\mathbb{E} |W(t) - Z_n(t)|^2)^{1/2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно,  $\mathbb{E} W(t) = 0$  при всех  $t \in [0, 1]$ .

Принимая во внимание непрерывность скалярного произведения, получаем, что для любых  $s, t \in [0, 1]$

$$(Z_n(s), Z_n(t))_{L^2(\Omega)} \rightarrow (W(s), W(t))_{L^2(\Omega)} = \mathbb{E} W(s)W(t) = \text{cov}(W(s), W(t)).$$

В силу независимости элементов последовательности  $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$  и равенства  $\mathbb{E} \xi_k^2 = 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , находим, что

$$(Z_n(s), Z_n(t))_{L^2(\Omega)} = \mathbb{E} Z_n(s)Z_n(t) = \sum_{k=1}^n S_k(s)S_k(t)\mathbb{E} \xi_k^2 \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} S_k(s)S_k(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Согласно (27)

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k(s)S_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle H_k, \mathbf{1}_{[0,s]} \rangle \langle H_k, \mathbf{1}_{[0,t]} \rangle = \langle \mathbf{1}_{[0,s]}, \mathbf{1}_{[0,t]} \rangle = \min\{s, t\}.$$

Поэтому  $\text{cov}(W(s), W(t)) = \min\{s, t\}$ .

Покажем, наконец, что построенный процесс  $W$  является гауссовским, для чего воспользуемся леммой 1.

Возьмем  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$  и рассмотрим случайную величину  $Y = \sum_{m=1}^n \tau_m W(t_m)$ . Ясно, что

$$Y = \sum_{m=1}^n \tau_m \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t_m) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \xi_k, \quad (32)$$

где  $b_k = b_k(\tau_1, \dots, \tau_n; t_1, \dots, t_n) = \sum_{m=1}^n \tau_m S_k(t_m)$ , а ряд в правой части (32) сходится как п. н., так и в  $L^2(\Omega)$  (как конечная сумма рядов, обладающих этими свойствами). Заметив, что  $Y_N = \sum_{k=1}^N b_k \xi_k \sim N(0, \sigma_N^2)$ , где  $\sigma_N^2 = \sum_{k=1}^N b_k^2$ , получим, что  $\mathbb{E} Y_N^2 = \sigma_N^2 \rightarrow \mathbb{E} Y^2 = \sigma^2$  (сходимость элементов в  $L^2(\Omega)$  влечет сходимость их норм). Учитывая сходимость по распределению случайных величин  $Y_N$  к случайной величине  $Y$  (обозначения:  $Y_N \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$  или  $Y_N \xrightarrow{\text{Law}} Y$ ) при  $N \rightarrow \infty$ , вытекающую как из сходимости п. н., так и из сходимости в  $L^2(\Omega)$ , находим, что

$$\varphi_{Y_N}(\lambda) = \exp\{-\sigma_N^2 \lambda^2 / 2\} \rightarrow \exp\{-\sigma^2 \lambda^2 / 2\} = \varphi_Y(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

т. е.  $Y \sim N(0, \sigma^2)$ .

Итак, построенный процесс  $W$  является гауссовским, что завершает доказательство теоремы 8.  $\square$

Из теоремы 7 главы I вытекает, что  $W = \{W(t), t \in [0, 1]\}$  (и любая его модификация) является  $\mathcal{F} | \mathcal{B}(C([0, 1]))$ -измеримым случайным элементом.

**Определение 12.** Распределение вероятностей на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}(C[0, 1])$  построенного случайного элемента  $W = \{W(t), t \in [0, 1]\}$  называется *мерой Винера*, или *винеровской мерой*, и обозначается  $\mathbb{W}$ .

§ 11. Перейдем к построению винеровского процесса  $W$  на  $[0, \infty)$ . Пользуясь теоремой 2 главы I, зададим на некотором (полном) вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  последовательность *независимых случайных элементов*  $W_n = \{W_n(t), t \in [0, 1]\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , таких, что  $W_n(\cdot, \omega) \in C[0, 1]$  для  $\omega \in \Omega$  и  $\mathbb{P}_{W_n} = \mathbb{W}$  на  $\mathcal{B}(C[0, 1])$ .

Требуемый процесс  $W$  на  $[0, \infty)$  определим теперь с помощью непрерывного “склеивания” процессов  $W_n$ , т. е. положим

$$W(t, \omega) = \begin{cases} W_1(t, \omega) & \text{для } t \in [0, 1), \\ \sum_{j=1}^k W_j(1, \omega) + W_{k+1}(t - k, \omega) & \text{для } t \in [k, k + 1), k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (33)$$

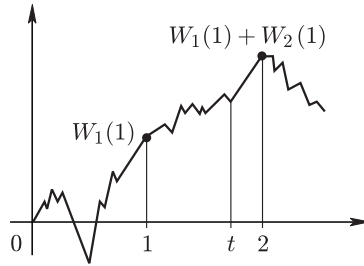


Рис. 8

**Теорема 9.** Процесс  $W$ , определяемый формулой (33), есть винеровский процесс на  $[0, \infty)$ . Все траектории этого процесса непрерывны.

**Доказательство.** Непрерывность процесса  $W$  очевидна по построению. Ясно также, что  $W(0) = 0$ . Покажем, что  $W$  есть процесс с независимыми приращениями, у которого  $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$  при  $0 \leq s < t < \infty$ .

Если  $s, t \in [k, k + 1)$  для некоторого  $k \geq 0$ , то

$$W(t) - W(s) = W_{k+1}(t - k) - W_{k+1}(s - k) \sim N(0, t - s).$$

Если же  $s \in [k, k + 1)$  и  $t \in [m, m + 1)$ , где  $k < m$ , то

$$[s, t] = [s, k + 1) \cup \bigcup_{k < l < m} [l, l + 1) \cup [m, t) \quad \left( \bigcup_{l \in \emptyset} [l, l + 1) = \emptyset \right)$$

(см. рис. 9). Поэтому

$$\begin{aligned} W(t) - W(s) &= W(k + 1) - W(s) + \sum_{k < l < m} (W(l + 1) - W(l)) + W(t) - W(m) = \\ &= \zeta_k + \sum_{k < l < m} \zeta_l + \zeta_m. \end{aligned} \quad (34)$$

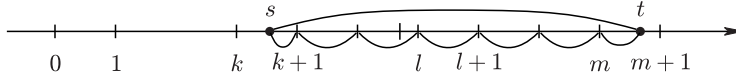


Рис. 9

Заметим, что величины  $\zeta_k, \dots, \zeta_m$  независимы и  $\zeta_i \sim N(0, \sigma_i^2)$ ,  $i = k, \dots, m$ , поэтому  $\zeta_k + \dots + \zeta_m \sim N\left(0, \sum_{i=k}^m \sigma_i^2\right)$ . Тем самым, распределение  $W(t) - W(s)$  является нормальным  $N(0, t - s)$ .

Аналогичные рассуждения показывают, что процесс  $W$  имеет независимые приращения. Для доказательства надо учесть, что измеримые функции от непересекающихся наборов независимых величин будут независимы.  $\square$

Далее считаем, что все рассматриваемые винеровские процессы имеют п. н. непрерывные траектории.

## Дополнения и упражнения

Обратимся к несколько более подробному рассмотрению введенного класса процессов с независимыми приращениями. Два важнейших представителя этого класса — *броуновское движение* и *пуассоновский процесс* — уже были определены в главе II.

1. Найдите ковариационную функцию пуассоновского процесса, имеющего постоянную интенсивность  $\lambda$ . Сопоставьте полученный ответ с ковариационной функцией винеровского процесса.
2. Пусть  $r = r(s, t)$  — неотрицательно определенная функция ( $s, t \in T$ , где  $T$  — некоторое множество). Существует ли негауссовский процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$  такой, что  $\text{cov}(X_s, X_t) = r(s, t)$  при всех  $s, t \in T$ ?
3. Докажите, что если  $P_n(z_1, \dots, z_m)$  — многочлен степени  $n$  (от  $m$  переменных) с положительными коэффициентами и  $r_k(s, t)$  ( $k = 1, \dots, m; s, t \in T$ ) — ковариационные функции, то  $P_n(r_1(s, t), \dots, r_m(s, t))$  также является ковариационной функцией.
4. Для  $L^2$ -процесса  $X = \{X_t, t \in T\}$ , заданного на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , обозначим  $L^2[X]$  замыкание в пространстве  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  линейной оболочки всех величин  $X_t$ ,  $t \in T$ . Докажите, что если  $X$  — гауссовский процесс, то  $L^2[X]$  есть гауссовская система, т. е. для любого  $n \in \mathbb{N}$  и любых  $Y_1, \dots, Y_n \in L^2[X]$  вектор  $(Y_1, \dots, Y_n)$  имеет гауссовское распределение.
- 5 (свойство автомодельности). Пусть  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс и  $c$  — положительная константа. Докажите, что процесс  $X = \{X(t) = \frac{1}{\sqrt{c}}W(ct), t \geq 0\}$  является винеровским процессом.
6. Докажите теорему 8, проверив исходное определение винеровского процесса, т. е. докажите, что процесс, задаваемый формулой (31), имеет независимые приращения. В силу *теоремы Дуба* (см. приложение 5) этот процесс с непрерывными траекториями автоматически будет *гауссовским*.

Рассмотрим *случайное блуждание* в  $\mathbb{R}^m$  из примера 1 главы I, т. е. процесс частных сумм  $S = \{S_n, n \geq 0\}$ , где  $S_n = S_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$ ,  $n \geq 1$ , и  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — *независимые одинаково распределенные векторы*. Будем считать  $S_0 = 0$ . Во многих ситуациях бывает интересно выяснить, какую часть пространства  $\mathbb{R}^m$  заполняют траектории блуждания, с какой вероятностью достигается то или иное множество и т. д. Классический пример проблем такого рода, изучаемый в курсе теории вероятностей, — это задача о разорении игрока (см. [85; т. 1, с. 109], а также пример 7 главы IV). К излагаемым ниже результатам о случайных блужданиях будет полезно вернуться после прочтения главы VI о марковских процессах.

Для описания интересующих нас случайных блужданий понадобится ряд новых понятий.

**Определение 13.** (Случайной) *мерой пребывания* процесса  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  в борелевском множестве  $B$  из  $\mathbb{R}^m$  называется величина

$$\mu(B) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{\{S_n \in B\}}.$$

Соответствующая этой мере  $\mu = \mu(\cdot)$  *мера интенсивности*  $\nu = \nu(\cdot)$  определяется формулой

$$\nu(B) = \mathbf{E} \mu(B) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(S_n \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

**Определение 14.** Обозначив  $V_\varepsilon(x)$  открытый шар в  $\mathbb{R}^m$  с центром в точке  $x$  и радиусом  $\varepsilon > 0$ , введем следующие множества:

$$R = \bigcap_{\varepsilon > 0} \{x \in \mathbb{R}^m : \mu(V_\varepsilon(x)) = \infty\} \text{ — множество возвратности,}$$

$$M = \bigcap_{\varepsilon > 0} \{x \in \mathbb{R}^m : \nu(V_\varepsilon(x)) = \infty\} \text{ — множество возвратности в среднем,}$$

$$A = \bigcap_{\varepsilon > 0} \{x \in \mathbb{R}^m : \nu(V_\varepsilon(x)) > 0\} \text{ — множество достижимости.}$$

**Теорема 10** (о дихотомии; см., например, [146; с. 137]). *Для случайного блуждания  $S$  в  $\mathbb{R}^m$ , определенного согласно (I.9), реализуется только одна из следующих двух возможностей:*

- 1)  $R = M = A$  и это множество является замкнутой подгруппой в  $\mathbb{R}^m$ ,
- 2)  $R = M = \emptyset$  и  $|S_n| \rightarrow \infty$  п. н. при  $n \rightarrow \infty$ .

**Определение 15.** Случайное блуждание называется *возвратным*, если в приведенной теореме 10 имеет место свойство 1) и *невозвратным* (или *транзитентным*), если выполнено свойство 2).

7. Докажите, что если  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  — возвратное случайное блуждание в  $\mathbb{R}^m$ , то при каждом  $k \in \mathbb{N}$  таким же будет и блуждание  $S^{(k)} = \{S_{nk}, n \geq 0\}$ .

Приведем *критерий возвратности случайного блуждания*, полученный Чжун-ном и Фуксом.



**Теорема 11** (о возвратности; см., например, [146; с. 139]). *Случайное блуждание  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  в  $\mathbb{R}^m$  с  $S_0 = 0$ ,  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ ,  $n \geq 1$ , возвратно тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$*

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{V_\varepsilon(0)} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{1 - rf(t)} \right) dt = \infty,$$

где  $f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}^m$ , — характеристическая функция вектора  $\xi_1$ .

8. Пусть случайная величина  $\xi_1$  имеет симметричное устойчивое распределение в  $\mathbb{R}$  с показателем  $\alpha \in (0, 2]$ , т. е. пусть

$$f(t) = \mathbb{E} e^{it\xi_1} = e^{-c|t|^\alpha}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad c > 0. \quad (35)$$

Докажите, что такое  $\alpha$ -устойчивое случайное блуждание возвратно при  $\alpha \geq 1$  и транзиентно при  $\alpha < 1$ .

9. Пусть  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  — случайное блуждание в  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 2$ ) такое, что компоненты вектора  $\xi_1$  независимы и имеют  $\alpha$ -устойчивое распределение (см. упражнение 8). Исследуйте, при каких значениях  $\alpha$  случайное блуждание возвратно и при каких — транзиентно.

*Симметризацией* случайного блуждания  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  в  $\mathbb{R}^m$  называется последовательность  $\tilde{S} = \{\tilde{S}_n, n \geq 0\}$  с таким же распределением, как у  $\{S_n - S'_n, n \geq 0\}$ , где  $S'_n = \{S'_n, n \geq 0\}$  — независимая копия последовательности  $\{S_n\}$  (можно считать, что для этого строится независимая копия  $\{\xi'_n, n \geq 0\}$  последовательности  $\{\xi_n, n \geq 0\}$  и  $S'_0 = 0$ ,  $S'_n = \sum_{j=1}^n \xi'_j$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ).

10. Докажите, что если возвратно случайное блуждание  $S = \{S_n, n \geq 0\}$ , то возвратно и симметризованное случайное блуждание  $\tilde{S} = \{\tilde{S}_n, n \geq 0\}$ .
11. Докажите, что случайное блуждание  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  в  $\mathbb{R}^m$  возвратно, если
- $n^{-1}S_n \xrightarrow{P} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , когда  $m = 1$ ;
  - $\mathbb{E} \xi_1 = 0$  и  $\mathbb{E} |\xi_1|^2 < \infty$ , когда  $m = 2$ .

Постройте примеры, показывающие, что эти достаточные условия возвратности не являются необходимыми.

**Определение 16.** *Носителем* произвольной меры  $\lambda$  на борелевской  $\sigma$ -алгебре топологического пространства  $S$  называется наименьшее замкнутое множество  $F \subset S$  такое, что  $\lambda(S \setminus F) = 0$ .

12. Пусть  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  — случайное блуждание в  $\mathbb{R}$ , причем  $\xi_1$  имеет симметричное невырожденное распределение с ограниченным носителем. Докажите, что такое случайное блуждание возвратно.

**Определение 17.** *Эффективной размерностью* случайного блуждания (I.9) называется размерность подпространства  $\mathbb{R}^m$ , порожденного линейной оболочкой носителя меры  $P_{\xi_1}$ .

13. Докажите, что если эффективная размерность случайного блуждания не меньше трех, то это случайное блуждание транзиентно.

Назовем *простейшим симметричным случайным блужданием в  $\mathbb{R}^m$*  такое блуждание, для которого

$$P(\xi_1 = e_i) = P(\xi_1 = -e_i) = (2m)^{-1}, \quad i = 1, \dots, m,$$

где  $i$ -я координата вектора  $e_i$  равна 1, а остальные равны 0. Это блуждание может рассматриваться как имитация движения “частицы”, с равной вероятностью смещающейся на единицу в любую сторону вдоль любой координатной оси.

Из результата упражнения 13 вытекает хорошо известный *критерий Поля* (см. [78; т. 1, с. 374]) о том, что простейшее симметричное случайное блуждание в  $\mathbb{R}^m$  невозвратно при  $m \geq 3$ . Там же ([78]) доказано, что при  $m = 1$  и  $m = 2$  такое блуждание возвратно (в этой связи В. Феллер замечал, что “все дороги ведут в Рим”).

- 14** (сравните с приведенным выше результатом о случайном блуждании). Докажите, что траектории частицы, совершающей простейшее симметричное случайное блуждание в  $\mathbb{R}^m$ , с вероятностью 1 имеют бесконечное число самопересечений, т. е. с вероятностью 1 частица будет возвращаться в положения, которые она занимала ранее.

Важную область применений случайные блуждания находят в *статистическом последовательном анализе Вальда*. Рассмотрим  $X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные векторы в  $\mathbb{R}^m$ , относительно которых имеются две гипотезы:

$H_0$ : плотность распределения вероятностей  $X_1$  равна  $p_0(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ ,

$H_1$ : плотность распределения вероятностей  $X_1$  равна  $p_1(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ .

Требуется по наблюдениям  $X_j, j = 1, \dots$ , различить эти гипотезы. Считая плотности  $p_i(x), i = 0, 1$ , положительными функциями на  $\mathbb{R}^m$ , введем *логарифм отношения правдоподобия*

$$S_n = \ln \left( \frac{p_1(X_1) \cdots p_1(X_n)}{p_0(X_1) \cdots p_0(X_n)} \right) = \sum_{j=1}^n \xi_j, \quad \xi_j = \ln \left( \frac{p_1(X_j)}{p_0(X_j)} \right), \quad j, n \in \mathbb{N}.$$

Суть подхода Вальда к проблеме различения рассматриваемых гипотез состоит в следующем. Выбираются две “границы”  $a, b$ , где  $a < 0 < b$ . До тех пор, пока точка  $(n, S_n)$  лежит в полосе  $\{(x, y) : x \geq 0, a < y < b\}$ , решение о различении гипотез не принимается (в отличие от статической схемы Неймана–Пирсона допускается возможность продолжения наблюдений). Решение в пользу гипотезы  $H_1$  принимается в тот момент, когда случайное блуждание впервые покидает полосу через верхнюю границу (т. е. в тот момент, когда  $S_n \geq b$ ), а в пользу гипотезы  $H_0$  — тогда, когда выход происходит через нижнюю границу. Мы не останавливаемся здесь на том, из каких соображений выбираются эти границы, а также на обобщениях рассмотренного примера, отсылая, например, к монографии [84].

- 15.** Докажите, что если  $P(\xi_1 \neq 0) > 0$ , то одномерное случайное блуждание с вероятностью единица *выходит* из всякой полосы  $(a, b)$  с границами  $a < 0 < b$  (напомним, что  $S_0 = 0$ ).

Случайным блужданиям посвящена обширная литература, см., например, [74], [78; т. 1, гл. 14; т. 2, гл. 12], [123; гл. 3], [146; гл. 8]. О применениях случайных блужданий в математической теории запасов см., например, [1]. Упомянем также интенсивно развивающееся направление в теории случайных процессов — *исследование случайных блужданий в случайной среде*. Главный смысл моделей такого рода состоит в том, что сами вероятности переходов частицы в новые положения случайны и зависят от того, где находится изучаемая частица (см., например, [141]). Имеются и более сложные модели, относящиеся к случайным средам, связанные, например, с магнитным полем (см. [166] и там же библиографию).

Напомним, что стохастическая непрерывность процесса в точке определяется согласно (I.56), а стохастическая непрерывность на множестве означает стохастическую непрерывность в каждой точке этого множества.

Аналогично известной теореме о разложении меры Лебега–Стилтьеса в сумму дискретной, абсолютно непрерывной и сингулярной компонент (см., например, [35; с. 410]) имеет место следующая теорема (см., например, [73; с. 163]).

**Теорема 12** (П. Леви). *Всякий случайный процесс  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  с независимыми приращениями допускает представление*

$$X(t) = m(t) + Y(t) + Z(t), \quad t \geq 0,$$

где  $m(t)$  — неслучайная функция,  $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$  и  $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$  — независимые процессы с независимыми приращениями, причем  $Y$  — стохастически непрерывный процесс на  $[0, \infty)$ , а  $Z$  — чисто дискретный процесс, т. е. процесс вида

$$Z(t) = \sum_k \xi_k^- \mathbf{1}\{t_k \leq t\} + \sum_k \xi_k^+ \mathbf{1}\{t_k < t\},$$

здесь  $T = \{t_k, k \in \mathbb{N}\}$  — некоторое счетное подмножество  $[0, \infty)$ , а  $\{\xi_k^-, \xi_k^+, k \in \mathbb{N}\}$  — совокупность независимых случайных величин.

Обратимся к специальному классу стохастически непрерывных действительных процессов, имеющих независимые приращения. Начнем с трех простых упражнений.

- 16.** Пусть  $X = \{X_t, t \in [a, b]\}$  — действительный процесс, стохастически непрерывный в каждой точке  $t \in [a, b]$ . Тогда процесс  $X$  является равномерно стохастически непрерывным на  $[a, b]$ , т. е. для любых  $\varepsilon, \gamma > 0$  найдется  $\Delta = \Delta(\varepsilon, \gamma) > 0$  такое, что

$$\mathbf{P}(|X_t - X_s| \geq \varepsilon) \leq \gamma, \quad \text{если } |s - t| \leq \Delta, \quad s, t \in [a, b]. \quad (36)$$

Кроме того, процесс  $X$  ограничен по вероятности, т. е.

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{t \in [a, b]} \mathbf{P}(|X_t| \geq c) = 0. \quad (37)$$

**17** (неравенство Оттавиани). Пусть  $Y_1, \dots, Y_n$  — независимые действительные величины такие, что для некоторых  $\alpha \in [0, 1)$ ,  $r \geq 0$

$$P(|S_n - S_k| \geq r) \leq \alpha \text{ при } k = 1, \dots, n, \quad (38)$$

где  $S_k = \sum_{j=1}^k Y_j$ . Докажите, что при всех  $c \geq 0$

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq r + c\right) \leq \frac{1}{1 - \alpha} P(|S_n| \geq c). \quad (39)$$

**18.** Пусть процесс  $X = \{X_t, t \in [0, \infty)\}$  имеет независимые приращения и стохастически непрерывен на  $[0, \infty)$ . Докажите, что

$$P\left(\sup_{t \in M \cap [0, \infty)} |X_t| < \infty\right) = 1, \quad (40)$$

где  $M$  — множество двоично-рациональных точек прямой.

**Определение 18.** Назовем *пространством Скорохода*  $D[0, \infty)$  совокупность действительных функций, заданных на  $[0, \infty)$ , непрерывных справа и имеющих конечные пределы слева в каждой точке  $t \in (0, \infty)$ .

Это пространство можно превратить в польское с помощью введения специальной метрики (см. [2, §14]). Функции из этого пространства часто называют *càdlàg* функциями (от французского *continue à droite, limite à gauche* — непрерывный справа, имеющий предел слева; используется также обозначение *rcll*, происходящее от аналогичного английского термина: *right continuous, left-hand limits*).

С помощью упражнений 16–18, а также доказываемого далее неравенства Дуба (лемма 6 главы IV) можно установить (см. [39; ч. 1, с. 70–72]), что верна

**Теорема 13.** *Стохастически непрерывный на  $[0, \infty)$  процесс с независимыми приращениями имеет модификацию с траекториями из пространства  $D[0, \infty)$ .*

**19.** Докажите, что пуассоновский процесс стохастически непрерывен на  $[0, \infty)$ .

Конечномерные распределения стохастически непрерывных действительных процессов с независимыми приращениями описываются с помощью следующих двух теорем, принадлежащих соответственно А. Я. Хинчину и П. Леви.

**Теорема 14** (формула Хинчина; см., например, [39; ч. 1, §16]). *Пусть стохастически непрерывный действительный процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  имеет независимые приращения. Тогда для любого  $t \geq 0$  и всех  $\lambda \in \mathbb{R}$  характеристическая функция*

$$E \exp\{i\lambda X_t\} = \exp\left\{t\left(ia\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda, x) \nu(dx)\right)\right\}, \quad (41)$$

где  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\nu$  — конечная мера на  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  и

$$g(\lambda, x) = \begin{cases} (\exp\{i\lambda x\} - 1 - i\lambda \sin x)(1 + x^2)/x^2, & x \neq 0, \\ -\lambda^2/2, & x = 0. \end{cases} \quad (42)$$

При этом представление (41) единственно, т. е. в этой формуле число  $a$  и мера  $\nu$  определены однозначно.

**Теорема 15** (формула Леви; см., например, [39; ч. 1, § 16]). *Если выполнены условия предыдущей теоремы, то для любого  $t \geq 0$  и всех  $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\mathbb{E} \exp\{i\lambda X_t\} = \exp\left\{t\left(ib\lambda - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda \sin x) \tilde{\nu}(dx)\right)\right\}, \quad (43)$$

где  $b \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \geq 0$ ,  $\tilde{\nu}$  — мера на  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  (принимаяющая, вообще говоря, бесконечные значения) такая, что

$$\tilde{\nu}(\{0\}) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \tilde{\nu}(dx) < \infty. \quad (44)$$

При этом  $b$ ,  $\sigma$  и  $\tilde{\nu}$ , фигурирующие в представлении (44), определены однозначно.

**20.** Покажите, как из формулы Хинчина выводится формула Леви и наоборот. Какова при этом связь между параметрами  $a$ ,  $\nu$  и  $b$ ,  $\sigma^2$ ,  $\tilde{\nu}$ ?

**21.** Как выглядит формула Леви для процесса  $W_x(t) = x + W(t)$ ,  $t \geq 0$ , где  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс, а  $x \in \mathbb{R}$ ?

Обратимся к рассмотрению процессов с независимыми приращениями, заданных на  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  (и некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ) и принимающих значения в  $\mathbb{R}^m$ .

По аналогии со случаем  $m = 1$  вводится понятие càdlàg-функции  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**Определение 19.** Говорят, что случайный процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  со значениями в  $\mathbb{R}^m$  является *càdlàg-процессом*, если его траектории (п. в.) являются càdlàg-функциями. Процесс  $X$  имеет *скачок* в фиксированной точке  $t > 0$ , если

$$P(X_t \neq X_{t-}) > 0, \quad \text{где } X_{t-}(\omega) = \lim_{s \uparrow t} X_s(\omega).$$

**22.** Пусть  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  — стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями, принимающий значения в  $\mathbb{R}^m$ . Докажите, что у  $X$  есть càdlàg-модификация, не имеющая скачков в фиксированные моменты (ср. с теоремой 13).

**Определение 20.** *Процессом Леви*  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  со значениями в  $\mathbb{R}^m$  называется càdlàg-процесс с независимыми приращениями такой, что  $X_0 = 0$  п. н. и при каждом  $h > 0$  распределения величин  $X_{t+h} - X_t$  не зависят от значения  $t \in \mathbb{R}_+$ . Процессы Леви с неубывающими по координатам траекториями ( $X_0 = 0$ ,  $X_s \leq X_t$  для  $s \leq t$ ) принято называть *субординаторами*.

Имеются и другие, родственные, определения процессов Леви. Например, требуют стохастическую непрерывность процесса  $X$ , которая (см. упражнение 22) обеспечивает, что  $X$  — càdlàg-процесс. Процессом Леви называют и процесс  $Y = \{X_t + Y_0, t \geq 0\}$ , где  $Y_0$  — случайный вектор, не зависящий от описанного выше процесса  $\{X_t, t \geq 0\}$  со значением  $X_0 = 0$ .

Полностью описаны все непрерывные по вероятности càdlàg-процессы с независимыми приращениями (со значениями в  $\mathbb{R}^m$ ), в частности, процессы Леви. Эти результаты используют интегрирование по пуассоновской случайной мере (см., например, [146; гл. 11]). Здесь же сформулируем лишь следующий результат о распределениях приращений процессов Леви.

**Теорема 16** (формула Леви–Хинчина; см., например, [86; с. 238]). Пусть процесс Леви  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  принимает значения в  $\mathbb{R}^m$ . Тогда для любых  $t \geq 0$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  справедливо представление

$$\mathbb{E} \exp\{i\langle u, X_t \rangle\} = \exp\{t\Psi(u)\}, \quad (45)$$

где

$$\Psi(u) = i\langle b, u \rangle - \frac{\langle Cu, u \rangle}{2} + \int_{\mathbb{R}^m} (e^{i\langle u, x \rangle} - 1 - i\langle u, x \rangle \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}) \nu(dx). \quad (46)$$

Однозначно определенные характеристики  $(b, C, \nu)$  таковы:  $b$  — вектор в  $\mathbb{R}^m$ ,  $C$  — симметричная неотрицательно определенная матрица порядка  $m$ ,  $\nu$ -мера на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ , называемая мерой Леви. При этом  $\nu(\{0\}) = 0$  и

$$\int_{\mathbb{R}^m} (|x|^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty, \quad (47)$$

где знак “ $\wedge$ ” обозначает взятие минимума (имеются случаи, когда  $\nu(\mathbb{R}^m) < \infty$  и  $\nu(\mathbb{R}^m) = \infty$ ).

Формула (45) возможна с функциями  $\Psi(u)$ , допускающими представления, отличные от (46) (см., например, [86; с. 240]).

П. Леви и А. Я. Хинчин, как мы видели, предложили разные формулы для характеристических функций *безгранично делимых распределений*, но каждая из них может быть выведена из другой. Этим формулам предшествовала формула, установленная А. Н. Колмогоровым для характеристической функции безгранично делимой случайной величины, имеющей конечную дисперсию. Интересно отметить, что первоначально устойчивые и безгранично делимые распределения возникли в теории суммирования независимых действительных случайных величин. Фундаментальный вклад в эту область внесли П. Леви, Д. Пойа, А. Я. Хинчин, Б. де Финетти, А. Н. Колмогоров, Б. В. Гнеденко. Ознакомиться с этим направлением исследований можно по книгам [20, 27, 50, 78, 158].

Для броуновского движения  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  при любом  $c > 0$  п. н. верно следующее равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T - c \ln T} |W(t + c \ln T) - W(t)| / \ln T = \sqrt{2c}, \quad (48)$$

являющееся аналогом закона *Эрдёша–Реньи* для сумм независимых одинаково распределенных слагаемых.

Соотношение (48) допускает уточнение. Для этого зафиксируем некоторое  $c > 0$  и при  $T \geq c \ln T$  определим процесс

$$\xi(T) = \sup_{0 \leq t \leq T - c \ln T} (W(t + c \ln T) - W(t)), \quad (49)$$

где  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  — одномерное броуновское движение.

**Теорема 17** ([170, 181]). *Для процесса (49) с вероятностью единица выполняются соотношения*

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} (\xi(T) - \sqrt{2c} \ln T) / \ln \ln T = \sqrt{c/8}, \quad (50)$$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} (\xi(T) - \sqrt{2c} \ln T) / \ln \ln T = -\sqrt{c/8}. \quad (51)$$

Соотношение (50) получили Й. Ортега и М. Вщебор (см. [170; теорема 1]), а соотношение (51) — П. Ревес (см. [181; теорема 2.1]).

Случайным процессам с независимыми приращениями, в том числе процессам Леви, посвящена обширная литература (см., например, [73], [99] и там же библиографию). Отметим также, что имеются обобщения процессов с независимыми приращениями на случай, когда значения процессов лежат в более общих линейных пространствах, нежели  $\mathbb{R}^m$  (см., например, [16; т. 2, гл. 4]).

Теперь обсудим некоторые вопросы, касающиеся непрерывности траекторий случайных функций. Начнем со следующего классического результата Колмогорова.

**Теорема 18** (см., например, [12; с. 124]). *Пусть  $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$  — действительный случайный процесс такой, что для некоторых  $\alpha, \varepsilon > 0$  и  $C = C(\alpha, \varepsilon) > 0$*

$$\mathbb{E} |X(t) - X(s)|^\alpha \leq C |t - s|^{1+\varepsilon} \quad \text{при } s, t \in [a, b]. \quad (52)$$

*Тогда у процесса  $X$  существует непрерывная модификация.*

**23.** Покажите, что если в условии (52) положить  $\varepsilon = 0$ , то утверждение теоремы 18, вообще говоря, не обязано выполняться (указание: рассмотрите пуассоновский процесс).

Теорема Колмогорова о непрерывной модификации получила многочисленные обобщения. Рассмотрим некоторые из них.

Напомним, что для множества  $U \subset T$  ( $U$  может совпадать с  $T$ ), где  $(T, \delta)$  — псевдометрическое пространство,  $\varepsilon$ -сетью называется множество  $S_\varepsilon \subset T$  такое, что для любого  $t \in U$  найдется элемент  $s \in S_\varepsilon$ , для которого  $\delta(s, t) \leq \varepsilon$ . Другими словами,  $U$  покрывается замкнутыми шарами

$$B_\varepsilon(s) = \{t \in T: \delta(s, t) \leq \varepsilon\}, \quad s \in S_\varepsilon. \quad (53)$$

Если  $U$  обладает конечной  $\varepsilon$ -сетью, то назовем *минимальной  $\varepsilon$ -сетью* любую такую его  $\varepsilon$ -сеть  $S_\varepsilon^{\min}(U)$ , что  $\#(S_\varepsilon^{\min}(U))$  минимально, где  $\#(V)$  обозначает число элементов конечного множества  $V$ . Положим  $N_\delta(\varepsilon, U) = \#(S_\varepsilon^{\min}(U))$ , подчеркивая зависимость и от псевдометрики  $\delta$ . Число

$$H_\delta(\varepsilon, U) = \ln N_\delta(\varepsilon, U) \quad (54)$$

называется  $\varepsilon$ -энтропией множества  $U$  (часто логарифм в (54) берется по основанию 2).

Следуя [153], введем два условия на пространство  $(T, \delta)$ . Пусть существуют такие  $d \in \mathbb{N}$  и  $a > 0$ , что для каждого  $U \subset T$  с диаметром  $D_U := \sup\{\delta(s, t) : s, t \in U\} < \infty$  и любого  $\varepsilon > 0$

$$N_\delta(\varepsilon, U) \leq \max\{a(D_U/\varepsilon)^d, 1\}. \quad (55)$$

Пусть существует такое  $b > 0$ , что для любой минимальной  $\varepsilon$ -сети  $S_\varepsilon^{\min}(T)$

$$\#(S_\varepsilon^{\min}(T) \cap B_{5\varepsilon}(t)) \leq b \quad \text{при всех } t \in S_\varepsilon^{\min}(T), \quad (56)$$

где  $B_{5\varepsilon}(t)$  определяется согласно (53).

**Теорема 19** (см. [153; с. 134]). Пусть  $X = \{X(t), t \in T\}$  — случайная функция со значениями в польском пространстве  $(S, \rho)$  при каждом  $t \in T$ , заданная на некотором  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и псевдометрическом пространстве  $(T, \delta)$ , удовлетворяющем условиям (55) и (56). Предположим, что для некоторых  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $\alpha > d/\gamma$  и  $\beta > 0$

$$E(\rho(X(t), X(s)))^\alpha \leq \beta(\delta(t, s))^{\alpha\gamma} \quad \text{при всех } s, t \in T. \quad (57)$$

Тогда у функции  $X$  существует модификация  $Y = \{Y(t), t \in T\}$ , имеющая непрерывные траектории, такая, что при любом  $\lambda \in (0, \gamma - d/\alpha)$

$$\lim_{\nu \downarrow 0} \sup_{\delta(t, s) \leq \nu} \rho(Y(t), Y(s))/\delta^\lambda(t, s) = 0 \quad \text{н. н.} \quad (58)$$

и для каждого  $t_0 \in T$

$$E\left\{\sup_{t \in T} \rho(Y(t), Y(t_0))^\alpha\right\} \leq a(2\beta D_T)^{\alpha\gamma} / (2^{\gamma-d/\alpha} - 1)^\alpha. \quad (59)$$

**Замечание 5.** Если  $U$  — замкнутый параллелепипед в  $\mathbb{R}^d$  или сфера в  $\mathbb{R}^{d+1}$  (метрики евклидовы), то условия (55) и (56) выполнены. Поэтому из теоремы 19 вытекает теорема 18, причем с дополнительными утверждениями о локальных свойствах траекторий модификации.

Для того, чтобы ввести более общие моментные условия на случайную функцию  $X$ , рассмотрим положительную строго возрастающую выпуклую функцию  $\psi$ , определенную на  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  и такую, что  $\psi(0) \leq 1$ . Обратную к  $\psi$  функцию обозначим  $\Phi$ .

**Теорема 20** (см. [79]). Пусть  $X = \{X(t), t \in T\}$  — случайная функция со значениями в польском пространстве  $(S, \rho)$  при каждом  $t \in T$ , заданная на некотором  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и псевдометрическом пространстве  $(T, \delta)$ , такая, что для некоторого  $M > 0$

$$E\psi(\rho(X(t), X(s))/\delta(t, s)) \leq M \quad \text{при } s, t \in T, \quad \text{если } \delta(t, s) \neq 0, \quad (60)$$

и  $\rho(X(t), X(s)) = 0$  н. н., если  $\delta(t, s) = 0$ . Пусть также

$$\int_{+0} \Phi(N_\delta(T, \varepsilon)) d\varepsilon < \infty, \quad (61)$$

где интеграл берется по положительной части некоторой окрестности нуля. Тогда у случайной функции  $X$  существует непрерывная модификация.



- 24.** Пусть случайное поле  $X = \{X(t), t \in [0, 1]^d\}$  со значениями при каждом  $t \in T$  в польском пространстве  $(S, \rho)$  удовлетворяет для некоторой неубывающей положительной непрерывной функции  $f$  на  $\mathbb{R}_+$  и  $p \geq 1$  условиям

$$\mathbf{E}(\rho(X(t), X(s)))^p \leq f^p(\|t - s\|), \quad (62)$$

$$\int_{+\infty}^{+\infty} f(x^{-p/d}) dx < +\infty, \quad (63)$$

где интеграл берется в окрестности  $+\infty$ . Докажите, что тогда у случайного поля  $X$  существует непрерывная модификация (воспользуйтесь теоремой 20).

**Замечание 6** (см. [79]). Интегральное условие (63) является *оптимальным*, т. е. можно построить поле, удовлетворяющее всем условиям упражнения 24, кроме условия (63), такое, что оно не имеет непрерывной модификации.

Из теоремы 20 выводится также известный *результат Дадли*:

**Теорема 21.** Пусть  $X = \{X(t), t \in T\}$  — действительный гауссовский процесс на произвольном множестве  $T$ , снабженном псевдометрикой

$$\delta(s, t) = (\mathbf{E}(X_s - X_t)^2)^{1/2}.$$

Пусть

$$\int_{+0} \sqrt{\ln N_\delta(T, \varepsilon)} d\varepsilon < +\infty. \quad (64)$$

Тогда существует модификация  $X$ , имеющая непрерывные траектории.

При исследовании свойств траекторий случайных функций наряду с метрической энтропией весьма плодотворным оказался подход, основанный на понятии *мажорирующей меры*. Это понятие позволяет в определенном смысле лучше учесть структуру параметрического множества  $T$ . Дело в том, что метрическая энтропия как бы не различает “почти пустые” и “заполненные” шары данного радиуса.

**Определение 21.** Вероятностная мера  $\mu$ , заданная на борелевской  $\sigma$ -алгебре пространства  $(T, \delta)$ , называется *мажорирующей*, если

$$\sup_{t \in T} \int_0^\infty |\ln \mu(B_\varepsilon(t))|^{1/2} d\varepsilon < \infty, \quad (65)$$

где  $B_\varepsilon(t)$  определяется согласно (53).

Поскольку  $\mu(B_\varepsilon(t)) = 1$  для  $\varepsilon \geq D_T$ , то в (65) интегрирование фактически ведется от 0 до  $D_T$ , а условие конечности интеграла (65) равносильно конечности этого интеграла по некоторой положительной окрестности 0.

- 25** (см. [48; с. 182]). Докажите, что определение мажорирующей меры равносильно следующему. Существуют  $q > 1$  и последовательность  $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_k, k \in \mathbb{N}\}$  измельчающихся разбиений  $T$  на множества положительной  $\mu$ -меры такая, что

$$\sup_{C \in \mathcal{C}_k} D_C \leq 2q^{-k} \quad \text{и} \quad \sup_{t \in T} \sum_{k=1}^\infty q^{-k} |\ln \mu(C_k(t))|^{1/2} < \infty, \quad (66)$$

где  $C_k(t)$  — то (единственное) множество разбиения  $\mathcal{C}_k$ , которое содержит точку  $t$ .

**Теорема 22** (см. [48; с. 193]). Пусть  $X = \{X(t), t \in T\}$  — действительная гауссовская случайная функция на некотором компактном пространстве  $(T, \delta)$ . Тогда необходимым и достаточным условием ее ограниченности будет существование мажорирующей меры, а необходимым и достаточным условием непрерывности будет условие

$$\limsup_{\nu \downarrow 0} \int_0^\nu |\ln \mu(B_\varepsilon(t))|^{1/2} d\varepsilon = 0. \quad (67)$$

Разумеется, в этой теореме речь идет о наличии модификации с соответствующими траекториями.

Достаточность приведенных условий была доказана К. Ферником, а необходимость — М. Талаграном.

Заметим, что имеется также определение мажорирующей меры, использующее конечность интеграла вида

$$\int_{+0} \Phi\left(\frac{1}{\mu(B_\varepsilon(t))}\right) d\varepsilon$$

для функции  $\Phi$  определенного класса, см., например, [153].

Свойства гауссовских случайных функций изучаются в [29, 48, 52, 79, 81]. В этих книгах имеются обширные библиографические указания. Некоторые результаты, связанные с траекториями броуновского движения, излагаются в последующих главах и дополнениях к ним.

## Глава III

### Броуновское движение.

#### Свойства траекторий

Недифференцируемость п.н. траекторий броуновского движения (винеровского процесса). Марковское свойство винеровского процесса. Фильтрация. Марковские моменты, их примеры.  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}_\tau$ , состоящая из событий, наблюдаемых до марковского момента  $\tau$ . Строго марковское свойство винеровского процесса. Принцип отражения. Закон нуля или единицы. Распределения, связанные с максимумом винеровского процесса на  $[0, t]$ . Закон повторного логарифма. Локальный закон повторного логарифма.

§ 1. При первом чтении этой главы можно ограничиться знакомством с доказательством марковского и строго марковского свойств броуновского движения (§ 2 и § 6). Для этого важно овладеть понятиями марковского момента  $\tau$  (§ 3) и  $\sigma$ -алгебры событий  $\mathcal{F}_\tau$  (§ 5). Желательно разобрать доказательство закона повторного логарифма для винеровского процесса (§ 11), для чего требуется усвоить формулировку результата следствия 1 из § 10, описывающего распределение максимума винеровского процесса на отрезке  $[0, T]$ .

Следующий результат показывает, сколь *нерегулярно* устроены траектории броуновского движения.

**Теорема 1** (Пэли–Винер–Зигмунд). *С вероятностью единица траектории броуновского движения  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  не дифференцируемы ни в одной точке  $t$  полуоси  $[0, \infty)$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим промежуток  $[k, k+1)$ , где  $k \in \{0, 1, \dots\}$ . Для  $\omega \in \Omega$  из дифференцируемости  $W(\cdot, \omega)$  хотя бы в одной точке  $s \in [k, k+1)$  вытекала бы дифференцируемость справа в  $s$ , а это влекло бы существование  $q, l \in \mathbb{N}$  ( $q = q(\omega, s)$ ,  $l = l(\omega, s, q(s, \omega))$ ) таких, что

$$|W(t, \omega) - W(s, \omega)| \leq l(t - s) \quad \text{при всех } t \in [s, s + q^{-1}) \subset [k, k+1). \quad (1)$$

Для  $l, n, i \in \mathbb{N}$  (и фиксированного  $k$ ) введем события

$$A_{l,n,i} = \left\{ \omega: \left| W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right) - W\left(k + \frac{j-1}{n}, \omega\right) \right| \leq \frac{7l}{n} \text{ при } j = i+1, i+2, i+3 \right\}.$$

Рассмотрим  $l$  и  $q$ , фигурирующие в (1). Если  $4/n < 1/q$  и  $i = i(s, n)$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) выбрано так, что  $k + (i-1)/n \leq s < k + i/n$ , то для  $j = i+1, i+2, i+3$  и  $\omega$ ,

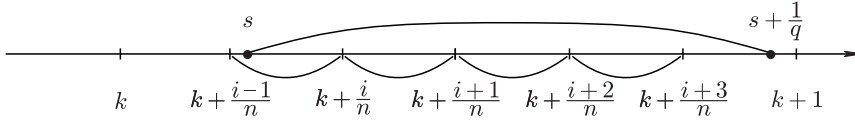


Рис. 10

удовлетворяющих (1) (см. рис. 10), получим

$$\begin{aligned}
 \left| W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right) - W\left(k + \frac{j-1}{n}, \omega\right) \right| &\leq \\
 &\leq \left| W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right) - W(s, \omega) \right| + \left| W(s, \omega) - W\left(k + \frac{j-1}{n}, \omega\right) \right| \leq \\
 &\leq l \cdot \frac{4}{n} + l \cdot \frac{3}{n} = \frac{7l}{n}.
 \end{aligned}$$

Поэтому, если для  $\omega$  справедливо свойство (1), то  $\omega \in \bigcap_{n > 4q} \bigcup_{i=1}^n A_{l,n,i}$ . Введем множество  $D_k = \{\omega: W(\cdot, \omega) \text{ дифференцируема хотя бы в одной точке } s \in [k, k+1)\}$  (если  $s = k$ , то подразумевается дифференцируемость справа). Из проведенных рассуждений следует, что

$$D_k \subset \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{n > 4q} \bigcup_{i=1}^n A_{l,n,i}. \quad (2)$$

Заметим, что для любой последовательности событий  $B_n \in \mathcal{F}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(B_n).$$

Поэтому, принимая во внимание независимость приращений процесса  $W$ , для каждого  $q, l \in \mathbb{N}$  получим, что

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}\left(\bigcap_{n > 4q} \bigcup_{i=1}^n A_{l,n,i}\right) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_{l,n,i}\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_{l,n,i}) \leq \\
 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} n \left( \mathbf{P}\left(\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{7l}{n}\right) \right)^3 = \\
 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} n \left( \mathbf{P}\left(|W(1)| \leq \frac{7l}{\sqrt{n}}\right) \right)^3 \leq \\
 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{14l}{\sqrt{n}} \right)^3 = 0,
 \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что  $W(t) \sim N(0, t)$  при  $t \geq 0$ , а для  $z > 0$

$$\mathbf{P}(|W(1)| \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2z.$$

(Теперь ясно, почему при определении  $A_{l,n,i}$  надо было рассмотреть приращения процесса  $W$  на *трех* промежутках:  $[(j-1)/n, j/n)$ ,  $j = i+1, i+2, i+3$ .)

Учитывая, что объединение счетного числа множеств меры нуль имеет меру нуль и что, как было оговорено ранее, вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  полно, получаем, что  $\mathbf{P}(D_k) = 0$  для любого  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Если  $D$  — множество точек  $\omega$ , для которых  $W(\cdot, \omega)$  дифференцируема хотя бы в одной точке  $s \in [0, \infty)$ , то  $D = \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k$ .

Следовательно,  $\mathbf{P}(D) = 0$ .  $\square$

Приведенное выше простое доказательство дано А. Дворецким, П. Эрде́шем и С. Какутани.

§ 2. Покажем, что приращения винеровского процесса снова приводят к винеровскому процессу.

**Определение 1.** Случайная функция  $X = \{X(t), t \in T\}$ , заданная на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , называется *не зависящей от  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$* , если независимы  $\sigma\{X_t, t \in T\}$  и  $\mathcal{E}$ .

**Теорема 2** (марковское свойство винеровского процесса). *Для каждого числа  $a \geq 0$  процесс  $X = \{X(t) = W(t+a) - W(a), t \geq 0\}$  является винеровским процессом, не зависящим от  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_a^W = \sigma\{W(s) : 0 \leq s \leq a\}$ .*

**Доказательство.** Очевидно,  $X(0) = 0$ , процесс  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  имеет непрерывные траектории, независимые приращения и  $X(t) - X(s) = W(t+a) - W(s+a) \sim N(0, t-s)$ ,  $0 \leq s \leq t$ . Следовательно, процесс  $X$  является винеровским. Покажем теперь справедливость последнего утверждения теоремы.

В силу леммы 9 главы I достаточно проверить, что при любых  $n, m \in \mathbb{N}$  и всех  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ,  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m \leq a$  независимы события

$$A_1 = \{X(t_0) \in B_0, X(t_1) \in B_1, \dots, X(t_n) \in B_n\},$$

$$A_2 = \{W(s_0) \in C_0, W(s_1) \in C_1, \dots, W(s_m) \in C_m\},$$

где  $B_i, C_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  ( $i = 0, \dots, n$ ;  $j = 0, \dots, m$ ). Векторы  $\xi = (X(t_0), \dots, X(t_n))$  и  $\eta = (W(s_0), \dots, W(s_m))$  получают аналогично (II.2) с помощью линейных преобразований соответственно векторов  $\tilde{\xi} = (X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1}))$  и  $\tilde{\eta} = (W(s_0), W(s_1) - W(s_0), \dots, W(s_m) - W(s_{m-1}))$ . Независимость  $\tilde{\xi}$  и  $\tilde{\eta}$  вытекает из независимости приращений процесса  $W = \{W(t), t \geq 0\}$ . Поэтому (как функции от независимых векторов) независимы  $\xi$  и  $\eta$ . Следовательно, независимы события  $A_1$  и  $A_2$ .  $\square$

§ 3. Естественно возникает вопрос: *можно ли обобщить теорему 2, взяв вместо константы  $a$  случайную величину?* Оказывается, это можно сделать для определенного класса случайных величин.

**Определение 2.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  — измеримое пространство,  $T \subset \mathbb{R}$  и  $\mathbb{F}_T = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  — некоторый *поток  $\sigma$ -алгебр* в  $\mathcal{F}$  (“фильтрация”), т. е.  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  для  $s \leq t$  ( $s, t \in T$ ) и  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$  при всех  $t \in T$ . *Естественной фильтрацией* процесса  $X = \{X(t), t \in T\}$  называется поток  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X(s), s \leq t, s \in T\}$ ,  $t \in T$ . Иначе говоря,  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}_t^X$  при каждом  $t \in T$  порождается *течением процесса* на промежутке  $(-\infty, t] \cap T$ .

**Определение 3.** Отображение  $\tau: \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$  называется *марковским моментом* относительно фильтрации  $\mathbb{F}_T$ , если  $\{\omega: \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  для любого  $t \in T$ . *Моментом остановки* называется марковский момент  $\tau$ , для которого  $\tau(\omega) < \infty$  п. н.

**Замечание 1.** Как и ранее, все рассуждения проходят на *полном* вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Будет также предполагаться, что все  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_t$ ,  $t \in T$ , расширены классом  $\mathcal{N}$  множеств нулевой  $P$ -вероятности.

В качестве упражнения убедитесь, что если  $\tau_1, \tau_2, \dots$  — марковские моменты относительно фильтрации  $\mathbb{F}_T$ , где  $T = \mathbb{Z}_+$ , то следующие величины

$$\tau(\omega) = a \in T \ (a = \text{const}), \quad \min_{1 \leq n \leq m} \tau_n, \quad \max_{1 \leq n \leq m} \tau_n, \quad \sum_{n=1}^m \tau_n \quad (m \in \mathbb{N}), \quad (3)$$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \tau_n, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \tau_n \quad (4)$$

также являются марковскими моментами относительно  $\mathbb{F}_T$ .

Если  $\tau$  — марковский момент относительно фильтрации  $\mathbb{F}_T$ , где  $T = [0, \infty)$ , то для любого  $t \geq 0$

$$\{\tau = t\} = \{\tau \leq t\} \setminus \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t, \quad (5)$$

поскольку для  $t > 0$  имеем  $\{\tau < t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau \leq t - k^{-1}\} \in \bigcup_{k \geq 1/t} \mathcal{F}_{t-k^{-1}} \subset \mathcal{F}_t$  (если  $t - k^{-1} < 0$ , то  $\{\tau \leq t - k^{-1}\} = \emptyset$ ).

Отметим, что в дискретном случае, когда  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , определение марковского момента  $\tau$ , очевидно, равносильно тому, что

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \text{при каждом } n \in \mathbb{Z}_+.$$

**Замечание 2.** Пусть  $\tau$  — марковский момент относительно фильтрации  $\mathbb{F}_T$ , а  $\sigma: \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$ , причем  $\tau = \sigma$  п. н. Тогда в силу замечания 1 величина  $\sigma$  также является марковским моментом относительно фильтрации  $\mathbb{F}_T$ .

Пусть  $X = \{X_n, n \geq 0\}$  — действительный процесс с дискретным временем и  $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_n^X)_{n \geq 0}$  — естественная фильтрация. Тогда для любого борелевского множества  $B$

$$\tau(\omega) = \inf\{n \geq 0: X_n(\omega) \in B\} \quad (6)$$

будет марковским моментом, поскольку  $\{\tau = 0\} = \{X_0 \in B\} \in \mathcal{F}_0^X$ , а для  $n \geq 1$   $\{\tau = n\} = \{X_0 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n^X$ .

§ 4. Аналогичный (6), но более сложный пример марковского момента для процессов с *непрерывным* временем дает следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  — случайная функция со значениями (при каждом  $t \geq 0$ ) в метрическом пространстве  $(S, \rho)$ . Пусть траектории  $X$  почти наверное непрерывны. Тогда для любого замкнутого множества  $F \subset S$  момент

$$\tau_F(\omega) = \inf\{t \geq 0: X(t, \omega) \in F\} \quad (7)$$

есть марковский момент относительно естественной фильтрации  $\mathbb{F}^X$  процесса  $X$  (считается, что  $\tau_F(\omega) = \infty$ , если  $X(t, \omega) \notin F$  для всех  $t \geq 0$ ).

**Доказательство.** Пусть траектории  $X$  непрерывны для точек  $\omega \in \tilde{\Omega}$ , где  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  и  $P(\tilde{\Omega}) = 1$ . Взяв произвольную точку  $x_0 \in S$ , определим процесс

$$\tilde{X}(t, \omega) = \begin{cases} X(t, \omega), & \text{если } t \geq 0, \omega \in \tilde{\Omega}, \\ x_0, & \text{если } t \geq 0, \omega \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}. \end{cases}$$

В силу полноты вероятностного пространства процесс  $\tilde{X}$  есть модификация процесса  $X$ , имеющая непрерывные траектории при всех  $\omega \in \Omega$ . Пользуясь замечаниями 1 и 2, видим, что без потери общности можем считать все траектории  $X$  непрерывными на  $[0, \infty)$ .

Далее схема доказательства теоремы такова. Непрерывность траекторий процесса  $X$  и замкнутость множества  $F$  позволят нам установить, что

$$\tau_F(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(\omega) \text{ при всех } \omega, \quad (8)$$

где  $\tau_n := \tau_{G_n} = \inf\{t \geq 0: X(t, \omega) \in G_n\}$  (для упрощения записи), а открытые множества  $G_n = \{x \in S: \rho(x, F) < 1/n\}$  представляют собой сжимающиеся с ростом  $n$  окрестности  $F$ . Надо иметь в виду, что для доказательства марковости момента  $\tau_F$  мы не можем непосредственно воспользоваться свойствами (4) и (8), поскольку будет показано лишь то, что  $\{\tau_n < t\} \in \mathcal{F}_t^X$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$  и любого  $t > 0$  (сравните с определением марковского момента). Тем не менее этого будет достаточно для нашей цели, так как мы увидим, что

$$\{\omega: \tau_F(\omega) \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega: \tau_n(\omega) < t\} \text{ при } 0 < t < \infty, \quad (9)$$

а то, что  $\{\omega: \tau_F \leq 0\} = \{X(0, \omega) \in F\}$  (и, значит, входит в  $\mathcal{F}_0^X$ ) вытекает из непрерывности справа траекторий  $X$  и замкнутости множества  $F$ .

Перейдем теперь к подробному доказательству. Прежде всего, покажем, что если  $G$  — произвольное *открытое* подмножество  $S$  и  $\tau_G$  определяется согласно (7) с заменой  $F$  на  $G$ , то  $\{\omega: \tau_G(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t^X$ . Для этого проверим вначале, что

$$\{\tau_G < t\} = \bigcup_{r < t, r \in \mathbb{Q}_+} \{X(r) \in G\}, \quad (10)$$

где  $\mathbb{Q}_+$  — множество неотрицательных рациональных чисел. Действительно, если  $X(r, \omega) \in G$  для некоторого  $r < t$ ,  $r \in \mathbb{Q}_+$ , то  $\tau_G(\omega) \leq r < t$ . С другой стороны, пусть  $\tau_G(\omega) < t$ . Тогда найдется такое  $s = s(\omega) < t$ , что  $X(s, \omega) \in G$ . Поскольку  $G$  — открытое множество, а траектории  $X$  непрерывны справа, то  $X(u, \omega) \in G$  для всех  $u$ , достаточно близких к точке  $s$  справа. Среди таких  $u$  есть рациональные точки  $r < t$ . Итак, (10) доказано.

Теперь заметим, что  $\{X(r) \in G\} \in \mathcal{F}_r^X \subset \mathcal{F}_t^X$  для  $r < t$ , а в правой части формулы (10) берется счетное объединение событий из  $\mathcal{F}_t^X$ . Следовательно, как утверждалось,  $\{\omega: \tau_G(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t^X$  и, в частности,  $\{\omega: \tau_n(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t^X$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$  и любого  $t \geq 0$ .

Теперь докажем, что

$$\tau_n(\omega) \nearrow \tau_F(\omega) \text{ при } n \rightarrow \infty, \omega \in \Omega. \quad (11)$$

Очевидно,  $F \subset G_{n+1} \subset G_n$ , откуда  $\tau_n(\omega) \leq \tau_{n+1}(\omega) \leq \tau_F(\omega)$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\omega \in \Omega$ . Поэтому для каждого  $\omega$  существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(\omega) = \tau_\infty(\omega) \leq \tau_F(\omega) \in [0, \infty].$$

Отсюда видно, что если  $\tau_\infty(\omega) = \infty$ , то  $\tau_F(\omega) = \infty$ . Покажем, что  $\tau_\infty(\omega) = \tau_F(\omega)$  для  $\omega \in \{\tau_\infty < \infty\}$ . Непрерывность справа траекторий  $X$  влечет, что  $X(\tau_n(\omega), \omega) \in [G_n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , где  $[\cdot]$  обозначает замыкание множества. Учитывая непрерывность слева траекторий  $X$  и то, что  $[G_n] \subset [G_k]$  при  $n \geq k$ , получаем для  $\omega \in \{\tau_\infty < \infty\}$

$$X(\tau_\infty(\omega), \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X(\tau_n(\omega), \omega) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [G_k] = F.$$

Таким образом,  $\tau_F(\omega) \leq \tau_\infty(\omega)$  при всех  $\omega \in \Omega$ . Сопоставляя это с доказанным неравенством  $\tau_\infty(\omega) \leq \tau_F(\omega)$  для  $\omega \in \Omega$ , приходим к (11).

Проверим, наконец, свойство (9). Если  $\tau_n(\omega) < t$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , то  $\tau_F(\omega) \leq t$  в силу (11). С другой стороны, пусть  $\tau_F(\omega) \leq t$ , где  $t > 0$ . Если  $\tau_F(\omega) = 0$ , то, согласно (11), имеем  $\tau_n(\omega) = 0 < t$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Для  $\omega \in \Omega' = \{\omega: 0 < \tau_F(\omega) \leq t\}$  докажем, что  $\tau_n(\omega) < \tau_F(\omega)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Пусть  $\omega \in \Omega'$ , тогда  $\tau_n(\omega) \rightarrow \tau_F(\omega) > 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Поэтому при всех достаточно больших  $n$  получаем, что  $\tau_n(\omega) > 0$  и  $X(\tau_n(\omega), \omega) \in \partial G_n$  ( $\partial G_n$  — граница множества  $G_n$ ). Последнее утверждение справедливо, поскольку в любой окрестности точки  $X(\tau_n(\omega), \omega)$ , где  $0 < \tau_n(\omega) < \infty$ , найдутся как точки из  $G_n$ , так и точки, не входящие в  $G_n$  (имеются  $t_{n,k}(\omega) \downarrow \tau_n(\omega)$  при  $k \rightarrow \infty$ , для которых  $X(t_{n,k}(\omega), \omega) \in G_n$ , в то же время  $X(t, \omega) \notin G_n$  для  $t < \tau_n(\omega)$ ). Учитывая, что  $\partial G_n \subset \{x \in S: \rho(x, F) = 1/n\}$ , получаем неравенства  $\tau_n(\omega) < \tau_{n+1}(\omega)$  для  $\omega \in \Omega'$  и всех достаточно больших  $n$  (если  $\rho(X(\tau_n(\omega), \omega), F) = 1/n$  и  $\rho(X(\tau_{n+1}(\omega), \omega), F) = 1/(n+1)$ , то  $\tau_n(\omega) \neq \tau_{n+1}(\omega)$ ). Следовательно, (9) установлено, что и завершает доказательство теоремы, поскольку, как было показано,  $\{\omega: \tau_n(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t^X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \geq 0$ .  $\square$

§ 5. Пусть  $\tau$  — марковский момент относительно потока  $\sigma$ -алгебр  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ .

**Определение 4.** Положим

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}: A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ для любого } t \in T\}. \quad (12)$$

Система множеств  $\mathcal{F}_\tau$  является (как легко проверить)  $\sigma$ -алгеброй, называемой  $\sigma$ -алгеброй событий, *наблюдаемых до случайного момента  $\tau$  (включительно)*.

Следующее простое свойство марковских моментов обобщает соотношение (5). Если  $\sigma$  — марковский момент относительно потока  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  и  $A \in \mathcal{F}_\sigma$ , то для каждого  $t \in T$

$$A \cap \{\sigma < t\} = \bigcup_{q=1}^{\infty} (A \cap \{\sigma \leq t - q^{-1}\}) \in \mathcal{F}_t, \quad (13)$$

$$A \cap \{\sigma = t\} = (A \cap \{\sigma \leq t\}) \setminus (A \cap \{\sigma < t\}) \in \mathcal{F}_t. \quad (14)$$

**Определение 5.** Назовем  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  (содержащиеся в  $\mathcal{F}$ ) *совпадающими на событиях*  $A$ , если  $A \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$  и  $A \cap \mathcal{G} = A \cap \mathcal{H}$  ( $A \cap \mathcal{G} = \{AC: C \in \mathcal{G}\}$ ). Аналогично, будем говорить, что  $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$  на  $A$ , если  $A \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$  и  $A \cap \mathcal{G} \subset A \cap \mathcal{H}$ .



Положим  $(\tau \wedge \sigma)(\omega) = \min\{\tau(\omega), \sigma(\omega)\}$ ,  $\omega \in \Omega$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\tau$  и  $\sigma$  — марковские моменты относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ ,  $T \subset \mathbb{R}$ . Тогда

1°.  $\mathcal{F}_\tau \cap \{\tau \leq \sigma\} \subset \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ .

2°.  $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_\sigma$  на множестве  $A$  (из  $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ ), если  $\tau = \sigma$  на  $A$ , в частности,  $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$  на множестве  $\{\tau = t\}$ ,  $t \in T$ .

3°.  $\tau$  является  $\mathcal{F}_\tau$ -измеримой величиной.

**Доказательство.** Покажем, что

$$\mathcal{F}_\tau \cap \{\tau \leq \sigma\} \subset \mathcal{F}_\sigma, \quad (15)$$

т. е. проверим, что для любого  $A \in \mathcal{F}_\tau$  и каждого  $t \in T$  множество  $C = A \cap \{\tau \leq \sigma\} \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ . Очевидно,  $C = A \cap \{\tau \leq t\} \cap \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \wedge t \leq \sigma \wedge t\}$ . Величины  $\tau \wedge t$  и  $\sigma \wedge t$ , как легко видеть,  $\mathcal{F}_t$ -измеримы. Поэтому  $\{\tau \wedge t \leq \sigma \wedge t\} \in \mathcal{F}_t$ . Кроме того,  $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  и  $\{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ . Следовательно,  $C \in \mathcal{F}_t$ , что доказывает (15).

Подставим  $\tau$  и  $\tau \wedge \sigma$  соответственно вместо  $\tau$  и  $\sigma$  в (15). Тогда, замечая, что  $\{\tau \leq \tau \wedge \sigma\} = \{\tau \leq \sigma\}$ , приходим к первому соотношению в 1°. Теперь, заменив в (15) пару  $(\tau, \sigma)$  сначала на  $(\tau \wedge \sigma, \tau)$ , а затем на  $(\tau \wedge \sigma, \sigma)$ , получим  $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} \subset \mathcal{F}_\tau$  и  $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} \subset \mathcal{F}_\sigma$  (поскольку  $\{\tau \wedge \sigma \leq \tau\} = \Omega$  и  $\{\tau \wedge \sigma \leq \sigma\} = \Omega$ ). Таким образом,  $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} \subset \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ . Чтобы доказать обратное включение, возьмем любое событие  $A \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$  и убедимся, что  $D = A \cap \{\tau \wedge \sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ . Учитывая, что  $\{\tau \wedge \sigma \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cup \{\sigma \leq t\}$ , имеем  $D = (A \cap \{\tau \leq t\}) \cup (A \cap \{\sigma \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$ . Соотношение 1° установлено.

Из (15) вытекает, что

$$\mathcal{F}_\tau \cap \{\tau = \sigma\} = \mathcal{F}_\tau \cap \{\tau \leq \sigma\} \cap \{\tau = \sigma\} \subset \mathcal{F}_\sigma \cap \{\tau = \sigma\}.$$

Меняя местами  $\tau$  и  $\sigma$ , видим, что  $\mathcal{F}_\sigma \cap \{\tau = \sigma\} \subset \mathcal{F}_\tau \cap \{\tau = \sigma\}$ , что обеспечивает равенство  $\mathcal{F}_\tau \cap \{\tau = \sigma\} = \mathcal{F}_\sigma \cap \{\tau = \sigma\}$ . Кроме того, множество  $\{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ , поскольку  $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$  и

$$\mathcal{F}_\tau \cap \{\tau = \sigma\} = \mathcal{F}_\tau \cap \{\tau \leq \sigma\} \cap \{\sigma \leq \tau\} \subset \mathcal{F}_\sigma \cap \{\sigma \leq \tau\} \subset \mathcal{F}_\tau.$$

Теперь заметим, что  $\mathcal{F}_\tau \cap A = \mathcal{F}_\tau \cap \{\tau = \sigma\} \cap A = \mathcal{F}_\sigma \cap \{\tau = \sigma\} \cap A = \mathcal{F}_\sigma \cap A$ . Следовательно, 2° выполнено.

Для доказательства 3° достаточно убедиться, что  $\{\tau \leq x \wedge t\} \in \mathcal{F}_t$  при любых  $x \in \mathbb{R}$  и  $t \in T$ . Это верно при всех  $x \geq t$ , а также при  $x < t$ , если  $x \in T$ . Пусть далее  $x \notin T$ ,  $x < t$ . Если множество  $B_x = \{s \in T : s < x\} = \emptyset$ , то  $\{\tau \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{F}_t$ . При  $B_x \neq \emptyset$  положим  $x' = \sup\{s : s \in B_x\}$ . В случае  $x' \in T$  имеем  $\{\tau \leq x\} = \{\tau \leq x'\} \in \mathcal{F}_{x'} \subset \mathcal{F}_t$ . Если  $x' \notin T$ , то  $\{\tau \leq x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau \leq t_n\}$ , где  $t_n \in T$ ,  $t_n \uparrow x'$  при  $n \rightarrow \infty$ , поэтому  $\{\tau \leq x\} \in \mathcal{F}_t$ .  $\square$

**§ 6.** Перейдем к изложению одного важного обобщения марковского свойства винеровского процесса (броуновского движения).

**Теорема 4** (строго марковское свойство). Пусть  $\tau$  — момент остановки относительно естественной фильтрации  $\mathbb{F}^W = (\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$  винеровского процесса  $W = \{W(t), t \geq 0\}$ . Тогда процесс  $Y = \{Y(t) = W(t + \tau) - W(\tau), t \geq 0\}$ , будет винеровским, притом не зависящим от  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_\tau^W$  (построенной по семейству  $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$  согласно (12)).

**Доказательство.** Вначале уточним, как процесс  $Y$  задается для  $\omega \in \{\tau(\omega) = \infty\}$ . Положим

$$Y(t, \omega) = \begin{cases} W(t + \tau(\omega), \omega) - W(\tau(\omega), \omega) & \text{для } \omega \in \Omega_\tau = \{\tau < \infty\}, \\ 0 & \text{для } \omega \notin \Omega_\tau. \end{cases} \quad (16)$$

То, что  $Y$  — случайный процесс (т.е. семейство случайных величин), вытекает из упражнений 27 и 28 главы I (процесс  $W$  измерим как процесс с непрерывными п.н. траекториями; ниже мы увидим непосредственно, что  $Y(t) \in \mathcal{F} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$  при каждом  $t \geq 0$ ).

Построим случайные величины  $\tau_n = \tau_n(\omega)$ , аппроксимирующие  $\tau = \tau(\omega)$  по следующим формулам:

$$\tau_n(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-n} \mathbf{1}_{A_{k,n}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

где  $A_{1,n} = \{\tau \leq 2^{-n}\}$ ,  $A_{k,n} = \{(k-1)2^{-n} < \tau(\omega) \leq k 2^{-n}\}$  для  $k \geq 2$ . Очевидно, что  $\tau_n(\omega) \downarrow \tau(\omega)$  при  $n \rightarrow \infty$  для всех  $\omega \in \Omega_\tau$ . Кроме того, для каждого  $n \in \mathbb{N}$  величина  $\tau_n$  есть марковский момент относительно потока  $\mathcal{F}_t^W$ , поскольку для любого  $t \geq 0$

$$\{\tau_n \leq t\} = \{\tau \leq k 2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k 2^{-n}}^W \subset \mathcal{F}_t^W, \quad \text{где } k = \max\{l: l 2^{-n} \leq t\}.$$

В силу непрерывности п.н. траекторий броуновского движения

$$W(t + \tau_n(\omega), \omega) \rightarrow W(t + \tau(\omega), \omega) \quad \text{п.н. при } n \rightarrow \infty \quad (18)$$

для каждого  $t \geq 0$ . При всех  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \geq 0$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$ , учитывая (5), имеем

$$\{\omega: W(t + \tau_n(\omega), \omega) \leq z\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega: W(t + k 2^{-n}, \omega) \leq z, \tau_n(\omega) = k 2^{-n}\} \in \mathcal{F}. \quad (19)$$

Из (18) и (19) с помощью леммы 6 главы I и замечания 1 выводим, что  $Y(t)$  есть случайная величина при каждом  $t \geq 0$ . Очевидно также, что траектории процесса  $Y$  непрерывны п.н.

Докажем, что процесс  $Y$  не зависит от  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_\tau$  и одновременно убедимся, что  $Y$  — винеровский процесс.

Как и при доказательстве теоремы 2, достаточно проверить, что для любых  $A \in \mathcal{F}_\tau$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq t_1 < \dots < t_m$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

$$P(A \cap \{\xi \in B\}) = P(A)P(\xi \in B), \quad (20)$$

где  $\xi = (Y(t_1), \dots, Y(t_m))$ . В (20) можно рассматривать лишь замкнутые множества  $B$  (по лемме 4 главы I для любого  $B$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует замкнутое  $F_\varepsilon \subset B$  такое, что  $P_\xi(B \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ ). Перепишем (20) в виде

$$E 1_A 1_{\{\xi \in B\}} = E 1_A E 1_{\{\xi \in B\}}. \quad (21)$$

Покажем, что соотношение (21) будет выполнено, если для каждой непрерывной ограниченной функции  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  имеет место равенство

$$E 1_A f(\xi) = E 1_A E f(\xi). \quad (22)$$

Для этого возьмем  $f_k(x) = \varphi(k\rho(x, B))$ , где

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq 0, \\ 1 - t & \text{при } t \in [0, 1], \\ 0 & \text{при } t \geq 1 \end{cases} \quad (23)$$

и  $\rho(x, B) = \inf\{\rho(x, y) : y \in B\}$ ,  $\rho$  – евклидово расстояние. Суперпозиция непрерывной и непрерывной ограниченной функций дает непрерывную ограниченную функцию  $(\rho(\cdot, B))$  непрерывна для замкнутого  $B$ ). Поэтому, учитывая, что  $f_k(x) \rightarrow 1_B(x)$  для  $x \in \mathbb{R}^m$  при  $k \rightarrow \infty$ , требуемое утверждение получаем из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Установим теперь справедливость свойства (22). По той же самой теореме Лебега находим, что для любого  $A \in \mathcal{F}_\tau$

$$E 1_A f(\xi) = \lim_n E 1_A f(\xi_n), \quad (24)$$

где  $\xi_n = (W(t_1 + \tau_n) - W(\tau_n), \dots, W(t_m + \tau_n) - W(\tau_n)) \rightarrow \xi$  п. н. при  $n \rightarrow \infty$ . Пользуясь счетной аддитивностью интеграла Лебега, видим, что

$$E 1_A f(\xi_n) = \sum_{k=1}^{\infty} E 1_A f(\xi_n) 1_{\{\tau_n = k2^{-n}\}} = \sum_{k=1}^{\infty} E 1_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} f(\xi_{n,k}), \quad (25)$$

где  $\xi_{n,k} = (W(t_1 + k2^{-n}) - W(k2^{-n}), \dots, W(t_m + k2^{-n}) - W(k2^{-n}))$ . В силу (17)  $A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\} = A \cap A_{k,n} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}}^W$  для  $A \in \mathcal{F}_\tau$ . По теореме 2  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}_{k2^{-n}}^W$  не зависит от  $\xi_{n,k}$ . Кроме того, распределение  $\xi_{n,k}$  такое же, как у вектора  $(W(t_1), \dots, W(t_m))$ . Таким образом, правая часть (25) равна следующему выражению:

$$E f(W(t_1), \dots, W(t_m)) \sum_{k=1}^{\infty} E 1_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} = E f(W(t_1), \dots, W(t_m)) E 1_A. \quad (26)$$

Взяв  $A = \Omega$ , получим из (24) и (26), что для любой непрерывной ограниченной функции  $f$ , всех  $m \in \mathbb{N}$  и  $0 \leq t_1 < \dots < t_m$ , справедливо равенство

$$E f(Y(t_1), \dots, Y(t_m)) = E f(W(t_1), \dots, W(t_m)), \quad (27)$$

что завершает доказательство (22).

Из (27), совершив предельный переход к индикаторным функциям, получим, что конечномерные распределения  $Y$  и  $W$  совпадают. Следовательно,  $Y$  — винеровский процесс.  $\square$

Отметим, что иная (и более сложная форма) строго марковского свойства рассматривается в приложении 6.

**§ 7.** Результат предыдущего пункта о строго марковском свойстве мы используем ниже для нахождения распределений некоторых функционалов от броуновского движения. Начнем с установления так называемого *принципа отражения*.

Теорема 4 показывает, что если  $\tau = \tau(\omega)$  — момент остановки относительно фильтрации  $\mathbb{F}^W = (\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ , то процесс  $W$  ведет себя после момента  $\tau(\omega)$  так же, как если бы из точки  $(\tau(\omega), W(\tau(\omega), \omega))$  “выпускался” новый винеровский процесс. Очевидно, процесс  $-W = \{-W(t), t \geq 0\}$  также является винеровским. Тем самым, “отражение” процесса  $W$  относительно оси абсцисс снова приводит к винеровскому процессу. Поэтому естественно ожидать, что мы также получим винеровский процесс, если из точки  $(\tau(\omega), W(\tau(\omega), \omega))$  выпустим для  $t \geq \tau(\omega)$  отраженную относительно прямой  $y = W(\tau(\omega), \omega)$  траекторию  $W(t, \omega)$ . Реализация этих наводящих соображений, однако, требует определенных усилий.

Пусть  $\tau = \tau(\omega)$  — момент остановки относительно естественной фильтрации процесса  $W$ . Для  $\omega \in \Omega_\tau = \{\tau < \infty\}$  ( $P(\Omega_\tau) = 1$ ) введем “отраженный процесс”

$$Z(t, \omega) = \begin{cases} W(t, \omega), & 0 \leq t \leq \tau(\omega), \\ 2W(\tau(\omega), \omega) - W(t, \omega), & t > \tau(\omega), \end{cases} \quad (28)$$

и пусть  $Z(t, \omega) = W(t, \omega)$  для  $\omega \in \Omega \setminus \Omega_\tau$  (см. рис. 11).

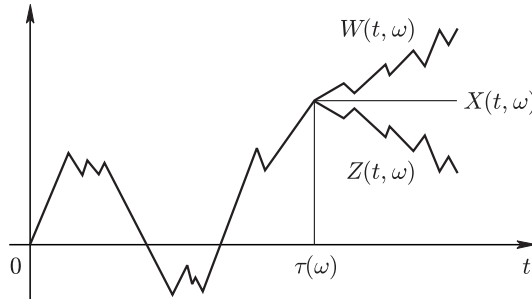


Рис. 11

**Теорема 5** (принцип отражения). *Процесс  $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ , определенный в (28), есть винеровский процесс.*

**Доказательство.** Для всех  $t \geq 0$  и  $\omega \in \Omega$

$$Z(t, \omega) = W(t, \omega) \mathbf{1}_{\{\tau \geq t\}} + (2W(\tau(\omega), \omega) - W(t, \omega)) \mathbf{1}_{\{\tau < t\}},$$

следовательно,  $Z(t, \cdot)$  есть случайная величина при каждом  $t \geq 0$ .

Траектории  $Z(\cdot, \omega)$  непрерывны п. н., поэтому аналогично доказательству леммы 12 главы I нетрудно показать, что  $Z(\cdot, \omega)$  есть случайный элемент со значениями

в польском пространстве  $C_0[0, \infty) = \{f \in C[0, \infty) : f(0) = 0\}$ , снабженном метрикой равномерной сходимости на компактах:

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\sup_{t \in [0, n]} |f(t) - g(t)|}{1 + \sup_{t \in [0, n]} |f(t) - g(t)|}, \quad f, g \in C_0[0, \infty). \quad (29)$$

Пусть  $Y = \{Y(t, \omega), t \geq 0\}$  — процесс, определенный формулой (16). Введем еще “остановленный процесс”  $X = \{X(t, \omega) = W(t \wedge \tau(\omega), \omega), t \geq 0\}$  ( $X(t, \omega) = W(t, \omega)$  для  $\omega \in \Omega \setminus \Omega_\tau$ ). Учитывая непрерывность п. н. траекторий процесса  $W$ , убеждаемся, что  $X(\cdot, \omega)$  — случайный элемент со значениями в пространстве  $C_0[0, \infty)$ .

Определим отображение (“склеивание” в точке  $b$  функций  $g$  и  $f$ )  $h: V \rightarrow C_0[0, \infty)$ , где  $V = [0, \infty) \times C_0[0, \infty) \times C_0[0, \infty)$ , положив

$$h(b, f(\cdot), g(\cdot))(t) = f(t) \mathbf{1}_{[0, b]}(t) + (f(b) + g(t - b)) \mathbf{1}_{(b, \infty)}(t).$$

Заметим, что для всех  $\omega \in \Omega_\tau$

$$\begin{aligned} h(\tau(\omega), X(\cdot, \omega), Y(\cdot, \omega)) &= W(\cdot, \omega), \\ h(\tau(\omega), X(\cdot, \omega), -Y(\cdot, \omega)) &= Z(\cdot, \omega). \end{aligned}$$

Принимая во внимание замечание 2, далее без потери общности можем считать  $\Omega_\tau \cap \bar{\Omega} = \Omega$ , где  $\bar{\Omega} \subset \Omega$  состоит из тех точек  $\omega$ , для которых траектории  $W(\cdot, \omega)$  непрерывны на  $[0, \infty)$ .

Теорема будет доказана, если мы убедимся, что случайные элементы  $(\tau, X, Y)$  и  $(\tau, X, -Y)$  имеют одинаковые распределения на пространстве  $(V, \mathcal{B}(V))$  (в произведении трех польских пространств берется метрика, равная максимуму из метрик этих пространств). Этого будет достаточно, поскольку  $h$  является непрерывным отображением пространства  $V$  в пространство  $C_0[0, \infty)$  (с введенными метриками), а значит,  $h \in \mathcal{B}(V) \mid \mathcal{B}(C_0[0, \infty))$ .

Схема дальнейших рассуждений такова. Мы увидим, что случайный вектор  $(\tau, X)$  будет  $\mathcal{F}_\tau \mid \mathcal{B}([0, \infty) \times \mathcal{B}(C_0[0, \infty))$ -измерим. По строго марковскому свойству  $Y - \mathcal{F}_\tau$ , где  $-$  обозначает независимость. Следовательно,  $(\tau, X) - Y$ . Поэтому

$$\text{Law}((\tau, X, Y)) = \text{Law}((\tau, X)) \otimes \text{Law}(Y) = \text{Law}((\tau, X)) \otimes \text{Law}(W).$$

Очевидно, процесс  $(-Y)$  также не зависит от  $\mathcal{F}_\tau$ , а так как  $(-Y)$  снова является винеровским процессом, то

$$\text{Law}((\tau, X, -Y)) = \text{Law}((\tau, X)) \otimes \text{Law}(-Y) = \text{Law}((\tau, X)) \otimes \text{Law}(W).$$

Согласно следствию 1 и лемме 11 главы I для проверки требуемой измеримости вектора  $(\tau, X)$  достаточно установить  $\mathcal{F}_\tau$ -измеримость каждой его компоненты.

В силу утверждения 3° леммы 1  $\tau$  есть  $\mathcal{F}_\tau$ -измеримая величина.

Доказательство  $\mathcal{F}_\tau$ -измеримости  $X$  основано на построении  $\mathcal{F}_\tau$ -измеримых аппроксимирующих случайных элементов  $X_n$ , сходящихся к  $X$  при  $n \rightarrow \infty$ .

С этой целью введем величины

$$\alpha_n(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} k 2^{-n} \mathbf{1}_{[k 2^{-n}, (k+1) 2^{-n})}(\tau(\omega)) \nearrow \tau(\omega) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ для всех } \omega \in \Omega.$$

Положим  $X_n(\omega) = W(t \wedge \alpha_n(\omega), \omega)$ , где  $t \geq 0$  фиксировано, а  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\omega \in \Omega$ . Проверка  $\mathcal{F}_\tau$ -измеримости величин  $X_n$  полностью аналогична рассуждениям, применявшимся при доказательстве теоремы 3, и поэтому опускается.  $\square$

**§ 8.** Принцип отражения является одним из мощных средств стохастического анализа, что будет видно, в частности, из доказательств, приводимых ниже в § 10.

Нам понадобится также следующий известный результат Колмогорова.

**Теорема 6** (закон нуля или единицы). Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  задано семейство  $\{X_t, t \in T\}$ ,  $T \subset \mathbb{R}$ , независимых случайных элементов со значениями в измеримых пространствах  $(S_t, \mathcal{B}_t)$ , т. е.  $X_t: \Omega \rightarrow S_t$ ,  $X_t \in \mathcal{F} | \mathcal{B}_t$ ,  $t \in T$ . Обозначим

$$\mathcal{F}_{\geq t}^X = \sigma\{X_s, s \in T \cap [t, \infty)\}.$$

Тогда “хвостовая”  $\sigma$ -алгебра, т. е.  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{G} = \bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_{\geq t}^X$ , вырождена. Иначе говоря, для любого  $A \in \mathcal{G}$  вероятность  $P(A)$  равна нулю или единице (если  $T \cap [t, \infty) = \emptyset$ , то  $\mathcal{F}_{\geq t}^X := \emptyset$ ).

**Доказательство.** Возьмем произвольное событие  $A \in \mathcal{G}$  и покажем, что  $A$  не зависит от  $A$ . Имеем  $A \in \mathcal{F}_{\geq t}^X$  при каждом  $t \in T$ . В силу леммы 3 главы I для любого  $\varepsilon > 0$  существует множество  $A_\varepsilon$  из алгебры, порождающей  $\mathcal{F}_{\geq t}^X$ , т. е. множество  $A_\varepsilon$  вида  $\{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B\}$ , где  $B \in \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_n}$ ,  $t \leq t_1 < \dots < t_n$  (все точки из  $T$ ),  $n \in \mathbb{N}$ , такое, что  $P(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$ . Следовательно,

$$|C(A, A) - C(A, A_\varepsilon)| \leq 2P(A \Delta A_\varepsilon) < 2\varepsilon,$$

где  $C(A, D) = P(AD) - P(A)P(D)$  для событий  $A$  и  $D$ . Из леммы 9 главы I вытекает, что  $\sigma$ -алгебры  $\sigma\{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\}$  и  $\mathcal{F}_{\geq u}^X$  независимы при  $u > t_n$ . Поэтому независимы события  $A$  и  $A_\varepsilon$ , т. е.  $C(A, A_\varepsilon) = 0$ . Отсюда  $C(A, A) = 0$  и, значит,

$$P(A) - P(A)^2 = C(A, A) = 0.$$

Итак,  $P(A) = 0$  или  $P(A) = 1$ .  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $a > 0$ . Тогда момент первого достижения уровня  $a$  винеровским процессом, т. е. момент

$$\tau_a(\omega) = \inf\{t \geq 0: W(t, \omega) = a\},$$

есть момент остановки относительно естественной фильтрации  $\mathbb{F}^W$ .

**Доказательство.** Из теоремы 3 следует, что  $\tau_a$  — марковский момент. Докажем, что  $\tau_a < \infty$  п. н. Для этого проверим, что для действительных случайных величин  $Y_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и константы  $c \in \mathbb{R}$

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n > c\right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(Y_n > c).$$

Действительно,

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n > c\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} \{Y_m > c\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{m \geq n} \{Y_m > c\}\right)$$

и достаточно лишь заметить, что  $P\left(\bigcup_{m \geq n} \{Y_m > c\}\right) \geq P(Y_n > c)$  при каждом  $n \in \mathbb{N}$ .

Теперь убедимся, что  $\tau_a < \infty$ . Для всякого  $c \in \mathbb{R}$

$$\{W(n)/\sqrt{n} > c \text{ б.ч.}\} = \left\{ \sum_{k=1}^n X_k/\sqrt{n} > c \text{ б.ч.} \right\} \in \mathcal{G},$$

где “б. ч.” означает “бесконечно часто (по  $n$ )”, а *хвостовая*  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{G}$  строится по последовательности независимых величин  $X_k = W(k) - W(k-1)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Следовательно, по закону нуля или единицы Колмогорова (теорема 6)

$$P\left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} W(n)/\sqrt{n} > c\right\} \in \{0, 1\}.$$

Для  $a > 0$  имеем

$$\begin{aligned} P(\tau_a < \infty) &\geq P\left(\sup_{t \in [0, \infty)} W(t) > a\right) \geq P(W(n) > a\sqrt{n} \text{ б.ч.}) \geq \\ &\geq P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-1/2} W(n) > a\right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(n^{-1/2} W(n) > a) = P(\xi > a) > 0, \end{aligned}$$

где  $\xi \sim N(0, 1)$ . Таким образом,  $P(\tau_a < \infty) = 1$ .  $\square$

**§ 9.** Применим принцип отражения для нахождения *совместного* распределения величин  $W(t)$  и  $M(t, \omega) = \sup_{s \in [0, t]} W(s, \omega)$ , где  $t \geq 0$ .

Прежде всего заметим, что величина  $M(t, \cdot)$  при каждом  $t \geq 0$  есть действительная *случайная* величина. Следует это непосредственно из того, что

$$G_t f = \sup_{s \in [0, t]} f(s), \quad f \in C_0[0, \infty), \quad (30)$$

является непрерывным отображением  $C_0[0, \infty)$  в  $\mathbb{R}$ .

**Теорема 7.** При всех  $t, x, y \geq 0$  совместное распределение случайных величин  $W(t)$  и  $M(t)$  подчиняется соотношению

$$P(W(t) < y - x, M(t) \geq y) = P(W(t) > y + x). \quad (31)$$

**Доказательство.** Если  $y = 0$ , то (31) превращается в тривиальное равенство  $P(W(t) < -x) = P(W(t) > x)$ . Пусть теперь  $y > 0$ . По лемме 2

$$\tau_y = \inf \{s \geq 0: W(s) = y\}$$

есть момент остановки относительно фильтрации  $\mathbb{F}^W$ .

Пусть  $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$  — процесс, введенный формулой (28), где  $\tau = \tau_y$ . Тогда  $\sigma_y(\omega) = \inf \{s \geq 0: Z(s, \omega) = y\}$  — также момент остановки относительно фильтрации  $\mathbb{F}^Z$ , при этом  $\sigma_y(\omega) = \tau_y(\omega)$  для всех  $y \geq 0, \omega \in \{\tau_y < \infty\}$ .

Заметим, что  $\{\tau_y \leq t\} = \{M(t) \geq y\}$  для любых  $t, y \geq 0$ . Поэтому для всех  $B \in \mathcal{B}(C[0, \infty))$ ,  $t \geq 0$

$$P(\tau_y \leq t, W \in B) = P\left(\sup_{s \in [0, t]} W(s) \geq y, W \in B\right) = P(W \in \tilde{B} \cap B),$$

где  $\tilde{B} = G_t^{-1}([y, \infty)) \in \mathcal{B}(C[0, \infty))$ , см. (30). Применив теорему 5, видим, что

$$P(\sigma_y \leq t, Z \in B) = P(Z \in \tilde{B} \cap B) = P(W \in \tilde{B} \cap B).$$

Итак, случайные элементы  $(\tau_y, W)$  и  $(\sigma_y, Z)$  имеют одинаковые распределения.

Следовательно, для всех  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t, y \geq 0$

$$P(\sigma_y \leq t, Z(t) < y - x) = P(\tau_y \leq t, W(t) < y - x). \quad (32)$$

В силу непрерывности  $W$  имеем  $W(\tau_y(\omega), \omega) = y$  при  $y \geq 0, \omega \in \Omega_\tau$ . Поэтому для  $t \geq \sigma_y(\omega)$  получаем  $Z(t, \omega) = 2W(\tau_y(\omega), \omega) - W(t, \omega) = 2y - W(t, \omega)$ . Таким образом, при всех  $y \geq 0$  и  $x \in \mathbb{R}$  из (32) имеем

$$\begin{aligned} P(M(t) \geq y, W(t) < y - x) &= P(\sigma_y \leq t, Z(t) < y - x) = \\ &= P(\sigma_y \leq t, W(t) > y + x) = P(\tau_y \leq t, W(t) > y + x) = \\ &= P(M(t) \geq y, W(t) > y + x). \end{aligned} \quad (33)$$

Если  $x \geq 0$ , то  $P(M(t) \geq y, W(t) > y + x) = P(W(t) > y + x)$  и (33) влечет (31).  $\square$

**§ 10.** Из теоремы 7 получим результаты о распределении максимума броуновского движения на отрезке  $[0, t]$ .

**Следствие 1** (Башелье). *При всех  $t, y \geq 0$*

$$P(M(t) \geq y) = 2P(W(t) \geq y) = P(|W(t)| \geq y), \quad (34)$$

*т. е.  $\text{Law}(M(t)) = \text{Law}(|W(t)|)$  для каждого  $t \geq 0$ .*



**Доказательство.** Возьмем  $x = 0$  в формуле (31). Тогда, поскольку

$$P(W(t) < y, M(t) \geq y) = P(W(t) > y),$$

имеем

$$\begin{aligned} P(M(t) \geq y) &= P(M(t) \geq y, W(t) < y) + P(M(t) \geq y, W(t) \geq y) = \\ &= P(W(t) > y) + P(W(t) \geq y) = 2P(W(t) \geq y) \end{aligned}$$

(учли, что  $P(W(t) = y) = 0$  при любых  $y \in \mathbb{R}$  и  $t \geq 0$ ).  $\square$

Полезно отметить, что наряду со свойством

$$\text{Law}(M(t)) = \text{Law}(|W(t)|),$$

верным при каждом  $t \geq 0$ , справедливо следующее соотношение, полученное П. Леви (см., например, [182, с. 230]):

$$\text{Law}(M - W, M) = \text{Law}(|W|, L),$$

здесь  $L = \{L_t(0), t \geq 0\}$  — локальное время (в нуле) броуновского движения (см. далее гл. VIII, упражнение 19). Равенство в последней выключной формуле понимается как совпадение распределений двумерных процессов.

**Следствие 2.** Для всех  $y \geq 0$  и  $0 \leq a < b < \infty$

$$P\left(\sup_{a \leq t \leq b} |W(t) - W(a)| \geq y\right) \leq 4P(W(b-a) \geq y) \equiv 2P(|W(b-a)| \geq y). \quad (35)$$

**Доказательство.** В силу теоремы 2

$$P\left(\sup_{a \leq t \leq b} |W(t) - W(a)| \geq y\right) \leq P\left(\sup_{0 \leq s \leq b-a} W(s) \geq y\right) + P\left(\inf_{0 \leq s \leq b-a} W(s) \leq -y\right).$$

Принимая во внимание, что

$$\sup_{s \in [0, t]} (-W(s)) = - \inf_{s \in [0, t]} W(s)$$

для всех  $t \geq 0$  и  $-W = \{-W(t), t \geq 0\}$  есть броуновское движение, требуемое утверждение получаем из (34).  $\square$

**§ 11.** Следующий результат, принадлежащий А. Я. Хинчину, является одним из самых замечательных вероятностных законов, раскрывающих структуру поведения траекторий винеровского процесса (броуновского движения). Отметим, что первым, кто установил закон повторного логарифма для сумм независимых бернуллиевских величин, был также А. Я. Хинчин. В дополнении к этой главе и в главе V показывается, что между процессом частных сумм, построенным по независимым слагаемым, и броуновским движением имеются глубокие связи.

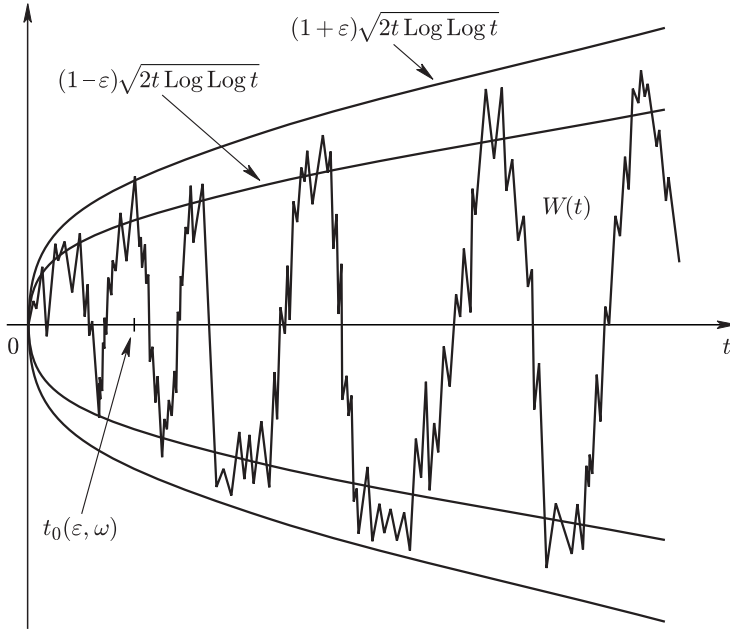


Рис. 12

**Теорема 8** (закон повторного логарифма). С вероятностью единица

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{(2t \operatorname{Log} \operatorname{Log} t)^{1/2}} = 1 \quad \text{и} \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{(2t \operatorname{Log} \operatorname{Log} t)^{1/2}} = -1, \quad (36)$$

где  $\operatorname{Log} t = \ln(t \vee e)$  и  $\vee$  обозначает взятие максимума.

Согласно этой теореме почти все траектории винеровского процесса остаются внутри расширяющейся “трубы” между кривыми  $\pm(1+\varepsilon)\sqrt{2t \operatorname{Log} \operatorname{Log} t}$  (для любого  $\varepsilon > 0$ , начиная с некоторого  $t_0(\varepsilon, \omega)$ ). В то же время с вероятностью 1 они бесконечно часто “выскакивают” из “трубы” с границей  $\pm(1-\varepsilon)\sqrt{2t \operatorname{Log} \operatorname{Log} t}$  (см. рис. 12).

**Доказательство** закона повторного логарифма разобьем на две части.

**А.** Положим

$$h(t) = (2t \operatorname{Log} \operatorname{Log} t)^{1/2}, \quad V(t) = W(t)/h(t), \quad t \geq 0,$$

и проверим, что с вероятностью единица

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |V(t)| \leq 1.$$

Возьмем произвольные  $\varepsilon > 0$ ,  $c > 1$  и убедимся, что событие  $\{|V(c^n)| > 1 + \varepsilon\}$  для бесконечно многих  $n$  имеет вероятность 0. Применив оценку (II.29), получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|V(c^n)| > 1 + \varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|W(1)| > (1 + \varepsilon)(2 \operatorname{Log} \operatorname{Log} c^n)^{1/2}) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}(1 + \varepsilon)(\operatorname{Log} \operatorname{Log} c^n)^{1/2}} e^{-(1 + \varepsilon)^2 \operatorname{Log} \operatorname{Log} c^n} < \infty, \end{aligned} \quad (37)$$

поскольку при  $n \geq n_0(c)$ , т. е. таких, что  $c^n \geq e^e$ , имеем  $\text{Log Log } c^n = \ln \ln c^n$  и  $e^{-(1+\varepsilon)^2 \text{Log Log } c^n} = (n \ln c)^{-(1+\varepsilon)^2}$ . Из оценки (37) выводим, воспользовавшись леммой Бореля–Кантелли, что

$$\mathbf{P}(|V(c^n)| > 1 + \varepsilon \text{ бесконечно часто по } n) = 0.$$

Обозначим

$$A_n = \left\{ \omega : \sup_{t \in [c^n, c^{n+1}]} |V(t, \omega) - V(c^n, \omega)| > \varepsilon \right\}$$

и покажем, что вероятность того, что происходит бесконечное число событий  $A_n$ , равна нулю. Поскольку

$$|V(t) - V(c^n)| \leq |V(t) - W(c^n)/h(t)| + |W(c^n)/h(t) - V(c^n)|,$$

получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_n) &\leq \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [c^n, c^{n+1}]} |W(t) - W(c^n)| > \frac{\varepsilon}{2} h(c^n)\right) + \\ &+ \mathbf{P}\left(|W(c^n)| > \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{h(c^n)} - \frac{1}{h(c^{n+1})}\right)^{-1}\right) = p_n + q_n. \end{aligned} \quad (38)$$

По следствию 2 и в силу (II.29)

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq n_0} p_n &\leq 2 \sum_{n \geq n_0} \mathbf{P}\left(|W(c^{n+1} - c^n)| > \frac{\varepsilon}{2} h(c^n)\right) \leq \\ &\leq \frac{8}{\varepsilon \sqrt{2\pi}} \sum_{n \geq n_0} \left(\frac{c^{n+1} - c^n}{2c^n \ln \ln c^n}\right)^{1/2} \exp\left\{-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \frac{c^n \ln \ln c^n}{c^{n+1} - c^n}\right\} = \\ &= \frac{8}{\varepsilon \sqrt{2\pi}} \sum_{n \geq n_0} \left(\frac{c-1}{2 \ln \ln c^n}\right)^{1/2} (n \ln c)^{-\varepsilon^2/(4(c-1))} < \infty, \end{aligned} \quad (39)$$

если выбрать  $c = c(\varepsilon) > 1$  так, чтобы  $\varepsilon^2/(4(c-1)) > 1$ .

Далее, для  $y \geq e^e$

$$\left(\frac{1}{h(y)}\right)' = -\frac{y^{-3/2}}{2\sqrt{2}} (\ln \ln y)^{-1/2} \{1 + (\ln \ln y)^{-1} (\ln y)^{-1}\}.$$

Поэтому, пользуясь формулой Лагранжа, при  $n \geq n_0(c)$  имеем

$$\left(\frac{1}{h(c^n)} - \frac{1}{h(c^{n+1})}\right)^{-1} \geq 2c^{3n/2} (\ln \ln c^n)^{1/2} (c^{n+1} - c^n)^{-1} = \frac{2c^{n/2}}{(c-1)} (\ln \ln c^n)^{1/2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq n_0} q_n &\leq \sum_{n \geq n_0} \mathbf{P}\left(|W(1)| > \frac{\varepsilon (\ln \ln c^n)^{1/2}}{(c-1)}\right) \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2}(c-1)}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{(\ln \ln c^n)^{1/2}} (n \ln c)^{-\varepsilon^2/(2(c-1)^2)} < \infty, \end{aligned} \quad (40)$$

если  $c = c(\varepsilon) > 1$  таково, что  $\varepsilon^2/(2(c-1)^2) > 1$ .

Следовательно, для каждого  $\varepsilon > 0$  по лемме Бореля–Кантелли из (37)–(40) вытекает, что для п. в.  $\omega \in \Omega$  найдется  $t_0 = t_0(\varepsilon, \omega)$  такое, что

$$|V(t, \omega)| < 1 + 2\varepsilon \quad \text{при всех } t \geq t_0(\varepsilon, \omega). \quad (41)$$

Итак,  $\limsup_{t \rightarrow \infty} |V(t)| \leq 1$  п. н.

**В.** Теперь проверим, что почти на верное

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} V(t) \geq 1.$$

Для этого достаточно показать, что при любом  $\varepsilon \in (0, 1/2)$  для п. в.  $\omega$  среди членов последовательности  $\{m^k, k \in \mathbb{N}\}$ , где  $m = m(\varepsilon)$  достаточно велико, найдется подпоследовательность  $\{m^{k_j}\}$  (здесь  $k_j = k_j(\omega)$ ) такая, что

$$V(m^{k_j}, \omega) > 1 - 2\varepsilon, \quad \text{если } j > j_0(\omega, \varepsilon, m(\varepsilon)). \quad (42)$$

Введем события  $B_k = \{\omega : (W(m^k) - W(m^{k-1}))/h(m^k - m^{k-1}) > 1 - \varepsilon\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Согласно (II.30) имеем

$$\begin{aligned} P(B_k) &= P(W(1) > (1 - \varepsilon)(2 \operatorname{Log} \operatorname{Log}(m^k - m^{k-1}))^{1/2}) \sim \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1 - \varepsilon)(2 \ln \ln(m^k - m^{k-1}))^{1/2}} (\ln(m^k - m^{k-1}))^{-(1-\varepsilon)^2}, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому для всех  $k \geq k_0(\varepsilon, m)$  получим

$$P(B_k) \geq (\ln(m^k - m^{k-1}))^{-(1-2\varepsilon)^2} \geq (k \ln m)^{-(1-2\varepsilon)^2}.$$

Таким образом,  $\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \infty$ . События  $B_k$  независимы в силу независимости приращений броуновского движения. По лемме Бореля–Кантелли с вероятностью 1 произойдет бесконечное число событий  $B_k$ , т. е. для п. в.  $\omega \in \Omega$  можно указать подпоследовательность  $k_j = k_j(\omega, \varepsilon, m) \rightarrow \infty$  такую, что для всех  $j \in \mathbb{N}$

$$(W(m^{k_j}) - W(m^{k_j-1}))/h(m^{k_j} - m^{k_j-1}) > 1 - \varepsilon,$$

то есть,

$$V(m^{k_j})h(m^{k_j})/h(m^{k_j} - m^{k_j-1}) - V(m^{k_j-1})h(m^{k_j-1})/h(m^{k_j} - m^{k_j-1}) > 1 - \varepsilon. \quad (43)$$

Заметим, что при  $j \rightarrow \infty$

$$\frac{h(m^{k_j})}{h(m^{k_j} - m^{k_j-1})} \rightarrow \left(\frac{m}{m-1}\right)^{1/2}, \quad \frac{h(m^{k_j-1})}{h(m^{k_j} - m^{k_j-1})} \rightarrow \left(\frac{1}{m-1}\right)^{1/2}. \quad (44)$$

Поэтому, выбрав достаточно большое  $m = m(\varepsilon)$  и учитывая (41), (43) и (44), приходим к (42). Неравенства (41) и (42) обеспечивают выполнение первого соотношения (36). Для получения второго соотношения достаточно рассмотреть  $\{-W(t), t \geq 0\}$ .  $\square$

**§ 12.** Рассмотрим характер флуктуаций броуновского движения в окрестности нуля.

**Следствие 3** (локальный закон повторного логарифма). *С вероятностью единица*

$$\limsup_{t \rightarrow 0+} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \operatorname{Log} \operatorname{Log}(1/t)}} = 1 \quad \text{и} \quad \liminf_{t \rightarrow 0+} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \operatorname{Log} \operatorname{Log}(1/t)}} = -1.$$

**Доказательство.** Положим  $t = 1/s$ , где  $s > 0$ , и заметим, что

$$B(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s = 0, \\ s W(1/s) & \text{при } s > 0, \end{cases}$$

есть процесс броуновского движения. Непрерывность траекторий  $B$  в точке 0 следует из теоремы 8, а остальные свойства броуновского движения проверяются легко. Искомые утверждения получаются теперь из теоремы 8 при  $s \rightarrow \infty$ .  $\square$

Заметим, что в приложении 8 рассматриваются дальнейшие обобщения закона повторного логарифма.

## Дополнения и упражнения

Известны разнообразные конструкции винеровского процесса с *непрерывными* п. н. траекториями. В дополнение к представлению (II.31), данному в теореме 8 главы II, приведем еще одну конструкцию, предложенную П. Леви.

Возьмем множества  $T_n = \{k2^{-n+1}, k = 0, \dots, 2^{n-1}\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Пусть на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  задан массив независимых стандартных гауссовских величин  $\{X_{n,k}, k \in T_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

Определим индуктивно процессы  $B_n = \{B_n(t), t \in [0, 1]\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Положим  $B_1(t) = tX_{1,1}$ ,  $t \in [0, 1]$ . Тем самым на множестве  $T_1$  имеем  $B_1(0) = 0$  и  $B_1(1) = X_{1,1}$ , а для  $t \in (0, 1)$  осуществляем линейную интерполяцию значений  $B_1$  в концах отрезка  $[0, 1]$ . Считая процесс  $B_n$  заданным, введем процесс  $B_{n+1}$  следующим образом. Пусть

$$B_{n+1}(t) = B_n(t) \quad \text{для } t \in T_n.$$

Если  $t = k2^{-n} \in T_{n+1} \setminus T_n$ , то положим

$$B_{n+1}(t) = \frac{1}{2}(B_n(t - 2^{-n}) + B_n(t + 2^{-n})) + 2^{-(n+1)/2}X_{n+1,k}. \quad (45)$$

Итак, процесс  $B_{n+1}$  задан на множестве  $T_{n+1}$ . Для остальных точек отрезка  $[0, 1]$  определим  $B_{n+1}$  с помощью линейной интерполяции по узлам  $(t, B_{n+1}(t))$ , где  $t \in T_{n+1}$ . Таким образом, процессы  $B_n$  непрерывны на  $[0, 1]$  при всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $\omega \in \Omega$ . Заметим, что часть величин  $X_{n,k}$  не использовалась в построениях, но их наличие позволило упростить запись формулы (45).

Очевидно,  $\sup_{t \in [0,1]} |B_1(t)| = |X_{1,1}|$ , а при  $n \geq 1$

$$\sup_{t \in [0,1]} |B_{n+1}(t) - B_n(t)| = 2^{-(n+1)/2} \max_{k: k2^{-n} \in T_{n+1} \setminus T_n} |X_{n+1,k}|.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} |B_{n+1}(t) - B_n(t)| > n2^{-(n+1)/2}\right) \leq 2^n \mathbf{P}(|\xi| > n),$$

где  $\xi \sim N(0, 1)$ . Пользуясь оценкой (II.28) и леммой Бореля–Кантелли, получаем, что ряд

$$B_1(t, \omega) + \sum_{n=1}^{\infty} (B_{n+1}(t, \omega) - B_n(t, \omega))$$

для п. в.  $\omega$  сходится *равномерно* на отрезке  $[0, 1]$ . Согласно теореме Вейерштрасса этот ряд задает непрерывную п. н. на  $[0, 1]$  функцию  $B(t)$ .

С помощью леммы 1 главы II легко установить, что при каждом  $n \geq 0$  процесс  $B_n = \{B_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$  является гауссовским.

1. Найдите  $\mathbb{E} B_n(t)$  и  $\text{cov}(B_n(s), B_n(t))$  для  $s, t \in [0, 1]$  и  $n \geq 0$ . Докажите, что  $B(t)$  — гауссовский процесс с  $\mathbb{E} B(t) = 0$  и  $\text{cov}(B(s), B(t)) = \min\{s, t\}$  для  $s, t \in [0, 1]$ .

Упражнение 1 показывает, что  $B = \{B(t), 0 \leq t \leq 1\}$  — винеровский процесс на отрезке  $[0, 1]$ .

Среди других явных построений винеровского процесса отметим результат Винера и Пэли, которые установили, что ряд

$$\xi_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \xi_k \sqrt{2} \frac{\sin(\pi k t)}{\pi k}, \quad (46)$$

где  $\xi_0, \xi_1, \dots$  — независимые одинаково распределенные стандартные нормальные величины, сходится п. н. на  $[0, 1]$  равномерно и задает непрерывную случайную функцию, являющуюся винеровским процессом на  $[0, 1]$ .

Интересно сопоставить это построение с результатом Харди, который доказал (задача была поставлена Риманом), что функция

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n^2 t)}{n^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

непрерывна, но ни в одной точке не имеет производной.

Частный случай теорем вложения классов Бесова позволяет доказать (см. [40]), что функции

$$W^{(n)}(t, \omega) = \frac{t \xi_0(\omega)}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k(\omega)}{k} \sin kt$$

для некоторой подпоследовательности  $\{n_m\}$  будут равномерно п. н. сходиться к броуновскому движению на отрезке  $[0, \pi]$  (см. также формулы (VII.68) и (VII.81)).

Принципиальная возможность построения *непрерывного* на  $[0, 1]$  винеровского процесса сразу вытекает из теоремы 1 главы II и теоремы Колмогорова о существовании непрерывной модификации (теорема 18 главы II). Действительно,

$$\mathbb{E} (W_t - W_s)^4 = 3(t - s)^2, \quad s, t \geq 0,$$

т. е. оценка (II.52) выполнена при  $\alpha = 4$  и  $\varepsilon = 1$ .

2. Пусть  $\{t_n\}_{n \geq 1}$  — последовательность положительных чисел такая, что  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{-1/2} < \infty$ . Докажите, что тогда  $|W(t_n)| \rightarrow \infty$  п. н. при  $n \rightarrow \infty$ .

В дополнение к локальному закону повторного логарифма (см. следствие 3) формулируем следующий полезный результат о локальном поведении траекторий винеровского процесса.

3. Рассмотрим последовательность  $\Pi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , *измельчающихся* разбиений  $(t_m^{(n)})$  отрезка  $[0, t]$  точками *специального вида*  $t_m^{(n)} = tm2^{-n}$ ,  $m = 0, \dots, 2^n$ . Тогда

$$\sum_{m=0}^{2^n-1} (W(t_{m+1}^{(n)}) - W(t_m^{(n)}))^2 \rightarrow t \text{ п.н. при } n \rightarrow \infty. \quad (47)$$

4. Покажите, что утверждение (47) о сходимости п.н. не обязано выполняться, если брать измельчающиеся *произвольные* разбиения  $\Pi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , отрезка  $[0, 1]$  точками  $t_m^{(n)}$ ,  $m = 0, \dots, N_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), для которых

$$\max_{0 \leq m \leq N_n} (t_{m+1}^{(n)} - t_m^{(n)}) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

(но тем не менее будет иметь место сходимость по вероятности).

О дальнейших обобщениях соотношения (47) см. [75; п. 3 гл. 24].

5. Докажите, что почти все траектории винеровского процесса являются *гёльдеровскими* функциями с показателем  $\gamma < 1/2$ , т.е. на каждом временном отрезке  $[a, b] \subset [0, \infty)$

$$|W(t) - W(s)| \leq C_\gamma |t - s|^\gamma, \quad s, t \in [a, b], \quad C_\gamma = \text{const} > 0.$$

(Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [12], теорема 3 на с. 127.) Можно ли в приведенном результате взять константу  $C_\gamma$  не зависящей от промежутка  $[a, b]$ ?

6. Докажите, что с вероятностью единица

$$\limsup_{t \rightarrow 0+} W(t)/t^{1/2} = \infty$$

(тем самым условие Гёльдера порядка  $1/2$  не выполняется в точке 0).

7. Пользуясь рассуждениями, проведенными при доказательстве теоремы 1, докажите, что винеровский процесс  $W = \{W(t), 0 \leq t \leq 1\}$  имеет траектории, не удовлетворяющие п.н. ни в одной точке условию Гёльдера с показателем  $\gamma > 1/2$ .
8. Выведите результат упражнения 5 из теоремы 19 главы II и того свойства, что для  $q \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq s < t < \infty$

$$\mathbb{E} (W(t) - W(s))^{2q} = (2q - 1)!! (t - s)^q. \quad (48)$$

Обозначим  $H_\gamma(\omega)$  множество тех точек  $t \in [0, \infty)$ , в которых траектория винеровского процесса, отвечающая элементарному исходу  $\omega \in \Omega$  (можно считать  $\Omega = C[0, \infty)$ ), удовлетворяет условию Гёльдера с показателем  $\gamma$ . Упражнения 5 и 8 показывают, что  $P(H_\gamma = [0, \infty)) = 1$  для  $\gamma < 1/2$ . Упражнение 7 обеспечивает соотношение  $P(H_\gamma = \emptyset) = 1$  при  $\gamma > 1/2$ . Из упражнения 6 следует, что  $P(t \in H_{1/2}) = 0$  при каждом  $t \geq 0$ , однако, как показал Б. Дэвис,  $P(H_{1/2} \neq \emptyset) = 1$ .

Следующий результат (см. [73; с. 313]) интересно сопоставить со следствием 3. Для этого напомним, что процесс  $X$  является однородным, если распределение  $X(t+h) - X(t)$  не зависит от  $t$ .

**Теорема 9 (Хинчин).** *Если  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  — однородный процесс с независимыми приращениями, не содержащий гауссовской компоненты, то*

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{X(t)}{\sqrt{t \ln \ln(1/t)}} = 0 \quad \text{п. н.}$$

9. Постройте пример действительного процесса  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  типа càdlàg (но не являющегося непрерывным) и замкнутого множества  $F \subset \mathbb{R}$  таких, что  $\tau_\infty < \tau_F$  п. н., где  $\tau_\infty$  и  $\tau_F$  определены при доказательстве теоремы 3.
10. Пусть  $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  — последовательность действительных случайных величин и множество  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Пусть  $\tau = \tau(\omega)$  — момент первого достижения множества  $B$ , определяемый формулой (1.49). Мы уже видели (см. § 3), что  $\tau$  — марковский момент относительно естественной фильтрации процесса  $X$ . Введем теперь

$\sigma(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N}: X_n(\omega) \notin B\}$  — момент первого выхода из  $B$ ,

$\gamma(\omega) = \sup\{n \in \mathbb{N}: X_n(\omega) \in B\}$  — момент последнего пребывания в  $B$

(в определении моментов  $\tau$  и  $\sigma$  предполагается, что если множество, стоящее в фигурных скобках, для некоторой точки  $\omega$  пусто, то в этой точке значение рассматриваемой величины считается равным  $+\infty$ ). Докажите, что  $\sigma$  — марковский момент относительно естественной фильтрации процесса  $X$ . Постройте пример последовательности  $X$  и множества  $B$ , для которых момент  $\gamma$  является марковским моментом относительно естественной фильтрации, а также пример  $X$  и  $B$ , для которых  $\gamma$  не является таким моментом.

11. Пусть  $X = \{X(t), t \in T\}$ ,  $T \subset \mathbb{R}$ , — действительный случайный процесс и  $\mathbb{F}_T$  — его естественная фильтрация. Пусть  $\tau = \tau(\omega)$  — марковский момент относительно этой фильтрации; если  $\tau(\omega) = \infty$ , полагаем  $X(\tau(\omega), \omega) = 0$ . Можно ли утверждать, что  $X(\tau(\omega), \omega)$  является  $\mathcal{F}_\tau | \mathcal{B}(\mathbb{R})$  — измеримой величиной? Что можно сказать в случае  $T = \mathbb{N}$ ?
12. Положим  $\tau_a = \inf\{t > 0: W(t) = a\}$ , где  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс,  $a \in \mathbb{R}$ . Докажите, что  $\tau_a \stackrel{\mathcal{D}}{=} a^2 \tau_1$ , т. е. распределения величин  $\tau_a$  и  $a^2 \tau_1$  совпадают:  $\text{Law}(\tau_a) = \text{Law}(a^2 \tau_1)$ .
13. Пусть  $U$  — это наибольший нуль процесса  $W$  на отрезке  $[0, t]$ . Докажите, что для распределения величины  $U$  справедлив закон арксинуса:

$$P(U \leq x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{x}{t}}, \quad x \in [0, t].$$



Напомним следующее важное понятие.

**Определение 6.** Семейство действительных случайных величин  $\{\xi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$  называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \Lambda} \int_{\{|\xi_\alpha| \geq c\}} |\xi_\alpha| dP = 0. \quad (49)$$

Из этого свойства сразу следует, что для таких семейств

$$\sup_{\alpha \in \Lambda} E|\xi_\alpha| < \infty. \quad (50)$$

Хорошо известно (см., например, [85; гл. II, § 6]), что если семейство  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  *равномерно интегрируемо* и  $\xi_n \rightarrow \xi$  *почти наверное* (или только *по вероятности*), то  $\xi$  будет интегрируемой величиной и

$$E\xi_n \rightarrow E\xi, \quad E|\xi_n - \xi| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (51)$$

В случае *неотрицательных* интегрируемых случайных величин  $\xi_n, n \geq 0$ , таких, что  $\xi_n \rightarrow \xi$  (п. н. или по вероятности), где  $E\xi < \infty$ , имеет место и обратная импликация

$$E\xi_n \rightarrow E\xi \implies \text{семейство } \{\xi_n, n \geq 1\} \text{ равномерно интегрируемо.}$$

Важно также подчеркнуть следующее обстоятельство: во всех приведенных утверждениях, кроме второго соотношения в (51), сходимость *почти наверное* ( $\xi_n \rightarrow \xi$  п. н.) может быть заменена сходимостью лишь *по распределению* ( $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$ ). Этот важный факт следует из вышеприведенных результатов и доказываемой далее теоремы Скорохода (теорема 11 главы V).

Свойство равномерной интегрируемости выявляет

**Теорема 10** (Де ла Валле Пуссен; см., например, [101; с. 10]). *Семейство случайных величин  $\{\xi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$  является равномерно интегрируемым тогда и только тогда, когда найдется измеримая функция  $G: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , т. е.  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) | \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ , такая, что*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(t)/t = \infty \quad \text{и} \quad \sup_{\alpha \in \Lambda} EG(|\xi_\alpha|) < \infty. \quad (52)$$

Из этой теоремы вытекает, что условие

$$\sup_{\alpha \in \Lambda} E|\xi_\alpha|^\gamma < \infty \quad \text{для некоторого } \gamma > 1 \quad (53)$$

является *достаточным* для равномерной интегрируемости семейства  $\{\xi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ .

Далее мы покажем, как случайные величины могут быть “вложены” в броуновское движение, и как исследование сумм независимых слагаемых (с конечными дисперсиями) сводится к изучению поведения броуновского движения в случайные моменты времени. Для этого нам потребуются тождества Вальда.

**Теорема 11** (первое тождество Вальда). Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные величины,  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$  и  $\tau$  — марковский момент относительно потока  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , причем  $\mathbb{E}|\xi_1| < \infty$  и  $\mathbb{E}\tau < \infty$ . Тогда

$$\mathbb{E} S_\tau = \mathbb{E}\tau \mathbb{E}\xi_1, \quad (54)$$

где  $S_{\tau(\omega)}(\omega) = \sum_{k=1}^{\tau(\omega)} \xi_k(\omega)$  для  $\omega \in \{\tau < \infty\}$ , и полагаем  $S_{\tau(\omega)}(\omega) = 0$  для  $\omega \in \{\tau = \infty\}$ .

**Доказательство.** По определению введенных величин  $S_\tau$  находим, что п. н.

$$S_\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}}. \quad (55)$$

Заметим, что

$$\{\tau \geq n\} = \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

Следовательно,  $\xi_k$  и  $\mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}}$  — независимые величины при любом  $k \in \mathbb{N}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbb{E} S_\tau &= \mathbb{E} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \xi_k \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \xi_k \mathbb{E} \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} = \mathbb{E} \xi_1 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau \geq k) = \mathbb{E} \xi_1 \mathbb{E} \tau, \end{aligned}$$

где законность смены порядка суммирования и интегрирования следует из того, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} |\xi_k \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}}| = \mathbb{E} |\xi_1| \mathbb{E} \tau < \infty. \quad \square$$

Из проведенного доказательства видно, что результат обобщается на любую последовательность (в том числе зависимых) случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , имеющих одинаковое математическое ожидание  $a \in \mathbb{R}$ , и интегрируемую случайную величину  $\tau$ , принимающую натуральные значения, если  $\xi_k$  не зависит от  $\mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}}$  при каждом  $k \in \mathbb{N}$  (в частности, если  $\xi_k$  не зависит от  $\tau$  при любом  $k \in \mathbb{N}$ ).

**14.** Докажите второе тождество Вальда: пусть  $D\xi_1 < \infty$  дополнительно к условиям теоремы 11, тогда

$$\mathbb{E} (S_\tau - \tau \mathbb{E} \xi_1)^2 = \mathbb{E} \tau D\xi_1. \quad (56)$$

**Теорема 12.** Пусть  $X$  — действительная случайная величина, заданная на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и имеющая  $E|X| < \infty$ . Тогда существуют (быть может, на расширении исходного вероятностного пространства) броуновское движение  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  и случайная величина  $\tau$  такие, что

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} EX + W(\tau). \quad (57)$$

Если  $EX^2 < \infty$ , то  $\tau$  может быть построено так, что  $E\tau < \infty$  и, более того,

$$E\tau = DX. \quad (58)$$

Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что основная трудность связана с одновременным выполнением соотношений (57) и (58), как показывает упражнение

**15.** Пусть  $X = X(\omega)$  — центрированная случайная величина на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  с  $EX^2 < \infty$ . Возьмем на  $(\Omega', \mathcal{F}', P')$  броуновское движение  $W = \{W(t, \omega'), t \geq 0\}$ . Определим  $X$  и  $W$  на  $(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes (\Omega', \mathcal{F}', P')$  согласно (I.46). Введем  $\tau(\omega, \omega') = \inf\{t \geq 1: W(t, \omega') = X(\omega)\}$ . Тогда  $W(\tau) = X$ . Докажите, что при этом  $\tilde{E}\tau = \infty$ , где  $\tilde{E}$  — усреднение по мере  $P \otimes P'$ .

**Доказательство теоремы 12.** Без ограничения общности сразу можем считать, что на исходном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  определена не только случайная величина  $X$ , но и некоторый винеровский процесс  $W = \{W(t), t \geq 0\}$ . При этом достаточно рассмотреть лишь случай, когда  $EX = 0$  и  $X$  — невырожденная величина (иначе надо было бы просто положить  $\tau \equiv 0$ ).

Пусть сначала  $X$  принимает лишь два значения  $a$  и  $b$  ( $a < 0 < b$ , поскольку  $EX = 0$ ). Если

$$P(X = a) = p, \quad P(X = b) = 1 - p, \quad (59)$$

то условие  $EX = 0$  влечет равенства

$$p = \frac{b}{b-a}, \quad 1-p = \frac{-a}{b-a}. \quad (60)$$

В силу теоремы 3 величина

$$\tau_{a,b} = \inf\{t \geq 0: W(t) \in \{a, b\}\}$$

есть марковский момент относительно естественной фильтрации  $\mathbb{F}^W$  винеровского процесса.

Докажем, что  $\tau_{a,b} < \infty$  п. н. При любом  $m \in \mathbb{N}$

$$\{\tau_{a,b} \geq m\} \subset \{|W(n) - W(n-1)| \leq b-a, n = 1, \dots, m\},$$

откуда

$$P\{\tau_{a,b} \geq m\} \leq P(|W(n) - W(n-1)| \leq b-a, n = 1, \dots, m) = [P(|\xi| \leq b-a)]^m,$$

где  $\xi \sim N(0, 1)$ . Таким образом,

$$P(\tau_{a,b} = \infty) = 0 \quad \text{и} \quad E\tau_{a,b}^k < \infty \quad \text{при всех} \quad k \in \mathbb{N}. \quad (61)$$

Учитывая непрерывность броуновского движения, получаем, что с вероятностью 1 или  $W(\tau_{a,b}) = a$ , или  $W(\tau_{a,b}) = b$ . Следовательно, если  $p_{a,b}$  таково, что

$$P(W(\tau_{a,b}) = a) = p_{a,b}, \quad P(W(\tau_{a,b}) = b) = 1 - p_{a,b}, \quad (62)$$

и если справедливо равенство

$$E W(\tau_{a,b}) = 0, \quad (63)$$

то из (62) найдем, что  $p_{a,b} = b/(b-a)$  и, согласно (59), (60), для двузначных величин  $X$  соотношение (57) будет установлено.

Заметим, что с помощью мартингальной техники (гл. IV) соотношение (63) будет легко получить, воспользовавшись для непрерывного времени аналогом следствия 2 главы IV. Однако (63) нетрудно установить непосредственно следующим образом. Определим величины  $\xi_{n,m} = W(m/n) - W((m-1)/n)$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , и положим

$$\tau_{a,b}^{(n)} = \inf \{m: \xi_{n,1} + \dots + \xi_{n,m} \notin (a,b)\}. \quad (64)$$

В силу упражнения 10 при каждом  $n \in \mathbb{N}$  величина  $\tau_{a,b}^{(n)}$  есть марковский момент относительно потока  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_k^{(n)} = \sigma\{\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,k}\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Аналогично (61) убеждаемся, что  $E \tau_{a,b}^{(n)} < \infty$ . Заметив, что  $\xi_{n,1} + \dots + \xi_{n,\tau_{a,b}^{(n)}} = W(\tau_{a,b}^{(n)}/n)$  и  $E \xi_{n,1} = 0$ , согласно (54) находим, что

$$E W(\tau_{a,b}^{(n)}/n) = 0. \quad (65)$$

Относительно величин  $\tau_{a,b}^{(n)}$  можно утверждать следующее.

**16.** Докажите, что имеет место свойство:  $\tau_{a,b}^{(n)}/n \rightarrow \tau_{a,b}$  п. н. при  $n \rightarrow \infty$ .

Поскольку траектории винеровского процесса непрерывны п. н., то в силу этого свойства  $W(\tau_{a,b}^{(n)}/n) \rightarrow W(\tau_{a,b})$  п. н. при  $n \rightarrow \infty$ .

Выведем отсюда, что

$$E W(\tau_{a,b}^{(n)}/n) \rightarrow E W(\tau_{a,b}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (66)$$

Для этого потребуется следующее утверждение.

**17.** Докажите, что семейство случайных величин  $\{W(\tau_{a,b}^{(n)}/n), n \in \mathbb{N}\}$  является равномерно интегрируемым.

Соотношение (66) следует из результата упражнения 17, а (63) вытекает из (65) и (66). Итак, для *центрированных двузначных* величин вида (59) доказано, что

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} W(\tau_{a,b}). \quad (67)$$

Рассмотрим теперь *общий случай*. Обозначим  $F(x) = P(X \leq x)$ . Учитывая, что  $E X = 0$  и что случайная величина  $X$  невырождена, имеем

$$c = \int_{(-\infty, 0]} (-y) dF(y) = \int_{(0, \infty)} z dF(z) \neq 0. \quad (68)$$

Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  — непрерывная и ограниченная функция. Тогда

$$\begin{aligned} c \mathbb{E} f(X) &= c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x) = \\ &= \int_{(0, \infty)} f(z) dF(z) \int_{(-\infty, 0]} (-y) dF(y) + \int_{(-\infty, 0]} f(y) dF(y) \int_{(0, \infty)} z dF(z) = \\ &= \int_{(0, \infty)} dF(z) \int_{(-\infty, 0]} (zf(y) - yf(z)) dF(y). \end{aligned} \quad (69)$$

Отсюда

$$\mathbb{E} f(X) = c^{-1} \int_{(0, \infty)} dF(z) \int_{(-\infty, 0]} (z - y) \left\{ f(y) \frac{z}{z - y} + f(z) \frac{-y}{z - y} \right\} dF(y). \quad (70)$$

На некотором вероятностном пространстве  $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$  построим случайный вектор  $(Y, Z)$  со значениями в  $\mathbb{R}^2$  такой, что

$$\mathbf{P}'((Y, Z) \in B) = c^{-1} \iint_{B \cap \{(-\infty, 0] \times (0, \infty)\}} (z - y) dF(y) dF(z), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \quad (71)$$

Возможность такого построения следует из того, что правая часть формулы (71) есть неотрицательная счетно аддитивная функция множества  $B$ . То, что это вероятностная мера, сразу вытекает из формулы (70), в которой полагаем  $f \equiv 1$ .

Если  $y$  и  $z$  таковы, что  $y < 0 < z$ , то из (62) с  $p_{y,z} = z/(z - y)$  и (67) найдем, что

$$f(y) \frac{z}{z - y} + f(z) \frac{-y}{z - y} = \mathbb{E} f(W(\tau_{y,z})). \quad (72)$$

Эта формула будет верна и для  $y \leq 0 < z$ , если положить  $\tau_{0,b} = 0$  при  $b > 0$ .

Учитывая (71) и (I.25), видим, что

$$\mathbb{E} f(X) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E} f(W(\tau_{y,z})) d\mathbf{P}'_{(Y,Z)}(y, z). \quad (73)$$

В силу теоремы Фубини и (I.23) равенство (73) можно переписать в виде

$$\mathbb{E} f(X) = \mathbb{E} \mathbb{E}' f(W(\tau_Y, Z)), \quad (74)$$

где  $\tau_{Y,Z}(\omega, \omega') = \tau_{Y(\omega'), Z(\omega')}(\omega)$  для  $\omega \in \Omega$ ,  $\omega' \in \Omega'$ , а  $\mathbb{E}'$  означает интегрирование по мере  $\mathbf{P}'$ .

Возьмем теперь вероятностное пространство  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}) = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \otimes (\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$  и для  $\tilde{\omega} = (\omega, \omega') \in \tilde{\Omega}$ ,  $t \geq 0$  положим

$$\tilde{X}(\tilde{\omega}) = X(\omega), \quad \tilde{W}(t, \tilde{\omega}) = W(t, \omega).$$

**18. Покажите, что на  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$**

$$\tau(\tilde{\omega}) := \tau_{Y(\omega'), Z(\omega')}(\omega) \quad (75)$$

является случайной величиной, а  $\tilde{W} = \{\tilde{W}(t), t \geq 0\}$  — броуновским движением.

Учитывая это упражнение и формулу (74), видим, что

$$\tilde{\mathbb{E}} f(\tilde{X}) = \tilde{\mathbb{E}} f(\tilde{W}(\tau)).$$

Поэтому соотношение (57), требуемое в теореме 12, следует из того, что  $\text{Law}(\tilde{X} \mid \tilde{\mathbb{P}}) = \text{Law}(X \mid \mathbb{P})$ , и простого факта, относящегося к теории меры, который вытекает из следующего упражнения.

**19.** Пусть  $\mathbb{P}$  и  $\mathbb{Q}$  — вероятностные меры на метрическом пространстве  $(S, \mathcal{B}(S))$ .

Пусть для любой непрерывной и ограниченной функции  $f: S \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\int_S f(x) \mathbb{P}(dx) = \int_S f(x) \mathbb{Q}(dx).$$

Тогда  $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$  на  $\mathcal{B}(S)$ .

Итак,  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$  есть то *расширенное вероятностное пространство*, о котором и говорится в формулировке теоремы 12.

Для завершения доказательства теоремы осталось лишь проверить, что при условии  $\mathbb{E} X^2 < \infty$  имеет место равенство (58).

**20.** Используя второе тождество Вальда (упражнение 14), докажите, что

$$\mathbb{E} \tau_{a,b} = -ab. \quad (76)$$

Воспользовавшись равенством (76), теоремой Фубини и формулой (75), имеем

$$\tilde{\mathbb{E}} \tau = \mathbb{E}' \mathbb{E}(\tau_{Y,Z}) = \mathbb{E}'(-YZ). \quad (77)$$

Отсюда, принимая во внимание (71) и (68), находим:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}} \tau = \mathbb{E}'(-YZ) &= \int_{(-\infty, 0]} dF(y) (-y) \int_{(0, \infty)} dF(z) z(z-y)c^{-1} = \\ &= \int_{(-\infty, 0]} dF(y) (-y) \left\{ -y + \int_{(0, \infty)} dF(z) c^{-1} z^2 \right\} = \\ &= \int_{(-\infty, 0]} y^2 dF(y) + \int_{(0, \infty)} z^2 dF(z) = \mathbb{E} X^2 = \tilde{\mathbb{E}} \tilde{X}^2. \end{aligned}$$

Тем самым, требуемое свойство (58) (с соответствующими переобозначениями для расширенного вероятностного пространства) установлено.  $\square$

Теперь нам понадобится следующее обобщение понятия броуновского движения.

**Определение 7.** Процесс  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  называется *действительным броуновским движением относительно фильтрации  $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$* , если

- 1)  $W(t)$  является  $\mathcal{F}_t$ -измеримой величиной при каждом  $t \geq 0$ ;
- 2)  $W(t) - W(s) \perp \mathcal{F}_s$  при  $0 \leq s < t$  (т. е.  $W(t) - W(s)$  не зависит от  $\mathcal{F}_s$ );
- 3)  $W_0 = 0$  п. н. и  $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$  при  $0 \leq s < t$ ;
- 4) траектории процесса  $W$  непрерывны п. н.

Данное определение очевидным образом распространяется и на  $m$ -мерное броуновское движение: тогда в условии 3) требуется, чтобы  $W(t) - W(s) \sim N(0, (t-s)I)$  при  $0 \leq s < t$ , где  $I$  — единичная матрица порядка  $m$ .

Заметим, что если  $W$  будет броуновским движением относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , то — и относительно *естественной фильтрации*  $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ . Когда говорится о броуновском движении без упоминания фильтрации, то имеется в виду естественная фильтрация.

Пусть  $\mathcal{N}$  — класс событий нулевой вероятности (полного) вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Без потери общности будем считать, что в определении 7 каждая  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}_t$  ( $t \geq 0$ ) содержит все события из  $\mathcal{N}$ .

**Теорема 13** (Скорород; см. [71]). *Пусть  $X_1, X_2, \dots$  — последовательность центрированных независимых случайных величин, определенных на некотором вероятностном пространстве. Тогда существует такое вероятностное пространство, на котором найдутся последовательность случайных величин  $\{T_k\}_{k \geq 1}$  и броуновское движение  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  такие, что*

$$\{X_k, k \in \mathbb{N}\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{W(T_k) - W(T_{k-1}), k \in \mathbb{N}\}, \quad (78)$$

где неотрицательные величины  $T_k - T_{k-1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  ( $T_0 \equiv 0$ ), независимы. Если  $\mathbb{E} X_k^2 < \infty$ , то в дополнение к указанным свойствам последовательности  $\{T_k\}_{k \geq 1}$  можно обеспечить соотношение  $\mathbb{E}(T_k - T_{k-1}) = \mathbb{E} X_k^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\{(Y_n, Z_n)\}_{n \geq 1}$  — последовательность независимых случайных векторов со значениями в  $\mathbb{R}^2$ , причем  $\{(Y_n, Z_n)\}_{n \geq 1} \perp W$ , где  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  — броуновское движение (относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ ). Легко построить вероятностное пространство и задать на нем все указанные случайные элементы. Для  $t \geq 0$  положим  $\mathcal{H}_t = \sigma\{\mathcal{F}_t^W, \{(Y_n, Z_n)\}_{n \geq 1}\}$ , т. е. рассмотрим  $\sigma$ -алгебру, порожденную величинами  $W(s)$  при  $s \in [0, t]$  и  $(Y_n, Z_n)_{n \geq 1}$ . Будем считать ее расширенной классом  $\mathcal{N}$  нулевых событий. Воспользуемся следующим упражнением.

**21.** Покажите, что  $W$  — броуновское движение относительно введенной фильтрации  $(\mathcal{H}_t)_{t \geq 0}$ .

Продолжим доказательство теоремы 13. Пусть при каждом  $n \in \mathbb{N}$  распределение вектора  $(Y_n, Z_n)$  строится по распределению величины  $X_n$  так, как это делалось для  $(Y, Z)$  и  $X$  в формуле (64).

Определим теперь последовательность случайных величин  $0 = T_0 \leq T_1 \leq \dots$ , положив

$$T_n = \inf\{t \geq T_{n-1} : W(t) - W(T_{n-1}) \in \{Y_n, Z_n\}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Нетрудно проверить, что  $T_n$  — конечные п. н. марковские моменты относительно фильтрации  $(\mathcal{H}_t)_{t \geq 0}$ . Небольшая модификация строго марковского свойства броуновского движения (теорема 4) показывает, что при каждом  $n = 0, 1, \dots$  процесс  $B^{(n)} = \{B_t^{(n)} = W(T_n + t) - W(T_n), t \geq 0\}$  есть броуновское движение, не зависящее от  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{H}_{T_n}$ . Кроме того,  $\mathcal{A}_n := \sigma\{T_k, W(T_k); k \leq n\} \subset \mathcal{H}_{T_n}$ . Поэтому  $B^{(n)} \perp \mathcal{A}_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Теперь заметим, что  $(Y_{n+1}, Z_{n+1}) \perp \sigma\{\sigma\{B^{(n)}\}, \mathcal{A}_n\}$ . Следовательно,  $((Y_{n+1}, Z_{n+1}), B^{(n)}) \perp \mathcal{A}_n$ . Отсюда заключаем, что независимы в совокупности пары величин  $(T_{n+1} - T_n, W(T_{n+1}) - W(T_n))$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Согласно

теореме 12 и в силу построения величин  $(Y_n, Z_n)$  распределение  $W(T_{n+1}) - W(T_n)$  совпадает с распределением  $X_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).  $\square$

По поводу разных конструкций случайных величин  $T_1, T_2, \dots$ , участвующих в (78) и обладающих некоторыми свойствами “минимальности”, см. [182]. В упомянутой книге строится такое броуновское движение  $W$ , что величины  $T_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), фигурирующие в теореме 13, являются моментами остановки относительно естественной фильтрации  $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ .

Обратимся к дальнейшим обобщениям введенного в главе II броуновского движения.

**Определение 8.** *Фрактальное (или дробное) броуновское движение с показателем  $H \in (0, 1]$*  — это центрированный гауссовский процесс  $B^{(H)} = \{B^{(H)}(t), t \geq 0\}$  с ковариационной функцией

$$R^{(H)}(s, t) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad s, t \geq 0. \quad (79)$$

При  $H = 1/2$  получаем стандартное броуновское движение. Константа  $H$  носит название *параметра Харста*.

**22.** Докажите, что функция, фигурирующая в правой части (79), является ковариационной в том и только том случае, когда  $H \in (0, 1]$ .

**Определение 9.** Процесс  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  называется *процессом со стационарными приращениями*, если для каждого  $n \geq 1$ , любых  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$  и произвольного  $h > 0$

$$\begin{aligned} (X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})) &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} (X(t_2 + h) - X(t_1 + h), \dots, X(t_n + h) - X(t_{n-1} + h)), \end{aligned}$$

где  $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$  означает равенство по распределению.

Из приводимых ниже двух упражнений вытекает, что фрактальное броуновское движение — это процесс со стационарными приращениями.

**23.** Пусть  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  — гауссовский процесс такой, что для всех  $0 \leq s \leq t < \infty$

$$\mathbb{E}(X(t) - X(s)) = (t - s)c, \quad \mathbb{D}(X(t) - X(s)) = f(t - s), \quad (80)$$

где  $c \in \mathbb{R}$ , а функция  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Тогда  $X$  — процесс со стационарными приращениями.

**24.** Покажите, что для фрактального броуновского движения с показателем  $H \in (0, 1]$

$$\mathbb{E}(B^{(H)}(s) - B^{(H)}(t))^2 = |s - t|^{2H}, \quad s, t \geq 0. \quad (81)$$



Пусть  $(T, \rho)$  — метрическое пространство с некоторой фиксированной точкой  $\theta$ .

**Определение 10.** *Броуновской (действительной) функцией Леви* на множестве  $T$  называется действительный гауссовский процесс  $B^L = \{B^L(t), t \in T\}$  с нулевым средним и ковариационной функцией

$$R^L(s, t) = \frac{1}{2}(\rho(s, \theta) + \rho(t, \theta) - \rho(s, t)). \quad (82)$$

Данное определение предполагает, что метрика  $\rho$  такова, что формула (82) задает неотрицательно определенную функцию. Вообще говоря, для произвольной метрики  $\rho$  это может оказаться не выполненным.

**25.** Гауссовская случайная функция  $X = \{X(t), t \in T\}$  является *броуновской функцией Леви* на  $T$  тогда и только тогда, когда  $X(\theta) = 0$  п. н. и

$$\mathbb{E}(X(s) - X(t))^2 = \rho(s, t)$$

(при этом предполагается неотрицательная определенность функции, введенной в (82)).

**Определение 11.** Если  $(T, \|\cdot\|)$  — нормированное пространство (в частности,  $\mathbb{R}^d$  с евклидовой нормой  $|\cdot|$ ), то *броуновским движением Леви* называется гауссовская случайная величина с нулевым средним и ковариационной функцией

$$R(s, t) = \frac{1}{2}(\|s\| + \|t\| - \|s - t\|), \quad s, t \in T. \quad (83)$$

В многомерном случае аналог формулы (79) приводит к определению *случайного поля Леви–Шемберга* как центрированной гауссовской случайной функции  $V^{(H)} = \{V^{(H)}(t), t \in \mathbb{R}_+^d = [0, \infty)^d\}$ ,  $H \in (0, 1]$ , для которой ковариационная функция

$$R^{(H)}(s, t) = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad s, t \in \mathbb{R}_+^d. \quad (84)$$

**Определение 12.** *Случайным полем Винера–Ченцова* называется действительная гауссовская функция  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}_+^d\}$  такая, что

$$\mathbb{E} X(t) = 0 \quad \text{и} \quad \text{cov}(X(s), X(t)) = \prod_{k=1}^d \min\{s_k, t_k\}, \quad (85)$$

где  $t = (t_1, \dots, t_d)$ ,  $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{R}_+^d$ .

Покажем, что такое поле существует.

Пусть  $W_k = \{W_k(t), t \geq 0\}$ ,  $k = 1, \dots, d$ , — независимые броуновские движения. Положим  $Y(t) = W_1(t_1) \cdots W_d(t_d)$  для  $t \in \mathbb{R}_+^d = [0, \infty)^d$ . Тогда

$$\mathbb{E} Y(t) = 0 \quad \text{и} \quad \text{cov}(Y(s), Y(t)) = \prod_{k=1}^d \min\{s_k, t_k\}. \quad (86)$$

Следовательно,  $\prod_{k=1}^d \min\{s_k, t_k\}$  является симметричной неотрицательно определенной функцией и требуемое утверждение о существовании случайного поля Винера–Ченцова следует из теоремы 3 главы II.

Заметим, что  $X(t) = 0$  п. н. для точек  $t$ , лежащих на координатных плоскостях. Случайную функцию  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}_+^d\}$  можно считать индексированной “прямоугольниками”, т. е.  $X(t) = X((0, t])$ , где

$$(0, t] = (0, t_1] \times \cdots \times (0, t_d] \quad \text{для } t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d.$$

Построение броуновского движения, индексированного *множествами*, с помощью функций Хаара проводится в работе [174].

Назовем *приращениями случайного поля*  $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}^d\}$  на классе *прямоугольников* (параллелепипедов)  $B = (a, b] = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$  случайные функции вида

$$X(B) = \sum (-1)^{\|\varepsilon\|} X(\varepsilon_1 a_1 + (1 - \varepsilon_1) b_1, \dots, \varepsilon_d a_d + (1 - \varepsilon_d) b_d), \quad (87)$$

где сумма берется по всем векторам  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$ , имеющим компоненты 0 или 1,

$$\|\varepsilon\| = \sum_{k=1}^d \varepsilon_k.$$

- 26.** Пусть  $X$  – поле Винера–Ченцова. Докажите, что  $\{X(B), B \in \Pi\}$ , где  $\Pi$  — совокупность “прямоугольников”  $B = (a, b] \subset \mathbb{R}_+^d$ , есть *гауссовская* случайная функция. Найдите ее среднее значение и ковариационную функцию. Докажите, что для любого  $n \geq 2$  и непересекающихся прямоугольников  $B_1, \dots, B_n \in \Pi$  величины  $X(B_1), \dots, X(B_n)$  — независимы. Дайте определение поля Винера–Ченцова в терминах величин  $X(B)$ ,  $B \in \Pi$ .

**Определение 13.** *Процессом Орнштейна–Уленбека* с параметрами  $\alpha, \beta > 0$  называется процесс, задаваемый формулой

$$V_t = e^{-\beta t} W(\alpha e^{2\beta t}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (88)$$

где  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  — некоторое стандартное броуновское движение.

- 27.** Докажите, что  $V = \{V_t, t \in \mathbb{R}\}$  — гауссовский процесс и найдите его ковариационную функцию.

Со многими свойствами броуновского движения (и более общих процессов) можно ознакомиться, например, по книгам [31, 43, 48, 81, 182].

## Глава IV

### Мартингалы.

#### Дискретное и непрерывное время

Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Примеры. Разложение Дуба. Компенсаторы. Дискретный вариант формулы Танака. Расширение фильтрации. Квадратическая характеристика. Квадратическая вариация. Теорема Дуба о свободном выборе. Применение к случайным блужданиям (задача о разорении). Максимальное и минимальное неравенство Дуба для субмартингалов. Лемма о числе пересечений. Теорема о сходимости субмартингалов. Ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона. Сходимость мартингалов в  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Теорема Леви. Фундаментальная теорема страховой математики. Некоторые неравенства для субмартингалов и мартингалов с непрерывным временем.

§ 1. Цель данной главы — дать изложение ряда фундаментальных результатов *теории мартингалов*, имеющей разнообразные приложения. При первом чтении главы IV желательно ознакомиться с определениями из § 1 и примерами из § 2. Строе-ние субмартингалов с дискретным временем выявляет разложение Дуба (§ 5). Простое применение этого разложения дает § 6. Мотивы расширения фильтрации классом нулевых событий раскрывает § 7. Важные результаты о сохранении свойств мартингалов (субмартингалов) при случайной замене времени содержит § 9, их иллюстрирует классическая задача о разорении (§ 11). Мартингаловыми методами (с использованием леммы из § 18) в § 19 доказывается фундаментальная теорема страховой математики. К остальным результатам этой главы можно вернуться при повторном чтении.

Прежде всего напомним, что условное математическое ожидание  $E(\xi | \mathcal{A})$  действительной случайной величины  $\xi$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$  определяется как такая функция  $\zeta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , что

- 1) является  $\mathcal{A} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримой;
- 2) для каждого  $C \in \mathcal{A}$  математические ожидания  $E\zeta 1_C$  и  $E\xi 1_C$  определены и

$$E\zeta 1_C = E\xi 1_C.$$

Из теоремы Радона–Никодима вытекает (см., например, [35; гл. 6, § 5]), что если  $E|\xi| < \infty$ , то такая величина  $\zeta$  существует и определена однозначно с точностью до эквивалентности. (Величины  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  эквивалентны, или стохастически эквивалентны ( $\zeta_1 \sim \zeta_2$ ), если  $P(\zeta_1 = \zeta_2) = 1$ .) В векторном случае, когда

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  и существуют математические ожидания компонент, по определению полагаем

$$\mathbf{E}(\xi | \mathcal{A}) = (\mathbf{E}(\xi_1 | \mathcal{A}), \dots, \mathbf{E}(\xi_n | \mathcal{A})).$$

Отметим, что взятие условного математического ожидания представляет собой обобщение операции *ортогонального проектирования* (см. упражнение 1).

Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  и некоторая *фильтрация*  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , где  $T \subset \mathbb{R}$ , т. е. неубывающее семейство  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_t$ ,  $t \in T$ , таких, что

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \text{при } s \leq t, \quad s, t \in T.$$

**Определение 1.** Процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$ , где  $X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , называется *мартингалом* (относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ ), если выполнены следующие условия:

- 1) случайный процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$  *согласован* с фильтрацией  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , т. е.  $X_t$  является  $\mathcal{F}_t$ -измеримой величиной при каждом  $t \in T$ ;
- 2)  $\mathbf{E}|X_t| < \infty$ ,  $t \in T$ ;
- 3)  $\mathbf{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$  (п. н.),  $s, t \in T$ ,  $s \leq t$ .

Часто, чтобы подчеркнуть роль *согласованности* в данном определении, процесс  $X$  обозначают  $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ .

Если вместо свойства 3) требуется, чтобы  $\mathbf{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$  п. н., то говорят, что процесс  $(X_t)_{t \in T}$  является *субмартингалом*. Замена 3) условием  $\mathbf{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$  п. н. приводит к определению *супермартингала*.

Очевидно, что процесс  $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$  является *супермартингалом тогда и только тогда, когда*  $(-X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$  — *субмартингал*. Это объясняет, почему будет говориться, в основном, только о мартингалах и субмартингалах. Мартингал, разумеется, является одновременно субмартингалом и супермартингалом.

Заметим, что в данном определении условие 3) равносильно тому, что при всех  $s, t \in T$ ,  $s \leq t$ , и любом  $A \in \mathcal{F}_s$  имеет место равенство

$$\int_A X_s d\mathbf{P} = \int_A X_t d\mathbf{P}. \quad (1)$$

Свойство субмартингальности переформулируется аналогично (1) с заменой знака равенства “=” на знак “ $\leq$ ”. Условие 3) влечет, очевидно, соотношение  $\mathbf{E} X_t = \mathbf{E} X_s$  для всех  $s, t \in T$ .

Если  $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$  — мартингал (субмартингал) и имеется фильтрация  $(\mathcal{G}_t)_{t \in T}$  такая, что  $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$ , при этом  $X_t \in \mathcal{G}_t | \mathcal{B}(\mathbb{R})$  при  $t \in T$ , то  $(X_t, \mathcal{G}_t)_{t \in T}$  — также мартингал (субмартингал). Это вытекает (см. [85; т. 1, с. 270–271]) из *телескопического* свойства условного математического ожидания: для  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{F}$  и интегрируемой случайной величины  $\xi$

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi | \mathcal{A}_1) | \mathcal{A}_2) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi | \mathcal{A}_2) | \mathcal{A}_1) = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{A}_1) \quad \text{п. н.} \quad (2)$$

В частности, если в качестве  $(\mathcal{G}_t)_{t \in T}$  взять *естественную фильтрацию*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t, s \in T\}, \quad t \in T,$$

то  $(X_t, \mathcal{F}_t^X)_{t \in T}$  останется мартингалом (субмартингалом). Однако относительно более “бедных” (нежели  $\mathcal{F}_t^X$ )  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{G}_t$  процесс  $(X_t, \mathcal{G}_t)_{t \in T}$  не будет мартингалом, поскольку в силу свойства 1) необходимым образом  $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{G}_t$  для  $t \in T$ .

Когда в пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  явно не указывается фильтрация  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , то обычно процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$  называют мартингалом, подразумевая использование *естественной* фильтрации  $(\mathcal{F}_t^X)_{t \in T}$ . Однако часто фильтрацию  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  указывают сразу непосредственно в записи исходного вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , т. е. пишут  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbf{P})$ , и говорят о *фильтрованном вероятностном пространстве*, или о *стохастическом базисе*. Кроме того, если на одном и том же измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{F})$  приходится иметь дело с семейством  $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}\}$  вероятностных мер  $\mathbf{P}$ , то говорят о *фильтрованном стохастическом эксперименте*  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathcal{P})$ . Если оперируют с конкретной мерой  $\mathbf{P}$  из семейства  $\mathcal{P}$ , то вместо записи “ $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$  — мартингал” иногда отмечают, что “ $(X_t, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})_{t \in T}$  — мартингал”, и пишут, что свойство 3) выполняется  $\mathbf{P}$ -п. н.

Определение мартингала распространяется и на векторные случайные процессы со значениями в  $\mathbb{R}^m$ , при этом требуется, чтобы условия 1), 2) и 3) выполнялись для каждой компоненты.

Для  $T = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$  в условии 3) достаточно рассматривать лишь значения  $t = s + 1$ . Иначе говоря, достаточно (и необходимо) требовать, чтобы

$$\mathbf{E}(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0 \text{ п. н., где } \Delta X_n = X_n - X_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

**Определение 2.** Последовательность  $(\xi_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , где случайные величины  $\xi_n$  — интегрируемы и согласованы с потоком  $\sigma$ -алгебр  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , называется *мартингал-разностью*, если

$$\mathbf{E}(\xi_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0 \text{ п. н., } \quad n \geq 0.$$

Таким образом, свойство (3) показывает, что процесс  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  — мартингал тогда и только тогда, когда  $(\Delta X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — мартингал-разность  $(\Delta X_0 := 0)$ .

§ 2. Приведем ряд примеров.

**Пример 1.** Пусть  $X = \{X_t, t \in T\}$  — процесс в  $\mathbb{R}^m$  с независимыми приращениями, где  $T \subset \mathbb{R}_+$ ,  $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^m)$ , причем  $\mathbf{E} X_t = a \in \mathbb{R}^m$  для всех  $t \in T$ . Тогда  $(X_t)_{t \in T}$  — мартингал (относительно естественной фильтрации).

Действительно, при  $s, t \in T, s \leq t$ , и естественной фильтрации  $(\mathcal{F}_t^X)_{t \in T}$  имеем

$$\mathbf{E}(X_t | \mathcal{F}_s^X) = \mathbf{E}(X_t - X_s + X_s | \mathcal{F}_s^X) = \mathbf{E}(X_t - X_s) + X_s = X_s \text{ п. н.} \quad (4)$$

В частности,  $m$ -мерный винеровский процесс является мартингалом. Процесс  $\{N_t - \mathbf{E} N_t, t \geq 0\}$ , где  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  — пуассоновский процесс, также является мартингалом.

Последовательность  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, n \in \mathbb{N}$ , где  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые векторы в  $\mathbb{R}^m$ , образует мартингал тогда и только тогда, когда  $\mathbf{E} \xi_n = 0, n \in \mathbb{N}$ . Заметим, что  $\sigma\{S_1, \dots, S_n\} = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}, n \in \mathbb{N}$ .

Соотношение (4) показывает, что вместо естественной фильтрации можно было бы взять любую фильтрацию  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , лишь бы  $X_t$  были  $\mathcal{F}_t$ -измеримы,  $X_t - X_s$  не зависели от  $\mathcal{F}_s$  при  $t \geq s$ , и  $\mathbf{E} X_t = a \in \mathbb{R}^m$  для всех  $t \in T$ .

**Пример 2.** Пусть  $\zeta_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , — независимые действительные величины и  $E\zeta_n = 1$  при всех  $n$ . Положим  $X_n = \prod_{k=1}^n \zeta_k$ ,  $\mathcal{F}_n = \sigma\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда, очевидно,  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — мартингал.

**Определение 3.** Пусть вероятностные меры  $P$  и  $Q$  заданы на некотором фильтрованном измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$  (т. е. измеримом пространстве, снабженном фильтрацией). Говорят, что мера  $Q$  *локально абсолютно непрерывна* относительно меры  $P$  (обозначение:  $Q \stackrel{\text{loc}}{\ll} P$ ), если при каждом  $t \in T$  сужение  $Q_t = Q|_{\mathcal{F}_t}$  меры  $Q$  на  $\mathcal{F}_t$  абсолютно непрерывно (см. §14 главы I) относительно сужения  $P_t = P|_{\mathcal{F}_t}$  меры  $P$  на  $\mathcal{F}_t$ .

**Пример 3.** Пусть  $Q \stackrel{\text{loc}}{\ll} P$  и  $g_t = dQ_t/dP_t$ ,  $t \in T$ . Тогда процесс  $(g_t, \mathcal{F}_t, P)_{t \in T}$  является *мартингалом*.

Действительно, для  $s \leq t$  и  $B \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  видим, что в силу  $\mathcal{F}_s$ -измеримости  $g_s$  (и, соответственно,  $\mathcal{F}_t$ -измеримости  $g_t$ )

$$\int_B g_s dP = \int_B g_s dP_s = Q_s(B) = Q(B) = Q_t(B) = \int_B g_t dP_t = \int_B g_t dP,$$

что и доказывает требуемое утверждение (см. (1)).

**Пример 4** (мартингальное преобразование). Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, P)$  — фильтрованное вероятностное пространство,  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  и  $M = (M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — мартингал. Процесс  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , полученный из  $M$  по формуле

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n \varphi_k \Delta M_k, \quad n \geq 1, \quad (5)$$

где  $\varphi = (\varphi_n, \mathcal{F}_{n-1})_{n \geq 1}$  — *предсказуемая* последовательность, т. е.  $\varphi_n$  являются  $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримыми, причем (для простоты)  $|\varphi_n| \leq C = \text{const}$ , носит название *мартингального преобразования*.

Процессы подобного типа часто используют при описании эволюции капитала в моделях азартных игр (см. подробнее [85; т. 1, с. 653]). Заметим, что если  $\varphi_n \geq 0$  и  $M$  — субмартингал (супермартингал), то таковым же будет и процесс  $X$ .

Выражения  $\sum_{k=1}^n \varphi_k \Delta M_k$  с предсказуемыми  $\varphi = (\varphi_k)_{k \geq 1}$  иногда называют “дискретными стохастическими интегралами функции  $\varphi$  по процессу  $M$ ”. Они возникают естественным образом при определении понятия “стохастического интеграла  $\int_0^t \varphi_s dM_s$ ” (см. далее главу VIII).

**Пример 5.** Пусть  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  — некоторая фильтрация и  $\xi$  — интегрируемая случайная величина. Положим  $X_t = E(\xi | \mathcal{F}_t)$ ,  $t \in T$ . Из “телескопического” свойства (2) вытекает, что  $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$  — мартингал. Этот процесс называют *мартингалом Леви*.

**§ 3.** Пусть  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$  — действительный процесс с независимыми приращениями такой, что при некотором  $\alpha \in \mathbb{R}$  и всех  $s, t \geq 0$

$$E e^{\alpha Y_t} < \infty, \quad E e^{\alpha(Y_t - Y_s)} < \infty. \quad (6)$$

Рассмотрим

$$Z_t = \frac{e^{\alpha Y_t}}{\mathbb{E} e^{\alpha Y_t}}, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Ясно, что если  $\mathcal{F}_t = \sigma\{Y_s, s \leq t\}$ , то

$$\mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}\left(\frac{e^{\alpha Y_t}}{\mathbb{E} e^{\alpha Y_t}} \middle| \mathcal{F}_s\right) = \frac{e^{\alpha Y_s}}{\mathbb{E} e^{\alpha Y_t}} \cdot \mathbb{E} e^{\alpha(Y_t - Y_s)}. \quad (8)$$

Отсюда понятно, что  $\mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_s) = Z_s$  при  $s \leq t$  в том и только том случае, когда

$$\mathbb{E}\left(\frac{e^{\alpha Y_t}}{e^{\alpha Y_s}}\right) = \frac{\mathbb{E} e^{\alpha Y_t}}{\mathbb{E} e^{\alpha Y_s}}. \quad (9)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$  — действительный процесс с независимыми приращениями, удовлетворяющий условию (6). Тогда процесс  $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ , где  $Z_t$  определено в (7), является мартингалом тогда и только тогда, когда справедливо соотношение (9).

§ 4. Широкою возможностью строить примеры субмартингалов предоставляет

**Лемма 2.** Пусть  $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$  — мартингал,  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция и величина  $Y_t = h(X_t)$  интегрируема при каждом  $t \in T$ . Тогда  $(Y_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$  — субмартингал. Если функция  $h$  не убывает, то утверждение леммы сохранился и в случае, когда  $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$  — субмартингал.

**Доказательство.** Неравенство Йенсена для условных математических ожиданий (см. [85; т. 1, с. 297]) дает, что с вероятностью единица при  $s \leq t$  ( $s, t \in T$ )

$$h(X_s) = h(\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s)) \leq \mathbb{E}(h(X_t) | \mathcal{F}_s). \quad (10)$$

Если  $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$  — субмартингал и  $h$  не убывает, то равенство в (10) заменяется на неравенство  $h(X_s) \leq h(\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s))$  п. н. □

§ 5. Следующий результат, называемый *разложением Дуба*, является *ключевым* при использовании *мартингалов* методов для анализа стохастических последовательностей. Соответствующий результат для случая непрерывного времени, называемый *разложением Дуба–Мейера*, приведен в дополнении к главе VIII.

**Теорема 1** (Дуб). Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  задан интегрируемый (при каждом  $n$ ) случайный процесс  $X = \{X_n, n \geq 0\}$ , согласованный с фильтрацией  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ . Тогда существует единственное (п. н.) разложение вида  $X = M + A$  такое, что

$$X_n = M_n + A_n \quad \text{для } n \geq 0,$$

где  $M = (M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — мартингал и  $A = (A_n, \mathcal{F}_{n-1})_{n \geq 0}$  — предсказуемый процесс с  $A_0 \equiv 0$  и  $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$ . В частности, в представлении  $X = M + A$  процесс  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  является субмартингалом тогда и только тогда, когда процесс  $A$  не убывает, т. е.  $\Delta A_n \geq 0$  п. н. при  $n \geq 1$ .

**Доказательство.** Если имеет место указанное представление для  $X$ , то в силу (3)

$$\Delta A_n = \mathbf{E}(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \quad \text{при всех } n \geq 1$$

и, следовательно,

$$A_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(\Delta X_k | \mathcal{F}_{k-1}), \quad n \geq 1, \quad (11)$$

что доказывает п. н. *-единственность* разложения  $X = M + A$  с предсказуемым процессом  $A = (A_n, \mathcal{F}_{n-1})_{n \geq 0}$ , для которого  $A_0 \equiv 0$ .

Пусть теперь  $X$  есть процесс, удовлетворяющий условиям леммы. Определим предсказуемый процесс  $A$  для  $n \geq 1$  формулой (11) и положим  $A_0 \equiv 0$ . Тогда  $M = X - A$  есть мартингал, поскольку условия 1), 2) в определении 1, очевидно, выполнены и

$$\mathbf{E}(\Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbf{E}(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - \Delta A_n = 0 \quad \text{п. н., } n \geq 1. \quad (12)$$

Тем самым, требуемое разложение  $X = M + A$  построено.

Утверждение теоремы, относящееся к субмартингалам, сразу следует из формул (11) и (12).  $\square$

**§ 6.** Покажем, что даже в очень простых случаях разложение Дуба приводит к интересным результатам (как, например, соотношение (19) ниже, которое обычно устанавливается с привлечением комбинаторных методов).

**Пример 6.** Пусть  $S_0 = 0$ ,  $S_n = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$ , где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  — независимые бернуллиевские величины такие, что  $\mathbf{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbf{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . В силу леммы 2 процесс  $X = \{X_n, n \geq 0\}$  с  $X_n = |S_n|$  является субмартингалом (относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  с  $\mathcal{F}_n = \sigma\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  для  $n \geq 1$  и  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ). Найдём его разложение Дуба.

Имеем  $\Delta X_n = |S_n| - |S_{n-1}|$ ,  $n \geq 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta M_n &= \Delta X_n - \Delta A_n = \Delta X_n - \mathbf{E}(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \\ &= |S_n| - \mathbf{E}(|S_n| | \mathcal{F}_{n-1}), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} |S_n| &= |S_{n-1} + \varepsilon_n| = (S_{n-1} + \varepsilon_n) \mathbf{1}\{S_{n-1} > 0\} + \mathbf{1}\{S_{n-1} = 0\} - \\ &\quad - (S_{n-1} + \varepsilon_n) \mathbf{1}\{S_{n-1} < 0\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\mathbf{1}\{B\}$  — индикатор множества  $B$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|S_{n-1} + \varepsilon_n| | \mathcal{F}_{n-1}) &= \\ &= \mathbf{E}((S_{n-1} + \varepsilon_n) \mathbf{1}\{S_{n-1} > 0\} | \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbf{E}(\mathbf{1}\{S_{n-1} = 0\} | \mathcal{F}_{n-1}) - \\ &\quad - \mathbf{E}((S_{n-1} + \varepsilon_n) \mathbf{1}\{S_{n-1} < 0\} | \mathcal{F}_{n-1}) = \\ &= S_{n-1} \mathbf{1}\{S_{n-1} > 0\} + \mathbf{1}\{S_{n-1} = 0\} - S_{n-1} \mathbf{1}\{S_{n-1} < 0\}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (15)$$



здесь мы учли, что  $\mathbf{E}(\varepsilon_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbf{E}\varepsilon_n = 0$ . Из (13)–(15) следует, что

$$M_n = \sum_{k=1}^n (\operatorname{sgn} S_{k-1}) \Delta S_k,$$

где

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Согласно (11)

$$A_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (\mathbf{E}(|S_{k-1} + \varepsilon_k| \mid \mathcal{F}_{k-1}) - |S_{k-1}|).$$

Из (15) видно, что  $\mathbf{E}(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbf{1}_{\{S_{k-1}=0\}}$  для  $k \geq 1$ , поэтому  $A_n = L_n(0)$ , где

$$L_n(0) = \#\{k, 1 \leq k \leq n: S_{k-1} = 0\},$$

т. е.  $L_n(0)$  — это число нулей последовательности  $(S_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ . Таким образом,

$$|S_n| = \sum_{k=1}^n (\operatorname{sgn} S_{k-1}) \Delta S_k + L_n(0), \quad (17)$$

что есть дискретный аналог известной *формулы Танака* для модуля броуновского движения (см., например, [86; т. 2, с. 375]).

Из (17) вытекает, что

$$\mathbf{E} L_n(0) = \mathbf{E} |S_n|. \quad (18)$$

Пользуясь центральной предельной теоремой (о слабой сходимости распределений случайных величин  $S_n/\sqrt{n}$  к стандартному нормальному закону  $N(0, 1)$ ) из (18) находим, что

$$\mathbf{E} L_n(0) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} n \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Общим вопросам теории *слабой сходимости* посвящена следующая глава и дополнение к ней; доказательство (19) отнесено в пример 2 главы V.

§ 7. На используемую фильтрацию, как правило, налагаются некоторые ограничения, что поясняет

**Замечание 1.** В теореме 1 мы требовали, чтобы  $A_0 \equiv 0$  вместо  $A_0 = 0$  п. н., хотя обычно все равенства и неравенства со случайными величинами понимаются выполненными почти наверное. Дело в том, что последняя запись не гарантировала бы, что  $A_1 = \mathbf{E}(\Delta X_1 \mid \mathcal{F}_0) + A_0$  является  $\mathcal{F}_0$ -измеримой величиной. Чтобы избежать подобных неприятностей, всегда предполагают, что исходное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  *полно и фильтрация  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  расширена*, т. е. каждая  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}_t$  содержит класс  $\mathbf{P}$ -нулевых множеств  $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}$  (для простоты рассматриваем одну меру на  $(\Omega, \mathcal{F})$ ).

Следующее предложение показывает, почему переход к расширенной фильтрации не только удобен, но и не снижает общности рассуждений.

**Лемма 3.** Пусть  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$  — мартингал (субмартингал),  $T \subset \mathbb{R}$ . Тогда процесс  $\bar{X} = (X_t, \bar{\mathcal{F}}_t)_{t \in T}$ , где  $\bar{\mathcal{F}}_t = \sigma\{\mathcal{F}_t, \mathcal{N}\}$ ,  $t \in T$ , также является мартингалом (субмартингалом).

**Доказательство.** Очевидно,  $(X_t, \bar{\mathcal{F}}_t)_{t \in T}$  удовлетворяет условиям 1) и 2) определения 1 (учитываем, что  $\mathcal{F}_t \subset \bar{\mathcal{F}}_t$ ,  $t \in T$ ). Выберем  $s \leq t$  ( $s, t \in T$ ) и покажем, что  $\mathbb{E}(X_t | \bar{\mathcal{F}}_s) = X_s$  п. н. Действительно,  $X_s \in \bar{\mathcal{F}}_s | \mathcal{B}(\mathbb{R})$  и для любого  $A \in \bar{\mathcal{F}}_s$  найдутся  $B \in \mathcal{F}_s$  и  $C \in \mathcal{N}$  такие, что  $A = B \cup C$  (при этом в силу полноты  $\mathcal{F}$  можно считать  $B \cap C = \emptyset$ ). Применяя (1), имеем

$$\int_A X_s d\mathbb{P} = \int_B X_s d\mathbb{P} = \int_B X_t d\mathbb{P} = \int_A X_t d\mathbb{P}, \quad (20)$$

где мы воспользовались тем, что если существует  $\mathbb{E} \xi$  и  $\mathbb{P}(C) = 0$ , то  $\mathbb{E} \xi \mathbf{1}_C = 0$ . Для субмартингала второе равенство в (20) заменится на неравенство “ $\leq$ ”. □

§ 8. Введем ряд важных характеристик мартингалов и субмартингалов.

**Определение 4.** Пусть  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — субмартингал. Неубывающая предсказуемая последовательность  $A = (A_n, \mathcal{F}_{n-1})_{n \geq 0}$ , фигурирующая в разложении Дуба ( $A_0 = 0$ ,  $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$ ), называется *компенсатором* процесса  $X$  (“компенсация”, т. е. переход от  $X$  к  $X - A$ , превращает субмартингал в мартингал).

Пусть  $M = (M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — *квадратично интегрируемый мартингал*, т. е.  $\mathbb{E} M_n^2 < \infty$ ,  $n \geq 0$ . Тогда в силу леммы 2 получаем, что  $M^2 = (M_n^2, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — субмартингал. По теореме Дуба  $M_n^2 = m_n + \langle M \rangle_n$ , где  $m = (m_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — мартингал, а  $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_n, \mathcal{F}_{n-1})_{n \geq 0}$  — компенсатор, называемый в рассматриваемом случае *квадратической характеристикой* мартингала  $M$ . Из (11) для  $n \geq 0$  находим, что

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\Delta M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(M_k^2 - M_{k-1}^2 | \mathcal{F}_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}((\Delta M_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}), \end{aligned} \quad (21)$$

где мы воспользовались тем, что  $\mathbb{E}(M_k M_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}) = M_{k-1} \mathbb{E}(M_k | \mathcal{F}_{k-1}) = M_{k-1}^2$  для любого  $k \geq 1$ .

Квадратическую характеристику естественно рассматривать как *аналог дисперсии*. В том случае, когда  $M_0 = 0$  и  $M_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ ,  $n \geq 1$ , где  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — *независимые центрированные* величины с  $\mathbb{E} \xi_k^2 < \infty$  ( $k \geq 1$ ), формула (21) показывает, что  $\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{D} \xi_k = \mathbb{D} M_n$ ,  $k \geq 1$ .

**Определение 5.** *Квадратической вариацией* процесса  $X = \{X_n, n \geq 0\}$  называется процесс  $[X] = ([X]_n)_{n \geq 0}$ , задаваемый формулой

$$[X]_n = \sum_{k=1}^n (\Delta X_k)^2, \quad n \geq 1 \quad \text{и} \quad [X]_0 = 0. \quad (22)$$

§ 9. Обратимся к некоторым весьма полезным результатам относительно сохранения свойства мартингалности (субмартингалности) при случайной замене времени. Для этого нам понадобится еще одно простое свойство условных математических ожиданий (напомним, что совпадение  $\sigma$ -алгебр на некотором событии определялось в § 5 главы III).

**Лемма 4** (свойство локальности условного математического ожидания). Пусть даны  $\sigma$ -подалгебры  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$  и случайные величины  $\xi, \eta \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , причем на некотором событии  $A$  (из  $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ )  $\mathcal{G} = \mathcal{H}$  и  $\xi = \eta$  (п. н. на  $A$ ). Тогда

$$\mathbf{E}(\xi | \mathcal{G}) = \mathbf{E}(\eta | \mathcal{H}) \quad \text{п. н. на } A. \quad (23)$$

**Доказательство.** Функции  $\mathbf{1}_A \mathbf{E}(\xi | \mathcal{G})$  и  $\mathbf{1}_A \mathbf{E}(\eta | \mathcal{H})$  являются  $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ -измеримыми. Следовательно,  $D = A \cap \{\mathbf{E}(\xi | \mathcal{G}) > \mathbf{E}(\eta | \mathcal{H})\} \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ . Далее,

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_D \mathbf{E}(\xi | \mathcal{G})) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_D \xi) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_D \eta) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_D \mathbf{E}(\eta | \mathcal{H})).$$

Если  $\zeta \geq 0$  п. н. и  $\mathbf{E}\zeta = 0$ , то  $\zeta = 0$  п. н. Поэтому  $\mathbf{E}(\xi | \mathcal{G}) \leq \mathbf{E}(\eta | \mathcal{H})$  п. н. на  $A$ . Аналогично устанавливается, что  $\mathbf{E}(\xi | \mathcal{G}) \geq \mathbf{E}(\eta | \mathcal{H})$  на  $A$ .  $\square$

Пусть  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — стохастическая последовательность, т. е. стохастический процесс  $\{X_n, n \geq 0\}$ , согласованный с некоторой фильтрацией  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ . Марковские моменты мы будем рассматривать относительно этой фильтрации. При этом марковский момент  $\tau$  назовем *ограниченным*, если  $\tau \leq k$  п. н. для некоторого натурального  $k$ . Положим  $X_{\tau(\omega)}(\omega) = 0$ , если  $\tau(\omega) = \infty$  ( $\mathbf{P}(\tau = \infty) = 0$  для ограниченных  $\tau$ ).

**Теорема 2** (о свободном выборе или об остановке; Дуб). Пусть стохастическая последовательность  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  такова, что  $\mathbf{E}|X_n| < \infty$ ,  $n \geq 0$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — мартингал (субмартингал);
- 2)  $\mathbf{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = (\geq) X_{\tau \wedge \sigma}$  для любого ограниченного марковского момента  $\tau$  и любого марковского момента  $\sigma$ ;
- 3)  $\mathbf{E}X_\tau = (\geq) \mathbf{E}X_\sigma$  для любых ограниченных марковских моментов  $\tau$  и  $\sigma$  таких, что  $\tau \geq \sigma$  п. н.

В данной формулировке и приводимом ниже доказательстве знак “ $(\geq)$ ” относится к рассмотрению субмартингалов.

**Доказательство.** 1)  $\Rightarrow$  2). Пусть  $\tau \leq k$  п. н., где число  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\mathbf{E}|X_\tau| \leq \sum_{n=0}^k \mathbf{E}|X_n| < \infty$$

и, следовательно, условное математическое ожидание  $\mathbf{E}(X_\tau | \mathcal{A})$  существует для любой  $\sigma$ -подалгебры  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ .

Докажем, что  $\mathbf{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = (\geq) X_\sigma$  на множестве  $\{\tau \geq \sigma\}$ . Достаточно убедиться, что  $\mathbf{E} X_\tau \mathbf{1}_{B \cap \{\tau \geq m\}} = (\geq) \mathbf{E} X_m \mathbf{1}_{B \cap \{\tau \geq m\}}$ , где  $m \geq 0$ ,  $B = A \cap \{\sigma = m\}$  и  $A$  — произвольное событие из  $\mathcal{F}_\sigma$ . Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} X_m \mathbf{1}_{B \cap \{\tau \geq m\}} &= \mathbf{E} X_m \mathbf{1}_{B \cap \{\tau = m\}} + \mathbf{E} X_m \mathbf{1}_{B \cap \{\tau > m\}} \\ &= (\leq) \mathbf{E} X_\tau \mathbf{1}_{B \cap \{\tau = m\}} + \mathbf{E} (\mathbf{E}(X_{m+1} | \mathcal{F}_m) \mathbf{1}_{B \cap \{\tau > m\}}) \\ &= \mathbf{E} X_\tau \mathbf{1}_{B \cap \{\tau = m\}} + \mathbf{E} X_{m+1} \mathbf{1}_{B \cap \{\tau \geq m+1\}} \\ &= (\leq) \cdots = (\leq) \mathbf{E} X_\tau \mathbf{1}_{B \cap \{\tau \geq m\}}. \end{aligned} \quad (24)$$

По лемме 4 на множестве  $\{\tau \leq \sigma\}$ , входящем согласно лемме 1 главы III в  $\mathcal{F}_\sigma$ , получаем, что

$$\mathbf{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = \mathbf{E}(X_{\tau \wedge \sigma} | \mathcal{F}_\sigma) = X_{\tau \wedge \sigma}, \quad (25)$$

где мы воспользовались тем, что  $X_{\tau \wedge \sigma}$  является  $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$ -измеримой величиной, а  $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} \subset \mathcal{F}_\sigma$ . Из (24) и (25) следует утверждение 2).

2)  $\Rightarrow$  3). Очевидно,  $\mathbf{E} X_\tau = (\geq) \mathbf{E} X_{\tau \wedge \sigma} = \mathbf{E} X_\sigma$ , поскольку  $X_{\tau \wedge \sigma} = X_\sigma$  п. н. при  $\tau \geq \sigma$  п. н.

3)  $\Rightarrow$  1). Пусть  $\tau$  и  $\sigma$  — марковские моменты, причем  $\tau \leq k$  п. н., где  $k$  есть некоторое натуральное число. Положим  $\alpha = \tau \wedge \sigma$  и возьмем произвольное  $A \in \mathcal{F}_\alpha$ . Легко видеть, что

$$\alpha_A = \alpha \mathbf{1}_A + \infty \mathbf{1}_{\bar{A}}, \quad \tau_A = \tau \mathbf{1}_A + \infty \mathbf{1}_{\bar{A}}, \quad \beta = \alpha_A \wedge k, \quad \delta = \tau_A \wedge k$$

есть марковские моменты и  $\beta \leq \delta \leq k$  для всех  $\omega \in \Omega$  (считаем  $\infty \cdot 0 = 0$ ,  $\infty \cdot 1 = \infty$ ). Поэтому  $\mathbf{E} X_\delta = (\geq) \mathbf{E} X_\beta$ . Следовательно,

$$\mathbf{E} X_\tau \mathbf{1}_A + \mathbf{E} X_k \mathbf{1}_{\bar{A}} = (\geq) \mathbf{E} X_\alpha \mathbf{1}_A + \mathbf{E} X_k \mathbf{1}_{\bar{A}}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E} X_\tau \mathbf{1}_A = (\geq) \mathbf{E} X_{\tau \wedge \sigma} \mathbf{1}_A.$$

Учитывая, что  $X_{\tau \wedge \sigma}$  является  $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$ -измеримой величиной, а также замечание после формулы (1), приходим к соотношению

$$\mathbf{E}(X_\tau | \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}) = (\geq) X_{\tau \wedge \sigma}. \quad (26)$$

Возьмем  $\tau \equiv n$  и  $\sigma \equiv m$ , где  $0 \leq m \leq n$  ( $m, n \in \mathbb{Z}_+$ ). Тогда  $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} = \mathcal{F}_m$  по лемме 1 главы III, и (16) превращается в утверждение 1).  $\square$

Из доказанной теоремы немедленно вытекает

**Следствие 1.** *Стохастическая последовательность  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  является мартингалом (субмартингалом) тогда и только тогда, когда все величины  $X_n$  интегрируемы и для любой неубывающей последовательности марковских моментов  $\tau_n$ , каждый из которых ограничен (т. е.  $\tau_n \leq \tau_{n+1}$  п. н. для  $n \geq 1$  и  $\tau_n \leq k_n$  п. н. для некоторых натуральных чисел  $k_n$ ), последовательность  $(X_{\tau_n}, \mathcal{F}_{\tau_n})_{n \geq 0}$  есть мартингал (субмартингал).*

**Следствие 2.** Пусть  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — мартингал. Пусть  $\tau$  — момент остановки такой, что  $|X_{\tau \wedge n}| \leq c$  п. н. для некоторой неотрицательной константы  $c$  и всех  $n \geq 0$ . Тогда  $\mathbb{E} X_\tau = \mathbb{E} X_0$ .

Действительно,  $X_{\tau \wedge n} \rightarrow X_\tau$  п. н. при  $n \rightarrow \infty$  (как обычно, полагаем  $X_\tau = 0$  на множестве  $\{\tau = \infty\}$ , имеющем вероятность нуль). По теореме Лебега о мажорируемой сходимости величина  $X_\tau$  интегрируема и  $\mathbb{E} X_{\tau \wedge n} \rightarrow \mathbb{E} X_\tau$  при  $n \rightarrow \infty$ . В силу утверждения 3) теоремы 2 имеем  $\mathbb{E} X_{\tau \wedge n} = \mathbb{E} X_0$ . Отсюда получаем требуемый результат.

§ 10. Наиболее полезным утверждением доказанной теоремы 2 является, конечно, импликация 1)  $\Rightarrow$  2). Приведем некоторые условия, гарантирующие выполнение этой импликации и для неограниченных моментов.

**Следствие 3.** Пусть  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — мартингал (субмартингал),  $\tau$  — момент остановки такой, что

$$\mathbb{E} |X_\tau| < \infty \quad (27)$$

и

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} |X_n| \mathbf{1}_{\{\tau > n\}} = 0. \quad (28)$$

Тогда для любого марковского момента  $\sigma$

$$\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = (\geq) X_{\tau \wedge \sigma}. \quad (29)$$

В частности, если  $\sigma$  — момент остановки такой, что  $\sigma \leq \tau$  (п. н.) и  $\mathbb{E} |X_\sigma| < \infty$ , то

$$\mathbb{E} X_\tau = (\geq) \mathbb{E} X_\sigma. \quad (30)$$

**Доказательство.** По теореме 2 для ограниченных марковских моментов  $\tau_N = \tau \wedge N$  для  $N \geq 1$  имеем

$$\mathbb{E}(X_{\tau \wedge N} | \mathcal{F}_\sigma) = (\geq) X_{\tau \wedge N \wedge \sigma}.$$

Очевидно,  $X_{\tau \wedge N \wedge \sigma} \rightarrow X_{\tau \wedge \sigma}$  п. н. при  $N \rightarrow \infty$ . Поэтому достаточно убедиться, что для некоторой подпоследовательности  $\{n_k\}$ ,  $n_k \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ) справедливо соотношение

$$\mathbb{E}(X_{\tau \wedge n_k} | \mathcal{F}_\sigma) \rightarrow \mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \text{ п. н. при } k \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Условие (28) равносильно тому, что существует последовательность  $\{m_j\}$ ,  $m_j \rightarrow \infty$  ( $j \rightarrow \infty$ ), для которой

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E} |X_{m_j}| \mathbf{1}_{\{\tau > m_j\}} = 0. \quad (32)$$

Тогда в силу (32)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\mathbb{E}(X_{\tau \wedge m_j} | \mathcal{F}_\sigma) - \mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma)| &\leq \\ &\leq \mathbb{E} |X_{\tau \wedge m_j} - X_\tau| \leq \mathbb{E} |X_{m_j}| \mathbf{1}_{\{\tau > m_j\}} + \mathbb{E} |X_\tau| \mathbf{1}_{\{\tau > m_j\}} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (33)$$

при  $j \rightarrow \infty$ , поскольку  $\mathbb{E} |X_\tau| \mathbf{1}_{\{\tau > m_j\}} \rightarrow 0$  ( $j \rightarrow \infty$ ) по теореме Лебега о мажорируемой сходимости ( $\tau < \infty$  п. н., поэтому  $\mathbf{1}_{\{\tau > m_j\}} \rightarrow 0$  п. н. при  $m_j \rightarrow \infty$ ).

Выберем теперь из последовательности  $\{m_j\}$  подпоследовательность  $\{n_k\}$  так, чтобы обеспечить (31) (из последовательности, сходящейся в пространстве  $L^1$  всегда можно выделить подпоследовательность, сходящуюся п. н.).

Интегрируемость  $X_\sigma$  и установленная формула (29) гарантируют справедливость (30).  $\square$

**Лемма 5.** Если семейство случайных величин  $\{X_n, n \geq 0\}$ , образующих субмартингал  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , равномерно интегрируемо, то для любого момента остановки  $\tau$  (т. е. марковского момента со свойством  $P(\tau < \infty) = 1$ ) выполнены условия (27) и (28).

**Доказательство.** Поскольку  $P(\tau > n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то условие (28) следует из леммы 2 в [85; т. 1, с. 236]. Кроме того, равномерная интегрируемость семейства  $\{X_n, n \geq 0\}$  влечет соотношение

$$\sup_n E|X_n| < \infty. \quad (34)$$

Для ограниченных марковских моментов  $\tau_N = \tau \wedge N$ , где  $N \in \mathbb{N}$ , по теореме 2 (пункт 3)) имеем  $E X_{\tau_N} \geq E X_0$ . Поэтому

$$E|X_{\tau_N}| = 2E X_{\tau_N}^+ - E X_{\tau_N} \leq 2E X_{\tau_N}^+ - E X_0. \quad (35)$$

В силу леммы 2 последовательность  $X^+ = (X_n^+, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  является субмартингалом. Снова применяя теорему 2 (пункт 3)), получаем, что  $E X_{\tau_N}^+ \leq E X_N^+ \leq E|X_N|$ .

Заметим, что  $\tau_N(\omega) = \tau(\omega)$  для п. в.  $\omega$  при  $N > \tau(\omega)$ . Следовательно,  $X_{\tau_N} = X_\tau$  п. н. при  $N > \tau(\omega)$ . Учитывая, что  $|X_{\tau_N}| \geq 0$ , и воспользовавшись (34), (35), по лемме Фату (см. [85; т. 1, с. 233]) заключаем, что

$$E|X_\tau| = E \liminf_N |X_{\tau_N}| \leq \liminf_N E|X_{\tau_N}| \leq \sup_N E|X_{\tau_N}| \leq 3 \sup_N E|X_N| < \infty. \quad \square$$

**§ 11.** В качестве иллюстрации изложенных результатов о сохранении свойства мартингалности при случайной замене времени рассмотрим классическую задачу о разорении.

**Пример 7.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные бернуллиевские случайные величины:

$$P(\xi_1 = 1) = p, \quad P(\xi_1 = -1) = q = 1 - p \quad (0 < p < 1).$$

Положим  $S_n = x + \xi_1 + \dots + \xi_n$ , где  $x$  — фиксированное целое число,  $n \geq 1$ . Пользуясь игровой интерпретацией, будем считать, что  $x$  — это начальный капитал некоторого игрока, а  $S_n$  — его капитал в момент времени  $n$ .

Возьмем целые числа  $a$  и  $b$  (“границы”)  $a < b$ , такие, что  $x \in (a, b)$ . Спрашивается, с какой вероятностью случайное блуждание  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  выйдет раньше на границу  $a$ , чем на границу  $b$  (выход на уровень  $a$  интерпретируется как *разорение* игрока, а выход на границу  $b$  — как *выигрыш* игрока).

Пусть

$$\tau_a = \inf\{n \geq 1: S_n = a\}, \quad \tau_b = \inf\{n \geq 1: S_n = b\} \quad \text{и} \quad \tau = \inf\{n \geq 1: S_n \notin (a, b)\}.$$

Величины  $\tau_a, \tau_b, \tau$  — марковские моменты относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ , где  $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ , причем  $\tau$  есть момент остановки согласно упражнению 15 главы II.

Теперь заметим, что  $X_n = (q/p)^{S_n}$ ,  $n \geq 0$ , является мартингалом относительно введенной фильтрации  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  (здесь  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ), поскольку свойства 1) и 2) определения 1, очевидно, выполнены, а для  $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = (q/p)^{S_{n-1}} \mathbb{E}((q/p)^{\xi_n}) = X_{n-1}.$$

При любом  $n \geq 0$  значения величины  $S_{\tau \wedge n}$  лежат между  $a$  и  $b$ . Поэтому  $|X_{\tau \wedge n}| \leq c$  для всех  $n \geq 0$ , где константа  $c = c(a, b, p)$ .

Пользуясь следствием 2, имеем

$$\mathbb{E} X_0 = (q/p)^x = \mathbb{E} X_\tau = (q/p)^a \mathbb{P}(S_\tau = a) + (q/p)^b \mathbb{P}(S_\tau = b).$$

Принимая во внимание, что

$$\mathbb{P}(S_\tau = a) + \mathbb{P}(S_\tau = b) = 1$$

(так как  $\tau < \infty$  п. н.), приходим при  $p \neq q$  к ответу

$$\mathbb{P}(S_\tau = a) = \mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^b}{(q/p)^a - (q/p)^b}.$$

Если  $p = q = 1/2$ , то решение еще проще. Очевидно, можно вместо  $a$  и  $b$  взять  $a - x$  и  $b - x$  и считать тогда начальный капитал нулевым. Первое тождество Вальда (см. теорему 11 главы III) дает для  $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}: S_n \notin (a - x, b - x)\}$

$$\mathbb{E} S_\tau = \mathbb{E} \xi_1 \mathbb{E} \tau = 0.$$

Следовательно,

$$(a - x)\mathbb{P}(S_\tau = a - x) + (b - x)\mathbb{P}(S_\tau = b - x) = 0,$$

откуда с учетом равенства  $\mathbb{P}(S_\tau = a - x) + \mathbb{P}(S_\tau = b - x) = 1$  находим

$$\mathbb{P}(S_\tau = a - x) = (b - x)/(b - a).$$

Таким образом, для блуждания, начинающегося в точке  $x \in \mathbb{Z}$  в момент  $n = 0$ , имеем при  $p = q = 1/2$  и границах  $a < b$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in (a, b)$ ) ответ

$$\mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) = (b - x)/(b - a).$$

§ 12. Теорема 2 оказывается весьма эффективной при установлении ряда важных неравенств для мартингалов и родственных им процессов.

**Теорема 3** (максимальные и минимальные вероятностные неравенства; Дуб). Пусть  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — субмартингал. Тогда для любого  $N \in \mathbb{N}$  и всех  $u > 0$

$$u\mathbb{P}\left(\max_{0 \leq n \leq N} X_n \geq u\right) \leq \mathbb{E} X_N \mathbf{1}\left\{\max_{0 \leq n \leq N} X_n \geq u\right\} \leq \mathbb{E} X_N^+, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} u\mathbb{P}\left(\min_{0 \leq n \leq N} X_n \leq -u\right) &\leq -\mathbb{E} X_0 + \mathbb{E} X_N \mathbf{1}\left\{\min_{0 \leq n \leq N} X_n \leq -u\right\} \leq \\ &\leq -\mathbb{E} X_0 + \mathbb{E} X_N^+. \end{aligned} \quad (37)$$

**Доказательство.** Определим марковский момент  $\tau = \min\{n \geq 0: X_n \geq u\} \wedge N$ . Тогда

$$\mathbb{E} X_N \geq \mathbb{E} X_\tau = \mathbb{E} X_\tau \mathbf{1}_A + \mathbb{E} X_\tau \mathbf{1}_{\bar{A}} \geq uP(A) + \mathbb{E} X_N \mathbf{1}_{\bar{A}},$$

где  $A = \left\{ \max_{0 \leq n \leq N} X_n \geq u \right\}$ . Следовательно,

$$uP(A) \leq \mathbb{E} X_N - \mathbb{E} X_N \mathbf{1}_{\bar{A}} = \mathbb{E} X_N \mathbf{1}_A \leq \mathbb{E} X_N^+.$$

Доказательство (37) проводится аналогично с использованием марковского момента  $\tau = \min\{n \geq 0: X_n \leq -u\} \wedge N$ .  $\square$

Приводимая ниже теорема обобщает классический результат Колмогорова (см., например, [85; т. 2, с. 535]) об оценке сверху вероятности  $P\left(\max_{0 \leq n \leq N} |S_n| > u\right)$  для частичных сумм  $S_n = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$  ( $n \leq N$ ) независимых центрированных случайных величин  $\xi_0, \dots, \xi_N$ , имеющих конечные вторые моменты.

**Теорема 4** (Дуб). Пусть  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — мартингал и  $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$  для некоторого  $p \geq 1$  и любого  $n \geq 0$ . Тогда для всех  $u > 0$  и натуральных  $N$

$$P\left(\max_{0 \leq n \leq N} |X_n| \geq u\right) \leq u^{-p} \mathbb{E}|X_N|^p. \quad (38)$$

**Доказательство.** К субмартингалу  $(|X_n|^p, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  надо применить неравенство (36) и учесть, что  $\left\{ \max_{0 \leq n \leq N} |X_n| \geq u \right\} = \left\{ \max_{0 \leq n \leq N} |X_n|^p \geq u^p \right\}$ .  $\square$

Помимо приведенных “максимальных вероятностных неравенств” (36) и (38) в стохастическом анализе важную роль играют следующие “максимальные  $L^p$ -неравенства”.

**Теорема 5** (максимальные  $L^p$ -неравенства; Дуб). Пусть  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — мартингал или неотрицательный субмартингал. Пусть  $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$ , где  $p \in (1, \infty)$  и  $n \leq N$ . Тогда

$$\left\| \max_{0 \leq n \leq N} |X_n| \right\|_p \leq (p/(p-1)) \|X_N\|_p, \quad (39)$$

где, как обычно,  $\|\xi\|_p = (\mathbb{E}|\xi|^p)^{1/p}$ .

**Доказательство.** Без ограничения общности (учитывая лемму 2) можно считать  $X_n \geq 0$  п.н. для  $n \leq N$ . Положим  $M_N = \max_{0 \leq n \leq N} X_n$ . Применяя последовательно формулу для вычисления момента порядка  $p$  неотрицательной случайной величины (см., например, [85; т. 1, с. 258]), неравенство (36), теорему Фубини и неравенство Гёльдера, находим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_N^p) &= p \int_0^\infty u^{p-1} P(M_N > u) du \leq p \int_0^\infty u^{p-2} \mathbb{E}(X_N \mathbf{1}_{\{M_N \geq u\}}) du = \\ &= p \mathbb{E} \left( X_N \int_0^{M_N} u^{p-2} du \right) = \frac{p}{p-1} \mathbb{E}(X_N M_N^{p-1}) \leq \\ &\leq \frac{p}{p-1} (\mathbb{E} X_N^p)^{1/p} (\mathbb{E} M_N^p)^{(p-1)/p}. \quad \square \end{aligned}$$



Подчеркнем, что максимальные неравенства (39) справедливы для  $1 < p < \infty$ . Случай  $p = 1$  требует специальных рассмотрений (см. упражнение 23).

§ 13. При изучении вопросов *сходимости субмартингалов* (§ 14) нам понадобится оценка числа  $\beta_N(a, b)$  пересечений “снизу вверх” субмартингалом полосы  $(a, b)$  на временном интервале  $[0, N]$ .

Введем необходимые обозначения. Пусть  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — субмартингал и  $(a, b)$  — некоторый интервал,  $a < b$ . Определим *марковские моменты*  $\tau_k$ ,  $k \geq 0$ , положив  $\tau_0 = 0$  и

$$\tau_{2m-1} = \min\{n: n > \tau_{2m-2}, X_n \leq a\}, \quad \tau_{2m} = \min\{n: n > \tau_{2m-1}, X_n \geq b\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Как обычно, считаем  $\tau_k$  и  $\tau_j$ ,  $j > k$ , равными бесконечности, если соответствующее множество в фигурных скобках пусто.

Пусть

$$\beta_N(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau_2 > N, \\ \max\{m: \tau_{2m} \leq N\}, & \text{если } \tau_2 \leq N. \end{cases}$$

По своему смыслу эта величина есть, как нетрудно видеть, “число пересечений” (в смысле, вполне ясном из рис. 13) процессом  $X$  снизу вверх полосы  $(a, b)$  за время от 0 до  $N$ .

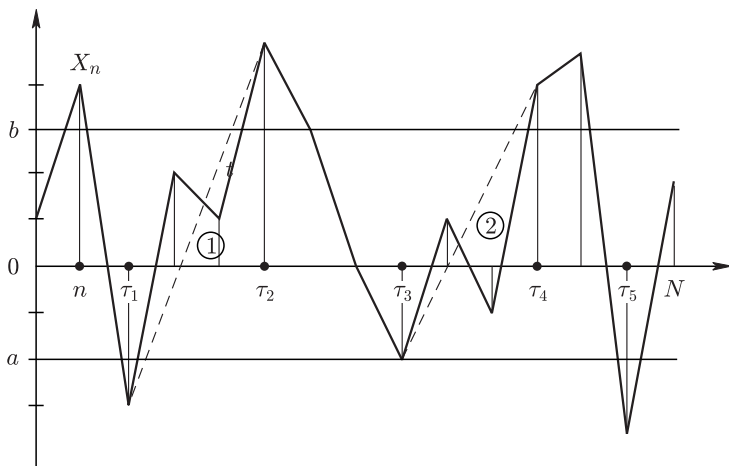


Рис. 13

**Лемма 6** (о числе пересечений; Дуб). Пусть  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — субмартингал и даны числа  $a, b$  ( $a < b$ ). Тогда для среднего числа пересечений справедливы следующие неравенства:

$$\mathbb{E} \beta_N(a, b) \leq \frac{\mathbb{E}(X_N - a)^+}{b - a} \leq \frac{\mathbb{E} X_N^+ + |a|}{b - a}. \quad (40)$$

**Доказательство.** Величина  $\beta_N(a, b)$  для последовательности  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  совпадает с величиной  $\beta_N(0, b - a)$  для последовательности  $((X_n - a)^+, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , поэтому мы будем далее считать, что  $a = 0$  и  $X_n \geq 0, n \geq 0$ .

Положим  $X_0 = 0, \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  и пусть

$$\phi_i = \mathbf{1}\{\tau_m < i \leq \tau_{m+1} \text{ для некоторого нечетного } m\}, \text{ где } i \geq 0.$$

Тогда, очевидным образом,

$$b\beta_N(0, b) \leq \sum_{i=1}^N (X_i - X_{i-1})\phi_i.$$

$$\text{Заметим, что } \{\phi_i = 1\} = \bigcup_{m \text{ — нечетно}} (\{\tau_m < i\} \setminus \{\tau_{m+1} < i\}) \in \mathcal{F}_{i-1}, i \geq 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} b\mathbf{E}\beta_N(0, b) &\leq \sum_{i=1}^N \mathbf{E}[(X_i - X_{i-1})\phi_i] = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}[\phi_i(\mathbf{E}(X_i | \mathcal{F}_{i-1}) - X_{i-1})] \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_i | \mathcal{F}_{i-1}) - X_{i-1}) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{E}X_i - \mathbf{E}X_{i-1}) = \mathbf{E}X_N, \end{aligned}$$

что доказывает неравенство (40).  $\square$

**§ 14.** Следующий результат о сходимости субмартингалов является естественным аналогом теоремы классического анализа о существовании предела у ограниченной монотонной числовой последовательности.

**Теорема 6 (Дуб).** Пусть  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  — субмартингал такой, что

$$\sup_n \mathbf{E}|X_n| < \infty.$$

Тогда с вероятностью единица существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_\infty,$$

причем  $\mathbf{E}|X_\infty| < \infty$ .

**Доказательство** будем вести от противного. Пусть

$$\underline{X} = \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n, \quad \overline{X} = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n.$$

Допустим, что  $\mathbf{P}(\underline{X} < \overline{X}) > 0$ . Поскольку

$$\{\underline{X} < \overline{X}\} = \bigcup_{a, b \in \mathbb{Q}, a < b} \{\underline{X} < a < b < \overline{X}\},$$

где  $\mathbb{Q}$  — множество рациональных чисел, то для некоторых рациональных  $a < b$

$$\mathbf{P}\{\underline{X} < a < b < \overline{X}\} > 0. \quad (41)$$

В силу леммы 6 для любого натурального  $N$

$$\mathbb{E} \beta_N(a, b) \leq (\mathbb{E} X_N^+ + |a|)/(b - a).$$

Обозначим  $\beta_\infty(a, b) = \lim_{N \rightarrow \infty} \beta_N(a, b)$  (последовательность  $\beta_N(a, b)$  не убывает). Тогда

$$\mathbb{E} \beta_\infty(a, b) \leq \left( \sup_N \mathbb{E} X_N^+ + |a| \right) / (b - a).$$

Теперь заметим, что поскольку для субмартингала  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  справедливы соотношения  $\mathbb{E} X_n^+ \leq \mathbb{E} |X_n| = 2\mathbb{E} X_n^+ - \mathbb{E} X_n \leq 2\mathbb{E} X_n^+ - \mathbb{E} X_1$ , то

$$\sup_n \mathbb{E} X_n^+ < \infty \iff \sup_n \mathbb{E} |X_n| < \infty. \quad (42)$$

Таким образом,  $\mathbb{E} \beta_\infty(a, b) < \infty$  п. н.

Однако по сделанному допущению  $\mathbb{P}(\underline{X} < \overline{X}) > 0$  и, как следствие, для некоторых  $a$  и  $b$ ,  $a < b$ , выполнено свойство (41), которое означает, что на множестве  $\{\omega: \underline{X} < a < b < \overline{X}\}$  число пересечений  $\beta_\infty(a, b)$  равно бесконечности. Поскольку вероятность этого множества положительна, то  $\mathbb{E} \beta_\infty(a, b) = \infty$ . Итак, из предположения  $\sup_n \mathbb{E} |X_n| < \infty$  следует, что  $\mathbb{P}\{\underline{X} < \overline{X}\} = 0$ , то есть  $\mathbb{P}(\underline{X} = \overline{X}) = 1$ . Тем самым, с вероятностью единица существует  $\lim_n X_n (= X_\infty)$ .

Наконец, утверждение  $\mathbb{E} |X_\infty| < \infty$  вытекает из того, что по лемме Фату

$$\mathbb{E} |X_\infty| = \mathbb{E} \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} |X_n| \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} |X_n| \leq \sup_n \mathbb{E} |X_n| < \infty. \quad \square$$

Понятно, что теорема 6 применима и к мартингалам и к супермартингалам (как уже отмечалось, мартингал является субмартингалом, а  $(-X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  — субмартингал, если  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  — супермартингал). Полезно также отметить, что условие  $\sup_n \mathbb{E} |X_n| < \infty$  автоматически выполняется для *неотрицательных супермартингалов*.

**Следствие 4.** Пусть  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  — неотрицательный субмартингал такой, что  $\sup_n \mathbb{E} X_n^p < \infty$  для некоторого  $p \in (1, \infty)$ .

Тогда предел  $X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  существует как с вероятностью единица, так и в смысле сходимости в  $L^p$ .

**Доказательство.** Поскольку  $(X_n^p, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  является субмартингалом (см. лемму 2), то существование с вероятностью единица предела  $X_n^p$ , а значит, и предела  $X_n$  (в силу неотрицательности величин  $X_n$ ,  $n \geq 1$ ) следует из предположения  $\sup_n \mathbb{E} X_n^p < \infty$  и теоремы 6.

Далее, из теоремы 5

$$\mathbb{E} \sup_n X_n^p \leq (p/(p-1))^p \sup_n \mathbb{E} X_n^p < \infty. \quad (43)$$

Поэтому, если  $X_\infty = \lim_n X_n$ , то

$$|X_n - X_\infty|^p \leq 2^{p-1}(X_n^p + X_\infty^p) \leq 2^p \sup_n X_n^p, \quad (44)$$

так что величины  $|X_n - X_\infty|^p$ ,  $n \geq 1$ , мажорируются интегрируемой величиной  $2^p \sup_n X_n^p$ . В силу сходимости с вероятностью единица  $X_n \rightarrow X_\infty$  находим, что по теореме Лебега о мажорируемой сходимости  $\mathbf{E} |X_n - X_\infty|^p \rightarrow 0$ , т. е. имеет место сходимость в смысле  $L^p$  ( $X_n \xrightarrow{L^p} X_\infty$ ).  $\square$

§ 15. Нижеследующий пример иллюстрирует возможность применения теоремы 6 к исследованию асимптотического поведения ветвящихся случайных процессов.

**Пример 8** (ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона). Пусть имеется массив  $\{\xi_k^{(n)}; k, n \geq 1\}$ , состоящий из независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих целые неотрицательные значения, и таких, что  $\mathbf{E} \xi_1^{(1)} = \mu > 0$ . Положим  $S_0 = 1$ ,  $S_1 = \xi_1^{(1)}$  и  $S_n = \sum_{k=1}^{S_{n-1}} \xi_k^{(n)}$  при  $n \geq 2$  ( $\sum_{k=1}^0 \xi_k^{(n)} := 0$ ,  $n \geq 1$ ). Так образованную последовательность  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  принято называть *ветвящимся* случайным процессом, описывающим эволюцию *численности* некоторой популяции, развивающейся следующим образом. В начальный момент  $n = 0$  имеется один представитель популяции, который порождает случайное число  $\xi_1^{(1)}$  потомков, где  $\xi_1^{(1)}$  может принимать значения  $0, 1, 2, \dots$ . Каждый представитель этого поколения порождает, в свою очередь, независимо от других, случайное число потомков, распределение которых такое же, как у  $\xi_1^{(1)}$ . Этот процесс размножения происходит и в последующих поколениях в предположении, разумеется, что еще не произошло вырождение популяции.

Введем величины

$$X_n = S_n / \mu^n, \quad n \geq 1,$$

и покажем, что они образуют мартингал относительно естественной фильтрации  $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, \dots, X_n\}$ ,  $n \geq 0$ .

В силу независимости величин  $\{\xi_k^{(n)}, k \geq 1\}$  от “истории”  $(S_0, S_1, \dots, S_{n-1})$  находим,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mu^{-n} \mathbf{E} \left( \sum_{k=1}^{S_{n-1}} \xi_k^{(n)} \mid X_0, \dots, X_{n-1} \right) = \\ &= \mu^{-n} \mathbf{E} \left( \sum_{k=1}^{S_{n-1}} \xi_k^{(n)} \mid S_0, \dots, S_{n-1} \right) = \\ &= \mu^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E} \left( \mathbf{1}_{\{S_{n-1}=j\}} \sum_{k=1}^j \xi_k^{(n)} \mid S_0, \dots, S_{n-1} \right) = \\ &= \mu^{-n} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_{n-1}=j\}} \sum_{k=1}^j \mathbf{E}(\xi_k^{(n)} | S_0, \dots, S_{n-1}) = \\ &= \mu^{-n+1} \sum_{j=1}^{\infty} j \mathbf{1}_{\{S_{n-1}=j\}} = S_{n-1} / \mu^{n-1} = X_{n-1}, \end{aligned}$$

что и доказывает требуемое свойство мартингалльности.

Нетрудно видеть, что

$$\sup_n \mathbf{E} |X_n| = \sup_n \mathbf{E} X_n = 1.$$

Поэтому по теореме 6 получаем, что  $X_n \rightarrow X_\infty$  п. н. при  $n \rightarrow \infty$  и  $\mathbf{E} X_\infty < \infty$ . Отсюда вытекает, что если  $\mu < 1$ , то  $S_n \rightarrow 0$  п. н. при  $n \rightarrow \infty$ .

Иначе говоря, при  $\mu < 1$  с вероятностью единица популяция вырождается.

Методом производящих функций (см., например, [68; § 36]) доказывается, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_n = 0) = 1 \quad \text{при} \quad \mu = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_n = 0) < 1 \quad \text{при} \quad \mu > 1.$$

Ветвящимся процессам посвящены, например, монографии [67, 139]. В качестве введения в эту обширную область можно прочесть § 4 в [61].

§ 16. Следствие 4 является одним из результатов о  $L^p$ -сходимости (неотрицательных субмартингалов и, в частности, мартингалов) при  $p > 1$ . В следующей теореме для мартингалов будет рассмотрен и случай  $p = 1$ .

**Теорема 7.** Пусть  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  — мартингал. Приводимые ниже условия эквивалентны:

- 1)  $X_n = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_n)$ ,  $n \geq 1$ , где  $\xi$  — некоторая интегрируемая случайная величина;
- 2) семейство  $\{X_n, n \geq 1\}$  равномерно интегрируемо;
- 3) существует интегрируемая случайная величина  $X_\infty$  такая, что имеет место сходимость в  $L^1$ :

$$\mathbf{E} |X_\infty - X_n| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty;$$

- 4)  $\sup_n \mathbf{E} |X_n| < \infty$  и  $X_k = \mathbf{E}(X_\infty | \mathcal{F}_k)$  с  $X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  (предел существует п. н. и интегрируем в силу теоремы 6),  $k \geq 1$ .

**Доказательство.** 1)  $\Rightarrow$  2). Для  $n \geq 1$  и любых  $a > 0, b > 0$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |X_n| \mathbf{1}\{|X_n| > a\} &\leq \mathbf{E} |\xi| \mathbf{1}\{|X_n| > a\} = \\ &= \mathbf{E} |\xi| \mathbf{1}\{|X_n| > a, |\xi| \leq b\} + \mathbf{E} |\xi| \mathbf{1}\{|X_n| > a, |\xi| > b\} \leq \\ &\leq b \mathbf{P}(|X_n| > a) + \mathbf{E} |\xi| \mathbf{1}\{|\xi| > b\} \leq \\ &\leq \frac{b}{a} \mathbf{E} |X_n| + \mathbf{E} |\xi| \mathbf{1}\{|\xi| > b\} \leq \\ &\leq \frac{b}{a} \mathbf{E} |\xi| + \mathbf{E} |\xi| \mathbf{1}\{|\xi| > b\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_n \mathbf{E} |X_n| \mathbf{1}\{|X_n| > a\} \leq \mathbf{E} |\xi| \mathbf{1}\{|\xi| > b\}.$$

Заметим, что  $b > 0$  выбиралось произвольным образом и можно перейти к пределу  $b \rightarrow \infty$ . Тогда в силу того, что  $\mathbf{E} |\xi| < \infty$ , правая часть в предыдущем неравенстве стремится к нулю, что и доказывает свойство 2).

2)  $\Rightarrow$  3). Из равномерной интегрируемости семейства  $\{X_n, n \geq 1\}$  получаем, что  $\sup_n \mathbf{E} |X_n| < \infty$ . По теореме 6 п. н. существует  $X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ . Вновь используя

равномерную интегрируемость семейства  $\{X_n, n \geq 1\}$ , находим (см. (III.51)), что  $E|X_n - X_\infty| \rightarrow 0$ , т. е. имеет место сходимость в  $L^1$ .

3)  $\Rightarrow$  4). Из условия 3) следует, что  $\sup_n E|X_n| < \infty$ . Поэтому опять же по теореме 6 п. н. существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = Y$ , причем  $E|Y| < \infty$ . Условие 3) показывает, что очевидным образом  $Y = X_\infty$  п. н., где  $X_\infty$  — случайная величина, входящая в условие 3). Осталось лишь проверить, что  $X_k = E(X_\infty | \mathcal{F}_k)$ ,  $k \geq 1$ .

Для любых  $n \geq 1, k \geq 1$  имеем

$$E|E(X_n | \mathcal{F}_k) - E(X_\infty | \mathcal{F}_k)| \leq E|X_n - X_\infty|.$$

Поскольку  $E|X_n - X_\infty| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , и  $E(X_n | \mathcal{F}_k) = X_k$  (п. н.) при  $n \geq k$ , то  $X_k = E(X_\infty | \mathcal{F}_k)$  (п. н.),  $k \geq 1$ .

4)  $\Rightarrow$  1). Эта импликация очевидна.  $\square$

Теорема 7 дает возможность построить простой пример неравномерно интегрируемого мартингала.

**Пример 9.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные величины,  $P(\xi_1 = 0) = P(\xi_1 = 2) = 1/2$ . Положим

$$X_n = \prod_{k=1}^n \xi_k, \quad n \geq 1.$$

Последовательность  $X = \{X_n, n \geq 1\}$  является неравномерно интегрируемым мартингалом.

Действительно,  $X$  — мартингал, поскольку это частный случай примера 2. Заметим, что  $\{X_n = 0\} \subset \{X_{n+1} = 0\}$ ,  $P(X_n \neq 0) = 2^{-n}, n \geq 1$ , и, следовательно,  $X_n \rightarrow 0$  (п. н.) при  $n \rightarrow \infty$ . Если бы семейство  $\{X_n, n \geq 1\}$  было равномерно интегрируемым, то тогда бы в силу импликации 2)  $\Rightarrow$  3) нашли бы, что  $E X_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Но  $E X_n = 1, n \geq 1$ . Тем самым, семейство  $\{X_n, n \geq 1\}$  не является равномерно интегрируемым.

**§ 17.** Предположим, что на (полном) фильтрованном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}, P)$  задана случайная величина  $\xi$  такая, что  $E|\xi| < \infty$ . Эта случайная величина “порождает” равномерно интегрируемый мартингал Леви

$$X = (X_n, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}, P) \text{ с } X_n = E(\xi | \mathcal{F}_n).$$

Согласно теореме 7 с вероятностью единица, а также и в смысле сходимости в  $L^1$ , существует предел  $\lim_n E(\xi | \mathcal{F}_n)$ . Оказывается, этот предел допускает весьма естественное представление. Соответствующий приводимый ниже результат, обычно называемый теоремой Леви, явился одним из самых первых результатов о сходимости мартингалов, полученных еще в тридцатых годах прошлого столетия (В. Jessen (1934), Р. Lévy (1935)), когда, как правило, рассматривались  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_n$ , порожденные некоторыми случайными величинами  $Y_1, \dots, Y_n$ , а в качестве случайной величины  $\xi$  брались индикаторы  $1_B$  множеств  $B \in \mathcal{F}$ .

Пусть  $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$  обозначает наименьшую  $\sigma$ -алгебру, содержащую все  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 8** (П. Леви). *С вероятностью единица*

$$\mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_n) \rightarrow \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_\infty) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (45)$$

*Сходимость в (45) имеет место также и в смысле сходимости в  $L^1$ .*

**Доказательство.** По теореме 7 с вероятностью единица существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_n) = X_\infty,$$

причем

$$\mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(X_\infty | \mathcal{F}_n) \quad \text{для всех } n \geq 1. \quad (46)$$

Покажем, что  $X_\infty = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_\infty)$  п. н. Очевидно,  $X_n = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_n) \in \mathcal{F}_n | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $n \geq 1$ . Поскольку  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_\infty$ , величины  $X_n$  являются  $\mathcal{F}_\infty$ -измеримыми ( $n \geq 1$ ). По лемме 6 главы I  $X_\infty \in \mathcal{F}_\infty | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . В силу леммы 7 главы I найдется  $\mathcal{F}_\infty$ -измеримая случайная величина  $Z_\infty$  такая, что  $Z_\infty = X_\infty$  п. н. Таким образом, достаточно установить, что  $Z_\infty = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_\infty)$  п. н. Для этого надо лишь проверить, что при любом  $A \in \mathcal{F}_\infty$

$$\mathbf{E} Z_\infty \mathbf{1}_A = \mathbf{E} \xi \mathbf{1}_A.$$

Так как  $Z_\infty = X_\infty$  п. н., последнее утверждение равносильно следующему:

$$\mathbf{E} X_\infty \mathbf{1}_A = \mathbf{E} \xi \mathbf{1}_A \quad (47)$$

для каждого  $A \in \mathcal{F}_\infty$ .

Согласно (46) соотношение (47) выполнено для событий  $A$ , входящих в алгебру  $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$  (и, следовательно, образующих  $\pi$ -систему). Легко видеть, что совокупность событий  $A \in \mathcal{F}$ , для которых верно (47), есть  $\lambda$ -система. По теореме о монотонных классах  $\sigma\{\mathcal{A}\}$  содержится в упомянутой  $\lambda$ -системе. Очевидно,  $\sigma\{\mathcal{A}\} = \mathcal{F}_\infty$ , поэтому соотношение (47) справедливо для всех  $A \in \mathcal{F}_\infty$ .  $\square$

**§ 18.** Исследование мартингалов и субмартингалов в случае *непрерывного* времени, как правило, сложнее, чем в случае дискретного времени. Однако ряд результатов переносится (при определенных условиях) на случай непрерывного времени весьма просто.

В силу леммы 3, изучая мартингал или субмартингал  $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , мы будем считать фильтрацию  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  *расширенной*.

**Определение 6.** *Опциональным моментом* (относительно фильтрации  $\mathbb{F}$ ) называется такая функция  $\tau: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ , что

$$\{\omega: \tau(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{для каждого } t \geq 0.$$

**Лемма 7.** Пусть  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — мартингал, имеющий п. н. непрерывные справа траектории. Пусть  $\sigma$  и  $\tau$  — опциональные моменты (относительно фильтрации  $\mathbb{F}$ ) такие, что  $\sigma \leq \tau \leq \text{п. н.}$ , где  $c$  — положительная константа. Тогда

$$\mathbf{E} X_\tau = \mathbf{E} X_\sigma \quad (48)$$

(на множествах  $\{\sigma = \infty\}$  и  $\{\tau = \infty\}$ , имеющих нулевую вероятность, соответственно полагаем  $X_\sigma = 0$  и  $X_\tau = 0$ ).

**Доказательство.** Введем множества  $T_n = 2^{-n}\mathbb{Z}_+ = \{k2^{-n}, k \in \mathbb{Z}_+\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Ясно, что  $(X_u, \mathcal{F}_u)_{u \in T_n}$  — мартингал. Определим  $\tau(n) = 2^{-n}[2^n\tau + 1]$ ,  $\sigma(n) = 2^{-n}[2^n\sigma + 1]$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $[\cdot]$  — целая часть числа. Очевидно,  $\tau(n), \sigma(n) \in T_n$  и  $\tau(n) \downarrow \tau$ ,  $\sigma(n) \downarrow \sigma$  при  $n \rightarrow \infty$  для п.в.  $\omega \in \Omega$ . Кроме того,  $\sigma(n) \leq \tau(n)$  п.н.,  $n \in \mathbb{N}$ . Заметим, что  $\tau(n), \sigma(n)$  — *марковские* моменты относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_u)_{u \in T_n}$ , поскольку для каждого  $k \in \mathbb{Z}_+$  имеем

$$\{\tau(n) \leq k2^{-n}\} = \{\tau < k2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}}$$

(аналогично и для  $\sigma(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ). При всех  $n \in \mathbb{N}$  верна оценка  $\tau(n) \leq c + 1$  п.н. Поэтому в силу теоремы 2 (несущественно, что в этой теореме рассматривалось параметрическое множество  $\mathbb{Z}_+$ , а не  $T_n$ )

$$\mathbb{E}(X_{\tau(n)} | \mathcal{F}_{\sigma(n)}) = X_{\sigma(n)} \quad \text{п.н., } n \in \mathbb{N}. \quad (49)$$

В силу той же теоремы для каждого  $m \in \mathbb{Z}_+$  имеем

$$\mathbb{E}(X_{c(m)} | \mathcal{F}_{\sigma(n)}) = X_{\sigma(n)} \quad \text{п.н. при } n \geq m, \quad (50)$$

где  $c(m) = 2^{-m}[2^m c + 1]$ . Рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 7, показывают, что совокупность величин вида  $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{A}_\alpha)$  равномерно интегрируема для любого семейства  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{F}$ ,  $\alpha \in \Lambda$  ( $\xi$  — интегрируемая случайная величина). Учитывая непрерывность справа траекторий  $X_t$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , а также (вытекающую из (50)) равномерную интегрируемость семейства  $\{X_{\sigma(n)}\}$ , получаем, что  $X_{\sigma(n)} \rightarrow X_\sigma$  п.н. и в  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  при  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом,  $X_\sigma$  — интегрируемая случайная величина. Поскольку  $\mathbb{E}(X_{c(m)} | \mathcal{F}_{\tau(n)}) = X_{\tau(n)}$  п.н. при  $n \geq m$ , аналогичным образом заключаем, что  $X_{\tau(n)} \rightarrow X_\tau$  п.н. и в  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  при  $n \rightarrow \infty$ . По лемме 1 главы III  $\mathcal{F}_{\sigma(n)} \subset \mathcal{F}_{\sigma(m)}$  для  $n \geq m$ . Следовательно, для каждого  $m \in \mathbb{N}$  величина  $X_{\sigma(n)}$  является  $\mathcal{F}_{\sigma(m)}$ -измеримой. В силу леммы 6 главы I видим, что  $X_\sigma$  есть  $\overline{\mathcal{F}}_{\sigma(m)}$ -измеримая величина при любом  $m \in \mathbb{N}$ , а, значит,  $X_\sigma$  является  $\mathcal{G}$ -измеримой величиной, где

$$\mathcal{G} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}_{\sigma(n)}. \quad (51)$$

Докажем, что

$$\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{G}) = X_\sigma \quad \text{п.н.} \quad (52)$$

Для этого нужно лишь установить, что

$$\mathbb{E}X_\tau \mathbf{1}_A = \mathbb{E}X_\sigma \mathbf{1}_A \quad (53)$$

при каждом  $A \in \mathcal{G}$ . Поскольку  $\mathcal{G} \subset \overline{\mathcal{F}}_{\sigma(n)}$  для  $n \in \mathbb{N}$ , из (49) и леммы 7 главы I заключаем, что  $\mathbb{E}X_{\tau(n)} \mathbf{1}_A = \mathbb{E}X_{\sigma(n)} \mathbf{1}_A$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Устремляя  $n$  к бесконечности в обеих частях этого равенства и воспользовавшись доказанной  $L^1$ -сходимостью  $X_{\tau(n)}$  к  $X_\tau$  и  $X_{\sigma(n)}$  к  $X_\sigma$ , приходим к (53). Соотношение (52), очевидно, влечет (48).  $\square$



§ 19. Мартингалльные методы позволяют достаточно просто получить фундаментальный результат (теорема 9) в модели страхования Крамера–Лундберга (пример 3 главы I). Для этого предположим, что

$$\psi(v) = \mathbb{E} e^{v\eta_1} < \infty \quad \text{при } v > 0. \quad (54)$$

Это условие заведомо выполнено для ограниченных величин “выплат”  $\eta_j$ , что является весьма реалистическим. Ясно, что поскольку  $\eta_1 \geq 0$  п. н., то (54) справедливо для  $v \leq 0$ . Вычисления, совершенно аналогичные (II.5), показывают, что при  $0 \leq s < t$  и  $v \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E} e^{-v(Y_t - Y_s)} = e^{(t-s)g(v)}, \quad \text{где } g(v) = \lambda(\psi(v) - 1) - v c. \quad (55)$$

Из (55), принимая во внимание, что  $Y_0 = y_0$ , получаем  $\mathbb{E} e^{-vY_t} = e^{tg(v) - vy_0}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Следовательно, соотношение (9) выполнено, и для каждого  $v \in \mathbb{R}$  процесс

$$Z = \{Z_t = e^{-vY_t - tg(v)}, t \in \mathbb{R}_+\}$$

является мартингалом относительно фильтрации

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{Z_s, 0 \leq s \leq t\} \equiv \sigma\{Y_s, 0 \leq s \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Введем момент “разорения”

$$\tau = \inf\{t > 0: Y_t < 0\} \equiv \inf\{t > 0: Y_t \in (-\infty, 0)\}. \quad (56)$$

Поскольку  $\{Y_t, t \geq 0\}$  имеет п. н. непрерывные справа траектории, а множество  $(-\infty, 0)$  — открытое, аналогично теореме 3 главы III получаем (проверьте в качестве упражнения), что  $\tau$  есть опциональный момент, т. е.  $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$  для любого  $t \in \mathbb{R}_+$ . В силу леммы 7 ( $\sigma = 0 \leq \tau \wedge t \leq t$ ; очевидно, 0 и  $t \wedge \tau$  — ограниченные опциональные моменты) для  $t, v \in \mathbb{R}_+$  имеем с учетом неравенства  $Y_\tau \leq 0$  п. н., что

$$\begin{aligned} e^{-vy_0} &= \mathbb{E} Z_0 = \mathbb{E} Z_{t \wedge \tau} \geq \mathbb{E} \exp\{-vY_{t \wedge \tau} - (t \wedge \tau)g(v)\} \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}} \geq \\ &\geq \mathbb{E} \exp\{-vY_\tau - \tau g(v)\} \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}} \geq \\ &\geq \mathbb{E} e^{-\tau g(v)} \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}} \geq \inf_{0 \leq s \leq t} e^{-sg(v)} \mathbb{P}(\tau \leq t). \end{aligned} \quad (57)$$

Итак, для  $v \geq 0$  и  $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(\tau \leq t) \leq e^{-vy_0} \sup_{0 \leq s \leq t} e^{sg(v)}. \quad (58)$$

Предположим, что

$$c > \lambda a, \quad \text{где } a = \mathbb{E} \eta_1 > 0. \quad (59)$$

Тогда  $g'(v) = \lambda\psi'(v) - c$  и  $g'(0) = \lambda a - c < 0$ . Кроме того,  $g''(v) = \lambda\psi''(v) \geq \lambda\mathbb{E}\eta_1^2$  для  $v \geq 0$ , поскольку  $\psi''(v) = \mathbb{E}\eta_1^2 e^{v\eta_1}$  (условие  $\mathbb{E}\eta_1 > 0$  влечет, что  $\mathbb{E}\eta_1^2 > 0$ ). Следовательно, существует единственное значение  $v_0 > 0$  такое, что  $g(v_0) = 0$ . Выбрав  $v = v_0$ , из (58) получаем  $\mathbb{P}(\tau \leq t) \leq e^{-v_0 y_0}$  при всех  $t \in \mathbb{R}_+$ . Отсюда заключаем, что

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) \leq e^{-v_0 y_0}. \quad (60)$$

Итак, доказан следующий фундаментальный результат математической теории страхования:

**Теорема 9.** Пусть модель Крамера–Лундберга (I.11) описывается пуассоновским процессом (I.10) интенсивности  $\lambda > 0$ ; величины  $\eta_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , удовлетворяют условию (54) и выполнено неравенство (59). Тогда вероятность “разорения”  $P(\tau < \infty)$  оценивается с помощью формулы (60), где  $y_0$  — начальный капитал,  $v_0 > 0$  есть (единственный) корень уравнения  $g(v) = 0$ ,  $v \in \mathbb{R}_+$ , а функция  $g$  введена в (55).

§ 20. Далее нам потребуются также следующие утверждения (ср., например, с (36)). В этом параграфе  $T$  обозначает некоторое положительное число.

**Следствие 5.** Пусть  $(X_s, \mathcal{F}_s)_{0 \leq s \leq T}$  — субмартингал с непрерывными траекториями. Тогда для любого  $c > 0$

$$P\left(\sup_{0 \leq s \leq T} X_s \geq c\right) \leq EX_T^+/c. \quad (61)$$

**Доказательство.** Учитывая непрерывность траекторий  $X_t$ ,  $0 \leq t \leq T$ , имеем

$$\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} X_s > u\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k: 0 \leq k2^{-n} \leq T} \{X_{k2^{-n}} > u\} \cup \{X_T > u\}.$$

Рассуждения, проведенные при доказательстве (36) (вместо  $X_0, \dots, X_N$  рассматриваем  $X_{s_1}, \dots, X_{s_m}$ ,  $s_1 < \dots < s_m$ ), дают неравенство

$$P\left(\bigcup_{n=1}^N \bigcup_{0 \leq k2^{-n} \leq T} \{X_{k2^{-n}} > u\} \cup \{X_T > u\}\right) \leq EX_T^+/u.$$

Требуемое неравенство (61) следует из свойства:  $P\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right) \rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$ ,  $N \rightarrow \infty$ , и предельного перехода по  $u$ .  $\square$

**Следствие 6** (Дуб). Пусть  $(X_t, \mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  — квадратично интегрируемый мартингал (т. е.  $EX_t^2 < \infty$  для  $t \in [0, T]$ ), имеющий п. н. непрерывные траектории. Тогда при всех  $c > 0$

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t| \geq c\right) \leq c^{-2} EX_T^2. \quad (62)$$

**Доказательство** непосредственно следует из неравенства (61) с учетом того, что  $(X_s^2, \mathcal{F}_s)_{s \in [0, T]}$  является субмартингалом.  $\square$

## Дополнения и упражнения

1. Пусть случайная величина  $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ . Обозначим  $\text{Pr}_H$  — оператор ортогонального проектирования на подпространство  $H = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P) \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Покажите, что  $E(\xi | \mathcal{A}) = \text{Pr}_H \xi$ .

Заметим, что поскольку пространство  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  плотно в пространстве  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , оператор  $\text{Pr}_H$  можно продолжить по непрерывности на  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

2. Пусть  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — некоторая фильтрация. Докажите, что  $\tau$  — опциональный момент относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  тогда и только тогда, когда  $\tau$  — марковский момент относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}$ , где  $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$ ,  $t \geq 0$ .

Введем  $\sigma$ -алгебру

$$\mathcal{F}_{\tau+} = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t \text{ при каждом } t \geq 0\}.$$

3. Можно ли утверждать, что в соотношении (51)  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{\sigma+}$ ?
4. Пусть  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  — последовательность интегрируемых случайных величин,  $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ,  $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Докажите, что  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  — мартингал тогда и только тогда, когда

$$E \xi_{n+1} f_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$$

для любой ограниченной борелевской функции  $f_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  и всех  $n \geq 1$ .

Интересно сопоставить это утверждение со следующим просто проверяемым фактом: *действительные случайные величины (необязательно интегрируемые)  $\xi_k$ ,  $k \geq 1$ , независимы тогда и только тогда, когда*

$$\text{cov}(g(\xi_{n+1}), f_n(\xi_1, \dots, \xi_n)) = 0$$

для всех  $n$  и любых ограниченных борелевских функций  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

5. Докажите, что если  $(\xi_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  — последовательность независимых центрированных величин и  $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ,  $n \geq 1$ , то процесс  $(S_{n,m}, \mathcal{F}_n)_{n \geq m}$  вида

$$S_{n,m} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}, \quad n \geq m,$$

является мартингалом с нулевым средним для каждого  $m \geq 1$ .

6. Пусть урна содержит  $a$  белых и  $b$  черных шаров. Из урны последовательно наудачу вынимается один шар, который возвращается обратно с добавлением  $d$  шаров того же цвета, что и у вынутого. Обозначим  $X_n$  ( $n \geq 1$ ) — отношение числа белых шаров к общему числу шаров в урне после  $n$ -го вынимания шара и возвращения его в урну вместе с  $d$  шарами соответствующего цвета ( $X_0 := a/(a+b)$ ). Докажите, что  $X = \{X_n, n \geq 0\}$  — мартингал.

7. Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \text{mes})$ ,  $\text{mes}$  — мера Лебега. Пусть  $\{T_n, n \geq 1\}$  — последовательность измельчающихся разбиений отрезка  $[0, 1]$ , т. е.  $T_n$  состоит из точек  $0 = t_{n,0} < \dots < t_{n,m_n} = 1$  и  $T_n \subset T_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ ,  $m_n \geq 2$ . Введем  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_n$  на  $[0, 1]$ , порожденные множествами  $\Delta_{n,1} = [0, t_{n,0}]$ ,  $\Delta_{n,k} = (t_{n,k-1}, t_{n,k}]$ ,  $2 \leq k \leq m_n$ ,  $n \geq 1$ . Для функции  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  положим

$$X_n(\omega) = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{f(t_{n,k}) - f(t_{n,k-1})}{t_{n,k} - t_{n,k-1}} \mathbf{1}_{\Delta_{n,k}}(\omega), \quad n \geq 1.$$

Докажите, что  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  — мартингал.

8. Пусть в условиях предыдущего упражнения функция  $f$  удовлетворяет условию Липшица, т. е.  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$  для  $x, y \in [0, 1]$  и некоторой константы  $L > 0$ . Пусть разбиения  $T_n$  таковы, что  $\max_{0 \leq k \leq m_n} (t_{n,k} - t_{n,k-1}) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Докажите, что  $\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$  ( $:= \sigma\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ ) =  $\mathcal{B}([0, 1])$  и семейство  $\{X_n, n \geq 1\}$  равномерно интегрируемо. Тогда по теореме 7 величины  $X_n \rightarrow X_{\infty}$  п. н. и в  $L^1$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $X_{\infty} \in \mathcal{B}([0, 1]) \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Следовательно, для любого  $[a, b] \subset [0, 1]$

$$\int_a^b X_n dt = \mathbf{E} X_n \mathbf{1}_{[a,b]} \rightarrow \mathbf{E} X_{\infty} \mathbf{1}_{[a,b]} = \int_a^b X_{\infty} dt, \quad n \rightarrow \infty. \quad (63)$$

Поскольку также  $\int_a^b X_n dt \rightarrow f(b) - f(a)$  при  $n \rightarrow \infty$  (объясните, почему), то вместе с (63) отсюда заключаем, что функция  $f$  является абсолютно непрерывной и ее плотность (по мере Лебега) может быть найдена как предел величин  $X_n$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

9. Пусть  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  — последовательность действительных случайных величин, заданных на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , и пусть  $f_n^0(x_1, \dots, x_n)$  и  $f_n^1(x_1, \dots, x_n)$  — некоторые плотности вероятностей относительно меры Лебега в  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ,  $n \geq 1$ . Рассмотрим *отношение правдоподобия*

$$L_n(\omega) = \frac{f_n^1(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))}{f_n^0(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))}, \quad n \geq 1,$$

считая, что  $f_n^1(z) = 0$ , если  $f_n^0(z) = 0$  (тогда  $L_n(z) := 0$ ),  $z \in \mathbb{R}^n$ . Покажите, что  $(L_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  — мартингал, где  $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$ ,  $n \geq 1$ .

10. Пусть  $T \subset \mathbb{R}_+$  и  $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$  — комплекснозначный мартингал, т. е.  $(\text{Re } X_t, \text{Im } X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$  — мартингал со значениями в  $\mathbb{R}^2$ , каждая компонента которого (по определению) есть мартингал. Тогда  $\mathbf{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$  п. н. для  $s \leq t$ ,  $s, t \in T$  (здесь  $\mathbf{E}(Y + iZ \mid \mathcal{A}) := \mathbf{E}(Y \mid \mathcal{A}) + i\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{A})$  для интегрируемых  $Y, Z$  и  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ ). Пусть  $\mathbf{E}|X_t|^2 < \infty$  для  $t \in T$ . Докажите, что  $X = \{X_t, t \in T\}$  — процесс с *некоррелированными приращениями*, т. е.  $\mathbf{E}(X_t - X_s)(\overline{X_u - X_v}) = 0$  для  $v < u \leq s < t$ ,  $v, u, s, t \in T$ . (Тем самым, квадратично интегрируемые мартингалы занимают промежуточное положение между процессами с независимыми приращениями, имеющими постоянное среднее значение, и процессами с некоррелированными приращениями.)

11. Пусть  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  — последовательность независимых действительных случайных величин. Положим  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ ,  $n \geq 1$ . Мартингалными методами покажите, что следующие утверждения относительно ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$  эквивалентны:

- 1) ряд сходится п. н.,
- 2) ряд сходится по вероятности,
- 3) ряд сходится по распределению.

Заметим, что по закону “0 или 1” Колмогорова (теорема 6 главы III) данный ряд сходится или расходится с вероятностью единицы.

12. Пусть  $Y = \{Y_t, t \in T\}$ ,  $T \subset \mathbb{R}$ , — (комплекснозначный) процесс с *независимыми приращениями* такой, что  $E|Y_t|^2 < \infty$ ,  $t \in T$ . Докажите, что существует неслучайная функция  $h: T \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $X_t = |Y_t|^2 - h(t)$  есть мартингал относительно фильтрации  $\mathcal{F}_t = \sigma\{Y_s, s \leq t, s \in T\} = \sigma\{\operatorname{Re} Y_s, \operatorname{Im} Y_s, s \leq t, s \in T\}$ ,  $t \in T$ , тогда и только тогда, когда

$$E|Y_t - Y_s|^2 = h(t) - h(s), \quad s \leq t, \quad s, t \in T. \quad (64)$$

Пусть  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  — броуновское движение с естественной фильтрацией  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

13. Найдите все  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , для которых процесс

$$X = \{\exp\{\alpha W_t + \beta t\}, t \geq 0\}$$

является мартингалом.

14. Пусть  $\tau$  — момент остановки (относительно фильтрации  $\mathbb{F}$ ). Докажите, что  $(W_{t \wedge \tau}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — мартингал.
15. Для  $\alpha, x \in \mathbb{R}$  и  $t \geq 0$  определим функцию

$$h(\alpha, x, t) = \exp\{\alpha x - \alpha^2 t/2\}.$$

Положим

$$h_k(x, t) = \left. \frac{\partial^k h(\alpha, x, t)}{\partial \alpha^k} \right|_{\alpha=0}, \quad k \geq 1.$$

Докажите, что  $(h_k(W_t, t), \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — мартингал при каждом  $k \geq 1$  (заметим также, что в силу упражнения 13 процесс  $\{h(\alpha, W_t, t), t \geq 0\}$  — мартингал при каждом  $\alpha \in \mathbb{R}$ ). Таким образом, процессы  $W_t$ ,  $W_t^2 - t$ ,  $W_t^3 - 3tW_t$ ,  $W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2, \dots$  — мартингалы ( $t \geq 0$ ).

16. Докажите, что  $E\tau_a^2 = 5a^4/3$  для  $\tau_a = \inf\{t \geq 0: |W_t| = a\}$ ,  $a > 0$ .
17. Пусть  $X_t = \gamma t + \sigma W_t$ ,  $t \geq 0$ , и  $R_a = \inf\{t: X_t = a\}$ . Докажите, что если  $\gamma > 0$ ,  $\sigma \neq 0$  и  $a < 0$ , то

$$P(R_a < \infty) = e^{2\gamma a/\sigma^2}.$$

18. Выполнено ли условие (9), если
- а)  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$  — винеровский процесс,
  - б)  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$  — пуассоновский процесс?
- 19 (см. [12; с. 166]). Пусть  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  —  $m$ -мерное броуновское движение и  $f(x)$  — непрерывная *супергармоническая* функция в  $\mathbb{R}^m$ , т. е.  $f(x)$  для любого  $x \in \mathbb{R}^m$  не меньше интеграла от этой функции по любой сфере с центром в точке  $x$ . Докажите, что процесс  $X = \{X_t = f(W_t), t \geq 0\}$  является *супермартингалом* относительно естественной фильтрации броуновского движения, если  $\mathbb{E}|X_t| < \infty$  при всех  $t \geq 0$ .

В связи с теоремой 6 представляет интерес следующее упражнение.

- 20 (разложение Крикеберга). Мартингал  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  обладает свойством  $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$  тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные мартингалы  $Y = (Y_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  и  $Z = (Z_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  такие, что  $X_n = Y_n - Z_n, n \geq 0$ .
- 21 (разложение Рисса). Пусть  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — равномерно интегрируемый супермартингал. Тогда существует представление вида  $X_n = M_n + R_n$ , где  $M = (M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — равномерно интегрируемый мартингал и  $R = (R_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — *потенциал*, т. е. равномерно интегрируемый неотрицательный супермартингал такой, что  $R_n \rightarrow 0$  п. н. при  $n \rightarrow \infty$ .
22. Пусть  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  — неубывающая выпуклая функция и  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{1 \leq n \leq N}$  — субмартингал. Покажите, что тогда для любых  $u \in \mathbb{R}$  и  $t > 0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq n \leq N} X_n \geq u\right) \leq \mathbb{E}h(tX_N)/h(tu). \quad (65)$$

23. Пусть  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{1 \leq n \leq N}$  — мартингал или неотрицательный субмартингал. Докажите, что

$$\mathbb{E} \max_{1 \leq n \leq N} |X_n| \leq \frac{e}{e-1} (1 + \mathbb{E}|X_N| \log^+ |X_N|), \quad (66)$$

где  $\log^+ x = \log x$  для  $x \geq 1$  и  $\log^+ x = 0$  для  $x < 1$ .

Для сумм *независимых* слагаемых оценка (66) может быть несколько уточнена, как показывает следующий результат.

**Теорема 10** (Дуб). Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_N$  — независимые действительные случайные величины с  $\mathbb{E}\xi_k = 0, k = 1, \dots, N$ . Положим  $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, n = 1, \dots, N$ . Тогда

$$\mathbb{E} \max_{1 \leq n \leq N} |X_n| \leq 8\mathbb{E}|X_N|. \quad (67)$$

Приведем несколько результатов Буркхольдера, Дэвиса и Ганди, обобщающих классические неравенства Хинчина и Марцинкевича–Зигмунда, известные для сумм независимых слагаемых. Подробнее со всеми этими неравенствами можно ознакомиться по обзору [51].

**Теорема 11** (Буркхольдер). Пусть  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  — мартингал с  $X_0 = 0$ . Тогда для каждого  $p > 1$  найдутся константы  $A_p$  и  $B_p$ , не зависящие от  $X$ , такие, что

$$A_p \|\sqrt{[X]_n}\|_p \leq \|X_n\|_p \leq B_p \|\sqrt{[X]_n}\|_p, \quad n \geq 0, \quad (68)$$

где  $[X]_n$  — квадратическая вариация  $X$  (см. (22)). В (68) можно взять

$$A_p = [18p^{3/2}/(p-1)]^{-1}, \quad B_p = 18p^{3/2}(p-1)^{1/2}.$$

Кроме того (в силу теоремы 5), для  $X_n^* = \max_{0 \leq k \leq n} |X_k|$  при  $p > 1$

$$A_p^* \|\sqrt{[X]_n}\|_p \leq \|X_n^*\|_p \leq B_p^* \|\sqrt{[X]_n}\|_p, \quad (69)$$

где  $A_p^* = A_p$ ,  $B_p^* = (p/(p-1))B_p$ . (См., например, [85; т. 2, с. 678])

**24.** Постройте пример (см. [85; т. 2, с. 678]), показывающий, что при  $p = 1$  двойное неравенство (68) не обязательно выполняется.

Однако как показал Б. Дэвис, неравенство (69) остается, тем не менее, справедливым при  $p = 1$  (с некоторыми “универсальными” константами  $A_1^*$ ,  $B_1^*$ , не зависящими от мартингала  $X$ ).

Для моментов более общего вида, чем степенные, справедлива

**Теорема 12** (Буркхольдер–Дэвис–Ганди; см., например, [106; с. 425]). Пусть  $\Phi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  — неубывающая функция, конечная и выпуклая на  $[0, \infty)$ , такая, что

$$\begin{aligned} \Phi(2t) &\leq c \Phi(t) \quad \text{для всех } t > 0 \text{ и некоторого } c > 0, \\ \Phi(0) &= 0, \quad \Phi(\infty-) = \Phi(\infty). \end{aligned}$$

Тогда найдутся константы  $0 < A < B < \infty$ , зависящие только от  $c$ , такие, что для любого мартингала  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$

$$A \mathbb{E} \Phi(S_\infty) \leq \mathbb{E} \Phi(X^*) \leq B \mathbb{E} \Phi(S_\infty),$$

где  $X^* = \sup_n |X_n|$ ,  $S_\infty = \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta X_k)^2 \right)^{1/2}$ ,  $\Delta X_k = X_k - X_{k-1}$ ,  $X_0 = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**25.** Пусть  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  —  $m$ -мерное броуновское движение. Докажите, что  $(\|W_t\|, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — субмартингал (с п. н. непрерывными траекториями), где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^m$ . Используя упражнение 22 (с функцией  $h(x) = e^{tx}$  и подходящим значением  $t > 0$ ), докажите, что для каждого  $s > 0$  и всех  $x > \sqrt{ms}$  справедливо неравенство

$$P\left(\sup_{t \in [0, s]} \|W_t\| \geq x\right) \leq \left(\frac{sd}{ex^2}\right)^{-m/2} e^{-x^2/(2s)}. \quad (70)$$

(Процесс  $(\|W_t\|, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  называется *процессом Бесселя* размерности  $m$ .)

**26** (см. [12; с. 182]). Пусть  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  —  $m$ -мерное броуновское движение, где  $m \geq 3$ . Докажите, что  $\|W_t\| \rightarrow \infty$  п. н. при  $t \rightarrow \infty$ . Докажите, что с вероятностью 1 процесс  $W$  не вернется в точку 0 ни за какое конечное время. Объясните, почему для  $m = 1$  приведенные утверждения неверны. Как выглядит соответствующий результат в случае  $m = 2$ ?

Ряд важных результатов стохастического анализа может быть получен путем сочетания методов теории мартингалов и идеи *обращения времени*.

**Определение 7.** Пусть  $(\mathcal{G}_t)_{t \in T}$  — убывающее семейство  $\sigma$ -алгебр в  $\mathcal{F}$ , т. е.  $\mathcal{G}_s \subset \mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}$  при  $s < t$ ;  $s, t \in T \subset \mathbb{R}$ . Пусть  $X = \{X_t, t \in T\}$  — действительный случайный процесс, согласованный с фильтрацией  $(\mathcal{G}_t)_{t \in T}$ . Процесс  $\overleftarrow{X} = (X_t, \mathcal{G}_t)_{t \in T}$  называется *обращенным мартингалом* (*обращенным субмартингалом*, *обращенным супермартингалом*), если (обращенный) процесс  $(X_u, \mathcal{G}_u)_{u \in U}$  при  $U = -T = \{-t, t \in T\}$  является мартингалом (субмартингалом, супермартингалом).

В частности, стохастическая последовательность  $\overleftarrow{X} = (X_n, \mathcal{G}_n)_{n \geq 0}$  — обращенный мартингал, если  $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{G}_{n+1}) = X_{n+1}$ ,  $n \geq 0$ . Записав в последнем равенстве вместо “=” знак “ $\geq$ ”, получим определение обращенного субмартингала (при “ $\leq$ ” — обращенного супермартингала). Понятие обращенного мартингала распространяется и на процессы со значениями в  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 1$ ).

**27.** Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_N$  — независимые одинаково распределенные векторы в  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 1$ ) с  $\mathbb{E}\|\xi_1\| < \infty$ , где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма. Положим  $X_n = (1/n) \sum_{k=1}^n \xi_k$ ,  $\mathcal{G}_{n,N} = \sigma\{X_n, \dots, X_N\}$ . Докажите, что  $(X_n, \mathcal{G}_{n,N})_{1 \leq n \leq N}$  — обращенный мартингал.

**Определение 8.** Последовательность действительных случайных величин  $(\xi_n)_{n \geq 1}$  называется *перестановочной*, если  $(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_N}) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (\xi_1, \dots, \xi_N)$  для каждого  $N \geq 1$  и любой перестановки  $(i_1, \dots, i_N)$  множества  $\{1, \dots, N\}$ .

Пусть  $m \geq 1$  и  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  есть борелевская функция. Рассмотрим последовательность  $U$ -статистик вида

$$U_{n,m} = (C_n^m)^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} g(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_m}), \quad n \geq m,$$

где  $C_n^m = n!/(m!(n-m)!)$ . Положим  $\mathcal{G}_{n,m} = \sigma\{U_{k,m}, k \geq n\}$ ,  $n \geq m$ .

**28.** Докажите, что для последовательности  $U$ -статистик, введенной выше,  $(U_{n,m}, \mathcal{G}_{n,m})_{n \geq m}$  есть обращенный мартингал.

Следующий результат является аналогом теоремы 6.

**Теорема 13.** Пусть  $(X_n, \mathcal{G}_n)_{n \geq 0}$  — обращенный субмартингал. Тогда п. н. существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_\infty \in [-\infty, \infty)$ . Если, кроме того, существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} X_n = c > -\infty, \quad (71)$$

то  $X_\infty \in (-\infty, \infty)$  и  $X_n \rightarrow X_\infty$  в пространстве  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  при  $n \rightarrow \infty$ . Если  $X_n \geq 0$  п. н. при  $n \geq 0$  и  $\mathbb{E} X_0^p < \infty$  для некоторого  $p \in (1, \infty)$ , то  $X_n \rightarrow X_\infty$  в  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  при  $n \rightarrow \infty$ .



**Доказательство.** Для непустого интервала  $(a, b)$  и  $N \geq 1$  пусть  $\beta_N(a, b)$  обозначает число пересечений “снизу вверх” полосы  $(a, b)$  (см. выше § 13) мартингалом  $(X_N, \mathcal{G}_N), \dots, (X_0, \mathcal{G}_0)$ . Тогда  $\mathbf{E} \beta_N(a, b) \leq \mathbf{E} (X_0 - a)^+ / (b - a)$  по лемме 6. Следовательно,

$$\beta_\infty(a, b) := \lim_{N \rightarrow \infty} \beta_N(a, b) < \infty \text{ п. н.},$$

и так же, как при доказательстве теоремы 6, заключаем, что п. н. существует  $X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ . Теперь заметим, что и  $(X_n^+, \mathcal{G}_n)_{n \geq 0}$  является обращенным субмартингалом. Поэтому

$$\mathbf{E} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} X_n^+ \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} X_n^+ \leq \mathbf{E} X_0^+ < \infty.$$

Отсюда видим, что  $\mathbf{P}(X_\infty = \infty) = 0$ . Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть выполнено условие (71). Поскольку при  $n \geq 0$  выполнено  $\mathbf{E} X_n \geq \mathbf{E} X_{n+1}$  и  $\mathbf{E} X_n^+ \geq \mathbf{E} X_{n+1}^+$ , то

$$\mathbf{E} |X_n| = 2\mathbf{E} X_n^+ - \mathbf{E} X_n \leq 2\mathbf{E} X_n^+ - c \leq 2\mathbf{E} X_0^+ - c, \quad n \geq 0.$$

Поэтому  $\sup_n \mathbf{E} |X_n| = c_0 < \infty$ .

Докажем равномерную интегрируемость семейства  $\{X_n, n \geq 0\}$ . Для произвольного  $\varepsilon > 0$  выберем  $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  так, чтобы  $c - \varepsilon < \mathbf{E} X_n < c + \varepsilon$  при  $n \geq m$ . Тогда для любого  $\alpha > 0$  и  $n \geq m$  (с учетом аналога (1) для субмартингала), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |X_n| \mathbf{1}\{|X_n| \geq \alpha\} &= \mathbf{E} X_n \mathbf{1}\{X_n \geq \alpha\} - \mathbf{E} X_n \mathbf{1}\{X_n \leq -\alpha\} = \\ &= \mathbf{E} X_n \mathbf{1}\{X_n \geq \alpha\} + \mathbf{E} X_n \mathbf{1}\{X_n > -\alpha\} - \mathbf{E} X_n \leq \\ &\leq \mathbf{E} X_m \mathbf{1}\{X_n \geq \alpha\} + \mathbf{E} X_m \mathbf{1}\{X_n > -\alpha\} - c + \varepsilon \leq \\ &\leq \mathbf{E} |X_m| \mathbf{1}\{|X_n| \geq \alpha\} + \mathbf{E} X_m - c + \varepsilon \leq \\ &\leq \mathbf{E} |X_m| \mathbf{1}\{|X_n| \geq \alpha\} + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Для любого  $\gamma > 0$

$$\mathbf{E} |X_m| \mathbf{1}\{|X_n| \geq \alpha\} \leq \mathbf{E} |X_m| \mathbf{1}\{|X_m| \geq \gamma\} + \gamma \mathbf{P}(|X_n| \geq \alpha).$$

В силу неравенства Чебышёва и доказанной оценки  $\sup_n \mathbf{E} |X_n| \leq c_0$  при всех  $n \in \mathbb{N}$  имеем

$$\mathbf{P}(|X_n| \geq \alpha) \leq \alpha^{-1} \mathbf{E} |X_n| \leq c_0 \alpha^{-1}.$$

Выберем  $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$  так, чтобы  $\mathbf{E} |X_m| \mathbf{1}\{|X_m| \geq \gamma\} < \varepsilon$ . Тогда

$$\sup_{n \geq m} \mathbf{E} |X_n| \mathbf{1}\{|X_n| \geq \alpha\} \leq 3\varepsilon + \gamma c_0 \alpha^{-1}.$$

Тем самым равномерная интегрируемость семейства  $\{X_n, n \geq 1\}$  установлена. Следовательно,  $X_n \rightarrow X_\infty$  в  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  при  $n \rightarrow \infty$ . А так как  $X_\infty \in L^1$ , то, очевидно,  $|X_\infty| < \infty$  п. н.

Если  $X_n \geq 0$  п. н. для  $n \geq 0$  и  $\mathbf{E} X_0^p < \infty$  для некоторого  $p \in (1, \infty)$ , то следствие 4, примененное к  $X_N, \dots, X_0$ , дает оценку

$$\mathbf{E} \left( \max_{0 \leq n \leq N} X_n^p \right) \leq (p/(p-1))^p \mathbf{E} (X_0^p).$$

Устремив  $N$  к бесконечности, получаем  $\mathbf{E} \left( \sup_{n \geq 0} X_n^p \right) < \infty$ . Как и при доказательстве следствия 4, имеем  $X_n \rightarrow X_\infty$  в  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Замечание 2.** Условие (71) выполнено для любого обращенного мартингала. Обращенную версию теоремы Леви (теорема 8) содержит упражнение

**29.** Пусть  $E|X| < \infty$  и  $(\mathcal{G}_n)_{n \geq 1}$  — невозрастающая последовательность  $\sigma$ -алгебр в  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Положим  $\mathcal{G}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$E(X | \mathcal{G}_n) \rightarrow E(X | \mathcal{G}_\infty) \text{ п. н. и в } L^1(\Omega, \mathcal{F}, P). \quad (72)$$

Покажем, как закон 0 или 1 Колмогорова (теорема 6 главы III) может быть получен с помощью мартингальной техники.

Пусть  $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$  — последовательность независимых векторов в  $\mathbb{R}^m$ ,

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_k, k \leq n\}, \quad \mathcal{G}_n = \sigma\{\xi_k, k \geq n\}, \quad n \geq 1.$$

Пусть  $A \in \mathcal{G}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ . Тогда, поскольку  $A$  не зависит от  $\mathcal{F}_n$ , то  $E1_A = E(1_A | \mathcal{F}_n)$ .

В силу (45) имеем  $E(1_A | \mathcal{F}_n) \rightarrow E(1_A | \mathcal{F}_\infty)$  п. н. при  $n \rightarrow \infty$ . Но  $\mathcal{G}_\infty \subset \mathcal{F}_\infty$ , поэтому  $A \in \mathcal{F}_\infty$  и, значит,  $E(1_A | \mathcal{F}_\infty) = 1_A$  п. н. Итак, при  $n \rightarrow \infty$

$$P(A) = E1_A = E(1_A | \mathcal{F}_n) \rightarrow E(1_A | \mathcal{F}_\infty) = 1_A \text{ п. н.} \quad (73)$$

Следовательно,  $P(A)$  равно 0 или 1.

Полезное обобщение закона 0 или 1 Колмогорова для независимых одинаково распределенных величин дается в приводимой ниже теореме 14. Для ее формулировки введем следующие понятия.

**Определение 9.** Взаимно-однозначное отображение  $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  называется *конечной перестановкой* (пишем  $\pi \in \Pi(\mathbb{N})$ ), если  $\pi(n) \neq n$  для не более чем конечного числа (зависящего от  $\pi$ ) значений  $n \in \mathbb{N}$ . Для последовательности действительных случайных величин  $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ , заданных на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  (т.е. для случайного элемента  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ ), положим  $\pi\xi = (\xi_{\pi_1}, \xi_{\pi_2}, \dots)$ , где  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$  есть перестановка множества  $\mathbb{N}$ , и определим в  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -алгебру *перестановочных событий*

$$\mathcal{G} = \{\xi^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty): \xi^{-1}(B) = (\pi\xi)^{-1}(B) \text{ для всех } \pi \in \Pi(\mathbb{N})\}.$$

**Теорема 14** (закон 0 или 1; Хьюитт–Сэвидж). Пусть  $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$  — последовательность независимых одинаково распределенных величин. Тогда  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{G}$  перестановочных событий вырождена, т.е. содержит только события вероятности 0 и 1.

Доказательство дано, например, в [85; т. 2, с. 533].

**30** (продолжение упражнения 28). По теореме 14 получаем, что

$$U_{n,m} \rightarrow U_{\infty,m} \text{ п. н. при } n \rightarrow \infty.$$

С помощью теоремы 13 докажите, что если  $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$  — последовательность независимых одинаково распределенных величин, то  $U_{\infty,m} = E g(\xi_1, \dots, \xi_m)$ .

**31.** Пусть  $(X_n, \mathcal{G}_n)_{n \geq 1}$  — обращенный субмартингал, и пусть выполнено условие (71). Докажите, что  $X_\infty \leq \mathbf{E}(X_m | \mathcal{G}_\infty)$ ,  $m \geq 1$ , где  $\mathcal{G}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$  (напомним, что  $X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  существует п. н. и в  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  по теореме 13). Иначе говоря, “замкнутый” процесс  $(X_n, \mathcal{G}_n)_{1 \leq n \leq \infty}$  — обращенный субмартингал. Покажите, что если  $(X_n, \mathcal{G}_n)_{n \geq 1}$  — обращенный мартингал, то  $(X_n, \mathcal{G}_n)_{1 \leq n \leq \infty}$  так же есть обращенный мартингал.

**32.** Можно ли в формулировке теоремы 13 отказаться от условия (71)?

**Теорема 15** (усиленный закон больших чисел; Колмогоров). Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные векторы со значениями в  $\mathbb{R}^m$ , для которых  $\mathbf{E} \xi_1 = a \in \mathbb{R}^m$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$X_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow a \quad \text{п. н. и в } L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}).$$

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что  $a = 0 \in \mathbb{R}^m$ . В силу упражнения 27 обращенным (векторным) мартингалом является процесс

$$(X_n, \mathcal{G}_{n,N})_{1 \leq n \leq N} \quad \text{с} \quad \mathcal{G}_{n,N} = \sigma\{X_n, \dots, X_N\} = \sigma\{S_n, \dots, S_N\},$$

где  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Итак,  $X_n = \mathbf{E}(X_1 | \mathcal{G}_{n,N})$  п. н. для  $n = 1, \dots, N$ . Пользуясь теоремой Леви (применяемой для каждой компоненты) и полагая  $N \rightarrow \infty$ , получаем, что  $X_n = \mathbf{E}(X_1 | \mathcal{G}_n)$  п. н., где  $\mathcal{G}_n = \sigma\{S_k, k \geq n\}$ . Пусть  $\mathcal{G}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ .

Согласно обращенной версии теоремы Леви находим (см. (72)), что при  $n \rightarrow \infty$   $\mathbf{E}(X_1 | \mathcal{G}_n) \rightarrow \mathbf{E}(X_1 | \mathcal{G}_\infty)$  п. н. и в  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . По закону 0 или 1 Колмогорова  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{G}_\infty$  является вырожденной. Следовательно,  $\mathbf{E}(X_1 | \mathcal{G}_\infty) = \mathbf{E} X_1 = 0$ . Но  $X_n = \mathbf{E}(X_1 | \mathcal{G}_n)$  и, значит,  $X_n \rightarrow 0$  п. н. и в  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ .  $\square$

Обобщение теоремы Колмогорова на зависимые слагаемые (в частности, попарно независимые), данное Этемади, можно прочитать, например, в [101; с. 66].

Следующее утверждение содержит в себе одновременно и теорему Леви и теорему о предельном переходе под знаком условного математического ожидания (включая теорему Лебега о мажорируемой сходимости).

**Теорема 16** (Блэквелл и Дубинс). Пусть последовательность действительных случайных величин  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  на  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  такова, что  $X_n \rightarrow X_\infty$  п. н. при  $n \rightarrow \infty$  и  $\mathbf{E} \left( \sup_n |X_n| \right) < \infty$ . Пусть  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  — семейство  $\sigma$ -алгебр в  $\mathcal{F}$ , которые либо возрастают, либо убывают (соответственно,  $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$  или  $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ ). Тогда

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} \mathbf{E}(X_n | \mathcal{F}_k) = \mathbf{E}(X_\infty | \mathcal{F}_\infty) \quad \text{п. н. и в } L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}). \quad (74)$$

**Доказательство.** Обозначим

$$U_m = \sup_{k, n \geq m} \mathbf{E}(X_n | \mathcal{F}_k), \quad V_m = \inf_{k, n \geq m} \mathbf{E}(X_n | \mathcal{F}_k), \quad m \geq 1.$$

Тогда существуют (п.н.)  $U = \lim_{m \rightarrow \infty} U_m$  и  $V = \lim_{m \rightarrow \infty} V_m$  (в силу монотонности последовательностей  $\{U_m\}$  и  $\{V_m\}$ ).

Пусть  $Y_m = \sup_{n \geq m} X_n$ ,  $m \geq 1$ . Заметим, что  $\mathbf{E}|Y_m| \leq \mathbf{E}\left(\sup_n |X_n|\right) < \infty$ ,  $m \geq 1$ .

Следовательно, при каждом  $m \geq 1$  либо по теореме 8, либо по обращенной версии теоремы Леви

$$\mathbf{E}(Y_m | \mathcal{F}_k) \rightarrow \mathbf{E}(Y_m | \mathcal{F}_\infty) \quad \text{п.н. и в } L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (75)$$

Поскольку  $X_n \leq Y_m$  при  $n \geq m$ , то  $\mathbf{E}(X_n | \mathcal{F}_k) \leq \mathbf{E}(Y_m | \mathcal{F}_k)$  п.н. для  $n \geq m$ ,  $k \geq 1$ . Тогда в силу (75) получаем

$$U \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k \geq m} \mathbf{E}(Y_m | \mathcal{F}_k) \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}(Y_m | \mathcal{F}_\infty) \quad \text{п.н.}$$

Из того, что  $Y_m \downarrow X_\infty$ , имеем  $\mathbf{E}(Y_m | \mathcal{F}_\infty) \downarrow \mathbf{E}(X_\infty | \mathcal{F}_\infty)$  п.н. при  $m \rightarrow \infty$ . Таким образом,  $U \leq \mathbf{E}(X_\infty | \mathcal{F}_\infty)$ . Аналогично показывается, что  $V \geq \mathbf{E}(X_\infty | \mathcal{F}_\infty)$ . Поэтому  $U = V$  п.н.

Доказательство  $L^1$ -сходимости в (74) предлагается в качестве упражнения.  $\square$

Существуют разнообразные обобщения теоремы Дуба (теорема 6) о сходимости субмартингалов и мартингалов. Так, если  $M = (M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  — квадратично интегрируемый мартингал с квадратической характеристикой  $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_n, \mathcal{F}_{n-1})_{n \geq 1}$  (см. (21)), то

$$\{\langle M \rangle_\infty < \infty\} \subseteq \{M \rightarrow\},$$

т.е. на множестве  $\{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$ , где  $\langle M \rangle_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle M \rangle_n$ , последовательность  $\{M_n\}_{n \geq 1}$  сходится (п.н.) к конечному пределу. Кроме того,  $M_n = o(f(\langle M \rangle_n))$  при  $n \rightarrow \infty$  для всякой функции  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  такой, что

$$\int_0^\infty (1 + f(t))^{-2} dt < \infty$$

(в частности, для  $f(t) = t^{1/2}(\log^+ t)^\alpha$ , где  $\alpha > 1/2$ ); подробнее см. [101; с. 53].

**33.** Пусть  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — неубывающий поток  $\sigma$ -алгебр (необязательно полных) в полном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Тогда  $\overline{\mathcal{F}}_{t+} = \overline{\mathcal{F}}_{t+}$ , т.е. операции расширения классом  $\mathbf{P}$ -нулевых множеств и замыкания фильтрации по непрерывности справа перестановочны (см. упражнение 2).

**34.** Можно ли утверждать, что для винеровского процесса и его естественной фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  выполнено соотношение  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$  при всех  $t \geq 0$ ?

**Определение 10.** Мартингал (субмартингал)  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  называется удовлетворяющим *обычным условиям*, если фильтрация  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  расширена классом  $\mathbf{P}$ -нулевых множеств и непрерывна справа.

**35.** Пусть  $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — субмартингал (мартингал) имеющий п. н. *непрерывные справа* траектории. Пусть для каждого  $t \in \mathbb{R}_+$  существует  $\delta = \delta(t) > 0$  такое, что

$$\mathbb{E} \left( \sup_{s \in [t, t+\delta]} |X_s| \right) < \infty. \quad (76)$$

Покажите, что тогда  $\bar{X} = (X_t, \bar{\mathcal{F}}_{t+})$  — субмартингал (мартингал) (указание: используйте теорему 16).

Убедитесь, что условие (76) выполнено для винеровского и пуассоновского процессов (напомним, что траектории винеровского процесса п. н. непрерывны, а траектории пуассоновского процесса п. н. непрерывны справа).

В связи с двумя последними упражнениями приведем следующий *фундаментальный* результат о существовании у субмартингалов модификации с “хорошими” траекторными свойствами.

**Теорема 17** (см. [148; с. 16]). Пусть  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — субмартингал и фильтрация  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  удовлетворяет *обычным условиям*.

а) Тогда процесс  $(X_t)_{t \geq 0}$  имеет модификацию  $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$  с траекториями, непрерывными справа, тогда и только тогда, когда функция  $t \mapsto \mathbb{E} X_t$  из  $\mathbb{R}_+$  в  $\mathbb{R}$  непрерывна справа.

б) Если эта непрерывная справа модификация существует, то она может быть выбрана так, что будет иметь в каждой точке  $t \in (0, \infty)$  предел слева и будет согласована с фильтрацией  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . При этом  $\tilde{X} = (\tilde{X}_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  есть субмартингал.

**Замечание 3.** В общей теории случайных процессов обычно сразу предполагается, что фильтрация  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  удовлетворяет *обычным условиям*, а мартингалы (субмартингалы, супермартингалы) имеют траектории из пространства Скорохода  $D = D([0, \infty))$ , т. е. являются непрерывными справа в каждой точке  $t \geq 0$  и имеющими пределы слева в точках  $t > 0$ .

Имеется много различных обобщений понятия мартингала. Пожалуй, наиболее важным является понятие *локального* мартингала (субмартингала, супермартингала).

**Определение 11.** Процесс  $M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  с траекториями из пространства  $D = D([0, \infty))$  есть *локальный мартингал* (локальный субмартингал, локальный супермартингал), если найдется неубывающая последовательность марковских моментов  $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ ,  $\tau_n \uparrow \infty$  (п. н.) такая, что при каждом  $n$  *остановленные* процессы  $M^n = (M_{t \wedge \tau_n}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  являются (обычными) мартингалами (субмартингалами, супермартингалами).

С помощью понятия локальных мартингалов вводится понятие семимартингала, являющегося основным процессом, с которым связано развитие стохастического исчисления (см., например, [46]).

**Определение 12.** Процесс  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  с траекториями из  $D$  называется *семимартингалом*, если этот процесс допускает (вообще говоря, неединственное) представление

$$X = X_0 + M + A,$$

где  $M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — *локальный мартингал* с  $M_0 = 0$ , а  $A = (A_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — процесс с траекториями *ограниченной вариации* (на каждом промежутке  $(0, t]$ ,  $t > 0$ ) с  $A_0 = 0$ .

Упомянем еще такие родственные мартингалам процессы, как демимартингалы (см. [168]), миксингалы ([162]), а также мартингалы с многопараметрическим индексом ([119, 195]). Для дальнейшего чтения о мартингалах и их применениях можно обратиться, например, к книгам [26, 46, 95, 138, 146, 148, 182, 184, 197].

Стохастические модели, основанные на понятии семимартингала, и стохастическое исчисление для них интенсивно используются в *финансовой математике* — одном из бурно развивающихся разделов современной теории случайных процессов. В качестве краткого введения в некоторые разделы финансовой математики рассмотрим одну простую модель финансового рынка для случая дискретного времени.

Пусть на финансовом рынке эволюция безрискового актива  $B$  (банковские счета) и рискованного актива  $S$  (акции) описываются системой разностных уравнений ( $n \geq 1$ )

$$\Delta B_n = r_n B_{n-1}, \quad (77)$$

$$\Delta S_n = \rho_n S_{n-1}, \quad (78)$$

где, как обычно, полагаем  $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ . Кроме того, предположим, что все случайные величины  $B_n, S_n, r_n$  и  $\rho_n$  заданы на фильтрованном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{1 \leq n \leq N}, \mathbf{P})$ , где  $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ ,  $N < \infty$ . Положим для  $n = 1, \dots, N$

$$U_n = \sum_{k=0}^n r_k, \quad V_n = \sum_{k=0}^n \rho_k, \quad (79)$$

где  $\{r_n\}$  и  $\{\rho_n\}$  — стохастические последовательности, т.е.  $\mathcal{F}_n | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримые при каждом (рассматриваемом)  $n$ . Будем предполагать также, что  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  и  $\mathcal{F}_n = \sigma\{S_0, \dots, S_n\}$  при  $n \geq 1$ .

**Определение 13.** Описанная выше модель называется  $(B, S)$ -рынком.

**36.** Докажите, что решения уравнений (77) и (78) записываются в виде (дискретных) *стохастических экспонент*, т.е.

$$B_n = B_0 \mathcal{E}_n(U), \quad S_n = S_0 \mathcal{E}_n(V),$$

где

$$\mathcal{E}_n(X) = \prod_{k=1}^n (1 + \Delta X_k), \quad n \geq 1, \quad \mathcal{E}_0(X) = 1.$$

**Определение 14.** *Инвестиционной стратегией, или портфелем, называется двумерная стохастическая последовательность  $\pi = (\beta_n, \gamma_n)_{0 \leq n \leq N}$  такая, что для всех  $n$*

$$\beta_n \in \mathcal{F}_n \mid \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \gamma_n \in \mathcal{F}_{n-1} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

*Капиталом* портфеля  $\pi$  называется стохастическая последовательность

$$X^\pi = \{X_n^\pi\}, \quad \text{где } X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Величины  $\beta_n$  и  $\gamma_n$  интерпретируются соответственно как количества активов  $B$  и  $S$  в момент времени  $n$ .

**Определение 15.** Класс портфелей  $\pi$ , обладающих при всех  $n = 1, \dots, N$  свойством

$$B_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n = 0,$$

называется *самофинансируемым* и обозначается  $SF$ .

**37.** Проверьте, что капитал самофинансируемого портфеля можно представить в виде

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=0}^n (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k),$$

где  $\Delta B_0 = \Delta S_0 = 0$ .

**Определение 16.** В классе  $SF$  выделим подкласс *арбитражных* портфелей  $SF_{\text{arb}}$  (он может оказаться пустым), который состоит из таких  $\pi$ , что

$$X_0^\pi = 0, \quad X_n^\pi \geq 0 \quad \text{Р-п. н. при } n \leq N$$

и

$$X_N^\pi > 0 \quad \text{с положительной вероятностью.}$$

Таким образом, экономический смысл данного определения состоит в том, что можно получить прибыль, не рискуя. С последним определением тесно связано следующее.

**Определение 17.** Вероятностная мера  $P^*$ , эквивалентная  $P$  (т. е.  $P^* \ll P$  и  $P \ll P^*$ ), называется *мартингальной*, если на введенном фильтрованном пространстве  $\{S_n/B_n\}_{1 \leq n \leq N}$  — мартингал относительно  $P^*$ .

Обозначим  $\mathbb{P}^*$  класс всех мартингальных мер  $P^*$ .

**Теорема 18.** Пусть в модели  $(B, S)$ -рынка случайные величины  $\{r_n\}_{1 \leq n \leq N}$  являются предсказуемыми (т. е.  $r_n \in \mathcal{F}_{n-1} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ) и  $r_n > -1$ . Тогда  $P^* \in \mathbb{P}^*$  эквивалентно тому, что  $\{V_n - U_n\}_{1 \leq n \leq N}$  — мартингал относительно  $P^*$ , где  $U_n$  и  $V_n$  определены согласно (79).

**Теорема 19** (основная теорема финансовой математики). Пусть в модели  $(B, S)$ -рынка  $\{r_n\}_{1 \leq n \leq N}$  — детерминированный набор чисел такой, что  $r_n > -1$  при  $1 \leq n \leq N$ . Тогда

$$P^* \neq \emptyset \iff SF_{\text{arb}} = \emptyset.$$

Важной характеристикой рынка, позволяющей получать точные формулы в различных финансовых расчетах, является его полнота.

**Определение 18.** Говорят, что  $(B, S)$ -рынок *полный*, если для любой функции  $f \in \mathcal{F} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$  найдется стратегия  $\pi \in SF$  такая, что  $X_N^\pi(\omega) = f(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ .

Свойство полноты рынка с математической точки зрения обеспечивает доступность всех фигурирующих на рынке активов и отсутствие ограничений для инвестирования в эти активы.

**Теорема 20** (о полноте  $(B, S)$ -рынка). Пусть  $\mathbb{P}^* \neq \emptyset$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1)  $(B, S)$ -рынок является полным,
- 2)  $\mathbb{P}^*$  содержит единственный элемент  $\mathbb{P}^*$ ,
- 3) любой мартингал  $(M_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0 \leq n \leq N}$  допускает представление

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta m_k, \quad n = 1, \dots, N,$$

где  $\gamma_k \in \mathcal{F}_{k-1} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$  и

$$\Delta m_k = \frac{S_k}{B_k} - \frac{S_{k-1}}{B_{k-1}}.$$

**Замечание 4.** Поскольку  $\Delta m_k = S_{k-1} B_k^{-1}(\rho_k - r_k)$ , для величин  $\{M_n\}$  справедливо эквивалентное представление

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n \tilde{\gamma}_k (\rho_k - r_k), \quad (80)$$

где  $\tilde{\gamma}_k = \gamma_k S_{k-1} B_k^{-1} \in \mathcal{F}_{k-1} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Нам понадобится еще несколько понятий.

**Определение 19.** *Платежным обязательством* с датой погашения  $N$  называют пару  $(f, N)$ , где неотрицательная случайная величина  $f \in \mathcal{F}_N | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Участник рынка, который должен погасить данное обязательство, строит свою инвестиционную политику так, чтобы  $X_N^\pi \geq f$ . Процедура построения такого портфеля  $\pi$  называется *хеджированием*, а сам портфель — *хеджирующим портфелем*.

Одна из важнейших задач, связанных с хеджированием платежных обязательств, возникает в связи с расчетами *опционов*. Представим на финансовом рынке эмитента, выпустившего производную ценную бумагу (на покупку, продажу и т. д.) некоторого актива. Чтобы стать держателем такой бумаги, требуется заплатить эмитенту некоторую премию  $C$ . Тем самым приобретается право предъявить данную бумагу к исполнению в момент времени  $N$  и получить выплату в размере  $f$ . Такая производная ценная бумага называется *опционом европейского типа* (на покупку, продажу и т. д. актива), а сама сделка — *контрактом с опционом*. Имеются и *опционы американского типа*, когда держатель производных ценных бумаг имеет право предъявить их в любой момент  $n \in \{0, \dots, N\}$  и получить выплату в размере  $f_n$ . Продавец такой ценной бумаги, получивший при ее продаже премию  $C$ , должен организовать свой портфель  $\pi$  так, чтобы  $X_n^\pi(\omega) \geq f_n(\omega)$  для всех  $\omega \in \Omega$  и  $n \leq N$ .

Обратимся к опционам европейского типа.



**Определение 20.** Пусть на  $(B, S)$ -рынке задано начальное значение капитала  $x > 0$  и платежное обязательство  $(f, N)$ . Самофинансируемый портфель  $\pi$  называется  $(x, f, N)$ -хеджем, если для любого  $\omega \in \Omega$

$$X_0^\pi = x \text{ и } X_N^\pi \geq f.$$

Обозначим  $\Pi(x, f, N)$  множество  $(x, f, N)$ -хеджей. *Инвестиционной стоимостью платежного обязательства  $(f, N)$*  называется величина

$$C(N) = \inf\{x > 0: \Pi(x, f, N) \neq \emptyset\}. \quad (81)$$

Формула (81) отвечает идее одновременно удовлетворить и продавца (который на данном рынке может обеспечить обязательство  $(f, N)$ ) и покупателя (который платит в определенном смысле минимальную премию продавцу). Поэтому  $C(N)$  называют также *справедливой ценой опциона*.

Широкую известность имеют *опцион колл* (опцион на продажу) и *опцион пут* (опцион на покупку). Первый из них — это опцион с платежным обязательством  $f = (S_N - K)^+$ , согласно которому его держатель может приобрести некоторые акции по фиксированной цене  $K$  в момент  $N$  (в то время, как рыночная цена акций равна  $S_N$ ). Разумеется, такой опцион предъявляется к исполнению, если  $S_N > K$ , и не предъявляется, когда  $S_N \leq K$ . Опцион пут — это опцион, по которому держатель имеет право продать акции по фиксированной цене  $K$  в момент  $N$ , и в этом случае платежное обязательство  $f = (K - S_N)^+$ .

**Теорема 21.** Пусть  $(B, S)$ -рынок не допускает арбитражных возможностей и полон. Пусть детерминированная последовательность  $r_n$  такова, что  $r_n > -1$  при  $n = 0, 1, \dots, N$ . Тогда для опциона европейского типа с платежным обязательством  $(f, N)$  выполнены следующие утверждения:

- 1) справедливая цена определяется формулой

$$C(N) = E^* \mathcal{E}_N^{-1}(U) f = \mathcal{E}_N^{-1}(U) E^* f,$$

где  $E^*$  обозначает усреднение по единственной (в силу теоремы 20) мартингальной мере;

- 2) существует минимальный  $(C(N), f, N)$ -хедж  $\pi^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)_{n \leq N}$ , т. е. такой, что  $X_N^{\pi^*} = f$ , и при этом

$$X_n^{\pi^*} = E^*(\mathcal{E}_N^{-1}(U) \mathcal{E}_n(U) f \mid \mathcal{F}_n),$$

$$\gamma_n^* = \frac{\tilde{\gamma} B_n}{S_{n-1}} \in \mathcal{F}_{n-1} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi^*} - \gamma_n^* S_{n-1}}{B_{n-1}} \in \mathcal{F}_{n-1} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

здесь  $\{\tilde{\gamma}_n\}_{n \leq N}$  — предсказуемая последовательность из разложения (80) для мартингала  $\{E^*(B_N^{-1} f \mid \mathcal{F}_n)\}_{n=0, \dots, N}$ .

О приведенных выше результатах и многих других интересных моделях финансового рынка как с дискретным, так и непрерывным временем, можно прочитать в работе [86], где имеется обширная библиография.

## Глава V

### Слабая сходимость мер.

### Принцип инвариантности

Слабая сходимость мер в метрических пространствах. Сходимость случайных элементов по распределению. Критерии слабой сходимости. Сохранение слабой сходимости под действием непрерывных отображений. Слабая сходимость мер в пространстве  $C(T, S)$ . Относительная слабая компактность и плотность семейства мер. Теорема Прохорова. Принцип инвариантности Донскера–Прохорова. Многомерная центральная предельная теорема Линдберга, лемма о максимуме сумм независимых случайных величин. Схема доказательства критерия согласия Колмогорова. Броуновский мост как условный винеровский процесс. Метод одного вероятностного пространства, теорема Скорохода. Метризация слабой сходимости. Метрика Леви–Прохорова.

§ 1. В этой главе мы затронем обширный круг вопросов, связанных с *аппроксимацией распределений вероятностей* одних процессов другими. Основной результат этой главы — принцип инвариантности Донскера–Прохорова (§ 6). При первом чтении для понимания этого результата требуется ознакомиться с понятиями слабой сходимости мер и сходимости по распределению случайных элементов со значениями в метрическом пространстве (§ 1 и § 2). Существенную роль при этом играет теория слабой сходимости мер в пространстве непрерывных функций  $C[0, 1]$  (изложенная в § 5), опирающаяся на идею установления слабой сходимости конечномерных распределений и относительной компактности мер. Последнее свойство удается эффективно проверять благодаря фундаментальной теореме Прохорова, доказательство которой можно прочесть в приложении 2. Очень полезной является теорема Скорохода (§ 10), дающая метод переопределения случайных элементов на новое вероятностное пространство с получением сходимости почти наверное. К остальным результатам главы V желательно вернуться при повторном чтении.

Начнем с понятия слабой сходимости (вероятностных) мер.

**Определение 1.** Пусть  $(S, \rho)$  — метрическое пространство с борелевской  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{B}(S)$  и  $Q, Q_n$  ( $n \geq 1$ ) — меры на  $(S, \mathcal{B}(S))$ . Говорят, что меры  $Q_n$  *слабо сходятся* к мере  $Q$  (обозначение:  $Q_n \Rightarrow Q$ ), если для любой функции  $f \in C_b(S, \mathbb{R})$ , т. е. непрерывной ограниченной функции  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\int_S f(x) Q_n(dx) \rightarrow \int_S f(x) Q(dx), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Равносильное определение получается, если в (1) брать комплекснозначные функции  $f \in C_b(S, \mathbb{C})$ , т. е. непрерывные ограниченные функции  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ . Вместо последовательностей мер можно рассматривать более общие структуры, например, сети, т. е. семейства мер, индексированные направленной переменной, например,  $\{Q_\alpha, \alpha > 0\}$ .

Интеграл функции  $f$  по мере  $Q$  (когда он определен) будем обозначать также  $\langle f, Q \rangle$ .

Если слабый предел существует, то он единствен, как показывает

**Лемма 1.** Пусть  $\langle f, Q \rangle = \langle f, \tilde{Q} \rangle$  для всех  $f \in C_b(S, \mathbb{R})$ . Тогда  $Q = \tilde{Q}$ .

**Доказательство.** Пользуясь рассуждениями, приведенными после формулы (III.22), видим, что  $Q(F) = \tilde{Q}(F)$  для всех замкнутых множеств  $F$ . В силу леммы 4 главы I получаем, что  $Q = \tilde{Q}$  на  $\mathcal{B}(S)$ .  $\square$

Заметим, что в этой лемме достаточно использовать лишь  $f \in C_b(S, \mathbb{R}_+)$ .

Напомним, что граница  $\partial B$  множества  $B \subset S$  есть совокупность тех точек (из  $S$ ), в любой окрестности которых имеются точки из  $B$  и  $S \setminus B$ . Множество  $\partial B$  замкнуто для любого  $B \subset S$ , поэтому входит в  $\mathcal{B}(S)$ .

Следующая теорема дает удобные для проверок критерии слабой сходимости.

**Теорема 1** (А. Д. Александров). Пусть  $Q, Q_n$  ( $n \geq 1$ ) — меры на метрическом пространстве  $(S, \rho)$ . Тогда слабая сходимость  $Q_n \Rightarrow Q$  ( $n \rightarrow \infty$ ) равносильна каждому из следующих утверждений:

- 1°.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} Q_n(F) \leq Q(F)$  для любого замкнутого множества  $F \in \mathcal{B}(S)$ ;
- 2°.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} Q_n(G) \geq Q(G)$  для любого открытого множества  $G \in \mathcal{B}(S)$ ;
- 3°.  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(B) = Q(B)$  для любого множества  $B \in \mathcal{B}(S)$  такого, что  $Q(\partial B) = 0$ .

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что исходное определение (1) равносильно тому, что для любой функции  $f \in C_b(S, \mathbb{R})$  справедливо соотношение

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f, Q_n \rangle \leq \langle f, Q \rangle. \quad (2)$$

Действительно, если (2) имеет место для  $f \in C_b(S, \mathbb{R})$ , то заменяя  $f$  на  $-f$ , получим  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle f, Q_n \rangle \geq \langle f, Q \rangle$  и, следовательно, (1) выполнено. Обратное очевидно.

а) Пусть  $Q_n \Rightarrow Q$ . Докажем утверждение 1°. Для замкнутого множества  $F$  и произвольного  $\varepsilon > 0$  определим функцию  $f_\varepsilon^F(x) = \varphi(\rho(x, F)/\varepsilon) \in C_b(S, \mathbb{R})$ , где  $\varphi$  дается формулой (III.23).

Тогда  $Q_n(F) = \langle \mathbf{1}_F, Q_n \rangle \leq \langle f_\varepsilon^F, Q_n \rangle$ , поскольку  $\mathbf{1}_F \leq f_\varepsilon^F$ . В силу (2)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} Q_n(F) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f_\varepsilon^F, Q_n \rangle \leq \langle f_\varepsilon^F, Q \rangle$$

и остается воспользоваться тем, что по теореме Лебега  $\langle f_\varepsilon^F, Q \rangle \rightarrow \langle \mathbf{1}_F, Q \rangle = Q(F)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

б) Пусть имеет место 1°. Докажем, что  $Q_n \Rightarrow Q$  при  $n \rightarrow \infty$ . Неравенство (2) достаточно проверить при дополнительном условии  $0 < f(x) < 1$ , выполнения которого можно добиться линейным преобразованием  $af(x) + b$ , где  $a > 0, b \in \mathbb{R}$ . Возьмем произвольное  $k \in \mathbb{N}$  и рассмотрим замкнутые множества  $F_i = \{x: f(x) \geq i/k\}$ ,  $i = 0, \dots, k$ . Положим  $C_i = F_{i-1} \setminus F_i = \{(i-1)/k \leq f(x) < i/k\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^k \frac{i-1}{k} Q(C_i) \leq \int_S f(x) Q(dx) \leq \sum_{i=1}^k \frac{i}{k} Q(C_i). \quad (3)$$

Теперь заметим, что

$$\sum_{i=1}^k \frac{i}{k} Q(C_i) = \sum_{i=1}^k \frac{i}{k} (Q(F_{i-1}) - Q(F_i)) = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Q(F_i).$$

Отсюда, вместе с аналогичным преобразованием суммы в левой части (3), имеем

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Q(F_i) \leq \int_S f(x) Q(dx) \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Q(F_i). \quad (4)$$

Подобные неравенства верны и с заменой  $Q$  на  $Q_n$ . Тем самым,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f, Q_n \rangle \leq \frac{1}{k} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Q_n(F_i) \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Q(F_i) \leq \frac{1}{k} + \langle f, Q \rangle.$$

Учитывая произвольность  $k$ , приходим к неравенству (2), и, значит,  $Q_n \Rightarrow Q$ .

с) Эквивалентность условий 2° и 1° очевидна. (Достаточно от соответствующих множеств перейти к их дополнениям.)

д) Покажем, что условие 1° влечет условие 3°. Обозначим  $B^\circ$  *внутренность* множества  $B$ , а через  $[B]$  — его *замыкание*. Тогда в силу 1° и 2°

$$\begin{aligned} Q(B^\circ) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} Q_n(B^\circ) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} Q_n(B) \leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} Q_n(B) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} Q_n([B]) \leq Q([B]). \end{aligned} \quad (5)$$

Но  $Q([B]) = Q(B) = Q(B^\circ)$ , поскольку  $Q(\partial B) = 0$  ( $[B] \setminus B \subset \partial B$  и  $B \setminus B^\circ \subset \partial B$ ), поэтому из (5) следует условие 3°.

е) Пусть выполнено 3°, покажем, что тогда верно 1°. Возьмем замкнутое множество  $F$  и рассмотрим множества  $F^\varepsilon = \{x \in S: \rho(x, F) < \varepsilon\}$ , где  $\varepsilon > 0$ . Заметим, что  $\partial F^\varepsilon \subset \{x: \rho(x, F) = \varepsilon\}$ , поэтому  $\partial F^\varepsilon \cap \partial F^\delta = \emptyset$  при  $\varepsilon \neq \delta$ . Следовательно,  $Q(\partial F^\varepsilon) > 0$  не более чем для счетного множества чисел  $\varepsilon$ . Выберем последовательность  $\varepsilon_k \downarrow 0$  такую, что  $Q(\partial F^{\varepsilon_k}) = 0, k \geq 1$ . Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} Q_n(F) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(F^{\varepsilon_k}) = Q(F^{\varepsilon_k})$$

для любого  $k$ . Остается учесть, что  $Q(F^{\varepsilon_k}) \rightarrow Q(F)$  при  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

§ 2. Пусть даны вероятностные пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, P), (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ , метрическое пространство  $S$  и случайные элементы  $X: \Omega \rightarrow S, X_n: \Omega_n \rightarrow S$  (т.е.  $\mathcal{F} | \mathcal{B}(S)$  и  $\mathcal{F}_n | \mathcal{B}(S)$ -измеримые отображения соответственно),  $n \geq 1$ .

**Определение 2.** Случайные элементы  $X_n$  называются *сходящимися по распределению* к  $X$  (пишут  $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$  или  $X_n \xrightarrow{\text{Law}} X$ ), если  $P_{X_n} \Rightarrow P_X$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $P_{X_n}$  и  $P_X$  — распределения вероятностей элементов  $X_n$  и  $X$  (см. (I.6)).

Пользуясь (I.23), видим, что  $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$  тогда и только тогда, когда

$$E_n f(X_n) \rightarrow E f(X) \quad (6)$$

для любой функции  $f \in C_b(S, \mathbb{R})$ , где  $E, E_n$  означают усреднения по мерам  $P, P_n$ .

**Теорема 2.** Пусть  $(S, \mathcal{B}(S)), (V, \mathcal{B}(V))$  — метрические пространства и  $h$  — непрерывное отображение  $S$  в  $V$ . Если  $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$  ( $X_n, X$  принимают значения в  $S$ ), то

$$h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(X), \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Если  $Q_n \Rightarrow Q$  на  $(S, \mathcal{B}(S))$ , то

$$Q_n h^{-1} \Rightarrow Q h^{-1} \quad \text{на} \quad (V, \mathcal{B}(V)) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

**Доказательство.** Возьмем непрерывную и ограниченную функцию  $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда функция  $g \circ h$  принадлежит пространству  $C_b(S, \mathbb{R})$  как суперпозиция непрерывной и ограниченной непрерывной функций. Следовательно,  $E_n g(h(X_n)) \rightarrow E g(h(X))$ ,  $n \rightarrow \infty$ , что доказывает (7).

Теперь заметим, что если  $X: \Omega \rightarrow S$  есть  $\mathcal{F} | \mathcal{B}$ -измеримое отображение, а отображение  $h: S \rightarrow V$  является  $\mathcal{B} | \mathcal{A}$ -измеримым ( $(S, \mathcal{B})$  и  $(V, \mathcal{A})$  — некоторые измеримые пространства), то

$$P_X h^{-1} = P_{h(X)}, \quad (9)$$

поскольку  $P_X h^{-1}(B) = P_X(h^{-1}(B)) = P(X \in h^{-1}(B)) = P(h(X) \in B) = P_{h(X)}(B)$  для любого  $B \in \mathcal{B}$ .

Пусть  $Q_n \Rightarrow Q$ . По лемме 8 главы I определены случайные элементы  $X_n, X$  такие, что  $Q_n = P_{X_n}$ ,  $n \geq 1$ , и  $Q = P_X$ . Таким образом,  $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$  при  $n \rightarrow \infty$ . В силу (9) имеем  $Q_n h^{-1} = P_{h(X_n)}$ ,  $Q h^{-1} = P_{h(X)}$ . Поскольку слабая сходимость  $P_{h(X_n)}$  к  $P_{h(X)}$  уже доказана, то отсюда получаем требуемое утверждение (8).  $\square$

**§ 3.** Как и для числовых последовательностей, при изучении слабой сходимости семейства мер важную роль играет рассмотрение сходимости мер по подпоследовательностям.

**Лемма 2.** Сходимость  $Q_n \Rightarrow Q$ ,  $n \rightarrow \infty$ , имеет место тогда и только тогда, когда из каждой последовательности  $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$  можно извлечь подпоследовательность  $\{n'_k\}$  такую, что  $Q_{n'_k} \Rightarrow Q$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Допустим, что выполнено утверждение о подпоследовательностях, но  $Q_n \not\Rightarrow Q$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда существуют функция  $f \in C_b(S, \mathbb{R})$  и последовательность  $\{m_k\}_{k \geq 1}$  такие, что для некоторого  $\varepsilon > 0$

$$|\langle f, Q_{m_k} \rangle - \langle f, Q \rangle| > \varepsilon \quad \text{при всех} \quad k \geq 1.$$

Отсюда видим, что из последовательности  $\{m_k\}_{k \geq 1}$  нельзя извлечь подпоследовательность  $\{m'_k\}_{k \geq 1}$ , для которой  $Q_{m'_k} \Rightarrow Q$  при  $k \rightarrow \infty$ . Полученное противоречие доказывает утверждение о достаточности.  $\square$

**Определение 3.** Семейство мер  $\{Q_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$  на  $(S, \mathcal{B}(S))$  называется *слабо относительно компактным*, если из любой последовательности  $\{Q_{\alpha_n}\}$  можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность  $\{Q_{\alpha_{n_k}}\}$  (сходящуюся, вообще говоря, необязательно к элементу этого семейства).

Любая слабо сходящаяся последовательность является, очевидно, слабо относительно компактной. Легко построить слабо относительно компактную последовательность, не имеющую слабого предела. (Достаточно взять две последовательности, слабо сходящиеся к разным пределам, и составить из них одну.)

Полную связь между двумя введенными понятиями слабой сходимости и слабой относительно компактности раскрывает

**Теорема 3.** Для того чтобы заданная на борелевской  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}(S)$  метрического пространства  $S$  последовательность мер  $\{Q_n\}_{n \geq 1}$  имела слабый предел, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий:

- 1) последовательность  $\{Q_n\}_{n \geq 1}$  слабо относительно компактна;
- 2) имеется такой класс функций  $\mathcal{H} \subset C_b(S, \mathbb{R})$ , что
  - 2а) существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle h, Q_n \rangle$  при каждом  $h \in \mathcal{H}$ ,
  - 2б) для любых мер  $Q$  и  $\tilde{Q}$  на  $(S, \mathcal{B}(S))$  соотношение

$$\langle h, Q \rangle = \langle h, \tilde{Q} \rangle, \quad \text{верное при всех } h \in \mathcal{H}, \quad (10)$$

влечет на  $\mathcal{B}(S)$  равенство  $Q = \tilde{Q}$ .

**Доказательство.** Необходимость очевидна — надо взять  $\mathcal{H} = C_b(S, \mathbb{R})$  и воспользоваться леммой 1.

**Достаточность.** Согласно 1) из произвольной последовательности  $\{n_k\}_{k \geq 1}$  можно выбрать подпоследовательность  $\{n'_k\}_{k \geq 1}$  такую, что  $Q_{n'_k} \Rightarrow Q$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда  $\langle f, Q_{n'_k} \rangle \rightarrow \langle f, Q \rangle$  для всех  $f \in C_b(S, \mathbb{R})$ . Поэтому условие 2а) влечет соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle h, Q_n \rangle = \langle h, Q \rangle \quad \text{при каждом } h \in \mathcal{H}. \quad (11)$$

Допустим, что  $Q_n \not\Rightarrow Q$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда в силу условия 1) и леммы 2 найдется последовательность  $\{m_k\}_{k \geq 1}$  такая, что  $Q_{m_k} \Rightarrow \tilde{Q}$  при  $k \rightarrow \infty$  и  $\tilde{Q} \neq Q$ . Из (11) вытекает, что  $\langle h, Q \rangle = \langle h, \tilde{Q} \rangle$  для всех  $h \in \mathcal{H}$ , и согласно условию 2б) имеем  $Q = \tilde{Q}$ , а это противоречит предположению  $Q \neq \tilde{Q}$ .  $\square$

§ 4. Рассмотрим процессы  $X = \{X_t, t \in T\}$  и  $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \in T\}$ , где  $n \geq 1$ , заданные соответственно на некоторых вероятностных пространствах  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$  и принимающие при каждом  $t \in T$  значения в измеримом пространстве  $(S_t, \mathcal{B}_t)$ . Учитывая теорему 3 главы I, естественно было бы определить *слабую сходимост процессов*  $X^{(n)}$  к  $X$  как слабую сходимост их распределений на цилиндрической  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}_T$ . Но слабая сходимост была введена для мер на борелевской  $\sigma$ -алгебре метрического (или топологического) пространства, и в общем случае нельзя утверждать, что пространство  $S_T$  допускает метризацию, при которой  $\mathcal{B}_T = \mathcal{B}(S_T)$ . Однако в некоторых случаях эту трудност можно преодолеть, учитывая, что траектории изучаемых процессов лежат (с вероятностност 1) в некотором собственном (метризуемом) подмножестве пространства  $S_T$ .

В качестве такого подмножества рассмотрим пространство *непрерывных* функций  $C(T, S)$ , заданных на некотором компакте  $T$  (метрического пространства) и принимающих при каждом  $t \in T$  значения в польском пространстве  $S$ , снабженном равномерной метрикой  $\rho_C$  (см. § 18 главы I). Напомним, что  $\mathcal{B}(C(T, S))$  обозначает борелевскую  $\sigma$ -алгебру в пространстве  $C(T, S)$ , а  $\mathcal{B}_T(C(T, S))$  — цилиндрическую  $\sigma$ -алгебру в этом пространстве, т. е.  $\sigma$ -алгебру, порожденную “непрерывными цилиндрами” вида  $\pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}(B)$ , где  $B \in \mathcal{B}(S^k)$ ,  $t_1, \dots, t_k \in T$ ,  $k \geq 1$ , и отображение  $\pi_{t_1, \dots, t_k}: C(T, S) \rightarrow S^k$  задается формулой

$$\pi_{t_1, \dots, t_k} x = (x(t_1), \dots, x(t_k)), \quad x \in C(T, S). \quad (12)$$

В силу леммы 12 главы I имеем  $\mathcal{B}_T(C(T, S)) = \mathcal{B}(C(T, S))$ .

**Теорема 4.** Пусть  $C(T, S)$  — введенное выше пространство. Тогда справедливы следующие утверждения:

- а) если у мер  $Q, \tilde{Q}$ , заданных на  $\mathcal{B}(C(T, S))$ , совпадают все конечномерные распределения, т. е.

$$Q\pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1} = \tilde{Q}\pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1} \quad \text{для } t_1, \dots, t_k \in T, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

то  $Q = \tilde{Q}$  на  $\mathcal{B}(C(T, S))$ ;

- б) последовательность мер  $\{Q_n\}_{n \geq 1}$  на  $\mathcal{B}(C(T, S))$  имеет слабый предел при  $n \rightarrow \infty$  тогда и только тогда, когда она слабо относительно компактна и существуют слабые пределы у всех конечномерных распределений, т. е. при каждом  $t_1, \dots, t_k \in T$  и  $k \geq 1$  последовательности  $\{Q_n \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}\}_{n \geq 1}$  имеют слабые пределы.
- с)  $Q_n \Rightarrow Q$  на  $\mathcal{B}(C(T, S))$  при  $n \rightarrow \infty$  тогда и только тогда, когда последовательность  $\{Q_n\}_{n \geq 1}$  слабо относительно компактна и все конечномерные распределения  $Q_n$  слабо сходятся к соответствующим конечномерным распределениям  $Q$ .

**Доказательство.** а) Если меры  $Q$  и  $\tilde{Q}$  совпадают на алгебре (“непрерывных цилиндров” в  $C(T, S)$ ), то по теореме Каратеодори они совпадают и на порожденной ими  $\sigma$ -алгебре, т. е. на  $\mathcal{B}_T(C(T, S))$ . Значит, они совпадают на борелевской  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}(C(T, S))$ .

б) Необходимость вытекает из того, что слабо сходящаяся последовательность мер является слабо относительно компактной, а сходимость конечномерных распределений обеспечивает теорема 2 в силу непрерывности отображений (12). Для доказательства достаточности воспользуемся теоремой 3. Предположение слабой относительно компактности последовательности  $\{Q_n\}_{n \geq 1}$  означает справедливость условия 1) упомянутой теоремы. Рассмотрим класс функций

$$\mathcal{H} = \{h = g_k \circ \pi_{t_1, \dots, t_k}, \text{ где } g_k \in C_b(S^k, \mathbb{R}), \quad t_1, \dots, t_k \in T, \quad k \geq 1\}.$$

Согласно формуле (I.23) для  $h = g_k \circ \pi_{t_1, \dots, t_k} \in \mathcal{H}$  имеем

$$\langle h, Q_n \rangle = \langle g_k, Q_n \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1} \rangle. \quad (14)$$

Слабая сходимост последовательности мер  $\{Q_n \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}\}_{n \geq 1}$  влечет в силу (14) выполнение условия 2а) теоремы 3. Та же формула (14), записанная для произвольных мер  $Q, \tilde{Q}$  вместо  $Q_n$ , и утверждение а) показывают, что выполнено условие 2б) теоремы 3. Таким образом, последовательность  $\{Q_n\}_{n \geq 1}$  имеет слабый предел.

с) Если  $Q_n \Rightarrow Q$  при  $n \rightarrow \infty$ , то требуемое утверждение получается аналогично доказательству необходимости в пункте б). Пусть теперь  $\{Q_n\}_{n \geq 1}$  слабо относительно компактна и конечномерные распределения мер  $Q_n$  слабо сходятся к конечномерным распределениям  $Q$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Тогда из любой последовательности  $Q_{n_k}$  можно выделить подпоследовательность  $Q_{n'_k}$ , слабо сходящуюся к некоторой мере  $\tilde{Q}$ . Пользуясь единственностью слабого предела (лемма 1), видим, что все конечномерные распределения мер  $Q$  и  $\tilde{Q}$  совпадают. Следовательно, по доказанному выше пункту а) меры  $Q$  и  $\tilde{Q}$  совпадают на  $\mathcal{B}(C(T, S))$ . Утверждение о слабой сходимости  $Q_n$  к  $Q$  вытекает теперь из леммы 2.  $\square$

Покажем, что условие слабой относительной компактности мер  $Q_n$  (по-прежнему рассматриваемых на  $\mathcal{B}(C(T, S))$ ) и условие сходимости их конечномерных распределений “независимы” в следующем смысле.

Легко построить пример слабо относительно компактной последовательности  $Q_n$ , для которой не имеет место сходимост всех конечномерных распределений. Достаточно взять две различные меры  $Q$  и  $Q'$  и затем составить из них чередующуюся последовательность  $Q, Q', Q, Q', \dots$ .

Теперь приведем пример последовательности  $\{Q_n\}$ , для которой все конечномерные распределения слабо сходятся к конечномерным распределениям некоторой меры  $Q$ , но при этом последовательность  $\{Q_n\}_{n \geq 1}$  не является слабо относительно компактной (для этого в силу теоремы 4 достаточно убедиться, что не существует слабого предела  $Q_n$  при  $n \rightarrow \infty$ ).

**Пример 1.** Пусть мера  $Q_n$  сосредоточена на функции  $x_n(\cdot) \in C[0, 1]$ , изображенной на рис. 14, т. е.  $Q_n = \delta_{x_n}$ ,  $n \geq 1$  (как обычно, “дельта-мера”  $\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x)$  есть мера, “сидящая” в точке  $x$ , и  $C[0, 1] = C([0, 1], \mathbb{R})$ ).

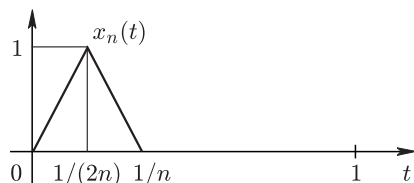


Рис. 14

Легко видеть, что для любого  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ ,  $k \geq 1$  и  $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$

$$\delta_{x_n} \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}(B) = \delta_{x_n} \{x \in C[0, 1]: (x(t_1), \dots, x(t_k)) \in B\} = \mathbf{1}_B(x_n(t_1), \dots, x_n(t_k)).$$

При всех достаточно больших  $n$  имеем  $x_n(t_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Поэтому при этих  $n$   $\mathbf{1}_B(x_n(t_1), \dots, x_n(t_k)) = \mathbf{1}_B(0, \dots, 0) = \delta_{x_0} \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}(B)$ , где  $x_0(t) = 0$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Следовательно, конечномерные распределения мер  $Q_n$  слабо сходятся к соответствующим конечномерным распределениям меры  $\delta_{x_0}$  при  $n \rightarrow \infty$ .



Допустим, что существует мера  $\mathbf{Q}$  такая, что  $\delta_{x_n} \Rightarrow \mathbf{Q}$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $\mathcal{B}(C[0, 1])$ . Тогда по теореме 2 (или пункту с) теоремы 4) для всех  $k \geq 1$  и  $t_1, \dots, t_k \in T$

$$\mathbf{Q}_n \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1} \Rightarrow \mathbf{Q} \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

В силу пункта а) теоремы 4 получаем, что  $\mathbf{Q} = \delta_{x_0}$ . Возьмем в  $C[0, 1]$  замкнутое множество  $F = \left\{ x(\cdot): \sup_{t \in [0, 1]} x(t) \geq 1 \right\}$ . Очевидно,  $\delta_{x_0}(F) = 0$  и  $\delta_{x_n}(F) = 1$  для  $n \geq 1$ . Согласно теореме 1 (пункт 1°) соотношение  $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_{x_0}$  при  $n \rightarrow \infty$  невозможно. Полученное противоречие доказывает, что построенная последовательность мер не является слабо относительно компактной.

Функции  $x_n$  из примера 1 не имеют предела в пространстве  $C[0, 1]$ , поэтому другой способ проверить, что у мер  $\delta_{x_n}$  нет слабого предела, дает упражнение 1.

§ 5. Со слабой относительно компактностью семейства мер связано следующее важное понятие.

**Определение 4.** Семейство мер  $\{\mathbf{Q}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  на борелевской  $\sigma$ -алгебре метрического пространства  $(S, \rho)$  называется *плотным*, если для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти компакт  $K_\varepsilon$ , такой что  $\mathbf{Q}_\alpha(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$  при всех  $\alpha \in \Lambda$ .

Введенное понятие плотности позволяет сформулировать следующий фундаментальный результат теории слабой сходимости, доказательство которого дается в приложении 2.

**Теорема 5** (Прохоров). *Если на метрическом пространстве  $(S, \rho)$  семейство мер плотно, то оно слабо относительно компактно. Если к тому же пространство  $(S, \rho)$  является польским, то слабо относительно компактное семейство мер плотно.*

Утверждения теорем 4 и 5 дают весьма эффективный метод доказательства слабой сходимости последовательности мер  $\{\mathbf{Q}_n\}_{n \geq 1}$  к мере  $\mathbf{Q}$  на введенном выше метрическом пространстве  $C(T, S)$ , основанный на идеях *конечномерной сходимости и плотности*.

Для иллюстрации этого метода обратимся к польскому пространству  $C[0, 1]$ . Напомним

**Определение 5.** *Модулем непрерывности* функции  $f \in C[0, 1]$  называется функция

$$\Delta(f, \delta) = \sup \{ |f(t) - f(s)| : s, t \in [0, 1], |s - t| < \delta \}, \quad \delta > 0.$$

Заметим, что функция  $\Delta(\cdot, \delta)$  непрерывна на  $C[0, 1]$  и, следовательно,  $\mathcal{B}(C[0, 1])$ -измерима.

Следующий результат из теории функций (см., например, [32; с. 302]) описывает компакты в  $C[0, 1]$ .

**Теорема 6** (Арцела–Асколи). *Замыкание множества функций  $\mathcal{K} \subset C[0, 1]$  является компактом в этом пространстве тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{f \in \mathcal{K}} |f(0)| < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0+} \sup_{f \in \mathcal{K}} \Delta(f, \delta) = 0.$$

(Указанные условия равносильны тому, что семейство функций  $\mathcal{K}$  равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.)

Отсюда легко выводится следующая теорема.

**Теорема 7.** *Семейство мер  $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  плотно на  $\mathcal{B}(C[0, 1])$  тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие два условия:*

1°. *Для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $M = M(\varepsilon) > 0$  такое, что*

$$Q_\alpha(f: |f(0)| > M) < \varepsilon \quad \text{при всех } \alpha \in \Lambda.$$

2°. *Для любых  $\varepsilon, \nu > 0$  найдется  $\delta = \delta(\varepsilon, \nu) > 0$  такое, что*

$$Q_\alpha(f: \Delta(f, \delta) > \nu) < \varepsilon \quad \text{при всех } \alpha \in \Lambda.$$

**Доказательство.** Пусть семейство  $\{Q_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$  плотно. Для данного  $\varepsilon > 0$  возьмем компакт  $K_\varepsilon \subset C[0, 1]$  такой, что  $Q_\alpha(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$  при всех  $\alpha \in \Lambda$ . По теореме Арцела–Асколи для любых  $\varepsilon, \nu > 0$  существуют  $M = M(\varepsilon) > 0$  и  $\delta = \delta(\varepsilon, \nu) > 0$  такие, что

$$K_\varepsilon \subset \{f: |f(0)| \leq M, \Delta(f, \delta) \leq \nu\}.$$

Поэтому необходимость условий 1° и 2° очевидна.

Пусть теперь выполнены условия 1° и 2°. Для каждого  $\varepsilon > 0$  найдем  $M = M(\varepsilon) > 0$  такое, что  $Q_\alpha(B_0) < \varepsilon/2$  при всех  $\alpha \in \Lambda$ , где  $B_0 = \{f: |f(0)| > M\}$ . Выберем  $\delta_k > 0$  таким образом, чтобы  $Q_\alpha(B_k) < \varepsilon 2^{-(k+1)}$  при всех  $\alpha \in \Lambda$  и  $k \geq 1$ , где  $B_k = \{f: \Delta(f, \delta_k) > 1/k\}$ . Положим  $K_\varepsilon = \left[ \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{B}_k \right]$ , где  $\overline{B}_k = C[0, 1] \setminus B_k$ ,  $[\cdot]$  — замыкание множества в  $C[0, 1]$ . По теореме Арцела–Асколи  $K_\varepsilon$  — компакт. Кроме того,  $P(\overline{K}_\varepsilon) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon 2^{-(k+1)} = \varepsilon$ . Следовательно, семейство мер  $\{Q_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$  плотно.  $\square$

**Замечание 1.** Если  $\Lambda = \mathbb{N}$ , то в теореме 7 условие 2° можно заменить на следующее ему равносильное условие:

2'. *Для любых  $\varepsilon, \nu > 0$  найдутся  $\delta = \delta(\varepsilon, \nu) > 0$  и  $n_0 = n_0(\varepsilon, \nu, \delta)$  такие, что*

$$Q_n(f: \Delta(f, \delta) > \nu) < \varepsilon \quad \text{при всех } n > n_0.$$

Действительно, любое конечное семейство мер в польском пространстве является плотным в силу леммы Улама (см. в дополнении к этой главе лемму 6). Следовательно, по доказанной теореме 7 для любых  $\varepsilon, \nu > 0$  существует  $\delta' = \delta'(\varepsilon, \nu) > 0$  такое, что

$$Q_n(f: \Delta(f, \delta') > \nu) < \varepsilon \quad \text{при всех } n = 1, \dots, n_0.$$

Теперь надо лишь взять минимум из  $\delta'$  и  $\delta$ , фигурирующего в 2'.

Вместо  $2'$  часто бывает удобнее проверять обеспечивающее его условие:

$2''$ . Для любых  $\varepsilon, \nu > 0$  существует  $N = N(\varepsilon, \nu) \in \mathbb{N}$  такое, что

$$\sum_{i=1}^N Q_n \left( \sup_{(i-1)/N \leq s \leq i/N} |f(s) - f((i-1)/N)| > \nu \right) < \varepsilon$$

при всех  $n > n_0(\varepsilon, \nu, N)$ .

В самом деле, для любых  $N \geq 1$  и  $\nu > 0$

$$\{f: \Delta(f, 1/N) < 3\nu\} \supset \bigcap_{i=1}^N \left\{ \sup_{(i-1)/N \leq s \leq i/N} |f(s) - f((i-1)/N)| < \nu \right\}.$$

Поэтому условие  $2''$  влечет условие  $2'$ .

§ 6. Перейдем к рассмотрению, пожалуй, одного из самых известных и интересных применений общей теории слабой сходимости мер в функциональном пространстве непрерывных функций — к так называемому принципу инвариантности, являющемуся *функциональным* аналогом (и обобщением) центральной предельной теоремы.

Начнем с необходимых определений. Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство и  $X_{n,i}$ ,  $i = 1, \dots, m_n$ ,  $n \geq 1$ , — *серии* независимых (при каждом  $n$ ) действительных случайных величин, заданных на этом пространстве, таких, что  $E X_{n,i} = 0$ ,  $i = 1, \dots, m_n$ , и  $\sum_{i=1}^{m_n} \sigma_{n,i}^2 = 1$ , где  $\sigma_{n,i}^2 = E X_{n,i}^2$ . Если  $Y_{n,i}$  ( $i = 1, \dots, m_n$ ) — независимые величины с конечными дисперсиями и хотя бы одна из этих величин невырожденная, то к указанной схеме можно перейти нормировкой, положив

$$X_{n,i} = (Y_{n,i} - E Y_{n,i})/B_n, \quad B_n^2 = \sum_{i=1}^{m_n} D Y_{n,i}.$$

Обозначим  $t_{n,0} = 0$ ,  $t_{n,j} = \sum_{i=1}^j \sigma_{n,i}^2$  (тогда  $t_{n,m_n} = 1$ ),  $S_{n,0} = 0$ ,  $S_{n,j} = \sum_{i=1}^j X_{n,i}$ ,  $j = 1, \dots, m_n$ .

Зададим теперь при каждом  $\omega \in \Omega$  функцию  $S_n(t, \omega)$ ,  $t \in [0, 1]$ , как *непрерывную ломаную* с узлами  $(t_{n,j}, S_{n,j})$ ,  $j = 0, \dots, m_n$ , т. е. пусть

$$S_n(t, \omega) = S_{n,i-1} + \frac{(t - t_{n,i-1})}{t_{n,i} - t_{n,i-1}} X_{n,i} \quad \text{для } t \in [t_{n,i-1}, t_{n,i}] \quad (15)$$

(см. рис. 15). Здесь и далее будем считать, что все  $\sigma_{n,i} > 0$ , иначе говоря, мы исключаем из рассмотрения величины  $X_{n,i} = 0$  п. н. Формула (15) показывает, что  $S_n(t, \omega)$  при каждом  $t \in [0, 1]$  является случайной величиной, а так как траектории  $S_n(\cdot, \omega)$  непрерывны при всех  $\omega \in \Omega$ , то  $S_n = \{S_n(t), t \in [0, 1]\}$  является случайным элементом в пространстве  $C[0, 1]$  по теореме 7 главы I. Пусть  $\mathbb{P}_n$  — распределение вероятностей  $S_n$  на  $\mathcal{B}(C[0, 1])$ .

**Теорема 8** (Прохоров). Пусть для описанных выше величин  $X_{n,i}$ , где  $n \geq 1$  и  $i = 1, \dots, m_n$ , выполнено условие Линдеберга:

$$\sum_{i=1}^{m_n} E X_{n,i}^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,i}| > \varepsilon\}} \rightarrow 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Тогда  $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{W}$  ( $n \rightarrow \infty$ ), здесь  $\mathbb{W}$  — мера Винера. Другими словами,  $S_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $W = \{W(t), t \in [0, 1]\}$  — винеровский процесс на отрезке  $[0, 1]$ .

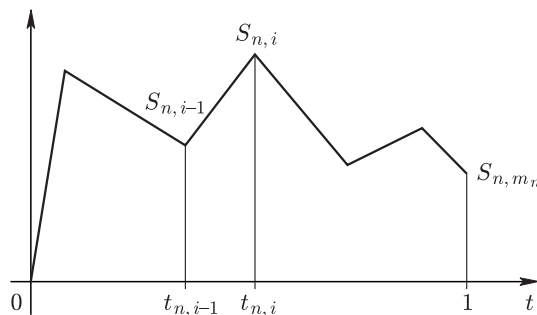


Рис. 15

Утверждение о слабой сходимости распределений случайных ломаных к мере Винера часто называют *принципом инвариантности Донскера–Прохорова*.

М. Донскер исследовал случай независимых *одинаково* распределенных величин  $X_1, X_2, \dots$  с нулевым средним и единичной дисперсией. Полагая  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $S_0 = 0$ , он рассматривал случайные ломаные с узлами  $(i/n, S_i/\sqrt{n})$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Теорема 8 (с условием Линдеберга), охватывающая и случай, рассмотренный М. Донскером, доказана Ю. В. Прохоровым.

Полезно подчеркнуть, что в приведенной формулировке теорема 8 включает в себя обычную *центральный предельную теорему* для серий независимых действительных случайных величин в условиях Линдеберга. Действительно, функционал  $h(x(\cdot)) = x(1)$  — это непрерывное отображение  $C[0, 1]$  в  $\mathbb{R}$ . Поэтому согласно теореме 2 имеем при  $n \rightarrow \infty$

$$h(S_n(\cdot)) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(W(\cdot)), \quad \text{т.е.} \quad S_n(1) = S_{n,m_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} W(1) \sim N(0, 1).$$

Функциональный характер теоремы 8 объясняет, почему ее называют также *функциональной центральной предельной теоремой*. Понятно также и происхождение термина принцип инвариантности — *инвариантность* понимается в том смысле, что предельное распределение  $h(S_n(\cdot))$  будет таким же, как у  $h(W(\cdot))$ , какие бы серии независимых случайных величин, удовлетворяющих условию Линдеберга, мы ни брали (при этом  $h$  может быть любым непрерывным отображением, заданным на  $C[0, 1]$ ).

Таким образом при больших  $n$  распределение (непрерывных ограниченных) функционалов  $h(S_n(\cdot))$  “близко” к распределению функционала  $h(W(\cdot))$  от винеровского процесса. Это разъяснение полезно и потому, что можно двигаться в обратном направлении — для нахождения распределения вероятностей интересующего нас функционала  $h(W(\cdot))$  от винеровского процесса иногда удастся построить такое случайное блуждание  $S = \{S_n, n \geq 1\}$ , что исследование распределения  $h(S_n(\cdot))$ ,  $n \geq 1$ , становится простой задачей (см. упражнения 11 и 13).

Доказательство теоремы 8 будет опираться на идеи “слабой сходимости конечномерных распределений и плотности”, изложенные выше в теоремах 4 с), 5 и 7.

§ 7. Нам понадобятся два вспомогательных утверждения, представляющих и самостоятельный интерес. Первое утверждение — это *многомерная центральная предельная теорема*, которая будет играть ключевую роль при доказательстве слабой сходимости конечномерных распределений процессов  $S_n(\cdot)$ ,  $n \geq 1$ .

Для формулировки этой теоремы (ее доказательство дано в приложении 3) рассмотрим в  $\mathbb{R}^k$  случайные векторы  $\xi_{n,i}$ ,  $i = 1, \dots, m_n$ , независимые для любого фиксированного  $n \geq 1$  (в каждой серии) такие, что  $E \xi_{n,i} = 0 \in \mathbb{R}^k$  и  $E \|\xi_{n,i}\|^2 < \infty$  для всех  $n, i$ , где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^k$ .

Обозначим  $B_{n,i}^2 = D\xi_{n,i}$  дисперсионные (ковариационные) матрицы, т. е. матрицы, состоящие из ковариаций компонент векторов  $\xi_{n,i}$ ,

$$S_n = \sum_{i=1}^{m_n} \xi_{n,i}, \quad B_n^2 = DS_n = \sum_{i=1}^{m_n} B_{n,i}^2.$$

**Теорема 9** (Линдберг). Пусть для описанного массива случайных векторов  $\{\xi_{n,i}, i = 1, \dots, m_n, n \geq 1\}$

$$B_n^2 \rightarrow B^2 \quad \text{поэлементно при } n \rightarrow \infty, \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^{m_n} E \|\xi_{n,i}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\xi_{n,i}\| > \varepsilon\}} \rightarrow 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Тогда

$$S_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, B^2), \quad n \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Второе вспомогательное утверждение — *максимальное неравенство*, требуемое при оценке модуля непрерывности процессов  $S_n(\cdot)$ ,  $n \geq 1$ , т. е. при доказательстве плотности семейства их распределений, дается в следующем предложении.

**Лемма 3** (неравенство Колмогорова). Пусть  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$  — независимые действительные случайные величины с  $E \zeta_i = 0$ ,  $\sigma_i^2 = D\zeta_i < \infty$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Положим  $S_i = \sum_{j=1}^i \zeta_j$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $d_m^2 = DS_m$ . Тогда для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$  справедливо неравенство

$$P\left(\max_{1 \leq i \leq m} |S_i| \geq \lambda d_m\right) \leq 2P(|S_m| \geq (\lambda - \sqrt{2})d_m). \quad (20)$$

**Доказательство.** При  $\lambda \leq \sqrt{2}$  утверждение леммы, очевидно, справедливо. Поэтому предположим, что  $\lambda > \sqrt{2}$ . Пусть  $A_j = \left\{ \max_{i < j} |S_i| < \lambda d_m, |S_j| \geq \lambda d_m \right\}$ . Тогда событие

$$A = \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} |S_i| \geq \lambda d_m \right\} = \bigcup_{j=1}^m A_j,$$

причем  $A_i \cap A_j = \emptyset$  для  $i \neq j$  и вероятность

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \{|S_m| \geq (\lambda - \sqrt{2})d_m\}) + P(A \cap \{|S_m| < (\lambda - \sqrt{2})d_m\}) \leq \\ &\leq P(|S_m| \geq (\lambda - \sqrt{2})d_m) + \sum_{j=1}^m P(A_j \cap \{|S_m| < (\lambda - \sqrt{2})d_m\}). \end{aligned}$$

Заметим, что  $A_m \cap \{|S_m| < (\lambda - \sqrt{2})d_m\} = \emptyset$ . Для  $1 \leq j < m$  имеем  $A_j \cap \{|S_m| < (\lambda - \sqrt{2})d_m\} \subset A_j \cap \{|S_m - S_j| > \sqrt{2}d_m\}$ , поскольку из того, что  $|S_j| \geq \lambda d_m$ ,

$|S_m| < (\lambda - \sqrt{2})d_m$ , следует, что  $|S_m - S_j| \geq |S_j| - |S_m| > \sqrt{2}d_m$ . События  $A_j$  и  $\{|S_m - S_j| > \sqrt{2}d_m\}$  зависят от разных групп независимых случайных величин и поэтому  $\overset{m}{m}$  независимы. Используя неравенство Чебышёва, получаем (учитывая, что  $P(A) = \sum_{j=1}^m P(A_j)$ ):

$$\begin{aligned} P(A) &\leq P(|S_m| \geq (\lambda - \sqrt{2})d_m) + \sum_{j=1}^{m-1} P(A_j) \frac{\sigma_{j+1}^2 + \dots + \sigma_m^2}{2d_m^2} \leq \\ &\leq P(|S_m| \geq (\lambda - \sqrt{2})d_m) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} P(A_j) \leq P(|S_m| \geq (\lambda - \sqrt{2})d_m) + \frac{1}{2}P(A), \end{aligned}$$

откуда и следует требуемое неравенство (20).  $\square$

§ 8. Доказательство теоремы Прохорова (теорема 8) начнем с установления слабой сходимости конечномерных распределений:

$$\mathbb{P}_n \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1} \Rightarrow \mathbb{W} \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}, \quad n \rightarrow \infty,$$

т. е. имея в виду (9), покажем, что для любых  $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$ ,  $k \geq 1$  (достаточно рассматривать лишь  $0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq 1$ )

$$(S_n(t_1), \dots, S_n(t_k)) \xrightarrow{\mathcal{D}} (W(t_1), \dots, W(t_k)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (21)$$

С этой целью для каждой точки  $t_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) и заданного  $n$  найдем ближайшую к ней слева точку  $t_j^{(n)}$  среди введенных в начале § 6 точек  $t_{n,i}$ ,  $i = 1, \dots, m_n$ . Иначе говоря, пусть  $t_j^{(n)} = \max_{1 \leq i \leq m_n} \{t_{n,i} \leq t_j\}$ .

Из условия Линдеберга вытекает (см. приложение 3), что

$$\max_{1 \leq i \leq m_n} \sigma_{n,i}^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (22)$$

и поэтому  $\max_{1 \leq i \leq m_n} (t_{n,i} - t_{n,i-1}) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $t_j^{(n)} \rightarrow t_j$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $j = 1, \dots, k$ . Если  $t_j^{(n)} = t_{n,l}$ ,  $l = l_j(n)$ , то

$$|S_n(t_j) - S_n(t_j^{(n)})| \leq |S_n(t_{n,l+1}) - S_n(t_{n,l})| \leq |X_{n,l+1}|.$$

В силу (22) имеем сходимость по вероятности  $S_n(t_j) - S_n(t_j^{(n)}) \xrightarrow{P} 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для  $j = 1, \dots, k$ .

Нетрудно проверить, воспользовавшись утверждением 1° теоремы 1, что если  $Z_n, Y_n, Z$  — случайные векторы со значениями в  $\mathbb{R}^k$  такие, что  $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ , а  $Y_n \xrightarrow{P} 0$  (т. е. все компоненты  $Y_n$  сходятся по вероятности к нулю), то  $Z_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ .

Таким образом, для доказательства (21) достаточно убедиться в том, что

$$Z_n = (S_n(t_1^{(n)}), \dots, S_n(t_k^{(n)})) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z = (W(t_1), \dots, W(t_k)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (23)$$

В рассматриваемом нами случае

$$\text{cov}(S_n(t_i^{(n)}), S_n(t_j^{(n)})) = \min\{t_i^{(n)}, t_j^{(n)}\} \rightarrow \min\{t_i, t_j\}$$

при  $n \rightarrow \infty$  ( $i, j = 1, \dots, k$ ). Поэтому для  $Z_n$  и  $Z$ , фигурирующих в (23), получаем, что  $DZ_n \rightarrow DZ$ , т.е. дисперсионные матрицы сходятся поэлементно. Далее, если  $t_1^{(n)} = t_{n,l_1}, \dots, t_k^{(n)} = t_{n,l_k}$ , где  $l_i = l_i(n) \in \{1, \dots, m_n\}$ , то  $Z_n = \xi_{n,1} + \dots + \xi_{n,l_k}$ , где  $\xi_{n,i}$ ,  $i = 1, \dots, l_k(n)$ , — независимые случайные векторы со значениями в  $\mathbb{R}^k$ :

$$\begin{pmatrix} S_n(t_1^{(n)}) \\ S_n(t_2^{(n)}) \\ \vdots \\ S_n(t_k^{(n)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{n,1} \\ X_{n,1} \\ \vdots \\ X_{n,1} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} X_{n,l_1} \\ X_{n,l_1} \\ \vdots \\ X_{n,l_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ X_{n,l_1+1} \\ \vdots \\ X_{n,l_1+1} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ X_{n,l_k} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{matrix} \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ Z_n & \xi_{n,1} & \xi_{n,l_1} & \xi_{n,l_1+1} & \xi_{n,l_k} \end{matrix}$$

Пользуясь тем, что у каждого вектора  $\xi_{n,i}$  все компоненты (кроме части из них, возможно, равных нулю) совпадают с  $X_{n,i}$ , получим в силу (16), что

$$\sum_{i=1}^{l_k(n)} \mathbb{E} \|\xi_{n,i}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\xi_{n,i}\| > \varepsilon\}} \leq k \sum_{i=1}^{m_n} \mathbb{E} |X_{n,i}|^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,i}| > \varepsilon/\sqrt{k}\}} \rightarrow 0.$$

Тем самым, все условия теоремы Линдеберга выполнены и, следовательно, имеет место *сходимость конечномерных распределений* (21).

Проверим теперь *плотность* семейства распределений  $\{\mathbb{P}_n\}_{n \geq 1}$ , воспользовавшись теоремой 7 и леммой 3.

Условие 1° теоремы 7 выполнено, так как  $S_n(0) = 0$ ,  $n \geq 1$ .

Проверим условие 2'' замечания 1. Зафиксируем  $N \geq 1$ . Пусть  $t_{n,i}^{(1)}, t_{n,i}^{(2)}$  — соответственно самая правая из точек  $t_{n,j} \leq (i-1)/N$  и самая левая из  $t_{n,j} \geq i/N$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Из (22) следует, что при всех достаточно больших  $n$

$$1/N \leq t_{n,i}^{(2)} - t_{n,i}^{(1)} \leq 2/N, \quad i = 1, \dots, N. \quad (24)$$

Обозначим  $V_{n,i} = \sup_{(i-1)/N \leq t \leq i/N} |S_n(t) - S_n((i-1)/N)|$ , тогда

$$\begin{aligned} V_{n,i} &\leq \sup_{t \in [t_{n,i}^{(1)}, t_{n,i}^{(2)}]} \left| S_n(t) - S_n(t_{n,i}^{(1)}) + S_n(t_{n,i}^{(1)}) - S_n((i-1)/N) \right| \leq \\ &\leq 2 \sup_{t \in [t_{n,i}^{(1)}, t_{n,i}^{(2)}]} \left| S_n(t) - S_n(t_{n,i}^{(1)}) \right| = 2 \max_{t_{n,j} \in [t_{n,i}^{(1)}, t_{n,i}^{(2)}]} \left| S_n(t_{n,j}) - S_n(t_{n,i}^{(1)}) \right| \end{aligned}$$

и для любого  $\nu > 0$ , всех  $i = 1, \dots, N$ ,  $N \geq 1$ ,

$$p_{n,i} = \mathbb{P}(V_{n,i} > \nu) \leq \mathbb{P}\left(\max_{t_{n,j} \in [t_{n,i}^{(1)}, t_{n,i}^{(2)}]} \left| S_n(t_{n,j}) - S_n(t_{n,i}^{(1)}) \right| > \nu/2\right). \quad (25)$$

С учетом леммы 3 и равенства  $D(S_n(t_{n,i}^{(2)}) - S_n(t_{n,i}^{(1)})) = t_{n,i}^{(2)} - t_{n,i}^{(1)}$  находим

$$p_{n,i} \leq 2P\left(|S_n(t_{n,i}^{(2)}) - S_n(t_{n,i}^{(1)})| > (\lambda - \sqrt{2})\sqrt{t_{n,i}^{(2)} - t_{n,i}^{(1)}}\right),$$

где  $\lambda = \nu / \left(2\sqrt{t_{n,i}^{(2)} - t_{n,i}^{(1)}}\right)$ ,  $i$  и  $n$  — те же, что и выше.

Пусть  $t_{n,i}^{(1)} = t_{n,j_i}$ ,  $t_{n,i}^{(2)} = t_{n,r_i}$ ,  $j_i = j_i(n)$ ,  $r_i = r_i(n)$ . Рассмотрим в  $n$ -й серии величины с номерами  $l$  из множества  $J_i^{(n)} = \{l: j_i < l \leq r_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Обозначим  $S_n^{(i)} = \sum_{l \in J_i^{(n)}} X_{n,l} = S_n(t_{n,i}^{(2)}) - S_n(t_{n,i}^{(1)})$ . Тогда в силу (24) и (16) для любого  $\nu > 0$

$$\sum_{i \in J_i^{(n)}} E\left(\frac{X_{n,l}}{\sqrt{DS_n^{(i)}}}\right)^2 \mathbf{1}\left\{\frac{|X_{n,l}|}{\sqrt{DS_n^{(i)}}} > \nu\right\} \leq N \sum_{i=1}^{m_n} E|X_{n,i}|^2 \mathbf{1}\left\{|X_{n,i}| > \frac{\nu}{\sqrt{N}}\right\} \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, по одномерной (т. е. при  $k = 1$ ; см. начало § 7) теореме Линдеберга для  $i = 1, \dots, N$  и любого  $\nu > 0$  имеем при всех  $n > n_0(\varepsilon, \nu, N)$

$$\left|P\left(|S_n^{(i)}| > (\lambda - \sqrt{2})\sqrt{DS_n^{(i)}}\right) - P\left(|\xi| > \lambda - \sqrt{2}\right)\right| < \varepsilon/(2N), \quad (26)$$

где  $\xi \sim N(0, 1)$ . Здесь мы воспользовались тем, что в центральной предельной теореме сходимость функций распределения *равномерна* на всей оси; см. упражнение 12. Согласно (24) при всех достаточно больших  $n$  для  $i = 1, \dots, N$  получаем  $\lambda \geq \nu\sqrt{N}/(2\sqrt{2})$ . Поэтому, если  $N = N(\varepsilon, \nu)$  достаточно велико, то применив (II.29), придем к оценке

$$P(|\xi| > \lambda - \sqrt{2}) < \varepsilon/2N.$$

Из последнего неравенства, (25) и (26) заключаем, что  $\sum_{i=1}^N p_{n,i} < \varepsilon$ . В силу теоремы 7 и замечания 1 плотность семейства мер  $\{\mathbb{P}_n\}_{n \geq 1}$  установлена. Вместе с соотношением (21) это завершает доказательство теоремы 8.  $\square$

**§ 9.** Наметим схему, по которой с помощью изложенной теории слабой сходимости можно доказать один из центральных результатов математической статистики — *критерий согласия Колмогорова*.

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные действительные величины, имеющие функцию распределения  $F = F(x)$ . Определим согласно (I.34) *эмпирические меры*  $P_n$ . Взяв  $B = (-\infty, x]$ , получим *эмпирические функции распределения*

$$F_n(x, \omega) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(\xi_i(\omega)), \quad n \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Теорема 10** (Колмогоров). *Если функция распределения  $F = F(x)$  непрерывна, то для всех  $z > 0$  при  $n \rightarrow \infty$*

$$P\left(\sup_{-\infty < x < \infty} \sqrt{n}|(F_n(x, \omega) - F(x))| \leq z\right) \rightarrow 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 z^2} = K(z). \quad (27)$$



**Доказательство.** Воспользовавшись заменой  $\zeta_i = F^{\text{inv}}(\xi_i)$ ,  $i \geq 1$ , где

$$F^{\text{inv}}(t) = \inf\{x: F(x) \geq t\}, \quad t \in [0, 1],$$

— обобщенная обратная функция к функции  $F = F(z)$ , можно (учитывая непрерывность функции  $F$ ) свести все рассмотрения к тому случаю, когда величины  $\xi_1, \xi_2, \dots$  имеют *равномерное* распределение на  $[0, 1]$ . Таким образом, надо доказать, что для таких величин при всех  $z \geq 0$

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |Y_n(t)| \leq z\right) \rightarrow K(z), \quad n \rightarrow \infty, \quad (28)$$

где  $Y_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Определим функционал  $h(x(\cdot)) = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)|$ . Естественно напрашивающийся путь доказательства (28) состоит в том, чтобы найти слабый предел распределений  $Y_n(\cdot)$  и затем воспользоваться теоремой 2. Сложность заключается в том, что процессы  $Y_n$  имеют разрывные траектории (они принадлежат пространству Скорохода  $D[0, 1]$ ). Однако доказательство утверждения (28) можно дать и в рамках изложенной выше теории.

Пусть  $\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(n)}$  — *вариационный ряд*, построенный по  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , т. е. при каждом  $\omega$  величины  $\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$  перенумерованы в порядке возрастания (п. н. все точки  $\xi_1, \dots, \xi_n$  различны). Пусть при каждом  $\omega$  функция  $G_n(t, \omega)$ ,  $t \in [0, 1]$ , есть непрерывная случайная ломаная с узлами  $(i/(n+1), \xi_{(i)}(\omega))$ ,  $i = 0, \dots, n+1$ , где  $\xi_{(0)}(\omega) = 0$ ,  $\xi_{(n+1)}(\omega) = 1$ . Так определенные функции  $G_n(\cdot, \omega)$  (см. рис. 16) являются случайными элементами в пространстве  $C[0, 1]$  по теореме 7 главы I. Заметим, что

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |F_n(t) - G_n(t)| \leq n^{-1} \quad \text{п. н.},$$

поскольку  $F_n(t, \omega) = i/n$  для  $t \in [\xi_{(i)}(\omega), \xi_{(i+1)}(\omega))$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

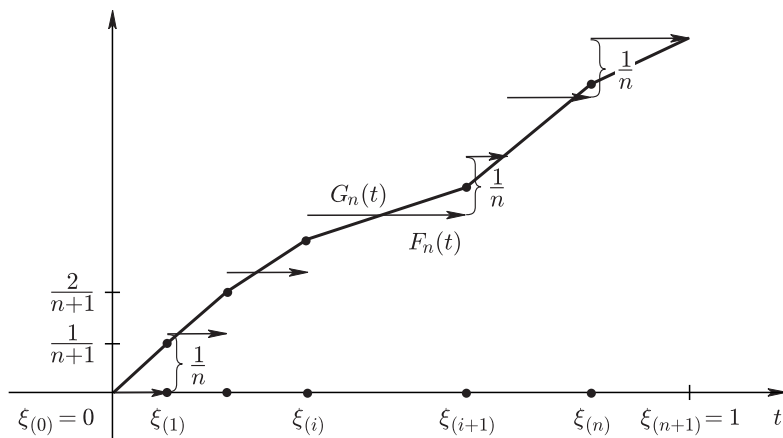


Рис. 16

Обозначая  $Z_n(t) = \sqrt{n} (G_n(t) - t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , находим, что с вероятностью единица

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |Y_n(t) - Z_n(t)| \leq n^{-1/2}.$$

Следовательно, предельное распределение случайной величины  $h(Y_n(\cdot))$  будет совпадать с предельным распределением случайной величины  $h(Z_n(\cdot))$ .

Доказательство теоремы Колмогорова сводится, тем самым, к проверке следующих двух утверждений:

- 1)  $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W^0$  в  $C[0, 1]$  при  $n \rightarrow \infty$ , здесь  $W^0$  — броуновский мост, определяемый как процесс  $W^0(t) = \{W(t) - tW(1), t \in [0, 1]\}$ , где  $W = \{W(t), t \in [0, 1]\}$  — винеровский процесс на отрезке  $[0, 1]$ ;
- 2)  $P\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |W_0(t)| \leq z\right) = K(z)$ ,  $z \geq 0$ .

Первое из этих утверждений доказывается по той же схеме, что и теорема 8 (“сходимость конечномерных распределений и плотность”). Соответствующее доказательство см., например, в [2; гл. 2, § 13].

Остановимся на доказательстве второго утверждения.

Определим семейство (условных) вероятностных мер на  $(C[0, 1], \mathcal{B}(C[0, 1]))$

$$\mathbb{Q}_\varepsilon(C) = P(W(\cdot) \in C \mid W(1) \in [-\varepsilon, \varepsilon]), \quad \varepsilon > 0. \quad (29)$$

**Лемма 4.** Если  $\varepsilon \downarrow 0$ , то  $\mathbb{Q}_\varepsilon \Rightarrow W^0$ , где  $W^0$  — распределение броуновского моста в  $C[0, 1]$ .

**Доказательство.** В силу теоремы 1 (которая, очевидно, верна для мер, индексированных параметром  $\varepsilon > 0$ ) достаточно показать, что

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{Q}_\varepsilon(F) \leq P(W^0 \in F), \quad (30)$$

где  $F$  — произвольное замкнутое множество из  $\mathcal{B}(C[0, 1])$ .

Для любых  $0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , вектор  $(W^0(t_1), \dots, W^0(t_k))$  не зависит от  $W(1)$ . Действительно,  $(W^0(t_1), \dots, W^0(t_k), W(1))$  имеет гауссовское распределение как линейное преобразование гауссовского вектора. Кроме того,  $E W^0(t)W(1) = E W(t)W(1) - tE W(1)^2 = \min\{t, 1\} - t = 0$ ,  $t \in [0, 1]$ , что и влечет указанную независимость.

Таким образом, для любого цилиндрического множества  $C \in \mathcal{B}(C[0, 1])$  и любого множества  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P(W^0(\cdot) \in C, W(1) \in B) = P(W^0 \in C) P(W(1) \in B). \quad (31)$$

Поскольку цилиндры образуют алгебру, порождающую  $\mathcal{B}(C[0, 1])$ , то по лемме 3 главы I равенство (31) справедливо для любого множества  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  и всех множеств  $C \in \mathcal{B}(C[0, 1])$ . Следовательно,

$$P(W^0(\cdot) \in C \mid W(1) \in [-\varepsilon, \varepsilon]) = P(W^0(\cdot) \in C)$$

при каждом  $\varepsilon > 0$ .

Заметим, что

$$\rho_C(W(\cdot), W^0(\cdot)) = \sup_{t \in [0,1]} |W(t) - (W(t) - tW(1))| = |W(1)|, \quad (32)$$

где  $\rho_C$  — равномерная метрика в  $C[0, 1]$ . Возьмем теперь замкнутое множество  $F \in \mathcal{B}(C[0, 1])$ . Из того, что  $|W(1)| < \delta$  и  $W(\cdot) \in F$ , в силу (32) имеем

$$W^0 \in F^\delta = \{x \in C[0, 1]: \rho(x, F) < \delta\}.$$

Тем самым для любого  $\varepsilon < \delta$  получаем

$$\mathbf{P}(W \in F \mid |W(1)| \leq \varepsilon) \leq \mathbf{P}(W^0 \in F^\delta \mid |W(1)| \leq \varepsilon) = \mathbf{P}(W^0 \in F^\delta)$$

и, значит,

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{Q}_\varepsilon(F) \leq \mathbb{W}^0(F^\delta).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при  $\delta \downarrow 0$  и учитывая, что  $\bigcap_{\delta > 0} F^\delta = F$ , приходим к соотношению (30), из которого следует утверждение леммы.  $\square$

**Замечание 2.** Лемма 4 показывает, что распределение броуновского моста естественно интерпретировать как распределение условного винеровского процесса (при условии  $W(1) = 0$ ).

Согласно (9) имеем  $\mathbb{W}^0 h^{-1}(B) = \mathbf{P}(h(W^0) \in B)$ . Кроме того,

$$\mathbb{Q}_\varepsilon h^{-1}(B) = \mathbf{P}(W(\cdot) \in h^{-1}(B) \mid W(1) \in [-\varepsilon, \varepsilon]) = \mathbf{P}(h(W) \in B \mid W(1) \in [-\varepsilon, \varepsilon]),$$

где  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $h(x(\cdot)) = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$  для  $x(\cdot) \in C[0, 1]$ . Поэтому лемма 4 и теорема 2 дают, что для тех значений  $z \geq 0$ , где функция распределения

$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |W^0(t)| \leq z\right)$  непрерывна (т. е. за исключением не более, чем счетного множества значений  $z$ ),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |W^0(t)| \leq z\right) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{Q}_\varepsilon h^{-1}((-\infty, z]) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} |W(t)| \leq z, |W(1)| \leq \varepsilon\right)}{\mathbf{P}(|W(1)| \leq \varepsilon)} = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} W(t) \leq z, \inf_{t \in [0,1]} W(t) \geq -z, W(1) \in [-\varepsilon, \varepsilon]\right)}{\mathbf{P}(W(1) \in [-\varepsilon, \varepsilon])}. \end{aligned} \quad (33)$$

Совместное распределение величин  $\inf_{t \in [0,1]} W(t)$ ,  $\sup_{t \in [0,1]} W(t)$ ,  $W(1)$  известно (см. в дополнении к этой главе теорему 15). Тем самым можно найти вероятность, стоящую в числителе правой части формулы (33).

Поделив полученное выражение на значение вероятности  $\mathbf{P}(W(1) \in [-\varepsilon, \varepsilon])$  и совершив предельный переход при  $\varepsilon \downarrow 0$ , получим в пределе в точности функцию  $K(z)$ , определяемую в (27). Эта функция  $K = K(z)$  непрерывна для всех  $z > 0$ . Поэтому

требуемое утверждение 2) установлено. Тем самым в (33) сходимость будет при всех  $z > 0$ , что завершает доказательство теоремы Колмогорова.  $\square$

§ 10. В этом параграфе мы обратимся к вопросу о взаимоотношении сходимости почти на верное и слабой сходимости случайных элементов.

Будем предполагать, что  $S$  — метрическое пространство. Пусть  $X, X_n: \Omega \rightarrow S$  и  $X, X_n \in \mathcal{F} | \mathcal{B}(S)$  для  $n \geq 1$ . Если  $X_n \rightarrow X$  п. н. при  $n \rightarrow \infty$ , то в силу (6), очевидно,  $\text{Law}(X_n) \Rightarrow \text{Law}(X)$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Обратное утверждение *неверно* даже для действительных случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве (приведите пример). Однако в *должном смысле* удастся *обратить* приведенный результат, как показывает следующая теорема.

**Теорема 11** (Скореход). Пусть  $(S, \rho)$  — польское пространство и  $Q_n \Rightarrow Q_\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $Q_n$  ( $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) — вероятностные меры на  $\mathcal{B}(S)$ . Тогда существуют вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и такие случайные элементы  $X_n: \Omega \rightarrow S$ ,  $X_n \in \mathcal{F} | \mathcal{B}(S)$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , что  $\text{Law}(X_n) = Q_n$  для всех  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  и  $X_n \rightarrow X_\infty$  п. н. при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Сначала построим определенную систему измельчающихся разбиений  $S$ . Для каждого  $k \in \mathbb{N}$  в силу сепарабельности  $S$  имеются открытые шары  $G_{k,m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , радиуса  $2^{-(k+2)}$  такие, что  $\bigcup_m G_{k,m} = S$ . Меняя радиус каждого

шара в пределах от  $2^{-(k+2)}$  до  $2^{-(k+1)}$ , возможно получить покрытие  $S$  открытыми шарами  $B_{k,m}$  такими, что  $Q_n(\partial B_{k,m}) = 0$  при всех  $k, m \in \mathbb{N}$  и  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

Положим  $D_{k,1} = B_{k,1}$  и для  $m \geq 2$  пусть  $D_{k,m} = B_{k,m} \setminus \bigcup_{r=1}^{m-1} B_{k,r}$ . При каждом  $k \in \mathbb{N}$  множества  $D_{k,m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , образуют разбиение  $S$ , причем  $\text{diam } D_{k,m} \leq 2^{-k}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , и  $Q_n(\partial D_{k,m}) = 0$  для всех рассматриваемых  $n, k, m$ . Напомним, что  $\text{diam } D = \sup\{\rho(x, y): x, y \in D\}$ ,  $D \subset S$ .

Введем теперь множества  $S_{i_1, \dots, i_k} = \bigcap_{j=1}^k D_{j, i_j}$  (все индексы из  $\mathbb{N}$ ). Они образуют измельчающиеся с ростом  $k$  вложенные разбиения  $S$  такие, что:

- 1)  $S_{i_1, \dots, i_k} \cap S_{j_1, \dots, j_k} = \emptyset$  при  $(i_1, \dots, i_k) \neq (j_1, \dots, j_k)$ ;
- 2)  $\bigcup_j S_j = S$ ,  $\bigcup_j S_{i_1, \dots, i_k, j} = S_{i_1, \dots, i_k}$  для всех  $k, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ ;
- 3)  $\text{diam } S_{i_1, \dots, i_k} \leq 2^{-k}$  для всех  $k, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ ;
- 4)  $Q_n(\partial S_{i_1, \dots, i_k}) = 0$  для всех  $k, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

Начнем строить искомую последовательность случайных величин на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , где  $\Omega = [0, 1)$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1))$ ,  $P$  есть мера Лебега (как всегда, считаем  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{F}$  пополненной). Для краткости пишем  $|\cdot|$  вместо  $\text{mes}(\cdot)$ .

Для каждого  $n \in \mathbb{N} \cup \infty$  и  $k \in \mathbb{N}$  рассмотрим разбиение  $[0, 1)$  полуинтервалами

$$\Delta_{i_1, \dots, i_k}^{(n)} = [a_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}, b_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}),$$

где  $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$  и  $|\Delta_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}| = Q_n(S_{i_1, \dots, i_k})$ , а именно,

$$\Delta_1^{(n)} = [0, Q_n(S_1)), \quad \Delta_2^{(n)} = [Q_n(S_1), Q_n(S_1) + Q_n(S_2)), \quad \dots$$

Аналогичным образом каждый из полуинтервалов  $\Delta_i^{(n)}$  разбивается на полуинтервалы  $\Delta_{i,j}^{(n)}$  (последовательным прикладыванием их, начиная с левого конца  $\Delta_i^{(n)}$ ) и т. д. Интервалы  $\Delta_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}$  получаются упорядоченными в лексикографическом смысле.

Для  $k \in \mathbb{N}$  в каждом непустом множестве  $S_{i_1, \dots, i_k}$  выберем точку  $x_{i_1, \dots, i_k}$  и для каждого  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  определим на  $\Omega = [0, 1)$  функции

$$X_n^k(\omega) = x_{i_1, \dots, i_k} \quad \text{при } \omega \in \Delta_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}$$

(если  $Q_n(S_{i_1, \dots, i_k}) = 0$ , то  $\Delta_{i_1, \dots, i_k}^{(n)} = \emptyset$  — промежуток вида  $[a, a)$ , и определять функцию на таком промежутке не требуется). Очевидно,  $X_n^k \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(S)$  при всех  $k, n$ . Заметим, что

$$\rho(X_n^k(\omega), X_n^{k+m}(\omega)) \leq 2^{-k} \quad \text{для любого } \omega \in [0, 1) \text{ и всех } k, n, m \quad (34)$$

по свойствам 2) и 3) построенных разбиений. В силу полноты  $S$  существует

$$X_n(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} X_n^k(\omega) \quad \text{для } \omega \in [0, 1), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad (35)$$

причем по лемме 5 главы I имеем  $X_n \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(S)$  для всех  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Пользуясь свойством 4) и пунктом 3° теоремы 1, получаем, что при всех  $k, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$

$$Q_n(S_{i_1, \dots, i_k}) = |\Delta_{i_1, \dots, i_k}^{(n)}| \rightarrow |\Delta_{i_1, \dots, i_k}^{(\infty)}| = Q_\infty(S_{i_1, \dots, i_k}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Поэтому, если  $Q_\infty(S_{i_1, \dots, i_k}) > 0$  (и, значит,  $\Delta_{i_1, \dots, i_k}^{(\infty)} \neq \emptyset$ ), то для каждой точки  $\omega \in (a_{i_1 \dots i_k}^{(\infty)}, b_{i_1 \dots i_k}^{(\infty)})$  найдется номер  $n_k(\omega)$  такой, что  $\omega \in (a_{i_1 \dots i_k}^{(n)}, b_{i_1 \dots i_k}^{(n)})$  при  $n \geq n_k(\omega)$ . Тогда для рассматриваемого  $\omega$  получим  $X_n^k(\omega) = X_\infty^k(\omega)$  и, учитывая (34), имеем

$$\begin{aligned} \rho(X_n(\omega), X_\infty(\omega)) &\leq \\ &\leq \rho(X_n(\omega), X_n^k(\omega)) + \rho(X_n^k(\omega), X_\infty^k(\omega)) + \rho(X_\infty^k(\omega), X_\infty(\omega)) \leq 2^{-k+1} \end{aligned}$$

при  $n \geq n_k(\omega)$ . Очевидно,  $X_n(\omega) \rightarrow X_\infty(\omega)$  при  $n \rightarrow \infty$  для  $\omega \in [0, 1)$  за исключением, быть может, счетного множества концов промежутков вида  $\Delta_{i_1, \dots, i_k}^{(\infty)}$ . Тогда  $X_\infty \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(S)$  в силу леммы 6 главы I.

Осталось показать, что  $\text{Law}(X_n) = Q_n$  для  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . По построению при всех  $n, m, i_1, \dots, i_m$  и  $k \geq m$

$$P(X_n^k \in S_{i_1, \dots, i_m}) = |\Delta_{i_1, \dots, i_m}^{(n)}| = Q_n(S_{i_1, \dots, i_m}). \quad (36)$$

Любое открытое множество  $G$  в  $S$  можно представить как объединение конечно-го или счетного числа множеств  $S_{i_1, \dots, i_k}$  при разных  $k$  и  $i_1, \dots, i_k$ . Действительно, (счетная) совокупность множеств  $S_{i_1, \dots, i_k}$  ( $k, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ ) образует базу топологии польского пространства  $(S, \rho)$ . Это сразу вытекает из [35; теорема 3, § 5 гл. 2], поскольку в любом шаре с центром в произвольной точке  $x \in S$  найдется множество упомянутой базы, содержащее  $x$  и целиком содержащееся в данном шаре.

Возьмем множества  $G_N \uparrow G$  при  $N \rightarrow \infty$ , где  $G_N$  состоит из конечного числа  $m_N$  непересекающихся множеств указанной базы. Тогда  $P(X_n^k \in G) \geq P(X_n^k \in G_N)$  для каждого  $N$  и, учитывая (36), имеем

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} P(X_n^k \in G) \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} P(X_n^k \in G_N) = Q_n(G_N).$$

Таким образом,  $\liminf_{k \rightarrow \infty} P(X_n^k \in G) \geq Q_n(G)$ . Согласно пункту 2° теоремы 1 получаем, что  $\text{Law}(X_n^k) \Rightarrow Q_n$  при  $k \rightarrow \infty$  для  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Но по доказанному  $X_n^k \rightarrow X_n$  п. н. при  $k \rightarrow \infty$  для всех  $n$ , поэтому  $\text{Law}(X_n^k) \Rightarrow \text{Law}(X_n)$  при  $k \rightarrow \infty$  ( $n \in \mathbb{N} \cup \infty$ ). Лемма 1 дает, что  $\text{Law}(X_n) = Q_n$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \infty$ .  $\square$

§ 11. Для рассмотрения вопроса о метризации слабой сходимости введем  $\mathcal{G}_C$  — класс равностепенно непрерывных функций  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ , имеющих

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)| \leq C.$$

**Лемма 5.** Если  $(S, \rho)$  — польское пространство и  $Q_n \Rightarrow Q$  на  $\mathcal{B}(S)$ , то для любой константы  $C > 0$

$$\sup\{|\langle f, Q_n \rangle - \langle f, Q \rangle| : f \in \mathcal{G}_C\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (37)$$

**Доказательство.** На некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  выберем случайные элементы  $X, X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , фигурирующие в теореме Скорохода (вместо  $Q_\infty$  и  $X_\infty$  пишем соответственно  $Q$  и  $X$ ). В соответствии с формулой (I.23) требуется проверить, что

$$\sup\{|\mathbb{E} f(X_n) - \mathbb{E} f(X)| : f \in \mathcal{G}_C\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

В силу равностепенной непрерывности для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  для всех  $f \in \mathcal{G}_C$  и  $x, y$  таких, что  $\rho(x, y) \leq \delta$ . Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E} f(X_n) - \mathbb{E} f(X)| &\leq \mathbb{E} |f(X_n) - f(X)| \mathbf{1}\{\rho(X_n, X) \leq \delta\} + \\ &\quad + \mathbb{E} |f(X_n) - f(X)| \mathbf{1}\{\rho(X_n, X) > \delta\} \leq \\ &\leq \varepsilon + 2CP(\rho(X_n, X) > \delta). \end{aligned}$$

Теперь заметим, что  $\rho$  есть непрерывная функция, а  $\rho(X_n, X)$  в силу сепарабельности  $S$  есть действительная случайная величина. Поскольку  $X_n \rightarrow X$  п. н., то  $\rho(X_n, X) \rightarrow 0$  п. н., а значит, сходится и по вероятности. Следовательно,

$$P(\omega: \rho(X_n(\omega), X(\omega)) > \delta) \rightarrow 0 \quad \text{для любого } \delta > 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

что завершает доказательство леммы.  $\square$

Пусть всюду далее  $(S, \rho)$  — польское пространство. Для  $B \subset S$  и  $\varepsilon > 0$  пусть, как обычно,  $B^\varepsilon = \{x \in S: \rho(x, B) < \varepsilon\}$ , где  $\rho(x, B) = \inf\{\rho(x, y): y \in B\}$ .

**Определение 7.** Метрикой Леви–Прохорова называется величина

$$\pi(P, Q) = \inf \{ \varepsilon > 0 : P(B) \leq Q(B^\varepsilon) + \varepsilon, Q(B) \leq P(B^\varepsilon) + \varepsilon \text{ для } B \in \mathcal{B}(S) \}. \quad (38)$$

В качестве упражнения нетрудно проверить, что  $\pi(\cdot, \cdot)$  обладает всеми свойствами метрики.

**Теорема 12.** Сходимость  $Q_n \Rightarrow Q$  равносильна тому, что  $\pi(Q_n, Q) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Пусть  $\pi(Q_n, Q) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Тогда в силу (38) для любого  $\varepsilon > 0$  и каждого замкнутого  $F \subset S$  имеем  $Q_n(F) \leq Q(F^\varepsilon) + \varepsilon$  при всех  $n \geq n(\varepsilon)$ . Следовательно,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} Q_n(F) \leq Q(F^\varepsilon) + \varepsilon$  для любого  $\varepsilon > 0$ . Остается устремить  $\varepsilon$  к нулю и воспользоваться пунктом 1° теоремы 1.

Пусть теперь  $Q_n \Rightarrow Q$ . Совокупность функций  $f_\varepsilon^F(\cdot)$ , введенных в доказательстве теоремы 1 (где  $\varepsilon > 0$  и  $F$  — замкнутое множество в  $S$ ), обладает тем свойством, что  $0 \leq f_\varepsilon^F(\cdot) \leq 1$  и  $|f_\varepsilon^F(x) - f_\varepsilon^F(y)| \leq \varepsilon^{-1} \rho(x, y)$  для всех  $x, y \in S$ . Следовательно, при каждом фиксированном  $\varepsilon > 0$  класс  $\mathcal{M}_\varepsilon = \{f_\varepsilon^F(\cdot) : \text{множества } F \text{ замкнуты в } S\} \subset \mathcal{G}_1$ , где классы  $\mathcal{G}_C$  фигурируют в лемме 5. Из (37) вытекает, что для любого  $\varepsilon > 0$

$$\Delta_n^{(\varepsilon)} = \sup \{ |\langle f, Q_n \rangle - \langle f, Q \rangle| : f \in \mathcal{M}_\varepsilon \} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Если множество  $F$  замкнуто и  $\varepsilon > 0$ , то учитывая, что  $1_F(\cdot) \leq f_\varepsilon^F(\cdot) \leq 1_{F^\varepsilon}(\cdot)$ , и принимая во внимание определение  $\Delta_n^{(\varepsilon)}$ , получаем

$$Q(F^\varepsilon) \geq \langle f_\varepsilon^F, Q \rangle \geq \langle f_\varepsilon^F, Q_n \rangle - \Delta_n^{(\varepsilon)} \geq \langle 1_F, Q_n \rangle - \Delta_n^{(\varepsilon)} = Q_n(F) - \Delta_n^{(\varepsilon)}. \quad (40)$$

Заметим, что  $\Delta_n^{(\varepsilon)} \leq \varepsilon$  при  $n \geq n_0(\varepsilon)$ . Обозначая, как и ранее,  $[B]$  замыкание множества  $B$  из  $\mathcal{B}(S)$ , имеем в силу (40), что при всех достаточно больших  $n$

$$Q_n(B) \leq Q_n([B]) \leq Q([B]^\varepsilon) + \varepsilon.$$

Аналогичные оценки справедливы, если поменять местами  $Q$  и  $Q_n$ . Поскольку  $[B]^\varepsilon \subset B^{2\varepsilon}$  для любого  $\varepsilon > 0$ , приходим к неравенству  $\pi(Q_n, Q) \leq 2\varepsilon$  при всех достаточно больших  $n$ . Таким образом,  $\pi(Q_n, Q) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).  $\square$

## Дополнения и упражнения

1. Докажите, что меры  $\delta_{x_n}$ , заданные на борелевской  $\sigma$ -алгебре метрического пространства  $(S, \rho)$ , имеют слабый предел тогда и только тогда, когда существует такой элемент  $x \in S$ , что  $x_n \xrightarrow{p} x$  при  $n \rightarrow \infty$  (тогда  $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$  при  $n \rightarrow \infty$ ).
2. Докажите, что  $Q_n \Rightarrow Q$  при  $n \rightarrow \infty$  (меры заданы на  $\mathcal{B}(S)$ , где  $(S, \rho)$  — метрическое пространство) тогда и только тогда, когда свойство (1) выполнено для всех действительных ограниченных липшицевых функций, т. е. таких функций  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ , что

$$\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)| < \infty \text{ и } L(f) = \sup_{x \neq y} \{|f(x) - f(y)| / \rho(x, y)\} < \infty. \quad (41)$$

Из теоремы Скорохода легко вытекает (с учетом известных фактов о сходимости п. н.), что  $\mathbf{E} X_n \rightarrow \mathbf{E} X$ , если  $S = \mathbb{R}$ ,  $X_n \xrightarrow{\mathcal{Q}} X$  и если семейство  $\{X_n, n \geq 1\}$  равномерно интегрируемо. Этот результат полезен для следующего упражнения.

**3.** Пусть функция  $f: S \rightarrow V$ , где  $S, V$  — метрические пространства (измеримость  $f$  не предполагается). Покажите, что множество  $D_f = \{x: \text{функция } f \text{ разрывна в точке } x\} \in \mathcal{B}(S)$ . Докажите, что  $Q_n \Rightarrow Q$  тогда и только тогда, когда свойство (1) выполнено для любой ограниченной функции  $f \in \mathcal{B}(S) \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$  такой, что  $Q(D_f) = 0$ .

**4.** Пусть  $S$  есть пространство  $\mathbb{R}^m$  с евклидовой метрикой. Будет ли верно, что  $Q_n \Rightarrow Q$ , если свойство (1) выполняется для функций  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ , т. е. для всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем?

**Лемма 6** (Улам). Пусть  $(S, \rho)$  — польское пространство и  $Q$  — мера на  $\mathcal{B}(S)$ . Тогда для каждого  $B \in \mathcal{B}(S)$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует компакт  $K_\varepsilon \subset B$  такой, что  $Q(B \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ .

**Доказательство.** Для  $n \in \mathbb{N}$  в силу сепарабельности  $S = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{1/n}(y_{n,m})$ , где  $B_\varepsilon(y) = \{x \in S: \rho(x, y) < \varepsilon\}$ , а точки  $y_{n,m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , образуют  $1/n$ -сеть (т. е. для любого  $y \in S$  можно указать точку  $y_{n,m}$ , такую что  $\rho(y, y_{n,m}) < 1/n$ ). При фиксированном  $\varepsilon > 0$  выберем  $j_n$  так, чтобы  $Q\left(\bigcup_{m=1}^{j_n} B_{1/n}(y_{n,m})\right) > 1 - \varepsilon 2^{-n-1}$ .

Положим  $R_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{j_n} B_{1/n}(y_{n,m})$ . Тогда для замыкания  $[R_\varepsilon]$  множества  $R_\varepsilon$  имеем

$$Q(S \setminus [R_\varepsilon]) \leq Q(S \setminus R_\varepsilon) = Q\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{j_n} B_{1/n}(y_{n,m})\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n-1} = \varepsilon/2.$$

Множество  $[R_\varepsilon]$  — компакт, так как в полном пространстве оно замкнуто и вполне ограничено (т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует конечная  $\varepsilon$ -сеть); например,  $2/n$ -сеть могут служить точки  $y_{n,m}$ ,  $m = 1, \dots, j_n$ . По лемме 4 главы I существует замкнутое множество  $F_\varepsilon \subset B$  такое, что  $Q(B \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon/2$ . Тогда  $K_\varepsilon = F_\varepsilon \cap [R_\varepsilon]$  есть компакт как пересечение замкнутого множества с компактом и  $Q(B \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ .  $\square$

Заметим, что для  $S = \mathbb{R}^q$  вместо  $[R_\varepsilon]$  в доказательстве леммы 6 можно взять замкнутый шар достаточно большого радиуса, однако в бесконечномерном нормированном пространстве замкнутый шар не является компактом.

Определение слабой сходимости (1) применяется и для любых конечных (необязательно вероятностных) мер. В этой связи предлагается упражнение

**5.** Пусть  $Q, Q_n$  ( $n \geq 1$ ) — конечные меры на  $(S, \mathcal{B}(S))$ . Докажите, что теорема 1 останется верной, если к ее условиям добавить требование  $Q_n(S) \rightarrow Q(S)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Определение 8.** В измеримом пространстве  $(S, \mathcal{A})$  класс множеств  $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$  называется классом, определяющим меру, если равенство любых двух мер на  $\mathcal{G}$  влечет их равенство на  $\mathcal{A}$ . Пусть  $S$  — метрическое пространство. Класс множеств  $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(S)$  называется классом, определяющим (слабую) сходимость, если для



любой последовательности мер  $Q, Q_1, Q_2, \dots$  такой, что  $Q_n(B) \rightarrow Q(B)$  при всех  $B \in \mathcal{M}$  с  $Q(\partial B) = 0$ , имеем  $Q_n \Rightarrow Q$ .

6. Покажите, что класс множеств, определяющий (слабую) сходимость, является классом, определяющим меру. Объясните, почему обратное утверждение не обязано выполняться.
- 7 (сравните с упражнением 6 и примером 1). Докажите, что в польском пространстве  $\mathbb{R}^\infty$ , снабженном метрикой вида

$$\rho((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$

борелевская  $\sigma$ -алгебра совпадает с цилиндрической, а сходимость  $Q_n \Rightarrow Q$  при  $n \rightarrow \infty$  имеет место тогда и только тогда, когда слабо сходятся все конечномерные распределения. Иначе говоря, класс цилиндров в  $\mathbb{R}^\infty$  одновременно является классом, определяющим и меру, и сходимость.

**Пример 2** (доказательство формулы (IV.19)). По центральной предельной теореме  $S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi \sim N(0, 1)$  при  $n \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $|S_n|/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} |\xi|$  согласно теореме 2. Кроме того, последовательность  $\{|S_n|/\sqrt{n}\}_{n \geq 1}$  равномерно интегрируема, поскольку для нее при  $\gamma = 2$  выполнено условие (III.53). Поэтому  $E|S_n|/\sqrt{n} \rightarrow E|\xi| = \sqrt{2/\pi}$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Для случайного вектора  $\xi$  в  $\mathbb{R}^m$  пусть  $F_\xi$  и  $\varphi_\xi$  обозначают соответственно функцию распределения и характеристическую функцию (см. § 14 главы I). В курсе теории вероятностей доказывается

**Теорема 13** (см., например, [85; т. 1, с. 414]). *Соотношение  $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$  для случайных векторов в  $\mathbb{R}^m$  равносильно любому из следующих двух условий:*

1.  $F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_\xi(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  в каждой точке  $x \in \mathbb{R}^m$ , в которой непрерывна функция  $F_\xi$ ;
2.  $\varphi_{\xi_n}(\lambda) \rightarrow \varphi_\xi(\lambda)$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ .

Кроме того, если для случайных векторов  $\xi_n$  в  $\mathbb{R}^m$  имеет место сходимость  $\varphi_{\xi_n}(\lambda) \rightarrow \varphi(\lambda)$  при всех  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ , где функция  $\varphi$  непрерывна в точке  $0 \in \mathbb{R}^m$ , то  $\varphi(\cdot) = \varphi_\xi(\cdot)$  для некоторого случайного вектора  $\xi$  и  $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$  при  $n \rightarrow \infty$ .

- 8 (метод Крамера–Уолда). Докажите, что  $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$  в  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$  тогда и только тогда, когда  $(a, \xi_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (a, \xi)$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого неслучайного вектора  $a \in \mathbb{R}^m$ , где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^m$ .

Это упражнение показывает, как можно сводить изучение слабой сходимости случайных векторов в  $\mathbb{R}^m$  к изучению слабой сходимости случайных величин.

В связи с теоремой 13 заметим, что понятие характеристической функции для мер на  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$  допускает естественное обобщение на более общие пространства. Так, пусть  $S$  — действительное сепарабельное банахово пространство,  $S^*$  — сопряженное пространство (т. е. пространство непрерывных линейных функционалов на  $S$ ) и  $\mathcal{P}(S)$  — пространство вероятностных мер на  $\mathcal{B}(S)$ .

**Определение 9.** *Характеристическим функционалом меры  $Q \in \mathcal{P}(S)$  (или случайного элемента  $X: \Omega \rightarrow S$ ,  $X \in \mathcal{F} | \mathcal{B}(S)$ , такого, что  $\text{Law}(X) = Q$ ) называется отображение  $\varphi_Q: S^* \rightarrow \mathbb{C}$ , задаваемое формулой*

$$\varphi_Q(x^*) = E \exp\{i\langle X, x^* \rangle\}, \quad x^* \in S^*,$$

где  $\langle y, x^* \rangle$  обозначает действие линейного функционала  $x^*$  на элемент  $y \in S$ .

Пусть  $\mathcal{C}$  — совокупность цилиндрических множеств в  $S$ , т. е. множеств вида

$$\{x \in S: (\langle x, z_1^* \rangle, \dots, \langle x, z_n^* \rangle) \in B\},$$

где  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $z_1^*, \dots, z_n^* \in S^*$ .

**9** (сравните с теоремой 13). Покажите, что  $\mathcal{C}$  порождает  $\mathcal{B}(S)$ . Докажите, что если  $Q_n \Rightarrow Q$  в  $\mathcal{P}(S)$ , то  $\varphi_{Q_n} \rightarrow \varphi_Q$  поточечно. Обратно, пусть  $\varphi_{Q_n} \rightarrow \varphi$  поточечно, где  $\varphi: S^* \rightarrow \mathbb{C}$  и семейство  $\{Q_n, n \geq 1\}$  плотно. Тогда  $\varphi = \varphi_Q$  для некоторого  $Q \in \mathcal{P}(S)$  и  $Q_n \Rightarrow Q$ .

**10.** С помощью теоремы 13 главы III докажите принцип инвариантности (теорему 8) для схемы серий, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных величин с нулевым средним и единичной дисперсией.

Результаты о слабой сходимости сумм независимых случайных величин в схеме серий приводят к следующему утверждению.

**Теорема 14** (Дуб). *Пусть процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  принимает при каждом  $t$  значения в  $\mathbb{R}^m$  и имеет независимые приращения. Если траектории процесса непрерывны п. н., то процесс  $Y = \{Y_t = X_t - X_0, t \geq 0\}$  является гауссовским. При этом для  $0 \leq s \leq t < \infty$*

$$E(X_t - X_s) = M_t - M_s, \quad D(X_t - X_s) = G_t - G_s, \quad (42)$$

где  $M: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  и  $G: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{m^2}$  — непрерывные функции.

Если в условиях этой теоремы величина  $X_0$  имеет вырожденное распределение, то и сам процесс  $\{X_t, t \geq 0\}$  будет гауссовским. Если процесс  $X$  удовлетворяет условию теоремы 14 на отрезке  $[a, b]$ , то ее утверждение справедливо для процесса  $\{Y_t = X_t - X_a, t \in [a, b]\}$ . (Достаточно ввести процесс  $\tilde{X}_t = X_{t+a}$  для  $t \in [0, b-a]$  и  $\tilde{X}_t = X_b$  при  $t \geq b$ .) Технически довольно сложное доказательство теоремы 14 и ряда вспомогательных утверждений, представляющих самостоятельный интерес, отнесено в приложение 3.

Покажем, как, применяя принцип инвариантности (теорему 8), можно найти распределение функционала  $\sup_{t \in [0,1]} W(t)$ . Согласно формуле (III.34) это распределение

совпадает с распределением случайной величины  $|W(1)|$ . Для иного доказательства этого свойства построим случайные ломаные  $S_n(\cdot)$  по сериям величин  $X_{n,i} = X_i/\sqrt{n}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где  $X_1, X_2, \dots$  независимы, одинаково распределены и

$$P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = 1/2.$$

- 11** (сравните со следствием 1 главы III). Докажите, что для любого целого неотрицательного числа  $j$

$$P\left(\max_{0 \leq k \leq n} S_k \geq j\right) = 2P(S_n > j) + P(S_n = j), \quad (43)$$

где  $S_0 = 0$ ,  $S_k = X_1 + \dots + X_k$ ,  $k \geq 1$ , а  $X_1, X_2, \dots$  — введенные выше величины.

Теперь заметим, что для каждого  $z > 0$

$$P\left(\sup_{t \in [0,1]} S_n(t) \geq z\right) = P\left(\max_{0 \leq k \leq n} S_k/\sqrt{n} \geq z\right) = P\left(\max_{0 \leq k \leq n} S_k \geq j_n\right),$$

где  $j_n$  — наименьшее целое число, большее или равное  $z\sqrt{n}$ , другими словами,  $j_n = -[-z\sqrt{n}]$ , где  $[\cdot]$  — целая часть числа. Пользуясь центральной предельной теоремой и учитывая равномерную сходимость функций распределения нормированных сумм к функции распределения стандартного нормального закона, получаем, что для любого  $z > 0$

$$P(S_n > j_n) = P(S_n/\sqrt{n} > j_n/\sqrt{n}) \rightarrow P(\xi > z), \quad (44)$$

где  $\xi \sim N(0, 1)$ .

Полезно отметить, что использованное свойство равномерной сходимости функций распределения в общем случае формулируется следующим образом.

- 12.** Пусть  $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{Q}} \xi$ , где  $\xi, \xi_n, n \geq 1$ , действительные случайные величины, причем функция  $F_\xi(x)$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ . Тогда

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{\xi_n}(x) - F_\xi(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для получения из соотношений (43) и (44) искомого результата (III.34), описывающего распределение максимума броуновского движения на отрезке  $[0, 1]$ , остается выполнить простое упражнение:

- 13.** Докажите, что для введенных перед упражнением 11 двучленных величин  $X_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , и их сумм  $S_k = X_1 + \dots + X_k$ ,  $k \geq 1$ , имеем

$$\max_j P(S_n = j) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Теперь обратимся к более общему результату, нежели (III.34), описывающему совместное распределение величин  $m = \inf_{t \in [0,1]} W(t)$ ,  $M = \sup_{t \in [0,1]} W(t)$  и  $W(1)$ .

Пусть, по-прежнему,  $X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = 1/2$  и  $S_0 = 0$ ,  $S_k = X_1 + \dots + X_k$ ,  $k \geq 1$ . Обозначим  $m_n = \min_{0 \leq k \leq n} S_k$ ,  $M_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$ .

Введем непрерывное отображение  $h: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$h(x(\cdot)) = \left( \inf_{t \in [0,1]} x(t), \sup_{t \in [0,1]} x(t), x(1) \right).$$

В силу теорем 2 и 8 имеем

$$h(S_n(\cdot)) = (m_n/\sqrt{n}, M_n/\sqrt{n}, S_n/\sqrt{n}) \xrightarrow{\mathcal{Q}} (m, M, W(1)), \quad (45)$$

где  $S_n(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , — случайная ломаная с узлами  $(k/n, S_k/\sqrt{n})$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Более сложные рассуждения, чем приведенные выше для нахождения распределения  $M$ , позволяют с помощью предельного перехода (45) установить следующий результат (см., например, [2; с. 113–115], [7; с. 18–21]).

**Теорема 15.** Для  $a < 0 < b$ ,  $a < r < s < b$  и  $\xi \sim N(0, 1)$  имеем

$$\begin{aligned} P(a < m \leq M < b, r < W(1) < s) = \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(r + 2k(b-a) < \xi < s + 2k(b-a)) - \\ - \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(2b - s + 2k(b-a) < \xi < 2b - r + 2k(b-a)). \end{aligned}$$

Приведем еще несколько результатов о *слабой сходимости* и *компактности* распределений процессов с *непрерывными* траекториями.

**Теорема 16** (Прохоров; см., например, [146; с. 259]). Пусть  $X, X^{(n)}$  ( $n \geq 1$ ) — случайные элементы со значениями в пространстве  $C(T, S)$ , где  $T$  — компакт, а  $S$  — польское пространство. Соотношение  $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} X$  справедливо тогда и только тогда, когда конечномерные распределения процессов  $X^{(n)}$  слабо сходятся к конечномерным распределениям процесса  $X$  ( $n \rightarrow \infty$ ) и

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} E(\Delta(X^{(n)}, \delta) \wedge 1) = 0,$$

$\Delta(X^{(n)}, \delta)$  — модуль непрерывности случайной функции  $X^{(n)}$ .

Рассмотрим теперь пространство  $C(T, S)$ , где  $S$  — метрическое пространство, а  $T$  — локально компактное хаусдорфово пространство со второй аксиомой счетности (последнее означает, что в пространстве имеется *счетная база*). Снабдим  $C(T, S)$  топологией *равномерной сходимости на компактах*, введя метрику

$$\rho_C(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\sup_{t \in K_n} \rho(x(t), y(t))}{1 + \sup_{t \in K_n} \rho(x(t), y(t))}, \quad (46)$$

где  $x = (x(t), t \in T), y = (y(t), t \in T) \in C(T, S)$ , а  $T$  представимо в виде

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \quad \text{где } K_n \text{ — компакты, } K_n \subset K_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (47)$$

14. Докажите, что  $X^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} X$  во введенном выше пространстве  $C(T, S)$  тогда и только тогда, когда  $X^{(n)}|_K \xrightarrow{\mathcal{D}} X|_K$  в  $C(K, S)$  для любого компакта  $K \subset T$ ; здесь, как и прежде,  $Y|_K$  означает сужение функции  $Y = \{Y_t, t \in T\}$  до функции  $Y|_K = \{Y_t, t \in K\}$ .

Этот результат, упражнение 8 и теорема 8 приводят к следующему утверждению.

15. Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные векторы в  $\mathbb{R}^m$ , для которых  $E\xi_1 = 0, E\|\xi_1\|^2 < \infty$ , где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма. Тогда процессы

$$X_t^{(n)} = n^{-1/2} \left( \sum_{k \leq nt} \xi_k + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1} \right), \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $[\cdot]$  — целая часть числа, *сходятся по распределению* при  $n \rightarrow \infty$  в пространстве  $C([0, \infty), \mathbb{R}^m)$  к стандартному  $m$ -мерному броуновскому движению, домноженному на константу.

- 16.** Пусть  $X^{(n)}$ ,  $n \geq 1$ , — непрерывные процессы на  $\mathbb{R}^d$  со значениями при каждом  $t \in \mathbb{R}^d$  в метрическом пространстве  $S$ . Докажите, что распределения этих процессов плотны в  $C(\mathbb{R}^d, S)$ , если для некоторых констант  $\alpha, \beta > 0$

$$E(\rho(X_s^{(n)}, X_t^{(n)}))^\alpha \leq \|t - s\|^{d+\beta}, \quad s, t \in \mathbb{R}^d,$$

где  $\|\cdot\|$  — некоторая норма в  $\mathbb{R}^d$ .

По изложенной выше схеме изучения слабой сходимости в пространстве  $C(T, S)$  может быть также проведено исследование слабой сходимости в *пространствах Скорохода*  $D([0, 1]^q)$  и  $D([0, \infty)^q)$ ,  $q \geq 1$ . Эти пространства состоят из функций, определенных соответственно на  $[0, 1]^q$  и  $[0, \infty)^q$ , принимающих действительные значения и таких, что они *непрерывны сверху* в каждой точке и в каждой точке  $t \neq 0$  имеют предел снизу (предел функции  $f$  сверху в  $q$ -мерной точке  $t = (t_1, \dots, t_q)$  означает, что берется предел  $f(s)$  при  $s \rightarrow t$  для  $s \neq t$  таких, что  $s_k \geq t_k, k = 1, \dots, q$ ; аналогично определяется предел снизу). Введенные пространства с помощью специальным образом заданных метрик могут быть превращены в польские, в них также вводится аналог модуля непрерывности.

По сравнению с пространствами непрерывных функций пространства Скорохода обладают следующими преимуществами. В этих пространствах близкими оказываются не только функции, получающиеся “малой деформацией” в области их значений, но и функции, получающиеся “малой деформацией” *временного* аргумента  $t$  (например, функции  $f_x(t) = \mathbf{1}_{[x, \infty)}(t)$  и  $f_y(t) = \mathbf{1}_{[y, \infty)}(t)$  не сближаются в пространстве  $C$  при  $x \rightarrow y$ , но сближаются в пространстве  $D$ ).

С данным кругом вопросов можно ознакомиться в [2] и [26].

В связи с вышесказанным рассмотрим следующую *модель случайно блуждающей частицы*. Пусть  $Y_1^{(a)}, Y_2^{(a)}, \dots$  — независимые одинаково распределенные величины и

$$P(Y_1^{(a)} = -a) = P(Y_1^{(a)} = a) = 1/2, \quad a > 0.$$

Пусть  $\xi_1^{(\lambda)}, \xi_2^{(\lambda)}, \dots$  — независимые величины, экспоненциально распределенные с параметром  $\lambda > 0$ , причем последовательности  $\{Y_n^{(a)}\}$  и  $\{\xi_m^{(\lambda)}\}$  независимы при всех  $a$  и  $\lambda$ . Предположим, что состояния частицы изменяются на  $a$  или  $-a$  в моменты

$\tau_k^{(\lambda)} = \sum_{j=1}^k \xi_j^{(\lambda)}, k = 1, 2, \dots$  (в момент  $t = 0$  частица находится в нуле). Точнее го-

воря, пусть в момент  $\tau_k^{(\lambda)}$  координата частицы равна  $\sum_{j=1}^k Y_j^{(a)}$ , это состояние сохра-

няется на промежутке  $[\tau_k^{(\lambda)}, \tau_{k+1}^{(\lambda)})$  и, таким образом, положение частицы в момент  $t$  описывает процесс  $X_t^{(a, \lambda)} = \sum_{j \leq N_\lambda(t)} Y_j^{(a)}, t \geq 0$ , где  $N_\lambda(t) = \max\{k: \tau_k^{(\lambda)} \leq t\}$  (счи-

таем  $N_\lambda(0) = 0, X_0^{(a, \lambda)} = 0$ ). Процесс  $N = \{N_\lambda(t), t \geq 0\}$  является пуассоновским согласно теореме 2 главы II).

- 17.** Исследуйте сходимость конечномерных распределений процессов  $X^{(a, \lambda)}$  при условии, что  $a \rightarrow 0$  и  $\lambda \rightarrow \infty$  таким образом, что  $a^2 \lambda = \sigma^2 > 0$  (т. е. величина *смещения* уменьшается и *соударения* учащаются). Будут ли процессы  $X^{(a, \lambda)}$  *слабо сходиться в пространстве*  $D[0, \infty)$ ?

**Замечание 3.** Изложенный в данной главе метод доказательства предельных теорем, основанный на идеях *плотности и конечномерной сходимости*, “хорошо работает” тогда, когда предельный процесс является относительно простым (например, процессом с независимыми приращениями). В тех же случаях, когда предельный процесс является более сложным (например, процессом диффузионного типа, марковским процессом, мартингалом, семимартингалом), полезно применение *мартингальных методов* (см., например, [26]) или методов, опирающихся на аппарат *марковских полугрупп* (см., например, [91]).

Наряду с принципом инвариантности Донскера–Прохорова, относящимся к слабой сходимости распределений процессов, в теории случайных процессов важную роль играют *сильные принципы инвариантности*, в которых рассматривается не близость распределений процессов, а близость их траекторий.

Пусть задана последовательность независимых (или должным образом “слабо зависимых”) величин  $\xi_1, \xi_2, \dots$  со значениями в  $\mathbb{R}$  (или в  $\mathbb{R}^m$ , или даже в некотором банаховом пространстве). Тогда можно перейти к *новой последовательности* величин  $\eta_1, \eta_2, \dots$ , заданной, вообще говоря, на другом вероятностном пространстве вместе с некоторым броуновским движением  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  так, что (при справедливости ряда условий) будут выполнены следующие два свойства:  $\text{Law}(\xi_1, \xi_2, \dots) = \text{Law}(\eta_1, \eta_2, \dots)$  и п. н.

$$\sum_{k \leq t} \eta_k - W(t) = O(h(t)) \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (48)$$

где  $h$  — некоторая неслучайная положительная функция. Запись (48) означает существование для п. в.  $\omega \in \Omega$  такого  $C(\omega) > 0$ , что

$$\left| \sum_{k \leq t} \eta_k - W(t) \right| \leq C(\omega)h(t) \quad \text{при } t > t_0(\omega, C(\omega)).$$

Вместо (48) рассматриваются также соотношения вида

$$\sum_{k \leq t} \eta_k - W(t) = o(g(t)) \quad \text{п. н. при } t \rightarrow \infty, \quad (49)$$

означающие, что  $\left| \sum_{k \leq t} \eta_k - W(t) \right| / g(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  для п. в.  $\omega \in \Omega$ , где  $g$  — некоторая неслучайная функция. Приведем один из результатов, относящихся к этому кругу вопросов.

**Теорема 17** (Штрассен, [188]). Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что  $E\xi_1 = 0$  и  $E\xi_1^2 = 1$ . Тогда справедливо соотношение (49) с  $g(t) = (t \ln \ln t)^{1/2}$ ,  $t > e$ .

Данное в [188] доказательство этой теоремы основано на представлении Скорохода (см. (III.78)). Другой мощный метод получения оценок типа (48), так называемый “*венгерский метод*”, был предложен Й. Комлошем, П. Майором и Г. Тушнади [152]. Заметим также, что наряду с аппроксимациями сумм  $\sum_{k \leq t} \eta_k$  винеровским процессом (как в (48), (49)) используются также приближения с помощью специальным образом построенных последовательностей *гауссовских* величин [122].

Из курса теории вероятностей известно, что даже для действительных случайных величин при исследовании *асимптотических* задач важен правильный выбор *типа сходимости*. Так, согласно центральной предельной теореме для независимых одинаково распределенных величин  $X_k$ ,  $k \geq 1$ , со средним 0 и дисперсией 1, имеем  $n^{-1/2} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} X$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $X \sim N(0, 1)$ . В то же время, как в этом нетрудно убедиться, *не существует* случайной величины  $Y$  такой, что  $n^{-1/2} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} Y$  при  $n \rightarrow \infty$  (а значит, нельзя говорить о пределе рассматриваемых нормированных сумм ни почти наверное, ни в среднем). В этой связи обсудим некоторые типы сходимости вероятностных мер на измеримых пространствах  $(S, \mathcal{A})$ .

Основная идея здесь заключается в том, чтобы обеспечить определенную близость интегральных функционалов  $\langle f, Q_n \rangle$  к  $\langle f, Q \rangle$  для функций  $f$  из тех или иных классов функций.

Пусть  $S$  — польское пространство. Обозначим  $B(S, \mathbb{R})$  пространство, состоящее из ограниченных  $\mathcal{A} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$  — измеримых функций  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ , снабженное нормой  $\| \cdot \|_\infty$ . Пусть  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(S)$  — пространство вероятностных мер на  $(S, \mathcal{A})$ . Определим *расстояние по вариации*  $\| \cdot \|$  между мерами  $P, Q \in \mathcal{P}$  формулой

$$\|P - Q\| = \sup \{ |\langle f, P \rangle - \langle f, Q \rangle| : f \in B(S, \mathbb{R}), \|f\|_\infty \leq 1 \}.$$

18. Проверьте, что  $\nu(P, Q) \equiv \|P - Q\|$  является расстоянием на  $\mathcal{P}$ , которое метризует *топологию равномерной сходимости* на  $\mathcal{P}$ , задаваемую системой окрестностей  $U(Q, \delta) = \{P \in \mathcal{P} : \nu(P, Q) < \delta\}$ , где  $Q \in \mathcal{P}$ ,  $\delta > 0$  (о топологических пространствах см. [35; гл. 2, § 5]).

19. Докажите, что для расстояния по вариации справедлива следующая формула:  $\|P - Q\| = 2 \sup_{A \in \mathcal{A}} |P(A) - Q(A)|$ .

20. Пусть меры  $P, Q \in \mathcal{P}$  и пусть  $P$  и  $Q$  абсолютно непрерывны относительно некоторой меры  $\lambda \in \mathcal{P}$  (такая “доминирующая” мера существует, достаточно взять  $\lambda = (P + Q)/2$ ). Обозначим  $p = dP/d\lambda$ ,  $q = dQ/d\lambda$  производные Радона–Никодема мер  $P$  и  $Q$  по мере  $\lambda$ . Докажите, что  $\|P - Q\| = \|p - q\|_{L^1(\lambda)}$ , где  $L^1(\lambda) = L^1(S, \mathcal{A}, \lambda)$ . Покажите, что  $\nu(P, Q) \leq 2$ , причем равенство достигается только если  $P - Q$  (меры *сингулярны*, т. е. имеется  $A \in \mathcal{A}$  такое, что  $P(A) = 1$  и  $Q(A) = 0$ ).

21. Докажите, что  $(\mathcal{P}(S), \nu)$  — полное метрическое пространство и что это пространство *несепарабельно*, если  $S$  — *несчетно*. Что можно сказать о сепарабельности  $(\mathcal{P}(S), \nu)$ , если  $S$  — конечно или счетно?

Используя расстояние по вариации, можно дать следующий вариант *теоремы Пуассона* об аппроксимации биномиальных вероятностей.

**Теорема 18.** Пусть  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ , где  $X_1, \dots, X_n$  — независимые величины,  $P(X_k = 1) = p_k$ ,  $P(X_k = 0) = 1 - p_k$ ,  $0 < p_k < 1$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Пусть  $Y$  — пуассоновская случайная величина с параметром  $\lambda = p_1 + \dots + p_n$ . Тогда

$$|P(S_n \in B) - P(Y \in B)| \leq \sum_{k=1}^n p_k^2$$

для любого  $B \subset \mathbb{R}$ .

Доказательство этого результата можно найти, например, в [192; с. 39]; в [85; т. 1, с. 87, 479] указаны также уточнения приведенной оценки.

В приложениях часто полезна следующая теорема.

**Теорема 19** (Шеффе; см., например, [2; с. 306]). Пусть  $Q_n$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \infty$ , — такие меры на измеримом пространстве  $(S, \mathcal{A})$ , что  $Q_n \ll \lambda$  для некоторой  $\sigma$ -конечной меры  $\lambda$  на  $(S, \mathcal{A})$ . Пусть  $dQ_n/d\lambda \rightarrow dQ_\infty/d\lambda$  п. н. по мере  $\lambda$ . Тогда  $Q_n$  сходится к  $Q_\infty$  по вариации.

С расстоянием по вариации тесно связано расстояние Какутани–Хеллингера, определяемое, с учетом обозначений в упражнении 20, формулой

$$d(P, Q) = \left( \frac{1}{2} \int_S (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 d\lambda \right)^{1/2}.$$

**22.** Проверьте, что  $d(P, Q)$  — метрика на  $\mathcal{P}(S)$ , значения которой не зависят от выбора доминирующей меры  $\lambda$ .

Заметим, что

$$d^2(P, Q) = 1 - H(1/2; P, Q),$$

где для  $\alpha \in (0, 1)$  интеграл Хеллингера определяется формулой

$$H(\alpha; P, Q) = \langle p^\alpha q^{1-\alpha}, Q \rangle.$$

По поводу разнообразных применений, использующих метрику  $d(P, Q)$  и интегралы Хеллингера  $H(\alpha; P, Q)$ , см., например, [85; т. 1, гл. III, § 9, 10].

**Теорема 20** (Штрассен). Пусть  $P, Q \in \mathcal{P}(S)$ , где  $S$  — польское пространство. Тогда для метрики Леви–Прохорова верно следующее равенство:

$$\pi(P, Q) = \inf \{ \varepsilon > 0: P(F) \leq Q(F^\varepsilon) + \varepsilon \text{ для всех замкнутых } F \subset S \}. \quad (50)$$

**23.** Рассмотрим банахово пространство  $BL$  ограниченных действительных липшицевых функций на польском пространстве  $S$ , снабженное нормой  $\|f\|_{BL} = \|f\|_\infty + L(f)$ , см. (41). Докажите, что функция

$$\|P - Q\|_{BL}^* = \sup \{ |\langle f, P \rangle - \langle f, Q \rangle| : f \in BL, \|f\|_{BL} \leq 1 \}$$

задает метрику на  $\mathcal{P}(S)$ , сходимость в которой также эквивалентна слабой сходимости. Более того, для любых  $P, Q \in \mathcal{P}(S)$  имеют место неравенства

$$\|P - Q\|_{BL}^* \leq 2\pi(P, Q), \quad h(\pi(P, Q)) \leq \|P - Q\|_{BL}^*,$$

где  $h(t) = 2t^2/(t+2)$ ,  $t \geq 0$ .

**Теорема 21** (Штрассен, см., например, [27; с. 59]). Пусть  $(S, \rho)$  — польское пространство. Метрика Леви–Прохорова  $\pi$  является минимальной метрикой для метрики Ки Фан  $\varkappa$  (метризирующей сходимость по вероятности), т. е.

$$\pi(P, Q) = \inf \{ \varkappa(X, Y) \}, \quad (51)$$

где нижняя грань берется по всем парам случайных величин  $(X, Y)$  (каждая пара задана на своем вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ) так, что  $\text{Law}(X) = P$ ,  $\text{Law}(Y) = Q$  и

$$\varkappa(X, Y) = \inf \{ \varepsilon > 0: P(\rho(X, Y) > \varepsilon) < \varepsilon \}.$$



Соотношение (51) иллюстрирует идею *каплинг-метода* (иначе — метода “соединения”) для *оценки* расстояния  $\pi(P, Q)$ , состоящего в подборе пар случайных элементов  $(X, Y)$  с заданными *маргинальными распределениями*, таких, что при этом  $X$  и  $Y$  близки по вероятности в метрике  $\rho$ . С общей теорией каплинг-метода и его разнообразными приложениями можно ознакомиться по монографиям [159, 190].

Использованию различных метрик в предельных теоремах для сумм независимых случайных величин, а также для описания устойчивости стохастических моделей, посвящены монографии [27, 175].

Отметим также, что метрический подход является весьма полезным в теории случайных процессов. Например, при широких условиях этот подход позволяет получить оптимальную оценку скорости сходимости в принципе инвариантности Донскера–Прохорова.

Предположим, что  $X_{n,i}$  ( $i = 1, \dots, m_n$ ;  $n \geq 1$ ) — последовательность серий невырожденных случайных величин, независимых в каждой серии, для которых  $EX_{n,i} = 0$ ,  $E|X_{n,i}|^s < \infty$  при некотором  $s > 2$ . Будем считать  $X_{n,i}$  нормированными так, что  $\sum_{i=1}^{m_n} \sigma_{n,i}^2 = 1$ , где  $\sigma_{n,i}^2 = DX_{n,i}$ . Положим

$L_{n,s} = \sum_{i=1}^{m_n} E|X_{n,i}|^s$ . Эта величина называется *дробью Ляпунова* (при отсутствии условия нормировки соответствующая величина определялась бы как дробь  $L_{n,s} = \sum_{i=1}^{m_n} E|X_{n,i} - EX_{n,i}|^s / \left( \sum_{i=1}^{m_n} \sigma_{n,i}^2 \right)^{s/2}$ ). Легко видеть, что *условие Ляпунова*

$$L_{n,s} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

влечет условие Линдеберга (18). Полезно отметить, что условие Линдеберга является не только достаточным, но и необходимым для выполнения центральной предельной теоремы (см. приложение 3), если слагаемые  $X_{n,i}$  удовлетворяют (22). Используется (см. [50, с. 102]) и “*условие бесконечной малости*”:

$$\max_{1 \leq i \leq m_n} P(|X_{n,i}| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{для каждого } \varepsilon > 0. \quad (52)$$

Необходимые и достаточные условия выполнения центральной предельной теоремы без предположения (52) можно найти в [27, 85].

**Теорема 22** (Боровков). Пусть для серий независимых центрированных случайных величин  $X_{n,i}$ ,  $i = 1, \dots, m_n$ ,  $n \geq 1$ , при некотором  $s \in (2, 3]$

$$E|X_{n,i}|^s < \infty, \quad i = 1, \dots, m_n, \quad n \geq 1,$$

а также  $\sum_{i=1}^{m_n} DX_{n,i} = 1$ ,  $n \geq 1$ . Тогда для случайных ломаных  $S_n(\cdot)$ , фигурирующих в теореме 8, справедлива следующая оценка:

$$\pi(\mathbb{P}_n, \mathbb{W}) \leq cL_{n,s}^{1/(s+1)}, \quad (53)$$

где  $\mathbb{P}_n$  — распределение случайной ломаной  $S_n(\cdot)$ ,  $\mathbb{W}$  — мера Винера в  $C[0, 1]$ , и  $c$  — некоторый множитель, не зависящий от  $n$ .

Подробное доказательство этого результата вместе с библиографическими ссылками и необходимым вспомогательным материалом можно найти в [7] (там же разобран пример Т. Арака, показывающий, что оценка (53) *оптимальна* с точностью до выбора постоянного множителя  $c$ ). Для  $s = 3$  доказательство приведено в [4].

В заключение этого раздела затронем вопрос, относящийся к *случайным мерам*.

Пусть  $S$  — локально компактное хаусдорфово пространство со второй аксиомой счетности и  $M(S)$  — пространство *локально конечных мер*  $\mu = \mu(\cdot)$  на борелевской  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}(S)$  (т. е. пространство мер, являющихся конечными на ограниченных множествах пространства  $S$ ), снабженное топологией, в которой непрерывны отображения

$$\pi_f: \mu \mapsto \langle f, \mu \rangle = \int_S f d\mu$$

для функций  $f$  из класса  $C_K^+$  непрерывных неотрицательных функций с компактным носителем.

24. Докажите, что  $M(S)$  — польское пространство. Для этого заметьте, что если  $f_1, f_2, \dots$  — множество, плотное в  $C_K^+$ , то функция

$$\rho(\mu, \nu) = \sum_k 2^{-k} (|\langle f_k, \mu \rangle - \langle f_k, \nu \rangle| \wedge 1), \quad \mu, \nu \in M(S),$$

метризует введенную топологию. При этом  $\mathcal{B}(M(S))$  порождается как отображениями  $\pi_f$ ,  $f \in C_K^+$  (т. е. является наименьшей  $\sigma$ -алгеброй, относительно которой измеримы все эти отображения), так и отображениями  $\pi_B: \mu \mapsto \mu(B)$  для  $B \in S_\mu$ , где  $\mu \in M(S)$ ,  $S_\mu = \{B \in \mathcal{M}: \mu(\partial B) = 0\}$ , а  $\mathcal{M}$  — совокупность ограниченных подмножеств пространства  $S$ .

**Определение 10.** Пусть заданы вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и введенное выше пространство локально конечных мер  $M(S)$ . *Случайной мерой* называется  $\mathcal{F} | \mathcal{B}(M(S))$ -измеримое отображение  $\mu: \Omega \rightarrow M(S)$ . *Точечный случайный процесс* определяется как случайная мера, принимающая значения в (замкнутом относительно введенной топологии) подмножестве  $N(S) \subset M(S)$ , состоящем из *целочисленно-значных* случайных мер.

25. Пусть  $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots$  — случайные меры на  $S$  — локально компактном хаусдорфовом пространстве со второй аксиомой счетности. Докажите, что следующие три условия эквивалентны:

1.  $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mu$  при  $n \rightarrow \infty$ ,
2.  $\langle f, \mu_n \rangle \xrightarrow{\mathcal{Q}} \langle f, \mu \rangle$  для  $f \in C_K^+$  ( $n \rightarrow \infty$ ),
3.  $(\mu_n(B_1), \dots, \mu_n(B_k)) \xrightarrow{\mathcal{Q}} (\mu(B_1), \dots, \mu(B_k))$  для  $B_1, \dots, B_k \in S_\mu, k \in \mathbb{N}$ , где  $S_\mu = \{B \in \mathcal{M}: \mu(\partial B) = 0 \text{ п. н.}\}$ .

Дальнейшие сведения о слабой сходимости мер и о различных аппроксимациях случайных процессов можно получить, обратившись, например, к следующим книгам и статьям: [2, 65, 71, 97, 98, 105, 109, 117, 168, 172, 193].

## Глава VI

### Марковские процессы.

#### Дискретное и непрерывное время

Эквивалентные определения марковского процесса. Марковость процессов с независимыми приращениями со значениями в  $\mathbb{R}^d$ . Примеры. Цепи Маркова, их построение по переходным вероятностям и начальному распределению. Пуассоновский процесс как марковская цепь. Переходная функция марковского процесса. Нахождение переходной функции  $d$ -мерного броуновского движения. Конечномерные распределения марковского процесса, их выражение через начальное распределение и переходную функцию. Однородные марковские процессы. Эргодическая теорема для однородных цепей Маркова. Следствия. Инвариантная мера. Инфинитезимальная матрица  $Q$  стохастической полугруппы  $(P(t))_{t \geq 0}$ . Обратная и прямая системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Стационарное распределение как собственный вектор матрицы  $Q^*$ . Формулы Эрланга. Модель системы массового обслуживания, приводящая к этим формулам.

§ 1. Замечательная идея А. А. Маркова, лежащая в основе всей развиваемой теории “марковских процессов”, состоит в том, что выделяется класс процессов, для которых *эволюция во времени* может быть описана следующим образом: *поведение процесса после момента  $t$  определяется не всей его предисторией, а лишь значением, которое процесс принял в момент  $t$* . Здесь уместна аналогия с классическим описанием движения “частицы”, поведение которой после момента  $t$  определяется лишь ее положением (координатами) и скоростью в момент  $t$ . Если время дискретно ( $t = 0, 1, \dots$ ), то сказанное особенно наглядно: изменение состояний изучаемого объекта представляется последовательностью шагов, где каждый шаг определяется предыдущим. Отсюда и возникло понятие *цепи Маркова*, послужившее основой разнообразных дальнейших обобщений.

Формализуем сказанное и рассмотрим ряд эквивалентных определений. Некоторые обобщения отнесены в дополнение.

Всюду в этой главе  $X = \{X_t, t \in T\}$  — случайный процесс, заданный на некотором (полном) фильтрованном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbf{P})$  с фильтрацией, расширенной классом  $\mathbf{P}$ -нулевых событий, и при каждом  $t \in T \subset \mathbb{R}$  принимающий значения в измеримом пространстве  $(S_t, \mathcal{B}_t)$ .

**Определение 1.** Процесс  $X$ , согласованный с фильтрацией  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , называется *марковским* (по отношению к этой фильтрации и мере  $\mathbf{P}$ ), если для каждого  $s \in T$

и любого события  $C \in \mathcal{F}_{\geq s} = \sigma\{X_u, u \geq s, u \in T\}$

$$P(C | \mathcal{F}_s) = P(C | X_s) \quad \text{п. н.} \quad (1)$$

Напомним, что  $P(A | \mathcal{A}) = E(1_A | \mathcal{A})$ ,  $P(A | \eta) = E(1_A | \sigma\{\eta\})$ , где  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ ,  $\eta$  — случайный элемент, заданный на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Если соотношение (1) справедливо для *некоторой* фильтрации, с которой согласован процесс  $X$ , то оно, очевидно, выполняется и для *естественной* фильтрации  $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_s^X)_{s \in T}$ , где  $\mathcal{F}_s^X = \sigma\{X_u, u \leq s, u \in T\}$ ,  $s \in T$ . Множества из  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_s^X$  и  $\mathcal{F}_{\geq s}$  интерпретируются соответственно как события из “прошлого” и “будущего” процесса  $X$  (относительно фиксированного “настоящего” момента  $s$ ). Когда говорят, что “ $X$  — марковский процесс”, то, как правило, подразумевают естественную фильтрацию.

Перед чтением этой главы было бы полезно ознакомиться с главой VIII в [85], где рассматриваются марковские цепи с дискретным временем ( $T = \mathbb{Z}_+$ ) и дискретным пространством состояний. Для таких цепей там проводится классификация состояний, поэтому в данной книге эти результаты не излагаются. Упомянутое ознакомление целесообразно, но для понимания приводимого ниже материала не является необходимым.

При первом чтении главы VI следует усвоить формулировки различных определений марковского процесса (без доказательства их эквивалентности), содержащиеся в §2–5. Полезно обратиться к примерам из §6, а далее сосредоточиться лишь на материале, относящемся к марковским цепям с дискретным и непрерывным временем (§7–9). Важной для приложений являются эргодическая теорема в §13 (для понимания которой требуется определение однородной марковской цепи, данное в §12), а также ее простые следствия (§14). Желательно изучить прямые и обратные системы уравнений Колмогорова (§17), хотя бы для случая конечного пространства состояний (см. §18).

**§ 2.** Заметим прежде всего, что всякий процесс  $X$ , состоящий из независимых действительных случайных величин  $X_t$ , где  $t \in T$ , будет марковским (это сразу вытекает из теоремы 2, доказываемой в §5). Далее, условие (1) напоминает определение мартингала и чтобы лучше понять, в чем сходство и отличие упомянутых определений, а также для построения примеров нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

**Лемма 1.** *Случайный процесс  $X$  является марковским тогда и только тогда, когда для каждого  $s \in T$  и любой ограниченной  $\mathcal{F}_{\geq s}$ -измеримой функции  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$*

$$E(F | \mathcal{F}_s) = E(F | X_s) \quad \text{п. н.} \quad (2)$$

**Доказательство.** Очевидно, (1) есть частный случай (2), когда  $F = 1_C$ ,  $C \in \mathcal{F}_{\geq s}$ . Выведем (2) из (1). Пользуясь линейностью условного математического ожидания\*) получаем, что (2) будет справедливо для “простых” функций вида

$$F = \sum_{i=1}^q \alpha_i 1_{C_i}, \text{ где } \alpha_i \in \mathbb{R}, C_i \in \mathcal{F}_{\geq s}, i = 1, \dots, q.$$

---

\*)  $E(\alpha\xi + \beta\zeta | \mathcal{A}) = \alpha E(\xi | \mathcal{A}) + \beta E(\zeta | \mathcal{A})$  п. н. для  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ , если  $E|\xi| < \infty$ ,  $E|\zeta| < \infty$ .

Из соотношения (I.4) следует, что любая  $\mathcal{A}$ -измеримая ограниченная функция  $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\sup_{\omega \in \Omega} |h(\omega)| \leq H$  для некоторой константы  $H > 0$ ) есть *равномерный* предел “простых”  $\mathcal{A}$ -измеримых функций  $h_n = \sum_{k=-2^n}^{2^n-1} r_{n,k} \mathbf{1}_{D_{n,k}}$ , где  $|r_{n,k}| \leq H$ ,  $D_{n,k} \in \mathcal{A}$ ,  $k = -2^n, \dots, 2^n - 1$ , а множества  $D_{n,k}$  образуют разбиение  $\Omega$  при каждом  $n \in \mathbb{N}$ . Имеем  $\sup_{\omega \in \Omega} |h_n(\omega)| \leq H$  и

$$\sup_{\omega \in \Omega} |h_n(\omega) - h(\omega)| \leq 2^{-n}, \quad (3)$$

откуда для любой  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$

$$|\mathbb{E}(h_n | \mathcal{H}) - \mathbb{E}(h | \mathcal{H})| \leq \mathbb{E}(|h_n - h| | \mathcal{H}) \leq 2^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Полагая  $\mathcal{A} = \mathcal{F}_{\geq s}$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{F}_s$ , а затем  $\mathcal{H} = \sigma\{X_s\}$ , видим, что (1)  $\Rightarrow$  (2). Заметим, что если  $\zeta_n \rightarrow \zeta$  п. н.,  $\tilde{\zeta}_n \rightarrow \tilde{\zeta}$  п. н. и при этом  $\zeta_n = \tilde{\zeta}_n$  п. н. ( $n \in \mathbb{N}$ ), то, учитывая полноту вероятностного пространства, имеем  $\zeta = \tilde{\zeta}$  п. н.  $\square$

Для введенного выше процесса  $X = \{X_t, t \in T\}$  и множества  $U \subset T$  определим совокупность  $\mathcal{G}(U)$  случайных величин, являющихся конечными линейными комбинациями функций вида  $\prod_{i=1}^m f_{s_i}(X_{s_i})$ , где  $f_{s_k}: S_{s_k} \rightarrow \mathbb{R}$  — ограниченные измеримые функции (варьируются  $m$ , точки  $s_k \in U$  и функции  $f_{s_k}$ ),  $k = 1, \dots, m$ .

Обозначим  $\mathcal{G}_H(U)$ , где константа  $H > 0$  и множество  $U \subset T$ , совокупность величин  $\xi \in \mathcal{G}(U)$ , для которых  $|\xi| \leq H$  п. н. Положим  $\sigma_X(U) = \sigma\{X_t, t \in U\}$ ,  $U \subset T$ .

**Лемма 2.** Пусть действительная случайная величина  $h$  является  $\sigma_X(U)$ -измеримой ( $U \subset T$ ), причем  $|h| \leq H$  п. н. для некоторой константы  $H > 0$ . Тогда  $h$  может быть получена как предел п. н. и предел в  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  последовательности случайных величин из  $\mathcal{G}_H(U)$ .

**Доказательство.** Положим  $\mathcal{A} = \sigma\{X_t, t \in U\}$  и выберем, как при доказательстве леммы 1, функции  $h_n = \sum_{k=-2^n}^{2^n-1} r_{n,k} \mathbf{1}_{D_{n,k}}$ , для которых верно (3). Заметим, что  $\mathcal{A} = \sigma\{\mathcal{L}\}$ , где алгебра  $\mathcal{L}$  состоит из множеств вида  $L = \{\omega: (X_{s_1}, \dots, X_{s_m}) \in C\}$ , а

$$C = \bigcup_{j=1}^q (C_{1j} \times \dots \times C_{mj}), \quad (4)$$

$s_1, \dots, s_m \in U$ ,  $C_{ij} \in \mathcal{B}_{s_i}$ , причем объединяемые “прямоугольники” не пересекаются,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, q$ ,  $m, q \in \mathbb{N}$ .

Для каждого  $\varepsilon > 0$  и любого  $D \in \mathcal{A}$  по лемме 3 главы I можно выбрать  $L_\varepsilon \in \mathcal{L}$  так, что  $\mathbb{P}(D \triangle L_\varepsilon) < \varepsilon$ . Поэтому для каждого  $n \geq 1$ , всех  $k = -2^n, \dots, 2^n - 1$

и любого  $\varepsilon_n \in (0, 1)$  найдутся множества  $L_{n,k} \in \mathcal{L}$  такие, что  $P(D_{n,k} \Delta L_{n,k}) < \varepsilon_n 2^{-n-1}$ . Пусть  $\tilde{h}_n = \sum_{k=-2^n}^{2^n-1} r_{n,k} \mathbf{1}_{L_{n,k}}$ . Тогда (все  $|r_{n,k}| \leq H$ )

$$\begin{aligned} E|h_n - \tilde{h}_n| &\leq \sum_{k=-2^n}^{2^n-1} |r_{n,k}| E|\mathbf{1}_{D_{n,k}} - \mathbf{1}_{L_{n,k}}| = \\ &= \sum_{k=-2^n}^{2^n-1} |r_{n,k}| P(D_{n,k} \Delta L_{n,k}) \leq H\varepsilon_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Перейдем к непересекающимся множествам

$$\hat{L}_{n,-2^n} = L_{n,-2^n} \text{ и } \hat{L}_{n,k} = L_{n,k} \setminus \bigcup_{j=-2^n}^{k-1} L_{n,j} \text{ при } k = -2^n + 1, \dots, 2^n - 1$$

и положим  $\hat{h}_n = \sum_{k=-2^n}^{2^n-1} r_{n,k} \mathbf{1}_{\hat{L}_{n,k}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $|\hat{h}_n| \leq H$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Кроме того,  $E|\tilde{h}_n - \hat{h}_n| \leq 4H\varepsilon_n 2^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Следовательно, при каждом  $n$

$$E|h - \hat{h}_n| \leq E|h - h_n| + E|h_n - \tilde{h}_n| + E|\tilde{h}_n - \hat{h}_n| \leq 2^{-n} + H\varepsilon_n(1 + 2^{n+2}).$$

Выберем  $\varepsilon_n$  так, чтобы  $\varepsilon_n 2^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $\hat{h}_n \rightarrow h$  в пространстве  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Если последовательность сходится в среднем, то она сходится и по вероятности, а значит, имеется подпоследовательность (скажем,  $\{\hat{h}_{n_k}\}$ ), сходящаяся п. н. Теперь заметим, что для введенных выше множеств  $L \in \mathcal{L}$ , где  $C$  задается соотношением (4),

$$\mathbf{1}_L(\omega) = \sum_{j=1}^q \mathbf{1}_{C_{1j}}(X_{s_1}(\omega)) \cdots \mathbf{1}_{C_{mj}}(X_{s_m}(\omega)). \quad (6)$$

Таким образом, величины  $\hat{h}_{n_k}$  обеспечивают искомую аппроксимацию (по некоторой подпоследовательности  $\{n_k\}$ ).  $\square$

**§ 3.** Ранее предполагалось, что процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$  принимает при каждом  $t \in T$  значения в произвольном измеримом пространстве  $(S_t, \mathcal{B}_t)$ . Дадим теперь критерий марковости процесса в предположении, что его значения лежат в борелевских пространствах.

**Теорема 1.** Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  — семейство борелевских пространств. Случайный процесс  $X$  является марковским тогда и только тогда, когда для каждой  $s \leq t$  ( $s, t \in T$ ) и любой ограниченной  $\mathcal{B}_t$ -измеримой функции  $f: S_t \rightarrow \mathbb{R}$

$$E(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = E(f(X_t) | X_s). \quad (7)$$

Последнее соотношение равносильно тому, что для всех  $B \in \mathcal{B}_t$

$$P(X_t \in B | \mathcal{F}_s) = P(X_t \in B | X_s). \quad (8)$$

**Доказательство.** Очевидно, (2) влечет (7). Пусть теперь выполнено (7). Покажем вначале, что (2) верно для функций  $F$  вида

$$F = \prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i}), \quad (9)$$

где берутся произвольные  $n \geq 1$ ,  $s \leq t_1 < \dots < t_n$  ( $s$  и все  $t_i$  из  $T$ ) и любые ограниченные  $\mathcal{B}_{t_i}$ -измеримые функции  $f_i: \mathcal{S}_{t_i} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Для этого применим индукцию. Пусть  $n \geq 2$  (формула (7) отвечает случаю  $n = 1$ ). Свойства условного математического ожидания и соотношение (7) дают

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(F | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(F | \mathcal{F}_{t_{n-1}}) | \mathcal{F}_s) = \\ &= \mathbb{E}(f_1(X_{t_1}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}}) \mathbb{E}(f_n(X_{t_n}) | \mathcal{F}_{t_{n-1}}) | \mathcal{F}_s) = \\ &= \mathbb{E}(f_1(X_{t_1}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}}) \mathbb{E}(f_n(X_{t_n}) | X_{t_{n-1}}) | \mathcal{F}_s) = \\ &= \mathbb{E}(f_1(X_{t_1}) \cdots \tilde{f}_{n-1}(X_{t_{n-1}}) | \mathcal{F}_s), \end{aligned}$$

здесь  $\tilde{f}_{n-1}(X_{t_{n-1}}) = f_{n-1}(X_{t_{n-1}}) \mathbb{E}(f_n(X_{t_n}) | X_{t_{n-1}})$  и мы воспользовались тем, что если  $\xi$  — действительная случайная величина с  $\mathbb{E}|\xi| < \infty$ , а случайный элемент  $\eta$  принимает значения в борелевском пространстве  $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ , то

$$\mathbb{E}(\xi | \eta) = \varphi(\eta), \quad (10)$$

где функция  $\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  является  $\mathcal{B}$ -измеримой (это утверждение нетрудно получить, рассмотрев доказательство в [85; т. 1, с. 219], проведенное там для действительной случайной величины  $\eta$ ). Кроме того, мы учли, что  $|\mathbb{E}(\xi | \eta)| \leq H$ , если  $|\xi| \leq H$ . Напомним также, что равенства и неравенства для случайных величин считаются выполненными с вероятностью единица.

Аналогично, поскольку  $\sigma\{X_s\} \subset \mathcal{F}_{t_{n-1}}$ , то

$$\mathbb{E}(F | X_s) = \mathbb{E}(f_1(X_{t_1}) \cdots \tilde{f}_{n-1}(X_{t_{n-1}}) | X_s).$$

Отсюда соотношение (2) следует для функций  $F$  вида (9), а значит, и для их линейных комбинаций.

Взяв в лемме 2 множество  $U = [s, \infty) \cap T$ , т. е.  $\sigma_X(U) = \mathcal{F}_{\geq s}$ , и ограниченную функцию  $h = F \in \mathcal{F}_{\geq s} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\mathbb{E}(F | \mathcal{F}_s) - \mathbb{E}(\hat{h}_n | \mathcal{F}_s)| &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}|F - \hat{h}_n| | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}|F - \hat{h}_n|, \\ \mathbb{E}|\mathbb{E}(F | X_s) - \mathbb{E}(\hat{h}_n | X_s)| &\leq \mathbb{E}|F - \hat{h}_n|, \end{aligned}$$

где  $\hat{h}_n \in \mathcal{G}_H(U)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  и  $|F| \leq H$ . Поэтому существует подпоследовательность  $\{n_k\}$ , для которой  $\mathbb{E}(\hat{h}_{n_k} | \mathcal{F}_s) \rightarrow \mathbb{E}(F | \mathcal{F}_s)$  п. н. и  $\mathbb{E}(\hat{h}_{n_k} | X_s) \rightarrow \mathbb{E}(F | X_s)$  п. н. при  $k \rightarrow \infty$ . По доказанному (для функций  $F$  вида (9))  $\mathbb{E}(\hat{h}_n | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\hat{h}_n | X_s)$  п. н. при всех  $n \in \mathbb{N}$ , что приводит к выполнению (2) в общем случае.

Равносильность (7) и (8) проверяется совершенно аналогично доказательству леммы 1.  $\square$

**Замечание 1.** Если параметрическое множество  $T = \mathbb{Z}_+ (= \{0, 1, \dots\})$ , то в условиях (7) и (8) теоремы 1 достаточно брать лишь  $t = s + 1$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ .

§ 4. Доказанная теорема 1 позволяет следующим образом сопоставить определения *мартингала* и *марковского процесса*. Далее параметрическое множество  $T \subset \mathbb{R}$ , вообще говоря, не предполагается дискретным.

**Следствие 1.** Действительный марковский (относительно некоторой фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ ) процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$  является мартингалом  $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$  в том и только том случае, если

$$\mathbb{E}|X_t| < \infty \quad \text{и} \quad \mathbb{E}(X_t | X_s) = X_s \quad \text{для} \quad s \leq t \quad (s, t \in T). \quad (11)$$

**Доказательство.** Возьмем для  $n \geq 1$  функцию  $f(x) = x \cdot \mathbf{1}_{\{|x| \leq n\}}$  и, подставив ее в соотношение (7), совершим предельный переход (см. [85; т. 2, с. 299]) при  $n \rightarrow \infty$ . В итоге приходим к искомому утверждению.  $\square$

§ 5. Дадим еще одну удобную форму проверки марковости процесса (со значениями в борелевских пространствах) относительно *естественной* фильтрации.

**Теорема 2.** Марковость процесса  $X = \{X_t, t \in T\}$ , принимающего при каждом  $t \in T$  значения в борелевском пространстве  $(S_t, \mathcal{B}_t)$ , равносильна следующему свойству: для любого  $m \geq 1$  и всех  $s_1 < \dots < s_m < s \leq t$  ( $s, t$  и все  $s_i$  из  $T$ ), а также для произвольной ограниченной  $\mathcal{B}_t$ -измеримой функции  $f$

$$\mathbb{E}(f(X_t) | X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_s) = \mathbb{E}(f(X_t) | X_s). \quad (12)$$

Последнее соотношение эквивалентно тому, что для любого множества  $B \in \mathcal{B}_t$

$$\mathbb{P}(X_t \in B | X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_s) = \mathbb{P}(X_t \in B | X_s). \quad (13)$$

**Доказательство.** Пусть выполнено свойство (7). Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X_t) | X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_s) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X_t) | \mathcal{F}_s^X) | X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_s) = \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X_t) | X_s) | X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_s) = \mathbb{E}(f(X_t) | X_s), \end{aligned}$$

т. е. имеет место и свойство (12).

Пусть теперь справедливо (12). Случайная величина  $\mathbb{E}(f(X_t) | X_s)$  является  $\sigma\{X_s\}$ -измеримой и, следовательно,  $\mathcal{F}_s^X$ -измеримой. Поэтому для доказательства (7) надо убедиться в том, что при любом  $A \in \mathcal{F}_s^X$

$$\mathbb{E} \mathbf{1}_A \mathbb{E}(f(X_t) | X_s) = \mathbb{E} \mathbf{1}_A f(X_t). \quad (14)$$

Согласно (12) последнее равенство верно для событий  $A$ , входящих в алгебру, порождающую  $\mathcal{F}_s^X$ , т. е. для множеств вида  $A = \{(X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_s) \in C\}$ , где

$$C \in \mathcal{B}_{s_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{s_m} \otimes \mathcal{B}_s, \quad s_1 < \dots < s_m < s, \quad m \geq 1.$$



Алгебра является  $\pi$ -системой, а совокупность множеств  $A$ , удовлетворяющих соотношению (14), очевидно, образует  $\lambda$ -систему. Поэтому требуемое утверждение вытекает из теоремы о монотонных классах (теорема 1 главы I).

Равносильность утверждений (12) и (13) устанавливается аналогично доказательству леммы 1.  $\square$

**§ 6.** Рассмотрим некоторые примеры. В классе марковских процессов со значениями в пространстве  $\mathbb{R}^d$  особую роль (ввиду их относительной простоты) играют процессы с независимыми приращениями. Свойство марковости этих процессов обеспечивает

**Теорема 3.** Пусть  $X = \{X_t, t \in T\}$  — процесс с независимыми приращениями, принимающий значения в  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ . Тогда  $X$  — марковский процесс (относительно естественной фильтрации).

**Доказательство.** Имеем

$$\sigma\{X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_t\} = \sigma\{X_{s_1}, X_{s_2} - X_{s_1}, \dots, X_t - X_{s_m}\},$$

поскольку векторы в фигурных скобках связаны невырожденным линейным преобразованием. Нетрудно показать (например, используя лемму 2), что если  $\xi$  и  $\zeta$  — независимые случайные векторы соответственно со значениями в  $\mathbb{R}^k$  и  $\mathbb{R}^l$ , а функция  $g: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$  есть ограниченная борелевская функция (т. е.  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+l}) \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримое отображение), то

$$\mathbb{E}(g(\xi, \zeta) \mid \zeta = y) = \mathbb{E}g(\xi, y), \quad y \in \mathbb{R}^l \quad (15)$$

( $\varphi(y) = \mathbb{E}(\nu \mid \zeta = y)$  означает, что в качестве  $\mathbb{E}(\nu \mid \zeta)$  можно взять  $\varphi(\zeta)$ , см. (10)).

Теперь заметим, что для  $0 \leq s_1 < \dots < s_m \leq t \leq u$  (точки из  $T$ ) и ограниченной  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримой функции  $f$

$$\mathbb{E}(f(X_u) \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_t) = \mathbb{E}\left(f\left(\xi + \sum_{i=1}^{m+1} \zeta_i\right) \mid \zeta_1, \dots, \zeta_{m+1}\right),$$

где  $\zeta_1 = X_{s_1}$ ,  $\zeta_2 = X_{s_2} - X_{s_1}$ , ...,  $\zeta_m = X_{s_m} - X_{s_{m-1}}$ ,  $\zeta_{m+1} = X_t - X_{s_m}$ ,  $\xi = X_u - X_t$ . Следовательно, для всех  $y_1, \dots, y_{m+1} \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{E}\left(f\left(\xi + \sum_{i=1}^{m+1} \zeta_i\right) \mid \zeta_1 = y_1, \dots, \zeta_{m+1} = y_{m+1}\right) = \mathbb{E}f\left(\xi + \sum_{i=1}^{m+1} y_i\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^{m+1} y_i\right),$$

где  $\psi$  — (ограниченная) борелевская функция. Это легко устанавливается для “простых” функций, фигурирующих в лемме 1, которые равномерно по  $\omega \in \Omega$  аппроксимируют функцию  $f(\xi(\omega) + x)$  при каждом фиксированном  $x \in \mathbb{R}^d$ . (Для этого с помощью теоремы о монотонных классах проверяется, что  $P(\xi + x \in B)$  есть борелевская функция по  $x$  при каждом  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , а затем применяется лемма 5 главы I.)

Таким образом, Р-п. н.

$$\mathbb{E}(f(X_u) \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_t) = \psi\left(\sum_{i=1}^{m+1} \zeta_i\right).$$

Осталось теперь лишь заметить, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X_u) | X_t) &= \mathbb{E}\left(f\left(\xi + \sum_{i=1}^{m+1} \zeta_i\right) \middle| \sum_{i=1}^{m+1} \zeta_i\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(f\left(\xi + \sum_{i=1}^{m+1} \zeta_i\right) \middle| \zeta_1, \dots, \zeta_{m+1}\right) \middle| \sum_{i=1}^{m+1} \zeta_i\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(\psi\left(\sum_{i=1}^{m+1} \zeta_i\right) \middle| \sum_{i=1}^{m+1} \zeta_i\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^{m+1} \zeta_i\right). \quad \square \end{aligned}$$

**Следствие 2.** *Процесс частных сумм  $S_n = \xi_0 + \dots + \xi_n$ ,  $n \geq 0$  (где  $\xi_0, \xi_1, \dots$  — независимые векторы в  $\mathbb{R}^d$ ), пуассоновский процесс и броуновское движение в  $\mathbb{R}^d$  являются марковскими процессами.*

Естественное обобщение процесса частных сумм содержится в следующем примере.

**Пример 1.** Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  заданы независимые случайные векторы  $\xi_1, \xi_2, \dots$  со значениями в  $\mathbb{R}^d$  и не зависящий от них случайный вектор  $X_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Положим

$$X_{n+1} = h_{n+1}(X_n, \xi_{n+1}), \quad n \geq 0, \quad (16)$$

где борелевские функции  $h_n: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Тогда  $X = \{X_n, n \geq 0\}$  — марковский процесс.

Для проверки этого утверждения воспользуемся замечанием 1. При любом  $n \geq 0$ , произвольной ограниченной борелевской функции  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  и всех  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^m$  имеем в силу (15), что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X_{n+1}) | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= \\ &= \mathbb{E}(f(h_{n+1}(X_n, \xi_{n+1})) | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \\ &= \mathbb{E}(f(h_{n+1}(x_n, \xi_{n+1}))) = g(x_n). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1}) | X_n = x_n) = g(x_n),$$

откуда и следует искомый результат. Отметим, что этот пример, в определенном смысле, носит общий характер (см. упражнение 19).

Обширный класс марковских процессов дают *решения* стохастических дифференциальных уравнений (см. далее §18 главы VIII).

§ 7. Обратимся к наиболее важному случаю, когда при каждом  $t \in T \subset \mathbb{R}$  марковский процесс принимает значения в *одном и том же* множестве  $S$ , называемом *фазовым пространством* или *пространством состояний* (точнее говоря, будем предполагать, что  $(S_t, \mathcal{B}_t) = (S, \mathcal{B})$  при всех  $t \in T$ , где  $(S, \mathcal{B})$  — некоторое измеримое пространство).

Пусть вначале фазовое пространство  $S$  изучаемого марковского процесса *дискретно*, т. е. состоит из конечного или счетного числа (занумерованных) точек. Точку  $x_i \in S$  отождествим с ее номером  $i$ , при этом будем считать, что  $i$  пробегает либо конечное множество  $\{0, 1, \dots, r\}$ , либо счетное  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ . Пусть  $\mathcal{B}$  состоит из всех подмножеств  $S$ . Пространство  $(S, \mathcal{B})$  является *польским*, если ввести метрику, положив  $\rho(x, y) = 1$  при  $x \neq y$  и  $\rho(x, x) = 0$ , где  $x, y \in S$ . Заметим также, что в рассматриваемом “дискретном” случае любая функция  $g: S \rightarrow \mathbb{R}$  является  $\mathcal{B}$ -измеримой.

**Определение 2.** *Марковский процесс с дискретным пространством состояний называется цепью Маркова (и в случае дискретного, и в случае непрерывного времени).*

Проанализируем подробнее в рассматриваемом случае *марковское свойство*.

Пусть  $\mathcal{A}$  обозначает  $\sigma$ -алгебру, порожденную разбиением  $\Omega$  на множества  $A_j$ , где  $j \in J$ ,  $J$  — конечное или счетное множество  $\left(\bigcup_{j \in J} A_j = \Omega, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ при } i \neq j\right)$ .

Если  $\xi$  — случайная величина с  $E|\xi| < \infty$ , то условное математическое ожидание  $E(\xi | \mathcal{A}) = E(\xi | \mathcal{A})(\omega)$  на множествах разбиения  $A_j$  с  $P(A_j) > 0$  может быть задано формулой

$$E(\xi | \mathcal{A})(\omega) = \frac{E\xi \mathbf{1}_{A_j}}{P(A_j)}, \quad \omega \in A_j. \quad (17)$$

Если  $P(A_j) = 0$ , то  $E(\xi | \mathcal{A})(\omega)$  для  $\omega \in A_j$  можно считать произвольным числом  $a_j$ . Взяв в (17)  $\xi = \mathbf{1}_B$ , получим

$$P(B | \mathcal{A})(\omega) = P(B \cap A_j) / P(A_j) \quad \text{при } \omega \in A_j \text{ и } P(A_j) > 0.$$

Для изучаемого процесса  $X = \{X_t, t \in T\}$  и любого набора точек  $t_1, \dots, t_n \in T$   $\sigma$ -алгебра  $\sigma\{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\}$  порождается разбиением пространства  $\Omega$  на события вида  $\{X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_n} = j_n\}$ , где  $j_1, \dots, j_n \in S$ .

С учетом сказанного из (13) выводим, что процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$  является *цепью Маркова тогда и только тогда, когда для любого  $m \geq 1$ , всех точек  $s_1 < \dots < s_m < s \leq t$  (являющихся точками из  $T$ ) и любых  $i, j, i_1, \dots, i_m \in S$  справедливо равенство*

$$P(X_t = j | X_{s_1} = i_1, \dots, X_{s_m} = i_m, X_s = i) = P(X_t = j | X_s = i) \quad (18)$$

(во всех тех случаях, когда  $P(X_{s_1} = i_1, \dots, X_{s_m} = i_m, X_s = i) \neq 0$ ).

Положим  $S_s = \{i \in S: P(X_s = i) \neq 0\}$ ,  $s \in T$ .

**Определение 3.** *Переходными вероятностями марковской цепи называются функции*

$$p_{ij}(s, t) = P(X_t = j | X_s = i), \quad \text{где } s \leq t (s, t \in T), \quad i \in S_s, \quad j \in S_t. \quad (19)$$

Из этого определения легко получить, что функции  $p_{ij}(s, t)$  удовлетворяют условиям:

- 1)  $p_{ij}(s, t) \geq 0$  для любых  $i \in S_s, j \in S_t$ , и  $s \leq t, s, t \in T$ ;

- 2)  $\sum_{j \in S_t} p_{ij}(s, t) = 1$  для любых  $i \in S_s$  и  $s \leq t, s, t \in T$ ;  
 3)  $p_{ij}(s, s) = \delta_{ij}$  для любых  $i \in S_s, j \in S_t$  и  $s \in T$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  
 4) для любых  $i \in S_s, j \in S_t$  и всех  $s \leq u \leq t (s, u, t \in T)$

$$p_{ij}(s, t) = \sum_{k \in S_u} p_{ik}(s, u) p_{kj}(u, t). \quad (20)$$

Действительно, условия 1)–3) очевидны. Проверка соотношения 4), иногда называемого *уравнением Маркова*, проводится (с учетом (18)) следующим образом:

$$\begin{aligned} p_{ij}(s, t) &= P(X_t = j \mid X_s = i) = \frac{P(X_t = j, X_s = i)}{P(X_s = i)} = \\ &= \sum_k \frac{P(X_t = j, X_u = k, X_s = i)}{P(X_s = i)} = \\ &= \sum_{k: P(X_u = k, X_s = i) \neq 0} P(X_t = j \mid X_u = k, X_s = i) \frac{P(X_u = k, X_s = i)}{P(X_s = i)} = \\ &= \sum_{k \in S_u} P(X_t = j \mid X_u = k) P(X_u = k \mid X_s = i) = \\ &= \sum_{k \in S_u} p_{ik}(s, u) p_{kj}(u, t). \end{aligned} \quad (21)$$

**Замечание 2.** Отправляясь от функций  $p_{ij}(s, t)$ , заданных для  $s \leq t (s, t \in T)$ ,  $i \in S_s, j \in S_t$ , можно оперировать с их *продолжениями*, определенными для  $s \leq t (s, t \in T)$  и всех  $i, j \in S$ . Для этого достаточно положить  $p_{ij}(s, t) = 0$  при  $i \in S_s, j \notin S_t$  и  $p_{ij}(s, t) = p_{i_0j}(s, t)$  при  $i \notin S_s, j \in S$ , где  $i_0 = i_0(s) \in S_s$  выбрано произвольно ( $S_s \neq \emptyset$ ). При этом легко убедиться, что свойства 1)–4) переходных вероятностей будут верны и для их продолжений. Именно поэтому, как правило, предполагается, что такое продолжение уже осуществлено и  $S_t = S$  для всех  $t \in T$ .

**Определение 4.** Начальным распределением марковской цепи  $X = \{X_t, t \in T\}$ , где  $0 \in T = [0, \infty)$ , называют меру  $\mu = \text{Law}(X_0)$ .

Ясно, что  $P(X_0 \in B) = \sum_{i \in B} p_i(0)$  для любого  $B \subset S$ , где

$$p_i(0) = P(X_0 = i), \quad i \in S. \quad (22)$$

§ 8. Обратимся к рассмотрению свойств конечномерных распределений марковских цепей.

**Теорема 4.** Конечномерные распределения марковской цепи  $X = \{X_t, t \in T\}$ , где  $0 \in T \subset [0, \infty)$ , однозначно определяются переходными вероятностями  $p_{ij}(s, t)$  и начальным распределением  $\mu$ , т. е. набором  $p_i(0) (s, t \in T, s \leq t, i, j \in S)$ .

**Доказательство.** Для  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$  ( $t_k \in T$ ,  $k = 1, \dots, n$ ),  $n \geq 2$ , и любых  $j_1, \dots, j_n \in S$ , обозначив  $A = \{X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_{n-1}} = j_{n-1}\}$ , имеем

$$\begin{aligned} P(X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_n} = j_n) &= P(X_{t_n} = j_n | A)P(A) = \\ &= P(X_{t_n} = j_n | X_{t_{n-1}} = j_{n-1})P(A) = \\ &= P(X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_{n-1}} = j_{n-1}) \cdot p_{j_{n-1}, j_n}(t_{n-1}, t_n). \end{aligned}$$

Этот вывод, основанный на определении условной вероятности и формуле (18), предполагает, что  $P(X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_{n-1}} = j_{n-1}) \neq 0$ . Однако полученное равенство справедливо и при  $P(X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_{n-1}} = j_{n-1}) = 0$  (функция  $p_{j_{n-1}, j_n}(t_{n-1}, t_n)$  всегда определена, согласно замечанию 2).

Таким образом, приходим к формуле

$$P(X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_n} = j_n) = P(X_{t_1} = j_1) \cdot p_{j_1, j_2}(t_1, t_2) \cdots p_{j_{n-1}, j_n}(t_{n-1}, t_n), \quad (23)$$

имеющей вполне наглядный смысл. А именно, будем считать, что в момент  $t_1$  некоторая “система” начинает свое движение из состояния  $j_1$ , переходя за время от  $t_1$  до  $t_2$  в состояние  $j_2, \dots$ , за время от  $t_{n-1}$  до  $t_n$  система совершает переход из  $j_{n-1}$  в  $j_n$ . Тогда формула (23) означает, что для подсчета вероятности “маршрута”  $\{X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_n} = j_n\}$  надо поступить следующим (весьма естественным образом, если принимать во внимание, что рассматриваемая система функционирует по принципу “беспоследствия”): взять вероятность начального состояния  $P(X_{t_1} = j_1)$  и умножить ее на (условные) вероятности переходов “системы” ( $j_{k-1} \rightarrow j_k$ ) за соответствующее время от  $t_{k-1}$  до  $t_k$ , где  $k = 2, \dots, n$ .

По формуле полной вероятности

$$P(X_{t_1} = j_1) = \sum_i p_i(0) p_{ij_1}(0, t_1),$$

что позволяет, в силу (23), для любого  $B \subset S^n$  найти искомое выражение *конечно-мерных распределений*:

$$P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B) = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in B} \sum_i p_i(0) p_{ij_1}(0, t_1) \cdots p_{j_{n-1}, j_n}(t_{n-1}, t_n). \quad \square \quad (24)$$

Справедливо и обратное утверждение.

**Теорема 5.** Пусть  $0 \in T \subset [0, \infty)$ , а некоторые непустые множества  $S_s \subset S$ ,  $s \in T$ , где  $S$  — конечно или счетно. Пусть задан набор  $p_i(0) > 0$ ,  $i \in S_0$ , такой, что  $\sum_{i \in S_0} p_i(0) = 1$ , и заданы функции  $p_{ij}(s, t)$  при  $s \leq t$  ( $s, t \in T$ ),  $i \in S_s$ ,  $j \in S_t$ , для которых выполнены приведенные в § 7 условия 1)–4). Тогда на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  существует марковская цепь  $X = \{X_t, t \in T\}$  с пространством состояний  $S_t$  при каждом  $t \in T$  (т. е.  $X_t(\omega) \in S_t$  при любом  $t \in T$  для всех  $\omega \in \Omega$ ) такая, что справедливы соотношения (22) и (19).

**Доказательство.** Если бы марковский процесс  $X$  с данными характеристиками (22) и (19) существовал, то его конечномерные распределения должны были бы определяться формулой (24). Поэтому ничего другого не остается, как ввести меры  $P_{t_1, \dots, t_n}$  на  $\mathcal{B}^n$  (для  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) с помощью правой части равенства (24) и проверить их согласованность. То, что при этом на  $\mathcal{B}^n$  возникают вероятностные меры, обеспечивается требованиями, налагаемыми в условиях теоремы на  $p_i(0)$  и  $p_{ij}(s, t)$  (счетная аддитивность имеет место, поскольку ряды из неотрицательных чисел можно суммировать в любом порядке). Для согласованности мер  $P_{t_1, \dots, t_n}$  в силу замечания 3 главы I достаточно убедиться лишь в выполнении условия 3° §11 главы I. Оно верно в силу условий 2), 3) и 4), которым удовлетворяют функции  $p_{ij}(s, t)$ ; условие 3) обеспечивает согласованность, когда рассматриваются и не только несовпадающие друг с другом точки  $t_1, \dots, t_n$ . Следовательно, по теореме Колмогорова существует процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$  с данными конечномерными распределениями  $P_{t_1, \dots, t_n}$  ( $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ). Этот процесс будет марковским, поскольку (24) влечет (23), откуда немедленно вытекает (18), а также (19). Кроме того, полагая в (24)  $n = 1$  и  $t_1 = 0$ , получаем (22).  $\square$

§ 9. Важнейшим представителем марковских цепей с непрерывным временем является пуассоновский процесс, определенный в §2 главы II.

**Теорема 6.** Процесс  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  является пуассоновским (с ведущей локально-конечной мерой  $m$  на  $\mathcal{B}([0, \infty)$ ,  $m([0, \infty) = \infty)$ ) тогда и только тогда, когда  $N$  — цепь Маркова с пространством состояний  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ , для которой  $p_i(0) = \delta_{i0}$  и переходные вероятности

$$p_{ij}(s, t) = \begin{cases} \frac{(m((s, t]))^{j-i}}{(j-i)!} e^{-m((s, t])}, & j \geq i, \\ 0, & j < i, \end{cases} \quad (25)$$

где  $0 \leq s < t$ ,  $i, j \in S$  и  $p_{ij}(s, s) = \delta_{ij}$  для  $s \geq 0$ ,  $i, j \in S$  ( $0^0$  считается равным 1).

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $N$  — пуассоновский процесс:  $N_0 = 0$  п. н., процесс имеет независимые приращения и  $N_t - N_s \sim \pi_{m((s, t])}$  при  $t > s \geq 0$ , т. е. приращение  $N_t - N_s$  распределено по закону Пуассона с параметром  $m((s, t])$ . В силу теоремы 3 процесс  $N$  является марковским, при этом п. н.  $N_t = N_t - N_0 \sim \pi_{m((0, t])}$ ,  $t > 0$ , и  $P(N_t \in S) = 1$ , где  $S = \{0, 1, \dots\}$ . Очевидно также, что  $p_i(0) = P(N_0 = i) = \delta_{i0}$ ,  $i \in S$ .

Для  $0 \leq s < t$  имеем

$$p_{ij}(s, t) = P(N_t = j \mid N_s = i) = \frac{P(N_t - N_s = j - i, N_s = i)}{P(N_s = i)} = P(N_t - N_s = j - i),$$

что в силу указанного свойства распределений  $N_t - N_s$  дает формулу (25). При  $s \geq 0$  для всех  $i, j \in S$  находим, что  $p_{ij}(s, s) = P(N_s = j \mid N_s = i) = \delta_{ij}$ .

**Достаточность.** Пусть  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  — цепь Маркова с переходными вероятностями (25) и начальным распределением, сосредоточенным в нуле. Очевидно,

$N_0 = 0$  п. н., поскольку  $p_i(0) = \delta_{i0}$ ,  $i \in S$ . Для  $s < t$  и  $k \geq 0$  имеем, пользуясь (23) и (25),

$$\begin{aligned} P(N_t - N_s = k) &= \sum_{l=0}^{\infty} P(N_t - N_s = k, N_s = l) = \sum_{l=0}^{\infty} P(N_t = k + l, N_s = l) = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_i p_i(0) p_{il}(0, s) p_{l, k+l}(s, t) = \sum_{l=0}^{\infty} p_{0l}(0, s) p_{l, k+l}(s, t) = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(m((0, s]))^l}{l!} e^{-m((0, s])} \frac{(m((s, t]))^k}{k!} e^{-m((s, t])} = \\ &= \frac{(m((s, t]))^k}{k!} e^{-m((s, t])}. \end{aligned} \quad (26)$$

Итак,  $N_t - N_s \sim \pi_{m((s, t])}$ ,  $0 \leq s \leq t$ . Для доказательства независимости приращений воспользуемся формулами (23) и (26). С их учетом находим, что для  $n \geq 2$ ,  $0 = t_0 \leq t_1 < \dots < t_n$  и  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  вероятность

$$\begin{aligned} P(N_{t_1} = k_1, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n) &= \\ &= P(N_{t_1} = k_1, N_{t_2} = k_1 + k_2, \dots, N_{t_n} = k_1 + \dots + k_n) = \\ &= \sum_i p_i(0) p_{ik_1}(0, t_1) p_{k_1, k_1+k_2}(t_1, t_2) \dots p_{k_1+\dots+k_{n-1}, k_1+\dots+k_n}(t_{n-1}, t_n) = \\ &= \frac{(m((0, t_1]))^{k_1}}{k_1!} e^{-m((0, t_1])} \frac{(m((t_1, t_2]))^{k_2}}{k_2!} e^{-m((t_1, t_2])} \times \\ &\quad \times \dots \times \frac{(m((t_{n-1}, t_n]))^{k_n}}{k_n!} e^{-m((t_{n-1}, t_n])} = \\ &= \prod_{m=1}^n P(N_{t_m} - N_{t_{m-1}} = k_m). \end{aligned} \quad (27)$$

Отсюда следует независимость соответствующих приращений.  $\square$

**§ 10.** Введем понятие *переходной функции*, играющей ключевую роль при построении марковских процессов.

Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  — семейство измеримых пространств, множество  $T \subset \mathbb{R}$ .

**Определение 5.** Функция  $P(s, x, t, B)$ , заданная для  $s \leq t$  ( $s, t \in T$ ,  $x \in S$ ,  $B \in \mathcal{B}_t$ ), называется *переходной функцией* (или *марковской переходной функцией*), если:

- 1) при фиксированных  $s, x, t$  функция  $P(s, x, t, \cdot)$  является мерой на  $(S_t, \mathcal{B}_t)$ ;
- 2) при фиксированных  $s, t, B$  функция  $P(s, \cdot, t, B)$  является  $\mathcal{B}_s | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримой;
- 3)  $P(s, x, s, B) = \delta_x(B)$  при любых  $s \in T$ ,  $x \in S_s$ ,  $B \in \mathcal{B}_s$ ;
- 4) при *всех*  $s < u < t$  ( $s, u, t \in T$ ),  $x \in S_s$ ,  $B \in \mathcal{B}_t$  выполняется уравнение Колмогорова–Чепмена:

$$P(s, x, t, B) = \int_{S_u} P(s, x, u, dy) P(u, y, t, B). \quad (28)$$

Заметим, что в силу требования 3) соотношение (28) верно для переходной функции и при  $s \leq u \leq t$ .

**Определение 6.** Говорят, что марковский процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$  (со значениями в  $(S_t, \mathcal{B}_t)$  при каждом  $t \in T$ ) *обладает переходной функцией*  $P(s, x, t, B)$ , если при всех  $s \leq t$  ( $s, t \in T$ ),  $B \in \mathcal{B}_t$

$$P(X_t \in B | X_s) = P(s, X_s, t, B) \quad \text{п. н.} \quad (29)$$

или, что то же самое,  $P(s, x, t, B) = P(X_t \in B | X_s = x)$  п. н. по мере  $P_{X_s}$ .

Понятен смысл данного определения: у марковского процесса с переходной функцией существует “хороший” (в смысле сформулированных выше свойств 1)–4)) вариант условного распределения, стоящего в левой части (29).

Пользуясь свойствами условного математического ожидания, в случае борелевских пространств  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  легко пояснить происхождение условия (28). В силу (29), (IV.2) и (13) для  $s \leq u \leq t$  ( $s, u, t \in T$ ) и  $B \in \mathcal{B}_t$  имеем (п. н.)

$$\begin{aligned} P(s, X_s, t, B) &= E(1\{X_t \in B\} | X_s) = E(E(1\{X_t \in B\} | X_s, X_u) | X_s) = \\ &= E(E(1\{X_t \in B\} | X_u) | X_s) = E(P(u, X_u, t, B) | X_s). \end{aligned}$$

Иначе говоря, для  $P_{X_s}$ -почти всех  $x$

$$P(s, x, t, B) = E(P(u, X_u, t, B) | X_s = x). \quad (30)$$

Теперь заметим (см. [85; т. 1, с. 281]), что если имеется *регулярная условная вероятность*  $?(C) = P(X_u \in C | X_s = x)$  (где  $?$  зависит от  $s, u, x$ ), то для любой ограниченной функции  $g \in \mathcal{B}_u | \mathcal{B}(\mathbb{R})$  получаем

$$E(g(X_u) | X_s = x) = \int_{S_u} g(y) ?(dy) \quad (P_{X_s}\text{-п. н.}). \quad (31)$$

Напомним, что регулярная условная вероятность  $P(\nu \in B | \zeta)$  заведомо существует, если случайный элемент  $\nu$  принимает значения в *борелевском* пространстве.

Итак, из (30) и (31) вытекает, что для *произвольных* марковских процессов имеет место лишь *ослабленный* вариант равенства (28), справедливый не для *всех*  $x \in S$ , а лишь для *почти всех*  $x \in S$  (по мере  $P_{X_s}$ ).

Отметим, что для марковских цепей, рассмотренных в § 5, переходная функция существует и дается формулой

$$P(s, i, t, B) = \sum_{j \in B} p_{ij}(s, t), \quad (32)$$

где  $s \leq t$  ( $s, t \in T$ ),  $i \in S$  ( $S$  конечно или счетно),  $B$  — любое подмножество  $S$ .

В общем же случае вопрос о существовании у марковского процесса переходной функции *не является тривиальным*. Для процессов с *дискретным временем*, принимающих значения в произвольных измеримых пространствах, наличие переходной функции — факт известный (см., например, [17; т. 1, гл. II, § 4]). Существование же переходной функции для марковских процессов с *непрерывным временем*, принимающих значения в универсально измеримых пространствах, доказано лишь сравнительно недавно С. Е. Кузнецовым.



**Пример 2.** Пусть  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  —  $m$ -мерное броуновское движение. Тогда, применяя (15), получаем (обозначив  $\|\cdot\|$  евклидову норму в  $\mathbb{R}^m$ ), что при  $s < t$

$$\begin{aligned} P(W(t) \in B \mid W(s) = x) &= E(\mathbf{1}_{\{W(t)-W(s)+W(s) \in B\}} \mid W(s) = x) = \\ &= E\mathbf{1}_{\{W(t)-W(s)+x \in B\}} = P(W(t) - W(s) \in B - x) = \\ &= \frac{1}{(2\pi(t-s))^{m/2}} \int_{B-x} e^{\frac{-\|z\|^2}{2(t-s)}} dz = \\ &= \frac{1}{(2\pi(t-s))^{m/2}} \int_B e^{\frac{-\|z-x\|^2}{2(t-s)}} dz. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что для  $s < t$  переходная функция здесь дается формулой

$$P(s, x, t, B) = \frac{1}{(2\pi(t-s))^{m/2}} \int_B e^{\frac{-\|y-x\|^2}{2(t-s)}} dy, \quad (33)$$

поскольку при  $s < t$  все требования 1)–4), очевидно, выполнены (для проверки (28) надо вспомнить, что свертка нормальных распределений дает нормальное распределение).

Если же  $t = s$ , то (15), независимость  $W(s)$  и  $0 \in \mathbb{R}^m$  влекут

$$P(W(s) \in B \mid W(s) = x) = P(W(s) + 0 \in B \mid W(s) = x) = P(x + 0 \in B) = \delta_x(B).$$

Следовательно,  $P(s, x, s, B) = \delta_x(B)$ .

**§ 11.** Пусть марковский процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$  принимает значения в измеримых пространствах  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  и обладает переходной функцией  $P(s, x, t, B)$ . Аналогично рассмотрению в § 8 марковских цепей можно доказать, что при любом  $n \geq 1$ , всех  $s_0 \leq t_1 < \dots < t_n$  (точки из  $T$ ) и произвольных  $B_k \in \mathcal{B}_{t_k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , конечномерные распределения процесса  $X$  задаются формулой

$$\begin{aligned} P_{t_1, \dots, t_n}(C) &= \int_{S_{s_0}} Q_{s_0}(dx) \int_{S_{t_1}} P(s_0, x, t_1, dz_1) \mathbf{1}_{B_1}(z_1) \times \\ &\quad \times \dots \times \int_{S_{t_n}} P(t_{n-1}, z_{n-1}, t_n, dz_n) \mathbf{1}_{B_n}(z_n), \end{aligned} \quad (34)$$

где  $C = B_1 \times \dots \times B_n$ ,  $Q_{s_0} = \text{Law}(X_{s_0})$ , а интегрирование ведется последовательно справа налево (нетрудно проверить, что каждый раз получаются должным образом измеримые ограниченные функции).

Заметим также, что для любых  $v \leq s$  ( $v, s \in T$ ) и  $B \in \mathcal{B}_s$

$$Q_s(B) = \int_{S_v} P(v, x, s, B) Q_v(dx). \quad (35)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} Q_s(B) &= P(X_s \in B) = E(E(\mathbf{1}_{X_s \in B} \mid X_v)) = \\ &= E P(v, X_v, s, B) = \int_{S_v} P(v, x, s, B) Q_v(dx). \end{aligned}$$

В частности, если  $T = [0, \infty)$ , то мера  $Q_s$  для любого  $s > 0$  определяется по мере  $Q_0$  и переходной функции. Здесь уместна аналогия с гауссовскими процессами, конечномерные распределения которых задавались также двумя объектами — функцией среднего и ковариационной функцией.

Возникает естественный вопрос, можно ли по переходной функции  $P(s, x, t, B)$  и мере  $Q_{s_0}$  (на  $\mathcal{B}_{s_0}$ , где  $s_0 \in T$ ,  $T \subset [s_0, \infty)$ ) построить марковский процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$  с данной переходной функцией и  $\text{Law}(X_{s_0}) = Q_{s_0}$ . Оказывается, что для борелевских пространств  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  ответ утвердительный, что устанавливается с помощью теоремы Колмогорова.

Следующее замечание полезно с точки зрения терминологии, используемой в общей теории марковских процессов.

Пусть  $X = \{X_t, t \in [0, \infty)\}$  — марковский процесс с начальным распределением  $\mu$  ( $\mu = P_{X_0}$  на  $\mathcal{B}_0$ ). Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, распределение процесса  $X$ , т. е. меру на цилиндрической  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}_{[0, \infty)}$ , часто обозначают  $P^\mu$ . В частности, запись  $P^x$ ,  $x \in S_0$ , означает, что  $\mu = \delta_x$ , иначе говоря, процесс в момент  $t = 0$  “выпускается” из точки  $x$  (при этом считается, что  $\mathcal{B}_0$  содержит все одноточечные множества  $\{x\}$ ,  $x \in S_0$ ).

§ 12. Теперь мы рассмотрим один из наиболее важных подклассов марковских процессов.

**Определение 7.** Марковский процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$ , принимающий при каждом  $t \in T \subset \mathbb{R}$  значения в измеримом пространстве  $(S, \mathcal{B})$  и имеющий переходную функцию  $P(s, x, t, B)$ , называется *однородным*, если  $P(s, x, t, B)$  при любых  $x \in S$ ,  $B \in \mathcal{B}$  зависит лишь от разности  $t - s$ .

Для таких процессов вместо переходных функций  $P(s, x, s + u, B)$  достаточно оперировать лишь с функциями  $P(x, u, B) = P(0, x, u, B)$ . По своему смыслу  $P(x, u, B)$  — это условная вероятность того, что, выходя из точки  $x$ , через время  $u$  “система” окажется во множестве  $B$ . Чтобы сдвиги точки  $s \in T$  на величину  $u \in T$  не выводили из множества  $T$ , обычно рассматриваются множества  $T = [0, \infty)$  или  $T = \{k\Delta, k \geq 0\}$ , где  $\Delta > 0$ .

Согласно (33)  *$m$ -мерное броуновское движение* — это однородный марковский процесс. *Пуассоновский процесс* однороден тогда и только тогда, когда ведущая мера  $m(s, t] = \lambda(t - s)$ ,  $\lambda > 0$ ,  $0 \leq s < t < \infty$ , т. е. процесс имеет постоянную *интенсивность*  $\lambda$ .

Для *однородного* марковского процесса  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  условия 1)–4) на переходную функцию  $P$  переписутся для  $s, t \geq 0$ ,  $x \in S$ ,  $B \in \mathcal{B}$  в следующем виде:

- 1°) при фиксированных  $x, t$  функция  $P(x, t, \cdot)$  есть мера на  $\mathcal{B}$ ;
- 2°) при фиксированных  $t, B$  функция  $P(\cdot, t, B) \in \mathcal{B} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ;
- 3°)  $P(x, 0, B) = \delta_x(B)$  при любых  $x, B$ ;
- 4°) при всех  $x, s, t$  и  $B$  справедливо уравнение Колмогорова–Чепмена:

$$P(x, s + t, B) = \int_S P(x, s, dy) P(y, t, B). \quad (36)$$

Отметим, что выполнение соотношения (36) *при всех* рассматриваемых значениях аргументов лежит в основе применения в теории марковских процессов мощных методов теории полугрупп (см., например, [23]).

В силу (32) однородность *марковской цепи*  $X = \{X_t, t \in T\}$  означает, что переходные вероятности  $p_{ij}(s, t)$  при каждом  $i, j \in S$  зависят лишь от разности  $t - s$ . В этом случае вместо  $p_{ij}(s, s + u)$  пишут  $p_{ij}(u)$  (как уже отмечалось выше, рассматривается  $T = [0, \infty)$  или  $T = \{k\Delta, k \geq 0\}, \Delta > 0$ ).

Пусть  $P(t)$  — матрица, состоящая из элементов  $p_{ij}(t)$ ,  $i, j \in S$ . Тогда уравнение (20) приобретает следующий вид:

$$p_{ij}(s + t) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t), \quad \text{где } i, j \in S, \quad (37)$$

то есть

$$P(s + t) = P(s)P(t), \quad s, t \in T. \quad (38)$$

Таким образом, с каждой однородной марковской цепью можно связать *стохастическую полугруппу* матриц  $P(t) = (p_{ij}(t))_{i, j \in S}$  такую, что при всех  $t \in T$

$$p_{ij}(t) \geq 0, \quad \sum_j p_{ij}(t) = 1, \quad p_{ij}(0) = \delta_{ij} \quad (39)$$

(последнее условие в (39) означает, что  $P(0) = I$  — единичная матрица).

Если время дискретно ( $T = \mathbb{Z}_+$ ), то в однородном случае переходные вероятности за  $n$  шагов, т. е.  $p_{ij}(n)$ , находятся как элементы матрицы  $P^n$ , где  $P^n$  есть  $n$ -я степень матрицы  $P = P(1)$ .

С другой стороны, располагая стохастической полугруппой матриц  $(p_{ij}(t))_{t \geq 0}$ , по теореме 5 всегда можно построить марковскую цепь с переходными вероятностями  $p_{ij}(t)$ .

Заметим, что изучение *неоднородных* марковских процессов может быть, в принципе, сведено к исследованию однородных за счет расширения исходного фазового пространства (см., например, упражнение 18).

**§ 13.** В этом параграфе будут рассматриваться важные и интересные вопросы *асимптотического* поведения марковских цепей в предположении, что  $T = [0, \infty)$ ; переформулировки на случай дискретного множества  $T$  не вызывают затруднений.

**Теорема 7** (эргодическая теорема). Пусть  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  — однородная марковская цепь (с произвольным начальным распределением) такая, что для некоторого  $j_0 \in S$  и некоторых  $h > 0$  и  $0 < \delta \leq 1$

$$p_{ij_0}(h) \geq \delta \quad \text{при всех } i \in S. \quad (40)$$

Тогда для любого  $j \in S$  существует и не зависит от начального состояния  $i \in S$  предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \tilde{p}_j, \quad (41)$$

причем для всех  $t > 0$

$$|p_{ij}(t) - \tilde{p}_j| \leq (1 - \delta)^{[t/h]}, \quad (42)$$

где  $[\cdot]$  — целая часть числа.

Наглядный смысл этого “эргодического” результата состоит в том, что за большое время система, описываемая марковской цепью, как бы “забывает”, из какого начального состояния она “стартовала”.

**Доказательство.** Обозначим для каждого  $t \in T$

$$m_j(t) = \inf_i p_{ij}(t), \quad M_j(t) = \sup_i p_{ij}(t).$$

Очевидно,  $m_j(t) \leq p_{ij}(t) \leq M_j(t)$  при всех  $i, j \in S$  и  $t \in T$ . Для доказательства свойства (41) достаточно показать, что  $m_j(t) \nearrow$  и  $M_j(t) \searrow$  при  $t \rightarrow \infty$  и что  $M_j(t) - m_j(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Оценка (42) будет вытекать из устанавливаемой далее оценки (43).

Для  $s, t \in T$  имеем, учитывая (37), что

$$\begin{aligned} m_j(s+t) &= \inf_i \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t) \geq m_j(t) \inf_i \sum_k p_{ik}(s) = m_j(t), \\ M_j(s+t) &= \sup_i \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t) \leq M_j(t) \sup_i \sum_k p_{ik}(s) = M_j(t). \end{aligned}$$

Тем самым,  $m_j(t) \nearrow$  и  $M_j(t) \searrow$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Далее, для  $t, h, t-h \in T$ , снова воспользовавшись свойством (37), находим, что

$$\begin{aligned} M_j(t) - m_j(t) &= \sup_a p_{aj}(t) + \sup_b (-p_{bj}(t)) = \\ &= \sup_{a,b} (p_{aj}(t) - p_{bt}(t)) = \sup_{a,b} \sum_k (p_{ak}(h) - p_{bk}(h)) p_{kj}(t-h) = \\ &= \sup_{a,b} \left\{ \sum_k^+ (p_{ak}(h) - p_{bk}(h)) p_{kj}(t-h) + \sum_k^- (p_{ak}(h) - p_{bk}(h)) p_{kj}(t-h) \right\} \leq \\ &\leq \sup_{a,b} \left\{ M_j(t-h) \sum_k^+ (p_{ak}(h) - p_{bk}(h)) + m_j(t-h) \sum_k^- (p_{ak}(h) - p_{bk}(h)) \right\}, \end{aligned}$$

где  $\sum_k^+$  обозначает сумму по тем  $k$ , для которых  $p_{ak}(h) - p_{bk}(h) \geq 0$ , а  $\sum_k^-$  — сумму по  $k$  таким, что  $p_{ak}(h) - p_{bk}(h) < 0$ . (Рассматриваемые суммы  $\sum_k^+$  и  $\sum_k^-$  зависят, конечно, от значений  $h, a$  и  $b$ .) Поскольку  $\sum_k p_{ak}(h) = \sum_k p_{bk}(h) = 1$ , то

$$\sum_k^+ (p_{ak}(h) - p_{bk}(h)) + \sum_k^- (p_{ak}(h) - p_{bk}(h)) = 0.$$

Поэтому

$$M_j(t) - m_j(t) \leq (M_j(t-h) - m_j(t-h)) \sup_{a,b} \sum_k^+ (p_{ak}(h) - p_{bk}(h)).$$

Теперь заметим, что если “специфическое” состояние  $j_0$  (см. (40)) не входит в  $\sum_k^+$ , то в силу (40)

$$\sum_k^+ (p_{ak}(h) - p_{bk}(h)) \leq \sum_k^+ p_{ak}(h) \leq 1 - p_{aj_0}(h) \leq 1 - \delta;$$

если же  $j_0$  входит в  $\sum_k^+$ , то, снова учитывая (40), получаем

$$\sum_k^+ (p_{ak}(h) - p_{bk}(h)) \leq \sum_k^+ p_{ak}(h) - p_{bj_0}(h) \leq 1 - \delta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_j(t) - m_j(t) &\leq (1 - \delta)(M_j(t - h) - m_j(t - h)) \leq \\ &\leq (1 - \delta)^2(M_j(t - 2h) - m_j(t - 2h)) \leq \\ &\leq \dots \leq (1 - \delta)^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (M_j(u) - m_j(u)), \end{aligned} \quad (43)$$

где  $u = t - \lfloor \frac{t}{h} \rfloor h$ . Но, очевидно,  $M_j(u) - m_j(u) \leq 1$ . Тем самым, для всякого  $t > 0$

$$M_j(t) - m_j(t) \leq (1 - \delta)^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor},$$

где  $0 < \delta \leq 1$ . Отсюда, поскольку  $m_j(t) \nearrow$ , а  $M_j(t) \searrow$  при  $t \rightarrow \infty$ , выводим, что существуют и равны (скажем, значению  $\tilde{p}_j$ ) пределы  $\lim_{t \rightarrow \infty} M_j(t)$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} m_j(t)$ , и при этом

$$m_j(t) - M_j(t) \leq m_j(t) - \tilde{p}_j \leq p_{ij}(t) - \tilde{p}_j \leq M_j(t) - \tilde{p}_j \leq M_j(t) - m_j(t).$$

Значит,

$$|p_{ij}(t) - \tilde{p}_j| \leq M_j(t) - m_j(t) \leq (1 - \delta)^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor},$$

что доказывает не только свойство (41), но и оценку (42), устанавливающую скорость сходимости (при  $t \rightarrow \infty$ ) переходных вероятностей  $p_{ij}(t)$  к предельному значению  $\tilde{p}_j$ .  $\square$

§ 14. Остановимся на некоторых следствиях доказанной эргодической теоремы.

**Следствие 3.** Пусть для любых  $i, j \in S$  справедливо соотношение (41). Тогда для всех  $j \in S$  существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) = \tilde{p}_j, \quad (44)$$

где  $p_j(t) = P(X_t = j)$ , причем если выполнено условие (40), то

$$|p_j(t) - \tilde{p}_j| \leq (1 - \delta)^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor}.$$

**Доказательство.** По формуле полной вероятности  $p_j(t) = \sum_i p_i(0)p_{ij}(t)$ . Поэтому в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости для каждого  $j \in S$

$$p_j(t) - \tilde{p}_j = \sum_i p_i(0)(p_{ij}(t) - \tilde{p}_j) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

В предположении (40)

$$|p_j(t) - \tilde{p}_j| = \left| \sum_i p_i(0)(p_{ij}(t) - \tilde{p}_j) \right| \leq (1 - \delta)^{\left[\frac{t}{h}\right]} \sum_i p_i(0) = (1 - \delta)^{\left[\frac{t}{h}\right]},$$

что и доказывает искомое утверждение.  $\square$

**Следствие 4.** Пусть для любых  $i, j \in S$  справедливо соотношение (41). Тогда при каждом  $t \in T$  и всех  $j \in S$

$$\tilde{p}_j = \sum_i \tilde{p}_i p_{ij}(t). \quad (45)$$

Иначе говоря, вектор-столбец  $\tilde{p} = (\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \dots)^*$  есть собственный вектор матрицы  $P^*(t)$ , где  $*$  обозначает транспонирование.

**Доказательство.** В силу (44) для любых  $j \in S$  и  $N \in \mathbb{N}$

$$\tilde{p}_j = \lim_{s \rightarrow \infty} p_j(s + t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_i p_i(s) p_{ij}(t) \geq \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i \leq N} p_i(s) p_{ij}(t) = \sum_{i \leq N} \tilde{p}_i p_{ij}(t),$$

что дает неравенство  $\tilde{p}_j \geq \sum_i \tilde{p}_i p_{ij}(t)$ . Допустим, что здесь для некоторых  $j \in S$  и  $t \geq 0$  имеет место строгое неравенство

$$\tilde{p}_j > \sum_i \tilde{p}_i p_{ij}(t). \quad (46)$$

Согласно (41) для любого  $N$  и каждого  $i$  имеем  $\sum_{j \leq N} \tilde{p}_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j \leq N} p_{ij}(t) \leq 1$ , поэтому

$$\sum_j \tilde{p}_j \leq 1. \quad (47)$$

Тем самым, если (46) выполнено, то

$$\sum_j \tilde{p}_j > \sum_j \sum_i \tilde{p}_i p_{ij}(t) = \sum_i \tilde{p}_i \sum_j p_{ij}(t) = \sum_i \tilde{p}_i.$$

Полученное противоречие показывает, что (46) невозможно.  $\square$

**Следствие 5.** Пусть для любых  $i, j \in S$  справедливо соотношение (41). Тогда либо  $\sum_j \tilde{p}_j = 1$ , т. е. величины  $\tilde{p}_j$ ,  $j \in S$ , задают распределение вероятностей, называемое стационарным распределением, либо  $\sum_j \tilde{p}_j = 0$ , т. е. все  $\tilde{p}_j = 0$ .

**Доказательство.** Очевидно, что имеют место лишь две возможности: либо  $\sum_j \tilde{p}_j = 0$ , либо  $\sum_j \tilde{p}_j \neq 0$ . Если  $\sum_j \tilde{p}_j \neq 0$  (ряд сходится согласно (47)), то возьмем  $p_i(0) = \tilde{p}_i / \sum_j \tilde{p}_j$ ,  $i \in S$ , и рассмотрим цепь с таким начальным распределением и заданными  $p_{ij}(t)$ , что возможно в силу теоремы 5. Тогда по формуле полной вероятности и следствию 4 для всех  $t \geq 0$  и  $j \in S$

$$p_j(t) = \sum_i p_i(0) p_{ij}(t) = \frac{\sum_i \tilde{p}_i p_{ij}(t)}{\sum_j \tilde{p}_j} = \frac{\tilde{p}_j}{\sum_j \tilde{p}_j} = p_j(0). \quad (48)$$

Из (44) имеем  $\tilde{p}_j = p_j(0)$ . Следовательно, если  $\sum_j \tilde{p}_j > 0$ , то  $\sum_j \tilde{p}_j = 1$ .  $\square$

§ 15. Приведенный выше термин “стационарное распределение” связан со следующим понятием.

**Определение 8.** Процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$ , где  $T \subset \mathbb{R}$ , называется *стационарным* (строго стационарным или стационарным в узком смысле), если для всех  $n \geq 1$ ,  $t_1, \dots, t_n \in T$  и всех  $h \in \mathbb{R}$  таких, что  $t_1 + h, \dots, t_n + h \in T$  выполнено следующее свойство:

$$\text{Law}(X_{h+t_1}, \dots, X_{h+t_n}) = \text{Law}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}).$$

Иначе говоря, все конечномерные распределения такого процесса должны не меняться при сдвигах (не выводящих из параметрического множества  $T$ ; это замечание существенно, если, например,  $T = \mathbb{Z}$ ).

**Теорема 8.** Пусть однородная марковская цепь  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  имеет стационарное распределение  $\mu$ , определяемое набором  $\{\tilde{p}_j, j \in S\}$ . Пусть  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$  — (однородная) марковская цепь, имеющая те же переходные вероятности, что  $X$ , и начальное распределение  $\mu$ . Тогда процесс  $Y$  будет строго стационарным процессом.

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что существование процесса  $Y$  с данными переходными вероятностями и начальным распределением  $\mu$  следует из теоремы 5. Из (24), записав  $Y$  вместо  $X$ , получим для  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ ,  $B_k \subset S$ ,  $k = 1, \dots, n$  и  $n \geq 1$ , что

$$\begin{aligned} P(Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n) &= \\ &= \sum_{j_1 \in B_1} p_{j_1}(t_1) \sum_{j_2 \in B_2} p_{j_1 j_2}(t_1, t_2) \cdots \sum_{j_n \in B_n} p_{j_{n-1} j_n}(t_{n-1}, t_n), \end{aligned}$$

где  $p_j(t) = P(Y_t = j) = \tilde{p}_j$  при всех  $j \in S$ ,  $t \geq 0$  в силу (48). Требуемое в теореме утверждение о стационарности следует непосредственно из того, что

$$p_{ij}(s, t) = p_{ij}(t - s) = p_{ij}(s + h, t + h)$$

для любых  $i, j \in S$ ,  $0 \leq s \leq t$ ,  $h \geq -s$ .  $\square$

Подчеркнем, что при доказательстве теоремы 8 мы использовали не само соотношение (41), а лишь (48), т. е. наличие такого начального распределения  $\mu = \text{Law}(X_0)$ , которое не меняется во времени (иначе говоря,  $\text{Law}(X_t) = \mu$  при всех  $t \in T$ ). Такое распределение  $\mu$  называется *инвариантной мерой* процесса  $X = \{X_t, t \in T\}$ .

§ 16. Цель дальнейших рассуждений — получение *дифференциальных уравнений*, которым (при некоторых условиях) удовлетворяют переходные вероятности однородной марковской цепи, заданной на  $[0, \infty)$ , и обсуждение приложений этих и ранее установленных результатов. Для этого нам потребуются новые понятия.

**Определение 9.** Однородная цепь Маркова  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  (или порожденная ею полугруппа  $P(t) = (p_{ij}(t))$ ) называется *стандартной*, если  $P(t) \rightarrow I$  при  $t \rightarrow 0+$ , т. е. для всех  $i, j \in S$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}, \quad (49)$$

где, как обычно,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

**Лемма 3.** Для переходных вероятностей однородной марковской цепи  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  при всех  $i, j \in S$  и любых  $t, h \geq 0$  справедливо неравенство

$$|p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| \leq 1 - p_{ii}(h).$$

В частности, если цепь стандартна, то для каждой  $i, j \in S$  функция  $p_{ij}(t)$  равномерно непрерывна на  $[0, \infty)$ .

**Доказательство.** С одной стороны,

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) &= \sum_k p_{ik}(h)p_{kj}(t) - p_{ij}(t) = \\ &= p_{ij}(t)(p_{ii}(h) - 1) + \sum_{k \neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) \leq \\ &\leq \sum_{k \neq i} p_{ik}(h) = 1 - p_{ii}(h). \end{aligned}$$

С другой стороны,  $p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) \geq p_{ij}(t)(p_{ii}(h) - 1) \geq p_{ii}(h) - 1$ .

Оба эти неравенства дают требуемое в утверждении леммы соотношение.  $\square$

**Теорема 9.** Если  $(P(t))_{t \geq 0}$  — стандартная стохастическая полугруппа, то существует правая производная

$$\left. \frac{d^+ P(t)}{dt} \right|_{t=0} = Q, \quad (50)$$

т. е. существуют правые производные в нуле у всех переходных вероятностей  $p_{ij}(t)$ :

$$\left. \frac{d^+ p_{ij}(t)}{dt} \right|_{t=0} = q_{ij}. \quad (51)$$

При этом

$$0 \leq q_{ij} < \infty \quad \text{для} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad q_i = -q_{ii} \in [0, \infty]. \quad (52)$$



**Доказательство.** Зафиксируем некоторое состояние  $i \in S$  и установим справедливость (51) сначала в случае  $j = i$ , т. е. для переходных вероятностей  $p_{ii}(t)$ . В силу условия (49) найдется  $\delta > 0$  такое, что  $p_{ii}(h) > 0$  при  $h \in [0, \delta]$ . Для  $t > 0$ , применяя (37), получим, что  $p_{ii}(t) \geq (p_{ii}(t/n))^n$ ,  $n \geq 1$ . Взяв  $n = n(t, \delta)$  так, чтобы  $t/n < \delta$ , видим, что  $p_{ii}(t) > 0$  для всех  $t \geq 0$ . Поэтому на  $[0, \infty)$  определена функция  $H(t) = -\ln p_{ii}(t)$ . Из (37) имеем  $p_{ii}(s+t) \geq p_{ii}(s)p_{ii}(t)$  для  $s, t \geq 0$ , откуда

$$H(s+t) \leq H(s) + H(t) \quad \text{для } s, t \in [0, \infty). \quad (53)$$

Положим

$$q = \sup_{t>0} H(t)/t. \quad (54)$$

Очевидно,  $q \in [0, \infty]$ .

Рассмотрим отдельно два случая:  $q < \infty$  и  $q = \infty$ .

1) Пусть  $q < \infty$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $t_0 = t_0(\varepsilon) > 0$ , такое, что  $H(t_0)/t_0 \geq q - \varepsilon$ . Для  $h \in (0, t_0)$  представим  $t_0$  в следующем виде:  $t_0 = nh + \Delta$ , где  $n = [t_0/h]$ ,  $0 \leq \Delta < h$ , а  $[.]$  — целая часть числа. Пользуясь (53), получаем

$$q - \varepsilon \leq H(t_0)/t_0 \leq (nH(h) + H(\Delta))/t_0 = \frac{H(h)}{h} \cdot \frac{nh}{t_0} + \frac{H(\Delta)}{t_0}. \quad (55)$$

В силу (49)  $H(\Delta) \rightarrow 0$  при  $\Delta \rightarrow 0$  ( $\Delta \rightarrow 0$ , если  $h \rightarrow 0+$ ). Поэтому

$$q - \varepsilon \leq \liminf_{h \rightarrow 0+} H(h)/h. \quad (56)$$

Из (54) вытекает, что  $\limsup_{h \rightarrow 0+} H(h)/h \leq q$ . Следовательно, существует

$$\lim_{h \rightarrow 0+} H(h)/h = q$$

и, значит,

$$q = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{H(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{-\ln(1 - (1 - p_{ii}(h)))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h}, \quad (57)$$

что и доказывает (для  $i \in S$ ) соотношение (51) в случае  $q < \infty$ .

2) Пусть теперь  $q = \infty$ . Тогда для любого  $M > 0$  найдется  $t_0 = t_0(M) > 0$  такое, что  $H(t_0)/t_0 \geq M$ . Действуя точно так же, как при доказательстве (56), получаем, что

$$\liminf_{h \rightarrow 0+} H(h)/h \geq M.$$

Таким образом, *существует*  $\lim_{h \rightarrow 0+} H(h)/h = \infty$ . Учитывая (57), получаем соотношение (51) в случае  $q = \infty$ .

Снова фиксируя некоторое состояние  $i \in S$ , установим теперь справедливость (51) для вероятностей  $p_{ij}(t)$  в случае  $j \neq i$ . Обозначим  $f_{ij}^{(k)}(h)$  условную вероятность (при условии  $X_0 = i$ ) перехода из состояния  $i$  в то же самое состояние  $i$  ровно за  $k$  последовательных шагов длины  $h$  (и не за меньшее число шагов), но так, чтобы

при этом ни разу не побывать в состоянии  $j$  в моменты вида  $mh$ , где  $m = 1, \dots, k$ . Покажем, что тогда для  $n \geq 2$  справедливо неравенство

$$p_{ij}(nh) \geq \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)}(h) p_{ij}((n-k)h). \quad (58)$$

Действительно, учитывая замечание 2, получаем для переходных вероятностей  $p_{ij}(nh)$  следующую оценку снизу

$$\begin{aligned} p_{ij}(nh) &= \sum_{j_1, \dots, j_{n-1} \in S} P(X_{nh} = j, X_{(n-1)h} = j_{n-1}, \dots, X_h = j_1 \mid X_0 = i) \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{J_k} \sum_{j_{k+1}, \dots, j_{n-1} \in S} P(X_{nh} = j, X_{(n-1)h} = j_{n-1}, \dots, X_{(k+1)h} = j_{k+1} \mid X_{kh} = i) \times \\ &\times P(X_{kh} = i, X_{(k-1)h} = j_{k-1}, \dots, X_h = j_1 \mid X_0 = i), \end{aligned}$$

где  $J_k = \{(j_1, \dots, j_{k-1}) : j_m \notin \{i, j\}, m = 1, \dots, k-1\}$  и мы воспользовались тем, что в силу (1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(X_0 = i)} P(X_{nh} = j, X_{(n-1)h} = j_{n-1}, \dots, X_{kh} = i, \dots, X_h = j_1, X_0 = i) &= \\ = \frac{1}{P(X_0 = i)} \times \\ \times P(X_{nh} = j, X_{(n-1)h} = j_{n-1}, \dots, X_{(k+1)h} = j_{k+1} \mid X_{kh} = i, \dots, X_0 = i) \times \\ \times P(X_{kh} = i, \dots, X_0 = i) &= \\ = P(X_{nh} = j, \dots, X_{(k+1)h} = j_{k+1} \mid X_{kh} = i) P(X_{kh} = i, \dots, X_h = j_1 \mid X_0 = i). \end{aligned}$$

Для получения требуемого неравенства (58) надо теперь лишь учесть, что

$$\begin{aligned} \sum_{j_{k+1}, \dots, j_{n-1}} P(X_{nh} = j, X_{(n-1)h} = j_{n-1}, \dots, X_{(k+1)h} = j_{k+1} \mid X_{kh} = i) &= \\ = p_{ij}((n-k)h), \end{aligned}$$

$$\sum_{J_k} P(X_{kh} = i, X_{(k-1)h} = j_{k-1}, \dots, X_h = j_1 \mid X_0 = i) = f_{ij}^{(k)}(h).$$

Обозначим  $p_{ij}^{(k)}(h)$  условную вероятность перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$  ровно за  $k$  шагов длины  $h$  (и не за меньшее число шагов). Аналогично (58) получаем для  $k \geq 1$  ( $\sum_{\emptyset} = 0$ )

$$p_{ii}(kh) = f_{ii}^{(k)}(h) + \sum_{m=1}^{k-1} p_{ij}^{(m)}(h) p_{ji}((k-m)h). \quad (59)$$

Очевидно,  $\sum_{m=1}^{k-1} p_{ij}^{(m)}(h) \leq 1$ , поэтому

$$f_{ij}^{(k)}(h) \geq p_{ii}(kh) - \max_{1 \leq m \leq k-1} p_{ji}((k-m)h)$$

(максимум по пустому множеству считаем равным нулю). В силу (49) для любого  $\varepsilon > 0$  находим  $t_0 = t_0(\varepsilon, i, j) > 0$  такое, что

$$p_{ji}(t) \leq \varepsilon, \quad p_{ii}(t) \geq 1 - \varepsilon, \quad p_{jj}(t) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{при } t \in [0, t_0]. \quad (60)$$

Тем самым,

$$f_{ij}^{(k)}(h) \geq 1 - 2\varepsilon \quad \text{при } nh \leq t_0 \text{ и } k = 1, \dots, n-1. \quad (61)$$

Замечая, что  $p_{ij}((n-k)h) \geq p_{ij}(h)p_{jj}((n-k-1)h)$  при  $k = 1, \dots, n-1$  и  $n \geq 2$ , из (58)–(61) выводим, что

$$p_{ij}(nh) \geq (1 - 2\varepsilon)p_{ij}(h) \sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}((n-k-1)h) \geq (1 - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon)(n-2)p_{ij}(h).$$

Отсюда, выбрав  $n = [t_0/h]$  и учитывая непрерывность  $p_{ij}(t)$  (лемма 3), получим

$$\infty > \frac{p_{ij}(t_0)}{t_0} \geq (1 - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon) \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h}.$$

Устремив  $t_0$  к нулю, видим, что

$$\liminf_{t \rightarrow 0+} \frac{p_{ij}(t)}{t} \geq (1 - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon) \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h}.$$

Поскольку  $\varepsilon > 0$  выбиралось любым, из этого неравенства заключаем, что при  $j \neq i$  существует конечный предел  $q_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0+} p_{ij}(t)/t$ . Теорема 9 доказана.  $\square$

§ 17. Пусть выполнено условие стандартности (49). Для любого  $N \geq 1$  и  $t > 0$ , учитывая, что  $\sum_j p_{ij}(t) = 1$ , получаем, что

$$\sum_{\substack{j \leq N \\ j \neq i}} \frac{p_{ij}(t)}{t} \leq \frac{1 - p_{ii}(t)}{t}.$$

Поскольку сумма в левой части этого неравенства содержит лишь конечное число членов, то полагая  $t \downarrow 0$  и пользуясь существованием производных (см. (51)), находим, что  $\sum_{\substack{j \neq i \\ j \leq N}} q_{ij} \leq q_i$ . Следовательно,

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq q_i. \quad (62)$$

(При  $q_i = \infty$  утверждение (62) тривиально.)

**Определение 10.** Цепь называется *консервативной*, если все элементы  $q_{ij}$  *инфинитезимальной* матрицы  $Q$  *конечны* и при этом для любого  $i$

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i. \quad (63)$$

Примером консервативной цепи может служить процесс Пуассона с интенсивностью  $\lambda > 0$ . Действительно, согласно (25) матрица

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix},$$

и свойство (63), очевидно, справедливо.

**Теорема 10** (обратная система уравнений Колмогорова). Пусть однородная цепь Маркова консервативна. Тогда для всех  $t > 0$

$$P'(t) = QP(t), \quad (64)$$

т. е. при любых  $i, j \in S$  и  $t > 0$  существуют производные  $p'_{ij}(t)$  и справедливы следующие (обратные) уравнения:

$$p'_{ij}(t) = \sum_k q_{ik} p_{kj}(t). \quad (65)$$

(В силу (51) и поскольку  $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ , уравнение (65) будет верно и при  $t = 0$ , если все производные понимать как правые производные.)

**Доказательство.** Для  $t \geq 0$ ,  $h > 0$  и  $i, j \in S$  положим

$$L_{ij}(h, t) = \frac{1}{h} \sum_{k \neq i} p_{ik}(h) p_{kj}(t).$$

Тогда

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} p_{ij}(t) + L_{ij}(h, t). \quad (66)$$

Для всякого  $N \geq 1$  из (51) заключаем, что

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} L_{ij}(h, t) \geq \limsup_{h \rightarrow 0+} \sum_{\substack{k \neq i \\ k \leq N}} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t) = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \leq N}} q_{ik} p_{kj}(t).$$

Итак, имеет место следующая оценка снизу:

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} L_{ij}(h, t) \geq \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t). \quad (67)$$

Учитывая, что  $p_{kj}(t) \leq 1$  и  $\sum_k p_{ik}(h) = 1$  для всех  $i, j \in S$  и  $t \geq 0$ ,  $h > 0$ , видим, что  $L_{ij}(h, t)$  при  $N > i$  может быть оценено сверху величиной

$$\sum_{\substack{k \neq i \\ k \leq N}} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t) + \frac{1}{h} \sum_{k > N} p_{ik}(h) = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \leq N}} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t) + \frac{1}{h} \left( 1 - p_{ii}(h) - \sum_{\substack{k \leq N \\ k \neq i}} p_{ik}(h) \right).$$

Откуда, при  $h \rightarrow 0+$  находим, что

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} L_{ij}(h, t) \leq \sum_{\substack{k \neq i \\ k \leq N}} q_{ik} p_{kj}(t) - q_{ii} - \sum_{\substack{k \leq N \\ k \neq i}} q_{ik}.$$

Следовательно, в силу условия (63)

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} L_{ij}(h, t) \leq \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t) + q_i - \sum_{k \neq i} q_{ik} = \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t). \quad (68)$$

Обратимся теперь к формуле (66). Из нее и из (51), (67) и (68) очевидным образом вытекает справедливость уравнения (65) для правой производной. Аналогичным образом рассматривается вопрос о существовании левых производных функций  $p_{ij}(t)$  при  $t > 0$  и выполнении для них уравнения (65). Тем самым теорема доказана.  $\square$

**Теорема 11** (прямая система уравнений Колмогорова). Пусть для полугруппы  $(P(t))_{t \geq 0}$  однородной марковской цепи существует инфинитезимальная матрица  $Q$  с конечными элементами  $q_{ij}$ , причем для всех  $i \neq j$

$$p_{ij}(h) = q_{ij}h + \alpha_{ij}(h), \quad (69)$$

где равномерно по  $i$

$$\alpha_{ij}(h)/h \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0+. \quad (70)$$

Тогда для всякого  $t > 0$  существует  $P'(t)$  (т. е. существуют все производные  $p'_{ij}(t)$ ,  $i, j \in S$ ) и

$$P'(t) = P(t)Q. \quad (71)$$

Иначе говоря, при  $t > 0$  справедливы следующие (**прямые**) уравнения:

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t) q_{kj} \quad \text{для всех} \quad i, j \in S. \quad (72)$$

**Доказательство.** Пусть  $t \geq 0$ ,  $h > 0$  и  $i, j \in S$ . Тогда

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = p_{ij}(t) \frac{p_{jj}(h) - 1}{h} + \frac{1}{h} \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) p_{kj}(h). \quad (73)$$

Для любого  $\varepsilon > 0$  при фиксированном  $j$  в силу (69) находим  $h_0(\varepsilon, j) > 0$  такое, что  $|\alpha_{kj}(h)|/h < \varepsilon$  при всех  $k$  и  $0 < h < h_0(\varepsilon, j)$ , поэтому

$$\left| \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) \frac{\alpha_{kj}(h)}{h} \right| \leq \varepsilon \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) \leq \varepsilon. \quad (74)$$

Из (69), (74) и того, что

$$\frac{1}{h} \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) p_{kj}(h) \leq \frac{p_{ij}(t+h)}{h} \leq \frac{1}{h},$$

заключаем, что для каждого  $t \geq 0$  и  $i \in S$  сходится ряд в правой части (72). Совершив в (73) предельный переход при  $h \rightarrow 0+$ , получим, что (71) справедливо для правой производной.

Аналогичным образом доказывается справедливость (71) и для левых производных. Тем самым теорема доказана.  $\square$

§ 18. Рассмотрим некоторые важные частные случаи.

**Замечание 3.** Если пространство состояний  $S$  конечно и матрица  $P(t)$  стан-  
дартна, то справедливы обе системы уравнений Колмогорова.

Действительно, для любых  $i, j \in S$  и  $t > 0$

$$\frac{1}{t} \sum_{j \neq i} p_{ij}(t) = \frac{1 - p_{ii}(t)}{t},$$

и если число состояний конечно, то теорема 9 обеспечивает консервативность. При этом выполнено условие (69), а условие (70), очевидно, имеет место, так как  $i$  принадлежит конечному множеству  $S$ .

Названия *обратная* и *прямая* системы уравнений Колмогорова связаны с положением матрицы  $Q$  в (64) и (71) (“перед” или “после”  $P(t)$ ).

**Следствие 6.** Пусть справедливы условия теоремы 11, и пусть для всех  $i, j \in S$  существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \tilde{p}_j \quad (75)$$

(например, условия теоремы 7 обеспечивают выполнение (75)). Тогда для любого  $j$

$$\sum_k \tilde{p}_k q_{kj} = 0, \quad (76)$$

т. е. вектор-столбец  $\tilde{p}$  есть собственный вектор матрицы  $Q^*$  ( $Q^*$  обозначает транспонированную матрицу  $Q$ ), отвечающий нулевому собственному значению. Иначе говоря,  $Q^* \tilde{p} = 0$ .

**Доказательство.** Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 11, видим, что ряд  $\sum_k p_k(t) q_{kj}$ , где  $p_k(t) = P(X_t = k)$ , сходится для каждого  $j$ , причем при любом начальном распределении существует предел

$$p'_j(t) = \sum_k p_k(t) q_{kj}. \quad (77)$$

Если  $\sum_j \tilde{p}_j = 0$ , т. е. все  $\tilde{p}_j = 0$ , то (76), очевидно, верно. Если  $\sum_j \tilde{p}_j \neq 0$ , то возьмем начальное распределение  $p_i(0) = \tilde{p}_i$ ,  $i \in S$  (см. следствие 5). Тогда согласно (48)  $p_j(t) = \tilde{p}_j$ . Следовательно,  $p'_j(t) = 0$ , и требуемое соотношение (76) вытекает из (77).  $\square$

§ 19. Рассмотрим теперь модель (ее происхождение объясним позднее), в которой  $S = \{0, 1, \dots, n\}$ , а *вероятности переходов*  $p_{ij}(h)$  при  $h \rightarrow 0+$  имеют вид, изображенный на следующей “диаграмме переходов”:

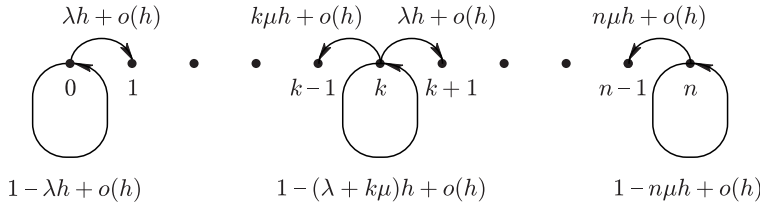


Рис. 17

Из этого рисунка видно, что возможны (с ненулевой интенсивностью) переходы только *на один шаг вправо или влево*, а также разрешается *оставаться на месте*; в “концевых точках” 0 и  $n$  допускаются переходы соответственно из 0 в 1 и из  $n$  в  $n-1$ , при этом также можно оставаться на месте ( $\lambda$  и  $\mu$  — положительные параметры). Точнее говоря, пусть все остальные  $p_{ij}(h) = o(h)$  при  $h \rightarrow 0+$ .

Отметим, что существование марковской цепи с соответствующей инфинитезимальной матрицей  $Q$  обеспечивает результат упражнения 36.

Покажем, что выполнены условия эргодической теоремы 7. Возьмем  $j_0 = n$ . Для любого  $i = 0, \dots, n$

$$p_{in}(nt) \geq p_{i,i+1}(t) \cdots p_{n-1,n}(t) p_{nn}(nt - (n-i)t) \geq p_{i,i+1}(t) \cdots p_{n-1,n}(t) (p_{nn}(t))^i.$$

Найдем  $t_0 > 0$  такое, что  $p_{k-1,k}(t) = \lambda t + o(t) > 0$ ,  $k = 1, \dots, n$  ( $o(\cdot)$  зависит от  $k$ ) и  $p_{nn}(t) > 1/2$  при  $0 < t \leq t_0$ . Выбрав  $h = t_0/n$ ,  $t = t_0$ , получаем, что справедливо условие (40), и значит, существуют  $\tilde{p}_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t)$ .

В силу замечания 3 выполнены обе системы Колмогорова, при этом, очевидно,  $\sum_j \tilde{p}_j = 1$ , так как  $S$  конечно, а  $\sum_j p_{ij}(t) = 1$ .

Найдем теперь стационарное распределение  $\tilde{p}$ . Согласно следствию 6, для этого надо решить векторное уравнение  $Q^* \tilde{p} = \vec{0}$ , т. е. систему

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \mu & & & & 0 \\ \lambda & -(\lambda + \mu) & 2\mu & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \lambda & -(\lambda + k\mu) & (k+1)\mu & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \lambda & -(\lambda + (n-1)\mu) & n\mu \\ 0 & & & & & \lambda & -n\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

С этой целью ко второй строке матрицы  $Q^*$  прибавим первую,  $\dots$ , к  $k$ -й — все предыдущие строки ( $2 \leq k \leq n-1$ ). Тогда

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \mu & & 0 \\ & -\lambda & 2\mu & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -\lambda & n\mu \\ 0 & & & \lambda & -n\mu \end{pmatrix} \vec{p} = \vec{0},$$

и значит, по координатно,

$$-\lambda p_k + \mu(k+1)p_{k+1} = 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Следовательно,  $p_{k+1} = \rho p_k / (k+1)$ , где  $\rho = \lambda/\mu$ . Отсюда имеем  $p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0$ , и поскольку для решения выполняется условие  $\sum_{k=0}^n p_k = 1$ , то  $p_0 = \left( \sum_{k=0}^n \rho^k / k! \right)^{-1}$ . Тем самым, справедливы следующие формулы:

$$\tilde{p}_k = \frac{\rho^k / k!}{\sum_{j=0}^n \rho^j / j!}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (78)$$

называемые в “теории массового обслуживания” *формулами Эрланга*.

§ 20. Объясним, как *естественно* в прикладных вопросах возникает рассмотренная выше модель с переходными вероятностями, указанными на рис. 17.

Пусть имеется некоторая “система массового обслуживания” (СМО), состоящая из  $n$  одинаковых приборов. Пусть в эту систему поступает поток заявок на обслуживание. Будем предполагать, что заявки образуют пуассоновский поток, т. е. требования на обслуживание появляются в моменты  $\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \dots$ , где  $\{\xi_k\}$  порождает пуассоновский процесс (см. теорему 2 главы II), считая, что в каждый из таких моментов поступает одно требование.

Рассмотрим “систему с отказами”, т. е. такую, что если все приборы заняты обслуживанием поступивших ранее заявок, то требование покидает систему (происходит “отказ”). Так бывает, например, когда телефонная линия занята. Если имеется свободный прибор, то поступившее требование мгновенно начинает обслуживаться (можно рассмотреть различные дисциплины обслуживания, мы этого не делаем для простоты и при этом считаем несущественным, на какой из свободных одинаковых приборов попадет на обслуживание заявка; каждый прибор обслуживает только одну заявку). Естественно считать, что состояние системы в момент  $t$  — это число  $X_t$  занятых приборов.

Уточним также характер обслуживания. Предположим, что время обслуживания каждого требования представляет собой экспоненциально распределенную величину  $\eta$  с параметром  $\mu > 0$ . Кроме того, пусть каждое требование обслуживается независимо от других, и пусть случайные величины, описывающие длительности обслуживания, *не зависят* от последовательности  $\{\xi_k\}$ , задающей поток требований.



Обычно системы массового обслуживания обозначают  $a|b|c$ , где символ  $a$  указывает *распределение величин*  $\xi_k$  (по-прежнему, времена прихода заявок  $\tau_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$ , где  $\xi_k$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $k \geq 1$ ),  $b$  обозначает *распределение длительности обслуживания* (все длительности — независимые одинаково распределенные величины, не зависящие от  $\{\xi_k\}$ ),  $c$  — *количество приборов*. При этом для *экспоненциального* распределения традиционно используется буква  $M$ . Таким образом, рассматриваемая нами система — это система  $M|M|n$ . Запись  $G|G|c$  указывала бы, что не делается специальных предположений об используемых распределениях (“ $G$ ” — general). Возможны также дальнейшие обобщения, например, рассмотрение *групповых заявок*, когда в момент  $\tau_k$  приходит не одно требование и т. д.

Если  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  — пуассоновский процесс, построенный по последовательности  $\{\xi_k\}$ , и событие  $A_m(t, t+h)$  состоит в том, что на промежутке  $(t, t+h]$  поступило ровно  $m$  требований, то

$$P(A_m(t, t+h)) = P(N_{t+h} - N_t = m) = \frac{(\lambda h)^m}{m!} e^{-\lambda h}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P(A_0(t, t+h)) &= e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0+; \\ P(A_1(t, t+h)) &= \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0+; \\ P\left(\bigcup_{m \geq 2} A_m(t, t+h)\right) &= 1 - e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h} = o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0+. \end{aligned} \quad (79)$$

Для времени обслуживания  $\eta$  плотность

$$p_\eta(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (80)$$

и, значит, для  $x, y \geq 0$

$$P(\eta > x+y | \eta > y) = \frac{\int_{x+y}^{\infty} p_\eta(z) dz}{\int_y^{\infty} p_\eta(z) dz} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = P(\eta > x). \quad (81)$$

Тем самым вероятность того, что работающий прибор проработает еще время  $x$ , не зависит от того, сколько этот прибор уже проработал (в классе распределений, обладающих плотностью, экспоненциальное распределение является *единственным*, удовлетворяющим условию (81)). Заметим, что

$$p_h = P(\eta < h) = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0+.$$

Каждый прибор работает независимо от других. Поэтому вероятность того, что из  $k$  работающих в момент  $t$  приборов ровно  $l$  закончат эту работу за время  $h$ , есть

$C_k^l p_h^l (1 - p_h)^{k-l}$  (“схема Бернулли”). Следовательно, обозначив  $B_{k,l}(t, t+h)$  событие “из  $k$  работающих приборов  $l$  закончат работу на промежутке времени  $(t, t+h]$ ”, получим, что

$$\begin{aligned} P(B_{k,1}(t, t+h)) &= k(1 - e^{-\mu h})e^{-\mu h(k-1)} = \\ &= k(\mu h + o(h))(1 - (k-1)\mu h + o(h)) = \\ &= k\mu h + o(h), \quad h \rightarrow 0+; \\ P\left(\bigcup_{l \geq 2} B_{k,l}(t, t+h)\right) &= 1 - (1 - k\mu h) - k\mu h + o(h) = o(h), \quad h \rightarrow 0+. \end{aligned} \quad (82)$$

Событие  $C_{ij}(t, t+h)$ , состоящее в том, что система осуществила переход из состояния  $i$  в состояние  $j$  на промежутке  $(t, t+h]$ , можно представить в следующем виде (опуская для простоты записи аргументы  $t$  и  $t+h$  у рассматриваемых множеств). Если  $1 \leq i \leq n-1$ , то

$$\begin{aligned} C_{i,i+r} &= A_r B_{i,0} \cup A_{r+1} B_{i,1} \cup \dots \cup A_{r+i} B_{i,i} \quad \text{для } r = 1, \dots, n-i, \\ C_{i,i-r} &= A_0 B_{i,r} \cup A_1 B_{i,r+1} \cup \dots \cup A_{i-r} B_{i,i} \quad \text{для } r = 1, \dots, i. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения можно написать и для  $C_{0,k}$  и для  $C_{n,k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Пользуясь теперь независимостью событий  $\{A_q\}$  и  $\{B_{m,k}\}$  и применяя (79) и (82), приходим к формулам для  $p_{ij}(h) = P(C_{ij}(t, t+h))$ , содержащимся на представленной выше “диаграмме переходов”.

Подчеркнем, что мы лишь описали наводящие соображения в пользу модели, приводящей к формулам Эрланга. Здесь же заметим, что мы столкнулись с важной и сложной задачей: можно ли вводить марковский процесс с помощью инфинитезимальных характеристик (задавая матрицу  $Q$  и, например, решая системы Колмогорова). Оказывается, ответ на этот вопрос совершенно нетривиален (см. дополнение к этой главе).

§ 21. В заключение этого раздела еще раз обратимся к формулам (78). Для  $k = n$  величина  $\tilde{p}_n$  может интерпретироваться как *вероятность потери* требования в стационарном режиме, т.е. через большое время вероятность того, что все  $n$  приборов будут заняты, окажется близкой к  $\tilde{p}_n$  (следствие 3 обеспечивает экспоненциально быструю скорость сходимости  $p_j(t)$  к  $\tilde{p}_j$ ). Следующая таблица (см. [19; с. 48, 49])

$n = 2, \quad \rho = 0,3, \quad \tilde{p}_2 \simeq 0,0335$
$n = 4, \quad \rho = 0,6, \quad \tilde{p}_4 \simeq 0,0030$
$n = 6, \quad \rho = 0,9, \quad \tilde{p}_6 \simeq 0,0003$

показывает, что при увеличении *коэффициента нагрузки*  $\rho = \lambda/\mu$  пропорциональное увеличение количества обслуживающих приборов может существенно *уменьшить* вероятность потери требования (в стационарном режиме). Название коэффициента нагрузки для  $\rho$  связано с тем, что экспоненциально распределенная величина  $\eta$  (см. (80)) имеет  $E\eta = 1/\mu$ . Поэтому  $\rho$  есть отношение среднего времени обслуживания одного требования к среднему времени между приходом заявок.

Заметим также, что *среднее число* занятых приборов (в стационарном режиме) равно  $\sum_{k=1}^n k\tilde{p}_k = \rho(1 - \tilde{p}_n)$ .

Отметим, что формулы Эрланга будут действовать и в более общей ситуации, когда среднее время обслуживания одного требования по-прежнему равно  $1/\mu$ , но это время *необязательно* имеет экспоненциальное распределение (см. [66]).

## Дополнения и упражнения

1. Докажите, что определение (1) равносильно тому, что для каждого  $s \in T$  и любых  $A \in \mathcal{F}_s, B \in \mathcal{F}_{\geq s}$  выполнено равенство

$$P(AC \mid X_t) = P(A \mid X_t)P(C \mid X_t). \quad (83)$$

Заметим, что, если  $(\mathcal{F}_s)_{s \in T}$  — естественная фильтрация марковского процесса  $X = \{X_t, t \in T\}$ , то определение марковости в виде выполнимости свойства (83) имеет *симметричный* (по отношению к “прошлому” и “будущему”) характер и означает условную независимость “прошлого” и “будущего” процесса  $X$  при фиксированном “настоящем”.

2. Пусть  $X = \{X_t, t \in T\}$  — марковский процесс,  $T \subset \mathbb{R}$ . Объясните, почему  $\{X_t, t \in U\}$ , где  $U \subset T$ , также марковский процесс. В частности, если  $\{X_t, t \geq 0\}$  — марковский процесс, то для любого  $\Delta > 0$  процесс  $X^\Delta = \{X_{k\Delta}, k \geq 0\}$  будет марковским. Верно ли обратное утверждение?
3. Пусть  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  — марковский процесс со значениями при каждом  $t$  в измеримом пространстве  $(S, \mathcal{B})$ . Пусть  $(V, \mathcal{E})$  — измеримое пространство и  $h_t: S \rightarrow V, h_t \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{E}, t \geq 0$ . Докажите, что если  $h_t$  для каждого  $t \geq 0$  является *взаимно-однозначным* отображением, то  $Y = \{Y_t = h_t(X_t), t \geq 0\}$  также есть марковский процесс. Приведите пример, показывающий, что если отказаться от условия *взаимной однозначности* отображения  $h_t$ , то это утверждение может не выполняться.
4. Пусть  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  — марковский процесс со значениями в  $S \subset \mathbb{R}$ . Положим  $Y_t = [X_t]$ , где  $[\cdot]$  — целая часть числа. Можно ли утверждать, что процесс  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$  является марковским?
- 5 (сравните с упражнением 3). Пусть  $W = \{W(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t)), t \geq 0\}$  есть  $m$ -мерное броуновское движение и  $X_m = \left\{X_m(t) = \left(\sum_{k=1}^m W_k^2(t)\right)^{1/2}, t \geq 0\right\}$  — *процесс Бесселя*, т. е. радиальная часть процесса  $W$ . Будет ли процесс  $X_m$  марковским? Отметим, что  $X_1(t) = |W_1(t)|$  при  $t \geq 0, m = 1$ .
6. Пусть  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  и  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$  — действительные марковские процессы. Будут ли процессы  $X + Y = \{X_t + Y_t, t \geq 0\}$  и  $XY = \{X_t Y_t, t \geq 0\}$  марковскими? Что можно сказать о частном случае, когда  $Y_t = c(t)$ , где  $c(t)$  — детерминированная функция?
7. Пусть  $\{X_k, k = 0, 1, \dots\}$  — действительный марковский процесс. Положим  $X_t = (t - k)X_k + (k + 1 - t)X_{k+1}$  для  $t \in [k, k + 1), k = 0, 1, \dots$ , т. е. рассмотрим

- на  $[0, \infty)$  непрерывную ломаную с узлами  $(k, X_k)$ . Будет ли процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  марковским? Будет ли марковским процесс  $Y = \{Y_t = X_{[t]}, t \geq 0\}$ , где  $[\cdot]$  — целая часть числа?
8. Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения 1 и  $-1$  с вероятностью  $1/2$ . Положим  $S_0 = 0$ ,  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, n \geq 1$ , и  $X_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$ . Докажите, что процесс  $X = \{X_n, n \geq 0\}$  не является марковским.
  9. Приведите пример мартингала, не являющегося марковским процессом. Постройте пример действительного марковского процесса  $X = \{X_t, t \in T\}$  с  $E|X_t| < \infty$  при всех  $t \in T$ , который не является мартингалом.
  10. Пусть  $\eta, \xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые величины, причем  $\xi_1, \xi_2, \dots$  равномерно распределены на  $[0, 1]$ , а  $\eta$  — действительная случайная величина с функцией распределения  $F_\eta(x)$ . Положим  $S_n = 1$ , если  $\xi_n \leq \eta$ , и  $S_n = -1$ , если  $\xi_n > \eta$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Будет ли  $\{S_n, n \geq 1\}$  однородным марковским процессом?
  11. Верно ли, что действительный гауссовский процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  является марковским, если условие (12) выполнено лишь для функции  $f(x) \equiv x, x \in \mathbb{R}$ ?
  12. Докажите, что действительный гауссовский процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$ ,  $T \subset \mathbb{R}$ , будет марковским тогда и только тогда, когда для любых  $t_1 < t_2 < t_3$  ( $t_1, t_2, t_3 \in T$ ) справедливо равенство

$$r(t_1, t_3)r(t_2, t_2) = r(t_1, t_2)r(t_2, t_3),$$

где  $r(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t), s, t \in T$ . Будет ли марковским процессом фрактальное броуновское движение?

13. Является ли процесс Орнштейна–Уленбека (определение 13 главы III) однородным марковским процессом?
14. Пусть  $P(X_0 = 1) = P(X_0 = -1) = 1/2$ , причем  $X_0$  не зависит от пуассоновского процесса  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  интенсивности  $\lambda > 0$ . Пусть процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  меняет свое значение на значение противоположного знака в точках скачков пуассоновского процесса. Будет ли процесс  $X$ , называемый телеграфным сигналом, марковским? Нарисуйте график траектории этого процесса.
15. Для  $x \geq 0$  пусть  $\tau_x = \inf\{t \geq 0: W(t) = x\}$ , где  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Докажите, что процесс  $\{\tau_x, x \geq 0\}$  есть процесс с независимыми приращениями (следовательно, марковский по теореме 3).
16. Пусть  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  — марковский процесс. Для  $s > 0$  определим процесс  $Y = \{Y_t = X_{s-t}, t \in [0, s]\}$ . Будет ли  $Y$  марковским процессом? Обязан ли процесс  $Y$  быть однородным процессом, если таковым является  $X$ ?
17. Докажите, что броуновский мост (см. определение в § 9 главы V) — это неоднородный марковский процесс.

18. Пусть  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  — случайный процесс на  $[0, \infty)$ , и

$$Y = \{Y_t = (X_t, t), t \geq 0\}.$$

Докажите, что процессы  $X$  и  $Y$  могут быть марковскими только одновременно. Докажите, что если  $Y$  — марковский процесс, то этот процесс обязательно является однородным. Как связаны переходные функции марковских процессов  $X$  и  $Y$ ?

Интересно отметить, что к одним и тем же конечномерным распределениям марковского процесса могут приводить разные переходные функции, как показывает

**Пример 3.** Пусть  $S = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $T = [0, \infty)$ . Возьмем начальное распределение  $Q = \delta_0$  (мера Дирака, сосредоточенная в точке 0). Для  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  введем функции

$$P(x, t, B) = \mathbf{1}_B(x), \quad \tilde{P}(x, t, B) = \mathbf{1}_B(x + \operatorname{sgn} x),$$

где  $\operatorname{sgn} x$  определяется согласно (IV.16).

Легко видеть, что  $P$  и  $\tilde{P}$  обладают свойствами 1°)–4°), приведенными в § 12, и, следовательно, являются переходными функциями. Пользуясь формулой (35), получаем, что  $P$  и  $\tilde{P}$  приводят к конечномерным распределениям процесса, тождественно равного нулю.

19. Пусть  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  — однородный марковский процесс со значениями (при каждом  $t$ ) в некотором польском пространстве  $S$ . Докажите, что существуют измеримые функции  $h_s: S \times [0, 1] \rightarrow S$ ,  $s \geq 0$  (т. е.  $h_s \in \mathcal{B}(S) \otimes \mathcal{B}([0, 1]) \mid \mathcal{B}(S)$ ,  $s \geq 0$ ) и равномерно распределенные величины  $\theta_{t,s}$ , независимые от  $\{X_u, 0 \leq u \leq t\}$  при  $t, s \geq 0$ , такие, что  $X_{t+s} = h_s(X_t, \theta_{t,s})$  п. н. для всех  $t, s \geq 0$ .

20. Пусть однородный марковский процесс принимает значения в  $\mathbb{R}^m$  и его переходная функция такова, что  $P(x, t, B) = P(x + y, t, B + y)$  для всех  $x, y \in \mathbb{R}^m$ ,  $t \geq 0$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ . Докажите, что тогда этот процесс имеет независимые приращения.

21. Докажите, что для стандартного пуассоновского процесса интенсивности  $\lambda > 0$  имеет место “усиленный закон больших чисел”:  $N(t)/t \rightarrow \lambda$  п. н. при  $t \rightarrow \infty$ .

22 (“парадокс времени ожидания”). Пусть пуассоновский процесс  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  строится согласно теореме 2 главы II по последовательности  $\{\xi_j\}$  независимых экспоненциальных (с параметром  $\lambda$ ) случайных величин. Найдите при фиксированном  $t > 0$  распределение случайной величины  $\zeta_t = \sum_{j=1}^{N_t+1} \xi_j - t$ , т. е. величины “перескока” за уровень  $t$  накапливающихся частных сумм  $S_k = \sum_{j=1}^k \xi_j$ ,  $k \geq 1$ . С этой задачей связан следующий занятый вопрос. Пусть  $\xi_j$  — это случайные интервалы между временами прихода автобусов на данную остановку. Спрашивается, сколько времени Вы будете ждать появления ближайшего автобуса, если оказались на остановке в момент  $t$ ?

- 23** (продолжение упражнения 22). Докажите, что для каждого фиксированного  $t > 0$  введенные выше величины  $\zeta_t, \xi_{N_t+2}, \xi_{N_t+3}, \dots$  образуют последовательность независимых экспоненциально распределенных случайных величин с параметром  $\lambda$ .

В связи с пуассоновским процессом обсудим более детально элементарную конструкцию *точечного случайного процесса без кратных точек*.

Пусть на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  задана последовательность случайных величин  $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$  таких, что для  $\omega \in \Omega_0$ , где  $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$ ,

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots \text{ и } \tau_n \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (84)$$

**Определение 11.** *Точечная случайная мера  $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_+ = \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$  задается формулой*

$$\mu(B, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{\tau_k(\omega)}(B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \quad \omega \in \Omega, \quad (85)$$

где последовательность  $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$  описана выше,  $\delta_x$  — мера Дирака.

При каждом фиксированном  $\omega \in \Omega_0$ , очевидно,  $\mu(\cdot, \omega)$  есть целочисленная мера на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ . Условие (84) влечет, что  $\mu(\cdot, \omega)$  для каждого  $\omega \in \Omega_0$  является *мерой Радона*, т. е. мерой, конечной на компактных подмножествах  $\mathbb{R}_+$ , а, следовательно,  $\mu(\cdot, \omega)$  есть  $\sigma$ -конечная мера на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$  для этих  $\omega$ .

Заметим, что приведенная конструкция дает случайную точечную меру *без кратных точек*, т. е. меру, для которой  $\mu(\{t\}, \omega) \leq 1$  при всех  $t \in \mathbb{R}_+$  и  $\omega \in \Omega_0$ .

**Определение 12.** *Точечный случайный процесс  $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ , где  $Y(0) = 0$ , вводится для  $t > 0$  следующим образом:*

$$Y(t, \omega) = \mu((0, t], \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{(0, t]}(\tau_k(\omega)), \quad (86)$$

где точечная случайная мера  $\mu$  дается формулой (85).

Очевидно,  $\{Y(t) \geq n\} = \{\tau_n \leq t\}$  для  $t \in \mathbb{R}_+$  и  $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ , поэтому  $Y(t) \in \mathcal{F} | \mathcal{A}$  для каждого  $t \in \mathbb{R}_+$ , где  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра, состоящая из всевозможных конечных или счетных подмножеств  $\overline{\mathbb{Z}}_+$ .

- 24.** Определим  $m(B) = \mathbf{E} \mu(B, \cdot)$  для всех  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ , где  $\mu(B, \cdot)$  фигурирует в (85). Будет ли функция  $m(\cdot)$  мерой на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ ? Можно ли представить в виде (86) пуассоновский процесс с локально конечной мерой интенсивности  $m$ ?
- 25** (сравните с теоремой 14 главы V). Докажите, что точечный случайный процесс (86) является пуассоновским, если  $Y$  имеет независимые приращения и  $Y$  стохастически непрерывен на  $\mathbb{R}_+$  (см. (I.56)).
- 26.** По теореме 3 величины  $\tau_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , образуют цепь Маркова, если слагаемые — независимые действительные случайные величины. Будет ли марковским процесс (86), если  $\{\tau_k, k \in \mathbb{N}\}$  — произвольная цепь Маркова, удовлетворяющая условию (84)?

**Определение 13.** Пусть на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  заданы пуассоновский процесс  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  интенсивности  $\lambda = 1$  и независимый от него процесс  $\Lambda = \{\Lambda(t), t \geq 0\}$  с п. н. неубывающими, конечными и непрерывными справа траекториями, выходящими из нуля. *Процессом Кокса* называется процесс  $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ , где  $Z(t, \omega) = N(\Lambda(t, \omega), \omega)$ ,  $t \geq 0, \omega \in \Omega$ .

**27.** Является ли процесс Кокса марковским?

**Определение 14.** Будем говорить, что случайный процесс  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  является “*дробовым шумом*”, если

$$X(t, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(t - \tau_k(\omega)), \quad t \geq 0, \quad (87)$$

где ограниченная борелевская функция  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  финитна, случайные величины  $\tau_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) удовлетворяют условию (84) (обеспечивающему, что ряд (87) сходится при каждом  $t \geq 0$  на множестве  $\Omega_0$  вероятности единица).

Заметим, что в литературе встречаются и другие варианты процесса “дробового шума”. Например, в сумму (87) вводятся случайные амплитуды и масштабные множители. Рассматриваются также случайные поля дробового шума, заданные на  $\mathbb{R}^d$ .

**28.** Найдите ковариационную функцию процесса (87), если последовательность  $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$  задает точечный пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$ . Достаточно ли для сходимости ряда (87) с вероятностью единица при каждом  $t \geq 0$  потребовать, чтобы ограниченная функция  $\phi$  была интегрируема по Лебегу?

Дадим определение *маркированного точечного процесса*, являющегося естественным обобщением введенного выше понятия “точечного случайного процесса”. Пусть кроме последовательности  $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$  случайных величин, удовлетворяющих условию (84), на том же вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  имеется некоторая последовательность  $\{\eta_k\}_{k \geq 1}$  действительных случайных величин, “привязанная” к моментам  $\tau_k$ ,  $k \geq 1$ . Например, можно себе вообразить, что в случайный момент времени  $\tau_k$  страховая компания выплачивает некоторую случайную сумму  $\eta_k$ . Интерпретируя величины  $\eta_k$ ,  $k \geq 1$ , как “марки”, “метки”, дадим следующее

**Определение 15.** *Маркированным точечным случайным процессом* называется процесс (индексированный множествами  $C$ ) следующего вида

$$\tilde{\mu}(C; \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{(\tau_k(\omega), \eta_k(\omega))}(C), \quad C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \omega \in \Omega.$$

Функция

$$Y(t, D; \omega) = \tilde{\mu}((0, t] \times D; \omega), \quad t \geq 0, \quad D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

называется *считающей функцией* (сравните с (86)).

Согласно (85) имеем

$$\mu(B, \omega) = \tilde{\mu}(B \times \mathbb{R}; \omega).$$

Кроме того,

$$Y(t, D; \omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } Y(t, \omega) = 0, \\ \sum_{k=1}^{Y(t)} \mathbf{1}_D(\eta_k) & \text{при } Y(t) \geq 1, \end{cases} \quad (88)$$

где процесс  $Y$  задается формулой (86).

**29.** Нарисуйте график траектории  $Y(t, D)$ ,  $t \geq 0$ , при фиксированном  $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

**30.** Пусть  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  — пуассоновский процесс с ведущей мерой  $m = m(\cdot)$ , определяемый последовательностью  $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$ , задающей точки скачков  $N$ . Пусть  $\{\eta_k\}_{k \geq 1}$  — последовательность независимых одинаково распределенных действительных случайных величин с  $\text{Law}(\eta_k) = \tilde{P}$ . Возьмем  $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  такое, что  $\tilde{P}(D) > 0$ . Докажите, что “*прореженный процесс*”  $Y(t, D)$ ,  $t \geq 0$ , определенный формулой (88), является пуассоновским с ведущей мерой  $m(\cdot) \tilde{P}(D)$ .

О точечных случайных процессах и полях см., например, [111, 178]; специально о маркированных процессах см. [156].

Дадим наглядное представление о связи инфинитезимальной матрицы  $Q$  (стандартной) марковской цепи  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  с поведением самой цепи. Пусть

$$q_i := -q_{ii} < \infty \quad \text{для всех } i \in S. \quad (89)$$

Процесс  $X$  является *стохастически непрерывным* на всей полупрямой  $[0, \infty)$  и, согласно теореме 13 главы I, он имеет *сепарабельную модификацию* (с любым счетным множеством сепарабельности  $R \subset [0, \infty)$ ), которую мы и будем рассматривать. Пусть в момент  $s \geq 0$  процесс находится в состоянии  $i$  с вероятностью  $P(X(s) = i) \neq 0$ . Тогда для любого  $t > 0$  (учитывая сепарабельность процесса  $X$ ) имеем

$$\begin{aligned} P(X(u) = i, s \leq u \leq s + t \mid X(s) = i) &= \\ &= \frac{1}{P(X(s) = i)} P(X(u) = i, s \leq u \leq s + t) = \\ &= \frac{1}{P(X(s) = i)} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X(u) = i, \text{ для } u = s + tk2^{-n}, k = 0, \dots, 2^n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (p_{ii}(t2^{-n}))^{2^n} = \exp\{-q_i t\}, \end{aligned} \quad (90)$$

поскольку из определения  $q_i$  получаем

$$p_{ii}(h) = 1 - q_i h + o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0 +.$$

Если  $t = 0$ , то левая часть формулы (90) равна 1, поэтому данное соотношение справедливо для всех  $t \geq 0$ .

Левая часть (90) представляет собой *вероятность пребывания процесса  $X$  после момента  $s$  в состоянии  $i$  в течение времени, не меньшего  $t$ , при условии, что в момент  $s$  процесс находился в состоянии  $i$* . Таким образом, результат не зависит от  $s$ , как и следовало ожидать для однородного процесса. Поэтому можно говорить о длительности пребывания процесса  $X$  в состоянии  $i$ , начиная с произвольного момента времени.



Итак, доказана (сравните с теоремой 2 главы II)

**Теорема 12.** Пусть однородная марковская цепь  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  удовлетворяет условию (89). Тогда условная длительность пребывания этого процесса в любом состоянии  $i$  имеет показательное распределение с параметром  $q_i$ .

Для марковских цепей, как уже упоминалось в § 1, важным представляется вопрос о классификации состояний (возвратные, периодические состояния и т. д.). Для цепей Маркова с дискретным временем об этом можно прочитать, например, в книгах [85, 101, 78].

**Определение 16.** Состояние  $i$ , для которого  $0 \leq q_i < \infty$ , называется *устойчивым*. Оно называется *поглощающим*, когда  $q_i = 0$ . Состояние  $i$  называется *мгновенным*, если  $q_i = \infty$ .

Если процесс попадает в поглощающее состояние, то он остается там “навсегда” (это следует из (90) при  $q_i = 0$ ).

Происхождение названия “мгновенное состояние” объясняет упражнение

**31.** Пусть в состоянии  $i$  значение  $q_i = \infty$ . Тогда вероятность пребывания процесса  $X$  в этом состоянии положительное время равна нулю, т. е. попав в это состояние, процесс *мгновенно* его покидает.

Теория цепей Маркова, имеющих мгновенные состояния, чрезвычайно сложна. Интересно отметить, что существуют примеры однородных цепей, *все* состояния которых мгновенны (см. [21]).

Пусть теперь процесс  $X$  *консервативен* (см. (63)). Тогда при  $q_i \neq 0$  величины  $q_{ij}/q_i, j \neq i$ , можно интерпретировать как *интенсивности вероятностей переходов из состояния  $i$  в состояние  $j$* . Точнее говоря, пусть для  $j \neq i, t > 0$

$$F_{ij}(t) := P(X(s+t) = j \mid X(s) = i, X(s+t) \neq i).$$

Легко видеть, что

$$F_{ij}(t) = p_{ij}(t)/(1 - p_{ii}(t)) \rightarrow q_{ij}/q_i \text{ при } t \rightarrow 0+.$$
 (91)

Если  $0 < q_i < \infty$  и  $\sum_{j \neq i} q_{ij} < q_i$ , то  $1 - \sum_{j \neq i} q_{ij}/q_i$  можно понимать как *интенсивность вероятности “ухода процесса на бесконечность”*.

Данная выше интерпретация элементов матрицы  $Q$  делает естественным следующий способ построения марковских цепей, предложенный Дж. Дубом.

Пусть  $S$  — конечное или счетное множество, и пусть  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  — консервативная марковская цепь с инфинитезимальной матрицей  $Q$ , причем  $q_i \in (0, \infty)$ ,  $i \in S$ . Построим рекуррентным образом последовательности случайных величин  $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$  и  $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$  со значениями в  $S$  и  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  соответственно и так, что  $\eta_1$  имеет произвольное распределение,

$$P(\tau_1 > t \mid \eta_1 = i) = e^{-q_i t}, \quad t > 0, \quad i \in S,$$
 (92)

и при  $n \geq 1, i, j, i_1, \dots, i_n \in S, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$  пусть

$$\begin{aligned} P(\eta_{n+1} = j \mid \tau_1 = x_1, \dots, \tau_n = x_n, \eta_1 = i_1, \dots, \eta_n = i_n, \eta_n = i) &= q_{ij}/q_i, \quad i \neq j, \\ P(\tau_{n+1} - \tau_n > t \mid \tau_1 = x_1, \dots, \tau_n = x_n, \eta_1 = i_1, \dots, \eta_n = i_n, \eta_{n+1} = j) &= e^{-q_j t}. \end{aligned}$$
 (93)

- 32.** Докажите, что на подходящем вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  существуют описанные выше последовательности случайных величин  $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$  и  $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ , удовлетворяющие условиям (92) и (93). При этом  $0 = \tau_0 < \tau_1(\omega) < \tau_2(\omega) < \dots$  п. н. Можно ли утверждать, что всегда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$  п. н.?

Докажите, что последнее заведомо справедливо, если  $\sup_i q_i < \infty$ .

- 33.** Пусть  $\tau_0(\omega) = 0$  п. н. Используя случайные величины  $\eta_n, \tau_n$  ( $n \geq 1$ ), фигурирующие в упражнении 32, и считая выполненным условие (84), введем процесс  $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ , положив

$$Y(t, \omega) = \eta_n(\omega) \quad \text{при} \quad \tau_{n-1}(\omega) \leq t < \tau_n(\omega), \quad n \geq 1$$

(для  $\omega$  таких, что  $\tau_{n-1}(\omega) = \tau_n(\omega)$  при некотором  $n \geq 1$ , пусть  $Y(t, \omega) = 0$ ,  $t \geq 0$ ). Докажите, что  $Y$  — марковский процесс, имеющий те же конечномерные распределения, что и процесс  $X$ , который определял матрицу  $Q$ . Как модифицировать приведенное построение, если некоторые величины  $q_i$  равны нулю?

В связи с последними двумя упражнениями заслуживает внимания следующее упражнение.

- 34.** Докажите, что  $\sup_i q_i < \infty$  тогда и только тогда, когда  $p_{ii}(t) \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow 0+$  равномерно по  $i \in S$  (или, что эквивалентно,  $p_{ij}(t) \rightarrow \delta_{ij}$  при  $t \rightarrow 0+$  равномерно по  $i, j \in S$ ).
- 35.** Приведите пример переходных вероятностей, для которых не выполнено условие стандартности (49). Приведите пример, когда выполнено свойство (49), а (89) не имеет места.

В упражнении 33 указано, как, располагая консервативной инфинитезимальной матрицей  $Q$ , построить марковский процесс, имеющий полугруппу переходных вероятностей с инфинитезимальной матрицей  $Q$ . Другая постановка этой задачи — *восстановление* полугруппы  $(P(t))_{t \geq 0}$  по ее *генератору*  $Q$  (см., например, [23]). Если нам удастся построить стохастическую полугруппу  $(P(t))_{t \geq 0}$ , имеющую инфинитезимальной матрицей заданную матрицу  $Q$ , то дальше теорема 5 обеспечит построение самого процесса с переходной матрицей  $P(t)$  (даже *семейства* марковских процессов, поскольку можно варьировать начальное распределение). В этой связи предлагается упражнение

- 36.** Пусть пространство состояний  $S$  состоит из *конечного* числа  $N$  элементов, а переходная матрица  $P(t)$  стандартна. Докажите, что тогда эта матрица допускает следующее представление:

$$P(t) = \exp\{tQ\}, \quad t \geq 0, \quad (94)$$

где  $N \times N$ -матрица  $Q$  удовлетворяет условию

$$q_{ij} \geq 0 \quad \text{для} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad \sum_j q_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad \text{каждом} \quad i. \quad (95)$$

Обратно, если для матрицы  $Q$  выполнены условия (95), то формула (94) определяет стандартную матрицу переходных вероятностей.

Рассмотрим теперь более общую матрицу  $Q = (q_{ij})_{i,j \in S}$  с действительными элементами, где  $S$  *счетно*, такую, что

$$q_{ij} \geq 0 \text{ при } i \neq j, \quad q_i = -q_{ii} \geq 0, \quad \text{и} \quad \sum_j q_{ij} \leq 0 \text{ для } i \in S. \quad (96)$$

Поставим следующий вопрос: существует ли стохастическая полугруппа  $(P(t))_{t \geq 0}$ , имеющая своей инфинитезимальной матрицей матрицу  $Q$ ?

Оказалось, что искать решение этой задачи удобно сначала в классе *полустохастических матриц*  $(P(t))_{t \geq 0}$ , для которых, по-прежнему, выполнено уравнение (37), а в (39) вместо условия  $\sum_j p_{ij}(t) = 1, t \geq 0, i \in S$ , налагается менее ограничительное требование  $\sum_j p_{ij}(t) \leq 1, t \geq 0, i \in S$ . Решение такой задачи часто называют *Q-решением*, подразумевая следующее. Если окажется, что  $\sum_j p_{ij}(t) = 1$  для всех  $t \geq 0, i \in S$ , то говорят о *собственном решении* (или процессе), а если выполняется лишь неравенство  $\sum_j p_{ij}(t) \leq 1, t \geq 0, i \in S$ , то — о *несобственном решении*. В первом случае действительно существует *марковская цепь* (разумеется, можно менять начальное распределение) с переходными вероятностями  $p_{ij}(t), t \geq 0, i, j \in S$ . Во втором же случае можно построить соответствующий марковский процесс  $\hat{X}$ , *расширив* пространство состояний  $S$  еще дополнительной точкой, скажем,  $\infty$  и определяя для него переходные вероятности  $\hat{p}_{..}(t)$  следующим образом:

$$\hat{p}_{ij}(t) = p_{ij}(t) \text{ при } i, j \in S \text{ и } \hat{p}_{\infty, j}(t) = \delta_{\infty, j}, \quad \hat{p}_{i, \infty}(t) = 1 - \sum_j p_{ij}(t), \quad t \geq 0.$$

В связи с вышеизложенным рассмотрим проблему *существования и единственности* решений систем (прямых и обратных) уравнений Колмогорова, исследовавшуюся многими авторами с помощью разнообразной техники. В. Феллер использовал преобразование Лапласа. Г. Ройтер и В. Ледерман применяли метод, основанный на приближениях матрицы  $Q$  “усеченными матрицами”. Т. Като опирался на теорию возмущений (подробнее об этом см., например, [1]).

Интересно отметить, что сами уравнения (65) и (72) можно понимать либо в *узком смысле* (т. е. что все  $p'_{ij}(t)$  непрерывны при  $t \geq 0$  и изучаемые уравнения справедливы при всех  $t \geq 0$ ), либо в *широком смысле*, т. е. что  $p_{ij}(t)$  абсолютно непрерывны и рассматриваемые уравнения верны для почти всех (по мере Лебега)  $t \geq 0$ .

**37.** Докажите, что для систем уравнений Колмогорова обе данные выше интерпретации (в узком и широком смыслах) *эквивалентны*. Для *прямых* уравнений это упражнение надо отнести к числу весьма трудных.

**Теорема 13.** Пусть выполнено условие (96). Тогда существует *Q-решение*, удовлетворяющее как обратной, так и прямой системам Колмогорова. Кроме того, обратное уравнение (64) имеет в классе полустохастических матриц единственное собственное *Q-решение* тогда и только тогда, когда то же самое верно для прямого уравнения (71).

Подробное доказательство можно прочитать, например, в [1].

**Теорема 14** ([180]). Пусть матрица  $Q$ , удовлетворяющая условию (96), консервативна. Тогда любое из следующих двух условий необходимо и достаточно для существования единственного  $Q$ -решения.

1. Для некоторого  $\lambda > 0$  единственным ограниченным решением уравнения

$$(Q - \lambda I)x = 0$$

является  $x = (0, 0, \dots)^*$ , а ограниченность решения означает, что  $\sup_i |x_i| < \infty$ .

2. Для некоторого  $\lambda > 0$  единственным неотрицательным ограниченным решением  $x = (x_1, x_2, \dots)^*$ , где все  $x_i \geq 0$ , указанного уравнения является  $x = (0, 0, \dots)^*$ .

**38** (см. также упражнение 34). Докажите, что если  $\sup_i q_i < \infty$ , то обе системы уравнений Колмогорова имеют единственное решение.

Интересно отметить, что, как показывает нижеследующая теорема, проблема существования и единственности решения уравнений Колмогорова тесно связана со свойствами траекторий марковской цепи.

**Теорема 15** (см. [82; с. 341]). Пусть все  $q_i < \infty$ . Тогда для того, чтобы были справедливы и система прямых, и система обратных уравнений Колмогорова, необходимо и достаточно, чтобы почти все траектории обладали следующим свойством: если  $X(s, \omega) \rightarrow \infty$  при  $s \rightarrow t$  с одной стороны (слева или справа), то  $X(s, \omega) \rightarrow \infty$  при  $s \rightarrow t$  с обеих сторон.

Единственность и неединственность решений уравнений Колмогорова удобно рассмотреть на примерах процессов рождения и гибели.

**Определение 17.** Однородный марковский процесс  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  с пространством состояний  $S = \{0, 1, \dots\}$  называется процессом рождения и гибели, если его инфинитезимальная матрица  $Q$  имеет следующий вид

$$q_{i,i-1} = \mu_i, \quad q_{ii} = -(\lambda_i + \mu_i), \quad q_{i,i+1} = \lambda_i, \quad q_{ij} = 0 \quad \text{при } |i - j| > 1,$$

где  $\mu_0 = 0$ ,  $\mu_i > 0$ ,  $i \geq 1$  и  $\lambda_i > 0$ ,  $i \geq 0$ . Если  $\mu_i = 0$  для всех  $i \geq 0$ , то говорят о процессе рождения, а если  $\lambda_i = 0$ ,  $i \geq 0$ , то — о процессе гибели.

**39.** Пусть процесс рождения таков, что  $\sum_i \lambda_i^{-1} < \infty$ . Докажите, что тогда система прямых уравнений Колмогорова имеет единственное решение, а система обратных — бесконечно много. Докажите, что если для процесса гибели  $\sum_i \mu_i^{-1} < \infty$ , то система обратных уравнений имеет единственное решение, а система прямых — бесконечно много, среди которых ровно одно собственное.

Чтобы сформулировать общий результат о процессах рождения и гибели, введем некоторые обозначения. Положим

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_n = (\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}) / (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n \pi_n)^{-1} \sum_{i=1}^n \pi_i, \quad S = \sum_{n=2}^{\infty} \pi_n \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda_i \pi_i)^{-1}, \quad T = \sum_{n=0}^{\infty} (\pi_n + (\lambda_n \pi_n)^{-1}).$$

**Теорема 16** (Ледерман–Ройтер). Пусть матрица  $Q$  консервативна и удовлетворяет условию (96). Тогда

1. Если  $R = \infty$ , то существует ровно одно  $Q$ -решение, оно собственное и удовлетворяет системе прямых уравнений.
2. Если  $R < \infty$  и  $S = \infty$ , то имеется бесконечно много  $Q$ -решений. Только одно из них удовлетворяет системе прямых уравнений, но это решение не собственное.
3. Если  $R < \infty$  и  $S < \infty$ , что эквивалентно условию  $T < \infty$ , то существует бесконечно много  $Q$ -решений, удовлетворяющих системе прямых уравнений. Ровно одно из этих решений является собственным.

Выше прямые и обратные уравнения Колмогорова рассматривались лишь для марковских цепей, для которых (по определению) пространство состояний  $S$  дискретно. В этой связи отметим, что в классической работе 1931 года А. Н. Колмогорова “Об аналитических методах в теории вероятностей” (см. [33]) прямые и обратные уравнения даются и для более общего пространства состояний, в частности, для  $S = \mathbb{R}^d$ . При этом соответствующие прямые и обратные уравнения будут уже уравнениями в частных производных. (Некоторый класс таких прямых уравнений был ранее рассмотрен в физике Фоккером и Планком.) Об этом направлении исследований, приведшему к моделям *диффузионных процессов*, можно прочитать, например, в [12, 192, 76]. В главе VIII мы рассмотрим конструкцию диффузионных процессов как решений стохастических дифференциальных уравнений.

Наряду с понятием *марковского процесса*, в общей теории важным является понятие *марковского семейства* случайных процессов.

Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  — борелевские пространства,  $T \subset \mathbb{R}$  и  $P(s, x, t, B)$  — переходная функция. Возьмем произвольное  $s \in T$  и в качестве *начального* распределения выберем меру  $Q_s(\cdot) = \delta_x(\cdot)$ , где  $x \in S_s$ . На некотором вероятностном пространстве существует марковский процесс

$$X^{s,x} = \{X_t^{s,x}, t \in T_s := [s, \infty) \cap T\},$$

имеющий заданную переходную функцию и такой, что  $X_s^{s,x} = x$  п. н. Этот процесс  $X^{s,x}$  с помощью теоремы Колмогорова может быть непосредственно задан (см. (I.42)) на пространстве  $(S_{T_s}, \mathcal{B}_{T_s})$ , снабженном вероятностью  $Q_{s,x} = \text{Law}(X^{s,x})$ . Переопределим процесс  $X^{s,x}$  на  $\Omega = S_T$  формулой

$$Y_t^{s,x}(\omega) := X_t^{s,x}(\pi_{T, T_s} \omega), \quad t \in T_s, \quad \omega \in S_T, \quad (97)$$

где  $\pi_{T, T_s}$  обозначает отображение сужения функции с множества  $T$  на множество  $T_s$ . Введем  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{F}_{\geq s} := \pi_{T, T_s}^{-1} \mathcal{B}_{T_s}$  и зададим на ней меру  $P_{s,x} = Q_{s,x} \pi_{T, T_s}^{-1}$ .

Нетрудно видеть, что  $Y^{s,t} = \{Y_t^{s,x}, t \in T_s\}$  — случайный процесс на  $(\Omega, \mathcal{F}_{\geq s}, P_{s,x})$ .

**Теорема 17.** Для каждой  $s \in T$  и  $x \in S_s$  процесс  $Y^{s,x} = \{Y_t^{s,x}(\omega), t \in T_s, \omega \in \Omega\}$  будет марковским на  $(\Omega, \mathcal{F}_{\geq s}, P_{s,x})$  с переходной функцией  $P(s, x, t, B)$ . Кроме того,  $Y_s^{s,x} = x$  (п. н.) по мере  $P_{s,x}$ .

**Доказательство.** Равенство  $Y_s^{s,x} = x$  очевидно, поскольку  $Q_s = \delta_x$ . Проверим, что для любых точек  $u$  и  $t$  из  $T$  ( $u \leq t$ ) и  $B \in \mathcal{B}_t$

$$P_{s,x}(Y_t^{s,x} \in B | Y_u^{s,x}) = P(u, Y_u^{s,x}, t, B) \quad (P_{s,x}\text{-п.н.}).$$

Для этого достаточно убедиться в том, что для любого  $D \in \mathcal{B}_u$

$$P_{s,x}(Y_t^{s,x} \in B, Y_u^{s,x} \in D) = \int_{\{Y_u^{s,x} \in D\}} P(u, Y_u^{s,x}, t, B) dP_{s,x}. \quad (98)$$

Пользуясь марковостью процесса  $X^{s,x}$  на пространстве  $(S_T, \mathcal{B}_T, Q_{s,x})$ , имеем

$$\begin{aligned} \int_{\{Y_u^{s,x} \in D\}} P(u, Y_u^{s,x}, t, B) dP_{s,x} &= \int_{\{X_u^{s,x} \in D\}} P(u, X_u^{s,x}, t, B) dQ_{s,x} = \\ &= Q_{s,x}(X_t^{s,x} \in B, X_u^{s,x} \in D) = P_{s,x}(Y_t^{s,x} \in B, Y_u^{s,x} \in D), \end{aligned}$$

что и доказывает (98).

Марковость процесса  $Y^{s,x}$ , т. е. свойство (12), проверяется аналогично.  $\square$

Отметим, что довольно сложное обозначение (97) для процесса  $Y^{s,x}$  было введено для удобства применения формулы (I.23) при переходе к интегрированию с одного пространства на другое. Однако очевидно, что

$$Y_t^{s,x}(\omega) = \omega(t) \quad \text{для } t \in T_s, \quad \omega \in \Omega.$$

По-другому, можно сказать, что у нас имеется один непосредственно заданный процесс  $Y = \{Y(t), t \in T\}$ , т. е.  $Y(t, \omega) = \omega(t)$ ,  $t \in T$ ,  $\omega \in \Omega = S_T$ , который может рассматриваться для разных  $s$  из  $T$  при  $t \geq s$  ( $t \in T$ ). Этот процесс, как процесс на  $T_s$  и  $(\Omega, \mathcal{F}_{\geq s}, P_{s,x})$ , будет *марковским* с заданной переходной функцией, причем в момент  $s$  он начинается из точки  $x \in S_s$  ( $P_{s,x}$ -п.н.).

Заметим, что обозначение  $\mathcal{F}_{\geq s}$  полностью согласуется с использованным ранее, поскольку  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}_{\geq s}$  порождается семейством координатных отображений  $\pi_{T,t}$  пространства  $S_T$  при  $t \in T_s$ . Иначе говоря,  $\mathcal{F}_{\geq s} = \sigma\{Y_t, t \in T_s\}$ .

**Определение 18.** Введенные на вероятностном пространстве  $(S_T, \mathcal{B}_T, P_{s,x})$  марковские процессы  $Y^{s,x}$  называются *марковским семейством*.

Поскольку  $\mathcal{F}_{\geq s} \subset \mathcal{B}_T$  для каждого  $s \in T$ , то меру  $P_{s,x}$  можем продолжить на  $\mathcal{F} = \mathcal{B}_T$  нулем для тех множеств из  $\mathcal{B}_T$ , которые не входят в  $\mathcal{F}_{\geq s}$ . Итак, появляется возможность на одном и том же измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{F})$ , задавая разные меры  $P_{s,x}$  для  $s \in T$ ,  $x \in S_s$ , “выпускать” марковские процессы в момент  $s$  из точки  $x$  ( $P_{s,x}$ -п.н.), причем у всех процессов этого семейства  $Y^{s,x} = \{Y_t^{s,x}, t \in T_s\}$  будет одна и та же заданная переходная функция.

Легко прояснить смысл переходной функции для марковского семейства:

$$P_{s,x}(Y_t^{s,x} \in B) = P(s, x, t, B) \quad P_{s,x}\text{-п.н.}, \quad \text{где } s, t \in T \quad (s \leq t), \quad x \in S_s, \quad B \in \mathcal{B}_t.$$

Мы воспользовались здесь тем, что  $P(\xi \in B | \eta) = P(\xi \in B)$  п.н., если  $\eta = c$  п.н., где  $c = \text{const}$ .

Определение марковости (1) и другие рассмотренные нами определения можно обобщать в различных направлениях. Например, в монографии [23] дается определение марковского процесса, время жизни которого случайно, т. е. траектории могут *обрываться в случайный момент времени* (наглядно можно представить частицу, которая “сгорела”). Чтобы наметить путь дальнейших обобщений понятия марковости на *случайные поля* нам понадобится следующее определение.

**Определение 19.** Пусть дано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{E}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{F}$ . Говорят, что  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{E}$  *расщепляет*  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$ , если

$$P(A_1 A_2 | \mathcal{E}) = P(A_1 | \mathcal{E})P(A_2 | \mathcal{E}) \quad \text{для любых } A_k \in \mathcal{A}_k, \quad k = 1, 2. \quad (99)$$

Согласно этому определению, соотношение (83) означает, что  $\sigma$ -алгебра  $\sigma\{X_t\}$  расщепляет  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_t$  и  $\mathcal{F}_{\geq t}$  при каждом  $t \in T$ .

**40** (сравните с (1)). Покажите, что если  $\mathcal{E}$  расщепляет  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$ , то  $\mathcal{E}$  расщепляет  $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{E}$  и  $\mathcal{A}_2 \vee \mathcal{E}$  (по-прежнему,  $\mathcal{A} \vee \mathcal{E} = \sigma\{\mathcal{A}, \mathcal{E}\}$ ). Проверьте, что условие (99) эквивалентно тому, что

$$P(A | \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{E}) = P(A | \mathcal{E}) \quad \text{для всех } A \in \mathcal{A}_2.$$

Пусть  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{E}_\alpha \subset \mathcal{A}_1$  и пусть при каждом  $\alpha \in I$   $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{E}_\alpha$  расщепляет  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$ . Убедитесь, что тогда  $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{E}_\alpha$  расщепляет  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$ , а если выполнено свойство (99), то  $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{E}$ . В частности, в (83) фигурирует *минимальная* расщепляющая алгебра, поскольку  $\sigma\{X_t\} \subset \mathcal{F}_t \cap \mathcal{F}_{\geq t}$ .

Заметим, что *независимость*  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$  равносильна тому, что их расщепляет тривиальная  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{E} = \{\emptyset, \Omega\}$ .

Вкратце остановимся на том случае, когда параметрическое множество  $T$  не обязательно есть подмножество числовой прямой  $\mathbb{R}$ .

Случайная функция  $X = \{X_t, t \in T\}$  порождает семейство  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{A}(U) = \sigma\{X_t, t \in U\}$ ,  $U \subset T$ . В общем случае у нас нет естественных понятий “прошлого” и “будущего”, в терминах которых удобно определять понятие марковости. Поэтому для введения марковских случайных функций могут представляться разные возможности, позволяющие определять, какие  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{A}(U_1)$  и  $\mathcal{A}(U_2)$  для  $U_1, U_2 \subset T$  и какой  $\sigma$ -алгеброй должны расщепляться (см., например, [62; гл. 2], где изучается семейство  $\sigma$ -алгебр, индексированных некоторой системой  $\Lambda$  открытых множеств в локально-компактном метрическом пространстве  $T$ ). Мы не затрагиваем здесь также концепции марковости обобщенных случайных полей. О гиббсовских и марковских полях, заданных на решетке  $\mathbb{Z}^d$ , см., например, [54].

Для дальнейшего чтения о марковских процессах и полях можно обратиться к [23, 24, 47, 56, 59, 62, 76, 82, 107, 113, 150, 184].

## Глава VII

### Стационарные процессы.

#### Дискретное и непрерывное время

Ортогональные случайные меры и их  $\sigma$ -конечные структурные меры. Построение ортогональной случайной меры, отвечающей данной структурной мере. Интеграл по ортогональной случайной мере, его свойства. Теорема Карунена о факторизации ковариационной функции и представлении процесса в виде интеграла по ортогональной случайной мере. Стационарные в широком смысле процессы и их ковариационные функции. Теорема Герглотца. Теорема Бохнера–Хинчина. Спектральное представление стационарных процессов с непрерывным и дискретным временем. Эргодичность в  $L^2(\Omega)$ . Процессы скользящего среднего. Статистическое оценивание ковариационной функции и спектральной плотности. Задача линейного прогноза. Регулярные и сингулярные процессы. Разложение Вольда. Регулярные процессы как физически осуществимые фильтры. Критерий Колмогорова регулярности процесса. Теорема Колмогорова–Сегё.

§ 1. Основным объектом изучения в этой главе будут *стационарные в широком смысле* случайные процессы. Акцент делается на их *канонических* представлениях с помощью “просто” устроенных объектов. При первом чтении необходимо усвоить теорему Карунена (§ 8), дающую общий подход к построению канонических представлений случайных процессов и полей. Для ее понимания необходимо разобраться с интегрированием детерминированных функций по ортогональным случайным мерам, детально изложенным в § 1–7. Далее в § 9 можно ограничиться рассмотрением процессов с дискретным временем, их спектральным представлением, а также применением этого представления к установлению варианта закона больших чисел (§ 10). Важный класс стационарных процессов дают процессы *скользящего среднего*, вводимые в § 13. Желательно также ознакомиться с проблемой статистического оценивания спектральной плотности (§ 14). К остальным вопросам можно вернуться при повторном чтении.

Для интересующих нас так называемых *канонических представлений* случайных функций надо довольно подробно рассмотреть вопросы построения ортогональных случайных мер по заданной структурной функции и дать конструкцию стохастического интеграла по таким мерам.

Пусть  $\mathcal{K}$  — полукольцо подмножеств некоторого множества  $\Lambda$ , т. е.  $A \cap B \in \mathcal{K}$  для любых  $A, B \in \mathcal{K}$ , а если  $A \subset B$ , то  $B \setminus A$  можно представить в виде конечного, зависящего от  $A$  и  $B$ , объединения множеств из  $\mathcal{K}$ . Предположим, что каждому



множеству  $B \in \mathcal{K}$  сопоставлена комплекснозначная величина  $Z(B) = Z(B, \omega)$  со значениями из  $L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

**Определение 1.** Семейство  $Z = \{Z(B), B \in \mathcal{K}\}$  в  $L^2(\Omega)$ , индексированное множествами полукольца  $\mathcal{K}$ , называется *ортгогональной случайной мерой*, если

- 1)  $Z(B) - Z(C)$  для  $B, C \in \mathcal{K}, B \cap C = \emptyset$ , т. е.  $(Z(B), Z(C)) = 0$ , где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $L^2(\Omega)$ ;
- 2) для каждого  $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ , где  $B, B_1, B_2, \dots \in \mathcal{K}$  и  $B_n \cap B_m = \emptyset$  ( $n \neq m$ ),

$$Z(B) = \sum_{k=1}^{\infty} Z(B_k) \quad \text{п. н.}, \quad (1)$$

а ряд сходится в среднем квадратическом.

Подчеркнем, что множество тех  $\omega \in \Omega$ , для которых выполнено свойство (1), хотя и имеет вероятность 1, но *зависит* от рассматриваемых множеств  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{K}$  (всюду далее равенство случайных величин понимается как равенство п. н.). Отметим, что свойства 1) и 2) обеспечивают также конечную аддитивность  $Z$  на  $\mathcal{K}$ .

Введем *структурную функцию* (или *структурную меру*) меры  $Z$ , положив

$$\mu(B) = \mathbb{E} |Z(B)|^2, \quad B \in \mathcal{K}.$$

Пользуясь непрерывностью скалярного произведения, легко убедиться, что функция множеств  $\mu = \mu(\cdot)$  обладает свойством *счетной аддитивности*. Если множество  $\Lambda \in \mathcal{K}$ , то  $\mu$  является *конечной* мерой на  $\mathcal{K}$ . Мы будем рассматривать более общую ситуацию, когда  $\mu$  есть  $\sigma$ -конечная мера, т. е. множество  $\Lambda$  может быть представлено в виде  $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ , где  $\Lambda_n \in \mathcal{K}$ ,  $\mu(\Lambda_n) < \infty$  и  $\Lambda_n \cap \Lambda_m = \emptyset$  при всех  $n \neq m$ .

Нетрудно проверить, что если на полукольце  $\mathcal{K}$  задана  $\sigma$ -конечная мера  $\mu$ , то *эквивалентное определение* ортогональной случайной меры  $Z$  (на  $\mathcal{K}$ ), имеющей структурную меру  $\mu$ , таково:  $Z(B) \in L^2(\Omega)$  для всех  $B \in \mathcal{K}$  и

$$(Z(B), Z(C)) = \mu(B \cap C) \quad \text{для любых } B, C \in \mathcal{K}, \quad (2)$$

напомним, что  $(\xi, \eta) = \mathbb{E} \xi \bar{\eta}$  для  $\xi, \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Ортогональную случайную меру  $\mu$  называют *центрированной*, если  $\mathbb{E} Z(B) = 0$  для любого  $B \in \mathcal{K}$ .

**Пример 1.** Пусть  $\Lambda = [0, \infty)$ ,  $\mathcal{K} = \{[a, b), 0 \leq a \leq b < \infty\}$  ( $[a, a) = \emptyset$ ). Положим  $Z([a, b)) = W(b) - W(a)$ , где  $W$  — винеровский процесс. Учитывая независимость приращений винеровского процесса, видим, что  $Z$  есть ортогональная случайная мера на  $\mathcal{K}$ , имеющая структурной функцией  $\mu$  меру Лебега.

§ 2. Покажем как построить (даже центрированную) ортогональную случайную меру  $Z$ , имеющую своей структурной функцией данную  $\sigma$ -конечную меру  $\mu$  на полукольце  $\mathcal{K}$ . Мы увидим, что такое построение неединственно.

**Теорема 1.** Пусть  $\mu$  есть  $\sigma$ -конечная мера на полукольце  $\mathcal{K}$  подмножеств  $\Lambda$  (можно сразу продолжить ее на  $\mathcal{A} = \sigma\{\mathcal{K}\}$ ). Тогда существуют вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и центрированная ортогональная случайная мера  $Z = Z(\cdot)$ , заданная на  $\Omega$  и системе множеств  $\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{A} : \mu(B) < \infty\}$ , имеющая своей структурной функцией меру  $\mu$ .

**Доказательство.** Требуемое вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  построим следующим образом. Возьмем  $\Omega = \Lambda$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ .

Если  $0 < \mu(\Lambda) < \infty$  (случай  $\mu(\Lambda) = 0$  тривиален), то положим  $P(B) = \mu(B)/\mu(\Lambda)$ . Введем ортогональную случайную меру  $Z$ , но пока еще без свойства центрированности, формулой  $Z(B, \omega) = \sqrt{\mu(\Lambda)} \mathbf{1}_B(\omega)$ ,  $B \in \mathcal{A}$ . Очевидно,  $Z(B, \omega) \in L^2(\Omega)$  и для любых множеств  $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$  имеем (опуская аргумент  $\omega \in \Omega$ )

$$(Z(B_1), Z(B_2)) = (\sqrt{\mu(\Lambda)})^2 \int_{\Omega} \mathbf{1}_{B_1} \mathbf{1}_{B_2} dP = \mu(\Lambda) P(B_1 \cap B_2) = \mu(B_1 \cap B_2),$$

т. е. выполнено свойство (2). Если же  $\mu(\Lambda) = \infty$  и  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$  — разбиение  $\Lambda$ , причем  $\mu(\Lambda_n) < \infty$ ,  $n \geq 1$ , то для  $A \in \mathcal{A}$  положим

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A \cap \Lambda_n)}{\mu(\Lambda_n) 2^n}.$$

Ясно, что  $P$  — вероятностная мера на  $\mathcal{A}$  ( $P(\Lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$ ).

В рассматриваемом случае ( $\mu(\Lambda) = \infty$ ) определим для  $B \in \mathcal{G}$

$$Z(B, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n \mu(\Lambda_n)} \mathbf{1}_{B_n}(\omega),$$

где  $B_n = B \cap \Lambda_n$ ,  $n \geq 1$ . Ряд сходится в  $L^2(\Omega)$  (суммируются величины с непересекающимися носителями), при этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} E (\sqrt{2^n \mu(\Lambda_n)} \mathbf{1}_{B_n})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mu(\Lambda_n) E \mathbf{1}_{B_n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mu(\Lambda_n) \frac{\mu(B_n)}{\mu(\Lambda_n) 2^n} = \mu(B) < \infty.$$

Теперь заметим, что в силу непрерывности скалярного произведения

$$(Z(B), Z(C)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mu(\Lambda_n) (\mathbf{1}_{B_n}, \mathbf{1}_{C_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap C_n) = \mu(B \cap C),$$

где  $B_n = B \cap \Lambda_n$ ,  $C_n = C \cap \Lambda_n$ ,  $n \geq 1$ , т. е. снова выполнено свойство (2).

Построенная мера  $Z$ , как в случае  $\mu(\Lambda) < \infty$ , так и в случае  $\mu(\Lambda) = \infty$ , еще не является центрированной. Для получения *центрированной* ортогональной случайной меры  $Z$  с заданной структурной функцией  $\mu$ , поступим следующим образом. (Отметим, что взятие  $Z(B) - E Z(B)$ ,  $B \in \mathcal{G}$ , не приводит к желаемому результату.) Рассмотрим на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega', \mathcal{F}', P')$  действительную случайную величину  $\eta$  такую, что  $E' \eta = 0$ ,  $E'(\eta^2) = 1$ , где  $E'$  обозначает усреднение по мере  $P'$ . Пусть  $Z$  — построенная выше на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ортогональная случайная

мера. Возьмем  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}) = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \otimes (\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$  и определим на этом пространстве  $\tilde{Z}(B, \tilde{\omega}) := Z(B, \omega)\eta(\omega')$  для  $B \in \mathcal{G}$ ,  $\tilde{\omega} = (\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega'$ . Легко видеть, что так построенная мера  $\tilde{Z}$  есть уже искомая *центрированная* ортогональная случайная мера.  $\square$

**§ 3.** Ортогональная *случайная мера*  $Z$  была задана изначально на полукольце  $\mathcal{K}$ . В то же самое время, структурная мера  $\mu$  однозначно продолжается на  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{A} = \sigma\{\mathcal{K}\}$ . Естественно поэтому заняться вопросом о возможности *продолжения* случайной меры  $Z$  на множества из  $\mathcal{A}$ . Как будет видно из дальнейшего, такое продолжение возможно на множества совокупности  $\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{A} : \mu(B) < \infty\}$ . Для этого понадобится ввести интегрирование по мере  $Z$ .

Поскольку  $\mu$  есть  $\sigma$ -конечная мера на  $\mathcal{K}$ , то существуют множества  $\Lambda_n \in \mathcal{K}$ ,  $n \geq 1$ , такие, что  $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ , причем  $\Lambda_n \cap \Lambda_m = \emptyset$  для  $n \neq m$  и  $\mu(\Lambda_n) < \infty$ ,  $n \geq 1$  (если  $\mu$  — конечная мера, то  $\Lambda = \Lambda_1$ ). Обозначим  $\mathcal{K}_n = \mathcal{K} \cap \Lambda_n$ , т. е. пусть  $\mathcal{K}_n = \{B \in \mathcal{K} : B \subset \Lambda_n\}$ , и рассмотрим  $\mathcal{A}_n = \sigma\{\mathcal{K}_n\}$  —  $\sigma$ -алгебру с единицей  $\Lambda_n$ . Тогда

$$A \in \mathcal{A} = \sigma\{\mathcal{K}\} \iff A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \text{где } A_n \in \mathcal{A}_n, \quad (3)$$

при этом

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n) \leq \infty, \quad (4)$$

где  $\mu_n$  — лебегово продолжение меры  $\mu|_{\mathcal{K}_n}$  с полукольца  $\mathcal{K}_n$  на  $\mathcal{A}_n$ . Нетрудно показать, что  $\mathcal{A}$  не зависит от выбора разбиения  $\Lambda$  на  $\Lambda_n \in \mathcal{K}$ ,  $n \geq 1$ , и при этом правая часть формулы (4) будет давать одно и то же значение для разных разбиений.

Предположим сейчас, а также в последующих § 4 и § 5, что  $\mu(\Lambda) < \infty$  (в качестве  $\Lambda$  может выступать любое из введенных выше множеств  $\Lambda_n$ ,  $n \geq 1$ , для которых  $\mu(\Lambda_n) < \infty$ ).

Алгебру, состоящую из конечных объединений непересекающихся множеств, входящих в  $\mathcal{K}$  ( $\Lambda \in \mathcal{K}$ ), обозначим  $\mathcal{E}$ .

**Определение 2.** Для  $B = \bigcup_{i=1}^m B_i$ , где  $B_i \in \mathcal{K}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $B_i \cap B_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ), введем  $Z(B)$  формулой:

$$Z(B) = \sum_{i=1}^m Z(B_i). \quad (5)$$

Данное определение корректно. Действительно, пусть множество  $B$  имеет также представление  $B = \bigcup_{j=1}^r D_j$ ,  $D_j \in \mathcal{K}$ ,  $j = 1, \dots, r$ ,  $D_j \cap D_l = \emptyset$  ( $j \neq l$ ). Тогда получим

$$\sum_{i=1}^m Z(B_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r Z(B_i \cap D_j) \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^r Z(D_j) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^m Z(D_j \cap B_i)$$

(равенства случайных величин всюду выполняются п. н.). Отсюда

$$\sum_{i=1}^m Z(B_i) = \sum_{j=1}^r Z(D_j).$$

Займемся теперь конструкцией стохастических интегралов по ортогональным случайным мерам.

Назовем функцию  $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$  *простой*, если

$$f = \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{1}_{B_i}, \quad (6)$$

где  $c_i \in \mathbb{C}$ ,  $B_i \in \mathcal{E}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , причем  $\bigcup_{i=1}^m B_i = \Lambda$  и  $B_i \cap B_j = \emptyset$  для  $i \neq j$ , т. е. множества  $B_i$  образуют разбиение  $\Lambda$ .

**Определение 3.** Интеграл (обозначаемый  $J(f)$ ) по ортогональной случайной мере для простой функции  $f$  вида (6) задается формулой

$$J(f) = \sum_{i=1}^m c_i Z(B_i). \quad (7)$$

Докажем, что это определение корректно. Пусть наряду с (6) функцию  $f$  можно представить также в виде  $f = \sum_{j=1}^r d_j \mathbf{1}_{D_j}$ , где  $d_j \in \mathbb{C}$ ,  $D_j \in \mathcal{E}$ ,  $j = 1, \dots, r$ ;  $\bigcup_{j=1}^r D_j = \Lambda$ ,  $D_i \cap D_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ). Но тогда, если  $\mu(B_i \cap D_j) \neq 0$ , то  $c_i = d_j$ . Следовательно, учитывая, что  $Z(\emptyset) = 0$ , имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r d_j Z(D_j) &= \sum_{j=1}^r d_j \sum_{i=1}^m Z(D_j \cap B_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j: \mu(B_i \cap D_j) \neq 0} d_j Z(B_i \cap D_j) = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j: \mu(B_i \cap D_j) \neq 0} c_i Z(B_i \cap D_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r c_i Z(B_i \cap D_j) = \sum_{i=1}^m c_i Z(B_i), \end{aligned}$$

откуда видно, что значение  $J(f)$  не зависит от способа представления (простой) функции  $f$ .  $\square$

**§ 4.** Чтобы распространить данное определение интеграла  $J(f)$  на более широкий класс функций  $f$ , рассмотрим свойства построенного интеграла для простых функций.

**Лемма 1.** Пусть  $f$  и  $g$  — простые функции. Тогда

$$(J(f), J(g)) = \langle f, g \rangle,$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $L^2(\Omega)$ , а  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в пространстве  $L^2(\Lambda) = L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ .

**Доказательство.** Пусть функция  $f$  задается формулой (6);  $g = \sum_{j=1}^r d_j \mathbf{1}_{D_j}$ , где  $D_1, \dots, D_r$  образуют разбиение  $\Lambda$ . Тогда

$$\begin{aligned} (J(f), J(g)) &= \left( \sum_{i=1}^m c_i Z(B_i), \sum_{j=1}^r d_j Z(D_j) \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r c_i \bar{d}_j \mu(B_i \cap D_j) = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r c_i \bar{d}_j \int_{\Lambda} \mathbf{1}_{B_i \cap D_j}(\lambda) \mu(d\lambda) = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r c_i \bar{d}_j \int_{\Lambda} \mathbf{1}_{B_i}(\lambda) \mathbf{1}_{D_j}(\lambda) \mu(d\lambda) = \\ &= \int_{\Lambda} \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{1}_{B_i} \overline{\sum_{j=1}^r d_j \mathbf{1}_{D_j}} \mu(d\lambda) = \int_{\Lambda} f(\lambda) \overline{g(\lambda)} \mu(d\lambda) = \langle f, g \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

**Следствие 1.** *Отображение  $f \mapsto J(f)$  есть линейное отображение линейного многообразия простых функций в пространство  $L^2(\Omega)$ .*

**Доказательство.** Если  $f$  и  $g$  — простые функции, то, очевидно, функция  $\alpha f + \beta g$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , также есть простая функция. В силу “полуторалинейности” скалярного произведения и леммы 1

$$\begin{aligned} (J(\alpha f + \beta g) - \alpha J(f) - \beta J(g), J(\alpha f + \beta g) - \alpha J(f) - \beta J(g)) &= \\ &= \langle \alpha f + \beta g, \alpha f + \beta g \rangle - \alpha \langle f, \alpha f + \beta g \rangle - \beta \langle g, \alpha f + \beta g \rangle - \\ &\quad - \bar{\alpha} \langle \alpha f + \beta g, f \rangle + \alpha \bar{\alpha} \langle f, f \rangle + \beta \bar{\alpha} \langle g, f \rangle - \\ &\quad - \bar{\beta} \langle \alpha f + \beta g, g \rangle + \alpha \bar{\beta} \langle f, g \rangle + \beta \bar{\beta} \langle g, g \rangle = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, сохраняющее скалярные произведения отображение линейно:

$$J(\alpha f + \beta g) = \alpha Jf + \beta Jg. \quad \square \quad (8)$$

**Лемма 2.** *Простые функции вида (6) плотны в пространстве  $L^2(\Lambda)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $f \in L^2(\Lambda)$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  выберем  $H = H(\varepsilon) > 0$  так, чтобы

$$\int_{\Lambda} |f(\lambda)|^2 \mathbf{1}_{\{|f(\lambda)| > H\}} \mu(d\lambda) < \varepsilon.$$

Используя (I.4) и лемму 3 главы I, легко аппроксимировать  $f(\lambda) \mathbf{1}_{\{|f(\lambda)| \leq H\}}$  последовательностью ступенчатых функций вида (6), что и доказывает требуемую плотность в  $L^2(\Lambda)$ .  $\square$

**§ 5.** Распространим теперь введенное понятие интеграла  $J(f)$  с простых функций  $f$  на функции  $f$  из  $L^2(\Lambda)$ .

**Определение 4.** Для функций  $f \in L^2(\Lambda)$  положим

$$J(f) = \text{l. i. m. } J(f_n) \quad (\text{l. i. m. — предел в } L^2(\Omega)), \quad (9)$$

где  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  — последовательность простых функций таких, что  $f_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Докажем, что определение 4 корректно. По лемме 2 существует последовательность простых функций  $f_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f$  при  $n \rightarrow \infty$ . Пользуясь следствием 1 и леммой 1, имеем, обозначив  $\|\cdot\|$  норму в  $L^2(\Omega)$ ,

$$\|J(f_n) - J(f_m)\| = \|J(f_n - f_m)\| = |f_n - f_m| \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow \infty,$$

где  $|\cdot|$  — норма в  $L^2(\Lambda)$ , поскольку сходящаяся последовательность  $\{f_n\}$  является *фундаментальной*. В силу того, что пространство  $L^2(\Omega)$  полно, получаем, что существует предел  $J(f_n)$  в  $L^2(\Omega)$ . Покажем, что этот предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности простых функций. Пусть  $g_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f$ , где  $g_n$  — простые функции. Тогда  $|g_n - f_n| \leq |g_n - f| + |f_n - f| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,

$$\|J(f_n) - J(g_n)\| = \|J(f_n - g_n)\| = |f_n - g_n| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Но если  $J(f_n) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \xi$  и  $J(g_n) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \zeta$ , то  $J(f_n) - J(g_n) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \xi - \zeta$ . Таким образом,  $\|J(f_n) - J(g_n)\| \rightarrow \|\xi - \zeta\| = 0$ , т. е.  $\xi = \zeta$  п. н.  $\square$

**Следствие 2.** Для любых функций  $f, g \in L^2(\Lambda)$

$$(J(f), J(g)) = \langle f, g \rangle; \quad (10)$$

$J(f)$  есть линейное отображение  $L^2(\Lambda)$  в  $L^2(\Omega)$ . Пусть  $h_n \in L^2(\Lambda)$  (необязательно простые) и  $h_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f$ . Тогда

$$J(h_n) \xrightarrow{L^2(\Omega)} J(f), \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

**Доказательство.** Для проверки свойства (10) достаточно взять простые функции  $f_n, g_n, n \geq 1$ , такие что  $f_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f, g_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} g$  (см. лемму 2), воспользоваться леммой 1 и учесть непрерывность скалярного произведения. Линейность  $J = J(f)$  устанавливается так же, как при доказательстве следствия 1. Пользуясь линейностью  $J$  и соотношением (10), имеем

$$\|J(f) - J(h_n)\| = \|J(f - h_n)\| = |f - h_n| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square$$

**§ 6.** Приведенная выше конструкция интеграла  $J(f)$  для  $f \in L^2(\Lambda) = L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$  предполагала, что  $\mu(\Lambda) < \infty$ . Рассмотрим теперь построение интеграла  $J(f)$  для функций  $f \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$  в том случае, когда  $\mu$  есть  $\sigma$ -конечная мера.

Рассмотрим разбиение множества  $\Lambda$  на множества  $\Lambda_n \in \mathcal{K}$  с  $\mu(\Lambda_n) < \infty$ ,  $n \geq 1$ . Тогда

$$f \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu) \iff \begin{cases} f_n := f|_{\Lambda_n} \in L^2(\Lambda_n, \mathcal{A}_n, \mu_n), & n \geq 1, \\ \int_{\Lambda} |f(\lambda)|^2 \mu(d\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Lambda_n} |f_n(\lambda)|^2 \mu_n(d\lambda) < \infty, \end{cases} \quad (12)$$

где  $\mathcal{A}_n = \sigma\{\mathcal{K}_n\}$ ,  $\mu_n$  — лебегово продолжение меры  $\mu|_{\mathcal{K}_n}$  с  $\mathcal{K}_n = \mathcal{K} \cap \Lambda_n$  на  $\mathcal{A}_n$ . При этом значение интеграла  $\int_{\Lambda} |f(\lambda)|^2 \mu(d\lambda)$  не зависит от выбора разбиения  $\Lambda$  на  $\Lambda_n \in \mathcal{K}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Определение 5.** Для функции  $f \in L^2(\Lambda)$  введем интеграл  $J(f)$  по ортогональной случайной мере  $Z$  формулой

$$J(f) = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(f_n), \quad (13)$$

где ряд сходится в  $L^2(\Omega)$ , функции  $f_n$  фигурируют в (12), отображения  $J_n$  определены на  $L^2(\Lambda_n)$  описанным выше способом (индекс  $n$  подчеркивает связь с  $\Lambda_n$  и  $\mu_n$ ).

Проверим корректность определения (13). Если  $f \in L^2(\Lambda)$ , то, согласно (12), имеем  $f_n \in L^2(\Lambda_n)$  для всех  $n \geq 1$ . Теперь заметим, что  $J_n(f_n) - J_m(f_m)$  при  $n \neq m$ . Действительно, если  $f_n$  и  $f_m$  — простые функции, то это — очевидно, так как  $(Z(B), Z(D)) = 0$  для  $B \in \mathcal{E}_n$  и  $D \in \mathcal{E}_m$  ( $\mathcal{E}_n$  — алгебра, порожденная  $\mathcal{K}_n$  в  $\Lambda_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ). Для функций  $f_n$  и  $f_m$ , не являющихся простыми, надо взять их аппроксимации простыми функциями. Следовательно,

$$\left\| \sum_{n=1}^M J_n(f_n) - \sum_{n=1}^N J_n(f_n) \right\|^2 = \sum_{n=M \wedge N}^{M \vee N} \|J_n(f_n)\|^2 = \sum_{n=M \wedge N}^{M \vee N} \int_{\Lambda_n} |f_n(\lambda)|^2 \mu_n(d\lambda) \rightarrow 0$$

при  $N, M \rightarrow \infty$  в силу изометричности  $J_n$  и сходимости ряда в (12).

Покажем, что величина  $J(f)$  не зависит от вида разбиения  $\Lambda$ . Пусть  $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} ?_n$ ,  $?_n \in \mathcal{K}$ ,  $?_n \cap ?_m = \emptyset$  ( $n \neq m$ ),  $\mu(?_n) < \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Обозначим  $h_{n,m} = f|_{\Lambda_n \cap \Gamma_m}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $f_n = f|_{\Lambda_n} = \sum_{m=1}^{\infty} f|_{\Lambda_n \cap \Gamma_m}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Теперь заметим, что  $\sum_{m=1}^N h_{n,m} \xrightarrow{L^2(\Lambda_n)} f_n$  при  $N \rightarrow \infty$  и, значит, в силу (11)

$$J_n(f_n) = \sum_{m=1}^{\infty} J_n(h_{n,m}),$$

где ряд сходится в  $L^2(\Omega)$ . По построению  $J_{n,m}$  для  $h \in L^2(\Lambda_n \cap ?_m) \subset L^2(\Lambda_n)$  имеем  $J_{n,m}(h) = J_n(h)$ ,  $n, m \geq 1$ . Учитывая, что счетное объединение множеств меры нуль имеет меру нуль, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n(f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_{n,m}(h_{n,m}).$$

Аналогично, обозначив  $g_m = f|_{\Gamma_m}$  и  $\tilde{J}_m$  — отображение, которое строится на  $L^2(\Gamma_m)$  так же, как  $J_n$  на  $L^2(\Lambda_n)$ ,  $m, n \geq 1$ , имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{J}_m(g_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_{n,m}(h_{n,m}).$$

Остается учесть, что  $J_{n,m}(h_{n,m}) = J_{k,l}(h_{k,l})$ , если  $(n, m) \neq (k, l)$ , и то, что данные ряды из ортогональных величин можно суммировать в любом порядке, поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \|J_{n,m}(h_{n,m})\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \|h_{n,m}\|_{L^2(\Lambda_n \cap \Gamma_m)}^2 = \int_{\Lambda} |f(\lambda)|^2 \mu(d\lambda) < \infty. \quad \square$$

Для действия  $J$  (см. (13)) на функции  $f \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$  обычно используется *интегральная запись*

$$J(f) = \int_{\Lambda} f(\lambda) Z(d\lambda). \quad (14)$$

Интеграл в правой части (14) принято называть *стохастическим интегралом* по ортогональной случайной мере  $Z$  (от детерминированной функции  $f \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ ; сравните данное определение с определением в главе VIII стохастического интеграла Ито от *случайных* функций  $f = f(\lambda; \omega)$ ).

§ 7. Основное свойство введенного стохастического интеграла  $J = J(f)$  содержит следующая теорема.

**Теорема 2.** *Стохастический интеграл (14) является изометрическим отображением  $L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$  (где  $\mu$  есть  $\sigma$ -конечная мера) на некоторое подпространство  $L_Z^2 \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . При этом  $Z$  продолжается до ортогональной меры (со структурной функцией  $\mu$ ) на систему множеств  $\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{A} : \mu(B) < \infty\}$  по формуле*

$$Z(B) = J(\mathbf{1}_B). \quad (15)$$

**Доказательство.** Случай, когда  $\mu(\Lambda) < \infty$ , был подробно разобран выше. Надо рассмотреть лишь случай  $\mu(\Lambda) = \infty$ . Пусть  $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ , где  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$  — разбиение  $\Lambda$  и  $\mu(\Lambda_n) < \infty$ ,  $n \geq 1$ . Возьмем  $f, g \in L^2(\Lambda)$ . Тогда  $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ,  $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ , где  $f_n = f|_{\Lambda_n}$ ,  $g_n = g|_{\Lambda_n}$ , причем ряды сходятся в  $L^2(\Lambda)$ . Отсюда

$$\begin{aligned} (Jf, Jg) &= \left( \sum_n J_n f_n, \sum_m J_m g_m \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^N J_n f_n, \sum_{m=1}^N J_m g_m \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (J_n f_n, J_n g_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \langle f_n, g_n \rangle = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{n=1}^N f_n, \sum_{m=1}^N g_m \right\rangle = \langle f, g \rangle, \end{aligned} \quad (16)$$



где учтено то, что  $J_n(f_n) - J_m(g_m)$  при  $n \neq m$  и то, что

$$\langle f_n, g_n \rangle_{L^2(\Lambda_n)} = \langle f \mathbf{1}_{\Lambda_n}, g \mathbf{1}_{\Lambda_n} \rangle_{L^2(\Lambda)}.$$

Итак,  $J$  — это изометрия. Очевидно, образ  $L^2(\Lambda)$  при изометрии  $J$  есть подпространство в  $L^2(\Omega)$ , обозначенное  $L_Z^2$ . Для  $B \in \mathcal{K}$  имеем  $\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) < \infty$ , где  $B_n = B \cap \Lambda_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Далее,  $\mathbf{1}_B \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$  и  $\mathbf{1}_B = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_n}$ , где ряд сходится также в  $L^2(\Lambda)$ . Следовательно, из (13)

$$J(\mathbf{1}_B) = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\mathbf{1}_{B_n}).$$

В силу (7) имеем  $J_n(\mathbf{1}_{B_n}) = Z(B_n)$ , а  $\sum_{n=1}^{\infty} Z(B_n) = Z(B)$  (ряд сходится в  $L^2(\Omega)$ ). Таким образом, для любого  $B \in \mathcal{K}$  получаем  $J(\mathbf{1}_B) = Z(B)$ , т. е. формула (15) определяет *продолжение*  $Z$  с  $\mathcal{K}$  на  $\mathcal{G}$ . Кроме того, для  $B, C \in \mathcal{G}$  по свойству изометричности  $J$

$$(Z(B), Z(C)) = (J(\mathbf{1}_B), J(\mathbf{1}_C)) = \langle \mathbf{1}_B, \mathbf{1}_C \rangle = \mu(B \cap C). \quad \square$$

**Замечание 1.** В силу (11) легко видеть, что если  $Z$  — центрированная ортогональная случайная мера (на  $\mathcal{K}$ ), то

$$\mathbb{E}(J(f)) = 0 \quad \text{при всех } f \in L^2(\Lambda).$$

В частности,  $\mathbb{E} Z(B) = 0$  для  $B \in \mathcal{G}$ .

§ 8. Пусть  $X = \{X(t), t \in T\}$  — комплекснозначный  $L^2$ -процесс, заданный на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , т. е.  $\mathbb{E}|X(t)|^2 < \infty$  при каждом  $t \in T$ . Напомним, что для комплекснозначного  $L^2$ -процесса *ковариационная функция* определяется формулой

$$r(s, t) = \text{cov}(X(s), X(t)) = \mathbb{E}(X(s) - \mathbb{E} X(s)) \overline{(X(t) - \mathbb{E} X(t))}, \quad s, t \in T. \quad (17)$$

Будем в дальнейшем считать, что  $\mathbb{E} X(t) = 0$ ,  $t \in T$ . Это предположение не ограничивает общности, и к этому случаю все можно свести, переходя от величин  $X(t)$  к центрированным величинам  $\tilde{X}(t) = X(t) - \mathbb{E} X(t)$ .

Один из основных результатов относительно возможности представления случайного процесса с помощью “просто” устроенных объектов (в рассматриваемом случае под этим понимаются *ортогональные случайные меры*) дает следующая теорема.

**Теорема 3** (Карунен). Пусть ковариационная функция центрированного комплекснозначного  $L^2$ -процесса  $X = \{X(t), t \in T\}$ , заданного на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , допускает факторизацию, т. е. представима в виде

$$r(s, t) = \int_{\Lambda} f(s, \lambda) \overline{f(t, \lambda)} \mu(d\lambda), \quad s, t \in T, \quad (18)$$

где  $f(t, \cdot) \in L^2(\Lambda) = L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$  для каждого  $t \in T$ , а  $\mu$  — некоторая  $\sigma$ -конечная мера. Тогда существует центрированная ортогональная случайная мера  $Z$ , заданная на системе множеств  $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{A}: \mu(A) < \infty\}$  и на, вообще говоря, расширении исходного вероятностного пространства, имеющая структурную меру  $\mu$ , такая, что

$$X(t) = \int_{\Lambda} f(t, \lambda) Z(d\lambda) \quad \text{для каждого } t \in T. \quad (19)$$

Если система функций  $\{f(t, \cdot), t \in T\}$  полна в пространстве  $L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ , т. е.

$$\Psi \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu) \text{ и } \int_{\Lambda} f(t, \lambda) \overline{\Psi(\lambda)} \mu(d\lambda) = 0 \quad \forall t \in T \implies \Psi = 0 \text{ } \mu\text{-п. н.}, \quad (20)$$

то требуемую меру  $Z$  можно построить и на исходном вероятностном пространстве.

**Замечание 2.** Если процесс  $X = \{X(t), t \in T\}$  допускает представление (19) (с функциями  $f(t, \cdot)$  из  $L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ , где  $\mu$  есть  $\sigma$ -конечная структурная мера центрированной ортогональной случайной меры  $Z$ ), то свойство (18) справедливо в силу теоремы 2. При этом, согласно замечанию 1,  $L^2$ -процесс  $X$  будет центрированным.

Это замечание показывает, что достаточные условия интегрального представления (19) являются и необходимыми.

**Доказательство теоремы.** Пусть выполнено условие (20). Для  $t \in T$  рассмотрим отображение  $G$ , определяемое формулой

$$G: f(t, \cdot) \mapsto X(t, \cdot), \quad (21)$$

и продолжим его по линейности:

$$G\left(\sum_{k=1}^n c_k f(t_k, \cdot)\right) = \sum_{k=1}^n c_k X(t_k, \cdot), \quad (22)$$

где  $c_k \in \mathbb{C}$ ,  $t_k \in T$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Покажем корректность этого определения, т. е. покажем, что если

$$\sum_{k=1}^n c_k f(t_k, \cdot) = \sum_{l=1}^m d_l f(s_l, \cdot),$$

где  $d_l \in \mathbb{C}$ ,  $s_l \in T$ ,  $l = 1, \dots, m$ , то

$$\sum_{k=1}^n c_k X(t_k) = \sum_{l=1}^m d_l X(s_l) \quad (\text{п. н.}).$$

Для этого, учитывая (18), заметим, что

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k=1}^n c_k f(t_k, \cdot), \sum_{l=1}^m d_l f(s_l, \cdot) \right\rangle &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_k \bar{d}_l \int_{\Lambda} f(t_k, \lambda) \overline{f(s_l, \lambda)} \mu(d\lambda) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_k \bar{d}_l r(t_k, s_l) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_k \bar{d}_l \mathbb{E} X(t_k) \overline{X(s_l)} = \\ &= \left( \sum_{k=1}^n c_k X(t_k), \sum_{l=1}^m d_l X(s_l) \right). \end{aligned}$$

Значит,

$$\left| \sum_{k=1}^n c_k f(t_k, \cdot) - \sum_{l=1}^m d_l f(s_l, \cdot) \right| = \left\| \sum_{k=1}^n c_k X(t_k) - \sum_{l=1}^m d_l X(s_l) \right\|,$$

откуда и следует требуемое утверждение о корректности определения (22).

Как изометрия отображение  $G$  продолжается на подпространство  $L^2[f]$ , полученное замыканием в  $L^2(\Lambda)$  функций вида  $\sum_{k=1}^n c_k f(t_k, \cdot)$ , где функция  $f$  — это функция из представления (18). При этом в силу (20) имеем  $L^2[f] = L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$  и  $G(L^2[f]) = L^2[X]$ , где  $L^2[X]$  — замыкание линейной оболочки процесса  $X(t)$ , т. е. в  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  берется замыкание линейных комбинаций вида  $c_1 X(t_1) + \dots + c_n X(t_n)$  ( $c_i \in \mathbb{C}$ ,  $t_i \in T$ ,  $i = 1, \dots, n$ ).

Для  $B \in \mathcal{G}$ , очевидно,  $\mathbf{1}_B \in L^2(\Lambda)$ , и мы можем определить

$$Z(B) = G(\mathbf{1}_B). \quad (23)$$

Тогда

$$(Z(B), Z(C)) = (G(\mathbf{1}_B), G(\mathbf{1}_C)) = \langle \mathbf{1}_B, \mathbf{1}_C \rangle = \mu(B \cap C).$$

Следовательно,  $Z = Z(\cdot)$  — ортогональная случайная мера на  $\mathcal{G}$  со структурной мерой  $\mu$ . Мера  $Z$  центрирована, поскольку  $Z(B) \in L^2[X]$  для каждого  $B \in \mathcal{G}$ , а  $\mathbb{E} \zeta = 0$  для каждого  $\zeta \in L^2[X]$ , так как процесс  $X$  имеет нулевое среднее.

Для любой функции  $h \in L^2(\Lambda)$  можно ввести стохастический интеграл

$$J(h) = \int_{\Lambda} h(\lambda) Z(d\lambda).$$

По теореме 2  $J$  есть изометрическое отображение  $L^2(\Lambda)$  на  $L_Z^2$ .

Итак, имеются две изометрии

$$G: L^2(\Lambda) \rightarrow L^2[X] \subset L^2(\Omega) \quad \text{и} \quad J: L^2(\Lambda) \rightarrow L_Z^2 \subset L^2(\Omega),$$

при этом в силу (23) и (15) справедливы равенства  $G(\mathbf{1}_B) = J(\mathbf{1}_B)$  для  $B \in \mathcal{G}$ . Но конечные линейные комбинации таких индикаторов плотны в  $L^2(\Lambda)$ , что обеспечивается леммой 2. Следовательно,  $G = J$  на  $L^2(\Lambda)$  и, кроме того,  $L^2[X] = L^2_Z$ . Из (21) вытекает, что  $J(f(t, \cdot)) = X(t)$ . Таким образом, получаем представление (19) (без расширения исходного вероятностного пространства).

Пусть теперь условие (20) не выполнено. Тогда  $L^2[f] \subset L^2(\Lambda)$  и  $L^2[f] \neq L^2(\Lambda)$ . Рассмотрим  $L^2(\Lambda) \ominus L^2[f]$ , т. е. ортогональное дополнение к  $L^2[f]$  в  $L^2(\Lambda)$ , и возьмем в нем какой-либо базис из функций  $g(u, \cdot) \in L^2(\Lambda)$ ,  $u \in T'$ , где  $T' \cap T = \emptyset$  (см. [60; т. 1, с. 59]). Введем функцию

$$\rho(s, t) = \int_{\Lambda} g(s, \lambda) \overline{g(t, \lambda)} \mu(d\lambda) = (g(s, \cdot), g(t, \cdot))_{L^2(\Lambda)}, \quad s, t \in T'.$$

Очевидно, для  $c_k \in \mathbb{C}$ ,  $t_k \in T'$ ,  $k = 1, \dots, n$  и  $n \geq 1$ ,

$$\sum_{k,l=1}^n c_k \bar{c}_l \rho(t_k, t_l) = \int_{\Lambda} \left| \sum_{k=1}^n c_k g(t_k, \lambda) \right|^2 \mu(d\lambda) \geq 0.$$

В силу теоремы 4 главы II существует комплекснозначный центрированный гауссовский процесс  $\{Y(t), t \in T'\}$ , заданный на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ , такой, что

$$\text{cov}(Y(s), Y(t)) = E' Y(s) \overline{Y(t)} = \rho(s, t), \quad s, t \in T'.$$

Возьмем  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}) = (\Omega, \mathcal{F}, P) \times (\Omega', \mathcal{F}', P')$ . Тогда для каждого  $t \in T$ ,  $s \in T'$  величины  $X(t)$  и  $Y(s)$  будут независимы на этом пространстве (для  $\tilde{\omega} = (\omega, \omega') \in \tilde{\Omega}$  имеем  $X(t) = X(t, \tilde{\omega}) = X(t, \omega)$ ,  $Y(s) = Y(s, \tilde{\omega}) = Y(s, \omega')$ ).

Введем на  $(T \cup T') \times \tilde{\Omega}$  центрированную случайную функцию

$$\xi(t, \tilde{\omega}) = \begin{cases} X(t, \omega), & t \in T, \\ Y(t, \omega'), & t \in T'. \end{cases}$$

Для нее

$$\text{cov}(\xi(s), \xi(t)) = \tilde{E} \xi(s) \overline{\xi(t)} = \begin{cases} r(s, t), & s, t \in T, \\ \rho(s, t), & s, t \in T', \\ 0, & s \in T, t \in T' \text{ или } s \in T', t \in T. \end{cases}$$

Иначе говоря,

$$\text{cov}(\xi(s), \xi(t)) = \int_{\Lambda} h(s, \lambda) \overline{h(t, \lambda)} \mu(d\lambda),$$

где

$$h(t, \lambda) = \begin{cases} f(t, \lambda), & t \in T, \\ g(t, \lambda), & t \in T', \end{cases}$$

и учтено, что  $f(t, \cdot) - g(s, \cdot)$  в  $L^2(\Lambda)$  для  $t \in T$  и  $s \in T'$ .

Кроме того,  $L^2[h] = L^2(\Lambda)$ , так как  $\nexists \Psi \in L^2(\Lambda)$ :  $\Psi = h(t, \cdot)$  для всех  $t \in T \cup T'$ . И так, по доказанному существует центрированная ортогональная случайная мера  $Z$  на  $\mathcal{G} \times \tilde{\Omega}$  такая, что  $L^2[\xi] = L^2_Z$  и

$$\xi(t) = \int_{\Lambda} h(t, \lambda) Z(d\lambda), \quad t \in T \cup T'.$$

Но при  $t \in T$  имеем  $\xi(t, \tilde{\omega}) \equiv X(t, \tilde{\omega})$ . Следовательно, для всех  $t \in T$

$$X(t, \tilde{\omega}) = X(t, \omega) = \int_{\Lambda} h(t, \lambda) Z(d\lambda) = \int_{\Lambda} f(t, \lambda) Z(d\lambda). \quad \square$$

**§ 9.** Как следует из названия главы, наш основной интерес связан с рассмотрением *стационарных процессов*. Оказывается, что приведенная выше теорема Карунена, примененная к таким процессам, позволяет получить для них стохастические представления, допускающие весьма прозрачную “спектральную” интерпретацию.

Напомним, что суть понятия стационарности случайного процесса состоит в том, что статистические характеристики такого процесса инвариантны относительно сдвигов  $t \mapsto t + u$ . Сказанное нуждается в пояснении. Прежде всего, чтобы иметь возможность производить сдвиги аргумента  $t$  исследуемого процесса  $X = \{X(t), t \in T\}$ , предполагается, что  $T$  — некоторая группа (всюду — по сложению). В качестве временного множества  $T$ , как правило, будут рассматриваться множества  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \dots\}$  или  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ , что соответствует изучению процессов с дискретным или непрерывным временем. Кроме того, значения  $X(t)$  при каждом  $t \in T$  считаются принадлежащими одному и тому же пространству  $S$  (обычно  $S = \mathbb{C}$  или  $S = \mathbb{R}$ ).

Определение 8 главы VI *стационарного в узком смысле* процесса сохраняется для случая, когда  $T$  является группой.

Во многих исследованиях представляют интерес свойства случайных процессов, зависящие лишь от *смешанных моментов* определенных порядков, т. е. от функций вида  $E X(t_1)^{k_1} \dots X(t_n)^{k_n}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_1, \dots, t_n \in T$ ,  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+$ . Для класса  $L^2$ -процессов это делает естественным

**Определение 6.** Комплекснозначный (в частности, действительный)  $L^2$ -процесс  $X = \{X(t), t \in T\}$ , где  $T$  — некоторая группа, называется *стационарным в широком смысле* (или *стационарным второго порядка*), если

$$E X(t) = a \quad \text{при любых } t \in T, \quad (24)$$

$$r(s, t) = \text{cov}(X(s), X(t)) = r(s - t, 0) \quad (:= R(s - t)) \quad \text{при всех } s, t \in T. \quad (25)$$

Легко видеть, что всякий стационарный в узком смысле  $L^2$ -процесс будет стационарным в широком смысле. Для гауссовских процессов эти понятия совпадают. Последовательность независимых одинаково распределенных величин, *не имеющих* математического ожидания, дает пример стационарного в узком смысле процесса, для которого бессмысленно говорить о стационарности в широком смысле.

Далее мы сосредоточимся на процессах, стационарных в широком смысле. Теория таких процессов тесно связана с теорией *кривых в гильбертовом пространстве* и со свойством *неотрицательной определенности* детерминированных функций.

**Определение 7.** Комплекснозначная функция  $R = R(t)$ ,  $t \in T$ , заданная на некоторой группе  $T$ , называется *неотрицательно определенной*, если неотрицательно определена функция  $r(s, t) = R(s - t)$ ,  $s, t \in T$ , т. е. выполнено условие (II.13).

Из теоремы 4 главы II вытекает, что класс неотрицательно определенных функций  $R = R(t)$ ,  $t \in T$ , где  $T$  — группа, совпадает с классом ковариационных функций стационарных гауссовских процессов  $X = \{X(t), t \in T\}$ .

Описание неотрицательно определенных функций на группе  $T = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \dots\}$  дает следующая

**Теорема 4** (Герглотц). *Функция  $R = R(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , является неотрицательно определенной тогда и только тогда, когда справедливо “спектральное представление”*

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} Q(d\lambda), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (26)$$

где  $Q$  — конечная мера (“спектральная мера”) на  $\mathcal{B}([-\pi, \pi])$ .

В формуле (26) и далее интеграл от  $-\pi$  до  $\pi$  понимается как интеграл по отрезку  $[-\pi, \pi]$ .

**Доказательство.** *Достаточность.* Очевидно, функция (26) является неотрицательно определенной, поскольку для всех  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$ ,  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  и любых  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k,q=1}^n z_k \bar{z}_q R(t_k - t_q) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^n z_k e^{it_k \lambda} \right|^2 Q(d\lambda) \geq 0. \quad (27)$$

*Необходимость.* Для  $N \geq 1$  и  $\lambda \in [-\pi, \pi]$  введем непрерывные и неотрицательные (в силу неотрицательной определенности  $R = R(n)$ ) функции

$$\begin{aligned} g_N(\lambda) &= \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=1}^N \sum_{q=1}^N R(k - q) e^{-ik\lambda} e^{iq\lambda} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|m| < N} (1 - |m|/N) R(m) e^{-im\lambda}, \end{aligned} \quad (28)$$

где переход от двойной суммы к однократной справедлив, поскольку имеется  $N - |m|$  пар  $(k, q)$ , для которых  $k - q = m$  (здесь  $k, q \in \{1, \dots, N\}$ ,  $|m| < N$ ). Определим на  $\mathcal{B}([-\pi, \pi])$  меру  $Q_N$  с плотностью  $g_N$  по мере Лебега, т. е. положим

$$Q_N(B) = \int_B g_N(\lambda) d\lambda, \quad B \in \mathcal{B}([-\pi, \pi]).$$

Тогда, согласно формуле (I.25), для  $N \geq 1$  имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} Q_N(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} g_N(\lambda) d\lambda = \begin{cases} (1 - |n|/N) R(n), & |n| < N, \\ 0, & |n| \geq N. \end{cases} \quad (29)$$

Заметим, что  $Q_N([-\pi, \pi]) = R(0) < \infty$  для всех  $N$  (в силу (29) при  $n = 0$ ). Поэтому по теореме Прохорова для конечных мер (см. приложение 2), взяв компакт

$K = [-\pi, \pi]$ , находим подпоследовательность  $\{N_k\} \subset \mathbb{N}$  такую, что  $Q_{N_k} \Rightarrow Q$ , где  $Q$  — некоторая конечная неотрицательная мера на  $[-\pi, \pi]$ . Тогда, учитывая (29), получим для каждого  $n \in \mathbb{Z}$  соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} Q(d\lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} Q_{N_k}(d\lambda) = R(n). \quad \square$$

Доказанная теорема позволяет легко получить “спектральное представление” стационарных (в широком смысле) процессов.

**Теорема 5.** Пусть  $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  — *центрированный стационарный в широком смысле процесс, определенный на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Тогда на том же вероятностном пространстве существует ортогональная случайная мера  $Z$ , заданная на  $\mathcal{B}([-\pi, \pi])$ , такая, что (п. н.) имеет место стохастическое “спектральное представление”*

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} Z(d\lambda), \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (30)$$

**Доказательство.** По теореме Герглотца для  $s, t \in \mathbb{Z}$

$$r(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-t)\lambda} Q(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{is\lambda} \overline{e^{it\lambda}} Q(d\lambda), \quad (31)$$

где  $Q$  — конечная (неотрицательная) мера на  $\mathcal{B}([-\pi, \pi])$ . Значит, выполнено условие (18) теоремы Карунена (теорема 3), с  $f(t, \lambda) = e^{it\lambda}$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ . При этом также выполнено и условие (20), поскольку любую функцию из пространства  $L^2 = L^2([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]), Q)$  можно аппроксимировать в  $L^2$  непрерывной функцией, принимающей одинаковые значения в точках  $-\pi$  и  $\pi$ , а такая функция равномерно приближается суммами Фейера (см., например, [35; гл. VIII, § 2, п. 1]). Тем самым, требуемое представление (30) вытекает непосредственно из теоремы Карунена.  $\square$

Напомним, что в силу теоремы Карунена *спектральная мера  $Q$* , фигурирующая в формуле (31), является ни чем иным как *структурной мерой* (см. (2)) для ортогональной случайной меры  $Z$ , по которой ведется интегрирование в (30).

Меру  $Q$ , использующуюся в (26), можно переопределить (не меняя обозначений), перенеся “массу”  $Q(\{-\pi\})$  из точки  $-\pi$  в точку  $\pi$ , где возникнет “масса”  $Q(\{-\pi\}) + Q(\{\pi\})$ . При этом значение интеграла в правой части формулы (26) не изменится, поскольку  $e^{-in\pi} = e^{in\pi}$  при всех  $n \in \mathbb{Z}$ . Указанное переопределение делается лишь для того, чтобы представить интеграл по промежутку  $(-\pi, \pi]$  как интеграл по единичной окружности. Если такое перенесение массы произведено, то  $Z(\{-\pi\}) = 0$  п. н. в силу теоремы 2, поэтому и в (30) интегрирование фактически ведется по  $(-\pi, \pi]$ . Разумеется, аналогичным образом интегрирование в (30) можно свести к интегрированию по полуинтервалу  $[-\pi, \pi)$ .

Завершая рассмотрение вопроса о спектральном представлении (30), отметим, что данная (“спектральная”) терминология навеяна тем, что (согласно (30)) значения  $X_t$  как бы “складываются” из спектральных гармоник  $e^{it\lambda}$  с соответствующими “весами”  $Z(d\lambda)$ .

**§ 10.** В качестве приложения стохастического спектрального представления (30) рассмотрим следующий вариант *закона больших чисел*.

**Теорема 6.** Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} Z(\{0\}) \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (32)$$

**Доказательство.** Воспользуемся представлением (30). В силу линейности стохастического интеграла по ортогональной случайной мере

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\lambda} Z(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_N(\lambda) Z(d\lambda),$$

где

$$\Psi_N(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{(1 - e^{iN\lambda})}{(1 - e^{i\lambda})}, & \lambda \neq 0, \\ 1, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Следовательно, в силу теоремы 2

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k - Z(\{0\}) \right\|_{L^2(\Omega)} = \int_{-\pi}^{\pi} |\chi_N(\lambda)|^2 Q(d\lambda), \quad (33)$$

где  $\chi_N(\lambda) = \Psi_N(\lambda) - \mathbf{1}_{\{0\}}(\lambda)$ ,  $Q(\cdot)$  — структурная мера, отвечающая ортогональной случайной мере  $Z(\cdot)$ . Учитывая, что  $\left| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\lambda k} \right| \leq 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , а также то, что  $\chi_N(0) = 0$  и для  $\lambda \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$

$$|\chi_N(\lambda)| \leq \frac{2}{N|1 - e^{i\lambda}|} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

по теореме Лебега о мажорируемой сходимости из (33) получаем требуемое свойство (32).  $\square$

**Замечание 3.** Если  $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  — стационарный в широком смысле процесс и  $\mathbf{E} X_t = a$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , то

$$X_t - a = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} Z(d\lambda)$$

и  $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_k - a) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k - a \xrightarrow{L^2(\Omega)} Z(\{0\})$ . Следовательно,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} a \quad \text{при } N \rightarrow \infty \quad (34)$$

тогда и только тогда, когда  $\mathbf{E} |Z(\{0\})|^2 = 0$ ; это равносильно условию  $Q(\{0\}) = 0$ , означающему, что у спектральной меры нет атома в нуле.

Отметим, что о свойстве (34) часто говорят как о свойстве эргодичности процесса  $X$  в  $L^2(\Omega)$ .

**§ 11.** Имея спектральное представление (30) стационарных процессов с дискретным временем, естественно теперь задаться вопросом о соответствующем представлении для процессов с непрерывным временем.

С этой целью нам будет полезно следующее определение.



**Определение 8.** Пусть  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  есть комплекснозначный  $L^2$ -процесс, заданный на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Процесс  $X$  *непрерывен в среднем квадратическом* в точке  $t \in \mathbb{R}$ , если

$$\|X(s) - X(t)\| \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow t, \quad (35)$$

где  $\|\xi\| = (E|\xi|^2)^{1/2}$ ,  $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Непрерывность на некотором множестве означает непрерывность в каждой точке этого множества.

**Теорема 7.** *Стационарный в широком смысле процесс  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  непрерывен в среднем квадратическом на  $\mathbb{R}$  тогда и только тогда, когда ковариационная функция  $R = R(t)$ , определенная в (25), непрерывна в нуле.*

**Доказательство.** *Необходимость.* Процессы  $X(t)$  и  $X(t) - a$ , где  $a = \text{const}$ , очевидно, одновременно являются непрерывными (в среднем квадратическом). Поэтому без потери общности можем считать процесс  $X$  имеющим нулевое среднее. Его ковариационная функция  $r(s, t) = EX(s)\overline{X(t)} = R(s - t)$  для  $s, t \in \mathbb{R}$ .

Ясно, что

$$|R(t) - R(0)| = |r(t, 0) - r(0, 0)| \leq \|X(t) - X(0)\| \|X(0)\|.$$

Следовательно, непрерывность процесса  $X$  в среднем квадратическом на  $\mathbb{R}$  (даже лишь в точке 0) влечет то, что  $R(t) \rightarrow R(0)$ , когда  $t \rightarrow 0$ .

*Достаточность* следует из того, что

$$\|X(s) - X(t)\|^2 = -(R(t - s) - R(0)) - (R(s - t) - R(0)) \rightarrow 0$$

при  $s \rightarrow t$ , поскольку ковариационная функция  $R = R(t)$  непрерывна в 0.  $\square$

**Следствие 3.** *Неотрицательно определенная на  $\mathbb{R}$  функция  $R = R(t)$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ , если она непрерывна в нуле.*

**Доказательство.** Пусть функция  $R$  неотрицательно определена на  $\mathbb{R}$  и непрерывна в нуле. По теореме 4 главы II построим центрированный стационарный в широком смысле (гауссовский) процесс  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  с ковариационной функцией  $r(s, t) = EX(s)\overline{X(t)} = R(s - t)$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$ . В силу теоремы 7 этот процесс непрерывен в среднем квадратическом на  $\mathbb{R}$ . Тогда

$$|R(s) - R(t)| = |EX(s)\overline{X(0)} - EX(t)\overline{X(0)}| \leq \|X(s) - X(t)\| \|X(0)\| \rightarrow 0$$

при  $s \rightarrow t$ . Таким образом, функция  $R = R(t)$  непрерывна в каждой точке  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**§ 12.** Описание ковариационных функций стационарных (в широком смысле) процессов, *непрерывных в среднем квадратическом* на  $T = \mathbb{R}$ , дает следующая

**Теорема 8** (Бохнер–Хинчин). *Пусть  $R = R(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , — непрерывная в нуле неотрицательно определенная функция. Тогда для любого  $t \in \mathbb{R}$*

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} G(d\lambda), \quad (36)$$

где  $G = G(d\lambda)$  — некоторая неотрицательная конечная (“спектральная”) мера на  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Очевидно, что функция, задаваемая правой частью (36), является непрерывной на всей прямой. Совершенно аналогично (27) убеждаемся, что она также и неотрицательно определена. Таким образом, условия теоремы 8 необходимы. Доказательство достаточности этих условий отнесено в приложение 4.

**Определение 9.** Если спектральная мера в представлениях (26) или (36) для ковариационной функции стационарного процесса  $X = \{X(t), t \in \Lambda\}$  (где  $\Lambda = [-\pi, \pi]$  или  $\Lambda = \mathbb{R}$ ) имеет плотность  $g = g(\lambda)$  по мере Лебега, то функция  $g$  называется *спектральной плотностью* процесса  $X$ .

При наличии спектральной плотности  $g$  у меры  $G$  видим из (36) и (I.25), что

$$R(t) = \int_{\Lambda} e^{it\lambda} g(\lambda) d\lambda.$$

Из доказательства теоремы 8, проведенного в приложении 4, вытекает, что если ковариационная функция  $R \in L^1(\mathbb{R})$ , то у меры  $G$  существует непрерывная и ограниченная на всей прямой спектральная плотность  $g = g(\lambda)$ , причем эта плотность может быть найдена по следующей формуле:

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} R(t) dt. \quad (37)$$

**Теорема 9** (Крамер). Пусть на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  задан центрированный стационарный в широком смысле непрерывный в среднем квадратическом случайный процесс  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  (достаточно непрерывности только в нуле). Тогда на том же вероятностном пространстве существует ортогональная случайная мера  $Z = Z(\cdot)$ , заданная на  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , такая, что имеет место стохастическое “спектральное представление”

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} Z(d\lambda), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (38)$$

**Доказательство.** Функция  $R(t) = E X(t) \overline{X(0)}$  в силу теоремы 7 и следствия 3 непрерывна на  $\mathbb{R}$  и согласно теореме 4 главы II неотрицательно определена. По теореме Бохнера–Хинчина имеет место представление (36). Следовательно,

$$r(s, t) = \text{cov}(X(s), X(t)) = R(s - t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s-t)\lambda} G(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} \overline{e^{it\lambda}} G(d\lambda),$$

где  $G(\cdot)$  — конечная (неотрицательная) мера на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Таким образом, получена факторизация ковариационной функции в виде (18) с  $f(t, \lambda) = e^{it\lambda}$  ( $t, \lambda \in \mathbb{R}$ ).

В рассматриваемом случае справедливо так же условие (20). Действительно, любую функцию  $f = f(\lambda)$  из  $L^2 = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), G)$  можно аппроксимировать “срезкой”  $f(\lambda) \mathbf{1}_{\{|\lambda| \leq a\}}$ , которую затем приближаем в  $L^2$  непрерывной функцией, имеющей одинаковые значения в точках  $a$  и  $-a$ , после чего берем конечные линейные комбинации функций  $\exp\{in\lambda\pi/a\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Тем самым требуемое представление (38) вытекает из теоремы 3 (Карунен). Отметим, что в силу этой же теоремы 3 спектральная мера  $G$  совпадает со структурной мерой ортогональной случайной меры  $Z$ , по которой ведется интегрирование в (38).  $\square$

**§ 13.** Обратимся к изучению спектральных плотностей стационарных процессов, которые (в соответствии с уже данной в конце § 10 интерпретацией) характеризуют “мощность”, с которыми входят гармоники  $e^{i\lambda t}$  в спектральное представление. Для простоты ограничимся рассмотрением процессов с дискретным временем.

**Определение 10.** Центрированный и ортонормированный (в  $L^2(\Omega)$ ) процесс  $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$  называется *белым шумом*.

Легко видеть, что такие процессы являются стационарными в широком смысле со спектральной плотностью  $g(\lambda) = 1/(2\pi)$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ . Иначе говоря, подобно “белому свету” процесс  $\varepsilon$  можно рассматривать в виде смеси (в смысле спектрального представления) гармонических колебаний *одинаковой интенсивности*.

Общий результат о структуре случайных процессов с дискретным временем, у которых существует спектральная плотность, дается в следующей теореме.

**Теорема 10.** *Стационарный в широком смысле центрированный процесс  $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ , определенный на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , имеет спектральную плотность тогда и только тогда, когда найдутся числовая последовательность  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2$  и белый шум  $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , заданный, быть может, на расширении исходного вероятностного пространства, для которых (п. н. относительно меры этого “расширенного пространства”  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ )*

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varepsilon_{t-k} \quad \left( = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{t-k} \varepsilon_k \right), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (39)$$

где ряд сходится в среднем квадратическом.

Напомним, что  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2$ , если  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$ .

Прежде, чем переходить к доказательству, отметим, что процесс  $X$ , допускающий представление (39), называется *процессом скользящего среднего*. Говорят также, что процесс  $X$  получается с помощью *фильтра*, на вход которого подается белый шум  $\varepsilon$ . Фильтр называется *физически осуществимым*, если  $c_k = 0$  для  $k < 0$ . Это соответствует тому, что значения процесса  $X$  в момент  $t$  определяются величинами  $\varepsilon_k$  с  $k \leq t$  (т. е. в формировании величин  $X_t$  на “выходе” фильтра не участвуют “будущие” значения “входящего” процесса  $\varepsilon$ ).

**Доказательство.** Пусть справедливо соотношение (39), где  $\{c_k\}$  и  $\{\varepsilon_k\}$  описаны в условиях теоремы. Легко видеть, что поскольку  $\tilde{\mathbb{E}} \sum_{k=M}^N c_{t-k} \varepsilon_k = 0$  для  $-\infty < M \leq N < \infty$ , и ряд в (39) сходится в  $L^2(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ , имеем  $\tilde{\mathbb{E}} X_t = 0$  при всех  $t \in \mathbb{Z}$ , где  $\tilde{\mathbb{E}}$  — усреднение по мере  $\tilde{\mathbb{P}}$ . По равенству Парсеваля для любых  $s, t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} r(s, t) &= \tilde{\mathbb{E}} \left( \sum_k c_{s-k} \varepsilon_k \overline{\sum_l c_{t-l} \varepsilon_l} \right) = \\ &= \sum_k c_{s-k} \bar{c}_{t-k} = \sum_j c_j \bar{c}_{j-(s-t)} = R(s-t). \end{aligned} \quad (40)$$

Следовательно,  $X$  — стационарный в широком смысле центрированный процесс.

Введем функцию

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{ik\lambda}. \quad (41)$$

Поскольку  $\{c_k\} \in l^2$  и

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{is\lambda} \overline{e^{it\lambda}} d\lambda = \begin{cases} 2\pi & \text{для } s = t, \\ 0 & \text{для } s \neq t \ (s, t \in \mathbb{Z}), \end{cases} \quad (42)$$

то ряд (41) сходится в  $L^2[-\pi, \pi] = L^2([-\pi, \pi], \mathcal{B}[-\pi, \pi], \text{mes})$ , где  $\text{mes}$  — мера Лебега ( $\Phi$  в (41) является представителем класса эквивалентных функций в  $L^2[-\pi, \pi]$ ).

В том же самом пространстве  $L^2[-\pi, \pi]$  для функции  $\Phi(\lambda)e^{is\lambda}$  справедливо представление

$$\Phi(\lambda)e^{is\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{i(k+s)\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{s-j} e^{ij\lambda}. \quad (43)$$

По равенству Парсеваля из (43) и (42) имеем с учетом (40), что

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-t)\lambda} |\Phi(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\lambda) e^{is\lambda} \overline{\Phi(\lambda) e^{it\lambda}} d\lambda = \sum_j c_{s-j} \bar{c}_{t-j} = r(s, t). \quad (44)$$

Функция  $\Phi(\cdot) \in L^2[-\pi, \pi]$ , то есть,  $|\Phi(\cdot)|^2 \in L^1[-\pi, \pi]$ . Поэтому (44) показывает, что если имеет место (39), то функция  $g(\lambda) = |\Phi(\lambda)|^2$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ , есть спектральная плотность процесса  $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ .

Для доказательства обратного утверждения предположим, что  $g = g(\lambda)$  — спектральная плотность процесса  $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ . Тогда  $g(\cdot) \in L^1[-\pi, \pi]$  и  $g(\lambda) \geq 0$  п.в. по мере Лебега (для спектральной меры  $G$  процесса  $X$  имеем  $G(B) = \int_B g(\lambda) d\lambda$ ,  $B \in \mathcal{B}[-\pi, \pi]$ ). Обозначим  $\Phi(\lambda) = \sqrt{g(\lambda)}$  (на множестве меры нуль, где  $g(\lambda) < 0$ , полагаем  $\Phi(\lambda) = 0$ ). Тогда  $\Phi(\lambda) \in L^2[-\pi, \pi]$ , а полнота и ортонормированность в этом пространстве системы функций  $\{(2\pi)^{-1/2} e^{ik\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , дают

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{ik\lambda}, \quad (45)$$

где  $\{c_k\} \in l^2$  и ряд (45) сходится в  $L^2[-\pi, \pi]$ . Снова пользуясь равенством Парсеваля, имеем

$$\begin{aligned} r(s, t) = R(s - t) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-t)\lambda} g(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{is\lambda} \Phi(\lambda) \overline{e^{it\lambda} \Phi(\lambda)} d\lambda = \sum_k c_{s-k} \bar{c}_{t-k}. \end{aligned} \quad (46)$$

Возьмем  $\Lambda = \mathbb{Z}$ , пусть  $\mu$  — считающая мера на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}$  всех подмножеств  $\mathbb{Z}$ , т.е.  $\sigma$ -конечная мера, сосредоточенная на множестве  $\mathbb{Z}$ , для которой  $\mu(\{k\}) = 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Пусть  $f(t, \alpha) = c_{t-\alpha}$ , где  $t, \alpha \in \mathbb{Z}$ ,  $\{c_k\} \in L^2(\Lambda, \mathcal{B}, \mu)$ , т.е.  $\{c_k\} \in l^2$ . Тогда

формула (46) может быть переписана в виде (18) и, следовательно, по теореме 3 существует (возможно, на расширении  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$  исходного вероятностного пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ) центрированная ортогональная случайная мера  $Z(\cdot)$  такая, что

$$X_t = \int_{\Lambda} f(t, \alpha) Z(d\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{t-k} \varepsilon_k, \quad (47)$$

где  $\varepsilon_k = Z(\{k\})$ , а ряд в (47) сходится в  $L^2(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ . При этом центрированные величины  $\varepsilon_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , будут не только ортогональны, но и *ортонормированы*, поскольку  $\mathbf{E} |\varepsilon_k|^2 = \mu(\{k\}) = 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Замечание 4.** Из данного доказательства видно, что представление (39) равносильно тому, что стационарный в широком смысле центрированный процесс  $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  обладает следующей спектральной плотностью:

$$g(\lambda) = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{ik\lambda} \right|^2, \quad \lambda \in [-\pi, \pi].$$

§ 14. Остановимся на важном для приложений вопросе *статистического оценивания спектральной плотности*, показывающей, как уже отмечалось выше, с какими “весами” в спектральное представление стационарного процесса входят те или иные спектральные частоты.

Пусть  $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  — центрированный стационарный в широком смысле процесс с ковариационной функцией  $R(n) = \mathbf{E} X_{n+k} \overline{X}_k$ ,  $k, n \in \mathbb{Z}$ . Формула (29) показывает, что функция  $g_N(\lambda)$ , введенная в (28), может рассматриваться как *аппроксимация* спектральной плотности  $g(\lambda)$  (когда последняя существует). Отсюда следует, что если в качестве оценки ковариационной функции  $R(m)$  по наблюдениям  $X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$  взять величину

$$\hat{R}_N(m) = \begin{cases} \frac{1}{N-m} \sum_{k=0}^{N-m-1} X_{m+k} \overline{X}_k & \text{для } 0 \leq m \leq N-1, \\ \overline{\hat{R}_N(-m)} & \text{для } -(N-1) \leq m < 0, \\ 0 & \text{для остальных } m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (48)$$

то естественной оценкой для спектральной плотности  $g(\lambda)$  будет (ср. с (28)) функция

$$\hat{g}_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|m| < N} \hat{R}_N(m) e^{-i\lambda m} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right).$$

Простые преобразования показывают, что функция  $\hat{g}_N(\lambda)$  может быть представлена в виде

$$\hat{g}_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-i\lambda k} \right|^2, \quad (49)$$

называемом *периодограммой*. Легко видеть, что поскольку  $E \hat{R}_N(m) = R(m)$  для  $m$  таких, что  $|m| \leq N-1$ , то

$$E \hat{g}_N(\lambda) = g_N(\lambda). \quad (50)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} g_N(\lambda) &= \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} R(k-l) e^{-i\lambda(k-l)} = \\ &= \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left( \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu(k-l)} g(\nu) d\nu \right) e^{-i\lambda(k-l)} = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} e^{i(\nu-\lambda)k} e^{-i(\nu-\lambda)l} g(\nu) d\nu = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} e^{i(\nu-\lambda)k} \right|^2 g(\nu) d\nu = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(\nu - \lambda) g(\nu) d\nu, \end{aligned} \quad (51)$$

где функция (*ядро Фейера*)

$$\Phi_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\lambda k} \right|^2 = \begin{cases} \frac{1}{2\pi N} \left( \frac{\sin(N\lambda/2)}{\sin(\lambda/2)} \right)^2, & \lambda \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ \frac{N}{2\pi}, & \lambda = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Таким образом, формулы (50) и (51) показывают, что периодограмма является *асимптотически несмещенной оценкой спектральной плотности*, если для п. в.  $\lambda \in [-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(\nu - \lambda) g(\nu) d\nu \rightarrow g(\lambda), \quad N \rightarrow \infty. \quad (52)$$

Из свойств ядра Фейера вытекает (см., например, [35; гл. VIII, § 2]), что так будет для всякой функции  $g \in C[-\pi, \pi]$ . Однако *среднеквадратическая ошибка*  $E |\hat{g}_N(\lambda) - g(\lambda)|^2$  с ростом  $N$ , как правило, *не стремится* к нулю. Поэтому на практике вместо оценок  $\hat{g}_n(\lambda)$  используются *сглаженные оценки*  $\hat{g}_N^W$ , т. е. оценки вида

$$\hat{g}_N^W(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda - \nu) \hat{g}_N(\nu) d\nu,$$

где так называемые “*спектральные окна*”  $W_N(\cdot)$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , определяющие эти оценки, выбираются так, чтобы:

- а) функция  $W_N(\lambda)$  имела резкий максимум в окрестности точки 0;
- б)  $\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda) d\lambda = 1$ ;
- в)  $E |\hat{g}_N^W(\lambda) - g(\lambda)|^2 \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$  для  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ .

Например, *оценки Бартлета* строятся с помощью окон  $W_N(\lambda) = a_N B(a_N \lambda)$ , где

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\sin \frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2}} \right|^2, \quad B(0) = \frac{1}{2\pi},$$

а последовательность  $a_N \nearrow \infty$ ,  $a_N/N \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ).

По поводу условий а), б), в) и других видов спектральных окон см., например, [85; гл. VI, § 4], а также [6, 80].

§ 15. Один из самых интересных (и с теоретической точки зрения, и с точки зрения приложений) разделов теории стационарных процессов — это раздел, связанный с прогнозом (экстраполяцией) “будущих” значений этих процессов по их “прошлым” значениям.

Начнем с простейших постановок задачи прогноза. Пусть дан  $L^2$ -процесс  $X = \{X(t), t \in T\}$ ,  $T \subset \mathbb{R}$ . Требуется найти *наилучшее приближение* случайной величины  $X(t)$  (по норме  $\|\cdot\|$  пространства  $L^2(\Omega)$ ), основываясь на *предыстории* процесса  $X$  до некоторого момента  $s < t$ . Если считать, что мы располагаем *всеми* величинами  $y$ , измеримыми относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_s = \sigma\{X(u), u \leq s, u \in T\}$  и квадрат модуля которых интегрируем, т. е. рассматриваемые величины  $y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$ , то дело сводится к отысканию величины

$$\inf \{ \|X(t) - y\| : y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, P) \}$$

и того значения  $y$ , на котором этот  $\inf$  достигается (такой элемент существует).

Согласно теории гильбертовых пространств  $H$  всякий элемент  $x \in H$  *может быть представлен* (для заданного подпространства  $L \subset H$ ), и единственным образом, в следующем виде:  $x = y + z$ , где  $y \in L$  и  $z \in L^\perp$  (ортогональное дополнение к  $L$  в  $H$ ). Величина  $y$  обычно обозначается  $\text{Pr}_L x$ , где оператор  $\text{Pr}_L$  называется *ортотпроектором* в  $H$  на  $L$ .

Тем самым, беря  $H = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и  $L = L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$ , находим, что

$$\inf \{ \|X(t) - y\| : y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, P) \} = \|X(t) - \text{Pr}_{L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, P)} X(t)\|.$$

В упражнении 1 главы IV отмечалось, что если  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$  и случайная величина  $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , то (P-п. н.)

$$\text{Pr}_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)} Y = \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{A}).$$

Таким образом, оптимальной в среднем квадратическом смысле оценкой для  $X(t)$  по величинам пространства  $L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$  является условное математическое ожидание  $\mathbb{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s)$ .

Нахождение условного математического ожидания относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_s$  является, как правило, довольно сложной задачей. Однако если ограничиваться только *линейным прогнозом*, основанным на линейных комбинациях величин  $X_u$  с  $u \leq s$ ,  $u \in T$  (и пределах таких величин в пространстве  $L^2(\Omega)$ ), то задача существенно упрощается. Для ее решения весьма полезны методы теории гильбертовых пространств, позволяющие также получить и ряд интересных результатов о структуре некоторых важных классов стационарных процессов.

Имея в виду изучение линейного прогноза, введем для  $s \in T$  пространство  $H_s(X)$  как замыкание в среднем квадратическом *линейной* оболочки величин  $X(u)$ ,  $u \leq s$ ,  $u \in T$ , и положим

$$H_{-\infty}(X) = \bigcap_{s \in T} H_s(X), \quad H(X) = L^2[X],$$

где  $L^2[X]$  — замыкание в  $L^2(\Omega)$  линейной оболочки всех величин  $X(u)$ ,  $u \in T$ . Ясно, что  $H(X)$  — *наименьшее* подпространство  $L^2(\Omega)$ , содержащее все пространства  $H_s(X)$ ,  $s \in T$ . Рассматриваемая нами задача *линейного прогноза* величины  $X(t)$  по “прошлому” до момента времени  $s$  ставится теперь как задача *наилучшего приближения*  $X(t)$  (по норме пространства  $L^2(\Omega)$ ) элементами пространства  $H_s(X)$ . При этом *ошибкой линейного прогноза* естественно называть величину

$$\Delta(s, t) = \inf \{ \|X(t) - y\| : y \in H_s(X) \}. \quad (53)$$

Решением поставленной выше задачи линейного прогноза является величина  $P_s X(t)$ , где для краткости  $P_s$  обозначает ортопроектор  $\text{Pr}_{H_s(X)}$  (в  $H(X)$  на  $H_s(X)$ ).

Введенная ошибка линейного прогноза  $\Delta(s, t)$  удовлетворяет следующему свойству:

$$\Delta(s, t) = \Delta(s + u, t + u) \quad \text{при всех } s, t, u \in T. \quad (54)$$

(Достаточно заметить, что если  $y = c_1 X(s_1) + \dots + c_n X(s_n) \in H_s(X)$  и  $z = c_1 X(s_1 + u) + \dots + c_n X(s_n + u) \in H_{s+u}(X)$ , где  $c_k \in \mathbb{C}$ ,  $s_k \in T$ ,  $s_k \leq s$ , то в силу стационарности процесса  $X$  имеем  $\|X(t) - y\|^2 = \|X(t + u) - z\|^2$ .)

Из (54) следует, что величина  $\Delta(s, s + u)$  не зависит от  $s$  и, следовательно, можно положить

$$\delta(u) := \Delta(s, s + u), \quad u \in T;$$

при этом  $\delta(u) = 0$  при  $u \leq 0$  ( $u \in T$ ) и

$$\delta(v) \leq \delta(u) \quad \text{для } v \leq u \quad (v, u \in T). \quad (55)$$

Смысл свойства (55) вполне ясен: ошибка прогноза величины  $X(t)$  по “прошлому”  $H_s(X)$ , где  $s \leq t$ , растет с убыванием  $s$ .

§ 16. Вопрос поведения ошибок прогноза  $\delta(t)$ ,  $t \geq 0$ , оказывается тесно связанным со следующими понятиями.

**Определение 11.** Пусть  $T = \mathbb{R}$  или  $T = \mathbb{Z}$  и  $X = \{X(t), t \in T\}$  — центрированный стационарный случайный процесс. Процесс  $X$  называется *сингулярным*, или *детерминированным*, если  $H_{-\infty}(X) = H(X)$ , т.е.  $H_s(X) = H_t(X)$  при всех  $s, t \in T$ . Процесс  $X$  называется *регулярным* или *чисто недетерминированным*, если  $H_{-\infty}(X) = 0$ .

**Теорема 11.** *Центрированный стационарный процесс  $X$  является*

- 1) *сингулярным тогда и только тогда, когда  $\delta(t_0) = 0$  для некоторого  $t_0 > 0$ ,  $t_0 \in T$  (тогда  $\delta(t) = 0$  при всех  $t \in T$ );*
- 2) *регулярным тогда и только тогда, когда*

$$\delta^2(t) \rightarrow R(0) \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (56)$$

где  $R(0)$  — значение в нуле ковариационной функции  $R(t)$  процесса  $X$  (в нашем случае  $R(t) = \mathbb{E} X(t) \overline{X(0)}$ ).



**Доказательство.** 1) Если процесс  $X$  сингулярен, то  $X(t) \in H_t(X) = H_s(X)$  и, следовательно,  $\Delta(s, t) = 0$  при любых  $s, t \in T$ .

Пусть теперь  $\delta(t_0) = 0$  для некоторого  $t_0 > 0$  ( $t_0 \in T$ ). Тогда  $X(s + t_0) \in H_s(X)$  для любого  $s \in T$ . В силу (55) имеем  $X(t) \in H_s(X)$  для  $t \leq s + t_0$ . Отсюда следует, что  $H_t(X) = H_s(X)$  при  $s \leq t \leq s + t_0$ . Ввиду произвольности  $s$  видим, что процесс  $X$  сингулярен.

2) Пусть выполнено соотношение (56). Для  $s, t \in T$  имеем

$$R(0) = \|X(t)\|^2 = \|P_s X(t)\|^2 + \|X(t) - P_s X(t)\|^2 = \|P_s X(t)\|^2 + \delta^2(t - s). \quad (57)$$

Поэтому  $\|P_s X(t)\| \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow -\infty$  для каждого  $t \in T$ . Теперь заметим, что если  $L_1, L_2$  — подпространства гильбертова пространства  $H$  и  $L_1 \subset L_2$ , то  $\|P_{L_1} x\| \leq \|P_{L_2} x\|$  для любого  $x \in H$ . Таким образом,  $\|P_{-\infty} X(t)\| \leq \|P_s X(t)\|$  для каждых  $s, t \in T$ . Итак,  $P_{-\infty} X(t) = 0$ , т. е.  $X(t) - H_{-\infty}(X)$  для  $t \in T$ , откуда  $H(X) - H_{-\infty}(X)$ . Поскольку  $H_{-\infty}(X) \subset H(X)$ , получаем, что  $H_{-\infty}(X) = 0$ .

С другой стороны, пусть  $H_{-\infty}(X) = 0$ . Учитывая (57), видим, что требуемое соотношение (56) непосредственно вытекает из следующего утверждения.

**Лемма 3.** Пусть  $H_t, t \in T$ , — убывающее семейство подпространств гильбертова пространства  $H$ , т. е.  $H_s \subset H_t$  при  $s \leq t, s, t \in T$ . Если  $\bigcap_{s \in T} H_s = 0$ , то  $P_s x \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow -\infty$  для каждого  $x \in H$ , где  $P_s$  — ортопроектор (в  $H$ ) на  $H_s$ .

**Доказательство.** Поскольку  $\|P_s x\| \leq \|P_t x\|$  для каждого  $x \in H$  при  $s \leq t$ , то достаточно показать, что  $\|P_{t_k} x\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , где  $t_{k+1} < t_k, k \in \mathbb{N}$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = -\infty$ . Обозначим  $L_k := H_{t_k} \ominus H_{t_{k+1}}$ , т. е. пусть  $H_{t_{k+1}} \oplus L_k = H_{t_k}, k \in \mathbb{N}$ . Тогда для любого  $x \in H$  и  $m > k$  имеем

$$P_{t_k} x = P_{t_m} x + \sum_{j=k}^{m-1} Q_j x,$$

где  $Q_j$  — ортопроектор в  $H$  на  $L_j$ . Отсюда  $\|P_{t_k} x\|^2 = \|P_{t_m} x\|^2 + \sum_{j=k}^{m-1} \|Q_j x\|^2$ . Сле-

довательно,  $\sum_{j=1}^{\infty} \|Q_j x\|^2 \leq \|P_{t_1} x\|^2 \leq \|x\|^2$ . Таким образом, при  $m > k$

$$\|P_{t_k} x - P_{t_m} x\|^2 = \sum_{j=k}^{m-1} \|Q_j x\|^2 \rightarrow 0, \quad \text{если } k, m \rightarrow \infty$$

(очевидным образом можно рассмотреть и случай  $k \geq m$ ). В силу полноты пространства  $H$  существует предельный элемент  $y = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{t_k} x$ . Поскольку  $P_{t_k} x \in H_{t_m}$

при  $k \geq m$ , то  $y \in H_{t_m}$  для любого  $m \in \mathbb{N}$ . Получаем, что  $y \in \bigcap_{m=1}^{\infty} H_{t_m}$ . В силу

монотонности семейства  $H_t$  выполнено свойство  $\bigcap_{m=1}^{\infty} H_{t_m} = \bigcap_{t \in T} H_t$ . Так как по

предположению  $\bigcap_{t \in T} H_t = \{0\}$ , то  $y = 0$ .  $\square$

Тем самым, лемма 3 и теорема 11 доказаны.  $\square$

§ 17. Материал, излагаемый в этом параграфе, носит технический характер. Читателю рекомендуется сначала обратиться к следующему § 18 и затем вернуться к чтению этого параграфа.

Введем в  $H(X)$  операторы сдвига  $S_u$ ,  $u \in T$  ( $T = \mathbb{R}$  или  $T = \mathbb{Z}$ ), положив

$$S_u(c_1 X(t_1) + \dots + c_n X(t_n)) = c_1 X(t_1 + u) + \dots + c_n X(t_n + u),$$

где  $c_k \in \mathbb{C}$ ,  $t_k \in T$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Данное определение корректно. Действительно, если  $\sum_{k=1}^n c_k X(t_k) = \sum_{j=1}^m d_j X(s_j)$ , где  $d_j \in \mathbb{C}$ ,  $s_j \in T$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , то в силу стационарности  $X$  имеем для  $u \in T$

$$0 = \left\| \sum_{k=1}^n c_k X(t_k) - \sum_{j=1}^m d_j X(s_j) \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n c_k X(t_k + u) - \sum_{j=1}^m d_j X(s_j + u) \right\|^2.$$

Аналогично устанавливается, что при каждом  $u \in T$

$$(S_u x, S_u y) = (x, y), \quad x, y \in \text{Lin}\{X(t), t \in T\}.$$

Иначе говоря,  $S_u$  — *изометрический* оператор на линейной оболочке  $\text{Lin}\{X(t), t \in T\}$  величин  $X(t)$ ,  $t \in T$ , причем  $\|S_u x\| = \|x\|$  для  $x \in \text{Lin}\{X(t), t \in T\}$ ,  $u \in T$ . Следовательно,  $S_u$  однозначно продолжается до изометрического оператора на  $H(X)$ .

Нетрудно показать (проверив вначале на элементах из  $\text{Lin}\{X(t), t \in T\}$ ), что  $(S_u)_{u \in T}$  образует *группу операторов* в  $H(X)$ , т. е.

$$S_{u+v} = S_u S_v \quad \text{для } u, v \in T,$$

где  $S_0 = I$  — тождественное отображение.

Итак, построенные операторы сдвига  $S_u$ ,  $u \in T$ , образуют группу *изометрических* (значит линейных) операторов на  $H(X)$ .

**Лемма 4.** Для любых  $u, v \in T$

$$S_u H_v(X) = H_{u+v}(X), \quad S_u H_{-\infty}(X) = H_{-\infty}(X), \quad (58)$$

$$P_{u+v} S_u = S_u P_v, \quad P_{-\infty} S_u = S_u P_{-\infty}, \quad (59)$$

где  $P_t$  — ортопроектор в  $H(X)$  на  $H_t(X)$ ,  $t \in T \cup \{-\infty\}$ .

**Доказательство.** Для  $u, v \in T$ , очевидно, что  $S_u(\text{Lin}\{X(t), t \leq v, t \in T\}) \subset H_{u+v}(X)$ . Поэтому  $S_u H_v(X) \subset H_{u+v}(X)$ . Учитывая, что  $S_u S_{-u} = I$ , имеем

$$H_{u+v}(X) = S_u S_{-u} H_{u+v}(X) \subset S_u H_v(X).$$

Первое равенство в (58) доказано.

Если  $x \in H_{-\infty}(X)$ , то  $x \in H_t(X)$  для всех  $t \in T$ . По доказанному  $S_u x \in H_{t+u}(X)$  для любого  $t \in T$ . Следовательно,  $S_u x \in H_{-\infty}(X)$ , т. е.  $S_u H_{-\infty}(X) \subset H_{-\infty}(X)$ . Таким образом,

$$H_{-\infty}(X) = S_u S_{-u} H_{-\infty}(X) \subset S_u H_{-\infty}(X),$$

что завершает доказательство второго равенства в (58).

В силу линейности операторов  $S_u, P_v, u, v \in T$ , для доказательства равенств в (59) достаточно проверить совпадение результатов действия на  $X(t), t \in T$ , соответствующих операторов, фигурирующих в этих равенствах.

Имеем  $P_{u+v}S_uX(t) = P_{u+v}X(t+u)$  для  $u, v, t \in T$ . С другой стороны,  $X(t) = y_v(t) + z_v(t)$ , где

$$y_v(t) = P_vX(t) \in H_v(X), \quad z_v(t) \in H_v(X).$$

Далее,  $X(t+u) = S_uX(t) = S_u y_v(t) + S_u z_v(t)$ , где  $S_u y_v(t) \in H_{u+v}(X)$ , а для любого  $h \in H_{u+v}(X)$  в силу первого равенства (58) получаем  $h = S_u g$ , где  $g \in H_v(X)$ . Отсюда

$$(h, S_u z_v(t)) = (g, z_v(t)) = 0.$$

Если гильбертово пространство  $H = L \oplus L^-$ , то любой элемент  $x \in H$  единственным образом записывается в виде  $x = y + z$ , где  $y \in L, z \in L^-$ . Поэтому  $S_u P_v X(t) = S_u y_v(t) = P_{u+v}X(t+u)$ . Тем самым первое равенство в (59) доказано.

Аналогично,  $P_{-\infty}S_uX(t) = P_{-\infty}X(t+u)$ ,  $X(t) = y_{-\infty}(t) + z_{-\infty}(t)$ , где  $y_{-\infty}(t) \in H_{-\infty}(X)$  и  $z_{-\infty}(t) \in H_{-\infty}(X)$ . Тогда  $X(t+u) = S_uX(t) = S_u y_{-\infty}(t) + S_u z_{-\infty}(t)$ . Поскольку  $S_u y_{-\infty}(t) \in H_{-\infty}(X)$  и  $S_u z_{-\infty}(t) \in H_{-\infty}(X)$  (согласно второму равенству в (58)), то  $S_u P_{-\infty}X(t) = S_u y_{-\infty}(t) = P_{-\infty}X(t+u)$ .  $\square$

**§ 18.** Введенные выше понятия сингулярности и регулярности процессов оказываются полезными при описании общей структуры стационарных процессов.

**Теорема 12** (Вольд). *Центрированный стационарный в широком смысле процесс  $X = \{X(t), t \in T\}$ , где  $T = \mathbb{R}$  или  $T = \mathbb{Z}$ , допускает (для каждого  $\omega \in \Omega$ ) разложение вида*

$$X(t) = M(t) + N(t), \quad t \in T, \quad (60)$$

где  $M = \{M(t), t \in T\}$  — сингулярный, а  $N = \{N(t), t \in T\}$  — регулярный процессы, причем  $M \perp N$ , т. е.  $M(s) \perp N(t)$  для  $s, t \in T$ . Кроме того, процессы  $M$  и  $N$  стационарны в широком смысле и центрированы. Указанное разложение процесса  $X$  единственно, если потребовать следующее условие подчиненности:  $M(t) \in H_t(X)$  (тогда и  $N(t) \in H_t(X)$ ) при каждом  $t \in T$ .

**Доказательство.** Пусть  $M(t) = P_{-\infty}X(t)$  и  $N(t) = X(t) - M(t)$  для  $t \in T$ . Ясно, что так определенные процессы  $M = \{M(t), t \in T\}$  и  $N = \{N(t), t \in T\}$  приводят к представлению (60).

По определению процессов  $M$  и  $N$  имеем  $M(t) \in H_{-\infty}(X)$  и  $N(t) \in H_{-\infty}(X)$  для  $t \in T$ . Следовательно,  $M \perp N$ . Из (60) вытекает, что  $X(t) \in H_t(M) \oplus H_t(N)$ , поэтому  $H_t(X) \subset H_t(M) \oplus H_t(N)$ . С другой стороны,  $M(t) \in H_{-\infty}(X) \subset H_t(X)$ . Отсюда  $H_t(M) \subset H_t(X)$ , и тогда в силу (60) имеем  $H_t(N) \subset H_t(X)$  при  $t \in T$ . Таким образом,  $H_t(M) \oplus H_t(N) \subset H_t(X)$  и получаем

$$H_t(X) = H_t(M) \oplus H_t(N), \quad t \in T. \quad (61)$$

Теперь заметим, что  $H_t(N) \in H_{-\infty}(X)$  при  $t \in T$ , откуда  $H_{-\infty}(N) \in H_{-\infty}(X)$ . В то же время  $H_t(N) \subset H_t(X)$ , поэтому  $H_{-\infty}(N) \subset H_{-\infty}(X)$ . Итак,  $H_{-\infty}(N) =$

0, т. е.  $N$  — регулярный процесс. Мы знаем, что  $H_t(M) \subset H_{-\infty}(X)$ ,  $t \in T$ . Из (61) следует, что  $H_{-\infty}(X) \subset H_t(M) \oplus H_t(N)$ . Учитывая, что  $H_t(N) = H_{-\infty}(X)$ , получаем  $H_{-\infty}(X) \subset H_t(M)$ ,  $t \in T$ . Следовательно,  $H_t(M) = H_{-\infty}(X)$ ,  $t \in T$ , и  $M$  — сингулярный процесс.

Проверим, что  $M$ ,  $N$  — стационарные (в широком смысле) процессы. Поскольку  $M(t) \in H_{-\infty}(X) \subset H(X)$ , то  $\mathbf{E} M(t) = 0$ , и, следовательно,  $\mathbf{E} N(t) = 0$ ,  $t \in T$ . Таким образом,  $M$  и  $N$  — центрированные процессы. Для  $t, u, v \in T$ , пользуясь леммой 4 и изометричностью оператора  $S_u$ , имеем

$$\begin{aligned} (M(v+u), M(t+u)) &= (P_{-\infty}X(v+u), P_{-\infty}X(t+u)) = \\ &= (P_{-\infty}S_uX(v), P_{-\infty}S_uX(t)) = \\ &= (S_uP_{-\infty}X(v), S_uP_{-\infty}X(t)) = \\ &= (P_{-\infty}X(v), P_{-\infty}X(t)) = (M(v), M(t)). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} (N(v+u), N(t+u)) &= (X(v+u) - M(v+u), X(t+u) - M(t+u)) = \\ &= (X(v), X(t)) - (P_{-\infty}S_uX(v), S_uX(t)) - \\ &\quad - (S_uX(v), P_{-\infty}S_uX(t)) + (M(v), M(t)) = \\ &= (X(v), X(t)) - (M(v), X(t)) - \\ &\quad - (X(v), M(t)) + (M(v), M(t)) = \\ &= (X(v) - M(v), X(t) - M(t)) = (N(v), N(t)). \end{aligned}$$

Тем самым, процессы  $M$  и  $N$ , обеспечивающие представление (60), являются процессами, стационарными в широком смысле.

Докажем теперь единственность разложения (60). Допустим, что наряду с (60) имеет место другое разложение  $X(t) = U(t) + V(t)$ , где  $U = \{U(t), t \in T\}$ ,  $V = \{V(t), t \in T\}$  — соответственно сингулярный и регулярный процессы, причем  $U - V$  и  $U(t), V(t) \in H_t(X)$ ,  $t \in T$ . Тогда

$$H_t(X) = H_t(U) + H_t(V) = H(U) \oplus H_t(V), \quad t \in T.$$

Следовательно,

$$H_{-\infty}(X) = \bigcap_{t \in T} (H(U) \oplus H_t(V)) = H(U) \oplus \bigcap_{t \in T} H_t(V) = H(U) + 0 = H(U).$$

В итоге находим, что

$$\begin{aligned} M(t) &= P_{-\infty}X(t) = \Pr_{H(U)} X(t) = \\ &= \Pr_{H(U)} U(t) + \Pr_{H(U)} V(t) = \Pr_{H(U)} U(t) + 0 = U(t), \end{aligned}$$

и, очевидно,  $N(t) = V(t)$  для всех  $t \in T$ . Все утверждения теоремы 12 доказаны.  $\square$

**Замечание 5.** Разложение (60) было впервые получено Вольдом для стационарного процесса с *дискретным* временем. Г. Крамер доказал, что любой центрированный  $L^2$ -процесс  $X$  (необязательно стационарный), заданный на множестве  $T \subset \mathbb{R}$ , допускает разложение на *ортгональные* компоненты, одна из которых *сингулярна*, а другая — *регулярна*. Условие подчиненности (см. теорему 12) обеспечивает *единственность* упомянутого разложения. Доказательство теоремы 12 проведено таким образом, что нами установлен и результат Крамера.

Полезно подчеркнуть, что в то время как стохастические представления (30) и (38) действуют в спектральной (*частотной*) области, разложение (60) носит иной характер — оно действует во *временной области*.

Отметим также, что лемма 4 позволяет немедленно получить соотношение (54). В самом деле,

$$\begin{aligned}\Delta(s+u, t+u) &= \|X(t+u) - P_{s+u}X(t+u)\| = \|S_uX(t) - P_{s+u}S_uX(t)\| = \\ &= \|S_uX(t) - S_uP_sX(t)\| = \|X(t) - P_sX(t)\| = \Delta(s, t).\end{aligned}$$

§ 19. Рассмотрим более детально структуру *регулярных* процессов.

**Определение 12.** Белый шум  $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$  называется *обновляющим процессом* для центрированного  $L^2$ -процесса  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , если  $H_n(X) = H_n(\varepsilon)$  при всех  $n \in \mathbb{Z}$ .

С помощью этого понятия описание всех *регулярных* процессов с дискретным временем, дается в следующем предложении.

**Теорема 13.** Для того, чтобы невырожденный центрированный стационарный в широком смысле процесс  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$  был *регулярным*, необходимо и достаточно, чтобы нашлись *обновляющий процесс*  $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$  и последовательность комплексных чисел  $\{c_n\}_{n=0}^\infty \in l^2$  такие, что п. н.

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (62)$$

где ряд сходится в среднем квадратическом.

**Доказательство.** Пусть  $X$  — *регулярный* процесс. Легко видеть, что для каждого  $m \in \mathbb{Z}$  пространство  $H_m(X)$  состоит из замыкания в  $L^2(\Omega)$  элементов вида  $h_{m-1} + cX(m)$ , где  $h_{m-1} \in H_{m-1}(X)$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Поскольку  $X(m) = g_{m-1} + z_m$ , где  $g_{m-1} \in H_{m-1}(X)$  и  $z_m \perp H_{m-1}(X)$ , то  $H_m(X)$  представляет собой замыкание в  $L^2(\Omega)$  элементов вида  $h_{m-1} + cz_m$ , а значит, в точности состоит из всех элементов такого вида. Заметим, что  $z_m \neq 0$  (0 — класс функций в  $L^2(\Omega)$ , равных 0 п. н.). Действительно, если  $z_m = 0$ , то тогда  $H_{m-1}(X) = H_m(X)$  и в силу (58) получили бы, что  $H_{n-1}(X) = H_n(X)$  для любого  $n \in \mathbb{Z}$ , что противоречит регулярности.

Выберем  $\xi_n = z_n/\|z_n\|$  и воспользуемся рассуждениями, проведенными при доказательстве леммы 3. А именно, для фиксированного  $n \in \mathbb{Z}$  возьмем последовательность  $t_k = n - k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ . В рассматриваемом случае подпространство  $L_k := H_{t_k} \ominus H_{t_{k+1}}$  порождается вектором  $\xi_{n-k}$  ( $k \in \mathbb{Z}_+$ ). Поскольку  $\|P_{t_k}X(n)\| \rightarrow 0$ ,

$k \rightarrow \infty$ , то приходим к равенству типа (62), в котором

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|X_n\|^2 < \infty.$$

Следовательно, (62) доказано для произвольного *фиксированного*  $n \in \mathbb{Z}$ , поэтому коэффициенты  $c_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , вообще говоря, зависят от  $n$ . Другими словами, пока лишь установлено, что

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)} \xi_{n-k},$$

где ряд сходится в  $L^2(\Omega)$  и  $c_k^{(n)} = (X_n, \xi_{n-k})$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

Для получения (62) проще всего теперь перейти к другому базису в  $H(X)$ . А именно, положим  $\varepsilon_k = S_k \xi_0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (по-прежнему,  $S_k$  — оператор сдвига в  $H(X)$ ). Учитывая (58), видим, что  $\varepsilon_k \in H_k(X)$  и  $\varepsilon_k \perp H_{k-1}(X)$ . Кроме того,  $\|\varepsilon_k\| = \|\xi_0\| = 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Поскольку одномерное подпространство  $H_k(X) \ominus H_{k-1}(X)$  порождается вектором  $\xi_k$ , то, следовательно,  $\varepsilon_k = \alpha_k \xi_k$ ,  $\alpha_k \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  и  $\{\varepsilon_k\}$  — обновляющий процесс для процесса  $X$ . В итоге

$$X_0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(0)} \alpha_{0-k} \varepsilon_{0-k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{-k}.$$

В силу непрерывности и линейности операторов  $S_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), образующих группу, получаем

$$X_n = S_n X_0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k S_n \varepsilon_{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k S_n S_{-k} \xi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k S_{n-k} \xi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{n-k}.$$

Докажем теперь достаточность условия регулярности. Если  $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — произвольный белый шум (т. е. необязательно *обновляющий* процесс для  $X$ ), то (62) показывает, что  $X$  — центрированный стационарный процесс, причем  $H_n(X) \subset H_n(\varepsilon)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Отсюда  $H_{-\infty}(X) \subset H_n(\varepsilon)$  для любого  $n \in \mathbb{Z}$ . Но  $\varepsilon_{n+1} \perp H_n(\varepsilon)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , поэтому  $\varepsilon_n \perp H_{-\infty}(\varepsilon)$  для всех  $n \in \mathbb{Z}$ . В то же время  $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — базис в  $H(X)$ . Следовательно,  $H_{-\infty}(X) = 0$ , т. е. процесс  $X$  является регулярным.  $\square$

**Следствие 4.** *Центрированный стационарный процесс  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$  является регулярным тогда и только тогда, когда он задается физически осуществимым фильтром, на вход которого подается белый шум.*

**Доказательство.** Если процесс  $X$  регулярен, то согласно теореме 13 этот процесс записывается в виде (62) с белым шумом  $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$  (являющимся обновляющим процессом).

Пусть теперь  $X$  задается физически осуществимым фильтром, т. е. формулой (62) с некоторым белым шумом  $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$  (не обязательно обновляющим процессом). Из доказательства достаточности теоремы 13 вытекает регулярность процесса  $X$ , значит, найдется и обновляющий процесс  $\tilde{\varepsilon}$ , обеспечивающий разложение (62).  $\square$

§ 20. Полученные результаты позволяют легко найти величину ошибки линейного прогноза на  $n$  шагов.

Заметим, что для произвольного центрированного стационарного процесса  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$  разложение Вольда приобретает вид

$$X_n = M_n + N_n = M_n + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (63)$$

где  $M_n$  — сингулярная составляющая,  $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — обновляющий процесс для регулярной компоненты  $N_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), а числовая последовательность  $\{c_k\}_{k=0}^{\infty} \in l^2$ .

**Теорема 14.** Для процесса  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , задаваемого формулой (63), ошибка прогноза  $\delta(n)$  на  $n$  шагов вперед дается формулой

$$\delta^2(n) = \sum_{k=0}^{n-1} |c_k|^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Доказательство.** Учитывая, что  $\text{Pr}_{H_m(X)} M_{n+m} = M_{n+m}$  и  $H_m(X) = H_m(\varepsilon)$  для  $m, n \in \mathbb{Z}$ , получаем с учетом представления (62), что

$$\begin{aligned} \delta^2(n) &= \mathbb{E} |X_{n+m} - \text{Pr}_{H_m(X)} X_{n+m}|^2 = \mathbb{E} |N_{n+m} - \text{Pr}_{H_m(X)} N_{n+m}|^2 = \\ &= \mathbb{E} |N_{n+m} - \text{Pr}_{H_m(\varepsilon)} N_{n+m}|^2 = \mathbb{E} \left| \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varepsilon_{n+m-k} \right|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |c_k|^2. \quad \square \end{aligned} \quad (64)$$

Формула (64) еще раз показывает (сравните с (56)), что для регулярного центрированного стационарного процесса  $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  справедливо (при  $n \rightarrow \infty$ ) следующее свойство:

$$\delta^2(n) \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 = \mathbb{E} |X_0|^2 = R(0),$$

где  $R = R(n)$  — ковариационная функция  $X$ .

Из замечания 4 и следствия 4 вытекает

**Следствие 5.** Центрированный стационарный процесс  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$  является регулярным тогда и только тогда, когда он обладает спектральной плотностью  $g = g(\lambda)$ , задаваемой формулой

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-ik\lambda} \right|^2, \quad \lambda \in [-\pi, \pi], \quad \{c_k\} \in l^2.$$

Исчерпывающее описание спектральных плотностей, допускающих такое представление, дает

**Теорема 15** (Колмогоров). Стационарный процесс  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$  с нулевым средним является регулярным тогда и только тогда, когда его спектральная плотность  $g = g(\lambda)$  удовлетворяет условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln g(\lambda) d\lambda > -\infty.$$

**Доказательство** этого результата, основанное на описании граничных свойств аналитических в единичном круге функций класса Харди  $\mathcal{H}_2$ , см., например, в [85; т. 2, с. 621].

§ 21. Согласно теореме 14 величина ошибки прогноза  $\delta(1)$  на *один* шаг равна величине  $|c_0|$ , где  $c_0$  определяется разложением Вольда (63). Оказывается, для процессов, имеющих спектральную плотность, величина  $\delta^2(1) = |c_0|^2$  допускает иное выражение в терминах спектральной плотности, определяемое ниже формулой Колмогорова–Сегё (см. теорему 16).

Обозначим  $L^1 = L^1([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]), \text{mes})$ , где  $\text{mes}$  — мера Лебега. Для неотрицательной функции  $v$  *арифметическое среднее*  $A(v)$  и *геометрическое среднее*  $G(v)$  определяются формулами

$$A(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(\lambda) d\lambda, \quad G(v) = \exp\{A(\ln v)\}$$

в предположении, что  $v$  и  $\ln v$  интегрируемы на отрезке  $[-\pi, \pi]$  (формально полагаем  $\ln 0 = -\infty$ ).

Пусть

$$f(\lambda) = 2\pi g(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \quad (65)$$

**Теорема 16** (Колмогоров–Сегё). *Для централизованного стационарного процесса  $X$  со спектральной плотностью  $g = g(\lambda)$  либо  $\ln f \in L^1$  и тогда*

$$\delta^2(1) = G(f) \quad \left( = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda \right\} \right),$$

*либо  $\ln f \notin L^1$  и тогда  $\delta(1) = 0$ .*

**Доказательство** этой теоремы, иллюстрирующее связь вероятностных задач и задач классической теории функций, отнесено в приложение 5.

## Дополнения и упражнения

1. Покажите, что пуассоновская случайная мера (см. § 9 главы I), заданная на полукольце ограниченных борелевских множеств в  $\mathbb{R}^n$ , является ортогональной (нецентрированной) случайной мерой.
2. Пусть  $\{Z_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$  — комплекснозначный  $L^2$ -процесс такой, что
  - 1)  $E|Z_\lambda - Z_\nu|^2 \rightarrow 0$  для любого  $\nu \in \mathbb{R}$  при  $\lambda \downarrow \nu$ ,
  - 2) приращения *ортогональны*, т. е. для всех  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$

$$E(Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1})\overline{(Z_{\lambda_3} - Z_{\lambda_2})} = 0.$$

На полукольце  $\mathcal{K} = \{(a, b], -\infty < a \leq b < \infty\}$ , где  $(a, a] = \emptyset$ , введем семейство случайных величин  $Z((a, b]) := Z(b) - Z(a)$ . Докажите, что  $Z$  — *ортогональная* случайная мера на  $\mathcal{K}$ .



Если мера порождается указанным выше процессом  $Z_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , то вместо интеграла  $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) Z(d\lambda)$  используют также запись  $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dZ_\lambda$ .

3. Пусть  $\{Z_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$  — центрированный гауссовский процесс с ортогональными приращениями, непрерывный справа в среднем квадратическом (выясните, обязан ли тогда процесс быть непрерывным слева в среднем квадратическом). Пусть при каждом  $t \in T$  функция  $g(t, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t, \lambda)|^2 \mu(d\lambda) < \infty,$$

где  $\mu$  — структурная мера, отвечающая ортогональной случайной мере  $Z$ , порожденной процессом  $\{Z_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$  (см. упражнение 2). Докажите, что тогда процесс

$$Y = \left\{ Y(t) = \int_{\mathbb{R}} g(t, \lambda) dZ_\lambda, t \in T \right\}$$

является центрированным гауссовским процессом.

- 4 (замена меры в интеграле). Пусть  $Z$  — ортогональная случайная мера, заданная на  $\Omega \times \mathcal{G}$  и имеющая  $\sigma$ -конечную структурную функцию (меру)  $\mu$  на измеримом пространстве  $(\Lambda, \mathcal{A})$  (система множеств  $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{A}: \mu(A) < \infty\}$ ). Пусть  $h: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ . Введем

$$\mathcal{H} = \left\{ B \in \mathcal{A}: \int_B |h(\lambda)|^2 \mu(d\lambda) < \infty \right\}$$

и положим

$$V(B) = \int_{\Lambda} \mathbf{1}_B(\lambda) h(\lambda) Z(d\lambda), \quad B \in \mathcal{H}. \quad (66)$$

Объясните, почему  $V$  является ортогональной случайной мерой (центрированной, если центрирована мера  $Z$ ) с  $\sigma$ -конечной структурной мерой

$$\nu(B) = \int_B |h(\lambda)|^2 \mu(d\lambda) < \infty, \quad B \in \mathcal{H}.$$

Докажите, что если  $g: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g \in L^2(\Lambda, \sigma\{\mathcal{H}\}, \nu)$ , то

$$\int_{\Lambda} g(\lambda) V(d\lambda) = \int_{\Lambda} g(\lambda) h(\lambda) Z(d\lambda). \quad (67)$$

В связи с теоремой Карунена (см. также [38, 58, 134]) вновь обратимся к вопросу о канонических представлениях случайных процессов.

Рассмотрим пространство  $L^2[a, b]$ , состоящее из комплекснозначных функций, квадрат модуля которых интегрируем по Лебегу на  $[a, b]$ . Скалярное произведение в этом гильбертовом пространстве определим, как обычно, формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in L^2[a, b].$$

Следующий пример является хорошей иллюстрацией теоремы 3.

**Пример 2.** Для винеровского процесса  $W$  на отрезке  $[0, 2\pi]$  справедливо представление (Карунена)

$$W(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{ikt}}{ik} z_k, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (68)$$

где  $z_k$  — ортонормированные центрированные случайные величины, ряд сходится при каждом  $t \in [0, 2\pi]$  в среднем квадратическом (при  $k = 0$  считаем  $(1 - e^{ikt})/ik = -t$ ).

Действительно, для  $s, u \in [0, 2\pi]$  имеем

$$\mathbf{1}_{[0, s]}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(s) e^{iku}. \quad (69)$$

Функции  $(1/\sqrt{2\pi})e^{iku}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , образуют полную ортонормированную систему в пространстве  $L^2[0, 2\pi]$ ; при каждом  $s \in [0, 2\pi]$  ряд (69) сходится в этом пространстве и коэффициенты Фурье

$$c_k(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathbf{1}_{[0, s]}(u) e^{-iku} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 - e^{-iks})/ik, \quad k \in \mathbb{Z}$$

( $c_0(s) = s/\sqrt{2\pi}$ ). Равенство Парсеваля показывает, что при  $s, t \in [0, 2\pi]$

$$\min\{s, t\} = \langle \mathbf{1}_{[0, s]}, \mathbf{1}_{[0, t]} \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{-iks})(1 - e^{-ikt})}{k^2}.$$

Представление (68) следует из теоремы 3, в которой надо положить  $\Lambda = \mathbb{Z}$ ,

$$f(t, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1 - e^{-ikt}}{ik}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad k \in \Lambda,$$

и выбрать меру  $\mu$  считающей мерой на  $\Lambda$ , т. е. такой, что  $\mu(\{k\}) = 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**5.** Докажите, что представление (68) справедливо (п. н.) с независимыми случайными величинами  $z_k \sim N(0, 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Точнее говоря, докажите, что при таком выборе величин  $z_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) правая часть (68) имеет непрерывную модификацию, являющуюся центрированным гауссовским процессом с ковариационной функцией  $\min\{s, t\}$ ,  $s, t \in [0, 2\pi]$ .

Приведем некоторые необходимые нам в дальнейшем утверждения, относящиеся к *теории операторов* в гильбертовых пространствах.

С непрерывной на  $[a, b] \times [a, b]$  ковариационной функцией  $r = r(s, t)$  свяжем ограниченный линейный оператор Фредгольма  $A$ , который действует в  $L^2[a, b]$  и определяется следующим образом:

$$Af(s) = \int_a^b r(s, t) f(t) dt, \quad f \in L^2[a, b]. \quad (70)$$

Функция  $r = r(s, t)$  называется *ядром интегрального оператора  $A$* .

6. Пусть  $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$  — комплекснозначный  $L^2$ -процесс, непрерывный в среднем квадратическом на отрезке  $[a, b]$ . Докажите, что это свойство равносильно тому, что на  $[a, b]$  непрерывна функция  $m(t) = \mathbb{E} X(t)$  и на  $[a, b] \times [a, b]$  непрерывна ковариационная функция  $r(s, t) = \text{cov}(X(s), X(t))$ .

7. Докажите, что оператор  $A$ , заданный формулой (70), компактен, т. е. всякое ограниченное по норме множество операторов  $A$  переводит в предкомпактное (т. е. множество, замыкание которого есть компакт).

Введенный оператор  $A$  — оператор Гильберта–Шмидта (см. [35; гл. IX, § 2, п. 1]), поскольку

$$\int_a^b \int_a^b |r(s, t)|^2 ds dt < \infty. \quad (71)$$

Заметим также, что оператор  $A$  является самосопряженным, поскольку (см. [35; гл. IX, § 2, п. 2]) его сопряженный оператор  $A^*$  задается эрмитово сопряженным ядром  $\overline{r(t, s)}$ , а для ковариационной функции  $r(s, t)$  справедливо равенство  $r(s, t) = \overline{r(t, s)}$  при всех  $s, t$ .

Напомним (см. [35; гл. 4, § 6]) классический результат.

**Теорема 17** (Гильберт–Шмидт). Пусть  $A$  — компактный самосопряженный оператор в (комплексном) гильбертовом пространстве  $H$ . Тогда существует ортонормированная система  $\{\phi_n, n \in J\}$  собственных векторов оператора  $A$ , отвечающих ненулевым собственным значениям, такая, что любой элемент  $h \in H$  записывается единственным образом в виде

$$h = \sum_{n \in J} c_n \phi_n + u, \quad (72)$$

где  $c_n \in \mathbb{C}$ ,  $n \in J$ ,  $u \in \text{Ker } A$  (т. е.  $Au = 0$ ). Множество  $J$  всегда конечно или счетно (в последнем случае ряд (72) сходится по норме  $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$ ). Более того, в силу компактности оператора  $A$  число собственных значений  $\lambda_n$  во внешности любого круга с центром в 0 конечно и поэтому их можно перенумеровать в порядке невозрастания модулей  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ . Если  $J$  счетно, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ .

Отметим, что собственные значения самосопряженного оператора  $A$  в  $H$  действительны, а собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны, в частности,  $(\phi_n, u) = 0$ ,  $n \in J$ .

Для оператора  $A$  из (70) в силу сепарабельности  $H = L^2[a, b]$  в подпространстве  $\text{Ker } A$  можно выбрать ортонормированный базис  $\{\phi_k\}_{k \in M}$ , где  $M$  — конечно или счетно (считаем множества  $M$  и  $J$  непересекающимися; если  $\text{Ker } A = 0$ , то  $M = \emptyset$ ). Дополнив систему  $\{\phi_n, n \in J\}$  до ортонормированного базиса  $\{\phi_n, n \in J \cup M\}$  в  $H$ , перепишем (72) в виде разложения по собственному базису оператора  $A$ :

$$h = \sum_{k \in J \cup M} c_k \phi_k, \quad c_k = (h, \phi_k), \quad k \in J \cup M. \quad (73)$$

Если семейство индексов  $J \cup M$  счетно, то ряд Фурье в (73) сходится по норме  $L^2[a, b]$ .

В силу упражнений 6 и 7 для ковариационной функции  $r$  непрерывного в среднем квадратическом процесса  $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$  имеем согласно (73), что при каждом  $t \in [a, b]$

$$\overline{r(t, \cdot)} = \sum_{k \in J \cup M} c_k(t) \phi_k(\cdot),$$

где

$$c_k(t) = \int_a^b \overline{r(t, s) \phi_k(s)} ds = \overline{\lambda_k \phi_k(t)} = \lambda_k \overline{\phi_k(t)}.$$

Тем самым,

$$r(t, \cdot) = \sum_{k \in J} \lambda_k \phi_k(t) \overline{\phi_k(\cdot)}. \quad (74)$$

Если  $J$  — счетно, то ряды (73), (74) сходятся в  $L^2[a, b]$  при любом  $t \in [a, b]$ . Отметим, что здесь все  $\lambda_k$  действительны и  $\lambda_k = 0, k \in M$ .

**8.** Докажите, что (в силу неотрицательной определенности функции  $r$ )  $\lambda_k > 0$  при  $k \in J$ .

Следующая теорема показывает, что соотношение (74) допускает усиление (см., например, [60; с. 263]).

**Теорема 18** (Мерсер). Пусть  $r = r(s, t)$  — непрерывная на  $[a, b] \times [a, b]$  ковариационная функция. Тогда для всех  $s, t \in [a, b]$

$$r(s, t) = \sum_{k \in J} \lambda_k \phi_k(s) \overline{\phi_k(t)}, \quad (75)$$

причем, если  $J$  — счетно, то на  $[a, b] \times [a, b]$  ряд (75) сходится абсолютно и равномерно. (По-прежнему,  $\lambda_k$  и  $\phi_k$  обозначают положительные собственные значения и соответствующие собственные функции оператора  $A$  из (70).)

В качестве следствия отсюда вытекает

**Теорема 19** (Карунен–Лозв). Пусть  $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$  — непрерывный в среднем квадратическом на  $[a, b]$  центрированный  $L^2$ -процесс, имеющий ковариационную функцию  $r = r(s, t)$ . Тогда при каждом  $t \in [a, b]$

$$X(t) = \sum_{k \in J} \sqrt{\lambda_k} \phi_k(t) z_k \quad \text{п. н.}, \quad (76)$$

где  $\lambda_k, \phi_k$  — те же, что и в (75), а  $\{z_k, k \in J\}$  — центрированные ортонормированные случайные величины. Для счетного  $J$  ряд (76) сходится в среднем квадратическом.

**Доказательство.** Положим  $T = [a, b]$ ,  $\Lambda = J$  и  $f(t, k) = \sqrt{\lambda_k} \phi_k(t)$  для  $t \in T, k \in \Lambda$ . Тогда свойство (75) превращается в соотношение (18), где  $\mu$  — считающая мера на  $\Lambda$ , т. е.  $\mu(\{k\}) = 1$  для  $k \in \Lambda$  и требуемый результат о справедливости (76) непосредственно вытекает из теоремы Карунена (теорема 3).  $\square$

**9.** Оценив величину

$$\mathbb{E} \left| X(t) - \sum_{k \leq n} \sqrt{\lambda_k} \phi_k(t) z_k \right|^2,$$

докажите, что если выполнены условия теоремы 19, то в разложении (76) в качестве величин  $z_k$  можно выбрать центрированные ортонормированные величины

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_a^b X(t) \phi_k(t) dt. \quad (77)$$

Интеграл здесь определяется (и существует) как предел в среднем квадратическом соответствующих интегральных сумм Римана. Объясните, почему для непрерывной на  $[a, b] \times [a, b]$  ковариационной функции  $r = r(s, t)$  собственные функции  $\phi_k \in C[a, b]$ ,  $k \in J$ . Кроме того, докажите, что среднеквадратическая сходимость в (76) с данными  $z_k$ ,  $k \in J$ , будет равномерна по  $t \in [a, b]$ .

**Пример 3.** Найдем, пользуясь теоремой 19, разложение Карунена–Лоэва для винеровского процесса  $W(t)$  на отрезке  $[0, 1]$ .

Для этого определим собственные значения и собственные функции интегрального оператора, отвечающего непрерывной на  $[0, 1] \times [0, 1]$  ковариационной функции  $r(s, t) = \min\{s, t\}$ ,  $s, t \in [0, 1]$ . Согласно упражнению 8 величины  $\lambda_k > 0$  для  $k \in J$  и, как показывает упражнение 9,  $\phi_k \in C[0, 1]$ .

Рассмотрим относительно  $\lambda > 0$  и  $\phi \in C[0, 1]$  уравнение

$$\int_0^1 r(s, t) \phi(t) dt = \lambda \phi(s), \quad s \in [0, 1],$$

т. е. уравнение

$$\int_0^s t \phi(t) dt + s \int_s^1 \phi(t) dt = \lambda \phi(s). \quad (78)$$

Поскольку левая часть (78) дифференцируема в каждой точке  $s \in [0, 1]$  (в концах отрезка надо рассматривать соответствующие односторонние производные), то функция  $\phi$  дифференцируема и

$$\int_s^1 \phi(t) dt = \lambda \phi'(s), \quad s \in [0, 1].$$

Снова дифференцируя по  $s$  обе части этого равенства, приходим к тому, что требуемая функция  $\phi(s)$  должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\phi''(s) = -(1/\lambda)\phi(s).$$

Общее решение этого уравнения задается формулой

$$\phi(s) = A \cos(s/\sqrt{\lambda}) + B \sin(s/\sqrt{\lambda}),$$

где  $A, B$  — константы. Учитывая, что  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi'(1) = 0$ , находим, что

$$A = 0, \quad (B/\sqrt{\lambda}) \cos(1/\sqrt{\lambda}) = 0,$$

откуда

$$\lambda_k = ((k + 1/2)\pi)^{-2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}. \quad (79)$$

Условия нормировки  $\int_0^1 \phi_k^2(s) ds = 1$  и равенства (79) дают следующие представления для функций  $\phi_k(s)$ :

$$\phi_k(s) = \sqrt{2} \sin((k + 1/2)\pi s), \quad s \in [0, 1], \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (80)$$

Легко проверить, что все найденные величины  $\lambda_k$  и  $\phi_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , удовлетворяют исходному уравнению (78). Таким образом, согласно представлению (76) находим, что

$$W(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((k + 1/2)\pi t)}{(k + 1/2)\pi t} z_k, \quad (81)$$

где  $\{z_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$  — последовательность ортонормированных и центрированных (в силу упражнения 9) случайных величин; ряд в (81) сходится в среднем квадратическом равномерно на  $[0, 1]$ .

**Замечание 6.** Упражнение 4 главы II показывает, что  $L^2[W(t), t \in [0, 1]]$  — гауссовская система. Согласно упражнению 9 величины  $\{z_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ , фигурирующие в (77), где  $X(t) = W(t)$ ,  $a = 0$  и  $b = 1$ , образуют гауссовский процесс. Поскольку для центрированных действительных гауссовских величин ортогональность равносильна независимости, то, применив упражнение 11 главы IV, получаем, что ряд (81) при каждом  $t \in [0, 1]$  сходится с вероятностью единица, где независимые величины  $z_k \sim N(0, 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , определены на том же самом вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , что и данный винеровский процесс.

10. Найдите на отрезке  $[0, c]$  разложение Карунена–Лоева для процесса Орнштейна–Уленбека, имеющего ковариационную функцию  $r(s, t) = e^{-\alpha|s-t|}$ , где  $\alpha > 0$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$ .
11. Пусть  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  — непрерывный в среднем квадратическом процесс с ковариационной функцией  $r(s, t) = R(s - t)$ . Пусть  $X$  — периодический процесс с периодом  $a$ , т. е.  $X(t + a) = X(t)$  п. н. для каждого  $t \in \mathbb{R}$ . Найдите для  $X$  разложение Карунена–Лоева.

Применения различных канонических разложений случайных функций даны, например, в монографии [58]. Важное значение канонические представления имеют для приложений теории случайных процессов к решению задач обнаружения сигналов в присутствии помех. В частности, большой интерес представляет вопрос, в каком случае в той или иной задаче можно ограничиться конечным числом членов, участвующих в каноническом разложении случайной функции. Иллюстрирующие примеры такого рода можно найти в [58; § 174].

Между теоремой 3 главы VII и теоремой 6 главы II имеется тесная связь.

12. Докажите, что если ковариационная функция  $r = r(s, t)$  допускает представление (18), то гильбертово пространство  $H$  с воспроизводящим ядром  $r = r(s, t)$  состоит из функций

$$h(t) = \int_{\Lambda} g(\lambda) \overline{f(t, \lambda)} \mu(d\lambda), \quad g \in L^2[f], \quad t \in T, \quad (82)$$

где  $L^2[f]$  — замыкание в  $L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$  линейной оболочки функций  $f(t, \cdot)$ ,  $t \in T$ . Скалярное произведение в  $H$  задается формулой

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \int_{\Lambda} g_1(\lambda) \overline{g_2(\lambda)} \mu(d\lambda),$$

где  $h_k$  и  $g_k$ ,  $k = 1, 2$ , связаны соотношением (82). Пусть  $Z$  — ортогональная случайная мера на  $\mathcal{G} \times \Omega$ , имеющая структурной функцией меру  $\mu$  (см. теорему 2), и пусть  $L^2[f] = L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ . Объясните, почему для процесса  $X = \{X(t), t \in T\}$  вида (19), процесс  $Y$ , фигурирующий в теореме 6 главы II, задается формулой

$$Y(h) = \int_{\Lambda} g(\lambda) Z(d\lambda), \quad (83)$$

где  $h$  определяется по  $g$  согласно (82).

- 13.** Докажите, что (действительное) гильбертово пространство  $H$  с воспроизводящим ядром  $r(s, t) = \min\{s, t\}$ ,  $s, t \in \mathbb{R}_+$ , являющимся ковариационной функцией винеровского процесса, состоит из функций

$$h(t) = \int_0^t g(\lambda) d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \text{для которых} \quad \int_0^\infty g^2(\lambda) d\lambda < \infty \quad (84)$$

(интегрируем по мере Лебега). Объясните, почему  $L^2[W]$ , т. е. замкнутая в  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  линейная оболочка  $W(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , состоит из величин вида (83), где  $Z$  — ортогональная случайная мера на  $\mathcal{G} \times \Omega$ , порожденная самим винеровским процессом (см. пример 1), а функция  $g$  удовлетворяет условию (84).

Рассмотрим ряд конкретных примеров стационарных и нестационарных процессов (подразумевая под стационарностью стационарность в широком смысле).

- 14.** Пусть  $X = \{X(t) = \xi e^{i(\eta t + \nu)}, t \in \mathbb{R}\}$ , где действительные случайные величины  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\nu$  таковы, что  $\nu$  равномерно распределена на  $[0, 2\pi]$  и не зависит от  $(\xi, \eta)$ , а  $E\xi^2 < \infty$ . Убедитесь, что  $X$  дает пример центрированного стационарного процесса с ковариационной функцией вида (36), где мера  $G = E\xi^2 F$ , а  $F$  — распределение вероятностей величины  $\eta$ . Положим теперь  $Y = \{Y(t) = \xi \cos(\eta t + \nu), t \in \mathbb{R}\}$ . Проверьте, что  $Y$  — стационарный процесс. Если  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  — стационарный комплекснозначный процесс, то можно ли утверждать, что  $\{\operatorname{Re} X(t), t \in \mathbb{R}\}$  и  $\{\operatorname{Im} X(t), t \in \mathbb{R}\}$  — стационарные процессы?
- 15** (телеграфный сигнал). Пусть  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  — пуассоновский процесс, имеющий постоянную интенсивность  $\lambda > 0$ . Пусть случайная величина  $\zeta$  не зависит от процесса  $N$  и  $P(\zeta = -1) = P(\zeta = 1) = 1/2$ . Введем процесс, называемый *телеграфным сигналом* или *телеграфной волной*, положив

$$X(t, \omega) = \zeta(\omega)(-1)^{N_t(\omega)}, \quad t \geq 0, \quad \omega \in \Omega.$$

Найдите  $\operatorname{cov}(X(s), X(t))$ ,  $s, t \geq 0$  (сопоставьте ответ с упражнением 27 главы III).

**16** (обобщение упражнения 15). Пусть  $\{\zeta_n, n \geq 1\}$  — последовательность независимых одинаково распределенных действительных случайных величин, независящая от пуассоновского процесса  $N = \{N_t, t \geq 0\}$ , имеющего с вероятностью 1 единичные скачки в моменты  $\tau_1 < \tau_2 < \dots$  (см. теорему 2 главы II). Положим  $X(t, \omega) = \zeta_k(\omega)$  при  $\tau_k(\omega) \leq t < \tau_{k+1}(\omega)$ , где  $k = 0, 1, \dots$  ( $\tau_0 = 0$ ). Если в последовательности  $\{\tau_k(\omega), k \geq 0\}$  найдутся совпадающие точки (что возможно лишь с вероятностью 0), то пусть  $X(t, \omega) = 0$  для  $t \geq 0$ . Считая  $E\zeta_0^2 < \infty$ , найдите ковариационную функцию процесса  $X = \{X(t), t \geq 0\}$ .

**17.** Для процесса дробового шума (см. определение 14 главы VI) с ковариационной функцией  $r = r(s, t)$  докажите, что возникает асимптотическая стационарность в том смысле, что существует  $\lim_{s \rightarrow \infty} r(s, s+t)$ .

Разнообразные обобщения процесса дробового шума (в том числе *поля дробового шума*) играют важную роль в построении различных моделей более сложных процессов; см. по этому поводу, например, [13, 111].

**18.** Найдите спектральную плотность процесса Орнштейна–Уленбека.

**19.** Приведите пример (в связи с теоремой 8) неотрицательно определенной функции  $R(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , непрерывной всюду, кроме точки  $t = 0$ .

**20.** Пусть  $h_1(t), \dots, h_n(t)$  — комплекснозначные функции, заданные на множестве  $T$ . Докажите, что  $r(s, t) = \sum_{j=1}^n h_j(s) \overline{h_j(t)}$ ,  $s, t \in T$ , является неотрицательно определенной функцией. Дайте пример негауссовского процесса, имеющего эту ковариационную функцию.

**21.** Пусть  $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — стационарный процесс со средним значением  $a$  и ковариационной функцией  $R = R(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Докажите, что при  $N \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} a \iff \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R(k) \rightarrow 0.$$

**22.** Пусть в условиях предыдущего упражнения

$$\frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N R(k-m) \equiv \frac{1}{N} \sum_{|k| \leq N-1} R(k)(1 - |k|/N) \leq cN^{-\gamma} \quad (85)$$

для некоторых  $c, \gamma > 0$  и всех  $N \in \mathbb{N}$ . Докажите, что тогда

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \rightarrow 0 \text{ п. н. при } N \rightarrow \infty. \quad (86)$$

Покажите, что условие (85) выполнено, если  $R(n) = O(n^{-\gamma})$  при  $n \rightarrow \infty$ .



**Теорема 20** (Гапошкин; [14]). Пусть  $X = \{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$  — стационарный процесс со средним  $a = 0$  и ковариационной функцией  $R = R(n), n \in \mathbb{Z}$  (пусть  $R(0) = 1$ ). Тогда (86) имеет место в том и только том случае, когда  $G(\{0\}) = 0$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-n}} Z(d\lambda) = 0 \quad \text{п. н.},$$

где  $Z$  — ортогональная случайная мера, фигурирующая в спектральном представлении (35), а  $G$  — ее структурная функция (мера).

Отметим, что доказательство этого результата основано на представлении сумм  $k^{-1} \sum_{j=1}^k X_j$  для  $2^n \leq k < 2^{n+1}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) в виде  $\int_{|\lambda| \leq 2^{-n}} Z(d\lambda) + \psi_k$ , где  $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = 0$  п. н. и в  $L^2(\Omega)$ .

**23.** Пусть  $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  — центрированная действительная гауссовская стационарная последовательность с ковариационной функцией  $R = R(n), n \in \mathbb{Z}$ . Докажите, что условие

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R^2(k) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

необходимо и достаточно для того, чтобы оценка  $\hat{R}_N(m)$ , введенная в (48), была состоятельной в среднем квадратическом, т. е. для  $m \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{E} |\hat{R}_N(m) - R(m)|^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

**24.** Пусть  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — процесс скользящего среднего вида (39). Потребуем, чтобы  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty$  и  $\varepsilon_k, k \in \mathbb{Z}$ , были независимыми одинаково распределенными величинами, имеющими  $\mathbb{E} \varepsilon_k^4 < \infty$ . Пусть  $\hat{f}_N(\lambda)$  — периодограмма (49). Найдите  $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{cov}(\hat{f}_N(\lambda), \hat{f}_N(\nu))$  для частот  $\lambda, \nu \in [-\pi, \pi]$ .

**25.** Пусть  $Z$  — ортогональная случайная мера, отвечающая процессу Орнштейна–Уленбека с параметрами  $\alpha, \beta > 0$  (см. упражнение 27 главы III). Докажите, что процесс

$$W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\lambda} - 1}{i\lambda} \cdot \frac{i\lambda + \beta}{\alpha} Z(d\lambda), \quad t \geq 0, \quad (87)$$

(по непрерывности полагаем  $(e^{it\lambda} - 1)/i\lambda = t$  при  $\lambda = 0$ ) является винеровским процессом. (Существование непрерывной модификации этого процесса легко получается с помощью теоремы Колмогорова (теорема 18 главы II).)

Интересно отметить, что представление (87) дает возможность построения винеровского процесса, отправляясь от процесса Орнштейна–Уленбека, а формула (III.88) показывает, как процесс Орнштейна–Уленбека выражается через винеровский процесс. В главе VIII мы рассмотрим также стохастическое дифференциальное уравнение Ланжевена, связывающее эти два замечательных процесса.

Пользуясь упражнением 4, представление (87) можно переписать в следующем виде (сравните с примером 2)

$$W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\lambda} - 1}{i\lambda} V(d\lambda), \quad t \geq 0, \quad (88)$$

где ортогональная случайная мера  $V$  на полукольце  $\mathcal{K}$ , фигурирующем в упражнении 4, задается формулой (66) с функцией  $h(\lambda) = (i\lambda + \beta)/\alpha$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Замечание 7.** Согласно теореме 1 главы III траектории винеровского процесса п. н. недифференцируемы ни в одной точке  $t \in \mathbb{R}_+$ . Докажите, что в каждой точке  $t \in \mathbb{R}_+$  не существует производной  $W(t)$  даже в смысле сходимости по вероятности. Тем не менее, если *формально* продифференцировать по  $t$  равенство (88), получим так называемый “белый шум”

$$\dot{W}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} V(d\lambda). \quad (89)$$

Это название связано с тем, что формально получена смесь гармонических колебаний  $e^{it\lambda}$ , каждое из которых входит в (89) с *одинаковой* интенсивностью (поскольку структурная для  $V$  мера есть мера Лебега). Точный смысл понятию “белый шум” придается в теории обобщенных случайных процессов (сравните с определением 10); введение в эту область содержится в [77].

Результаты, изложенные в настоящей главе, распространяются также и на процессы с *векторными значениями*, а также на *случайные поля*. Остановимся на некоторых из этих результатов.

Матричная функция  $C(s, t) = (C_{jk}(s, t))_{j,k=1}^m$ ,  $s, t \in T$ , с комплекснозначными элементами называется *неотрицательно* (или *положительно*) *определенной*, если для всех  $n \geq 1$ , любых  $t_1, \dots, t_n \in T$  и вектор-столбцов  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^m$

$$\sum_{j,k=1}^n z_j^* C(t_j, t_k) z_k \geq 0,$$

где символ  $*$  обозначает транспонирование и комплексное сопряжение всех элементов.

Векторный процесс  $X = \{X(t), t \in T\}$  со значениями в  $\mathbb{C}^m$  называется  $L^2$ -*процессом*, если  $\mathbf{E} \|X(t)\|^2 < \infty$  для всех  $t \in T$ . Здесь и далее норма  $\|\cdot\|$  в комплексном (в частности, действительном) евклидовом пространстве определяется обычным образом:

$$\|z\| = (z, z)^{1/2}, \quad \text{где } (z, w) = \sum_{k=1}^m z_k \bar{w}_k \quad \text{для } z, w \in \mathbb{C}^m.$$

Определим *векторную функцию среднего* и *матричную ковариационную* (корреляционную) *функцию*  $L^2$ -процесса  $X$ , положив

$$a(t) = \mathbf{E} X(t) \in \mathbb{C}^m, \quad r(s, t) = \mathbf{E} (X(s) - a(s))(X(t) - a(t))^*.$$

- 26.** Докажите, что матричная функция  $R(s, t)$ ,  $s, t \in T$  (с комплексными элементами) является ковариационной функцией некоторого векторного  $L^2$ -процесса  $X = \{X(t), t \in T\}$  тогда и только тогда, когда она неотрицательно определена.

Пусть  $T$  — линейное пространство.  $L^2$ -процесс  $X = \{X(t), t \in T\}$  со значениями в  $\mathbb{C}^m$  называется *стационарным в широком смысле*, если

$$a(t) = a \in \mathbb{C}^m, \quad r(s, t) = R(s - t), \quad s, t \in T. \quad (90)$$

Матричная функция  $C(t)$ ,  $t \in T$ , называется *неотрицательно определенной*, если неотрицательно определена функция  $r(s, t) := C(s - t)$ ,  $s, t, s - t \in T$ .

Как и прежде, рассматриваемые процессы (и поля) считаем центрированными.

Говорят, что последовательность *векторов*  $\varepsilon_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , со значениями в  $\mathbb{C}^m$  является *белым шумом*, если в (90)

$$a = 0, \quad R(0) = I, \quad R(n) = 0 \text{ при } n \neq 0,$$

здесь  $I$  — единичная матрица  $m$ -го порядка. Заметим, что для процессов с непрерывным временем этот термин, как отмечалось выше, имеет более сложный смысл.

Векторный процесс *скользящего среднего* вводится формулой

$$X(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \varepsilon_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (91)$$

где  $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — белый шум,  $A_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , — матрицы (операторы), отображающие  $\mathbb{C}^m$  в  $\mathbb{C}^m$ . Ряд в (91) понимается как сходящийся в среднем квадратическом.

**27.** Докажите, что для сходимости в  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ряда (91) достаточно, чтобы  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k|^2 < \infty$ , где  $|A| := (\text{Tr } AA^*)^{1/2} = \left( \sum_{j,q=1}^m |a_{jq}|^2 \right)^{1/2}$  для  $A = (a_{jq})_{j,q=1}^m$ . Найдите ковариационную функцию векторного процесса скользящего среднего.

Если  $T$  — метрическое пространство с метрикой  $\rho$ , то  $L^2$ -процесс  $X = \{X(t), t \in T\}$  со значениями в  $\mathbb{C}^m$  называется *непрерывным в среднем квадратическом в точке  $t \in T$* , когда

$$E \|X(s) - X(t)\|^2 \rightarrow 0 \text{ при } \rho(s, t) \rightarrow 0. \quad (92)$$

Непрерывность *в среднем квадратическом на  $T$*  означает выполнение свойства (92) в каждой точке  $t \in T$ .

Ознакомившись с приложением 4, докажите, что справедлива следующая

**Теорема 21.** *Функция  $R = R(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}^d$ , является ковариационной функцией стационарного в широком смысле непрерывного в среднем квадратическом комплекснозначного случайного поля  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$  тогда и только тогда, когда*

$$R(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, \lambda \rangle} G(d\lambda), \quad t \in \mathbb{R}^d, \quad (93)$$

где  $G$  — некоторая конечная неотрицательная мера на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ . При этом мера  $G$  определяется однозначно.

Аналогичным образом может быть переформулирована и теорема 4.

Комплекснозначное поле  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$  называется *изотропным*, если его ковариационная функция  $r(s, t)$  зависит только от  $t$  и  $\|s - t\|$ . Если поле еще и *однородно* (иначе говоря, является стационарным в широком смысле), то  $r(s, t) = R(\|s - t\|)$  для  $s, t \in \mathbb{R}^d$ . В этом случае для  $R(t)$  можно дать иное представление.

**Теорема 22** (см. [16; т. 1, с. 262]). Для того чтобы функция  $R = R(u)$ , где  $u \in \mathbb{R}_+$ , была ковариационной функцией однородного, изотропного и непрерывного в среднем квадратическом комплекснозначного поля  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$R(u) = 2^{(m-2)/2} \gamma\left(\frac{m}{2}\right) \int_0^\infty \frac{I_{(m-2)/2}(\lambda u)}{(\lambda u)^{(m-2)/2}} Q(d\lambda), \quad u \in \mathbb{R}_+,$$

здесь  $I_\nu(x)$  — бесселева функция первого рода,  $\gamma$  — гамма-функция,  $Q$  — неотрицательная конечная мера на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ , причем  $Q(\mathbb{R}_+) = G(\mathbb{R}^m) = R(0)$ .

Упомянем также понятие однородного изотропного векторного поля  $X$ , определенного на  $\mathbb{R}^d \times \Omega$  и принимающего значения в  $\mathbb{R}^d$ . Помимо условия (90) здесь требуется инвариантность распределений относительно группы вращений, т. е. требуется, чтобы  $(S^{-1}X(St_1), \dots, S^{-1}X(St_n)) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (X(t_1), \dots, X(t_n))$  для любого вращения  $S$  в  $\mathbb{R}^d$  и любых точек  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^d$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Матричную функцию множества  $G(B) = (G_{jk}(B))_{j,k=1}^m$ , где  $B \in \mathcal{K}$  и  $\mathcal{K}$  — полукольцо множеств  $\Lambda$ , называют неотрицательно определенной, если матрица  $G(B)$  неотрицательно определена при каждом  $B \in \mathcal{K}$ .

Для непрерывного в среднем квадратическом однородного случайного поля  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$  со значениями в  $\mathbb{C}^m$  и вектора  $\tau \in \mathbb{C}^m$  введем скалярное поле  $Y = \{Y(t) = \langle X(t), \tau \rangle, t \in \mathbb{R}^d\}$ . Можно показать, что это поле также является однородным и непрерывным в среднем квадратическом. Пользуясь этим свойством, докажите, что верна

**Теорема 23.** Для того чтобы функция  $R = R(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}^d$ , была матричной ковариационной функцией непрерывного в среднем квадратическом однородного векторного поля  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$  со значениями в  $\mathbb{C}^m$ , необходимо и достаточно выполнение представления (93), где  $R$  понимается как  $m \times m$  матричная функция, а  $G$  — как  $m \times m$  матричная счетно-аддитивная функция на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

Векторной (со значениями в  $\mathbb{C}^m$ ) ортогональной случайной мерой  $Z$  на некотором полукольце  $\mathcal{K}$  подмножеств множества  $\Lambda$  называется  $L^2$ -процесс  $\{Z(B), B \in \mathcal{K}\}$  такой, что

$$\mathbb{E} Z(B) Z(C)^* = G(B \cap C),$$

где  $G$  — матричнозначная счетно аддитивная мера на  $\mathcal{K}$ , называемая структурной (матричной) мерой. Конструкция интеграла по скалярной ортогональной случайной мере легко обобщается на векторный случай.

Из теорем 3 и 23 выводится (см., например, [16; т. 1, с. 297])

**Теорема 24.** Поле  $X$ , фигурирующее в теореме 23, допускает представление вида

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, \lambda \rangle} Z(d\lambda), \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

где  $Z$  — векторная ортогональная случайная мера на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  со структурной функцией (мерой)  $G$ , отвечающей спектральному представлению ковариационной функции поля. При этом между пространством  $L^2[X]$ , т. е. замкнутой в  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  линейной оболочкой величин  $X(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}^d$ , и пространством

$L^2(\nu) = L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \nu)$ , где  $\nu = \text{Tr } G$ , устанавливается изометрическое соответствие, при котором

- 1)  $X(t) \leftrightarrow e^{i(t, \lambda)}$ ,
- 2) если  $Y_k \leftrightarrow g_k(\lambda)$ , где  $Y_k \in L^2[X]$ ,  $g_k \in L^2(\nu)$ ,  $k = 1, 2$ , то

$$Y_k = \int_{\mathbb{R}^d} g_k(\lambda) Z(d\lambda), \quad \mathbb{E} Y_1 Y_2^* = \int_{\mathbb{R}^d} g_1(\lambda) g_2(\lambda)^* G(d\lambda).$$

Получите отсюда, что справедлива

**Теорема 25** (Котельников–Шеннон). Пусть однородное, непрерывное в среднем квадратическом поле  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$  имеет ограниченный спектр, т. е. структурная мера сосредоточена на некотором параллелепипеде  $(-u_1, u_1) \times \dots \times (-u_d, u_d)$  с ненулевыми длинами ребер. Тогда

$$X(t) = \sum_{n=(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d} \prod_{k=1}^d \frac{\sin(u_k t_k - \pi n_k)}{u_k t_k - \pi n_k} X\left(\frac{\pi n_1}{u_1}, \dots, \frac{\pi n_d}{u_d}\right), \quad (94)$$

где при каждом  $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$  ряд сходится в среднем квадратическом.

Смысл представления (94) состоит в том, что оно дает возможность *восстанавливать* значения поля в произвольной точке  $t \in \mathbb{R}^d$  по его значениям в узлах решетки вида  $(\pi n_1/u_1, \dots, \pi n_d/u_d)$ .

В связи с каноническими представлениями случайных процессов упомянем еще одно направление исследований, относящееся к *обновляющим* процессам. Рассмотрим  $L^2$ -процесс  $X = \{X(t), t \in T\}$ ,  $T \subset \mathbb{R}$ , и подпространства  $H_t(X)$ ,  $t \in T$ , состоящие из замыкания в среднем квадратическом линейной оболочки величин  $X(s)$ ,  $s \leq t$  ( $s, t \in T$ ). Спрашивается, можно ли найти *обновляющий процесс*  $Y = \{Y(t), t \in T\}$ , т. е. процесс с ортогональными приращениями, такой, что

$$H_t(X) = H_t(Y) \quad \text{при всех } t \in T.$$

Вообще говоря, ответ отрицательный. Однако как показано Г. Крамером, можно изменить постановку задачи и получать (при каждом  $t \in T$ ) представление  $H_t(X)$  в виде суммы ортогональных друг другу пространств  $H_t(Y_n)$ , порожденных некоторыми процессами  $Y_n = \{Y_n(t), t \in T\}$ ,  $n = 1, \dots, N$  ( $N \leq \infty$ ). Такого рода представления играют важную роль при исследовании вопросов об абсолютной непрерывности и сингулярности распределений случайных процессов.

Стохастическое спектральное представление (38) можно получить, опираясь на теорию операторов в гильбертовом пространстве  $H$ . Для этого напомним, что *изометрический* оператор  $U$  (т. е. такой, что  $(Ux, Uy) = (x, y)$  при всех  $x, y \in H$ ), отображающий  $H$  на себя, называется *унитарным*. Справедлив следующий классический результат.

**Теорема 26** (Стоун). Пусть  $\{U_t, t \in \mathbb{R}\}$  — группа унитарных операторов в гильбертовом пространстве  $H$  ( $U_t U_s = U_{s+t}$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$ ) и функции  $t \mapsto (\xi, U_t \eta)$  непрерывны при всех  $\xi, \eta \in H$ . Тогда для каждого  $t \in \mathbb{R}$

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} E(d\lambda),$$

где  $E(\cdot)$  — операторно-значная мера со значениями в ортогональных проекторах.

О том, как определяется этот интеграл можно прочесть, например, в [64].

Для стационарного в широком смысле процесса  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ , применив теорему Стоуна к группе унитарных операторов сдвига  $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$  на гильбертовом пространстве  $H = H(X)$  (см. доказательство теоремы 12), получаем, что

$$X(t) = S_t X(0) = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} E(d\lambda) \right) X(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} Z(d\lambda) \quad \text{для } t \in \mathbb{R},$$

где  $Z(B) = E(B)X(0)$  — ортогональная случайная мера, заданная на борелевских множествах. Тем самым, получено иное (нежели в теореме Крамера (теорема 9)) доказательство спектрального представления стационарных процессов (сравните с (38)). Приведенный способ получения спектрального представления, опирающийся на теорему Стоуна, был предложен А.Н. Колмогоровым (см. [64]). Аналогичным образом изучаются стационарные процессы с дискретным временем, а также случайные поля на  $\mathbb{Z}^d$  и  $\mathbb{R}^d$ .

Отметим, что использованный в главе VII подход к каноническому представлению случайных функций, основанный на теореме Карунена, действует для процессов  $X = \{X(t), t \in T\}$ , заданных на произвольном параметрическом множестве  $T$ .

Различным аспектам исследования векторных процессов и полей посвящены монографии [6, 44, 64, 80, 87, 134, 186].

Рассмотрим кратко некоторые вопросы, связанные с преобразованиями (главным образом, стационарных) процессов.

Пусть имеется устройство (“система”)  $A$ , на вход которой подается процесс  $X = \{X(t), t \in T\}$  и на выходе получается процесс  $Y = \{Y(t), t \in S\}$ , который образно можно было бы представить в виде  $Y = AX$ . Если считать, что  $A$  — отображение одного функционального пространства в другое, то надо потребовать, чтобы (почти все) траектории процесса  $X$  лежали бы в области определения  $D_A$  отображения  $A$  и чтобы действие этого отображения на эти траектории приводило также к случайному процессу (в смысле выполнения должных требований измеримости). Будем предполагать, что действие преобразования (отображения)  $A$  на процесс  $X$  приводит в каждый момент  $t \in S$  к случайной величине  $Y(t)$ .

Введем операцию дифференцирования в среднем квадратическом. Производную  $X'(t)$  (комплекснозначного)  $L^2$ -процесса  $X$ , заданного в окрестности точки  $t \in \mathbb{R}$ , определим как производную функции  $X(t)$  со значениями в банаховом (гильбертовом) пространстве  $L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , т.е. как такой случайный элемент (обозначаемый  $X'(t)$ ), для которого

$$E \left| X'(t) - (X(t+h) - X(t))/h \right|^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (95)$$

Данный подход позволяет создать содержательное *исчисление* (с аналогом классической формулы Ньютона–Лейбница). Отметим, что если вместо сходимости в среднем квадратическом (95) требовать лишь сходимость по вероятности, то соответствующее исчисление не приводит бы к плодотворной теории как показывает утверждение следующего упражнения.

- 28.** Докажите, что для пуассоновского процесса  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  постоянной интенсивности  $\lambda > 0$  производная по вероятности в каждой точке  $t \in \mathbb{R}_+$  равна нулю п. н.

В дальнейшем мы рассматриваем лишь производные в *среднем квадратическом*, не оговаривая этого специально. При этом, как обычно, производная  $k$ -го порядка в точке  $t$  определяется (если она существует) по значениям процесса  $X^{(k-1)}(t)$  в окрестности этой точки.

- 29.** Пусть  $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$  — это  $L^2$ -процесс с ковариационной функцией  $r(s, t)$ . Докажите, что  $X'(t)$  существует в точке  $t \in (a, b)$  тогда и только тогда, когда существует *обобщенная вторая производная*  $\frac{\partial^2 r(s, t)}{\partial s \partial t}$  в точке  $(t, t)$  (с теорией обобщенных функций это никак не связано), где по определению

$$\frac{\partial^2 r(s, t)}{\partial s \partial t} := \lim_{h, u \rightarrow 0} (r(s+h, t+u) - r(s+h, t) - r(s, t+u) + r(s, t)) / hu.$$

Аналогичное утверждение справедливо и для производной в концевых точках, если иметь в виду односторонние производные.

Для доказательства этого и подобных утверждений ключевую роль играет следующая элементарная

**Лемма 5.** Функция  $f(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , принимающая значения в гильбертовом пространстве  $H$  со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , имеет предел в точке  $t_0 \in [a, b]$  тогда и только тогда, когда существует предел  $\lim_{s, t \rightarrow t_0} \langle f(s), f(t) \rangle$ .

- 30.** Докажите, что у стационарного процесса  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  производная  $X^{(k)}(t)$  существует в каждой точке  $t$  тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2k} G(d\lambda) < \infty,$$

где  $G$  — спектральная мера  $X$ . Будет ли процесс  $X^{(k)}$  стационарен? Если будет, то каково его спектральное представление?

Наряду с дифференцированием важный пример *линейной операции*  $A$ , т. е. такой, что

$$A(\alpha X + \beta V) = \alpha AX + \beta AV$$

для  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  и  $X, V \in D_A$ , дает *интегрирование в среднем квадратическом случайных процессов*.

Будем для  $L^2$ -процесса  $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$  под интегралом  $\int_{[a, b]} X(t) dt$  (или  $\int_a^b X(t) dt$ ) понимать интеграл Римана (если он определен) по отрезку  $[a, b]$  от случайной функции  $X_t$ , т. е. берется предел в пространстве  $L^2(\Omega)$  интегральных сумм

Римана. Подробнее об интегрировании и дифференцировании в среднем квадратическом см., например, [12; гл. 2].

*Несобственные* интегралы по всей прямой  $\mathbb{R}$  вводятся стандартным образом как пределы (если таковые существуют) в соответствующем смысле интегралов по отрезкам  $[a, b]$ , когда  $a \rightarrow -\infty$  и  $b \rightarrow \infty$ .

Для  $L^2$ -процесса  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  с ковариационной функцией  $r = r(s, t)$  и комплекснозначной функции  $h$ , заданной на  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , положим

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, s) X(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (96)$$

Нетрудно убедиться, что процесс  $Y(t)$  в (96) определен и конечен (п. н.), если *конечен* несобственный интеграл Римана

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, s) r(s, u) \overline{h(t, u)} ds du.$$

Функция  $h = h(s, t)$ , фигурирующая в (96), называется в приложениях *импульсной переходной функцией* системы. Если формально подставить в интеграл (96) вместо  $X(s)$  функцию Дирака  $\delta_s$ , то получим  $Y(t) = h(t, s)$ . Другими словами,  $h(t, s)$  есть *отклик* системы в момент  $t$  на  $\delta$ -*импульс*, подаваемый на ее вход в момент  $s$ .

Частным случаем процессов вида (96) являются однородные по времени процессы вида

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s) X(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (97)$$

Соответствующие системы (“фильтры”), на выходе которых возникает процесс  $Y = \{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ , определяются *импульсной переходной функцией*  $h = h(s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , или функцией

$$H(i\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) e^{-i\lambda s} ds, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

называемой *частотной характеристикой* или *коэффициентом передачи*. Если функция  $h = h(s)$  интегрируема по Лебегу, то функция  $H = H(i\lambda)$ , очевидно, определена. Частотная характеристика имеет следующий наглядный смысл. Если  $h \in L^1(\mathbb{R})$ , то для каждого  $\lambda \in \mathbb{R}$  *неслучайная* функция  $X(s) = e^{i\lambda s}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , будет *собственной функцией* преобразования (97), отвечающей *собственному значению*  $H(i\lambda)$ . Это делает понятным смысл следующего упражнения.

- 31.** Пусть на вход фильтра (97) подается стационарный в широком смысле процесс  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ , имеющий спектральное представление (38) с ортогональной случайной мерой  $Z$ , структурная мера которой есть  $G$ . Докажите, что если частотная характеристика фильтра  $H(i\lambda) \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), G)$ , то ковариационная функция процесса  $Y = \{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$  имеет вид

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} |H(i\lambda)|^2 G(d\lambda), \quad t \in \mathbb{R},$$

а сам процесс  $Y$  допускает следующее спектральное представление:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} H(i\lambda) Z(d\lambda), \quad t \in \mathbb{R}.$$



Вспоминая энергетическую интерпретацию *спектральной меры*, видим, что функция  $|H(i\lambda)|^2$  показывает, *во сколько раз изменяется энергия* простых гармонических составляющих процесса  $X$  при прохождении через фильтр с частотной характеристикой  $H = H(i\lambda)$ .

**32.** Какая импульсная переходная функция отвечает *полосовому фильтру*, т. е. фильтру, пропускающему без изменения гармонические составляющие процессов с частотами в полосе  $[a, b]$  (это значит, что  $H(i\lambda) = \mathbf{1}_{[a, b]}(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ )?

Интересно применение спектральных представлений процессов к *решению дифференциальных уравнений* вида

$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right)Y = Q_m\left(\frac{d}{dt}\right)X, \quad (98)$$

где  $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ ,  $Q_m(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m$  — многочлены с постоянными коэффициентами,  $X$  — заданный стационарный процесс, а неизвестный процесс  $Y = \{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$  предполагается дифференцируемым в среднем квадратическом  $n$  раз в каждой точке  $t \in \mathbb{R}$ . Равенство (98) считается выполненным п. н. при каждом  $t \in \mathbb{R}$ . О том, как решение  $Y$  ищется с помощью некоторого фильтра см., например, [17; с. 282–284].

Аналог уравнения (98), рассмотренного выше для процессов с непрерывным временем, приводит в случае процессов с дискретным временем ( $t \in T \subset \mathbb{Z}$ ) к изучению так называемых *процессов “авторегрессии — скользящего среднего”*, см. подробнее [85; т. 2, с. 586].

В заключение приведем еще один классический результат, относящийся к теории процессов, *стационарных в узком смысле*.

Введем на пространстве  $\mathbb{R}^\infty$  оператор сдвига  $T$ , положив  $Tx = y$ , где

$$x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots), \quad y = (\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots),$$

причем  $y_n = x_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Назовем множество  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$  *инвариантным*, если  $T^{-1}(B) = B$ . Легко видеть, что совокупность инвариантных множеств образует в  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$   $\sigma$ -алгебру, которую обозначим  $\mathcal{I}$ .

Пусть  $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  — стационарный в узком смысле процесс, заданный на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Положим  $\mathcal{I}_X = X^{-1}(\mathcal{I})$ , где  $X$  рассматривается как измеримое отображение  $(\Omega, \mathcal{F})$  в  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ . Тогда  $\mathcal{I}_X$  будет  $\sigma$ -алгеброй в  $\mathcal{F}$ , называемой  *$\sigma$ -алгеброй инвариантных событий процесса  $X$* .

**Теорема 27** (Биркгоф–Хинчин). Пусть  $X = \{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$  — стационарный в узком смысле действительный процесс и  $\mathbf{E}|X_0| < \infty$ . Тогда

$$\lim_{N-M \rightarrow \infty} \frac{1}{N-M} \sum_{t=M+1}^N X(t) = \mathbf{E}(X_0 | \mathcal{I}_X), \quad (99)$$

где предел существует как почти наверное, так и в  $L^1(\Omega)$ .

Говорят, что процесс  $X$  является *эргодическим*, если  $\mathbf{P}(A)$  равно 0 или 1 для любого  $A \in \mathcal{I}_X$ . В этом случае (при выполнении условий теоремы 27) в правой части (99) условное математическое ожидание  $\mathbf{E}(X_0 | \mathcal{I}_X) = \mathbf{E} X_0$  п. н.

Теория стационарных в узком смысле процессов теснейшим образом связана с теорией динамических систем (с изучением преобразований, сохраняющих меру). В качестве введения в эту область исследований можно прочитать гл. V в [85], где, в частности, дано простое доказательство соотношения (99) (при  $M = 0$ ), предложенное А. Гарсиа. Обобщение теоремы 27 на случайные поля содержится в работе [15]. Эргодической теории и динамическим системам посвящены, например, книги [36, 70].

## Глава VIII

### Стохастический интеграл.

### Стохастические дифференциальные уравнения

Стохастический интеграл для простых случайных функций по винеровскому процессу. Конструкция Ито стохастического интеграла для неупреждающих случайных функций. Свойства стохастического интеграла. Формула замены переменных Ито. Уравнение Ланжевена. Процесс Орнштейна–Уленбека. Теорема существования и единственности сильного решения стохастического дифференциального уравнения. Марковость решения стохастического дифференциального уравнения.

§ 1. В классическом анализе существуют различные подходы к операциям интегрирования, приводящие к таким, вообще говоря, отличающимся понятиям, как, например, интегралы Римана, Лебега, Римана–Стилтьеса, Лебега–Стилтьеса, Данжуа, Бохнера, Петтиса, А-интеграл Колмогорова и др.

В теории случайных процессов также рассматриваются разнообразные подходы к интегрированию случайных функций по случайным процессам, случайным мерам, и др., приводящие также к различным конструкциям “стохастических интегралов”.

С одним (и простейшим) типом таких интегралов мы уже имели дело в предыдущей главе, где интегрирование *детерминированных* функций велось по *ортogonalным случайным мерам*  $Z$ . Там же было показано, как с помощью таких интегралов удастся дать стохастическое спектральное представление для стационарных в широком смысле случайных процессов (теорема 9 главы VII).

Если ортогональная случайная мера  $Z$  порождается винеровским процессом  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  (см. пример 1 главы VII) и детерминированный процесс  $f = \{f_t, t \geq 0\}$  принадлежит классу  $L^2 = L^2([0, \infty), \mathcal{B}([0, \infty)), \text{mes})$ , где  $\text{mes}$  — мера Лебега, то соответствующий интеграл  $J(f)$  (см. (VII.14)) обычно записывают в виде

$$J(f) = \int_{[0, \infty)} f_t dW_t \quad (1)$$

или  $J(f) = \int_0^\infty f_t dW_t$ , подчеркивая тем самым аналогию с классическими процедурами интегрирования.

Заметим, что стохастический интеграл в (1) вообще говоря нельзя понимать как *потраекторный* интеграл, т. е. как интеграл Лебега–Стилтьеса при *каждом* фиксированном  $\omega \in \Omega$  ( $W_t = W_t(\omega)$ ), поскольку в силу теоремы 1 главы III траектории винеровского процесса (броуновского движения) имеют Р-п. н. *неограниченные вариации*.

В формуле (1) функция  $f = f_t$ ,  $t \geq 0$ , была *детерминированной*. Однако во многих вопросах стохастического анализа возникает необходимость рассмотрения интегралов типа (1), в которых подынтегральная функция  $f$  является *случайной*:

$$f = f_t(\omega), \quad t \geq 0, \quad \omega \in \Omega. \quad (2)$$

Так, например, при рассмотрении стохастических дифференциальных уравнений (см. далее § 12–18)

$$dY_t = b(t, Y_t) dt + \sigma(t, Y_t) dW_t, \quad (3)$$

понимаемых как условная запись стохастических интегральных уравнений

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b(s, Y_s) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s) dW_s, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

сама собой возникает необходимость в придании смысла “стохастическим интегралам”  $\int_0^t \sigma(s, Y_s) dW_s(\omega)$ , являющимися интегралами типа (1) от случайной функции  $f \mathbf{1}_{(0,t]}$ .

При первом чтении желательно ознакомиться с конструкцией интеграла Ито на отрезке  $[0, T]$  и свойствами этого интеграла (§ 2–6), а также с формулой замены переменных (теорема 5 § 11), позволяющей легко решить классическое уравнение Ланжевена (§ 13). Следует разобраться с формулировкой теоремы существования и единственности (сильного) решения стохастического дифференциального уравнения (§ 17). Заслуживает внимания § 18, в котором доказывается марковость решения стохастического дифференциального уравнения. К техническим деталям приведенных доказательств можно вернуться позднее.

**§ 2.** На чем, собственно говоря, основана надежда на то, что можно определить “стохастические интегралы” типа  $\int_0^T f_s(\omega) dW_s(\omega)$  от *случайных* функций  $f$  (*интеграндов*) по винеровскому процессу  $W$  (играющему роль *интегратора*), в то время как ранее при определении стохастических интегралов по  $L^2$ -процессам с ортогональными приращениями предполагалось, что интегранды  $f$  суть детерминированные функции?

Дело здесь обстоит следующим образом. Винеровский процесс, как и всякий квадратично интегрируемый мартингал, входит в подкласс  $L^2$ -процессов с ортогональными приращениями. Но понятно, что, *сужая* класс интеграторов, можно рассчитывать на то, что соответствующий класс интеграндов окажется *шире* рассматриваемого ранее множества детерминированных функций  $f$ .

В случае винеровского процесса  $W$  конструкция стохастических интегралов от случайных функций  $f$ , удовлетворяющих приводимым ниже условиям измеримости и интегрируемости, была дана японским математиком К. Ито. Это объясняет, почему такие интегралы далее обозначаются  $I_t(f)$  ( $I$  — от Ito).

Сама идея Ито построения стохастического интеграла в сущности та же, что и в случае процессов с ортогональными приращениями: (1) сначала интегралы определяются (вполне естественным образом) для кусочно постоянных “неупреждающих” случайных функций, а затем (2) для более общих функций  $f$  путем их аппроксимации

простыми функциями  $f^{(n)}$  и, основываясь на идеях изометрии, определяются стохастические интегралы  $I_T(f)$  как пределы (в среднеквадратическом смысле) величин  $I_T(f^{(n)})$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Эта конструкция работает (с привлечением разложения Дуба–Мейера) не только в случае винеровского процесса, но также и для других классов процессов, включая класс квадратично интегрируемых мартингалов, к которому принадлежит винеровский процесс.

**§ 3.** Пусть  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  — винеровский процесс (броуновское движение), заданный на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . По-прежнему,  $\mathcal{F}_t^W$  обозначает  $\sigma$ -алгебру, порожденную величинами  $W_s$ ,  $0 \leq s \leq t$ . Положим  $\mathcal{F}^W = \sigma\{W_t, t \geq 0\}$ . Будем считать, что вероятностное пространство полно и  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}^W$ ,  $\mathcal{F}_t^W$  ( $t \geq 0$ ) расширены классом  $\mathcal{N}$  событий нулевой вероятности. Итак, рассматривается естественная фильтрация  $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ , удовлетворяющая обычным условиям (см. определение 10 главы IV).

Займемся сначала конструкцией стохастического интеграла

$$I_T(f) = \int_{(0, T]} f_s(\omega) dW_s(\omega) \quad (5)$$

для некоторого фиксированного  $T > 0$ , а затем определим стохастические интегралы

$$I_t(f) = \int_{(0, t]} f_s(\omega) dW_s(\omega) \quad (6)$$

уже для всех  $t \in [0, \infty)$ .

Если  $f$  является *простой детерминированной* функцией вида  $f_t(\omega) = I_{(a, b]}(t)$ , где  $t \in [0, T]$ ,  $(a, b] \subset (0, T]$ , то под стохастическим интегралом  $I_T(f)$  понимают случайную величину

$$I_T(f) = W_b(\omega) - W_a(\omega),$$

в записи  $I_T(f)$  аргумент  $\omega$  опускается.

Пусть теперь функция  $f$  является простой, но несколько более общего вида:

$$f_t(\omega) = \varphi(\omega) \mathbf{1}_{(a, b]}(t), \quad (7)$$

где  $\varphi(\omega)$  — некоторая случайная величина, тогда естественно положить

$$I_T(f) = \varphi(\omega) [W_b(\omega) - W_a(\omega)]. \quad (8)$$

Если функция  $f$  является простой вида

$$f_t(\omega) = \varphi_0(\omega) \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i(\omega) \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

где  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ ,  $n \geq 2$  и  $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$  — случайные величины, то снова естественно определить

$$I_0(f) = 0, \quad I_t(f) = \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i(\omega) [W_{t_{i+1} \wedge t}(\omega) - W_{t_i \wedge t}(\omega)] \quad \text{для } 0 < t \leq T. \quad (10)$$

Другие варианты простых функций обсуждаются в дополнении к этой главе.

Оказывается, чтобы ввести интеграл  $I_t(f)$  для более широкого запаса функций  $f$ , да к тому же с “хорошими” свойствами (см. далее лемму 1), на функции  $\varphi_i(\omega)$  в (9) надо налагать более жесткие условия измеримости.

Напомним, что действительная случайная функция  $f = \{f_t, t \in [0, T]\}$  называется *согласованной* с фильтрацией (поток)  $\mathbb{F}_T^W = (\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}$ , если при каждом  $t \in [0, T]$  величина  $f_t$  является  $\mathcal{F}_t^W$ -измеримой. Разумеется, в этом определении вместо естественной фильтрации  $\mathbb{F}_T^W$  можно использовать другую фильтрацию:  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ , а вместо отрезка  $[0, T]$  — иной промежуток, например,  $[0, \infty)$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что случайная функция  $f = \{f_t, t \in [0, T]\}$  является *неупреждающей* по отношению к потоку  $\mathbb{F}_T^W$ , если она согласована с  $\mathbb{F}_T^W$  и  $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}^W$ -измерима по паре переменных  $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ . Класс таких случайных функций обозначим  $\mathcal{A}_T$ .

В случае простых функций  $f$  вида (9) их принадлежность классу  $\mathcal{A}_T$  равносильна тому, что случайные величины  $\varphi_i(\omega)$  в (9) являются  $\mathcal{F}_{t_i}^W$ -измеримыми. Обозначим класс таких простых функций  $\mathcal{A}_T^0$ .

Полезно заметить, что простые функции  $f$  допускают, вообще говоря, неоднозначное представление в виде (9). Но как и при определении соответствующих интегралов  $J(f)$  показывается, что значения  $I_t(f)$ ,  $t \in [0, T]$ , не зависят от способа представления функции  $f$  в виде (9).

Следующее предложение описывает основные свойства стохастических интегралов  $I_t(f)$ ,  $t \in [0, T]$ , берущихся от простых функций.

**Лемма 1.** Пусть на отрезке  $[0, T]$  заданы простые неупреждающие функции  $f = f_t(\omega)$ ,  $t \in [0, T]$ , вида (9) и  $g = g_t(\omega)$ ,  $t \in [0, T]$ , аналогичной структуры:

$$g_t(\omega) = \psi_0(\omega) \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=1}^{n-1} \psi_j(\omega) \mathbf{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(t). \quad (11)$$

Пусть все случайные величины  $\varphi_i(\omega)$  и  $\psi_j(\omega)$  имеют конечный второй момент.

Тогда стохастические интегралы  $I_t(f)$  и  $I_t(g)$ ,  $t \in [0, T]$ , обладают следующими свойствами:

(а)  $(I_t(f))_{t \in [0, T]}$  и  $(I_t(g))_{t \in [0, T]}$  являются непрерывными квадратично интегрируемыми мартингалами с нулевым средним и

$$\mathbb{E} I_t(f) I_t(g) = \mathbb{E} \left[ \int_0^t f_s(\omega) g_s(\omega) ds \right] \quad (12)$$

при всех  $t \in [0, T]$ ; в частности,

$$\mathbb{E} I_t^2(f) = \mathbb{E} \left[ \int_0^t f_s^2(\omega) ds \right]. \quad (13)$$

(б) Для каждого  $t \in [0, T]$  н. н.

$$\int_0^t f_s(\omega) dW_s(\omega) = \int_0^T f_s(\omega) \mathbf{1}_{(0, t]}(s) dW_s(\omega), \quad (14)$$

то есть,  $I_0(f) = 0$  и при  $0 < t \leq T$

$$I_t(f) = I_T(f \mathbf{1}_{(0, t]}) \quad \text{н. н.} \quad (15)$$

**Доказательство.** Непрерывность процесса  $(I_t(f))_{t \in [0, T]}$  следует непосредственно из определения (10). Так как (п. н.)

$$\mathbf{E} [\varphi_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) | \mathcal{F}_{t_i}^W] = \varphi_i \mathbf{E} [W_{t_{i+1}} - W_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}^W] = 0, \quad (16)$$

то процесс  $(I_t(f))_{t \in [0, T]}$  является мартингалом, к тому же квадратично интегрируемым, поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [\varphi_i^2(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] &= \mathbf{E} [\varphi_i^2 \mathbf{E} [(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 | \mathcal{F}_{t_i}^W]] = \\ &= \mathbf{E} [\varphi_i^2 \mathbf{E} [W_{t_{i+1}} - W_{t_i}]^2] = (\mathbf{E} \varphi_i^2)(t_{i+1} - t_i). \quad \square \end{aligned}$$

Свойства (12) и (13) легко выводятся с учетом того, что для  $i < j$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [\varphi_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\psi_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] &= \\ &= \mathbf{E} [\varphi_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\mathbf{E} [\psi_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) | \mathcal{F}_{t_j}^W]] = 0. \end{aligned}$$

Наконец, свойство (b) следует непосредственно из (9) и (10).

§ 4. Введем пространство  $\mathcal{M}_T^2$ , состоящее из квадратично интегрируемых мартингалов  $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$ . Иначе говоря, при каждом  $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} M_t &\text{ — } \mathcal{F}_t^W\text{-измеримы,} \\ \mathbf{E} (M_t | \mathcal{F}_s^W) &= M_s \quad \text{п. н.}, \\ \mathbf{E} M_t^2 &< \infty. \end{aligned}$$

Будем предполагать также, что все траектории рассматриваемых мартингалов  $M \in \mathcal{M}_T^2$  непрерывны справа.

В пространстве  $\mathcal{M}_T^2$  введем скалярное произведение

$$(M, N) = \mathbf{E} M_T N_T \quad (17)$$

и норму

$$\|M\|_{\mathcal{M}_T^2} = (\mathbf{E} M_T^2)^{1/2}. \quad (18)$$

Отметим ряд нужных нам свойств мартингалов из пространства  $\mathcal{M}_T^2$ .

**Лемма 2.** а) Пространство  $\mathcal{M}_T^2$  является гильбертовым (с введенным скалярным произведением).

б) Пусть последовательность мартингалов  $M^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , сходится в  $\mathcal{M}_T^2$  (по норме  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_T^2}$ ) к мартингалу  $M$ . Тогда

$$\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |M_t^{(n)} - M_t|^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (19)$$

с) Множество непрерывных мартингалов из  $\mathcal{M}_T^2$  образует замкнутое подпространство (в  $\mathcal{M}_T^2$ ).

**Доказательство.** Чтобы показать, что пространство  $\mathcal{M}_T^2$  является гильбертовым, надо убедиться в том, что оно является полным (всякая фундаментальная последовательность сходится).

Пусть  $\{M^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  — фундаментальная последовательность элементов из  $\mathcal{M}_T^2$ . Ясно, что величины  $M_T^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , образуют фундаментальную последовательность в  $L^2(\Omega)$  — пространстве случайных величин с конечным вторым моментом. В силу полноты этого пространства существует величина  $M_T$  такая, что  $\mathbb{E} |M_T^{(n)} - M_T|^2 \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Обозначим  $M_t = \mathbb{E}(M_T | \mathcal{F}_t^W)$ ,  $t \in [0, T]$ . Из обычных условий, налагавшихся на фильтрацию  $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ , вытекает, что у мартингала  $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$  есть версия, непрерывная справа (которую так и будем обозначать  $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$ ). Следовательно, фундаментальная последовательность мартингалов  $M^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , сходится к квадратично интегрируемому мартингалу  $M = (M_t, \mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}$  (в смысле  $\mathcal{M}_T^2$ ), имеющему непрерывные справа траектории.

Согласно неравенству Дуба для квадратично интегрируемых мартингалов  $M = (M_t)_{t \leq T}$  с непрерывными справа траекториями имеем (см., например, [26], а также теорему 5 главы IV)

$$\mathbb{E} \sup_{t \leq T} |M_t|^2 \leq 4 \mathbb{E} |M_T|^2. \quad (20)$$

Отсюда и доказанного пункта а) непосредственно следует утверждение б).

Для доказательства с) предположим, что  $M^{(n)} = (M_t^{(n)})_{t \in [0, T]}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , являются непрерывными мартингалами из  $\mathcal{M}_T^2$  и  $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$  — непрерывный справа мартингал из  $\mathcal{M}_T^2$ , причем  $\mathbb{E} |M_T^{(n)} - M_T|^2 \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Отсюда следует, что найдется подпоследовательность  $\{n'\} \subseteq \{n\}$  такая, что

$$\sum_{n'} \mathbb{E} \left[ \sup_{t \leq T} |M_t^{(n')} - M_t|^2 \right] < \infty \quad (21)$$

и, следовательно, в силу неравенства Чебышёва для всякого  $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n'} \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \leq T} |M_t^{(n')} - M_t| \geq \varepsilon \right\} < \infty. \quad (22)$$

Воспользовавшись леммой Бореля–Кантелли, из (22) заключаем, что с вероятностью единица

$$\sup_{t \leq T} |M_t^{(n')} - M_t| \rightarrow 0, \quad n' \rightarrow \infty. \quad (23)$$

По предположению, мартингалы  $M^{(n)}$  имеют непрерывные траектории, а мартингал  $M \in \mathcal{M}_T^2$  и, значит, имеет непрерывные справа траектории. Из равномерной п. н. сходимости (23) вытекает, что мартингал  $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$  также имеет п. н. непрерывные траектории.  $\square$

§ 5. Вернемся к конструкции стохастического интеграла. В пространстве

$$L_T^2 = L^2(\Omega \times [0, T], \mathcal{F}^W \otimes \mathcal{B}([0, T]), \mathbb{P} \otimes \text{mes})$$



рассмотрим совокупность неупреждающих функций  $f = f_t(\omega)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\omega \in \Omega$ . Следовательно, для  $f \in L_T^2 \cap \mathcal{A}_T$

$$\|f\|_{L_T^2}^2 = \mathbb{E} \int_0^T f_t^2(\omega) dt < \infty. \quad (24)$$

Свойство (12) означает, что отображение  $f \mapsto I_T(f)$ , где  $f = f_t(\omega)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\omega \in \Omega$ , есть изометрия подпространства простых функций, принадлежащих  $\mathcal{A}_T^0 \cap L_T^2$ , в подпространство  $\mathcal{M}_T^2$ , состоящее из непрерывных квадратично интегрируемых мартингалов. Поэтому отображение  $f \mapsto I_T(f)$  может быть распространено на замыкание  $\mathcal{A}_T^0 \cap L_T^2$  в  $L_T^2$ .

**Лемма 3.** *Замыкание  $\mathcal{A}_T^0 \cap L_T^2$  (в  $L_T^2$ ) содержит неупреждающие функции  $f$  из  $\mathcal{A}_T \cap L_T^2$ .*

**Доказательство** этого утверждения, следующее из метрической теории функций и состоящее в том, что для  $f \in \mathcal{A}_T \cap L_T^2$  найдется последовательность функций  $f^{(n)}$  из  $\mathcal{A}_T^0 \cap L_T^2$  таких, что

$$\mathbb{E} \int_0^T |f_s^{(n)}(\omega) - f_s(\omega)|^2 ds \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (25)$$

можно прочитать, например, в книге [26; гл. IX, § 5] и здесь не воспроизводится.  $\square$

**§ 6.** Пусть функция  $f \in L_T^2$  является простой ( $f \in \mathcal{A}_T^0 \cap L_T^2$ ). Каждой такой функции был поставлен в соответствие квадратично интегрируемый мартингал  $I(f) = (I_t(f))_{t \in [0, T]}$ , что в более наглядных “интегральных” обозначениях можно записать в виде

$$f \mapsto \left( \int_0^t f_s(\omega) dW_s(\omega) \right)_{t \in [0, T]}. \quad (26)$$

Как уже было отмечено, это отображение является изометрическим отображением  $\mathcal{A}_T^0 \cap L_T^2$  в подпространство пространства  $\mathcal{M}_T^2$ , состоящее из непрерывных мартингалов.

Согласно лемме 3 множество неупреждающих функций  $f$  из  $L_T^2$ , т. е. множество функций  $f \in \mathcal{A}_T \cap L_T^2$ , входит в замыкание множества  $\mathcal{A}_T^0 \cap L_T^2$  (в  $L_T^2$ ). Поэтому каждой такой функции  $f \in \mathcal{A}_T \cap L_T^2$  можно поставить в соответствие квадратично интегрируемый мартингал  $(I_t(f))_{t \in [0, T]}$ , который естественно также обозначать  $\left( \int_0^t f_s(\omega) dW_s(\omega) \right)_{t \in [0, T]}$ .

**Теорема 1.** *Для всякой функции  $f \in \mathcal{A}_T \cap L_T^2$  стохастический интеграл Ито*

$$I_t(f) = \int_0^t f_s(\omega) dW_s(\omega)$$

*определен для любых  $t \in [0, T]$  ( $I_0(f) = 0$ ). Процесс  $(I_t(f))_{t \in [0, T]}$  является непрерывным квадратично интегрируемым мартингалом с нулевым средним. При этом для всех  $f$  и  $g$  из класса  $\mathcal{A}_T \cap L_T^2$  справедливы соотношения (12)–(14), установленные ранее для простых функций из  $\mathcal{A}_T \cap L_T^2$ .*

**Доказательство.** Возможность определить величины  $I_t(f)$  обеспечивают отмеченные выше соображения изометрии. Непрерывность мартингала  $(I_t(f))_{t \in [0, T]}$  (точнее, существование непрерывной модификации) следует из леммы 2. Свойства (12)–(14) вытекают из их справедливости для функций из  $\mathcal{A}_T^0 \cap L_T^2$  и (по свойствам изометрии) для функций из замыкания  $\mathcal{A}_T^0 \cap L_T^2$ , которое в силу леммы 3 заведомо включает в себя множество  $\mathcal{A}_T \cap L_T^2$ .  $\square$

**§ 7.** Обратимся теперь к определению стохастического интеграла на временном промежутке  $[0, \infty)$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  — множество функций  $f = f_t(\omega)$ ,  $t \in [0, \infty)$ ,  $\omega \in \Omega$ , таких, что при каждом  $T > 0$  их сужения на  $[0, T] \times \Omega$  входят в класс  $\mathcal{A}_T \cap L_T^2$ .

**Теорема 2.** 1) Пусть  $f \in \mathcal{A}$ . Тогда существует непрерывный квадратично интегрируемый мартингал  $M = (M_t)_{t \in [0, \infty)}$  (относительно потока  $\mathbb{F}^W$ ) такой, что  $M_0 = 0$  и для всех  $t > 0$

$$M_t = I_t(f) \quad \left( = \int_0^t f_s(\omega) dW_s(\omega) \right). \quad (27)$$

Кроме того, для  $f$  и  $g$  из класса  $\mathcal{A}$  при каждом  $t > 0$  справедливы соотношения (12) и (13), а при любом  $T > 0$  и всех  $t \in [0, T]$  имеет место формула (14).

**Доказательство.** Для всякого  $n \in \mathbb{N}$  согласно теореме 1 определены интегралы

$$M_t^{(n)} \int_0^t f_s(\omega) dW_s(\omega), \quad t \in [0, n]. \quad (28)$$

При этом в соответствии со свойством (14) имеем  $M_t^{(n-1)} = M_t^{(n)}$  (Р-п. н.) для всякого  $t \in [0, n-1]$ . Определим теперь для всех  $t \in [0, \infty)$  процесс  $M = (M_t)_{t \geq 0}$ , полагая  $M_0 = 0$  и  $M_t = M_t^{(n)}$  при  $t \in (n-1, n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Ясно, что так определенный процесс  $M$  является мартингалом. Поскольку  $M^{(n)}$  — непрерывные мартингалы, то  $M$  является также непрерывным процессом за исключением, быть может, тех элементарных исходов  $\omega$ , которые принадлежат множеству  $\bigcup_{n \geq 1} \{\omega: M_{n-1}^{(n)}(\omega) \neq M_{n-1}^{(n-1)}(\omega)\}$ . Поскольку  $M_{n-1}^{(n)}(\omega) = M_{n-1}^{(n-1)}(\omega)$  (Р-п. н.), то это множество имеет нулевую вероятность.

Тем самым, процесс  $M$  имеет (Р-п. н.) непрерывные траектории. (Если на указанном множестве переопределить  $M$ , полагая его равным, скажем, нулю, то такой новый процесс будет уже иметь непрерывными все траектории.)

Остальные свойства  $(I_t(f))_{t \geq 0}$  очевидны.  $\square$

**§ 8.** Обсудим некоторые детали конструкции интеграла Ито. Отправляясь от непрерывного квадратично интегрируемого мартингала  $I_t(f)$ , определенного согласно формуле (10) для простых функций  $f$  класса  $\mathcal{A}_T \cap L_T^2$ , можно реализовать построение интеграла Ито, не обращаясь к формулам (20) и (21). А именно, наличие непрерывной модификации процесса  $\{I_t(f), t \in [0, T]\}$  нетрудно установить с помощью следствия 6 главы IV. Достаточно рассмотреть фундаментальную в  $L_T^2$  последовательность простых функций  $f_n \in \mathcal{A}_T^0 \cap L_T^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) и, выбрав должную возрастающую подпоследовательность  $\{n_k\}$ , оценить сверху  $\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} |I(f_{n_{k+1}}) - I(f_{n_k})| > k^{-2}\right)$  для  $k \in \mathbb{N}$ , а затем воспользоваться леммой Бореля–Кантелли.

Свойство неупреждаемости функций  $f$ , для которых введен интеграл Ито, является ключевым при обеспечении “хороших” свойств этого интеграла. В то же время имеются близкие понятия измеримости, как показывает следующее определение.

**Определение 2.** Пусть  $\mathbb{F}_T = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  — некоторый поток  $\sigma$ -алгебр в вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Действительная случайная функция  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$  называется *прогрессивно измеримой* (по отношению к  $\mathbb{F}_T$ ), если для любого  $t \in [0, T]$  отображение

$$(s, \omega) \mapsto (X_s(\omega), \omega), \quad \text{где } (s, \omega) \in [0, t] \times \Omega,$$

является  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -измеримым. Другими словами, сужение функции  $X$  на  $[0, t] \times \Omega$  должно быть  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -измеримым при каждом  $t \in [0, T]$ .

Легко видеть, что любая прогрессивно измеримая по отношению к потоку  $\mathbb{F}_T$  функция  $f = f_t(\omega)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\omega \in \Omega$ , будет неупреждающей по отношению к этому потоку (в определении 1 вместо  $\mathbb{F}_T^W$  берется  $\mathbb{F}_T$ ). Разумеется, данные выше определения переносятся на процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$ . Представляет интерес следующий результат.

**Теорема 3** (Чжун и Дуб; см., например, [148; с. 5]). Пусть  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  — неупреждающий действительный процесс по отношению к фильтрации  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  (т. е. согласованный с  $\mathbb{F}$  и  $\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F}$ -измеримый). Тогда  $X$  имеет прогрессивно измеримую модификацию.

Простое достаточное условие прогрессивной измеримости содержит

**Теорема 4.** Пусть согласованный с фильтрацией  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  действительный процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  имеет траектории п. н. непрерывные слева на  $(0, \infty)$  (или п. н. непрерывные на  $[0, \infty)$ ). Тогда у процесса  $X$  существует прогрессивно измеримая модификация с теми же свойствами траекторий.

**Доказательство**, основанное на построении должных аппроксимаций  $X$  прогрессивно измеримыми процессами  $X_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) и применении леммы 5 главы I, оставляем в качестве легкого упражнения.

Отметим, что вместо естественной фильтрации броуновского движения  $\mathbb{F}_T^W$  при построении интеграла Ито (т. е. при задании  $I_t(f)$ ,  $t \in [0, T]$ , формулой (10) для простых функций  $f$  вида (9) из класса  $\mathcal{A}_T^0 \cap L_T^2$  и распространении этого интеграла на замыкание  $\mathcal{A}_T^0 \cap L_T^2$  в пространстве  $L_T^2$ ) можно использовать более общую фильтрацию  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . В этой связи напомним следующее определение.

**Определение 3.** Говорят, что  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  — винеровский процесс относительно фильтрации  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , если процесс  $W$  согласован с  $\mathbb{F}$ , имеет п. н. непрерывные траектории,  $W(0) = 0$  п. н. и для всех  $0 \leq s < t < \infty$

$$W(t) - W(s) \perp \mathcal{F}_s, \quad W(t) - W(s) \sim N(0, t - s),$$

где “ $\perp$ ” обозначает независимость.

Использование более общей фильтрации  $\mathbb{F}$ , нежели  $\mathbb{F}^W$ , предоставляет дополнительные возможности. Например, в случае естественной фильтрации измеримость

случайной величины  $\zeta$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_0$  означала бы, что  $\zeta = \text{const}$  п. н. При изучении стохастических дифференциальных уравнений, выбирая общую фильтрацию  $\mathbb{F}$  (как правило, удовлетворяющую *обычным условиям*), мы сможем в качестве начальных условий рассматривать не только константы. В частности, если случайная величина  $\xi \sim \mathcal{F}^W$ , где  $\mathcal{F}^W = \sigma\{\mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$ , то  $W$  будет винеровским процессом относительно потока  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_t = \sigma\{\mathcal{F}_t^W, \sigma\{\xi\}\}$ ,  $t \geq 0$ .

Формула (10) показывает, что располагая функцией  $f$ , заданной на  $[0, T]$ , мы фактически берем интеграл по промежутку  $(0, T]$ , основываясь на поведении этой функции при  $t \in (0, T]$ . Исследуя стохастические дифференциальные уравнения, мы увидим, что естественно использовать процессы, определенные на промежутке изменения  $t$ , включающем левый конец, чтобы задавать начальные условия.

**§ 9.** Для того чтобы привести пример вычисления интеграла Ито, установим вспомогательный результат.

**Лемма 4.** Пусть прогрессивно измеримая по отношению к потоку  $\mathbb{F}_T$  функция  $f = f(t, \omega)$ , где  $t \in [0, T]$ ,  $\omega \in \Omega$ , является непрерывной в среднем квадратическом. Тогда

$$\int_0^T f(t, \omega) dW_t = \text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k^{(n)}, \omega) \left( W(t_{k+1}^{(n)}) - W(t_k^{(n)}) \right), \quad (29)$$

где  $W$  — броуновское движение относительно  $\mathbb{F}_T$  и  $\text{l. i. m.}$  (предел в среднем квадратическом) берется при измельчении разбиений вида  $0 = t_0^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = T$ , т. е. когда

$$\delta_n = \max_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (30)$$

**Доказательство.** Функция  $f_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k^{(n)}) \mathbf{1}_{(t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]}$  — это простая функция из  $\mathcal{A}_T^0 \cap L_T^2$ . Для нее согласно (10)

$$I_T(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k^{(n)}) \left( W(t_{k+1}^{(n)}) - W(t_k^{(n)}) \right).$$

Кроме того,

$$\int_0^T \mathbb{E} |f(t, \omega) - f_n(t, \omega)|^2 dt \leq T \sup_{|t-s| \leq \delta_n} \mathbb{E} |f(t, \omega) - f(s, \omega)|^2 \rightarrow 0$$

при  $\delta_n \rightarrow 0$  в силу того, что случайная функция, непрерывная в среднем квадратическом на отрезке, будет равномерно непрерывна в среднем квадратическом на этом отрезке.  $\square$

**Пример 1.** Найдем  $\int_0^T W_t dW_t$ , где  $T > 0$ . Пользуясь леммой 4, получим

$$\int_0^T W_t dW_t = \text{l. i. m.}_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} W(t_k^{(n)}) \left( W(t_{k+1}^{(n)}) - W(t_k^{(n)}) \right) = \frac{W_T^2}{2} - \frac{T}{2}, \quad (31)$$

где  $\delta_n$  фигурирует в (30).

Подчеркнем, что выбор в (29) значений  $f$  в левых концах промежутков  $(t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)})$  играет принципиальную роль. Взяв в рассматриваемом примере значение подынтегральной функции в других промежуточных точках (в правых концах промежутков  $(t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)})$ ), получаем

$$\lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} W(t_{k+1}^{(n)}) (W(t_{k+1}^{(n)}) - W(t_k^{(n)})) = \frac{W_T^2}{2} + \frac{T}{2}. \quad (32)$$

§ 10. Пусть  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  — винеровский процесс относительно фильтрации  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  и пусть прогрессивно измеримая функция  $f$  такова, что при всех  $t \geq 0$

$$\mathbb{E} \int_0^t f^2(s) ds < \infty, \quad (33)$$

а прогрессивно измеримая функция  $g: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  такова, что

$$\mathbb{P} \left( \int_0^t |g(s, \omega)| ds < \infty \right) = 1, \quad t \geq 0. \quad (34)$$

Будем говорить, что п. н. непрерывный на  $[0, \infty)$  действительный процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  допускает “стохастический дифференциал”

$$dX_t = f(t, \omega) dW_t + g(t, \omega) dt, \quad (35)$$

если  $X_0 \in \mathcal{F}_0 \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$  и с вероятностью 1 сразу для всех  $t \geq 0$

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, \omega) dW_s + \int_0^t g(s, \omega) ds \quad (36)$$

(винеровский процесс  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  согласован с фильтрацией  $\mathbb{F}$ ). В силу налагаемых условий на функции  $f$  и  $g$  правая часть (36) определена и дает п. н. непрерывный процесс.

**Определение 4.** Если выполнено (36), то говорят, что  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  является процессом Ито.

**Замечание 1.** Если действительные процессы  $X = \{X_t, t \geq 0\}$ ,  $U = \{U_t, t \geq 0\}$  имеют стохастические дифференциалы, т. е. наряду с (35)

$$dU_t = \sigma(t, \omega) dW_t + b(t, \omega) dt$$

(с аналогичными свойствами измеримости, как и для функций, входящих в (35)), то, очевидно, существует  $d(X_t + U_t)$ , причем

$$d(X_t + U_t) = dX_t + dU_t = (f + \sigma)dW_t + (g + b) dt.$$

Разумеется, все сказанное очевидным образом переформулируется на случай, когда  $t \in [u, v]$ ,  $0 \leq u < v < \infty$ .

§ 11. Краеугольным камнем всего стохастического исчисления является

**Теорема 5** (формула Ито). Пусть процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  с действительными значениями имеет стохастический дифференциал (35) (функции  $f$  и  $g$  обладают указанными выше свойствами). Пусть функция  $H: [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такова, что существуют непрерывные производные  $\partial H / \partial t$ ,  $\partial^2 H / \partial x^2$ . Пусть также процесс  $h = \left\{ f(s, X_s) \frac{\partial H}{\partial x}(s, X_s), s \geq 0 \right\} \in \mathcal{A}$ . Тогда процесс  $Y_t = \{H(t, X_t), t \geq 0\}$ , имеет стохастический дифференциал

$$dY_t = \frac{\partial H}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial H}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2, \quad (37)$$

где  $(dX_t)^2$  определяется из (35) по следующему правилу “оперирования с дифференциалами”:

$$dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0, \quad dW_t \cdot dW_t = dt. \quad (38)$$

Иначе говоря, п. н. для всех  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} H(t, X_t) = H(0, X_0) &+ \int_0^t f(s, X_s) \frac{\partial H}{\partial x}(s, X_s) dW_s + \\ &+ \int_0^t \left( \frac{\partial H}{\partial t}(s, X_s) + g \frac{\partial H}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2} f^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(s, X_s) \right) ds. \end{aligned} \quad (39)$$

Этот фундаментальный результат удивителен в том отношении, что в выражении для *первого* дифференциала возникает *вторая* производная функции  $H$ .

Условие  $h \in \mathcal{A}$  в теореме 5 требуется лишь для того, чтобы был определен стохастический интеграл по винеровскому процессу в (39). В дополнении к этой главе показано как расширить класс функций, для которых определено интегрирование по Ито. Тогда оказывается, что условие  $H \in C^{1,2}$  является достаточным для выполнения формулы Ито. Точнее говоря, это условие уже обеспечивает существование стохастического дифференциала и справедливость формулы (39), в которой стохастический интеграл понимается в этом более широком смысле. Мы не будем доказывать приведенную теорему, поскольку даже для более узкого класса функций  $H$  доказательство весьма длинное (см., например, [12; § 12.3]). Кроме того, на сегодняшний день имеются далеко идущие ее обобщения, например, для процессов, являющихся непрерывными семимартингалами со значениями в  $\mathbb{R}^m$ . Мы рекомендуем ознакомиться с теоремами 15.19, 15.21 в [146]. Некоторые обобщения формулы Ито рассматриваются в дополнении к этой главе.

§ 12. Покажем, как может использоваться формула Ито. Вернемся к примеру 1.

Воспользуемся теоремой 5, положив  $X_t = W_t$  и  $H(t, x) = \frac{1}{2}x^2$ . Очевидно, все условия этой теоремы выполнены. Тогда для  $Y_t = H(t, W_t) = \frac{1}{2}W_t^2$  имеем

$$dY_t = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial x} dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} (dW_t)^2 = 0 + W_t dW_t + \frac{1}{2} (dW_t)^2 = W_t dW_t + \frac{1}{2} dt.$$

Следовательно,

$$d\left(\frac{1}{2}W_t^2\right) = W_t dW_t + \frac{1}{2} dt.$$

Таким образом, в соответствии с интегральной формой записи стохастического дифференциала (см. (36)) и так как  $W_0 = 0$ , получаем

$$\frac{1}{2}W_t^2 = \int_0^t W_s dW_s + \frac{1}{2} t, \quad t \geq 0, \quad (40)$$

т. е. другим способом приходим к (31).

§ 13. Прежде чем излагать некоторые общие результаты о *стохастических дифференциальных уравнениях*, мы обратимся к одному частному, но важному случаю, связанному с описанием *движения частицы в жидкой среде*. Рассмотрим уравнение

$$m\dot{v} = -\beta v + \text{“шум”}, \quad t \geq 0, \quad (41)$$

где  $m$  — масса частицы,  $v$  — ее скорость, параметр  $\beta > 0$  характеризует вязкость среды. В соответствии с физическими представлениями в уравнении (41) “сила  $m\dot{v}$ ”, тормозящая частицу, пропорциональна “скорости  $v$ ”, а наличие “шума” связано с хаотическими соударениями данной частицы с молекулами среды (вследствие теплового движения последних).

Посмотрим как можно интерпретировать уравнение (41), если в качестве шума попытаться использовать, например, “процесс”  $\dot{W}$ , где  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  — броуновское движение. Согласно теореме 1 главы III, выписанная выше производная  $\dot{W}$  не существует у траектории процесса  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  ни в одной точке  $t$  (с вероятностью единица). Значит, если попытаться как-то осмыслить уравнение

$$m\dot{v} = -\beta v + \dot{W}, \quad t \geq 0, \quad (42)$$

известное в физике как *уравнение Ланжевена*, то следует, прежде всего, иметь в виду эту крайнюю нерегулярность в поведении “процесса”  $\dot{W}$ .

Придадим строгий смысл этому уравнению. Перепишем его вначале в виде

$$\dot{v} = av + \sigma \dot{W}, \quad t \geq 0, \quad (43)$$

где

$$a = -\beta/m < 0, \quad \sigma = 1/m > 0. \quad (44)$$

Хорошо известно, что решение *обыкновенного дифференциального уравнения* (с постоянными коэффициентами  $a, \sigma$ )

$$\dot{v} = av + \sigma f, \quad t \geq 0, \quad (45)$$

находится применением к решению *однородного* уравнения  $\dot{v} = av$ , имеющему вид  $v(t) = ce^{at}$  ( $c = v(0)$ ), *метода вариации произвольной постоянной*, состоящего в том, что решения ищутся в виде  $v(t) = c(t)e^{at}$ . В результате находим, что

$$v(t) = v(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-u)} \sigma f(u) du, \quad t \geq 0. \quad (46)$$

(Это решение существует для  $t \in [0, T]$ , если, например,  $f$  — непрерывная на  $[0, T]$  функция.)

Уравнение (45) можно записать в дифференциальной форме

$$dv = av \, dt + \sigma f \, dt, \quad t \geq 0, \quad (47)$$

являющейся эквивалентной записью интегрального уравнения

$$v(t) = v(0) + \int_0^t av(s) \, ds + \int_0^t \sigma f(s) \, ds, \quad t \geq 0.$$

Это наводит на мысль, что и в “стохастическом” случае уравнение (43) надо понимать именно в *интегральном* виде:

$$V(t) = V(0) + \int_0^t aV(s) \, ds + \int_0^t \sigma \, dW_s, \quad t \geq 0, \quad (48)$$

формально записываемом обычно (по аналогии с (47)) в следующей *дифференциальной форме*:

$$dV(t) = aV(t) \, dt + \sigma \, dW_t. \quad (49)$$

Таким образом, мы как бы заменили  $\dot{W} \, dt$  на  $dW_t$ , а это позволило придать смысл уравнению (43). В (48) входит стохастический интеграл Ито  $\int_0^t \sigma \, dW_s$ , который равен (по определению этого интеграла)  $\sigma W(t)$ , так как  $\sigma$  в рассматриваемом случае есть константа. Тем самым, соотношение (48) принимает вид

$$V(t) - V(0) = a \int_0^t V(s) \, ds + \sigma W_t. \quad (50)$$

*Сильным решением* этого уравнения будем называть такой п. н. *непрерывный* процесс  $V = \{V(t), t \geq 0\}$ , согласованный с фильтрацией  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , что для каждого  $t \geq 0$  с вероятностью единица левая часть соотношения (48) равна его правой части. Отметим, что обе части указанного уравнения дают п. н. непрерывные процессы, поэтому с вероятностью единица совпадение обеих частей уравнения будет сразу для всех  $t \geq 0$ .

Подобно (46) естественно ожидать, что сильное решение этого уравнения, рассматриваемого как уравнение относительно  $V = \{V(t), t \geq 0\}$ , задается формулой

$$V(t) = V(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-u)} \sigma \, dW_u, \quad (51)$$

где в правой части фигурирует *интеграл Ито* (неслучайная функция  $e^{-au} \in \mathcal{A}$ ). Таким образом,  $f \, du$ , “отвечающее”  $\dot{W} \, du$ , заменяется на  $dW_u$ .

Покажем, что выбрав (в силу теоремы 2) п. н. непрерывный на  $[0, \infty)$  процесс  $V$ , определенный согласно (51), мы действительно получим сильное решение уравнения (48). Для этого воспользуемся формулой Ито.

Положим

$$X_t = \int_0^t e^{-au} \, dW_u, \quad H(t, x) = \sigma e^{at} x, \quad \text{где } t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Тогда  $dX_t = e^{-at} dW_t$  ( $X_0 = 0$  по определению интеграла Ито). Возьмем  $Y_t = H(t, X_t)$ . В силу (37) имеем

$$dY_t = \sigma a e^{at} X_t dt + \sigma e^{at} dX_t = \sigma a e^{at} X_t dt + \sigma dW_t \quad (52)$$

(еще раз подчеркнем, что все *дифференциальные преобразования* имеют смысл только как сокращенная запись соответствующих интегральных соотношений).

Снова по формуле Ито легко убедиться, что

$$d(V(0)e^{at}) = a e^{at} V(0) dt, \quad (53)$$

где  $V(0)$  является  $\mathcal{F}_0$ -измеримой величиной. Из (52), (53) и замечания 1 вытекает (49). Итак, доказана

**Теорема 6.** *Для всех  $t \geq 0$  существует сильное решение уравнения Ланжевена с начальным условием  $V|_{t=0} = V(0) \in \mathcal{F}_0 | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , которое задается формулой (51).*

§ 14. Рассмотрим некоторые свойства решения (51). Пусть существует  $\mathbf{E} V(0)$ . Поскольку математическое ожидание интеграла Ито равно нулю, из (51) выводим, что

$$\mathbf{E} V(t) = e^{at} \mathbf{E} V(0), \quad (54)$$

т. е. средняя скорость экспоненциально убывает (напомним, что  $a < 0$ ).

**Теорема 7.** *Пусть начальное значение  $V(0)$  является  $\mathcal{F}_0 | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримой величиной и  $V(0) \sim N(0, \sigma^2/(2\alpha))$ , где  $\alpha = -a$ . Тогда сильным решением уравнения Ланжевена является процесс Орнштейна–Уленбека, т. е. гауссовский процесс  $V = \{V(t), t \geq 0\}$ , имеющий нулевое среднее и ковариационную функцию*

$$\text{cov}(V(s), V(t)) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|s-t|}, \quad s, t \geq 0. \quad (55)$$

**Доказательство.** Из (54) следует, что  $\mathbf{E} V(t) = 0$  при всех  $t \geq 0$ . Покажем, что для  $s, t \geq 0$

$$\mathbf{E} V(s)V(t) = \mathbf{E} (V(0))^2 e^{a(s+t)} + \frac{\sigma^2}{2a} e^{a(s+t)} (1 - e^{-2a(s \wedge t)}), \quad (56)$$

где, как обычно,  $s \wedge t = \min\{s, t\}$ . Действительно, в силу (12)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \int_0^s e^{a(s-u)} dW_u \int_0^t e^{a(t-u)} dW_u \right) &= \\ &= \int_0^{s \wedge t} e^{a(s-u)} e^{a(t-u)} du = \frac{e^{a(s+t)}}{2a} (1 - e^{-2a(s \wedge t)}), \end{aligned} \quad (57)$$

а, кроме того, для всех  $t \geq 0$  согласно теореме 2

$$\mathbf{E} V(0) \int_0^t e^{a(t-u)} dW_u = \mathbf{E} \left( V(0) \mathbf{E} \left( \int_0^t e^{a(t-u)} dW_u \mid \mathcal{F}_0 \right) \right) = 0. \quad (58)$$

Если  $\mathbf{E} (V(0))^2 = -\frac{\sigma^2}{2a}$ , то из (56) получаем (55).

Докажем теперь, что  $V = \{V(t), t \geq 0\}$  — гауссовский процесс. Прежде всего заметим, что  $W_t = W_t - W_0 - \mathcal{F}_0$  при каждом  $t \geq 0$ , а поскольку  $V(0)$  является  $\mathcal{F}_0$ -измеримой величиной, то  $V(0) - W_t$  при любом  $t \geq 0$ . Из (51) следует, что достаточно установить при любом  $k \in \mathbb{N}$  и всех  $0 \leq t_1 < \dots < t_k < \infty$  гауссовость вектора  $(U(t_1), \dots, U(t_k))$ , где  $U(t) = \int_0^t \exp\{-\alpha u\} dW_u, t \geq 0$ . Пользуясь леммой 4, получаем, что для каждого  $m = 1, \dots, k$  величина  $U(t_m)$  есть предел в  $L^2(\Omega)$  при  $n \rightarrow \infty$  величин

$$\eta_m(n) = \sum_{j=0}^n \exp\{-\alpha t_j^{(m)}(n)\} (W(t_{j+1}^{(m)}(n)) - W(t_j^{(m)}(n))),$$

где  $t_j^{(m)}(n) = jt_m/n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Очевидно, вектор  $(\eta_1(n), \dots, \eta_k(n))$  имеет многомерное нормальное распределение. Совершив предельный переход в  $L^2(\Omega)$  при  $n \rightarrow \infty$ , приходим к требуемому утверждению.  $\square$

**§ 15.** Пусть, по-прежнему, имеется (расширенная  $\mathbb{P}$ -нулевыми событиями) фильтрация  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  и винеровский процесс  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  относительно  $\mathbb{F}$ .

Обратимся теперь к более общим уравнениям, нежели (49). Именно, будем рассматривать стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (59)$$

с начальным условием  $X_0 = Z$ , являющимся  $\mathcal{F}_0$ -измеримой величиной. Понимается это уравнение просто как формальная запись стохастического интегрального уравнения

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (60)$$

где  $b$  и  $\sigma$  определены на  $[0, T] \times \mathbb{R}$ . При этом считается, что  $b(s, X_s)$  и  $\sigma(s, X_s)$  — “хорошие” функции, для которых правая часть формулы (60) определена.

**Определение 5.** Сильным решением уравнения (60) на отрезке  $[0, T]$  называется процесс  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ , имеющий п. н. непрерывные траектории, согласованный с фильтрацией  $\mathbb{F}$  и такой, что при подстановке его в левую и правую части формулы (60) при каждом  $t \in [0, T]$  получается равенство с вероятностью единица.

Как уже говорилось выше, подстановка процесса  $X$  в правую часть (60) должна приводить к тому, что п. н. при всех  $t \in [0, T]$  определены оба содержащихся в ней интеграла (которые будут задавать непрерывные процессы). Разумеется, вместо отрезка  $[0, T]$  можно рассматривать  $[u, v]$  или  $[u, \infty)$ .

**Определение 6.** Говорят, что уравнение (60) имеет *единственное* сильное решение  $X$  на отрезке  $[0, T]$ , если из того, что процессы  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$  и  $U = \{U_t, t \in [0, T]\}$  являются (сильными) решениями указанного уравнения с одинаковыми начальными условиями, следует, что  $U$  есть модификация  $X$  (тем самым непрерывные процессы  $X$  и  $U$  будут неразличимыми).

Потребуем, чтобы выполнялось следующее *условие Липшица*: существует константа  $L = L(T) > 0$  такая, что

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T]. \quad (61)$$

Пусть также для некоторого  $c = c(T) > 0$

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq c(1 + x^2), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T]. \quad (62)$$

Заметим, что даже при  $\sigma \equiv 0$ , т. е. при изучении обыкновенного дифференциального уравнения, без условий такого рода решение может не существовать или существовать, но быть неединственным.

Если, в частности,  $b(t, x) = b(x)$ ,  $\sigma(t, x) = \sigma(x)$ , то (61) влечет (62).

§ 16. Далее нам понадобятся простые вспомогательные утверждения.

**Лемма 5.** Пусть действительный процесс  $Y = \{Y_s, s \in [0, T]\}$  прогрессивно измерим на  $[0, T]$  относительно фильтрации  $\mathbb{F}_T = (\mathcal{F}_s)_{s \in [0, T]}$  в  $\mathcal{F}$ . Пусть действительная функция  $a(s, x)$  задана на  $[0, T] \times \mathbb{R}$  и измерима, т. е.  $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измерима. Тогда процесс  $U = \{U_t = a(t, Y_t), t \in [0, T]\}$  прогрессивно измерим (относительно той же фильтрации  $\mathbb{F}_T$ ).

**Доказательство.** Покажем  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t \mid \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримость отображения  $(s, \omega) \mapsto (s, Y_s(\omega))$  для  $s \in [0, t]$  и  $\omega \in \Omega$  ( $0 \leq t \leq T$ ).

Возьмем  $u \in [0, t]$  и  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , тогда

$$\begin{aligned} \{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega: (s, Y_s(\omega)) \in [0, u] \times B\} = \\ = \{(s, \omega) \in [0, t \wedge u] \times \Omega: Y_s(\omega) \in B\} \in \mathcal{B}([0, t \wedge u]) \times \mathcal{F}_{t \wedge u} \subset \mathcal{B}[0, t] \otimes \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

Требуемая измеримость получается в силу следствия 1 главы I. Теперь заметим, что для  $(s, x) \in [0, t] \times \mathbb{R}$  отображение  $(s, x) \mapsto a(s, x)$  является по условию  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримым. Остается учесть, что суперпозиция измеримых отображений будет должным образом измерима.  $\square$

Пусть измеримые на  $[0, T] \times \mathbb{R}$  функции  $b$  и  $\sigma$  удовлетворяют введенным выше условиям (61), (62).

Возьмем  $X_t^0 = Z$ ,  $t \in [0, T]$ , и положим для  $n \geq 1$

$$X_t^{(n)} = Z + \int_0^t b(s, X_s^{(n-1)}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n-1)}) dW(s). \quad (63)$$

То, что эта рекуррентная процедура законна, обосновывает

**Лемма 6.** Пусть  $b$  и  $\sigma$  — описанные выше функции. Пусть величина  $Z$  является  $\mathcal{F}_0$ -измеримой, причем  $E Z^2 < \infty$ . Тогда при каждом  $n \in \mathbb{N}$  процесс  $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \in [0, T]\}$  корректно определяется формулой (63), прогрессивно измерим (т. е. допускает такую модификацию). При этом  $\sup_{t \in [0, T]} E |X_t^{(n)}|^2 < \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и правая часть (63) может быть выбрана п. н. непрерывной на  $[0, T]$ .

**Доказательство.** Функция  $Y_s(\omega) = Z(\omega)$ , где  $s \in [0, T]$ ,  $\omega \in \Omega$ , прогрессивно измерима, поскольку  $Z \in \mathcal{F}_0 | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . По лемме 5 процессы  $b(s, Z(\omega))$  и  $\sigma(s, Z(\omega))$  прогрессивно измеримы ( $s \in [0, T]$ ). В силу (62)

$$\sup_{s \in [0, T]} \mathbb{E} \sigma^2(s, Z) \leq c(1 + \mathbb{E} Z^2) < \infty.$$

Поэтому процесс  $\{\sigma(s, Z), s \in [0, T]\} \in \mathcal{A}_T \cap L_T^2$  и  $\int_0^t \sigma(s, Z) dW_s$  при  $t \in [0, T]$  может быть выбран, согласно теореме 4, п. н. непрерывным (и прогрессивно измеримым). Учитывая прогрессивную измеримость  $\{b(s, Z), s \in [0, T]\}$  и условие (62), имеем

$$\mathbb{E} \int_0^T |b(s, Z)| ds \leq (Tc(1 + \mathbb{E} Z^2))^{1/2} < \infty.$$

По теореме Фубини интеграл  $\int_0^T b(s, Z) ds$  конечен для п. в.  $\omega$  и для этих  $\omega$  процесс  $\int_0^t b(s, Z) ds$  будет непрерывен по  $t \in [0, T]$ . Прогрессивная измеримость указанного интеграла с переменным верхним пределом следует из теоремы 4.

Точно так же объясняется прогрессивная измеримость и п. н. непрерывность правой части (63) в предположении, что процесс  $\{X^{(n-1)}(t), t \in [0, T]\}$  прогрессивно измерим и  $\sup_{s \in [0, T]} \mathbb{E} |X_s^{(n-1)}|^2 < \infty$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (X_t^{(n)})^2 &\leq 3 \left( \mathbb{E} Z^2 + \mathbb{E} \left( \int_0^t b(s, X_s^{(n-1)}) ds \right)^2 + \mathbb{E} \left( \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n-1)}) dW_s \right)^2 \right) \leq \\ &\leq 3 \left( \mathbb{E} Z^2 + Tc \int_0^T \mathbb{E} (1 + |X_s^{(n-1)}|^2) ds + c \int_0^T \mathbb{E} (1 + |X_s^{(n-1)}|^2) ds \right) \leq \\ &\leq 3 \left( \mathbb{E} Z^2 + c(T+1)T \left( 1 + \sup_{s \in [0, T]} \mathbb{E} |X_s^{(n-1)}|^2 \right) \right) < \infty, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что  $\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |X_t^{(n)}|^2 < \infty$ .  $\square$

**Лемма 7** (Гронуолл). Пусть  $y = y(t)$  — неотрицательная непрерывная на  $[0, T]$  функция, удовлетворяющая неравенству

$$y(t) \leq c_0 + q \int_0^t y(s) ds, \quad t \in [0, T], \quad (64)$$

с некоторыми константами  $c_0 \geq 0$  и  $q \geq 0$ . Тогда

$$y(t) \leq c_0 e^{qt} \quad \text{при} \quad t \in [0, T]. \quad (65)$$

**Доказательство.** Из (64) в предположении, что  $c_0 + q \int_0^t y(s) ds > 0$ , имеем для  $t \geq 0$  (в нуле правая производная)

$$\left( \ln \left( c_0 + q \int_0^t y(s) ds \right) \right)' = \frac{qy(t)}{c_0 + q \int_0^t y(s) ds} \leq q. \quad (66)$$

Интегрируя от 0 до  $t$ , получаем

$$\ln \left( c_0 + q \int_0^t y(s) ds \right) - \ln c_0 \leq qt, \quad t \in [0, T].$$

Следовательно,

$$c_0 + q \int_0^t y(s) ds \leq c_0 e^{qt}, \quad t \in [0, T].$$

Самостоятельно рассмотрите элементарные случаи, когда проведенные рассуждения необходимо уточнить (если  $c_0 = 0$  и  $y(s) = 0$  при  $s \in [0, u]$ , то брать логарифм в (66) нельзя).  $\square$

**§ 17.** Следующий результат представляет собой теорему существования и единственности решения стохастического дифференциального уравнения.

**Теорема 8.** Пусть измеримые на  $[0, T] \times \mathbb{R}$  функции  $b$  и  $\sigma$  удовлетворяют условиям (61) и (62). Пусть величина  $Z$  является  $\mathcal{F}_0$ -измеримой, причем  $\mathbb{E} Z^2 < \infty$ . Тогда существует единственное сильное решение уравнения (60) с  $\mathcal{F}_0$ -измеримым начальным условием  $X_0 = Z$  такое, что  $X_t \in L^2(\Omega)$  для любого  $t \in [0, T]$  и функция  $\mathbb{E} X_t^2$  ограничена на  $[0, T]$ .

**Доказательство.** Воспользуемся методом последовательных приближений, оперируя п. н. непрерывными процессами  $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \in [0, T]\}$ , определенными в (63).

Разобьем доказательство на несколько шагов.

**А.** Оценим сверху  $\mathbb{E} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2$ . Если  $n = 0$ , то, учитывая (62), для  $t \in [0, T]$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |X_t^{(1)} - X_t^{(0)}|^2 &= \mathbb{E} \left| \int_0^t b(s, Z) ds + \int_0^t \sigma(s, Z) dW_s \right|^2 \leq \\ &\leq 2\mathbb{E} \left( \int_0^t b(s, Z) ds \right)^2 + 2\mathbb{E} \left( \int_0^t \sigma(s, Z) dW_s \right)^2 \leq \\ &\leq 2(t+1)\mathbb{E} \int_0^t c(1 + |Z|^2) ds \leq \\ &\leq 2ct(t+1)(1 + \mathbb{E} Z^2) \leq M_1 t, \quad M_1 = 2c(T+1)(1 + \mathbb{E} Z^2). \end{aligned} \quad (67)$$

Для  $n \geq 1$  и  $t \in [0, T]$ , применяя (61), получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 &= \\
 &= \mathbb{E} \left( \int_0^t (b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})) ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})) dW_s \right)^2 \leq \\
 &\leq 2\mathbb{E} \left( \int_0^t L |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}| ds \right)^2 + 2\mathbb{E} \int_0^t (\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)}))^2 ds \leq \\
 &\leq 2L^2(1+T) \int_0^t \mathbb{E} |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2 ds.
 \end{aligned} \tag{68}$$

Из (67) и (68) по индукции заключаем, что при  $M = \max\{M_1, 2L^2(1+T)\}$

$$\mathbb{E} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \leq \frac{M^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad t \in [0, T]. \tag{69}$$

При  $m > n \geq 0$  и  $t \in [0, T]$  в силу (69)

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{E} |X_t^{(m)} - X_t^{(n)}|^2)^{1/2} &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}\|_{L^2(\Omega)} \leq \\
 &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \left[ \frac{(MT)^{k+1}}{(k+1)!} \right]^{1/2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{70}$$

Полнота пространства  $L^2(\Omega)$  влечет существование для каждого  $t \in [0, T]$  предела в  $L^2(\Omega)$  величин  $X_t^{(n)}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Этот предел обозначим  $Y_t$  ( $t \in [0, T]$ ).

**В.** Теперь заметим, что  $\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|$  оценивается сверху величиной

$$\int_0^T |b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})| ds + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})) dW_s \right|.$$

Теорема 2, следствие 6 главы IV, неравенства (68) и (69) влекут оценки

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > 2^{-n} \right) &\leq \\
 &\leq \mathbb{P} \left( \left( \int_0^T |b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})| ds \right)^2 > 2^{-2n-2} \right) + \\
 &\quad + \mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})) dW_s \right| > 2^{-n-1} \right) \leq \\
 &\leq 2^{2n+2} T \int_0^T \mathbb{E} (b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)}))^2 ds + \\
 &\quad + 2^{2n+2} \int_0^T \mathbb{E} |\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})|^2 ds \leq \\
 &\leq 2^{2n+2} L^2 (T+1) \int_0^T \frac{M^n s^n}{n!} ds \leq \frac{(4MT)^{n+1}}{(n+1)!}.
 \end{aligned} \tag{71}$$

По лемме Бореля–Кантелли из полученного неравенства следует, что

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > 2^{-n} \text{ бесконечно часто}\right) = 0. \quad (72)$$

Поэтому для п. в.  $\omega$  существует  $N_0 = N_0(\omega)$  такое, что для всех  $n \geq N_0(\omega)$

$$\sup_{t \in [0, T]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \leq 2^{-n}. \quad (73)$$

Итак, последовательность

$$X_t^{(n)}(\omega) = X_t^{(0)}(\omega) + \sum_{k=0}^{n-1} (X_t^{(k+1)}(\omega) - X_t^{(k)}(\omega)), \quad (74)$$

состоящая из функций, п. н. непрерывных на отрезке  $[0, T]$ , с вероятностью 1 равномерно сходится на этом отрезке. Пусть  $\Omega_0$  — множество, где все  $X_t^{(n)}$  непрерывны на  $[0, T]$  и равномерно сходятся;  $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$ . Для  $\omega \in \Omega_0$  обозначим  $X_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_t^{(n)}(\omega)$ . Для  $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$  и  $t \in [0, T]$  пусть  $X_t(\omega) = 0$ . Отсюда вытекает, что  $X_t(\omega)$  является непрерывной функцией на  $[0, T]$  для всех  $\omega$ . Величина  $X_t \in \mathcal{F}_t \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$  в силу леммы 6 главы I как предел величин  $X_t^{(n)}$ , являющихся  $\mathcal{F}_t$ -измеримыми. Прогрессивная измеримость процесса  $\{X_t, t \in T\}$  вытекает из его непрерывности и согласованности с фильтрацией  $\mathbb{F}_T$ .

Очевидно,  $Y_t = X_t$  п. н. при каждом  $t \in [0, T]$ , где процесс  $Y = \{Y_t, t \in [0, T]\}$  построен в пункте А.

**С.** Покажем, что процесс  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$  есть решение уравнения (60).

Из (70) для всех  $t \in [0, T]$  и  $m \in \mathbb{N}$  имеем

$$\|X_t^{(m)}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|Z\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(MT)^{k+1}}{(k+1)!} \right)^{1/2} = \|Z\|_{L^2(\Omega)} + c(M, T). \quad (75)$$

Поэтому и

$$\|X_t\|_{L^2(\Omega)} \leq \|Z\|_{L^2(\Omega)} + c(M, T) \quad \text{для } t \in [0, T]. \quad (76)$$

Пользуясь теоремой Фубини и теоремой Лебега о мажорируемой сходимости, с учетом (75) и (76) получаем, что

$$\mathbf{E} \int_0^T (X_s - X_s^{(n)})^2 ds = \int_0^T \mathbf{E} (X_s - X_s^{(n)})^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (77)$$

В силу (61) и (77) для каждого  $t \in [0, T]$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dW_s &\xrightarrow{L^2(\Omega)} \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \\ \int_0^t b(s, X_s^{(n)}) ds &\xrightarrow{L^2(\Omega)} \int_0^t b(s, X_s) ds. \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого  $t \in [0, T]$ , переходя к пределу в (63) по подпоследовательности  $\{n_m = n_m(t)\}$ , получаем (60).

**Д.** Докажем единственность решения. Прежде всего покажем, что если процесс  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$  непрерывен п. н. на  $[0, T]$  и  $\sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E} X_t^2 < \infty$ , то этот процесс непрерывен в среднем квадратическом на  $[0, T]$ .

Для  $s, t \in [0, T]$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (X_t - X_s)^2 &= \mathbf{E} \left[ \int_s^t b(u, X_u) du + \int_s^t \sigma(u, X_u) dW_u \right]^2 \leq \\ &\leq 2(t-s) \int_s^t \mathbf{E} b^2(u, X_u) du + 2 \int_s^t \mathbf{E} \sigma^2(u, X_u) du \leq \\ &\leq 2c(t-s) \left( 1 + \sup_{[0, T]} \mathbf{E} X_u^2 \right) (1+T). \end{aligned}$$

Заметим также, что  $\|X_t\|_{L^2(\Omega)}$  является функцией, непрерывной на  $[0, T]$ .

Пусть  $X_t$  — сильное решение (60) с начальным условием  $X_0 = Z$ , а  $\tilde{X}_t$  — сильное решение (60) с начальным условием  $\tilde{X}_0 = \tilde{Z}$  ( $Z$  и  $\tilde{Z}$  удовлетворяют условиям доказываемой теоремы), причем функции  $\mathbf{E} X_t^2$  и  $\mathbf{E} \tilde{X}_t^2$  ограничены на  $[0, T]$ . Тогда процесс  $X - \tilde{X}$  непрерывен в среднем квадратическом на  $[0, T]$  и функция  $y(t) = \mathbf{E} (X_t - \tilde{X}_t)^2$  непрерывна на  $[0, t]$ . Аналогично (68) находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |X_t - \tilde{X}_t|^2 &\leq 3\mathbf{E} |Z - \tilde{Z}|^2 + 3\mathbf{E} \left( \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, \tilde{X}_s)) ds \right)^2 + \\ &+ 3\mathbf{E} \left( \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, \tilde{X}_s)) dW_s \right)^2 \leq \\ &\leq 3\mathbf{E} |Z - \tilde{Z}|^2 + 3(1+t)L^2 \int_0^t \mathbf{E} |X_s - \tilde{X}_s|^2 ds. \end{aligned} \quad (78)$$

Таким образом, получаем неравенство (64), в котором  $c_0 = \mathbf{E} |Z - \tilde{Z}|^2$ ,  $q = 3(1+T)L^2$ .

Теперь нужное нам утверждение о единственности сильного решения вытекает из леммы 7: если  $Z = \tilde{Z}$  п. н., то  $c_0 = 0$  в (64) и, следовательно,  $\mathbf{E} |X_t - \tilde{X}_t|^2 = 0$  для каждого  $t \in [0, T]$ . Принимая во внимание непрерывность траекторий  $|X_t - \tilde{X}_t|$ , заключаем, что процессы  $X$  и  $\tilde{X}$  *неразличимы*, т. е.

$$\mathbf{P}(X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega) \text{ для всех } t \in [0, T]) = 1. \quad \square$$

**Замечание 2.** Единственность сильного решения уравнения (60) можно доказать в более широком классе процессов (см. упражнение 21).

**§ 18.** Этот раздел посвящен свойству марковости (сильных) решений стохастических дифференциальных уравнений.

Заметим, что теорема 8 очевидным образом переформулируется на случай, когда вместо  $[0, T]$  рассматривается промежуток  $[u, T]$ ,  $0 \leq u < T < \infty$ , т. е. когда ищется решение уравнения

$$Z_t = \xi + \int_u^t b(s, Z_s) ds + \int_u^t \sigma(s, Z_s) dW_s \quad (79)$$



с начальным условием  $Z_u = \xi$ , измеримым относительно  $\mathcal{F}_u$  (здесь, как и ранее, броуновское движение  $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ). Это решение  $Z_t$  обозначим  $Z_t(\xi)$ ,  $t \in [u, T]$ .

Для процесса  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ , являющегося решением уравнения (60), имеем ( $t \geq u$ )

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s = \\ &= X_0 + \int_0^u b(s, X_s) ds + \int_u^t b(s, X_s) ds + \int_0^u \sigma(s, X_s) dW_s + \int_u^t \sigma(s, X_s) dW_s = \\ &= X_u + \int_u^t b(s, X_s) ds + \int_u^t \sigma(s, X_s) dW_s. \end{aligned} \quad (80)$$

Учитывая, что  $X_u$  есть  $\mathcal{F}_u$ -измеримая величина,  $\mathbb{E} X_u^2 < \infty$ , и пользуясь единственностью сильного решения уравнения (79), получаем, что при каждом начальном условии  $X_0$  ( $X_0 \in \mathcal{F}_0 \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{E} X_0^2 < \infty$ )

$$X_t(\omega) = Z_t(X_u, \omega) \text{ п. н. для } t \geq u. \quad (81)$$

Нам понадобится следующее утверждение.

**Лемма 8.** Пусть  $b = b(s, x)$  и  $\sigma = \sigma(s, x)$  удовлетворяют при  $(s, x) \in [u, T] \times \mathbb{R}$  условиям теоремы 8. Тогда для любого  $t \in [u, T]$  и любой  $\xi \in \mathcal{F}_u \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$  (с  $\mathbb{E} \xi^2 < \infty$ ) величина  $Z_t(\xi, \omega)$  измерима относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{A}_{[u, t]} = \sigma\{\xi, W_s - W_u, s \in [u, t]\}$ , расширенной классом нулевых событий.

**Доказательство.** Воспроизводя доказательство теоремы 8, получаем, что  $Z_t(\xi, \omega)$  есть п. н. предел величин  $Z_t^{(n)}(\xi, \omega)$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $Z_t^{(0)}(\xi, \omega) = \xi$  для  $t \in [u, T]$ , а если  $n \geq 1$ , то

$$Z_t^{(n)}(\xi, \omega) = \xi + \int_u^t b(s, Z_s^{(n-1)}(\xi, \omega)) ds + \int_u^t \sigma(s, Z_s^{(n-1)}(\xi, \omega)) dW_s, \quad t \in [u, T]. \quad (82)$$

Нетрудно видеть, что  $Z_t^{(0)} \in \mathcal{A}_{[u, t]} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Индукция и аналог леммы 6 (для отрезка  $[u, T]$  вместо  $[0, T]$ ) обеспечивает  $\mathcal{A}_{[u, t]}$ -измеримость  $Z_t^{(n)}(\xi, \omega)$  при всех  $n \geq 1$ . Применяя лемму 6 главы I, получаем требуемое утверждение.  $\square$

Теперь нетрудно установить следующий результат.

**Теорема 9.** Пусть выполнены условия теоремы 8. Тогда сильное решение стохастического уравнения (59) является марковским процессом.

**Доказательство.** Достаточно убедиться, что для любых точек  $u$  и  $t$  таких, что  $0 \leq u \leq t \leq T$  и произвольной ограниченной борелевской функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(f(X_t) \mid \mathcal{F}_u) = \mathbb{E}(f(X_t) \mid X_u). \quad (83)$$

Поскольку  $X_t(\omega) = Z_t(X_u(\cdot), \omega)$  п. н. (используются те же обозначения, что в лемме 8), то вместо  $f(X_t)$  в (83) можно рассматривать  $f(Z_t(X_u, \omega))$ . По лемме 8 величина  $f(Z_t(X_u, \omega))$  является ограниченной и  $\mathcal{A}_{[u, t]}$ -измеримой. В силу леммы 2 главы VI

можно получить  $f(Z_t(X_u, \omega))$  как предел п. н., так и в  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  конечных линейных комбинаций случайных величин вида  $\eta = g(X_u)h_1(W_{t_1} - W_u) \cdots h_m(W_{t_m} - W_u)$ , где  $g, h_1, \dots, h_m$  — ограниченные борелевские функции,  $u \leq t_1 < \dots < t_m \leq t$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Вспоминая, что  $X_u$  есть  $\mathcal{F}_u$ -измеримая величина, а  $W_s - W_u \sim \mathcal{F}_u$  при  $s \geq u$ , имеем

$$\mathbb{E}(\eta | \mathcal{F}_u) = g(X_u)\mathbb{E}h_1(W_{t_1} - W_u) \cdots h_m(W_{t_m} - W_u).$$

Очевидно,  $\mathbb{E}(\eta | X_u)$  равно тому же выражению. Совершив предельный переход по должной последовательности упомянутых сумм (величин типа  $\eta$ ), приходим к соотношению (83) в общем случае.  $\square$

**Следствие 1.** *Процесс Орнштейна–Уленбека является не только гауссовским (см. теорему 7), но и марковским процессом.*

## Дополнения и упражнения

Из материала, рассмотренного в главе VIII, ясно, что вопрос о возможности интегрирования случайных функций  $f = f(t, \omega)$  напрямую связан со свойствами их измеримости. Имея это в виду, приведем ряд важных определений.

В становлении и развитии “общей теории случайных процессов” большую роль сыграло осознание того, что в дополнение к тройке  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  надо еще “подключать” поток  $\sigma$ -алгебр  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , индексированных временным параметром  $t$  из множества  $\mathbb{R}_+$  (или некоторого его подмножества), с интерпретацией  $\mathcal{F}_t$  как совокупности событий из  $\mathcal{F}$ , наблюдаемых до момента времени  $t$  (включительно).

Глубокие результаты “общей теории случайных процессов” показывают, что все “идет гладко” и сама эта теория принимает весьма стройный вид, если считать, что фильтрация  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  удовлетворяет так называемым “обычным” условиям, т. е. является непрерывной справа  $\left(\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}, \text{ где } \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \text{ для всех } t \geq 0\right)$  и  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}$  пополнена множествами  $\mathbb{P}$ -меры нуль, а каждая  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}_t$  содержит множества из  $\mathcal{F}$  с  $\mathbb{P}$ -мерой нуль.

**Определение 7.** Подмножество  $A$  из  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  называется *прогрессивно измеримым* (или просто — прогрессивным), если процесс  $X = \mathbf{1}_A$  (т. е.  $X_t(\omega) = \mathbf{1}_A(t, \omega)$ ,  $t \geq 0, \omega \in \Omega$ ) прогрессивно измерим.

Совокупность прогрессивных множеств  $A$  образует  $\sigma$ -алгебру, обозначаемую  $\text{Prog}$ . Понятно, что

$$\text{Prog} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty,$$

где  $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ . Каждый прогрессивно измеримый процесс, очевидно, *адаптирован* (т. е. согласован с фильтрацией  $\mathbb{F}$ ).

1. Приведите пример адаптированного, но не прогрессивно измеримого процесса.

Следующие две  $\sigma$ -алгебры (*опциональных* и *предсказуемых* множеств) играют в стохастическом анализе важную роль в самых разнообразных вопросах.

**Определение 8.** *Опциональная  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{O}$  подмножеств  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  есть  $\sigma$ -алгебра, порожденная всеми согласованными процессами  $X = \{X_t, t \geq 0\}$ , рассматриваемыми как отображения  $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$  из  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  в  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , траектории которых принадлежат пространству Скорохода  $D[0, \infty)$ . Процессы, которые измеримы относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{O}$ , называются *опциональными*.*

2. Докажите, что равносильным образом опциональная  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{O}$  может быть определена как  $\sigma$ -алгебра подмножеств в  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ , порожденная *стохастическими интервалами* вида

$$[[0, \tau[ := \{(t, \omega) : 0 \leq t < \tau(\omega)\},$$

где  $\tau(\omega)$  — марковские моменты (относительно потока  $\mathbb{F}$ ).

**Определение 9.** *Предсказуемая  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{P}$  подмножеств  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  есть  $\sigma$ -алгебра, порожденная всеми согласованными процессами  $X = \{X_t, t \geq 0\}$ , рассматриваемыми как отображения  $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$  из  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  в  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , траектории которых принадлежат пространству  $C = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  непрерывных на  $\mathbb{R}_+$  действительных функций. Процессы, которые измеримы относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{P}$ , называются *предсказуемыми*.*

3. Докажите, что равносильным образом предсказуемая  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{P}$  может быть определена как  $\sigma$ -алгебра, порожденная всеми согласованными процессами, траектории которых лишь *непрерывны слева* на  $(0, \infty)$ .

Имеются и другие альтернативные (и во многих рассмотрениях более удобные) определения, см., например, [26] и [46].

4. Проверьте, что  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{P}$  порождается каждым из следующих классов подмножеств:
- (а)  $\{0\} \times A$  с  $A \in \mathcal{F}_0$  и множествами вида  $(t, \infty) \times B$  с  $B \in \mathcal{F}_t, t \geq 0$ ;
  - (б)  $\{0\} \times A$  с  $A \in \mathcal{F}_0$  и стохастическими интервалами

$$[[0, \tau] = \{(t, \omega) : 0 \leq t \leq \tau(\omega)\} \quad \text{или} \quad ]\tau, \infty[ = \{(t, \omega) : \tau(\omega) < t < \infty\},$$

где  $\tau$  — марковский момент;

- (с)  $\{0\} \times A$  с  $A \in \mathcal{F}_0$  и множествами вида  $(s, t] \times B$  с  $B \in \mathcal{F}_s, s \leq t$ .

5. Убедитесь, что между введенными  $\sigma$ -алгебрами имеют место следующие включения:

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O} \subseteq \text{Prog} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty.$$

Напомним, что по теореме 4 всякий согласованный с фильтрацией  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  непрерывный слева или непрерывный процесс является прогрессивно измеримым.

6. Пусть процесс  $X$  является прогрессивно измеримым и  $\tau$  — конечный марковский момент. Покажите, что случайная величина  $X_\tau$  будет  $\mathcal{F}_\tau$ -измеримой (это свойство является едва ли не определяющим целесообразность введения понятия прогрессивной измеримости).

7. Проверьте, что *простые* (кусочно-непрерывные справа) функции  $f = f(t, \omega)$  вида

$$f(t, \omega) = \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k(\omega) \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t), \quad t \in [0, T],$$

где величины  $\xi_k(\omega)$  —  $\mathcal{F}_{t_k}$ -измеримы,  $0 = t_0 < \dots < t_m = T$ , являются *опциональными*.

8. Покажите, что *простые* (кусочно-непрерывные слева для  $t \in (0, T]$ ) функции  $f = f(t, \omega)$  вида

$$f(t, \omega) = \eta(\omega) \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \eta_k(\omega) \mathbf{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(t), \quad t \in [0, T],$$

где величина  $\eta(\omega)$  —  $\mathcal{F}_0$ -измерима,  $\eta_k(\omega)$  —  $\mathcal{F}_{t_k}$ -измеримы,  $0 = t_0 < \dots < t_m = T$ , являются *предсказуемыми*.

9. Проведите построение интеграла Ито, изложенное в § 2 и § 3, отправляясь от класса опциональных простых функций, фигурирующих в упражнении 7 (которым приписывается то же значение интеграла Ито, что и для предсказуемых простых функций из упражнения 8). Можно ли утверждать, что замыкание в  $L_T^2$  данной совокупности простых функций, входящих в  $L_T^2$ , приводит к пространству  $\mathcal{A}_T \cap L_T^2$ ?
10. Пусть  $\tau$  — марковский момент такой, что  $\tau(\omega) \leq T$  при всех  $\omega \in \Omega$  ( $T$  — положительная константа). Докажите, что  $I_\tau(f) = I_T(f \mathbf{1}_{(0, \tau]})$ , где  $I_\tau(f) := I_{\tau(\omega)}(f)$ .
11. Докажите, что если  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  есть *неслучайная* функция из пространства Скорохода  $D[0, \infty)$ , то процесс  $I_t(f)$ ,  $t \geq 0$ , является гауссовским. Найдите его среднее и ковариационную функцию.

Обсудим теперь некоторые *обобщения* интеграла Ито. Интегрирование можно определить для следующего класса функций  $J_1$ .

**Определение 10.** Будем говорить, что функция  $f$  принадлежит классу  $J_1$ , если  $f: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  прогрессивно измерима и

$$\mathbb{P} \left( \int_0^t f^2(s, \omega) ds < \infty \right) = 1, \quad t > 0. \quad (84)$$

Идея построения интеграла  $I_t(f)$  для функции  $f \in J_1$  состоит в том, чтобы подобрать последовательность функций  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , для которых интеграл  $I_t(f_n)$  уже построен, и таких, что

$$\int_0^t (f(s, \omega) - f_n(s, \omega))^2 ds \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (85)$$

Отсюда выводится, что последовательность  $\{I_t(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  является фундаментальной по вероятности. Следовательно, существует случайная величина, обозначаемая

$I_t(f)$ , такая, что  $I_t(f_n) \xrightarrow{P} I_t(f)$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Предел  $I_t(f)$  записывают, по-прежнему, как  $\int_{[0,t]} f(s, \omega) dW_s$  или  $(f \cdot W)_t$ . Часто броуновское движение обозначают  $\{B_t, t \geq 0\}$ , и тогда пишут  $(f \cdot B)_t$ .

**12.** Докажите, что существует последовательность  $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ , описанная выше в (85). Докажите, что если  $f \in J_1$ , то существует п. н. непрерывная модификация процесса  $I_t(f)$ ,  $t \geq 0$ .

Отметим, что для  $f \in J_1$  процесс  $I_t(f)$  не обязан быть мартингалом, но является *локальным мартингалом* (т. е. процессом, для которого существует последовательность моментов остановки  $\tau_n$  таких, что  $\tau_n \uparrow \infty$  п. н. ( $n \rightarrow \infty$ ) и для каждого  $n$  “остановленные” процессы  $I_{t \wedge \tau_n}^{\tau_n}(f) := I_{t \wedge \tau_n}(f)$ , где  $t \geq 0$ , являются мартингалами).

**13.** Рассмотрим для  $f \in J_1$  процесс

$$Z_t = \exp \left\{ \int_0^t f(s, \omega) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t f^2(s, \omega) ds \right\}, \quad t \geq 0. \quad (86)$$

Докажите, что  $dZ_t = Z_t f(t, \omega) dW_t$  (по-прежнему, все дифференциальные соотношения означают сокращенную запись соответствующих интегральных).

Подробнее со стохастическим исчислением можно ознакомиться по книгам [26, 124, 128]. Кратные стохастические интегралы рассматриваются в [163].

Стохастический интеграл по винеровскому процессу (броуновскому движению) позволяет дать “явное” представление *фрактального броуновского движения*.

**Определение 11.** Случайный процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  со значениями в  $\mathbb{R}^m$  называется *автомодельным (самоподобным)*, если для каждого  $a > 0$  можно найти такое  $b > 0$ , что

$$\text{Law}(X_{at}, t \geq 0) = \text{Law}(bX_t, t \geq 0). \quad (87)$$

Иначе говоря, для таких процессов изменение *временной шкалы* ( $t \mapsto at$ ) приводит к тому же самому результату, что и изменение *фазовой шкалы* ( $x \mapsto bx$ ). Если в определении (87) для любого  $a > 0$  параметр  $b = a^H$ , то случайный процесс  $X$  называется *автомодельным процессом с показателем Харста  $H$* . Величина  $D = 1/H$  называется *статистической фрактальной размерностью* случайного процесса  $X$ .

Напомним, что *фрактальное броуновское движение*  $B^{(H)} = \{B^{(H)}(t), t \geq 0\}$  для  $0 < H \leq 1$  определяется как центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$\text{cov}(B^{(H)}(s), B^{(H)}(t)) = s^{2H} + t^{2H} - |s - t|^{2H}, \quad s, t \geq 0.$$

При  $H = 1/2$  процесс  $B^{(1/2)} = \{B^{(1/2)}(t), t \geq 0\}$  является броуновским движением.

**14.** Докажите, что  $B^{(H)} = \{B^{(H)}(t), t \geq 0\}$ , где  $0 < H \leq 1$ , есть автомодельный процесс (с показателем Харста  $H$ ).

Процессы  $B^{(H)}$  впервые рассматривались А. Н. Колмогоровым в 1940 г. (см. [33]) и были названы им *спиралями Винера*. Термин *фрактальное* (или *дробное*, “fractional”) броуновское движение был введен Б. Мандельбротом и Й. Ван Нессом в 1968 г. в работе [164], и там же была получена следующая теорема.

**Теорема 10** (Мандельбротт, Ван Несс). Для  $0 < H < 1$  и  $t \geq 0$  фрактальное броуновское движение  $B^{(H)}$  допускает представление

$$B^{(H)}(t) = c_H \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}] dW_s + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dW_s \right\}, \quad (88)$$

где нормирующая константа  $c_H$  выбрана так, что  $E(B^{(H)}(1))^2 = 1$  (см., например, [86; т. 1, с. 281]), а  $\{W_s, s \geq 0\}$  и  $\{\widetilde{W}_s, s \geq 0\}$  — независимые стандартные винеровские процессы, причем  $W_s = \widetilde{W}_{-s}$  для  $s \leq 0$ .

Фрактальное броуновское движение (и его дискретные аналоги) используются во многих важных моделях, в частности, для описания динамики финансовых индексов (см. [86]). Сложность изучения процессов  $B^{(H)}(t)$  с  $0 < H \leq 1$  состоит в том, что за исключением случая  $H = 1/2$  (броуновского движения) и  $H = 1$  эти процессы не являются семимартингалами (т. е. не входят в важный класс процессов, для которых развито стохастическое исчисление, см. [46; гл. 4]). Если в представлении (88) вместо  $H$  взять гёльдеровскую функцию  $H_t$  (т. е.  $|H_t - H_s| \leq c|t - s|^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ) со значениями в  $(0, 1)$ , то получается случайный процесс, называемый мультифрактальным броуновским движением.

**15.** Докажите, что для процесса  $B^{(H)}$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\widehat{H}_n := \ln \left( n^{-1} \sum_{k=1}^n |B^{(H)}(k/n) - B^{(H)}((k-1)/n)| \right) / \ln(1/n) \rightarrow H \quad \text{п. н.}$$

Пусть  $J_1([0, T])$  — пространство прогрессивно измеримых функций  $f: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющих (84) при  $t \in [0, T]$ .

Следующая теорема, основанная на понятии стохастического интеграла, описывает структуру броуновских функционалов.

**Теорема 11** (Ито, Кларк). Пусть  $(\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}$  — естественная фильтрация броуновского движения  $W = \{W_t, t \in [0, T]\}$  и  $X = X(\omega)$  является  $\mathcal{F}_T^W | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримой случайной величиной. Справедливы следующие утверждения.

1. Если  $E X^2 < \infty$ , то найдется такой стохастический процесс  $f = \{f(s), s \in [0, T]\} \in \mathcal{A}_T \cap L_T^2$ , что

$$X = EX + \int_0^T f(s, \omega) dW_s \quad \text{п. н.} \quad (89)$$

2. Если  $E|X| < \infty$ , то представление (89) справедливо с некоторым процессом  $f \in J_1([0, T])$ .

3. Если  $X$  — положительная случайная величина (т. е.  $P(X > 0) = 1$ ) и  $EX < \infty$ , то найдется процесс  $f \in J_1([0, T])$  такой, что  $X$  допускает представление вида  $X = Z_T EX$ , где  $Z_T$  определяется согласно (86).

**16.** Объясните, почему величина  $X$ , фигурирующая в теореме 11, есть функционал от броуновского движения, т. е.  $X(\omega) = g(W(s, \omega), 0 \leq s \leq T)$ , где  $g: C[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g \in \mathcal{B}(C[0, T]) | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Доказательства теоремы 11 в различных вариантах даны К. Ито, Дж. Кларком, Дж. Дубом и приведены во многих книгах, см., например, [46, 182].

В качестве примера использования представления функционалов от броуновского движения в виде стохастических интегралов приведем следующую экстремальную задачу:

среди всех моментов остановки  $\tau$  (относительно естественной фильтрации броуновского движения  $W = \{W(t), t \in [0, 1]\}$ ) найти такой момент  $\tau_*$ , для которого достигается

$$V_* = \inf_{0 \leq \tau \leq 1} \mathbf{E} \left| W_\tau - \max_{0 \leq s \leq 1} W_s \right|^2.$$

Можно представить себе модель, в которой колебания цен на акции в течение единичного периода времени (например, день) описываются броуновским движением (разумеется, это лишь интерпретация, так как цены не бывают отрицательными) и требуется выбрать момент  $\tau_*$  для самой выгодной в среднем квадратическом смысле продажи имеющихся акций. Заметим, что  $W_{\tau_*}$  дает смещенную оценку для  $\max_{0 \leq s \leq 1} W_s$ , поскольку  $\mathbf{E} W_{\tau_*} = 0$  и  $\mathbf{E} \max_{0 \leq s \leq 1} W_s = \sqrt{2/\pi}$  (поясните в качестве простого упражнения). Поэтому можно обратиться к величине

$$\tilde{V} = \inf_{a \in \mathbb{R}, \tau \in [0, 1]} \mathbf{E} \left| W_\tau + a - \max_{0 \leq s \leq 1} W_s \right|^2.$$

Легко проверить (убедитесь в этом), что

$$\tilde{V} = V_* - 2/\pi.$$

Положим

$$S_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s, \quad t \in [0, 1].$$

**Теорема 12** (Граверсен, Пешкир, Ширяев). *Решение приведенной выше задачи дается формулой*

$$\tau_* = \inf \{t \in [0, 1]: S_t - W_t = z_* \sqrt{1-t}\},$$

где константа  $z_*$  находится из уравнения

$$4\Phi(z_*) - 2z_*\phi(z_*) - 3 = 0,$$

здесь  $\Phi$  и  $\phi$  — соответственно функция распределения и плотность стандартной нормальной величины. При этом  $z_* = 1.12\dots$ ,  $V_* = 2\Phi(z_*) - 1 = 0.73\dots$

Ключевую роль при доказательстве этого результата играет представление вида

$$\max_{0 \leq s \leq 1} W_s = b + \int_0^1 f(s, \omega) dW_s,$$

где  $b = \text{const}$  (укажите эту константу) и

$$f(s, \omega) = 2\{1 - \Phi((S_t - W_t)/\sqrt{1-t})\}, \quad s \in [0, 1], \quad \omega \in \Omega.$$

Широкое использование результатов и методов стохастического анализа связано с возможностью построения теории стохастического интегрирования по процессам более общей структуры, нежели броуновское движение.

**Определение 12.** Согласованный с фильтрацией  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  процесс  $A = \{A_t; t \in \mathbb{R}_+\}$  называется *возрастающим*, если для п.в.  $\omega$  имеем  $A_0(\omega) = 0$ , где  $A_t(\omega)$  — неубывающая функция по  $t \in [0, \infty)$  и  $E A_t < \infty$  для каждого  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Определение 13.** Действительный случайный процесс  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$  принадлежит *классу Дирихле* ( $D$ ), если семейство величин  $\{Y_\tau, \tau \in S\}$  равномерно интегрируемо, где  $S$  обозначает совокупность всех конечных марковских моментов (относительно фильтрации  $\mathbb{F}$ ).

Справедлив следующий фундаментальный результат (см. [26, т. 1, с. 68]; сравните с теоремой 1 главы IV).

**Теорема 13** (разложение Дуба–Мейера). *Субмартингал  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  класса ( $D$ ) с траекториями типа  $\text{c\grave{a}dl\grave{a}g}$  допускает и притом единственное (с точностью до стохастической неразличимости) разложение вида*

$$X_t = X_0 + A_t + M_t,$$

где  $A = (A_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — *возрастающий предсказуемый интегрируемый* ( $E A_\infty$ , где  $A_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} A_t$ ) процесс, а  $M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  есть *равномерно интегрируемый мартингал*.

Рассмотрим для простоты непрерывный квадратично интегрируемый мартингал  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  на фильтрованном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  такой, что  $M_0 = 0$ . Класс таких мартингалов обозначается  $\mathcal{M}_2^c$ . Будем предполагать, что фильтрация  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  удовлетворяет обычным условиям.

Наметим схему построения интеграла по процессу  $M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c$ . Пусть  $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$  — возрастающий предсказуемый процесс, участвующий в разложении Дуба–Мейера субмартингала  $M_t^2, t \geq 0$ , обладающий тем свойством, что  $E \langle M \rangle_\infty < \infty$ .

Как и в случае броуновского движения, интеграл

$$I_T(X) = \int_0^T X_t(\omega) dM_t(\omega), \quad (90)$$

вообще говоря, не может быть определен потраекторно, как интеграл Лебега–Стилтьеса (можно определить в тривиальном случае  $M_t = 0$  при  $t \geq 0$ ).

Процесс  $X = \{X_t, t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  назовем *простым*, если существуют строго возрастающая числовая последовательность  $\{t_n\}_{n=0}^\infty$  с  $t_0 = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ , а также последовательность действительных случайных величин  $\{f_n(\omega)\}_{n=0}^\infty$  и некоторая константа  $0 < c < \infty$ , для которых  $\sup_{n \geq 0} |f_n(\omega)| \leq c$  при всех  $\omega \in \Omega$ , причем  $f_n \in \mathcal{F}_{t_n} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$  и

$$X_t(\omega) = f_0(\omega) \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\omega) \mathbf{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(t), \quad 0 \leq t < \infty. \quad (91)$$

Класс простых процессов обозначим  $\mathcal{L}_0$  и для  $X \in \mathcal{L}_0$  положим

$$I_t(X) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}) + f_n(M_t - M_{t_n}) \quad \text{при } t_n \leq t < t_{n+1}. \quad (92)$$



Далее доказывается, что определение (92) можно распространить (снова используя должные аппроксимации простыми процессами) с  $\mathcal{L}_0$  на более широкий класс процессов. Интересно отметить, что этот класс будет зависеть от того, является ли функция  $\langle M \rangle_t$  для п. в.  $\omega$  абсолютно непрерывной относительно меры Лебега. Детальное построение и дальнейшие обобщения можно почерпнуть в книгах [46, 182].

- 17.** С помощью формулы Ито докажите, что для детерминированной функции  $f = f(t)$  из  $C^1$  справедлива формула “интегрирования по частям”:

$$\int_{(0,t]} f(s) dW_s = f(t)W_t - \int_{(0,t]} f'(s)W_s ds. \quad (93)$$

Постройте пример случайной функции  $f = f(t, \omega)$ , для которой формула (93) не имеет места.

**Пример 2.** Рассмотрим *стохастически возмущенное* уравнение роста популяции

$$\frac{dX_t}{dt} = rX_t, \quad r = \text{const}. \quad (94)$$

Точнее говоря, рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение вида

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t \quad (95)$$

с начальным условием  $X_0$  ( $X_0 \in \mathcal{F} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$  и  $\mathbf{E} X_0^2 < \infty$ ), где константы  $\sigma > 0, r \in \mathbb{R}$ .

Из формулы Ито непосредственно следует, что процесс

$$X_t = X_0 e^{(r - \sigma^2/2)t + \sigma W_t} \quad (96)$$

является сильным решением уравнения (95). Поскольку  $X_0 - W = \{W_t, t \geq 0\}$ , то

$$\mathbf{E} X_t = \mathbf{E} X_0 \exp\{rt\}. \quad (97)$$

Иначе говоря, при  $\mathbf{E} X_0 \neq 0$  средний рост (убывание, если  $r < 0$ )  $\mathbf{E} X_t$  будет таким же, как в случае детерминированной модели (94).  $\square$

Уравнение (95) играет важную роль в финансовой математике. Его решение (96) часто называют “геометрическим броуновским движением”. *Локальный снос*  $r - \sigma^2/2$  характеризует скорость изменения среднего значения процесса  $X$ , *диффузию*  $\sigma^2$  в финансовой литературе часто называют *волатильностью*. Видимо, П. Самуэльсон был первым, кто осознал важность геометрического броуновского движения для описания эволюции цен, используя для него термин “*экономическое броуновское движение*”.

Определения и результаты, излагавшиеся в главе VIII, ценой некоторых усложнений естественным образом переносятся на многомерный случай. Так, *уравнение* (59) *можно понимать как систему*, в которой  $X_t = (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)})$ ,  $b$  — векторная,  $\sigma$  — матричная функции, точнее говоря,

$$b(\cdot, \cdot): [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \sigma(\cdot, \cdot): [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}. \quad (98)$$

$W = \{W_t, t \geq 0\}$  —  $m$ -мерное броуновское движение (относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ). Считаем также, что

$$b(t, X_t) dt = \begin{pmatrix} b^{(1)}(t, X_t) dt \\ \vdots \\ b^{(n)}(t, X_t) dt \end{pmatrix}, \quad (99)$$

$$\sigma(t, X_t) dW_t = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(t, X_t) & \dots & \sigma_{1m}(t, X_t) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1}(t, X_t) & \dots & \sigma_{nm}(t, X_t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^{(1)} \\ \vdots \\ dW_t^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Интеграл от векторной функции определяется как вектор из интегралов от компонент, а  $\int_{[0,t]} \sigma(s, X_s) dW_s$  обозначает вектор-функцию с  $i$ -й компонентой, равной

$$\sum_{k=1}^m \int_{[0,t]} \sigma_{ik}(s, X_s) dW_s^{(k)}.$$

Определение прогрессивной измеримости очевидным образом переносится на многомерный случай. Теорема 13 остается в силе, если в условиях (61) и (62) модуль  $b$  понимать как норму в  $\mathbb{R}^n$ , а модуль  $\sigma$  понимать как норму матрицы, например, считать, что  $|\sigma|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \sigma_{ik}^2$ .

При исследовании систем стохастических дифференциальных уравнений важнейшую роль играют многомерные варианты формулы Ито, т. е. формулы, описывающие стохастический дифференциал процесса  $H(t, X_t)$ , где  $H = H(t, x_1, \dots, x_n)$ , а  $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$  — векторный процесс Ито. Другими словами,  $X$  имеет стохастический дифференциал вида

$$dX_t = f(t, \omega) dW_t + g(t, \omega) dt, \quad t \in [0, \infty), \quad (100)$$

где  $f$  и  $g$  — соответственно матричная и векторная прогрессивно измеримые функции,  $f = (f_{ik}(t, \omega), i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m)$ ;  $g = (g_1(t, \omega), \dots, g_n(t, \omega))$ ,  $W_t = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(m)})$ . Иначе говоря, пусть

$$dX_t^{(i)} = \sum_{k=1}^m f_{ik}(t, \omega) dW_t^{(k)} + g_i(t, \omega) dt, \quad i = 1, \dots, n, \quad (101)$$

где при любом  $t > 0$ , всех  $i = 1, \dots, n$  и  $k = 1, \dots, m$

$$\mathbf{P} \left( \int_{[0,t]} |g_i(s, \omega)| ds < \infty \right) = 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{P} \left( \int_{[0,t]} |f_{ik}(s, \omega)|^2 ds < \infty \right) = 1. \quad (102)$$

**Теорема 14.** Пусть функция  $H: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  такова, что  $H \in C^{1,2}$ , т. е. существуют непрерывные производные  $\partial H / \partial t$  и  $\partial^2 H / \partial x_i \partial x_j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Тогда процесс  $Y_t = H(t, X_t)$ , где процесс Ито  $X_t$  определяется согласно (100), (102), имеет стохастический дифференциал, который задается формулой

$$dY_t = \frac{\partial H}{\partial t}(t, X_t) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i}(t, X_t) dX_t^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) dX_t^{(i)} dX_t^{(j)},$$

здесь  $dX_t^{(i)}$  и  $dX_t^{(j)}$ , фигурирующие в (101), “перемножаются по правилу”:

$$dW_t^{(i)} \cdot dW_t^{(j)} = \delta_{ij} dt, \quad dt \cdot dt = dW_t^{(i)} \cdot dt = dt \cdot dW_t^{(i)} = 0.$$

Доказательство формулы Ито см., например, в [26]. По поводу разнообразных обобщений этой формулы см., например, [11, 146].

Приведем здесь лишь один результат в направлении упомянутых обобщений. Пусть  $X$  — стандартное (одномерное) броуновское движение  $W = \{W_t, t \geq 0\}$ . Пусть функция  $F = F(x)$  является абсолютно непрерывной,

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(y) dy,$$

причем функция  $f = f(y) \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R})$ , т. е. для любого  $c > 0$

$$\int_{|y| \leq c} f^2(y) dy < \infty.$$

Определим  $[f(W), W]$  — *квадратическую ковариацию* процессов  $f(W)$  и  $W$  следующим образом:

$$[f(W), W]_t = \text{P-lim}_n \sum_m (f(W_{t^{(n)}(m+1) \wedge t}) - f(W_{t^{(n)}(m) \wedge t})) \times \\ \times (W_{t^{(n)}(m+1) \wedge t} - W_{t^{(n)}(m) \wedge t}), \quad t \geq 0.$$

Здесь  $\text{P-lim}$  обозначает предел по вероятности, а  $\{t^{(n)}(m), m \in \mathbb{N}\}$  при каждом  $n \in \mathbb{N}$  — *римановские последовательности* детерминированных моментов  $t^{(n)}(m)$ , т. е.  $t^{(n)}(m) \leq t^{(n)}(m+1)$  для  $m \in \mathbb{N}$  при каждом  $n \in \mathbb{N}$  и  $t^{(n)}(m) \rightarrow \infty$  при  $m \rightarrow \infty$ ; кроме того, для любого  $t > 0$

$$\sup_m (t^{(n)}(m+1) \wedge t - t^{(n)}(m) \wedge t) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Важно подчеркнуть, что поскольку процесс  $f(W)$  не является, вообще говоря, семимартингалом, нетривиален факт *существования* предела по вероятности, задающего  $[f(W), W]_t$ . Один из результатов работы [129] состоит именно в доказательстве существования этого предела.

**Теорема 15** (Проттер, Фёльмер, Ширяев; [129]). *При сделанных выше предположениях о функции  $F = F(x)$  имеет место формула*

$$F(W_t) = F(0) + \int_0^t f(W_s) dW_s + \frac{1}{2}[f(W), W]_t. \quad (103)$$

**18.** Пусть функция  $f \in C^2$ . Докажите, что

$$[f(W), W]_t = \int_0^t f'(W_s) ds, \quad t \geq 0.$$

Тем самым, формула (103) переходит в формулу Ито.

**19.** Пусть  $f(x) = |x|$ . Докажите, что  $[f(W), W]_t = 2L_t(0)$ , где  $L_t(0)$  — *локальное время* (П. Леви) броуновского движения в точке 0, определяемое следующим образом:

$$L_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}\{|W_s| \leq \varepsilon\} ds. \quad (104)$$

Таким образом, в данном случае формула (103) переходит в *формулу Танака* для броуновского движения.

Обобщению интеграла Ито на функции многих переменных посвящена монография [163]. Приведем только один результат этого направления.

**Теорема 16** (Ито). *При всех  $t > 0$  и  $n \in \mathbb{N}$  справедлива формула*

$$\int \cdots \int_{0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n \leq t} dW_{s_1} \cdots dW_{s_n} = \frac{t^{n/2}}{n!} H_n \left( \frac{W_t}{\sqrt{t}} \right), \quad (104)$$

где  $H_n$  — *полином Эрмита степени  $n$* , т. е.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}), \quad n = 0, 1, \dots$$

Обратимся теперь к *однородной диффузии*, т. е. рассмотрим решение уравнения

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad t \geq s, \quad X_s = x \in \mathbb{R}^n, \quad (106)$$

где  $W_t$  —  $m$ -мерный винеровский процесс, а функции  $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  удовлетворяют условиям теоремы 8, которые в данном случае сводятся к одному требованию: существует  $L > 0$  такое, что

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (107)$$

(для вектора  $|\cdot|$  обозначает евклидову норму и  $|\sigma|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \sigma_{ik}^2$ ), из которого вытекает, что для некоторого  $c > 0$

$$|b(x)|^2 + |\sigma(x)|^2 \leq c(1 + |x|^2), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (108)$$

Обозначим  $X_t^{s,x}$  единственное сильное решение уравнения (106) при  $t \geq s$ .

**20.** Докажите, что для каждого  $x \in \mathbb{R}^n$  определенный выше процесс  $X_t^{s,x}$ ,  $t \geq s$ , является однородным марковским процессом.

- 21.** Докажите, что при выполнении условий теоремы 8 единственность сильного решения (на  $[0, T]$ ) будет в более широком классе процессов, у которых существует  $\mathbb{E} X_t^2$  для  $t \in [0, T]$ .
- 22.** Покажите, что если условия теоремы 8 выполнены на полуинтервале  $[0, T)$ , то ее утверждение также справедливо на этом промежутке, только в этом случае рассматривается класс процессов  $X$ , для которых функция  $\mathbb{E} X_t^2$  будет ограничена на каждом отрезке, вложенном в  $[0, T)$ .
- 23.** С помощью формулы Ито докажите, что решением (одномерного) уравнения

$$dX_t = \frac{\beta - X_t}{T - t} dt + dW_t, \quad t \in [0, T), \quad X_0 = \alpha, \quad (109)$$

является процесс

$$X_t = \alpha(1 - t/T) + \beta t/T + (T - t) \int_0^t \frac{dW_s}{T - s}. \quad (110)$$

- 24** (продолжение упражнения 23). Докажите, что  $X_t \rightarrow \beta$  п. н. при  $t \rightarrow T-$ . Таким образом, решение уравнения (109) представляет собой *броуновский мост над отрезком  $[0, T]$  с закрепленными концами  $X_0 = \alpha$  и  $X_T = \beta$* . Стандартный броуновский мост получается при  $T = 1$  и  $\alpha = \beta = 0$ .

Из различного рода обобщений теоремы существования и единственности решения стохастического дифференциального уравнения приведем несколько неожиданный результат А. К. Звонкина (см., например, [86; с. 322]), утверждающий, что для существования *сильного решения* стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = b(t, X_t) dt + dW_t \quad (111)$$

достаточно лишь измеримости по  $(t, x)$  и равномерной ограниченности  $b(t, x)$ .

- 25.** Докажите, что стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = \sigma(X_t) dt + dW_t \quad (112)$$

с “плохим” коэффициентом  $\sigma(x) = \operatorname{sgn} x$  имеет и, притом, *единственное сильное решение*.

**Определение 14.** Стохастическое дифференциальное уравнение (59) с начальным условием  $\mu$ , где  $\mu$  — заданная мера на  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , имеет *слабое решение* на промежутке  $[0, T]$ , если найдутся фильтрованное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ , броуновское движение  $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  и непрерывный (п. н.) случайный процесс  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  такие, что  $\operatorname{Law}(X_0) = \mu$  и  $\mathbb{P}$ -п. н. для каждого  $t > 0$  выполнено равенство (60).

Разумеется, вместо отрезка  $[0, T]$  можно рассматривать промежутки вида  $[u, v]$ , где  $0 \leq u < v < \infty$ , или  $[u, v)$  для  $0 \leq u < v \leq \infty$ .

Важно подчеркнуть, что в отличие от сильного решения, рассматриваемого на заданном фильтрованном вероятностном пространстве с заданным на нем броуновским движением, в определении слабого решения такие объекты (вероятностное пространство и броуновское движение) *не фиксируются*, а требуется лишь, чтобы они нашлись. Очевидно, сильное решение является и слабым.

**Определение 15.** Слабая единственность (слабого или сильного) решения уравнения (59) означает, что у любых двух решений (в рассматриваемом смысле) с одинаковыми начальными условиями совпадают распределения, т. е. совпадают конечномерные распределения.

**26.** Докажите, что уравнение

$$dX_t = \sigma(X_t) dW_t, \quad t \in [0, 1], \quad X_0 = 0, \quad (113)$$

где  $\sigma(x) = \operatorname{sgn} x$ , имеет *по крайней мере два решения* (но “слабых”). Кроме того, на *некоторых* вероятностных пространствах у этого уравнения может *вовсе и не быть* “сильного” решения.

Для выполнения последнего упражнения следует убедиться, что процесс

$$B_t = \int_0^t \sigma(W_s) dW_s, \quad t \in [0, 1], \quad \sigma(x) = \operatorname{sgn} x,$$

является броуновским движением на отрезке  $[0, 1]$ . Это утверждение обеспечивает (см., например, [83]) следующая

**Теорема 17** (П. Леви). Пусть  $B = (B_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  —  $P$ -н. н. непрерывный квадратично интегрируемый мартингал, заданный на некотором фильтрованном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ . Пусть  $(B_t^2 - t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  также является мартингалом, т. е.

$$\mathbb{E}(B_t^2 - B_s^2 | \mathcal{F}_s) = t - s, \quad 0 \leq s \leq t. \quad (114)$$

Тогда  $B = \{B_t, t \geq 0\}$  есть стандартное броуновское движение.

Заметим, что М. Барлоу [92] доказал, что уравнение (113) может не иметь сильного решения даже в случае *непрерывных ограниченных функций*  $\sigma = \sigma(x) > 0$ .

**27.** Пусть выполнены условия теоремы 8. Докажите, что решение (слабое или сильное) уравнения (59) слабо единственно.

Упражнение 26 показывает, что могут существовать слабые решения, но не быть сильных. Поэтому естественно ожидать существования слабого решения при менее ограничительных условиях на коэффициенты уравнения (59).

Один из первых результатов в этом направлении (см. об этом [86; т. 1, с. 325]) формулируется следующим образом. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t \quad (115)$$

с начальным распределением  $\mu = \operatorname{Law}(X_0)$  таким, что

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^\gamma \mu(dx) = \mathbb{E}|X_0|^\gamma < \infty \quad \text{для некоторого } \gamma > 2.$$

Если коэффициенты  $b = b(x)$  и  $\sigma = \sigma(x)$  являются непрерывными ограниченными функциями, то уравнение (115) имеет слабое решение.

**Замечание 3.** В предположении ограниченности и невырожденности коэффициента  $\sigma(x)$  утверждение о существовании и единственности (по распределению) слабого решения уравнения (115) остается в силе, если потребовать лишь ограниченность и измеримость коэффициента  $b(x)$ . Приведенные результаты о слабых решениях также допускают обобщения на многомерный случай, на случай коэффициентов, зависящих от прошлого и т. д. (см., например, [86; т. 1, гл. III]).

Важную роль в теории стохастических дифференциальных уравнений (в частности, для построения слабых решений) играет теорема Гирсанова об абсолютно непрерывной замене меры, для формулировки которой введем необходимые обозначения.

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  — некоторое фильтрованное вероятностное пространство,  $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  —  $m$ -мерное броуновское движение,  $W = (W^1, \dots, W^m)$ . Пусть  $b = (b_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , где  $b = (b^1, \dots, b^m)$  — прогрессивно измеримый  $m$ -мерный случайный процесс такой, что

$$P\left(\int_0^t \|b_s\|^2 ds < \infty\right) = 1, \quad t \in [0, T], \quad (116)$$

здесь  $\|b_s\|^2 = (b_s^1)^2 + \dots + (b_s^m)^2$  и  $T < \infty$ .

Образует процесс  $Z = (Z_t, \mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ , полагая

$$Z_t = \exp\left\{\int_0^t (b_s, dW_s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|b_s\|^2 ds\right\}, \quad (117)$$

где  $(b_s, dW_s) := \sum_{k=1}^m b_s^k dW_s^k$ .

**Лемма 10** (см., например, [86; т. 2, с. 326]). *Если выполнено условие Новикова:*

$$E \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^t \|b_s\|^2 ds\right\} < \infty, \quad (118)$$

*то  $E Z_T = 1$  и введенный в (117) процесс  $Z = (Z_t, \mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  будет равномерно интегрируемым мартингалом.*

В силу положительности  $Z_t$  ( $P$ -п. н.) и условия  $E Z_T = 1$  на  $(\Omega, \mathcal{F}_T)$  можно задать вероятностную меру  $Q_T$ , полагая

$$Q_T(A) = E(1_A Z_T), \quad A \in \mathcal{F}_T. \quad (119)$$

**Теорема 18** (Гирсанов). *Для введенных выше процессов  $W$  и  $b$  определим*

$$B_t = W_t - \int_0^t b_s ds, \quad t \in [0, T].$$

*Тогда  $B = (B_t, \mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  является  $m$ -мерным броуновским движением на фильтрованном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}_T, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, Q_T)$ .*

Эта теорема, как уже было отмечено, дает возможность строить слабые решения стохастических дифференциальных уравнений вида

$$dX_t = b(X_t) dt + dW_t, \quad t \in [0, T], \quad (120)$$

а также более общих уравнений (см., например, [86; гл. VII, § 36], [148; гл. 5]).

Наряду с интегралом Ито в ряде задач полезно обращение к “симметризованным” интегралам Стратоновича (или Фиска–Стратоновича):

$$\int_0^t f(s, \omega) \circ dW_s(\omega), \quad (121)$$

где  $W = \{W_s, s \geq 0\}$  — броуновское движение, а функция  $f$  входит в определенный класс. Чтобы пояснить суть дела, скажем, что для некоторого класса функций  $f$  интеграл (121) строится с помощью интегральных сумм вида

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(t_i^*, \omega)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}),$$

где  $0 = t_0 < \dots < t_N = t$  и  $t_i^* = (t_i + t_{i+1})/2$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ .

Доводы в пользу трактовки стохастического дифференциального уравнения как интегрального уравнения на основе интеграла (121) можно прочитать в [169]. В частности, замена переменных в интеграле Стратоновича не приводит к появлению дополнительных членов второго порядка, возникающих в формуле Ито. Это используется при изучении стохастических дифференциальных уравнений на многообразиях (см. [128]). В то же время при изучении стохастических уравнений вида

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \circ dW_s \quad (122)$$

требуются большие ограничения на коэффициенты, чем при изучении уравнений вида (60). Если функция  $\sigma(t, x)$  дифференцируема по  $x$ , то уравнение (122) равносильно следующему уравнению Ито:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma'_x(s, X_s) \sigma(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s. \quad (123)$$

В частности, если  $\sigma(s, x)$  не зависит от  $x$ , то обе интерпретации уравнения (60) совпадают.

Подчеркнем также, что интеграл Ито является мартингалом (например, при условиях теоремы 2), а интеграл Стратоновича этим свойством не обладает.

Для дальнейшего ознакомления с различными аспектами теории стохастических дифференциальных уравнений можно обратиться, например, к [11, 130, 154]. Стохастические уравнения в частных производных изучаются в [196]. Квантовая диффузия рассматривается, например, в [88].

Заключительная часть этого раздела посвящена некоторым проблемам, относящимся к самостоятельным научным направлениям в рамках общей теории случайных процессов и ее приложений.

Исключительно важным направлением является *теория фильтрации*. Предположим, что на полезный сигнал налагается “шум” и требуется выделить (отфильтровать) этот сигнал из зашумленных наблюдений. Формализация так просто описанного явления нетривиальна. Мы обратимся к модельной ситуации, которая привела к построению очень красивой теории.



Пусть интересующий нас  $n$ -мерный процесс  $X_t$ ,  $t \in [0, T]$ , — полезный, но “скрытый” сигнал — описывается стохастическим дифференциальным уравнением (системой) (59) с начальным условием  $X_0 = Z$  и пусть “наблюдаемый”  $q$ -мерный процесс  $Y_t$ ,  $t \in [0, T]$ , задается стохастическим уравнением

$$dY_t = c(t, X_t) dt + \gamma(t, X_t) dB_t, \quad (124)$$

где  $c: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $\gamma: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{q \times p}$ . Считается, что все рассматриваемые случайные процессы определены на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , причем  $p$ -мерное броуновское движение  $B = \{B_t, t \geq 0\}$  не зависит от  $m$ -мерного броуновского движения  $W = \{W_t, t \geq 0\}$ , фигурирующего в (59).

Одна из возможных здесь задач состоит в том, чтобы по наблюдениям  $\{Y_s, s \in [0, t]\}$  дать *оценку* величины  $X_t$  для  $t \in [0, T]$ . Обозначив  $\mathcal{H}_t = \sigma\{Y_s, s \in [0, t]\}$ , будем искать оптимальную оценку  $\tilde{X}_t \in \mathcal{H}_t \mid \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  такую, что

$$\mathbf{E} |X_t - \tilde{X}_t|^2 = \inf \{ \mathbf{E} |X_t - U|^2 : U \in L^2(\Omega, \mathcal{H}_t, P) \}. \quad (125)$$

Легко видеть, что  $\tilde{X}_t = \mathbf{E}(X_t \mid \mathcal{H}_t)$ . Мы будем предполагать, что все рассматриваемые случайные величины обладают конечным вторым моментом (это относится к компонентам векторов), а также, что выполнены условия, обеспечивающие существование решений используемых стохастических уравнений.

Следующий *классический результат* (см., например, [169]) для линейных систем явился одним из первых результатов, дающих удобные для практической реализации формулы, описывающие динамику оптимального фильтра.

**Теорема 19** (фильтр Кальмана–Бьюси). *Пусть*

$$\begin{aligned} dX_t &= F(t)X_t dt + C(t) dW_t, & F(t) &\in \mathbb{R}^{n \times n}, & C(t) &\in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ dY_t &= G(t)X_t dt + D(t) dB_t, & G(t) &\in \mathbb{R}^{q \times n}, & D(t) &\in \mathbb{R}^{q \times p}. \end{aligned}$$

*Пусть матрица  $D(t)D(t)^*$  обратима для всех  $t$  и норма матрицы  $(D(t)D(t)^*)^{-1}$  ограничена на каждом конечном промежутке изменения  $t$ . Тогда решение  $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t, t \in [0, T]\}$  задачи (125) удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению*

$$d\tilde{X}_t = (F - SG^*(DD^*)^{-1}G)\tilde{X}_t dt + SG^*(DD^*)^{-1} dY_t \quad (126)$$

*с начальным условием  $\tilde{X}_0 = \mathbf{E} X_0$ , а матричная функция*

$$S(t) = \mathbf{E}(X_t - \tilde{X}_t)(X_t - \tilde{X}_t)^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

*подчиняется матричному дифференциальному уравнению Риккати*

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= FS + SF^* - SG^*(DD^*)^{-1}GS + CC^*, \\ S(0) &= \mathbf{E}(X_0 - \mathbf{E} X_0)(X_0 - \mathbf{E} X_0)^*. \end{aligned} \quad (127)$$

**Пример 3.** Применив теорему 19 к определенному ниже частному случаю скалярных процессов, найдем  $\tilde{X}_t$ . Пусть

$$\begin{aligned} dX_t &= 0, \quad \text{т. е. } X_t = X_0, \quad \mathbb{E} X_0 = 0, \quad \mathbb{E} X_0^2 = v, \\ dY_t &= X_t dt + m dB_t, \quad Y_0 = 0. \end{aligned}$$

Уравнение Риккати (127) для  $S(t) = \mathbb{E} (X_t - \tilde{X}_t)^2$  приобретает вид

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{m^2} S^2, \quad S(0) = v,$$

откуда

$$S(t) = \frac{vm^2}{m^2 + vt}, \quad t \geq 0.$$

Для  $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t\}$  из (126) находим, что

$$d\tilde{X}_t = -\frac{v}{m^2 + vt} \tilde{X}_t dt + \frac{v}{m^2 + vt} dY_t, \quad \tilde{X}_0 = \mathbb{E} X_0 = 0.$$

Отсюда, используя формулу Ито для диффузионных процессов, находим, что

$$d\left(\tilde{X}_t \exp\left\{\int \frac{v}{m^2 + vt} dt\right\}\right) = \exp\left\{\int \frac{v}{m^2 + vt} dt\right\} \frac{v}{m^2 + vt} dY_t,$$

следовательно,

$$\tilde{X}_t = \frac{v}{m^2 + vt} Y_t, \quad t \geq 0.$$

Теории фильтрации посвящена, например, книга [160]. В качестве введения в данную область рекомендуем прочитать главу IV в [169].

Мы лишь укажем на еще одно важное обстоятельство, которому уделяется пристальное внимание последние десять лет. Если в упомянутой выше задаче фильтрации “шум” рассматривался как помеха, от которой желательно избавиться, то имеются задачи (относящиеся к анализу нелинейных систем), в которых шум играет *полезную роль*. Речь идет о том, что некоторые системы под воздействием определенного случайного шума могут приобретать черты устойчивого поведения.

В последние годы большое внимание уделяется проблемам стохастической финансовой математики.

Здесь для моделей с непрерывным временем вместо разностных уравнений возникают стохастические дифференциальные уравнения. При этом ценой значительных технических усложнений удастся получить аналоги результатов, известных для дискретных моделей. Мы не приводим переформулировок “дискретных” определений, данных в дополнении к главе IV, на случай непрерывного времени (см. [86]). Заметим, что широкую известность получили исследования в рамках модели Блэка–Мертон–Шоулса, использующие для описания эволюции цен геометрическое броуновское движение. Работы М. Шоулса и Р. Мертон были отмечены в 1997 г. Нобелевской премией по экономике (Ф. Блэк скончался, а посмертно Нобелевские премии не присуждаются).

Итак, если теперь  $(B, S)$ -рынок описывается стохастическими дифференциальными уравнениями

$$dB_t = rB_t dt, \quad dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad (128)$$

где  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  — банковский счет, а  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  — цены акций, то имеет место следующий замечательный результат.

**Теорема 20** (формула Блэка–Шоулса). В модели (128) с постоянными  $r$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  справедливая стоимость стандартного опциона-колл европейского типа с платежной функцией  $f_T = (S_T - K)^+$  определяется формулой

$$C(T) = S_0 \Phi(y_+) - Ke^{-r} \Phi(y_-), \quad (129)$$

где

$$y_{\pm} = \frac{\log(S_0/K) + T(r \pm \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}},$$

а  $\Phi$  — функция распределения стандартной нормальной величины. В частности, при  $S_0 = K$  и  $r = 0$  имеем

$$C(T) = S_0 \left[ \Phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) \right],$$

при этом  $C(T) \sim K\sigma\sqrt{T/(2\pi)}$ , когда  $T \rightarrow 0$ .

Имеются разные подходы к доказательству этой теоремы (см., например, [86]). Отметим, что наряду с мартингалльным подходом, опирающимся на теорему Гирсанова, имеется подход (который и был использован Блэком и Шоулсом), состоящий в получении при определенных условиях для цены *совершенного хеджирования*

$$Y(t, T) = C_{[t, T]} = \inf \{x > 0 : \exists \pi \text{ с } X_t^\pi = x \text{ и } X_T^\pi = f_T \text{ Р-п.н.}\}$$

так называемого *фундаментального уравнения*

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + rS \frac{\partial Y}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} = rY$$

с краевым условием  $Y(T, S) = (S - K)^+$ . При этом величина  $C_{[0, T]} = C(T)$  (см. (129)).

Полное представление о проблемах стохастической финансовой математики можно получить, ознакомившись с [86, 147, 155].

## Приложение 1

### Доказательство теоремы Колмогорова

Доказательство этой теоремы разобьем на несколько шагов.

**А.** От заданных мер  $P_{t_1, \dots, t_n}$  перейдем к мерам  $Q_J$ , индексированным множествами  $J = \{t_1, \dots, t_n\}$ , положив

$$Q_J(B_J) = P_{t_1, \dots, t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}), \quad (1)$$

где “прямоугольник”

$$B_J = \{y \in S_J: y(t_k) \in B_{t_k}, k = 1, \dots, n\} \text{ и } B_{t_k} \in \mathcal{B}_{t_k}, k = 1, \dots, n. \quad (2)$$

В силу условия 1° (§ 11 главы I) это определение корректно, т. е. левая часть формулы (1) не зависит от порядка нумерации точек множества  $J$  (следует лишь не забывать, какое именно множество  $B_{t_k}$  отвечает точке  $t_k$ , где  $k = 1, \dots, n$ ). С полукольца введенных “прямоугольников” мера  $Q_J$  однозначно продолжается по теореме Каратеодори на порожденную этим полукольцом  $\sigma$ -алгебру, т. е. на  $\mathcal{B}_J$ . При этом согласно условиям 1° и 2° (§ 11 главы I) меры  $Q_J$ , где  $J \in F(T)$ , удовлетворяют условию согласованности (I.44).

Таким образом, можем сразу считать, что на пространствах  $(S_J, \mathcal{B}_J)$  имеется семейство согласованных мер  $Q_J$ ,  $J \in F(T)$ . Покажем, что существует единственная мера  $Q$  на  $(S_T, \mathcal{B}_T)$  с данными проекциями  $Q_J$ ,  $J \in F(T)$ . Легко понять, что это, по сути дела, эквивалентная формулировка теоремы Колмогорова на языке мер. Действительно, если последнее утверждение будет установлено, то согласно лемме 8 главы I на вероятностном пространстве  $(S_T, \mathcal{B}_T, Q)$  построим координатным способом случайную функцию  $X = \{X(t), t \in T\}$  (см. (I.42)), для которой  $P_X = Q$ . Тогда  $Q_J = Q\pi_{T,J}^{-1} = P_X\pi_{T,J}^{-1}$  при каждом  $J \in F(T)$ . Поэтому для любого указанного выше “прямоугольника”  $B_J$  получаем

$$Q_J(B_J) = P_X\pi_{T,J}^{-1}(B_J) = P(X \in \pi_{T,J}^{-1}(B_J)) = P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_{t_k} \in B_{t_k}\}\right).$$

Отсюда в силу (1) и леммы 2 главы I следует, что  $X$  имеет конечномерные распределения  $P_{t_1, \dots, t_n}$ .

**В.** На проблему построения упомянутой в пункте А меры  $Q$  удобно взглянуть еще с точки зрения продолжения меры, заданной на системе  $\sigma$ -подалгебр, на

объемлющую их  $\sigma$ -алгебру. Для этого перенесем меру  $Q_U$  с  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{B}_U$  на  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{B}_{T,U} \subset \mathcal{B}_T$ , где  $U \in F(T)$ , определив

$$\tilde{Q}_U(\tilde{C}_U) = Q_U(C_U),$$

где  $C_U$  и  $\tilde{C}_U$  связаны соотношением вида (I.36). Тогда легко видеть, что условие согласованности мер  $Q_U$ ,  $U \in F(T)$ , равносильно тому, что *сужение* меры  $\tilde{Q}_U$  с  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{B}_{T,U}$  на  $\mathcal{B}_{T,V}$  совпадает с мерой  $\tilde{Q}_V$  для  $V \subset U$ .

Итак, еще одна эквивалентная формулировка теоремы Колмогорова на языке мер состоит в том, что существует единственная мера  $Q$  на  $\mathcal{B}_T$  такая, что  $Q = \tilde{Q}_U$  на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}_{T,U}$  для каждого  $U \in F(T)$ . Следовательно, нам не остается ничего другого, как задать функцию множеств  $Q$  на цилиндрической алгебре  $\mathcal{C}_T$  формулой

$$Q(C) = \tilde{Q}_U(C), \quad \text{где } C \in \mathcal{B}_{T,U}, \quad U \in F(T). \quad (3)$$

Другими словами, положим  $Q(\pi_{T,U}^{-1}B) := Q_U(B)$  для  $B \in \mathcal{B}_U$ ,  $U \in F(T)$ .

Заметим, что определение (3) корректно, так как если  $C \in \mathcal{B}_{T,U}$  и  $C \in \mathcal{B}_{T,J}$ , где  $U, J \in F(T)$ , то  $C \in \mathcal{B}_{T,U \cup J}$  в силу (I.37) и поэтому

$$\tilde{Q}_U(C) = \tilde{Q}_{U \cup J}(C) = \tilde{Q}_J(C).$$

Очевидно также, что формула (3) определяет конечно-аддитивную функцию множеств на алгебре  $\mathcal{C}_T$ , причем  $Q(S_T) = \tilde{Q}_U(S_U) = 1$  для любого  $U \in F(T)$ .

Если мы теперь докажем *счетную аддитивность*  $Q$  на  $\mathcal{C}_T$ , то по теореме Каратеодори мера  $Q$  *однозначно* продолжится до меры на  $\sigma\{\mathcal{C}_T\}$ , т. е. до меры на  $\mathcal{B}_T$  (в силу теоремы 6 главы I).

**С.** Как известно, на *алгебре* множеств счетная аддитивность  $Q$  равносильна ее конечной аддитивности вместе со свойством непрерывности (в “нуле”  $\emptyset$ ). Тем самым надо доказать лишь свойство *непрерывности*  $Q$  на  $\mathcal{C}_T$ , т. е. что  $Q(C_n) \rightarrow 0$ , если  $C_n \downarrow \emptyset$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $C_n \in \mathcal{C}_T$ ,  $C_{n+1} \subset C_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и  $\bigcap_n C_n = \emptyset$ ). Отметим, что указанное свойство непрерывности меры требуется проверять на алгебре  $\mathcal{C}_T$ , а не на полукольце “прямоугольников”, порождающем эту алгебру.

Пусть  $C_n \in \mathcal{B}_{T,J_n}$ , где  $J_n \in F(T)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Без ограничения общности можно сразу считать, что  $J_n \subset J_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Допустим, что  $Q(C_n) \geq \varepsilon_0$  для некоторого  $\varepsilon_0 > 0$  и всех достаточно больших  $n$  (тогда и для всех  $n$ , поскольку  $C_{n+1} \subset C_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ). Убедимся, что это предположение противоречит условию  $C_n \downarrow \emptyset$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Доказательство этого утверждения также разобьем на части.

**Д.** Пусть вначале  $S_t = [0, 1]$ ,  $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}([0, 1])$  и  $\rho_t = \rho$  (евклидова метрика) при всех  $t \in T$ . Покажем, что можно иметь дело лишь с множествами  $C_n = \tilde{B}_n$ , где  $B_n$  — компакт в  $S_{J_n}$ ,  $\tilde{B}_n = \pi_{T,J_n}^{-1}B_n$ ,  $J_n \in F(T)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . В силу леммы 11 главы I имеем  $\mathcal{B}_{J_n} = \mathcal{B}(S_{J_n})$ , а метрика  $\rho_{J_n}$  вводится на  $S_{J_n}$  по формуле (I.39). Для любого  $B_n \in \mathcal{B}_{J_n}$  по лемме 4 главы I находим в метрическом пространстве  $(S_{J_n}, \rho_{J_n})$  замкнутое множество  $K_n \subset B_n$  такое, что

$$Q_{J_n}(B_n \setminus K_n) < \varepsilon_0 2^{-n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, пространство  $S_{J_n}$  компактно. Поэтому  $K_n$  — компакт в  $S_{J_n}$ . При каждом  $n$  согласно последнему неравенству и (3)

$$Q(\tilde{B}_n \setminus \tilde{K}_n) = Q(\pi_{T, J_n}^{-1}(B_n \setminus K_n)) = Q_{J_n}(B_n \setminus K_n) < \varepsilon_0 2^{-n-1}.$$

Введем  $L_n = \bigcap_{i=1}^n H_i$ , где  $H_i = \tilde{K}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Заметим, что  $L_n \downarrow \emptyset$ , поскольку  $L_{n+1} \subset L_n$  и  $L_n \subset H_n \subset C_n$ . При непрерывном отображении прообраз замкнутого множества замкнут. Поэтому множество  $D_n = \bigcap_{i=1}^n \pi_{J_n, J_i}^{-1} K_i$  (основание цилиндра  $L_n = \pi_{T, J_n}^{-1} D_n$ ) есть компакт в  $S_{J_n}$  как пересечение замкнутых множеств с компактом  $K_n \equiv \pi_{J_n, J_n}^{-1} K_n$ . Учитывая, что  $C_n \subset C_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , получаем

$$Q(C_n \setminus L_n) = Q\left(C_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^n \overline{H_i}\right)\right) = Q\left(\bigcup_{i=1}^n (C_n \setminus H_i)\right) \leq \sum_{i=1}^n Q(C_i \setminus H_i) < \varepsilon_0/2.$$

Следовательно,  $\varepsilon_0 \leq Q(C_n) = Q(L_n) + Q(C_n \setminus L_n) \leq Q(L_n) + \varepsilon_0/2$ , т. е.  $Q(L_n) \geq \varepsilon_0/2$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Поэтому далее  $C_n = \pi_{T, J_n}^{-1} B_n$ , где  $B_n$  — компакт в  $S_{J_n}$ ,  $J_n \subset J_{n+1}$ ,  $J_n \in F(T)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Е.** Для множества  $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$  определим в пространстве  $S_U$  метрику

$$\rho_U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_{J_n}(x_n, y_n)}{1 + \rho_{J_n}(x_n, y_n)}, \quad (4)$$

где  $x_n = x|_{J_n}$ ,  $y_n = y|_{J_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Модифицируя доказательство леммы 11 главы I, видим, что метрическое пространство  $(S_U, \rho_U)$  является польским, причем цилиндрическая  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}_U$  совпадает с борелевской  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{B}(S_U)$ . Кроме того,  $S_U$  — компактно.

Множества

$$C'_n = \pi_{U, J_n}^{-1} B_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

будут компактными в метрическом пространстве  $(S_U, \rho_U)$  как замкнутые подмножества компакта.

Заметим, что  $C_n = \pi_{T, J_n}^{-1} B_n = \pi_{T, U}^{-1} \pi_{U, J_n}^{-1} B_n = \pi_{T, U}^{-1} C'_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Поскольку  $C_n \subset C_m$  при  $n \geq m$ , то  $C'_n \subset C'_m$  при  $n \geq m$ . Кроме того,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \pi_{T, U}^{-1} \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} C'_n \right)$ . Пересечение вложенных компактов в полном пространстве непусто, поэтому  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C'_n \neq \emptyset$ . Следовательно,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$  ( $\pi_{T, U}$  отображает  $S_T$  на  $S_U$ ). Пришли к противоречию с предположением  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$ .

**Г.** Пусть теперь  $S_t \in \mathcal{B}([0, 1])$ ,  $\mathcal{B}_t = S_t \cap \mathcal{B}([0, 1])$  и  $S_t \neq [0, 1]$  хотя бы для одного  $t \in T$ . Положим  $L_t = [0, 1]$ ,  $t \in T$ . Для  $J \in F(T)$  введем на  $\mathcal{B}(L_J)$ , где  $L_J = \prod_{t \in J} L_t$ , меру

$$\hat{Q}_J(B) = Q_J(B \cap S_J), \quad B \in \mathcal{B}(L_J). \quad (5)$$

С учетом (I.44) легко проверить, что введенные меры  $\hat{Q}_J$  ( $J \in F(T)$ ) являются согласованными. Пользуясь этим, а также рассмотренным случаем D, видим, что на пространстве  $(L_T, \mathcal{L}_T)$ , где  $\mathcal{L}_T = \bigotimes_{t \in T} \mathcal{L}_t$  и  $\mathcal{L}_t = \mathcal{B}([0, 1])$ , существует мера  $\hat{Q}$  с проекциями  $\hat{Q}_J$  на пространствах  $(L_J, \mathcal{B}(L_J))$ ,  $J \in F(T)$ .

Было бы заманчиво в качестве искомой меры  $Q$  взять сужение  $\hat{Q}$  на множество  $S_T$ . Однако так действовать мы не можем, поскольку при несчетном  $T$  множество  $S_T$  не входит в  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{L}_T$ , на которой задана мера  $\hat{Q}$ . Поэтому возьмем на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , где  $\Omega = L_T$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{L}_T$ ,  $P = \hat{Q}$ , случайный процесс  $\hat{X}(t, \omega) = \omega(t)$  (см. (I.42)) с распределением  $P_{\hat{X}} = P$ .

Если  $S_t \neq [0, 1]$ , то выберем точку  $a_t \in S_t$  ( $S_t \neq \emptyset$ ) и введем на  $T \times \Omega$  функцию

$$X(t, \omega) = \begin{cases} \hat{X}(t, \omega) & \text{при } \hat{X}(t, \omega) \in S_t, \\ a_t & \text{при } \hat{X}(t, \omega) \notin S_t. \end{cases}$$

По построению  $X = \{X(t), t \in T\}$  является случайным процессом на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , причем  $X(t, \omega) \in S_t$  для всех  $t \in T$  и  $\omega \in \Omega$  ( $X(t, \cdot) \in \mathcal{F} | \mathcal{B}_t$  при каждом  $t \in T$ ).

Очевидно, для каждого  $t \in T$

$$\{\omega: X(t, \omega) \neq \hat{X}(t, \omega)\} = \{\omega: \omega(t) \in [0, 1] \setminus S_t\} = C_t. \quad (6)$$

В силу (5) для элементарного цилиндра  $C_t$  имеем

$$P(C_t) = \hat{Q}(C_t) = Q_{\{t\}}(\{[0, 1] \setminus S_t\} \cap S_t) = 0. \quad (7)$$

Для прямоугольника  $B_J$  вида (2), учитывая (5) и (6), получаем

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X(t_k) \in B_{t_k}\}\right) &= P\left(\bigcap_{k=1}^n \{\hat{X}(t_k) \in B_{t_k}\}\right) = \\ &= P_{\hat{X}} \pi_{T,J}^{-1}(B_J) = \hat{Q}_J(B_J) = Q_J(B_J). \end{aligned}$$

Следовательно,  $Q = P_X$  есть искомая мера на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}_T = \bigotimes_{t \in T} \mathcal{B}_t$ .

**Г.** Объясним, какие изменения следует внести в данное доказательство, чтобы охватить любые борелевские пространства  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ .

**Лемма 1.** Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  и  $(?_t, \mathcal{A}_t)_{t \in T}$  — такие семейства измеримых пространств, что  $(S_t, \mathcal{B}_t) \sim (?_t, \mathcal{A}_t)$  при каждом  $t \in T$ . Тогда  $(S_U, \mathcal{B}_U) \sim (?_U, \mathcal{A}_U)$  для любого  $U \subset T$ , где  $\mathcal{B}_U$  и  $\mathcal{A}_U$  — соответственно цилиндрические  $\sigma$ -алгебры подмножеств  $S_U$  и  $?_U$  (“ $\sim$ ” обозначает изоморфизм измеримых пространств).

**Доказательство.** Пусть отображение  $h_t: S_t \rightarrow ?_t$  задает изоморфизм пространств  $(S_t, \mathcal{B}_t)$  и  $(?_t, \mathcal{A}_t)$  при  $t \in T$ . Для  $U \subset T$  введем отображение  $h_U: S_U \rightarrow ?_U$ , положив для  $x_U = (x(t), t \in U) \in S_U$

$$h_U x_U = y_U, \text{ где } y_U = (y(t), t \in U), \quad y(t) = h_t(x(t)) \in ?_t, \quad t \in U.$$

Тогда прообраз элементарного цилиндра в  $?_U$  есть элементарный цилиндр в  $S_U$ , поэтому  $h_U \in \mathcal{B}_U | \mathcal{A}_U$  в силу следствия 1 главы I. Очевидно,  $h_U$  есть взаимно-однозначное отображение  $S_U$  на  $?_U$ . Те же рассуждения показывают, что  $h_U^{-1} \in \mathcal{A}_U | \mathcal{B}_U$ .  $\square$

Если выполнены условия леммы 1 и на пространствах  $(S_U, \mathcal{B}_U)$  заданы согласованные меры  $Q_U$  ( $U \in F(T)$ ), то легко проверить, что на пространствах  $(?_U, \mathcal{A}_U)$  возникают согласованные меры  $P_U = Q_U h_U^{-1}$  (иначе говоря,  $P_V = P_U \Pi_{U,V}^{-1}$  для  $V \subset U \subset T$  ( $U \in F(T)$ ), где “проектирование”  $\Pi_{U,V}$  для семейства пространств  $(?_t, \mathcal{A}_t)_{t \in T}$  имеет тот же смысл, что и отображение  $\pi_{U,V}$  для пространств  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ .

Допустим теперь, что на пространстве  $(?_T, \mathcal{A}_T)$  удалось построить меру  $P$ , имеющую заданные проекции  $P_U$  на пространствах  $(?_U, \mathcal{A}_U)$  для  $U \in F(T)$ . Тогда легко убедиться, что на  $(S_T, \mathcal{B}_T)$  мера  $Q = P h_T$  (т.е.  $Q = P(h_T^{-1})^{-1}$ ) будет иметь проекции  $Q_U$  на  $(S_U, \mathcal{B}_U)$ ,  $U \in F(T)$ .

Таким образом, без потери общности можно считать, что  $S_t$  — борелевское подмножество отрезка  $[0, 1]$  и  $\mathcal{B}_t = S_t \cap \mathcal{B}([0, 1])$  для каждого  $t \in T$ . Тем самым приходим к рассмотренным выше случаям Е и F.

Итак, теорема Колмогорова полностью доказана.  $\square$

Следующий результат поясняет, почему в определении 8 главы I рассматривается борелевское подмножество отрезка  $[0, 1]$ , а не сам этот отрезок. Для этого возьмем двуточечное множество  $S = \{0, 1\}$  и превратим его в польское пространство с дискретной метрикой  $\nu$  ( $\nu(x, y) = 0$  при  $x = y$  и  $\nu(x, y) = 1$  при  $x \neq y$ ). Положим  $K = S^{\mathbb{N}}$  и введем на  $K$  метрику аналогично (4).

**Теорема 1** (см., например, [15; с. 98]). Пусть измеримое пространство  $(S, \mathcal{B})$  изоморфно борелевскому подмножеству некоторого польского пространства (с  $\sigma$ -алгеброй его борелевских подмножеств). Тогда

$$(S, \mathcal{B}) \sim \begin{cases} (K, \mathcal{B}(K)), & \text{если } S \text{ несчетно,} \\ (N, \mathcal{A}(N)), & \text{если } S \text{ счетно,} \\ ((1, \dots, |S|), \mathcal{A}(1, \dots, |S|)), & \text{если } S \text{ конечно,} \end{cases}$$

здесь  $\mathcal{A}(M)$  —  $\sigma$ -алгебра всех подмножеств множества  $M$ ,  $|\cdot|$  — число элементов конечного множества.

Сделаем еще несколько замечаний, относящихся к теореме Колмогорова. Доказательство этой теоремы для семейств польских пространств  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ , основанное на важных результатах функционального анализа (теоремы Стоуна–Вейерштрасса и Рисса–Маркова), можно прочитать в [101]. Ключевая идея здесь состоит в том, что меры порождают линейные функционалы, которые удается должным образом продолжить. Кроме того, используется теорема 6 главы I, позволяющая ограничиться



построением согласованных мер  $Q_U$ , индексированных семейством счетных подмножеств  $U \subset T$ , что показывает следующее упражнение.

1. Пусть  $Q_U$  — меры на пространствах  $(S_U, \mathcal{B}_U)$ , заданные для конечных или счетных множеств  $U \subset T$  (для конечных  $U$  меры  $Q_U$  задавались изначально). Пусть условие согласованности (I.43) выполняется для всех конечных или счетных  $V, U \subset T$  ( $V \subset U \subset T$ ). По теореме 6 главы I для каждого  $B \in \mathcal{B}_T$  найдем множество  $U = U(B) \in N(T)$  такое, что  $B \in \mathcal{B}_{T,U}$  (т. е.  $B = \pi_{T,U}^{-1} B_U$ , где  $B_U \in \mathcal{B}_U$ ) и определим функцию  $Q$ , положив

$$Q(B) = Q_U(B_U). \quad (8)$$

Докажите, что (8) корректным образом задает меру на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}_T$ .

В заключение этого раздела упомянем также известную теорему Ионеску Тулча (см., например, [85; т. 1, с. 318]), позволяющую строить *последовательность* случайных элементов, имеющих заданные совместные распределения (определяемые по семейству вероятностных ядер) в произведениях произвольных измеримых пространств.

## Приложение 2

### Доказательство теоремы Прохорова

**А.** Пусть  $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  — плотное семейство мер на  $\mathcal{B}(S)$ , где  $S$  — метрическое пространство. Докажем, что это семейство слабо относительно компактно.

Если  $S$  — компактное пространство (компакт), то  $C(S) = C_b(S)$  и слабая сходимость вероятностных мер эквивалентна сходимости в слабой  $*$ -топологии на сопряженном пространстве  $C^*(S)$ . При этом совокупность  $\mathcal{P}(S)$  вероятностных мер на  $\mathcal{B}(S)$  является слабо  $*$ -замкнутым подмножеством единичного шара пространства  $C^*(S)$ , который, как известно, есть компакт в слабой  $*$ -топологии. Следовательно,  $\mathcal{P}(S)$  также является компактом в слабой  $*$ -топологии как пересечение замкнутого множества с компактом. Это завершает доказательство первого утверждения теоремы 6 главы V для компакта  $S$ .

Теперь поясним сказанное подробнее. По теореме Рисса–Маркова (см. [60; т. 1, с. 124]) каждый непрерывный линейный функционал  $F$  на  $C(S)$ , т. е.  $F \in C^*(S)$ , однозначно представляется в виде

$$F(f) = \langle f, Q \rangle = \int_S f(x) Q(dx), \quad f \in C(S),$$

здесь  $Q$  — заряд на  $\mathcal{B}(S)$ , т. е.  $Q = Q^+ - Q^-$ , где  $Q^+$  и  $Q^-$  — конечные меры на  $\mathcal{B}(S)$ , а  $\langle f, Q \rangle = \langle f, Q^+ \rangle - \langle f, Q^- \rangle$ . Функционал  $F$  идентифицируется с зарядом  $Q$ ; кроме того,

$$\mathcal{P}(S) = \{Q \in C^*(S) : \langle f, Q \rangle \geq 0 \text{ для } f \geq 0, f \in C(S) \text{ и } \langle \bar{1}, Q \rangle = 1\}, \quad (1)$$

где  $\bar{1}$  — функция, равная единице на множестве  $S$ , иначе говоря,  $\bar{1} = 1_S$ . Для  $F \in C^*(S)$  имеем

$$\|F\|_{C^*(S)} := \sup\{|F(f)| : f \in C(S), \sup_{x \in S} |f(x)| \leq 1\}. \quad (2)$$

Очевидно, для  $Q \in \mathcal{P}(S)$  и  $f \in C(S)$

$$|\langle f, Q \rangle| \leq \sup_{x \in S} |f(x)| \langle \bar{1}, Q \rangle \leq \sup_{x \in S} |f(x)|,$$

поэтому  $\mathcal{P}(S)$  — подмножество единичного шара в  $C^*(S)$ , т. е. шара

$$B = \{F \in C^*(S) : \|F\|_{C^*(S)} \leq 1\}.$$

Проверим  $*$ -замкнутость  $\mathcal{P}(S)$ . Допустим, что  $Q_\alpha$  слабо  $*$ -сходится к некоторому элементу  $Q$  в пространстве  $C^*(S)$ , т. е.

$$\langle f, Q_\alpha \rangle \rightarrow \langle f, Q \rangle \quad \text{для любого } f \in C(S), \quad (3)$$

здесь индекс  $\alpha$  пробегает некоторое направленное множество. Но тогда  $Q$  обладает свойствами, описываемыми в (1) меры из  $\mathcal{P}(S)$ . Подчеркнем, что шар  $B$  берется по норме (2), но его компактность (теорема Банаха–Алаоглу, см., например, [60; т. 1, с. 133]) устанавливается не по этой норме, а в смысле слабой  $*$ -топологии. Итак, утверждение А детально доказано для компактных пространств  $S$ .

Общий случай сводится к уже рассмотренному. Пусть  $S$  есть  $\sigma$ -компактное пространство, т. е.  $S = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$ , где  $S_m$  — компакт ( $m \in \mathbb{N}$ ). Тогда  $S$  сепарабельно и, следовательно, гомеоморфно борелевскому подмножеству  $M$  компактного пространства  $V = [0, 1]^{\mathbb{N}}$  (см., например, [101; с. 2]). В силу теоремы 2 главы V слабая сходимость мер сохраняется под действием непрерывного отображения. Это же, очевидно, относится и к свойству плотности. Поэтому можно сразу считать меры  $P_\alpha$  ( $\alpha \in \Lambda$ ) заданными на  $(S, \mathcal{B}(S)) = (M, \mathcal{B}(M))$  и продолженными до плотного семейства мер  $Q_\alpha$  на  $(V, \mathcal{B}(V))$  по формуле

$$Q_\alpha(A) := P_\alpha(A \cap M), \quad A \in \mathcal{B}(V), \quad \alpha \in \Lambda. \quad (4)$$

При этом  $Q_\alpha = P_\alpha$  на  $\mathcal{B}(S) \subset \mathcal{B}(V)$ . По доказанному, из произвольной последовательности мер  $Q_n$  (пишем  $Q_n$  вместо  $Q_{\alpha_n}$ ), входящих в семейство  $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ , можно извлечь подпоследовательность  $Q_{n_j}$  такую, что

$$Q_{n_j} \Rightarrow Q \quad \text{при } j \rightarrow \infty,$$

где  $Q$  — некоторая (вероятностная) мера на  $(V, \mathcal{B}(V))$ . Покажем, что  $P_{n_j} \Rightarrow P$  при  $j \rightarrow \infty$  (пишем  $P_n$  вместо  $P_{\alpha_n}$ ), где  $P = Q|_{\mathcal{B}(S)}$ , т. е. сужение меры  $Q$  на  $\mathcal{B}(S)$ . Для каждого  $m \in \mathbb{N}$  найдем в  $S$  компакт  $K_m$  такой, что

$$P_\alpha(K_m) > 1 - 1/m \quad \text{при всех } \alpha \in \Lambda. \quad (5)$$

Тогда по теореме 1 главы V, учитывая, что  $\mathcal{B}(S) \subset \mathcal{B}(V)$ , имеем для произвольного  $m \in \mathbb{N}$

$$Q(S) \geq Q(K_m) \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} Q_{n_j}(K_m) = \limsup_j P_{n_j}(K_m) \geq 1 - 1/m.$$

Следовательно,  $Q(S) = 1$ , значит,  $P(S) = 1$ . Кроме того, для любого замкнутого множества  $F \subset S$ , снова используя теорему 1 главы V, получаем, что

$$\limsup_j P_{n_j}(F) = \limsup_j Q_{n_j}(F) \leq Q(F) = P(F),$$

откуда вытекает, что  $P_{n_j} \Rightarrow P$  на  $(S, \mathcal{B}(S))$  при  $j \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим произвольное метрическое пространство  $S$  и  $S_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m \in \mathcal{B}(S)$ , где  $K_m$  фигурирует в (5). Тогда

$$P_{\alpha}(S_0) = 1 \quad \text{для любого } \alpha \in \Lambda.$$

Таким образом,  $\{\tilde{P}_{\alpha}, \alpha \in \Lambda\}$  есть плотное семейство мер на  $\sigma$ -компактном пространстве  $(S_0, \mathcal{B}(S_0))$ , где  $\tilde{P}_{\alpha}$  обозначает сужение меры  $P_{\alpha}$  на  $\mathcal{B}(S_0)$ . По доказанному из любой последовательности  $\tilde{P}_n$  (т. е.  $\tilde{P}_{\alpha_n}$ ) мер, входящих в семейство  $\{\tilde{P}_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ , можно выбрать подпоследовательность  $\tilde{P}_{n_j}$  такую, что  $\tilde{P}_{n_j} \Rightarrow \tilde{P}$  при  $j \rightarrow \infty$ , здесь  $\tilde{P}$  — некоторая (вероятностная) мера на  $(S_0, \mathcal{B}(S_0))$ .

Введем меру  $P$  на  $(S, \mathcal{B}(S))$  аналогично (4), положив

$$P(A) := \tilde{P}(A \cap S_0), \quad A \in \mathcal{B}(S).$$

Заметим, что  $P(S \setminus S_0) = 0$  и  $P_{\alpha}(S \setminus S_0) = 0$ ,  $\alpha \in \Lambda$ . Следовательно, для любой функции  $f \in C_b(S)$  и всех  $\alpha \in \Lambda$  имеем

$$\int_S f dP_{\alpha} = \int_{S_0} f|_{S_0} d\tilde{P}_{\alpha}, \quad \int_S f dP = \int_{S_0} f|_{S_0} d\tilde{P},$$

где  $f|_{S_0} \in C_b(S_0)$ . Таким образом,  $P_{n_j} \Rightarrow P$  при  $j \rightarrow \infty$ . Искомое утверждение  $A$  доказано.

**В.** Докажем теперь, что если  $S$  — польское пространство с метрикой  $\rho$ , то слабо относительно компактное семейство мер  $\{P_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$  является плотным.

Из доказательства леммы 6 главы V видно, что если для любых  $\varepsilon, \delta > 0$  можно указать конечный набор открытых шаров  $V_{\delta}(y_m) = \{x \in S: \rho(x, y_m) < \delta\}$ ,  $m = 1, \dots, N$  ( $N$  и  $y_1, \dots, y_N$  зависят от  $\varepsilon, \delta$ ) такой, что

$$P_{\alpha}\left(\bigcup_{m=1}^N V_{\delta}(y_m)\right) > 1 - \varepsilon \quad \text{при всех } \alpha \in \Lambda, \quad (6)$$

то семейство  $\{P_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$  плотно.

Покажем, что если условие (6) не будет справедливо, то это будет противоречить слабой относительной компактности  $\{P_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ . В силу сепарабельности  $S$  для каждого  $\delta > 0$  можно найти покрытие этого пространства шарами вида  $V_{\delta}(y_m)$ , где  $y_m \in S$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Невыполнение (6) влечет существование  $\varepsilon, \delta > 0$  таких, что для любого  $n \in \mathbb{N}$  найдется мера  $P_n$  (т. е. мера  $P_{\alpha_n}$ ), для которой

$$P_n(C_n) \leq 1 - \varepsilon, \quad \text{где } C_n = \bigcup_{m=1}^n V_{\delta}(y_m). \quad (7)$$

Предположим, что выбрана подпоследовательность  $\{n'\} \subset \mathbb{N}$  такая, что  $P_{n'} \Rightarrow P$  при  $n' \rightarrow \infty$  для некоторой меры  $P$  на  $(S, \mathcal{B}(S))$ . Множества  $C_j$  открыты, поэтому согласно теореме 1 главы V

$$P(C_j) \leq \liminf_{n' \rightarrow \infty} P_{n'}(C_j) \quad \text{для каждого } j \in \mathbb{N}.$$

Заметив, что  $C_j \subset C_{n'}$  при  $n' \geq j$ , учитывая (7), получаем

$$P(C_j) \leq \liminf_{n' \rightarrow \infty} P_{n'}(C_{n'}) \leq 1 - \varepsilon,$$

что противоречит тому, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} P(C_j) = P(S) = 1$ . Таким образом, утверждение В доказано.  $\square$

**Замечание 1.** Первоначально теорема Прохорова была получена в форме необходимых и достаточных условий относительной компактности семейства мер в польских пространствах. Достаточность (т. е. плотность семейства мер обеспечивает его относительную компактность) была установлена для любых метрических пространств Варадарайном. Доказательство этого результата, не опирающееся на теорему Рисса–Маркова (как это делалось выше более подробно, чем в [11]), а использующее редукцию к  $\sigma$ -компактному пространству, затем к пространству  $\mathbb{R}^\infty$ , а после этого — к  $\mathbb{R}^k$  (с применением теоремы Хелли и теоремы Колмогорова о согласованных распределениях) можно прочесть в [2] на с. 58–62.

## Приложение 3

### Доказательства теорем Линдеберга и Дуба

В этом разделе приводятся доказательства многомерной теоремы Линдеберга (теорема 9 главы V) и теоремы Дуба (теорема 13 главы V). Кроме того, даются вспомогательные результаты и упражнения, относящиеся к слабой сходимости случайных векторов со значениями в  $k$ -мерном евклидовом пространстве.

#### § 1. Доказательство теоремы Линдеберга

**А.** Матрица  $B^2$  в условии (V.17) будет симметрична и неотрицательно определена как предел матриц с этими свойствами. Следовательно, можно рассмотреть распределение  $N(0, B^2)$ . В силу теоремы 13 главы V достаточно проверить, что при каждом  $\lambda \in \mathbb{R}^k$

$$\varphi_{S_n}(\lambda) \rightarrow \exp\{-\langle B^2\lambda, \lambda \rangle/2\}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

здесь и далее  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^k$ , порождающее евклидову норму  $\|\cdot\|$ ,  $\varphi_{S_n}$  — характеристическая функция случайного вектора  $S_n$ .

Независимость  $\xi_{n,q}$ ,  $q = 1, \dots, m_n$ , влечет, что при любых  $n \in \mathbb{N}$  и  $\lambda \in \mathbb{R}^k$

$$\varphi_{S_n}(\lambda) = \prod_{q=1}^{m_n} \varphi_{\xi_{n,q}}(\lambda).$$

Поэтому вначале обратимся к анализу поведения характеристических функций векторов  $\xi_{n,q}$ .

**В.** Воспользуемся известным неравенством

$$|\exp\{i\alpha\} - 1 - i\alpha - \dots - (i\alpha)^{n-1}/(n-1)!| \leq |\alpha|^n/n!, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Применив (2) при  $n = 2$  и  $n = 3$ , получаем

$$|\exp\{i\alpha\} - 1 - i\alpha + \alpha^2/2| \leq \min\{|\alpha|^2, |\alpha|^3\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Отсюда, поскольку  $|\langle \lambda, x \rangle| \leq \|\lambda\| \|x\|$  для  $\lambda, x \in \mathbb{R}^k$ , находим

$$\exp\{i\langle \lambda, x \rangle\} = 1 + i\langle \lambda, x \rangle - \langle \lambda, x \rangle^2/2 + g(\langle \lambda, x \rangle), \quad (3)$$

где

$$|g(\langle \lambda, x \rangle)| \leq C(\lambda) \min\{\|x\|^2, \|x\|^3\} \quad \text{и} \quad C(\lambda) = \max\{\|\lambda\|^2, \|\lambda\|^3\}. \quad (4)$$

Из (3) при всех  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q = 1, \dots, m_n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^k$  имеем

$$\varphi_{\xi_{n,q}}(\lambda) = \mathbf{E} \exp\{i\langle \lambda, \xi_{n,q} \rangle\} = 1 - \frac{1}{2} \langle B_{n,q}^2 \lambda, \lambda \rangle + \mathbf{E} g(\langle \lambda, \xi_{n,q} \rangle) = 1 + z_{n,q}(\lambda); \quad (5)$$

мы воспользовались тем, что  $\mathbf{E} g(\langle \lambda, \xi_{n,q} \rangle)$  существует в силу (4), и учли, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \langle \lambda, \xi_{n,q} \rangle &= \langle \lambda, \mathbf{E} \xi_{n,q} \rangle = 0, \\ \mathbf{E} \langle \lambda, \xi_{n,q} \rangle^2 &= \sum_{r,j=1}^k \lambda_r \lambda_j \mathbf{E} \xi_{n,q}^{(r)} \xi_{n,q}^{(j)} = \langle B_{n,q}^2 \lambda, \lambda \rangle. \end{aligned}$$

Зафиксируем  $\lambda \in \mathbb{R}^k$  и покажем, что  $|z_{n,q}(\lambda)| < 1/2$  при всех достаточно больших  $n$  и любых  $q = 1, \dots, m_n$ .

Пусть  $\|A\|$  для матрицы  $A = (a_{r,j})_{r,j=1}^k$  обозначает ее норму как линейного оператора, т. е.  $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ . Для ковариационной матрицы  $A$

$$\|A\| \leq c \operatorname{Tr} A, \quad \text{где } c = c(k) > 0,$$

$\operatorname{Tr}$  — это *след матрицы*, т. е. сумма ее диагональных элементов. Поэтому

$$|\langle B_{n,q}^2 \lambda, \lambda \rangle| \leq \|B_{n,q}^2\| \|\lambda\|^2 \leq c \operatorname{Tr} B_{n,q}^2 \|\lambda\|^2. \quad (6)$$

Далее, при  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q = 1, \dots, m_n$  и произвольном  $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{Tr} B_{n,q}^2 = \mathbf{E} \|\xi_{n,q}\|^2 = \mathbf{E} \|\xi_{n,q}\|^2 \mathbf{1}\{\|\xi_{n,q}\| \leq \varepsilon\} + \mathbf{E} \|\xi_{n,q}\|^2 \mathbf{1}\{\|\xi_{n,q}\| > \varepsilon\} \leq \varepsilon^2 + \mathcal{L}_n(\varepsilon),$$

где функция Линдеберга

$$\mathcal{L}_n(\varepsilon) = \sum_{q=1}^{m_n} \mathbf{E} \|\xi_{n,q}\|^2 \mathbf{1}\{\|\xi_{n,q}\| > \varepsilon\}.$$

Следовательно, учитывая условие Линдеберга (V.18), видим, что выполнено условие “асимптотической малости”:

$$\max_{1 \leq q \leq m_n} \operatorname{Tr} B_{n,q}^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Из (4)–(7) вытекает, что

$$|\mathbf{E} g(\langle \lambda, \xi_{n,q} \rangle)| \leq C(\lambda) \mathbf{E} \langle \lambda, \xi_{n,q} \rangle^2.$$

Согласно (7) получаем

$$\max_{1 \leq q \leq m_n} |z_{n,q}(\lambda)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

С. Для  $w \in \mathbb{C}$ ,  $w \neq 0$ , как обычно, полагаем  $\log w = \log |w| + i \arg w$ , здесь  $0 \leq \arg w < 2\pi$ . Известно, что для  $z \in \mathbb{C}$

$$\log(1+z) = z + h(z), \quad \text{где } |h(z)| \leq |z|^2 \quad \text{при } |z| < 1/2. \quad (9)$$

Поэтому для любого  $n$  и некоторого  $N(\lambda, n) \in \mathbb{Z}$

$$\log \varphi_{S_n}(\lambda) = \sum_{q=1}^{m_n} \log \varphi_{\xi_{n,q}}(\lambda) + 2\pi i N(\lambda, n). \quad (10)$$

В силу (8)–(10) при всех достаточно больших  $n$  имеем

$$\log \varphi_{S_n}(\lambda) = \sum_{q=1}^{m_n} z_{n,q}(\lambda) + \sum_{q=1}^{m_n} h(z_{n,q}(\lambda)) + 2\pi i N(\lambda, n). \quad (11)$$

Теперь заметим, что в силу (5)

$$\sum_{q=1}^{m_n} z_{n,q}(\lambda) = -\frac{1}{2} \langle B_n^2 \lambda, \lambda \rangle + \sum_{q=1}^{m_n} \mathbb{E} g(\langle \lambda, \xi_{n,q} \rangle), \quad (12)$$

поскольку  $B_n^2 = \sum_{q=1}^{m_n} B_{n,q}^2$ . Учитывая (4), находим, что для всех  $0 < \varepsilon < 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |g(\langle \lambda, \xi_{n,q} \rangle)| &= \mathbb{E} |g(\langle \lambda, \xi_{n,q} \rangle)| \mathbf{1}\{\|\xi_{n,q}\| \leq \varepsilon\} + \mathbb{E} |g(\langle \lambda, \xi_{n,q} \rangle)| \mathbf{1}\{\|\xi_{n,q}\| > \varepsilon\} \leq \\ &\leq C(\lambda) (\mathbb{E} \|\xi_{n,q}\|^3 \mathbf{1}\{\|\xi_{n,q}\| \leq \varepsilon\} + \mathbb{E} \|\xi_{n,q}\|^2 \mathbf{1}\{\|\xi_{n,q}\| > \varepsilon\}). \end{aligned} \quad (13)$$

При этом, очевидно,

$$\mathbb{E} \|\xi_{n,q}\|^3 \mathbf{1}\{\|\xi_{n,q}\| \leq \varepsilon\} \leq \varepsilon \mathbb{E} \|\xi_{n,q}\|^2 = \varepsilon \operatorname{Tr} B_{n,q}^2. \quad (14)$$

Из (13), (14), условия Линдеберга (V.18), а также соотношения

$$\sum_{q=1}^{m_n} \operatorname{Tr} B_{n,q}^2 = \operatorname{Tr} B_n^2 \rightarrow \operatorname{Tr} B^2 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

получаем, что

$$\sum_{j=1}^{m_n} \mathbb{E} |g(\langle \lambda, \xi_{n,q} \rangle)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Поскольку

$$\langle B_n^2 \lambda, \lambda \rangle \rightarrow \langle B^2 \lambda, \lambda \rangle \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (16)$$

согласно (12), (15) имеем

$$\sum_{q=1}^{m_n} z_{n,q}(\lambda) \rightarrow -\frac{1}{2} \langle B^2 \lambda, \lambda \rangle \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Заметим, что для всех достаточно больших  $n$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{q=1}^{m_n} h(z_{n,q}(\lambda)) \right| &\leq \sum_{q=1}^{m_n} |z_{n,q}(\lambda)|^2 \leq 2 \sum_{q=1}^{m_n} [\langle B_{n,q}^2 \lambda, \lambda \rangle^2 / 4 + (\mathbb{E} g(\langle \lambda, \xi_{n,q} \rangle))^2] \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{1 \leq q \leq m_n} |\langle B_{n,q}^2 \lambda, \lambda \rangle| \langle B_n^2 \lambda, \lambda \rangle + 2 \left( \sum_{q=1}^{m_n} \mathbb{E} |g(\langle \lambda, \xi_{n,q} \rangle)| \right)^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$



где первое неравенство цепочки следует из (9), второе — элементарно вытекает из определения  $z_{n,q}(\lambda)$  в (5), а стремление к нулю последней оценки обеспечивают соотношения (6), (7), (16) и (15).

Из (11), (16) заключаем, что

$$\varphi_{S_n}(\lambda) = e^{\log \varphi_{S_n}(\lambda)} \rightarrow e^{-1/2 \langle B^2 \lambda, \lambda \rangle}, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square$$

## § 2. Обсудим условия теоремы Линдеберга.

Условие (V.17) фактически содержит в себе нормировку исходных слагаемых. Например, если  $B_n^2 > 0$ , начиная с некоторого  $n$  (при  $k = 1$  это тривиальное требование, означающее, что в  $n$ -й серии не все слагаемые вырождены), то, полагая  $\zeta_{n,q} = B_n^{-1} \xi_{n,q}$  (из  $B_n^2$  извлекается квадратный корень и берется обратная матрица), для  $Z_n = \sum_{q=1}^{m_n} \zeta_{n,q}$  находим, что

$$DZ_n = D(B_n^{-1} S_n) = B_n^{-1} D S_n (B_n^{-1})^* = I.$$

Иначе говоря, условие (V.17) становится выполненным для величин  $\zeta_{n,q}$ .

1. Пусть для любого  $\varepsilon > 0$

$$\sigma_n^{-2} \sum_{q=1}^{m_n} \mathbf{E} (\|\xi_{n,q}\|^2 \mathbf{1}(\|\xi_{n,q}\| > \varepsilon \sigma_n)) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (18)$$

где  $\sigma_n^2 = \text{Tr } B_n^2 > 0$ , а векторы  $\xi_{n,q}$  центрированы. Докажите, что тогда для введенных выше величин  $\zeta_{n,q}$  выполняется условие Линдеберга (V.18). Заметим, что при  $k = 1$  теорема Линдеберга обычно формулируется с единственным условием (18), которое обеспечивает сходимость нормированных сумм  $Z_n$  к  $N(0, 1)$ .

2. Проверьте, что если  $\{X_j, j \in \mathbb{N}\}$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов в  $\mathbb{R}^k$  со средним 0 и ковариационной матрицей  $B^2$ , то

$$n^{-1/2} \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, B^2) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

3. Объясните, почему *условие Ляпунова*: для некоторого  $s \in (2, 3]$

$$L_{n,s} = \sum_{j=1}^{m_n} \mathbf{E} \|\xi_{n,j}\|^s \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

— влечет условие Линдеберга.

Представляет интерес следующий результат.

**Лемма 1.** Пусть для серий независимых (при каждом  $n$ ) центрированных случайных векторов  $\xi_{n,q}$ ,  $1 \leq q \leq m_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , выполнено условие Линдеберга (V.18). Если

$$S_n := \sum_{q=1}^{m_n} \xi_{n,q} \xrightarrow{\mathcal{D}} Y, \quad (19)$$

где  $Y$  — некоторый случайный вектор, то верно (V.17) и при этом  $Y \sim \mathcal{N}(0, B^2)$ .

**Доказательство.** Допустим, что последовательность  $\{b_n^{(r,r)}, n \geq 1\}$  не имеет предела для некоторого  $r \in \{1, \dots, k\}$ , где  $b_n^{(r,j)}$  — это элемент матрицы ковариаций  $B_n^2$ , стоящий в  $r$ -й строке и  $j$ -м столбце. Если последовательность  $\{b_n^{(r,r)}\}$  неограничена, то  $b_{n'}^{(r,r)} \rightarrow \infty$  для некоторой подпоследовательности  $\{n'\}$ .

По теореме 2 главы V слабая сходимость векторов влечет слабую сходимость подвекторов (составленных из фиксированной части компонент исходных векторов). Поэтому

$$S_n^{(r)} \xrightarrow{\mathcal{D}} Y^{(r)} \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (20)$$

где верхний индекс  $r$  обозначает  $r$ -ю компоненту векторов.

Мы можем также утверждать, что

$$S_{n'}^{(r)} / \sqrt{b_{n'}^{(r,r)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (21)$$

поскольку для центрированных величин  $\xi_{n',q} / \sqrt{b_{n'}^{(r,r)}}$ ,  $q = 1, \dots, m_{n'}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , выполнено условие Линдеберга: действительно, при всех достаточно больших  $n'$  величины  $b_{n'}^{(r,r)} \geq 1$  и тогда при любом  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b_{n'}^{(r,r)}} \sum_{q=1}^{m_{n'}} \mathbb{E} \left( |\xi_{n',q}^{(r)}|^2 \mathbf{1} \{ |\xi_{n',q}^{(r)}| > \varepsilon \sqrt{b_{n'}^{(r,r)}} \} \right) \leq \\ & \leq \sum_{q=1}^{m_{n'}} \mathbb{E} ( \|\xi_{n',q}\|^2 \mathbf{1} \{ \|\xi_{n',q}\| > \varepsilon \} ) \rightarrow 0, \quad n' \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Воспользуемся (при  $k = 1$ ) следующим простым фактом.

4. Если  $\zeta_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \zeta$  в  $\mathbb{R}^k$  и числовая последовательность  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  такова, что  $c_n \rightarrow 0$ , то  $c_n \zeta_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Поскольку  $1 / \sqrt{b_{n'}^{(r,r)}} \rightarrow 0$ ,  $n' \rightarrow \infty$ , то видим, что одновременное выполнение (20) и (21) невозможно. Пришли к противоречию, следовательно, последовательность  $\{b_n^{(r,r)}, n \geq 1\}$  не может быть неограниченной.

Если последовательность  $\{b_n^{(r,r)}\}$  ограничена, но не имеет предела, то найдутся подпоследовательности  $\{n'\}$  и  $\{n''\}$  такие, что  $b_{n'}^{(r,r)} \rightarrow b'$  и  $b_{n''}^{(r,r)} \rightarrow b''$ , причем

$b' \neq b''$ . Тогда получим, что  $S_{n'}^{(r)} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, b')$  и  $S_{n''}^{(r)} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, b'')$  в силу теоремы 9 главы V. Однако это невозможно в силу единственности слабого предела (лемма 1 главы V). Таким образом, доказано, что последовательности  $\{b_n^{(r,r)}\}_{n \geq 1}$  имеют пределы при каждом  $r = 1, \dots, k$ .

По неравенству Коши–Буняковского–Шварца  $|b_n^{(r,j)}| \leq \sqrt{b_n^{(r,r)} b_n^{(j,j)}}$ , поэтому проведенные рассуждения показывают, что  $\{b_n^{(r,j)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  ограничена и при любых  $r \neq j$  ( $r, j \in \{1, \dots, k\}$ ). Рассмотрев двумерный вектор  $(S_n^{(r)}, S_n^{(j)})$ , снова придем к противоречию с леммой 1 главы V, если допустим, что не существует предел у  $b_n^{(r,j)}$  при  $n \rightarrow \infty$  для каких-либо  $r \neq j$  (векторы, составленные из части компонент исходных векторов  $\xi_{n,q}$  также удовлетворяют условию Линдеберга).

Таким образом, условия теоремы влекут соотношение (V.17), а это обеспечивает в силу теоремы 8 главы V, что  $Y \sim N(0, B^2)$ .  $\square$

5. Постройте пример (при  $k = 1$ ), показывающий, что если для серий независимых центрированных векторов потребовать выполнения центральной предельной теоремы, т. е. соотношения (19) с  $Y \sim N(0, B^2)$ , но без условия Линдеберга, то соотношение (V.17) не обязано быть справедливым.

§ 3. Следующий результат объясняет, в каком смысле условие Линдеберга является *необходимым* для справедливости центральной предельной теоремы.

**Теорема 1** (Феллер). Пусть  $\xi_{n,q}$ ,  $1 \leq q \leq m_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , — серии независимых (в  $n$ -й серии) центрированных случайных векторов в  $\mathbb{R}^k$ , удовлетворяющих условию (V.17). Если справедлива центральная предельная теорема, т. е. имеет место соотношение (V.19), и при этом удовлетворяется условие (7), то выполнено условие Линдеберга (V.18). Таким образом, для упомянутых серий условие Линдеберга равносильно одновременному выполнению центральной предельной теоремы и условия “асимптотической малости” в форме (7).

Доказательство теоремы можно провести, обобщая рассуждение, приведенное в [85; т. 1, с. 427] для одномерного случая ( $k = 1$ ). При этом ключевую роль будет играть следующее упражнение.

6. Пусть  $\xi$  — центрированный случайный вектор в  $\mathbb{R}^k$  с ковариационной матрицей  $C$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  справедливо неравенство

$$E \|\xi\|^2 \mathbf{1}(\|\xi\| > \varepsilon) \leq \varepsilon^2 (\operatorname{Re} \varphi(\lambda) - 1 - \langle C\lambda, \lambda \rangle / 2),$$

где  $\varphi$  — характеристическая функция  $\xi$  и  $\lambda = \lambda(\varepsilon) = (0, \dots, \sqrt{6k}/\varepsilon, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$ , а единственная ненулевая компонента  $\lambda$  имеет номер  $j_0 = j_0(\varepsilon)$  такой, что

$$E \xi_{j_0}^2 \mathbf{1}(\|\xi\| > \varepsilon) = \max_{1 \leq j \leq k} E \xi_j^2 \mathbf{1}(\|\xi\| > \varepsilon).$$

§ 4. **Доказательство теоремы Дуба** (теорема 14 главы V). Нам потребуется несколько вспомогательных утверждений. Введем еще одно условие “бесконечной малости” случайных векторов  $\xi_{n,q}$  ( $1 \leq q \leq m_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) со значениями в  $\mathbb{R}^k$ :

$$\max_{1 \leq q \leq m_n} \|\xi_{n,q}\| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

**Лемма 2.** Для серий независимых (при каждом  $n$ ) случайных векторов  $\xi_{n,q}$  условие (22) равносильно тому, что

$$\sum_{q=1}^{m_n} P(\|\xi_{n,q}\| > \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при каждом } \varepsilon > 0, \text{ когда } n \rightarrow \infty. \quad (23)$$

**Доказательство.** Для любого  $\varepsilon > 0$  и всех  $n \in \mathbb{N}$  имеем

$$\max_{1 \leq q \leq m_n} P(\|\xi_{n,q}\| > \varepsilon) \leq P\left(\max_{1 \leq q \leq m_n} \|\xi_{n,q}\| > \varepsilon\right) \leq \sum_{q=1}^{m_n} P(\|\xi_{n,q}\| > \varepsilon). \quad (24)$$

Следовательно, (23) влечет (22).

В силу независимости  $\xi_{n,q}$ ,  $q = 1, \dots, m_n$ ,

$$P\left(\max_{1 \leq q \leq m_n} \|\xi_{n,q}\| > \varepsilon\right) = 1 - \prod_{q=1}^{m_n} (1 - P(\|\xi_{n,q}\| > \varepsilon)).$$

Теперь заметим, что для  $a_{n,q} \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq q \leq m_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , если  $\max_{1 \leq q \leq m_n} |a_{n,q}| \rightarrow 0$ , то

$$\prod_{q=1}^{m_n} (1 + a_{n,q}) \rightarrow 1 \iff \sum_{q=1}^{m_n} a_{n,q} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Поэтому из (22) вытекает (23).  $\square$

**Лемма 3.** Пусть для серий независимых векторов  $\xi_{n,q}$  выполнено условие (22) и пусть для некоторой константы  $c > 0$

$$\|\xi_{n,q}\| \leq c \quad \text{н. н.,} \quad q = 1, \dots, m_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (25)$$

Тогда серии центрированных векторов  $\eta_{n,q} = \xi_{n,q} - E \xi_{n,q}$ ,  $1 \leq q \leq m_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , удовлетворяют условию Линдеберга (V.17).

**Доказательство.** Для любого  $\nu > 0$  с учетом (25) имеем

$$\max_{1 \leq q \leq m_n} \|E \xi_{n,q}\| \leq \nu + c \max_{1 \leq q \leq m_n} P(\|\xi_{n,q}\| > \nu).$$

Отсюда

$$\max_{1 \leq q \leq m_n} \|E \xi_{n,q}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (26)$$

По лемме 2, а также в силу (25) и (26), при каждом  $\varepsilon > 0$  и всех достаточно больших  $n$  получаем

$$\sum_{q=1}^{m_n} E(\|\eta_{n,q}\|^2 \mathbf{1}\{\|\eta_{n,q}\| > \varepsilon\}) \leq (2c)^2 \sum_{q=1}^{m_n} P(\|\xi_{n,q}\| > \varepsilon/2) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad \square \quad (27)$$

**Лемма 4.** Пусть серии независимых (при каждом  $n$ ) случайных векторов  $\xi_{n,q}$  со значениями в  $\mathbb{R}^k$  ( $1 \leq q \leq m_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) удовлетворяют условию (22). Если имеет место соотношение (19), то  $Y \sim N(a, B^2)$  для некоторого вектора  $a$  и некоторой матрицы  $B^2$ .

**Доказательство.** Положим  $\bar{\xi}_{n,q} = \xi_{n,q} \mathbf{1}\{\|\xi_{n,q}\| \leq c\}$ , где  $c > 0$ . Из условия (22) вытекает, что для каждого  $c > 0$

$$\sum_{q=1}^{m_n} \xi_{n,q} \mathbf{1}\{\|\xi_{n,q}\| > c\} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поэтому достаточно лишь проверить, что  $\sum_{q=1}^{m_n} \bar{\xi}_{n,q} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(a, B^2)$  при  $n \rightarrow \infty$ , как показывает (при  $S = \mathbb{R}$  и  $y = 0$ ) следующее упражнение.

**7.** Пусть  $\zeta, \eta_n, n \in \mathbb{N}$ , — случайные элементы на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  со значениями в сепарабельном метрическом векторном пространстве  $(S, \rho)$ . Пусть  $\zeta_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \zeta$  и  $\eta_n \xrightarrow{P} y$  при  $n \rightarrow \infty$ , где точка  $y \in S$  ( $\eta_n \xrightarrow{P} y$  означает, что  $\rho(\eta_n, y) \xrightarrow{P} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ). Тогда  $\zeta_n + \eta_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \zeta + y, n \rightarrow \infty$ .

Таким образом, опуская черту над  $\xi_{n,q}$ , можем сразу считать, что исходные векторы удовлетворяют условию (25) при некотором  $c > 0$ .

Воспользуемся очень полезным *методом симметризации*, а именно: рассмотрим *симметризованные векторы*  $\tilde{\xi}_{n,q} = \xi'_{n,q} - \xi''_{n,q}$ , где

$$\text{Law}(\xi'_{n,q}) = \text{Law}(\xi''_{n,q}) = \text{Law}(\xi_{n,q}),$$

причем  $\xi'_{n,q}, \xi''_{n,q}, 1 \leq q \leq m_n$ , — независимы ( $n \in \mathbb{N}$ ). Тогда  $\tilde{S}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{Y}$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $\tilde{S}_n, \tilde{Y}$  — симметризованные векторы  $S_n$  и  $Y$ . При этом для любого  $\varepsilon > 0$

$$P(\|\tilde{\xi}_{n,q}\| > \varepsilon) \leq 2P(\|\xi_{n,q}\| > \varepsilon/2).$$

Отсюда в силу леммы 2 видим, что  $\tilde{\xi}_{n,q}$  также удовлетворяют условию бесконечной малости:

$$\max_{1 \leq q \leq m_n} \|\tilde{\xi}_{n,q}\| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Поэтому по лемме 3 (с учетом того, что  $\|\tilde{\xi}_{n,q}\| \leq 2c$  п. н.) для них также справедливо условие Линдеберга:

$$\sum_{q=1}^{m_n} E \|\tilde{\xi}_{n,q}\|^2 \mathbf{1}\{\|\tilde{\xi}_{n,q}\| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \quad \text{при каждом } \varepsilon > 0, \quad \text{когда } n \rightarrow \infty.$$

Поскольку векторы  $\tilde{\xi}_{n,q}$  центрированы, то по лемме 1 существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} D\tilde{S}_n$ , где  $D\tilde{S}_n$  — ковариационная матрица  $\tilde{S}_n$ . Заметим, что  $D\tilde{S}_n = 2DS_n$ . Следовательно, существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} DS_n = B^2$ .

Тогда по лемме 3 и теореме 9 главы V имеем  $S_n - ES_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, B^2)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Теперь применим следующий результат.

8. Пусть  $\zeta_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \zeta$  и  $\zeta_n + a_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \eta$ , где  $\zeta_n, \zeta, \eta$  — случайные векторы в  $\mathbb{R}^k$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Тогда существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  (и в силу упражнения 7 тогда  $\zeta + a \stackrel{\mathcal{D}}{=} \eta$ ).

Таким образом существует  $\lim_n \mathbf{E} S_n$ , что завершает доказательство леммы.  $\square$

Теперь нетрудно доказать теорему Дуба. Пусть  $0 \leq s < t < \infty$ . Разделим отрезок  $[s, t]$  точками  $t_{n,k} = s + k(t-s)/n$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Очевидно,  $X_t - X_s = \sum_{k=1}^n \xi_{n,k}$ , где  $\xi_{n,k} = X(t_{n,k}) - X(t_{n,k-1})$ . Непрерывность траекторий влечет (п. н.) равномерную непрерывность  $X$  на  $[s, t]$ . Поэтому

$$\max_{1 \leq q \leq n} \|\xi_{n,q}\| \rightarrow 0 \text{ п. н. при } n \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Кроме того, в силу независимости приращений  $X$  видим, что  $\xi_{n,q}$ ,  $1 \leq q \leq n$ , независимы при каждом  $n$ . Теперь заметим, что для всех  $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Law}\left(\sum_{q=1}^n \xi_{n,q}\right) = \text{Law}(X_t - X_s).$$

Поэтому с учетом (28) нормальность вектора  $X_t - X_s$  вытекает из леммы 4. Отсюда и из установленной независимости приращений процесса  $X$  следует гауссовость процесса  $Y = \{Y_t = X_t - X_0, t \geq 0\}$ .

Для завершения доказательства теоремы Дуба положим

$$M_t = \mathbf{E}(X_t - X_0) \text{ и } G_t = \mathbf{D}(X_t - X_0)$$

(все моменты существуют, так как  $X_t - X_0$  — гауссовский вектор). Тогда, очевидно, для  $0 \leq s < t < \infty$  имеем  $\mathbf{E}(X_t - X_s) = M_t - M_s$ , а в силу независимости приращений процесса  $X$  получаем, что  $\mathbf{D}(X_t - X_s) = G_t - G_s$ . Теперь нам понадобится упражнение

9. Пусть  $\zeta_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \zeta$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $\zeta_n, \zeta$  — случайные векторы в  $\mathbb{R}^k$  и  $\zeta_n \sim N(a_n, C_n)$ . Докажите, что тогда существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$  (поэлементно), причем  $\zeta \sim N(a, C)$ .

Отсюда легко вытекает, что функции  $M: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  и  $G: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{k^2}$  являются непрерывными. Теорема Дуба доказана.  $\square$

**Следствие 1.** Если в условиях теоремы 14 главы V величина  $X_0$  имеет вырожденное распределение, то и сам процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  будет гауссовским. Если процесс  $X$  удовлетворяет условиям теоремы 14 главы V для  $t \in [a, b]$ , то ее утверждение выполняется для процесса  $\{Y_t = X_t - X_a, t \in [a, b]\}$ .

**Замечание 1.** В книге [50] для независимых действительных случайных величин  $\xi_{n,q}$  ( $q = 1, \dots, m_n$ ) исследована слабая сходимость распределений сумм  $S_n = \sum_{q=1}^{m_n} \xi_{n,q}$  при  $n \rightarrow \infty$ , когда слагаемые удовлетворяют менее жесткому, чем (22), условию “равномерной малости слагаемых”

$$\max_{1 \leq q \leq m_n} \mathbf{P}(|\xi_{n,q}| > \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ для каждого } \varepsilon > 0, \text{ когда } n \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Так, при условии (29) класс возможных предельных распределений  $S_n$  совпадает с классом *безгранично делимых законов* (включающим нормальное распределение). В [50; гл. 4] можно найти необходимые и достаточные условия сходимости  $S_n$  к заданному безгранично делимому закону. Изучение сумм независимых случайных величин без каких-либо условий бесконечной малости слагаемых проводится в монографии [27]. В [157] исследуется поведение сумм случайных элементов со значениями в банаховом пространстве.

## Приложение 4

### Доказательство теоремы Бохнера–Хинчина

Если  $R(0) = 0$ , то  $R(t) = 0$  для  $t \in \mathbb{R}$  и (VII.36) выполняется при  $G \equiv 0$ . Поэтому пусть далее  $R(0) \neq 0$ . В силу следствия 3 главы VII функция  $R = R(t)$  является непрерывной на  $\mathbb{R}$ .

**А.** Предположим вначале, что  $R \in L^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \text{mes})$ , где  $\text{mes}$  — мера Лебега. Докажем, что тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(t) dt \geq 0. \quad (1)$$

В силу непрерывности и неотрицательной определенности функции  $R$  получаем, что при всех  $N > 0$

$$\int_{-N}^N \int_{-N}^N R(t-s) dt ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k, m=-n}^{n-1} R(t_k^{(n)} - t_m^{(n)}) \left(\frac{N}{n}\right)^2 \geq 0 \quad (2)$$

(здесь учтено, что при составлении интегральных сумм можно выбирать разбиение квадрата  $[-N, N]^2$  на одинаковые квадраты со стороной  $N/n$  и брать любые промежуточные точки  $t_k^{(n)} \in [kN/n, (k+1)N/n]$ ,  $k = -n, \dots, n-1$ ).

Совершив замену переменных  $t-s = u$ ,  $t+s = v$  (якобиан  $\frac{\partial(t, s)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2}$ ), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2N} \int_{-N}^N \int_{-N}^N R(t-s) dt ds &= \\ &= \frac{1}{4N} \left\{ \int_0^{2N} du R(u) \int_{u-2N}^{2N-u} dv + \int_{-2N}^0 du R(u) \int_{-u-2N}^{u+2N} dv \right\} = \\ &= \int_{-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|u|}{2N}\right) R(u) du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{|u|}{2N}\right) \mathbf{1}_{\{-2N, 2N\}}(u) R(u) du \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} R(u) du \end{aligned} \quad (3)$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Законность предельного перехода в (3) обеспечивает теорема Лебега о мажорируемой сходимости ( $R \in L^1(\mathbb{R})$ ). Таким образом, (2) и (3) влекут (1).

**В.** Положим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} R(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$



Поскольку  $R \in L^1(\mathbb{R})$ , видим, что  $f$  — ограниченная непрерывная функция на  $\mathbb{R}$ . По теореме 4 главы II неотрицательно определенную функцию  $R = R(t)$ , где  $t \in \mathbb{R}$ , можно считать ковариационной функцией некоторого центрированного комплекснозначного процесса  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ . Заметим, что для любого  $x \in \mathbb{R}$ , если  $R(t) = \mathbb{E} X(t) \overline{X(0)}$ , то

$$\mathbb{E} e^{-isx} X(s) \overline{e^{-itx} X(t)} = e^{-ix(s-t)} R(s-t).$$

Поэтому  $e^{-itx} R(t)$  — ковариационная функция центрированного стационарного процесса  $e^{-itx} X(t)$  (напомним, что  $\mathbb{E} X(t) = 0$ ), причем  $|e^{-itx} R(t)| = |R(t)|$ . Следовательно, по доказанному  $f(x) \geq 0$  для любого  $x \in \mathbb{R}$ .

**С.** Убедимся, что

$$|R(t)| \leq R(0) \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Очевидно,  $R(0) = \mathbb{E} |X(0)|^2 \geq 0$ . Кроме того, по неравенству Коши–Буняковского–Шварца  $|R(t)| \leq \|X(t)\| \|X(0)\|$  (здесь  $\|\cdot\|$  — норма в  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ), но  $\|X(t)\|^2 = \mathbb{E} X(t) \overline{X(t)} = R(0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Поэтому (5) справедливо.

**Д.** Рассмотрим в  $L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \text{mes})$  преобразование Фурье

$$F[h](t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} h(x) dx.$$

Известно (см., например, [60; т. 2, с. 20]), что  $F$  взаимно-однозначно отображает  $L^2(\mathbb{R})$  на  $L^2(\mathbb{R})$ , причем для п. в.  $x$  (по мере Лебега)

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} F[h](t) dt$$

и для  $h, g \in L^2(\mathbb{R})$  выполнено равенство Парсеваля

$$2\pi \langle h, g \rangle = \langle F[h], F[g] \rangle, \quad (6)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $L^2(\mathbb{R})$ .

Функция  $R \in L^2(\mathbb{R})$ , так как  $R \in L^1(\mathbb{R})$  и выполнено (5). Следовательно,

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \quad \text{п. в. по мере Лебега.} \quad (7)$$

**Е.** Покажем, что последнее равенство верно, на самом деле, при *всех*  $t \in \mathbb{R}$ . Для этого проверим, что  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Пользуясь тем, что характеристическая функция величины  $\xi \sim N(0, \varepsilon^2)$ ,  $\varepsilon > 0$ , известна (см. (II.7) при  $n = 1$ ), согласно (6) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\varepsilon x)^2}{2}} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}}}{\varepsilon \sqrt{2\pi}} R(t) dt. \quad (8)$$

В силу непрерывности функции  $R$  правая часть (8) стремится к  $R(0)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , поскольку  $e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}}/(\varepsilon\sqrt{2\pi})$  представляет собой  $\delta$ -образное семейство функций (аргумента  $t$ ). По теореме о монотонной сходимости получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = R(0). \quad (9)$$

Функция  $R$  непрерывна на всей оси, а правая часть формулы (7) также непрерывна на  $\mathbb{R}$ , поскольку  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Следовательно, равенство (7) справедливо при каждом  $t \in \mathbb{R}$ .

**Г.** Пусть теперь  $R$  необязательно принадлежит  $L^1(\mathbb{R})$ . Рассмотрим в  $L^1(\mathbb{R})$  функцию  $R_\varepsilon(t) = R(t)e^{-\frac{(\varepsilon t)^2}{2}}$ , где параметр  $\varepsilon > 0$ . Это непрерывная неотрицательно определенная функция, поскольку  $R_\varepsilon(t) = \mathbf{E} e^{it\varepsilon\xi} R(t)$ , где  $\xi \sim N(0, 1)$  (а именно, приняли во внимание, что при каждом  $\varepsilon$  и  $\omega$  функция  $e^{it\varepsilon\xi} R(t)$  неотрицательно определена). Тогда по доказанному  $R_\varepsilon(t)/R(0)$  — характеристическая функция некоторого вероятностного распределения, т. е.

$$R_\varepsilon(t)/R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_\varepsilon(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x) dx = 1, \quad f_\varepsilon(x) \geq 0.$$

Но если характеристические функции сходятся поточечно к функции, непрерывной в нуле, то предельная функция является характеристической (см. теорему 12 главы V). Итак,  $R(t)/R(0)$  — характеристическая функция, т. е.

$$R(t)/R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x),$$

где  $F$  — некоторая функция распределения, и представление (VII.36) установлено с мерой

$$G(d\lambda) = R(0)F(d\lambda)$$

( $F(d\lambda)$  — мера, отвечающая функции распределения  $F(x)$ ).  $\square$

**Замечание 1.** Определение 9 главы I вводит характеристическую функцию меры  $Q$ , заданной на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . А. Н. Колмогоров (см., например, [33; т. 1]) предложил понятие характеристического функционала меры  $Q$ , заданной на борелевской  $\sigma$ -алгебре банахова пространства  $B$ :

$$\phi(x^*) = \int_B e^{ix^*(x)} Q(dx), \quad x^* \in B^*.$$

Отметим, что обобщение теоремы Бохнера–Хинчина на характеристические функционалы не является тривиальным.

## Приложение 5

### Доказательство теоремы Колмогорова–Сегё

Покажем, как для стационарного в широком смысле процесса  $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  задача нахождения ошибки линейного прогноза за один шаг переформулируется в аппроксимационную задачу классической теории функций.

Доказательство теоремы 16 главы VII разобьем на отдельные шаги.

**А.** Согласно определению ошибки прогноза величина  $\delta(1)$  может быть найдена из формулы  $\delta^2(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$ , где

$$\gamma_n = \inf \left\| X_t - \sum_{k=1}^n a_k X_{t-k} \right\|^2, \quad (1)$$

а нижняя грань берется по всевозможным значениям  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . Ясно, что  $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$  — невозрастающая последовательность.

В силу теоремы 5 главы VII пространства  $H(X)$  и  $L^2([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]), Q)$  изоморфны, где  $Q$  — спектральная мера процесса  $X$ , имеющая плотность  $g$  по мере Лебега. При этом для каждого  $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t \longleftrightarrow e^{it\lambda}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi].$$

Поэтому для  $f(\lambda) = 2\pi g(\lambda)$ , где  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ , имеем

$$\left\| X_t - \sum_{k=1}^n a_k X_{t-k} \right\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |b_0 + b_1 e^{i\lambda} + \dots + b_n e^{in\lambda}|^2 f(\lambda) d\lambda, \quad (2)$$

здесь  $b_0 = 1, b_k = -\bar{a}_k, k = 1, \dots, n$ .

Следовательно,

$$\delta^2(1) = \inf \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda) f(\lambda) d\lambda \right\} = \inf \{A(hf)\}, \quad (3)$$

где нижняя грань берется по функциям  $h(\lambda) = |P(e^{i\lambda})|^2$ , для которых  $P = P(z)$  — любой полином ( $z \in \mathbb{C}$ ) с  $P(0) = 1$ , а среднее  $A(v)$  функции  $v$  определено перед формулировкой теоремы 16 главы VII.

**В.** Вычислим правую часть формулы (3), предположив, что

$$\ln f \in L^1 = L^1([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]), \text{mes}),$$

где  $\text{mes}$  — мера Лебега.

Допустим вначале, что все нули полинома  $P(z)$  лежат вне круга  $|z| \leq 1$ . Тогда по теореме о среднем для гармонических функций

$$A(\ln h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln h(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \ln(|P(z)|^2) dz = |\ln P(0)|^2 = 0,$$

и, значит,  $G(h) = \exp\{A(\ln h)\} = 1$ .

Если неотрицательная функция  $v = v(\lambda)$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ , такова, что функции  $v$  и  $\ln v \in L^1$ , то из неравенства Йенсена следует известное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$A(v) \geq G(v). \quad (4)$$

Поскольку  $G(h) = 1$  и  $\ln f \in L^1$ , имеем

$$A(hf) \geq G(hf) = G(h)G(f) = G(f). \quad (5)$$

Итак, если все нули полинома  $P(z)$  лежат вне единичного круга, то с учетом (3) получаем, что  $\delta^2(1) \geq G(f)$ .

**С.** Рассмотрим теперь случай, когда все нули полинома  $P(z)$  по модулю меньше или больше единицы. Ясно, что  $|P(z)|^2 = b \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2$ , где  $b > 0$  и  $z_k \neq 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ , так как  $P(0) = 1$ .

Если существуют корни  $z_k$  такие, что  $|z_k| < 1$ , то можно перейти к новому полиному  $\tilde{P}(z)$ , для всех корней которого  $\tilde{z}_k$  имеем  $|\tilde{z}_k| > 1$ , и при этом  $|\tilde{P}(e^{i\lambda})|^2 = |P(e^{i\lambda})|^2$  при любом  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ , а также  $\tilde{P}(0) = 1$ . Действительно, если  $z = e^{i\lambda}$ ,  $|z_k| < 1$ , то  $|z - z_k| = |z_k| |z - \bar{z}_k^{-1}|$ , где точка  $(\bar{z}_k)^{-1}$  лежит вне единичного круга. Тем самым, в этом случае снова  $\delta^2(1) \geq G(f)$ .

**Д.** Допустим, наконец, что  $|z_k| \geq 1$ ,  $k = 1, \dots, n$ , и что среди корней  $z_k$  найдутся такие, для которых  $|z_k| = 1$ . При любом  $\varepsilon > 0$  выберем полином  $\hat{P}^{(\varepsilon)}(z)$  той же степени  $n$ , но у которого все нули  $\hat{z}_k$  лежат строго вне единичного круга (если  $|z_k| = 1$ , то берем корень  $\hat{z}_k$  достаточно близким к  $z_k$ , но так, чтобы  $|\hat{z}_k| > 1$ ) и при этом

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda)| \left| |\hat{P}^{(\varepsilon)}(e^{i\lambda})|^2 - |\tilde{P}(e^{i\lambda})|^2 \right| d\lambda < \varepsilon, \quad \hat{P}(0) = 1. \quad (6)$$

Проводя оценку (5) для функции  $h(\lambda) = |\hat{P}^{(\varepsilon)}(e^{i\lambda})|^2$ , с учетом (6) получаем, что и в этом случае  $\delta^2(1) \geq G(f)$ .

**Е.** Теперь докажем, что  $\delta^2(1) \leq G(f)$ , если  $\ln f \in L^1$ . Известно (см., например, [53; т. 2, с. 92]), что любой неотрицательный тригонометрический полином (от  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ ) может быть записан как  $|P(e^{i\lambda})|^2$  для некоторого полинома  $P = P(z)$ . Это замечание и теорема Вейерштрасса показывают, что в соотношении (3) величина  $\delta(1)^2$  не изменится, если нижнюю грань брать по всем неотрицательным непрерывным на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функциям  $h$ , для которых  $G(h) = 1$ .

Пусть вначале

$$f(\lambda) \geq a > 0 \quad \text{для всех } \lambda \in [-\pi, \pi]. \quad (7)$$

Тогда, очевидно,  $G(f) \geq a$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти тригонометрический полином  $R(e^{i\lambda})$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ , такой, что для  $r(\lambda) = |R(e^{i\lambda})|^2$  верны оценки

$$r(\lambda) \geq a \quad \text{при} \quad \lambda \in [-\pi, \pi], \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |r(\lambda) - f(\lambda)| d\lambda < \varepsilon. \quad (8)$$

Заметим, что при  $0 < x < y$

$$\ln y - \ln x = \ln \left( 1 + \frac{y-x}{x} \right) < \frac{y-x}{x}.$$

Поэтому из (7) и (8) вытекает, что  $\ln r \in L^1$ . Кроме того,

$$\frac{G(r)}{G(f)} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\ln r(\lambda) - \ln f(\lambda)] d\lambda \right\} \leq \exp \left\{ \frac{\varepsilon}{a} \right\}. \quad (9)$$

Для функции  $h_0(\lambda) = \frac{1}{r(\lambda)} G(r)$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ , имеем

$$\delta^2(1) \leq A(h_0 f) = \frac{G(r)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda)}{r(\lambda)} d\lambda = G(f) \frac{G(r)}{G(f)} A\left(\frac{f}{r}\right). \quad (10)$$

В силу (8)

$$A\left(\frac{f}{r}\right) = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda) - r(\lambda)}{r(\lambda)} d\lambda \leq 1 + \frac{\varepsilon}{a}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) получаем, что  $\delta^2(1) \leq G(f)$  при выполнении условия (7).

**Г.** Избавимся от предположения (7). С этой целью для  $a > 0$  введем функции  $f_a(\lambda) = f(\lambda) + a$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ . Убедимся в том, что

$$G(f_a) \rightarrow G(f) \quad \text{при} \quad a \rightarrow 0+. \quad (12)$$

Очевидно,  $\ln f_a \in L^1$  при любом  $a > 0$  и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda \leq \int_{-\pi}^{\pi} \ln f_a(\lambda) d\lambda. \quad (13)$$

Для произвольного  $\nu > 0$  положим  $B(\nu) = \{\lambda \in [-\pi, \pi]: f(\lambda) > \nu\}$ . Аналогично (9) при всех  $a > 0$  и  $\nu > 0$  находим

$$0 \leq \int_{B(\nu)} \ln f_a(\lambda) d\lambda - \int_{B(\nu)} \ln f(\lambda) d\lambda \leq \frac{2\pi a}{\nu}.$$

Если  $\nu + a < 1$ , то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f_a(\lambda) d\lambda \leq \int_{B(\nu)} \ln f_a(\lambda) d\lambda \leq \int_{B(\nu)} \ln f(\lambda) d\lambda + \frac{2\pi a}{\nu}.$$

Следовательно, при каждом  $\nu \in (0, 1)$

$$\limsup_{a \rightarrow 0+} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f_a(\lambda) d\lambda \leq \int_{B(\nu)} \ln f(\lambda) d\lambda. \quad (14)$$

Из (13) и (14) заключаем, что если  $\ln f \in L^1$ , то

$$A(\ln f_a) \rightarrow A(\ln f) \quad \text{при } a \rightarrow 0+, \quad (15)$$

откуда следует свойство (12), поскольку  $G(v) = \exp\{A(\ln v)\}$ .

**Г.** При  $a > 0$  обозначим  $\gamma_a(n)$  решение задачи (1) для процесса  $\{X_t(a), t \in \mathbb{Z}\}$ , имеющего спектральную плотность  $f_a(\lambda)$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ . Из формулы (2) нетрудно видеть, что  $\gamma_n(a) \downarrow \gamma_n$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$  при  $a \rightarrow 0+$ . Следовательно, обозначив  $\delta_a^2(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(a)$ , получаем, что

$$\delta_a^2(1) \geq \delta^2(1) \quad \text{при всех } a > 0. \quad (16)$$

Согласно пункту Е имеем  $\delta_a^2(1) \leq G(f_a)$ . Отсюда, из (16) и (12) вытекает, что  $\delta^2(1) \leq G(f)$ .

**Н.** Пусть, наконец,  $\ln f \notin L^1$  (т. е. не существует конечный интеграл от этой функции). Тогда

$$A(\ln f) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda = -\infty, \quad (17)$$

поскольку функция  $(\ln f(\lambda))_+ = \ln f(\lambda) \mathbf{1}\{f(\lambda) \geq 1\} \leq f(\lambda)$  при всех  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ , причем  $f$  интегрируема на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Таким образом,

$$G(f) = \exp\{A(\ln f)\} = 0.$$

Для любого  $a > 0$  имеем  $\ln f_a \in L^1$  и согласно пп. Е и Г

$$\delta^2(1) \leq \delta_a^2(1) \leq G(f_a).$$

Поэтому осталось проверить соотношение (12). В рассматриваемом нами случае (когда  $\ln f \notin L^1$ ) соотношение (14) также верно. Поэтому

$$\limsup_{a \rightarrow 0+} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f_a(\lambda) d\lambda \leq \int \{f(\lambda) > 0\} \ln f(\lambda) d\lambda. \quad (18)$$

Если интеграл в правой части (18) равен  $-\infty$ , то (15) доказано, значит, справедливо и (12).

Пусть теперь интеграл в правой части (18) конечен. Тогда в силу (17) имеем  $f(\lambda) = 0$  (и  $\ln f(\lambda) = -\infty$ ) на множестве  $A$  положительной меры Лебега. Итак, для всех  $0 < a < 1$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln f_a(\lambda))_+ d\lambda &\leq \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) + a) d\lambda \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda + 2\pi a, \\ \int_{-\pi}^{\pi} (\ln f_a(\lambda))_- d\lambda &\leq \int_{\{f(\lambda)=0\}} \ln a d\lambda = \ln a \lambda(A). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $a \rightarrow 0+$ , из последних соотношений снова получаем (15), значит, и (12). Теорема полностью доказана.  $\square$

**Замечание.** Мы установили, что условие  $\ln f \notin L^1$  равносильно тому, что  $\delta(1) = 0$ . В силу теоремы 11 главы VII тем самым получен критерий сингулярности стационарного процесса, имеющего спектральную плотность  $g$  ( $f(\lambda) = 2\pi g(\lambda)$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ ).

## Приложение 6

### Доказательство строго марковского свойства семейства броуновских движений

§ 1. Результаты этого раздела мы используем далее в приложении 7 для получения в вероятностных терминах решения задачи Дирихле. При этом будет удобно оперировать *семейством броуновских движений*, выходящих из различных точек пространства  $\mathbb{R}^m$  в начальный момент  $t = 0$ . Сейчас наша главная цель — получить вариант (теорема 2) строго марковского свойства этого семейства, обобщающий строго марковское свойство винеровского процесса, доказанное в § 6 главы III.

Введем необходимые обозначения. Пусть стандартное  $m$ -мерное броуновское движение  $W = \{W_t = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(m)}), t \geq 0\}$  непосредственно задано, т.е.  $W_t(\omega) = \omega(t)$  для  $t \geq 0$  и  $\omega \in \Omega = C([0, \infty), \mathbb{R}^m)$ , на пространство непрерывных на  $[0, \infty)$  функций со значениями в  $\mathbb{R}^m$  снабжено метрикой (V.46) равномерной сходимости на компактах (где  $K_n = [0, n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ). Нетрудно убедиться, что борелевская  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}(C([0, \infty), \mathbb{R}^m))$  совпадает с цилиндрической  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{F}$  этого пространства.

В качестве меры  $P$  на  $(\Omega, \mathcal{F})$  возьмем *распределение броуновского движения*  $W$ . Заметим, что  $P(C_0([0, \infty), \mathbb{R}^m)) = 1$ , где  $C_0([0, \infty), \mathbb{R}^m)$  — подпространство  $C([0, \infty), \mathbb{R}^m)$ , состоящее из функций, принимающих в точке  $t = 0$  значение  $0 \in \mathbb{R}^m$ .

Как обычно, считаем вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  пополненным, а естественную фильтрацию  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  броуновского движения  $W$  — расширенной классом  $\mathcal{N}$  множеств  $P$ -нулевой вероятности.

Введем на  $(\Omega, \mathcal{F})$  *семейство мер*

$$P^x(C) := P(C - x), \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $C \in \mathcal{F}$ , а  $C - x = \{y(\cdot) - x : y(\cdot) \in C\}$ . Очевидно,  $P = P^0$ .

**Лемма 1.** Для каждого  $x \in \mathbb{R}^m$  процесс  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  является на пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P^x)$  броуновским движением относительно фильтрации  $\mathbb{F}$ , начинающимся из точки  $x \in \mathbb{R}^m$  в момент  $t = 0$ ; его траектории  $P^x$ -н.н. непрерывны и (относительно меры  $P^x$ )

- 1)  $W_0 = x$ ;
- 2)  $W_t - W_s \in \mathcal{F}_s$ , т.е.  $W_t - W_s$  и  $\mathcal{F}_s$  независимы при  $0 \leq s < t$ ;
- 3)  $W_t - W_s \sim N(0, (t-s)I)$  при  $0 \leq s < t$ , где  $I$  — единичная матрица  $m$ -го порядка.

**Доказательство.** Легко видеть, что  $P^x$  есть распределение вероятностей на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}$  процесса  $W^x = \{W_t^x, t \geq 0\}$ , где  $W_t^x(\omega) = x + W_t(\omega)$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $t \geq 0$ ,  $\omega \in \Omega$ . Другими словами,

$$P^x(C) = P(W^x \in C) \quad \text{для } C \in \mathcal{F}. \quad (2)$$

Требуемые свойства 1), 2) и 3) вытекают непосредственно из соответствующих свойств броуновского движения  $W$  на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .  $\square$

**§ 2.** Нам понадобится ряд вспомогательных результатов о процессах  $W^x = \{W^x(t), t \geq 0\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ . Прежде всего, рассмотрим интегрирование по введенным мерам  $P^x$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ .

**Лемма 2.** *Усреднение  $E^x Y$  (по мере  $P^x$ ) ограниченной действительной случайной величины  $Y$  является  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримой функцией от  $x \in \mathbb{R}^m$ . В частности, функция  $P^x(A)$  измерима по  $x$  при каждом  $A \in \mathcal{F}$ .*

**Доказательство.** Пользуясь леммой 6 главы I, нетрудно видеть, что множества  $A$  из  $\mathcal{F}$ , для которых функция  $P^x(A)$  измерима, образуют  $\lambda$ -систему  $\mathcal{D}$ . Обозначим  $\mathcal{E}$  совокупность цилиндров из  $\mathcal{F}$  вида  $C = \{W_{t_1} \in B_1, \dots, W_{t_n} \in B_n\}$ , где  $t_i \in [0, \infty)$ ,  $B_i$  — параллелепипеды в  $\mathbb{R}^m$ ,  $i = 1, \dots, n$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Этот класс замкнут относительно операции пересечения. По теореме 3 главы VI процесс  $W^x = \{W_t^x, t \geq 0\}$  является марковским на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  для любого  $x \in \mathbb{R}^m$ . При этом, очевидно, для каждого  $x \in \mathbb{R}^m$  естественная фильтрация процесса  $W^x$  совпадает с  $\mathcal{F}$ .

Пример 2 главы VI показывает, что переходная функция процесса  $W^x$  на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  задается формулой

$$P(x, t, B) = \begin{cases} (2\pi t)^{-m/2} \int_B \exp\{-|y - x|^2/(2t)\} dy & \text{при } t > 0, \\ \delta_x(B) & \text{при } t = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ ,  $|\cdot|$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^m$  и  $\delta_x$  — мера Дирака, сосредоточенная в точке  $x$ . Пользуясь формулами (2), (VI.34) и (3), получаем, что  $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ . По теореме о монотонных классах  $\mathcal{F} = \sigma\{\mathcal{E}\} \subset \mathcal{D}$ , а так как  $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ , то заключаем, что  $\mathcal{F} = \mathcal{D}$ .

Величину  $Y$  можно представить, как равномерный предел (см. (I.4)) линейных комбинаций индикаторов событий из  $\mathcal{F}$ , поэтому утверждение об измеримости функции  $E^x Y$  вытекает из леммы 6 главы I.  $\square$

**Лемма 3.** *При каждом  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $0 \leq s \leq t$  и  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$*

$$P^x(W_t \in B | \mathcal{F}_s) = P(W_s, t - s, B) \quad (P^x\text{-н. н.}), \quad (4)$$

где переходная функция в правой части (4) задается формулой (3).



**Доказательство.** Учитывая  $\sigma\{W_s\} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримость правой части (4), нужно лишь установить, что для любого  $A \in \mathcal{F}_s$  имеет место равенство

$$\mathbf{P}^x(A \cap \{W_t \in B\}) = \mathbf{E}^x \mathbf{P}(W_s, t-s, B) \mathbf{1}_A. \quad (5)$$

Множества  $A$  из  $\mathcal{F}$ , для которых верно (5), образуют  $\lambda$ -систему  $\mathcal{D}$ . Покажем, что в эту систему входит  $\pi$ -система  $\mathcal{E}$ , состоящая из множеств вида

$$A = \{W_{t_1} \in B_1, \dots, W_{t_n} \in B_n\},$$

где  $0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq s$ ,  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

С этой целью прежде всего отметим, что если функция  $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена и  $\mathcal{F} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измерима, то для любого  $x \in \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{E}^x h(W) = \mathbf{E} h(W^x), \quad (6)$$

здесь  $\mathbf{E}$  обозначает интегрирование по мере  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^0$ . В самом деле, при  $h = \mathbf{1}_C$ , где  $C \in \mathcal{F}$ , это верно в силу (2), и свойство (6) следует из того, что  $h$  можно получить как равномерный предел линейных комбинаций рассмотренных индикаторов.

Из (6) вытекает, что для введенных цилиндров  $A$  формула (5), которую надо проверить, переписется в следующем виде:

$$\mathbf{P}(A_x \cap \{W_t^x \in B\}) = \mathbf{E} \mathbf{P}(W_s^x, t-s, B) \mathbf{1}_{A_x}, \quad (7)$$

где  $A_x = \{W_{t_1}^x \in B_1, \dots, W_{t_n}^x \in B_n\} \in \mathcal{F}_s^{W^x}$ . Равенство (7) справедливо, поскольку  $\{W_t^x, t \geq 0\}$  при каждом  $x \in \mathbb{R}^m$  есть однородный марковский процесс с переходной функцией (3). По теореме о монотонных классах заключаем, что  $\mathcal{F}_s = \sigma\{\mathcal{E}\} = \mathcal{D}$ .  $\square$

Для случайного вектора  $V$  и действительной случайной величины  $Y$  полагаем  $\mathbf{E}^V Y := H(V)$ , где  $H(x) = \mathbf{E}^x Y$  (вид  $H(x)$  зависит от величины  $Y$ , которая предполагается интегрируемой по любой мере  $\mathbf{P}^x$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ ).

**Лемма 4.** Пусть  $W$  — броуновское движение на пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}^x)$ , описанное в лемме 1. При каждом  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $s, u \geq 0$  и всех ограниченных  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ -измеримых функций  $f$

$$\mathbf{E}^x(f(W_{s+u}) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}^{W_s} f(W_u) \quad (\mathbf{P}^x\text{-п. н.}). \quad (8)$$

**Доказательство.** Положим в формуле (4)  $s = 0$ ,  $t = u$  и возьмем математическое ожидание  $\mathbf{E}^x$  от обеих частей. Тогда получим для любых  $u \geq 0$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$  и  $x \in \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{P}^x(W_u \in B) = \mathbf{E}^x P(W_0, u, B) = P(x, u, B), \quad (9)$$

где учтено, что  $W_0 = x$   $\mathbf{P}^x$ -п. н.

Если  $f(z) = \mathbf{1}_B(z)$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$  и  $z \in \mathbb{R}^m$ , то из (4) находим:

$$\mathbf{E}^x(f(W_{s+u}) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{P}^x(W_{s+u} \in B \mid \mathcal{F}_s) = P(W_s, u, B) \quad (\mathbf{P}^x\text{-п. н.}).$$

С другой стороны, с учетом (9) имеем

$$\mathbf{E}^x \mathbf{1}_B(W_u) = \mathbf{P}^x(W_u \in B) = P(x, u, B),$$

что доказывает формулу (8) для *индикаторных* функций  $f$ . В общем случае требуемое свойство (8) следует из доказанного, поскольку произвольная ограниченная действительная измеримая функция  $f$  равномерно аппроксимируется линейными комбинациями индикаторов.  $\square$

§ 3. Теперь введем *семейство броуновских движений* (сравните с дополнением к главе VI). Для  $s \geq 0$  положим  $\mathcal{F}_{\geq s} = \sigma\{W(t), t \geq s\}$ . Пусть при каждом  $s \geq 0$  и  $x \in \mathbb{R}^m$  на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}_{\geq s}$  задана вероятностная мера  $\mathbf{P}^{s,x}$ .

**Определение 1.** Броуновским семейством с переходной функцией (3) назовем непосредственно заданный на  $\Omega = C([0, \infty), \mathbb{R}^m)$  процесс  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  такой, что  $\{W(t), t \geq s\}$  при любых  $s \geq 0$  и  $x \in \mathbb{R}^m$  является однородным марковским процессом (с переходной функцией (3)) на пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}_{\geq s}, \mathbf{P}^{s,x})$ , выходящим из точки  $x$  в момент  $s$ . Иначе говоря, при любых  $s \geq 0, x \in \mathbb{R}^m$  выполняются условия:

- 1°.  $\mathbf{P}^{s,x}(W_s = x) = 1$  для каждого  $s \geq 0$  и  $x \in \mathbb{R}^m$ ;
- 2°.  $\mathbf{P}^{s,x}(W_t \in B \mid \mathcal{F}_{[s,u]}) = P(W_u, t-u, B)$   $\mathbf{P}^{s,x}$ -п.н. для каждого  $s \geq 0, x \in \mathbb{R}^m$  и  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), s \leq u \leq t$ ; здесь  $\mathcal{F}_{[s,u]} = \sigma\{W_v, v \in [s, u]\}$ .

Покажем, как легко построить такое семейство. Для  $u \geq 0$  определим *оператор сдвига*  $\theta_u: \Omega \rightarrow \Omega$ , положив

$$(\theta_u \omega)(\cdot) = \omega(\cdot + u), \quad \text{где } \omega \in \Omega. \quad (10)$$

Если  $A \subset \Omega$ , то пусть  $\theta_u A := \{\theta_u \omega: \omega \in A\}$ , а для функции  $Y(\omega)$ , заданной на  $\Omega$ , пусть  $(\theta_u Y)(\omega) := Y(\theta_u \omega), \omega \in \Omega$ . Для системы  $\mathcal{A}$  подмножеств  $\Omega$  определим  $\theta_u^{-1} \mathcal{A} := \{\theta_u^{-1} A: A \in \mathcal{A}\}$ . Мы пишем один и тот же символ  $\theta_u$  для аналогичных действий на разные объекты, чтобы не усложнять обозначений.

**Лемма 5.** Для всех  $u \geq 0$  и  $0 \leq s \leq t$

$$\theta_u^{-1} \mathcal{F}_{[s,t]} = \mathcal{F}_{[s+u, t+u]}; \quad (11)$$

при  $t = \infty$  считаем  $\mathcal{F}_{[s,t]} := \mathcal{F}_{\geq s}$  и  $\mathcal{F}_{[s+u, t+u]} := \mathcal{F}_{\geq s+u}$ .

**Доказательство.** В силу (10) для всех  $u, t \geq 0$  и  $\omega \in \Omega$  имеем

$$(\theta_u W_t)(\omega) = W_t(\theta_u \omega) = W_t(\omega(\cdot + u)) = \omega(t + u) = W_{t+u}(\omega). \quad (12)$$

Для  $v \in [s + u, t + u]$  и  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$  имеем

$$\{W_v \in B\} = \theta_u^{-1} \{\omega: W_{v-u}(\omega) \in B\} \in \theta_u^{-1} \mathcal{F}_{[s,t]}.$$

Поскольку  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}_{[s+u, t+u]}$  порождается множествами  $\{W_v \in B\}$ , где  $v \in [s + u, t + u]$ , получаем, что  $\mathcal{F}_{[s+u, t+u]} \subset \theta_u^{-1} \mathcal{F}_{[s,t]}$ . С другой стороны, для  $h \in [s, t]$  и  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$  имеем

$$\theta_u^{-1} \{W_h \in B\} = \{\omega: W_h(\theta_u \omega) \in B\} = \{\omega: W_{h+u}(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}_{[s+u, t+u]}.$$

В силу следствия 1 главы I

$$\theta_u^{-1} \mathcal{F}_{[s,t]} \subset \mathcal{F}_{[s+u,t+u]},$$

что завершает доказательство леммы.  $\square$

Таким образом, по лемме 5 для каждого  $C \in \mathcal{F}_{\geq s}$  существует  $A \in \mathcal{F}_{\geq 0} = \mathcal{F}$  такое, что  $C = \theta_s^{-1} A$ . Теперь положим

$$\mathbf{P}^{s,x}(C) := \mathbf{P}^x(A), \quad \text{где } s \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^m. \quad (13)$$

Это определение корректно, поскольку  $\theta_s$  отображает  $\Omega$  на  $\Omega$  для каждого  $s \geq 0$  (если  $C = \theta_s^{-1} A$ , то  $A$  определено однозначно:  $A = \theta_s C$ ). Кроме того, поскольку взятие прообраза сохраняет теоретико-множественные операции,  $\mathbf{P}^{s,x}$  есть мера на  $\mathcal{F}_{\geq s}$ . Учитывая (13) и лемму 4, легко видеть, что свойства 1° и 2° при этом выполнены.

Имея в виду (13), будем обозначать наше однородное броуновское семейство (с переходной функцией (3))  $(W_t, \mathbf{P}^x)_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^m}$ . Еще раз подчеркнем: мы располагаем *одним* процессом  $W$ , а варьируем  $\sigma$ -алгебры и заданные на них меры, что соответствует интуитивному представлению о возможности “выпускать” броуновское движение в любой момент  $s \geq 0$  из произвольной точки  $x \in \mathbb{R}^m$ .

**Определение 2.** Однородное марковское семейство (процесс) с переходной функцией  $P(x, t, B)$  называется *феллеровским*, если для каждых  $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^m$  имеет место слабая сходимость

$$P(z, t, \cdot) \Rightarrow P(x, t, \cdot) \quad \text{при } z \rightarrow x. \quad (14)$$

Таким образом, это определение связано лишь с переходной функцией, а не с самим семейством или процессом и означает, что для любых  $t \geq 0$  и  $f \in C_b(\mathbb{R}^m)$  при  $z \rightarrow x$  ( $z, x \in \mathbb{R}^m$ ) справедливо соотношение

$$(T_t f)(z) := \int_{\mathbb{R}^m} f(y) P(z, t, dy) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^m} f(y) P(x, t, dy) = (T_t f)(x). \quad (15)$$

Следовательно,  $C_b(\mathbb{R}^m)$  — это инвариантное подпространство оператора  $T_t$  при каждом  $t \geq 0$ .

Пользуясь формулой (3) и теоремой Лебега о мажорируемой сходимости, получаем, что *броуновское семейство  $(W_t, \mathbf{P}^x)_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^m}$  является феллеровским*.

§ 4. Для изучения функционалов от броуновского движения и в других вопросах требуются различные формы строго марковского свойства (см. далее § 6). Прежде всего, обобщим лемму 4 на более “богатые”  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_{s+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{s+\varepsilon}$ .

**Лемма 6.** Для каждого  $x \in \mathbb{R}^m$ , всех  $s, u \geq 0$  и  $f \in C_b(\mathbb{R}^m)$

$$\mathbf{E}^x(f(W_{s+u}) | \mathcal{F}_{s+}) = \mathbf{E}^{W_s} f(W_u) \quad \mathbf{P}^x\text{-н. н.} \quad (16)$$

**Доказательство.** В силу (8) для всех  $s, u \geq 0, \varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^m$  и  $f \in C_b(\mathbb{R}^m)$

$$\mathbb{E}^x(f(W_{s+u+\varepsilon}) \mid \mathcal{F}_{s+\varepsilon}) = \mathbb{E}^{W_{s+\varepsilon}} f(W_u) \quad \text{Р}^x\text{-п. н.}$$

Учитывая непрерывность траекторий  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  и теорему 16 главы IV (вместо  $\varepsilon \downarrow 0$  можно взять  $\varepsilon_n \downarrow 0$ ), находим, что  $\text{Р}^x\text{-п. н.}$

$$\mathbb{E}^x(f(W_{s+u+\varepsilon}) \mid \mathcal{F}_{s+\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{E}^x(f(W_{s+u}) \mid \mathcal{F}_{s+}) \quad \text{при } \varepsilon \downarrow 0.$$

Принимая во внимание, что на  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Р}^x)$  процесс  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  является марковским с переходной функцией (3), имеем

$$\mathbb{E}^x f(W_u) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) P(x, u, dy) = (T_u f)(x).$$

В силу феллеровости броуновского семейства для каждого  $x \in \mathbb{R}^m$  получаем

$$\mathbb{E}^z f(W_u) \rightarrow \mathbb{E}^x f(W_u) \quad \text{при } z \rightarrow x.$$

Поэтому для всех  $\omega \in \Omega$

$$\mathbb{E}^{W_{s+\varepsilon}} f(W_u) \rightarrow \mathbb{E}^{W_s} f(W_u) \quad \text{при } \varepsilon \downarrow 0. \quad \square$$

Следующий шаг в обобщении марковского свойства состоит в переходе от  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_{s+}$  в (16) к использованию  $\sigma$ -алгебры, порожденной марковским моментом  $\tau$  относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_{s+})_{s \geq 0}$ . А именно, положим

$$\mathcal{F}_{\tau+} = \{A \subset \Omega: A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+} \text{ для любого } t \geq 0\}.$$

Далее будем считать  $W_\tau$  и  $W_{u+\tau}$ , где  $u \geq 0$ , равными нулю в  $\mathbb{R}^m$  на множестве  $\{\omega \in \Omega: \tau(\omega) = \infty\}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\text{Р}^x(\tau < \infty) = 1$  при всех  $x \in \mathbb{R}^m$ , где  $\tau$  — марковский момент относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}$ . Тогда для каждой  $x \in \mathbb{R}^m, u \geq 0$  и любой ограниченной функции  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{E}^x(f(W_{\tau+u}) \mid \mathcal{F}_{\tau+}) = \mathbb{E}^{W_\tau} f(W_u) \quad \text{Р}^x\text{-п. н.} \quad (17)$$

**Доказательство.** Введем моменты  $\tau_n = ([2^n \tau] + 1)2^{-n}, n \in \mathbb{N}$ , обозначая  $[\cdot]$  — целую часть числа. Очевидно,  $\tau_n(\omega) \searrow \tau(\omega)$  при  $n \rightarrow \infty$  для всех  $\omega \in \Omega$ . Кроме того,  $\tau_n$  есть марковский момент относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  при любом  $n \in \mathbb{N}$  (см. доказательство леммы 7 главы IV).

Покажем, что при каждом  $x \in \mathbb{R}^m, n \in \mathbb{N}, u \geq 0$  и  $f \in C_b(\mathbb{R}^m)$

$$\mathbb{E}^x(f(W_{\tau_n+u}) \mid \mathcal{F}_{\tau_n+}) = \mathbb{E}^{W_{\tau_n}} f(W_u) \quad \text{Р}^x\text{-п. н.} \quad (18)$$

Правая часть (18) является  $\sigma\{W_{\tau_n}\} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримой, следовательно,  $\mathcal{F}_{\tau_n} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримой, а значит, и  $\mathcal{F}_{\tau_n+} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримой. Поэтому требуется лишь проверить, что для любого  $A \in \mathcal{F}_{\tau_n+}$

$$\mathbb{E}^x \mathbf{1}_A f(W_{\tau_n+u}) = \mathbb{E}^x \mathbf{1}_A \mathbb{E}^{W_{\tau_n}} f(W_u).$$

Применяя лемму 6 и учитывая, что  $A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}+}$  для всех  $k, n \in \mathbb{N}$ , а также пользуясь счетной аддитивностью интеграла Лебега, при каждом  $x \in \mathbb{R}^m$  получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \mathbf{1}_A f(W_{\tau_n+u}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}^x \mathbf{1}_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} f(W_{k2^{-n}+u}) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}^x \mathbf{1}_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} \mathbb{E}^{W_{k2^{-n}}} f(W_u) = \mathbb{E}^x \mathbf{1}_A \mathbb{E}^{W_{\tau_n}} f(W_u). \end{aligned}$$

Итак, (18) установлено. Совершим предельный переход в (18). В силу феллеровости броуновского семейства  $\mathbb{E}^{W_{\tau_n}} f(W_u) \rightarrow \mathbb{E}^{W_{\tau}} f(W_u)$  при  $n \rightarrow \infty$  для всех  $\omega \in \{\tau < \infty\}$ . По теореме 16 главы IV имеем  $\mathbb{P}^x$ -п. н.

$$\mathbb{E}^x(f(W_{\tau_n+u}) | \mathcal{F}_{\tau_n+}) \rightarrow \mathbb{E}^x\left(f(W_{\tau+u}) | \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n+}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Проверим, что

$$\mathcal{F}_{\tau+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n+}. \quad (19)$$

Покажем, что  $\mathcal{F}_{\tau+} \subset \mathcal{F}_{\tau_n+}$  при любом  $n \in \mathbb{N}$ . Действительно, если  $A \in \mathcal{F}_{\tau+}$ , то  $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}$  для каждого  $t \geq 0$ . Тогда  $A \cap \{\tau_n \leq t\} = A \cap \{\tau \leq t\} \cap \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}$  (учли, что  $\{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}$  и  $\{\tau_n \leq t\} \subset \{\tau \leq t\}$  при любом  $t \geq 0$ ). Следовательно,  $\mathcal{F}_{\tau+} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n+}$ . Для получения обратного включения воспользуемся тем, что

$$A \in \mathcal{F}_{\tau+} \iff A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t \text{ для любого } t \geq 0.$$

Пусть  $A \in \mathcal{F}_{\tau_n+}$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $A \cap \{\tau_n < t\} \in \mathcal{F}_t$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $t \geq 0$ . Поэтому

$$A \cap \{\tau < t\} = A \cap \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_n < t\} \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap \{\tau_n < t\}) \in \mathcal{F}_t,$$

что завершает доказательство (19). Тем самым, (17) доказано для любой *непрерывной и ограниченной* функции  $f$ .

Класс множеств  $C$  из  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ , для которых (17) выполнено при  $f = \mathbf{1}_C$ , образует  $\lambda$ -систему. Любое замкнутое множество  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$  входит в эту систему, поскольку  $\mathbf{1}_B$  можно получить (см. доказательство теоремы 4 главы III) как предел убывающей последовательности непрерывных “шапочек”  $f_n$ , для которых (17) установлено. Пересечение конечного числа замкнутых множеств замкнуто, и замкнутые множества порождают  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ . По теореме о монотонных классах соотношение (17) будет справедливо для  $f = \mathbf{1}_C$ , где  $C$  — любое борелевское множество в  $\mathbb{R}^m$ . Доказательство теоремы 1 завершается, если учесть, что ограниченную измеримую функцию  $f$  можно представить как равномерный предел последовательности линейных комбинаций индикаторов борелевских множеств.  $\square$

Формула (16) получается, в частности, из (17) при  $\tau \equiv s$ , поскольку в этом случае  $\mathcal{F}_{\tau+} = \mathcal{F}_{s+}$ .

Для доказательства так называемого *строго марковского свойства* броуновского семейства (далее теорема 2) нам потребуется еще один вспомогательный результат.

**Лемма 7.** Пусть  $P^x(\tau < \infty) = 1$  для всех  $x \in \mathbb{R}^m$ , где  $\tau$  — марковский момент относительно потока  $(\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}$ . Тогда при каждом  $x \in \mathbb{R}^m$  для любых  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_k \geq 0$  и ограниченных функций  $f_k: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $k = 1, \dots, n$ , имеем

$$E^x(f_1(W_{\tau+u_1}) \cdots f_n(W_{\tau+u_n}) | \mathcal{F}_{\tau+}) = E^{W_\tau} f_1(W_{u_1}) \cdots f_n(W_{u_n}) \quad P^x\text{-п. н.} \quad (20)$$

**Доказательство** леммы ведется по индукции. При  $n = 1$  результат дает теорема 1. Покажем, как от  $n = 1$  перейти к  $n = 2$  (переход от произвольного  $n$  к  $n + 1$  аналогичен). Пусть для определенности  $0 \leq u_1 \leq u_2$ . Тогда  $P^x$ -п. н.

$$\begin{aligned} E^x(f_1(W_{\tau+u_1})f_2(W_{\tau+u_2}) | \mathcal{F}_{\tau+}) &= \\ &= E^x(E^x(f_1(W_{\tau+u_1})f_2(W_{\tau+u_2}) | \mathcal{F}_{(\tau+u_1)+}) | \mathcal{F}_{\tau+}) = \\ &= E^x(f_1(W_{\tau+u_1})E^x(f_2(W_{\tau+u_2}) | \mathcal{F}_{(\tau+u_1)+}) | \mathcal{F}_{\tau+}) = \\ &= E^x(f_1(W_{\tau+u_1})E^{W_{\tau+u_1}}f_2(W_{u_2-u_1}) | \mathcal{F}_{\tau+}) = \\ &= E^{W_\tau}(f_1(W_{u_1})E^{W_{u_1}}f_2(W_{u_2-u_1})) = E^{W_\tau}(f_1(W_{u_1})E^x(f_2(W_{u_2}) | \mathcal{F}_{u_1+})) = \\ &= E^{W_\tau}f_1(W_{u_1})f_2(W_{u_2}). \end{aligned}$$

Последнее равенство в этой цепочке вытекает из следующих рассуждений. При любом  $z \in \mathbb{R}^m$

$$E^z(f_1(W_{u_1})E^x(f_2(W_{u_2}) | \mathcal{F}_{u_1+})) = E^z(f_1(W_{u_1})f_2(W_{u_2})).$$

В формуле (17) при каждом  $x \in \mathbb{R}^m$  и  $\tau \equiv s$  в качестве варианта  $E^x(f(W_{s+u}) | \mathcal{F}_{s+})$  можно выбрать  $E^{W_s}f(W_u)$  при всех  $\omega \in \Omega$ . Поэтому

$$\begin{aligned} E^z(f_1(W_{u_1})E^x(f_2(W_{u_2}) | \mathcal{F}_{u_1+})) &= E^z(f_1(W_{u_1})E^{W_{u_1}}f_2(W_{u_2-u_1})) = \\ &= E^z(f_1(W_{u_1})E^z(f_2(W_{u_2}) | \mathcal{F}_{u_1+})) = E^z(E^z(f_1(W_{u_1})f_2(W_{u_2}) | \mathcal{F}_{u_1+})) = \\ &= E^z f_1(W_{u_1})f_2(W_{u_2}). \quad \square \end{aligned}$$

§ 5. Теперь мы располагаем всем необходимым, чтобы получить основной результат приложения 6. Введем *оператор сдвига* на случайную величину  $\tau \in [0, \infty)$ . Для отображения  $Y(\omega)$ , заданного на  $\Omega$ , положим

$$(\theta_\tau Y)(\omega) := Y(\theta_{\tau(\omega)}\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (21)$$

где  $\theta_u\omega$  определено в (10).

На множестве  $P^x$ -меры нуль, где  $\tau = \infty$ , всюду считаем  $W_\tau = 0 \in \mathbb{R}^m$  и  $\theta_\tau h(W) = 0$  (здесь  $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\Omega = C([0, \infty), \mathbb{R}^m)$ ). Для броуновского семейства  $(W_t, P^x)_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^m}$  следующий результат дает форму *строго марковского свойства*. Нетрудно показать, что приводимая ниже теорема обобщает теорему 4 главы III, описывающую более простой вариант строгой марковости винеровского процесса.

**Теорема 2.** Пусть  $P^x(\tau < \infty) = 1$  при всех  $x \in \mathbb{R}^m$ , где  $\tau$  — марковский момент относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . Тогда для каждого  $x \in \mathbb{R}^m$  и любого ограниченного  $\mathcal{F} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримого функционала  $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$E^x(\theta_\tau h(W) | \mathcal{F}_{\tau+}) = E^{W_\tau} h(W) \quad P^x\text{-п. н.} \quad (22)$$

**Доказательство.** В силу (21) получаем (напомним, что процесс  $W$  непосредственно задан и  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(C([0, \infty), \mathbb{R}^m))$ )

$$(\theta_\tau h(W))(\omega) = h(W.(\theta_{\tau(\omega)}\omega)) = h(\theta_{\tau(\omega)}\omega) = h(\omega(\cdot + \tau(\omega))) = h(W. +_{\tau(\omega)}). \quad (23)$$

По лемме 7 формула (22) верна для  $h = \mathbf{1}_C$ , где цилиндр

$$C = \{W_{t_1} \in B_1, \dots, W_{t_n} \in B_n\},$$

$0 \leq t_1 < \dots < t_n, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), n \in \mathbb{N}$ .

По теореме о монотонных классах получаем, что (22) справедливо для  $h = \mathbf{1}_A$ , где  $A$  — произвольное множество из  $\mathcal{F}$ . Теперь заметим, что функция (функционал)  $h$  равномерно приближается линейными комбинациями индикаторов событий из  $\mathcal{F}$ . Это завершает доказательство теоремы.  $\square$

**Замечание 1.** Свойство (IV.2) и  $\mathcal{F}_\tau | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримость  $E^{W_\tau} f(W)$ , разумеется, влекут, что в (22) вместо  $\mathcal{F}_{\tau+}$  можно брать  $\mathcal{F}_\tau$ . Кроме того, очевидно, марковский момент  $\tau$  относительно “более бедной” фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  всегда является марковским и относительно “более богатой” фильтрации  $(\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}$ . Формула (22) обобщается и на  $\mathcal{F} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримые (необязательно ограниченные) функционалы  $h$ , для которых

$$E^x|h(W)| < \infty \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}^m. \quad (24)$$

Для этого достаточно рассмотреть ограниченные функционалы вида

$$h_N(\omega) := h(\omega)\mathbf{1}\{|h(\omega)| \leq N\},$$

воспользоваться доказанной для них формулой (22) и учесть, что  $h_N(\omega) \rightarrow h(\omega)$  при  $N \rightarrow \infty$  для каждого  $\omega \in \Omega$ .

**§ 6.** Еще одну полезную форму строго марковского свойства броуновского движения содержит следующее упражнение.

1. Докажите, что теорема 1 остается справедливой, если вместо константы  $u \geq 0$  взять неотрицательную случайную величину  $\eta \in \mathcal{F}_{\tau+} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$  такую, что  $P^x(\eta < \infty) = 1$  при всех  $x \in \mathbb{R}^m$ . Точнее говоря, для каждого  $x \in \mathbb{R}^m$  имеет место равенство

$$E^x(f(W_{\tau+\eta}) | \mathcal{F}_{\tau+}) = (T^\eta f)(W_\tau) \quad P^x\text{-п. н.}, \quad (25)$$

где  $(T^\eta f)(W_\tau)$  понимается как выражение, получаемое при подстановке  $t = \eta(\omega)$  и  $z = W_{\tau(\omega)}(\omega)$  в формулу

$$(T^t f)(z) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) P(z, t, dy);$$

переходная функция  $P(z, t, B)$  задается формулой (3).

2. Левая часть формулы (25) получилась подстановкой  $\eta$  вместо  $u$  в левую часть формулы (17). Однако если и в правую часть (17) подставить  $\eta$  вместо  $u$ , взяв  $E^{W_\tau} f(W_\eta)$  (т. е. вычислить  $\phi(z) = E^z f(W_\eta)$  и затем взять  $\phi(W_\tau)$ ), то получится, вообще говоря, некорректное равенство. Проверьте это.

**Пример 1.** Покажем, как с помощью соотношения (25) (при  $m = 1$ ) можно найти распределение величины  $\tau_a = \inf\{t \geq 0: W_t = a\}$ , где  $a > 0$  (другие два способа решения этой задачи для броуновского движения, начинающегося из нуля, изложены в § 10 главы III и дополнении к главе V).

Пусть в (25)  $\tau = \tau_a$  и  $\eta = (t - \tau) \vee 0$ , где  $t > 0$ . Тогда  $P^x(\tau < \infty) = 1$  для всех  $x \in \mathbb{R}$  и, очевидно,  $\eta \in \mathcal{F}_{\tau+} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , а также  $P^x(\eta < \infty) = 1$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ . Кроме того,  $f(W_{\tau+\eta})\mathbf{1}_A = f(W_t)\mathbf{1}_A$  для  $A = \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_{\tau+}$ . Поэтому, согласно (25), для всех  $x \in \mathbb{R}$  и  $f = \mathbf{1}_B$ , где  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , имеем

$$E^x \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B(W_t) = E^x \mathbf{1}_A (T^\eta \mathbf{1}_B)(W_\tau). \quad (26)$$

Здесь левая часть есть  $P^x(\tau < t, W_t \in B)$ . Поскольку  $W_\tau = a$  ( $P^x$ -п. н.) для каждого  $x \in \mathbb{R}$ , имеем

$$(T^\eta \mathbf{1}_B)(W_\tau) = (T^\eta \mathbf{1}_B)(a) = P(a, \eta, B).$$

Тем самым, правая часть (26) равна

$$\int_{\{\tau < t\}} P(a, \eta, B) P^x(d\omega) = \int_{\{\eta > 0\}} \int_B \frac{e^{-\frac{(y-a)^2}{2\eta(\omega)}}}{\sqrt{2\pi\eta(\omega)}} dy P^x(d\omega) = J^x(a, t, B).$$

Для каждого  $\omega$  из множества  $\{\omega: \eta(\omega) > 0\}$  плотность нормальной величины  $N(a, \eta(\omega))$  симметрична относительно вертикальной прямой, проходящей через точку  $a$ . Поэтому

$$J^x(a, t, B) = J^x(a, t, 2a - B),$$

где множество  $2a - B$  есть отражение множества  $B$  относительно точки  $a$ . Итак,

$$P^x(\tau < t, W_t \in B) = P^x(\tau < t, W_t \in 2a - B). \quad (27)$$

Возьмем  $x < a$ ,  $B = (-\infty, a)$  и  $t > 0$ . Тогда  $\{W_t > a\} \subset \{\tau < t\}$  и в силу (27)

$$P^x(\tau < t, W_t < a) = P^x(\tau < t, W_t > a) = P^x(W_t > a).$$

Поэтому с учетом того факта, что  $P^x(W_t = a) = 0$  при всех  $a, x \in \mathbb{R}$ , получаем

$$\begin{aligned} P^x(\tau < t) &= P^x(\tau < t, W_t < a) + P^x(\tau < t, W_t \geq a) = \\ &= P^x(\tau < t, W_t < a) + P^x(\tau < t, W_t > a) = \\ &= 2P^x(W_t > a) = 2 \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dy. \end{aligned}$$

Выше предполагалось, что  $a > 0$  и  $x < a$ . В качестве упражнения получите ответ для любых  $a, x \in \mathbb{R}$ .  $\square$



## Приложение 7

### Вероятностное решение задачи Дирихле

§ 1. Свойства многомерного броуновского движения, изложенные в приложении 6, дают возможность получить (см. далее теорему 1) в вероятностных терминах решение классической задачи Дирихле. Напомним постановку этой задачи. В области  $G \subset \mathbb{R}^m$  требуется найти гармоническую функцию  $g$ , совпадающую на границе области  $\partial G$  с заданной измеримой и ограниченной функцией  $f$ , здесь  $f \in \mathcal{B}(\partial G) \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $\partial G$  — замкнутое множество в  $\mathbb{R}^m$ .

Другими словами, ищется функция  $g = g(x_1, \dots, x_m)$ , удовлетворяющая уравнению

$$\Delta g = 0 \quad (1)$$

и граничному условию

$$g|_{\partial G} = f, \quad (2)$$

где, как обычно,  $\Delta$  — оператор Лапласа.

Займемся подготовительной работой. Определим момент  $\tau_{\partial G}$  первого выхода  $m$ -мерного броуновского движения  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  на границу  $\partial G$ :

$$\tau_{\partial G} = \inf\{t \geq 0: W_t \in \partial G\}. \quad (3)$$

Как и в приложении 6, мы считаем броуновское движение  $W$  непосредственно заданным на пространстве  $\Omega = C([0, \infty), \mathbb{R}^m)$  с  $\sigma$ -алгеброй борелевских множеств  $\mathcal{F}$  этого пространства. По-прежнему,  $P$ -распределение процесса  $W$ ,  $\mathbb{F}$  — естественная фильтрация. О вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и фильтрации  $\mathbb{F}$  делаются обычные предположения.

По теореме 3 главы III величина  $\tau_{\partial G}$  есть марковский момент относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . Положим  $\nu = \tau_{\partial G}$  и введем функционал

$$h(W) = f(W_\nu). \quad (4)$$

Заметим, что  $W_\nu \in \partial G$  в силу непрерывности процесса  $W = \{W_t, t \geq 0\}$ . Поскольку  $W_\nu \in \mathcal{F}_\nu \mid \mathcal{B}(\partial G)$ ,  $\mathcal{F}_\nu \subset \mathcal{F}$  и  $f \in \mathcal{B}(\partial G) \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , то  $h$  — ограниченный  $\mathcal{F} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримый функционал.

Для каждой точки  $x$  открытого множества  $G$  возьмем открытый шар

$$V_R(x) = \{y: |y - x| < R\}$$

радиуса  $R > 0$  с центром в  $x$ , который содержится в  $G$ , и рассмотрим шар  $V_r(x) = \{y: |y - x| \leq r\}$ , где  $r < R$ . Аналогично (3) определим

$$\tau_{\partial V_r(x)} = \inf\{t \geq 0: W_t \in \partial V_r(x)\}, \quad (5)$$

и пусть далее  $\tau = \tau_{\partial V_r(x)}$ . По теореме 3 главы III этот момент  $\tau$  также является марковским моментом относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

Нам понадобятся операторы сдвига вида  $\theta_\tau$ , введенные в § 5 приложения 6, а также меры  $P^x$ , определенные в § 1 того же приложения.

Будем далее считать, что если функция  $Y(\omega)$  не определена вне множества  $D$ , то  $Y(\omega)\mathbf{1}_D := 0$  для  $\omega \notin D$ .

**Лемма 1.** *Для каждого  $x \in \mathbb{R}^m$  и любого  $r > 0$  такого, что  $[V_r(x)] \subset G$ , имеем*

$$\theta_\tau f(W_\nu)\mathbf{1}_D = f(W_\nu)\mathbf{1}_D \quad (P^x\text{-н. н.}), \quad (6)$$

где  $D = \{\nu < \infty\}$ ,  $\nu = \tau_{\partial G}$ ,  $\tau = \tau_{\partial V_r(x)}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\Omega_x = x + C_0([0, \infty), \mathbb{R}^m)$ , где  $x \in \mathbb{R}^m$ . Заметим, что  $P^x(\Omega_x) = 1$  при всех  $x \in \mathbb{R}^m$ . Чтобы выйти на  $\partial G$ , траектория, начавшаяся в точке  $x$ , должна сначала выйти на границу шара  $V_r(x)$ . Поэтому, если  $\omega \in D \cap \Omega_x$ , то непрерывность траекторий броуновского движения влечет неравенство

$$\tau(\omega) < \nu(\omega) \quad (< \infty). \quad (7)$$

Напомним, что  $W_u(\theta_t \omega) = W_{u+t}(\omega)$  для всех  $u, t \geq 0$ . Возьмем произвольную точку  $\omega \in D \cap \Omega_x$ . Пусть для нее  $\tau(\omega) = t$ . В силу (6.21) получаем равенство

$$\theta_\tau f(W_\nu)(\omega) = f(W_{\nu(\theta_t \omega)}(\theta_t \omega)) = f(W_{t+\nu(\theta_t \omega)}(\omega)). \quad (8)$$

Теперь остается лишь показать, что для рассматриваемой точки  $\omega$

$$t + \nu(\theta_t \omega) = \nu(\omega). \quad (9)$$

Из (7) имеем  $\nu(\omega) > t$ . Кроме того,  $W_s(\omega) \in G$  при  $s < t$ , и

$$\begin{aligned} t + \nu(\theta_t \omega) &= t + \inf\{u \geq 0: W_u(\theta_t \omega) \in \partial G\} = \\ &= t + \inf\{u \geq 0: W_{t+u}(\omega) \in \partial G\} = \inf\{s \geq 0: W_s(\omega) \in \partial G\} = \nu(\omega). \end{aligned}$$

Тем самым, соотношение (9) установлено, что вместе с (8) доказывает свойство (6).  $\square$

**§ 2.** Перейдем непосредственно к решению задачи Дирихле.

**Теорема 1.** *Пусть область  $G \subset \mathbb{R}^m$  такова, что*

$$P^x(\tau_{\partial G} < \infty) = 1 \quad \text{при каждом } x \in \mathbb{R}^m. \quad (10)$$

*Тогда для ограниченной и измеримой функции  $f$  на  $\partial G$  решение задачи Дирихле (1) с граничным условием (2) существует и дается следующей “вероятностной” формулой*

$$g(x) = E^x f(W_{\tau_{\partial G}}), \quad x \in G \cup \partial G. \quad (11)$$

**Доказательство.** Положим  $\nu = \tau_{\partial G}$ . Поскольку для  $x \in \partial G$  имеем  $\mathbb{P}^x$ -п.н.  $\nu = 0$  и  $W_0 = x$ , то граничное условие (2) выполнено для указанной функции  $g$ .

Обратимся к проверке свойства (1). Учитывая лемму 3 приложения 6 и то, что  $f(W_\nu)$  есть ограниченная случайная величина (см. рассуждения после формулы (4)), видим, что функция  $g(x)$ , задаваемая формулой (11), определена при всех  $x \in \mathbb{R}^m$ , является ограниченной и  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримой.

В силу (10), (6) и (6.22) для любой точки  $x \in G$  имеем

$$\mathbb{E}^x f(W_\nu) = \mathbb{E}^x \theta_\tau f(W_\nu) = \mathbb{E}^x \mathbb{E}^{W_\tau} f(W_\nu), \quad (12)$$

здесь и далее придерживаемся соглашения, что если действительная функция  $Y(\omega)$  не определена вне множества  $D = \{\nu < \infty\}$ , то  $\mathbb{E}^x Y := \mathbb{E}^x (Y \mathbf{1}_D)$  (когда последний интеграл существует), а  $Y \mathbf{1}_D$  понимается как  $Y$  на множестве  $\{\nu < \infty\}$  и как 0 на множестве  $\{\nu = \infty\}$ .

Пусть  $\mathbb{Q}^x = \mathbb{P}^x(W_\tau)^{-1}$  — распределение случайной величины  $W_\tau$  на  $\partial V_r(x)$ , когда  $W_\tau$  рассматривается как случайная величина на пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^x)$ . Воспользовавшись формулой (I.23), согласно которой

$$\mathbb{E}^x H(Y) = \int_S H(y) \mathbb{P}^x Y^{-1}(dy)$$

для  $Y: \Omega \rightarrow S$ ,  $Y \in \mathcal{F} | \mathcal{B}(S)$ ,  $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$  и  $H: S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $H \in \mathcal{B}(S) | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , из (12) и (11) имеем

$$g(x) = \int_{\partial V_r(x)} \mathbb{E}^y f(W_\nu) \mathbb{Q}^x(dy) = \int_{\partial V_r(x)} g(y) \mathbb{Q}^x(dy). \quad (13)$$

Докажем, что введенное распределение  $\mathbb{Q}^x$  — равномерное распределение на сфере  $\partial V_r(x)$ . Учитывая (6.1) и (6.2), можно ограничиться рассмотрением лишь точки  $x = 0$ . Кроме того, достаточно проверить (поясните в качестве простого упражнения), что  $\mathbb{Q}^0 U^{-1} = \mathbb{Q}^0$  для любой ортогональной матрицы  $U$  порядка  $m$ . Мера  $\mathbb{Q}^0 U^{-1}$  есть распределение случайной величины  $U(W_\alpha)$ , заданной на  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , где  $\alpha = \tau_{\partial V_r(0)}$ . Заметим, что  $U(W_\alpha) = (UW)_\beta$ , здесь  $\beta = \inf\{t \geq 0: (UW)_t \in \partial V_r(0)\}$ . Это вытекает из того, что при ортогональном преобразовании евклидовы длины векторов сохраняются. Остается принять во внимание, что  $\{(UW)_t, t \geq 0\}$  также является стандартным броуновским движением на  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Последнее следует из формулы (II.3) и того, что  $UU^* = I$ , где  $I$  — единичная матрица  $m$ -го порядка.

Таким образом, ограниченная измеримая функция  $g: G \rightarrow \mathbb{R}$  для каждого  $x \in \mathbb{R}^m$  и любого шара  $V_r(x)$ , содержащегося в области  $G$ , удовлетворяет в силу (13) соотношению

$$g(x) = \frac{1}{\mu_r(\partial V_r(x))} \int_{\partial V_r(x)} g(y) \mu_r(dy), \quad (14)$$

где  $\mu_r$  — мера Лебега на  $\partial V_r(x)$ . Из представления (14) вытекает, что функция  $g$  является гармонической в области  $G$ , иначе говоря,  $\Delta g = 0$ . Для полноты изложения доказательство этого утверждения, следующее рассуждениям из [24], дается ниже.

**§ 3.** Получим интегральное условие гармоничности функции  $g$  в области  $G \subset \mathbb{R}^m$ .

**Лемма 2.** Пусть  $g(x)$  есть ограниченная измеримая функция такая, что для любого  $x \in G$  и каждого шара  $V_r(x) \subset G$  выполнено свойство (14). Тогда функция  $g$  является гармонической в области  $G$ .

**Доказательство.** Для  $\varepsilon > 0$  рассмотрим гладкую функцию, заданную на  $\mathbb{R}^m$  формулой

$$v_\varepsilon(x) = \begin{cases} c(\varepsilon) \exp\{1/(|x|^2 - \varepsilon^2)\}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

где  $|\cdot|$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^m$ , а  $c(\varepsilon)$  выбирается так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}^m} v_\varepsilon(x) dx = c(\varepsilon) \int_0^\varepsilon S_r \exp\{1/(r^2 - \varepsilon^2)\} dr = 1, \quad (15)$$

здесь  $S_r = 2r^{m-1}\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$  — площадь сферы радиуса  $r$  в  $\mathbb{R}^m$ . Определим также функцию  $g_\varepsilon$  как свертку функций  $g$  и  $v_\varepsilon$ , т. е. пусть

$$g_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^m} v_\varepsilon(x-y)g(y) dy, \quad \varepsilon > 0, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad (16)$$

где функция  $g$  считается доопределенной нулем вне области  $G$ . Легко видеть, что при каждом  $\varepsilon > 0$  функция  $g_\varepsilon$  бесконечно дифференцируема в  $\mathbb{R}^m$  ( $g_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ ).

Пусть  $G(\varepsilon) = \{x \in G: V_\varepsilon(x) \subset G\}$ , где  $\varepsilon > 0$ . Каждое такое множество открыто и  $G(\varepsilon) \uparrow G$  при  $\varepsilon \downarrow 0$ , т. е.  $\bigcup_{\varepsilon > 0} G(\varepsilon) = G$  и  $G(\varepsilon') \subset G(\varepsilon)$  при  $\varepsilon < \varepsilon'$ . Из (16), учитывая (15) и (14), находим, что для  $\varepsilon > 0$  и  $x \in G(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} g(x+z)v_\varepsilon(z) dz = \int_{V_\varepsilon(0)} g(x+z)v_\varepsilon(z) dz = \\ &= c(\varepsilon) \int_0^\varepsilon \int_{\partial V_r(0)} g(x+z) \exp\{1/(r^2 - \varepsilon^2)\} \mu_r(dz) dr = \\ &= c(\varepsilon) \int_0^\varepsilon \exp\{1/(r^2 - \varepsilon^2)\} \int_{\partial V_r(0)} g(x+z) \mu_r(dz) dr = \\ &= g(x)c(\varepsilon) \int_0^\varepsilon S_r \exp\{1/(r^2 - \varepsilon^2)\} dr = g(x). \end{aligned}$$

Следовательно,  $g(x) = g_\varepsilon(x)$  для  $\varepsilon > 0$  и  $x \in G(\varepsilon)$ . Поэтому  $g \in C^\infty(G(\varepsilon))$  для каждого  $\varepsilon > 0$ , значит,  $g \in C^\infty(G)$ .

Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$  и  $x \in G(\varepsilon)$ . Для  $z \in V_\varepsilon(0)$  по формуле Тейлора

$$g(x+z) = g(x) + \sum_{k=1}^m z_k \frac{\partial g(x)}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m z_k z_j \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_k \partial x_j} + R(x, z),$$

где

$$\sup_{z \in V_\varepsilon(0)} R(x, z) = o(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Заметим, что для  $k, j = 1, \dots, m$  и  $\varepsilon > 0$

$$\int_{\partial V_\varepsilon(0)} z_k \mu_\varepsilon(dz) = 0, \quad \int_{\partial V_\varepsilon(0)} z_k z_j \mu_\varepsilon(dz) = 0 \quad \text{при } k \neq j.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{S_\varepsilon} \int_{\partial V_\varepsilon(0)} g(x+z) \mu_\varepsilon(dz) = \\ &= g(x) + \frac{1}{2S_\varepsilon} \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_k^2} \int_{\partial V_\varepsilon(0)} z_k^2 \mu_\varepsilon(dz) + \frac{1}{S_\varepsilon} \int_{\partial V_\varepsilon(0)} R(x, z) dz. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая, что для  $x \in G(\varepsilon)$

$$\frac{1}{S_\varepsilon} \int_{\partial V_\varepsilon(0)} R(x, z) dz = o(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

и

$$\int_{\partial V_\varepsilon(0)} z_k^2 \mu_\varepsilon(dz) = \frac{1}{m} \int_{\partial V_\varepsilon(0)} \sum_{j=1}^m z_j^2 \mu_\varepsilon(dz) = \frac{\varepsilon^2 S_\varepsilon}{m},$$

получаем в силу (17), что для  $x \in G(\varepsilon)$

$$\frac{\varepsilon^2}{2m} \Delta g(x) + o(\varepsilon^2) = 0.$$

Отсюда вытекает, что  $\Delta g = 0$  для всех  $x \in G$ .  $\square$

Итак, лемма 2, следовательно, и теорема 1 доказаны.  $\square$

§ 4. Полезно сопоставить доказанную теорему 1 с результатами следующих упражнений.

1. Приведите пример области  $G$  такой, что задача Дирихле (1) с граничным условием  $f = 0$  на  $\partial G$  имеет *неограниченное* решение.
2. Докажите, что при  $m \geq 2$  броуновское движение, начинающееся в точке  $x \in B_r(0) \setminus \{0\}$ , выйдет (с вероятностью 1) из этого шара с выколотым центром, не заходя при этом в точку 0. Тем самым, ограниченное решение задачи Дирихле (1), (2) в области  $G = \{y \in \mathbb{R}^m : 0 < |y| < r\}$  будет определяться лишь значениями функции  $f$  на сфере  $|y| = r$ .

**Замечание 1.** Если  $G$  — *ограниченная* область в  $\mathbb{R}^m$ , то условие (10) всегда выполнено. Это следует, например, из того, что каждая компонента процесса  $W$  удовлетворяет закону повторного логарифма (см. теорему 8 главы III). Далее, если  $G$  — *ограниченная* область, то  $\partial G$  есть компакт, как замкнутое и ограниченное множество. Поэтому, если функция  $f$  для такой области  $G$  *непрерывна* на  $\partial G$ , то она автоматически ограничена. В силу замечания 1 приложения 6 вместо *условия ограниченности*  $f$  в условиях теоремы 1 можно потребовать, чтобы

$$\mathbb{E}^x |f(W_{\tau_{\partial G}})| < \infty \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^m. \quad (18)$$

§ 5. Рассмотрим вопрос о единственности решения задачи Дирихле.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда каждое ограниченное решение задачи (1) с граничным условием (2) дается формулой (11).

**Доказательство.** Пусть  $g$  — ограниченное гармоническое в области  $G \subset \mathbb{R}^m$  решение и  $g|_{\partial G} = f$ . Пусть  $G_n = \left\{x \in G: \inf_{y \in \partial G} |x - y| > 1/n\right\}$ . Для  $x \in G_n, n \in \mathbb{N}, t \geq 0$  рассмотрим марковский момент  $\beta_n(x, t) = t \wedge \tau_{\partial(G_n \cap V_n(x))}$  относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , где

$$\tau_M = \inf\{t \geq 0: W_t \in M\}$$

для замкнутого множества  $M \subset \mathbb{R}^m$ , а  $V_n(x) = \{y \in \mathbb{R}^m: |y - x| < n\}$ . По формуле Ито с  $\beta = \beta_n(x, t)$  можно получить, что

$$g(W_\beta) = g(W_0) + \sum_{k=1}^m \int_0^\beta \frac{\partial g(W_s)}{\partial x_k} dW_s^{(k)} + \frac{1}{2} \int_0^\beta \Delta g(W_s) ds. \quad (19)$$

Второй интеграл в правой части (19) равен нулю, поскольку  $W_s \in G$  для  $s \leq \beta$ .

Взяв математическое ожидание  $\mathbb{E}^x$  от обеих частей (19), видим, что

$$\mathbb{E}^x g(W_\beta) = \mathbb{E}^x g(W_0) = g(x).$$

Для каждого  $x \in G$ , совершив предельный переход по  $t$  ( $t \rightarrow \infty$ ), а затем по  $n$  ( $n \rightarrow \infty$ ), имеем

$$g(W_{\beta_n(x, t)}) \rightarrow g(W_{\tau_{\partial G}}) \quad \mathbb{P}^x\text{-п. н.},$$

и в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости

$$\mathbb{E}^x g(W_{\beta_n(x, t)}) \rightarrow \mathbb{E}^x g(W_{\tau_{\partial G}}),$$

что доказывает представление функции  $g$  в виде (11), а, значит, и единственность решения задачи Дирихле.  $\square$

**§ 6.** Обратимся к поведению решения задачи Дирихле вблизи границы области  $G$ .

Для открытого множества  $G$  в  $\mathbb{R}^m$  введем марковский момент

$$\nu_G := \inf\{t > 0: W_t \in \overline{G}\}, \quad \text{где } \overline{G} = \mathbb{R}^m \setminus G.$$

**Определение 1.** Точка  $z \in \partial G$  называется *регулярной*, если  $\mathbb{P}^z(\nu_G = 0) = 1$ . Остальные точки границы  $G$  называются *нерегулярными*.

Заметим, что определение регулярности является локальным в том смысле, что точка  $z \in \partial G$  регулярна тогда и только тогда, когда эта точка регулярна как точка границы  $G \cap V_r(z)$  для некоторого  $r > 0$ , где  $V_r(z) = \{y \in \mathbb{R}^m: |y - z| < r\}$ .

**3.** Докажите, что если  $m = 1$ , то любая точка границы  $\partial G$  является регулярной.

**Теорема 3** ([148; с. 145]). Пусть  $m \geq 2$  и  $z \in \partial G$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $z$  — регулярная точка границы  $\partial G$  области  $G$ ;
- 2) для любой непрерывной и ограниченной функции  $f: \partial G \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{G \ni x \rightarrow z} \mathbb{E}^x f(W_{\tau_{\partial G}}) = f(z);$$

- 3) для любого  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{G \ni x \rightarrow z} \mathbb{P}^x(\tau_{\partial G} > \varepsilon) = 0.$$

Простое достаточное условие регулярности точек границы содержит упражнение

4. Пусть  $z \in \partial G$  и для некоторого  $r > 0$  найдется конус с вершиной в точке  $z$ , содержащийся в  $\mathbb{R}^m \setminus (G \cap V_r(z))$ . Тогда  $z$  — регулярная точка. Напомним, что конус с вершиной в нуле есть множество

$$C(y, \theta) = \{x \in \mathbb{R}^m : (x, y) \geq |x| \cdot |y| \cos \theta\}, \quad \text{где } y \neq 0 \in \mathbb{R}^m, \quad \theta \in [0, \pi].$$

В упомянутом выше условии конус с вершиной в точке  $z$  — это множество  $z + C(y, \theta)$ , где  $y \neq 0$  и  $\theta \in (0, \pi)$ .

В связи с условием (10) в теореме 1 представляет интерес упражнение

- 5 ([148; с. 253]). Положим  $v(x) = \mathbf{P}^x(\tau_{\overline{G}} = \infty)$ . Докажите, что  $v(x)$  — гармоническая функция в области  $G$ , и если  $z$  — регулярная точка границы, то  $\lim_{G \ni x \rightarrow z} g(x) = 0$ . В частности, если любая точка границы является регулярной, то функция  $\lambda v + g(x)$ , где

$$g(x) = \mathbf{E}^x f(W_{\tau_{\overline{G}}}) \mathbf{1}_{\{\tau_{\overline{G}} < \infty\}},$$

при каждом  $\lambda \in \mathbb{R}$  является решением задачи Дирихле (1), (2). Кроме того, любое ограниченное решение этой задачи имеет указанный вид.

§ 7. Следующие два результата относятся к диффузионным процессам, вообще говоря, более общим, чем броуновское движение.

Предварительно напомним определение генератора.

**Определение 2.** Генератором (или инфинитезимальным оператором) полугруппы  $(T_t)_{t \geq 0}$ , заданной на банаховом пространстве  $S$ , называется оператор  $A$ , действующий следующим образом:

$$Af = \text{s-lim}_{t \rightarrow 0+} \frac{T_t f - f}{t}$$

на тех элементах  $f \in S$ , для которых указанный предел (по норме) существует.

**Теорема 4** ([169; с. 95]). Пусть  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  — процесс в  $\mathbb{R}^m$ , являющийся решением стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^m. \quad (20)$$

Пусть  $A$  — генератор полугруппы, задаваемой формулой

$$(T_t f)(x) = \mathbf{E}^x f(X_t),$$

где  $\mathbf{E}^x$  подчеркивает, что  $X_0 = x$ .

Тогда в область определения  $\mathcal{D}_A$  оператора  $A$  входят все функции  $f$  из  $C_b^2(\mathbb{R}^m)$  (непрерывные ограниченные функции, имеющие непрерывные и ограниченные производные первого и второго порядков) и для  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$

$$Af(x) = \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^*)_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

**Замечание 2.** Поскольку броуновское движение  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  является решением уравнения  $dX_t = dW_t$  (здесь  $b = 0$  и  $\sigma = I$  — единичная матрица  $m$ -го порядка), то теорема 4 показывает, что для броуновского движения генератор соответствующей полугруппы является расширением оператора  $\Delta/2$ , заданного на функциях из  $C_b^2(\mathbb{R}^m)$ .

**Теорема 5** (формула Дынкина). Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и  $\tau$  — марковский момент такой, что  $\mathbb{E} \tau < \infty$ . Пусть  $f$  есть ограниченная функция из  $\mathcal{D}_A$ . Тогда при каждом  $x \in \mathbb{R}^m$

$$\mathbb{E}^x f(X_\tau) = f(x) + \mathbb{E}^x \left( \int_0^\tau A f(X_s) ds \right). \quad (21)$$

**Пример 1.** Пусть  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  — броуновское семейство в  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 2$ ). Найдем математическое ожидание  $\mathbb{E}^x \tau$ , где  $\tau = \tau_{\partial V_r(0)}$  — момент первого выхода броуновского движения из шара радиуса  $r$  с центром в нуле ( $|x| \leq r$ ).

Положим  $\tau_n = \tau \wedge n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Возьмем функцию  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$  такую, что  $f(y) = |y|^2$  при  $|y| < r$ . Тогда в силу (21) и замечания 2 для  $x \in V_r(0)$

$$\mathbb{E}^x f(W_{\tau_n}) = f(x) + \mathbb{E}^x \left( \int_0^{\tau_n} \frac{1}{2} \Delta f(W_s) ds \right).$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}^x f(W_{\tau_n}) = |x|^2 + \mathbb{E}^x \left( \int_0^{\tau_n} m ds \right) = |x|^2 + m \mathbb{E}^x \tau_n.$$

Учитывая, что  $|W_{\tau_n}| \leq r$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ , получаем  $\mathbb{E}^x \tau_n \leq (r^2 - |x|^2)/m$ . Очевидно, что  $\mathbb{P}^x$ -п. н.  $\tau < \infty$  и  $\tau_n \nearrow \tau$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому

$$\mathbb{E}^x f(W_{\tau_n}) \rightarrow \mathbb{E}^x f(W_\tau) = r^2 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

и

$$\mathbb{E}^x \tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x \tau_n = (r^2 - |x|^2)/m.$$

4. Пусть  $x \notin V_r(0)$ . Найдите вероятность  $\mathbb{P}^x(\tau < \infty)$ , где  $\tau$  — момент первого достижения броуновским движением (в  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 2$ ) шара  $V_r(0)$ ,  $r > 0$ .

§ 8. Обсудим некоторые обобщения задачи Дирихле (1)–(2).

Пусть на  $C^2(\mathbb{R}^m)$  задан *полуэллиптический оператор*

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где полуэллиптичность означает, что при каждом  $x \in \mathbb{R}^m$  собственные значения симметричной матрицы  $a = (a_{ij})$  неотрицательны (эллиптичность означает положительность всех собственных значений).



Для области  $G \subset \mathbb{R}^m$  и непрерывной функции  $f: \partial G \rightarrow \mathbb{R}$  попытаемся по аналогии с задачей Дирихле для оператора Лапласа найти так называемое  $L$ -гармоническое расширение  $f$ , т. е. найти такую функцию  $g$ , что

$$Lg = 0 \quad \text{в } G \quad (22)$$

и

$$\lim_{G \ni x \rightarrow z} g(x) = f(z) \quad \text{для всех "регулярных" точек } z \in \partial G. \quad (23)$$

"Вероятностный подход" к решению этой задачи состоит в том, что с оператором  $L$  связывается соответствующий  $m$ -мерный диффузионный процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$ , т. е. процесс, являющийся решением уравнения (20), где  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  — броуновское движение в  $\mathbb{R}^m$ , а матрица  $a = (a_{ij})$  такова, что

$$\sigma \sigma^* = a.$$

Можно показать, что генератор  $A$  такого процесса  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  совпадает на  $C_b^2(\mathbb{R}^m)$  с оператором  $L$ . Поэтому по аналогии с теоремой 1 было бы естественно обратиться к функции

$$g(x) = \mathbb{E}^x f(X_{\tau_{\partial G}}) \quad (24)$$

и посмотреть, будет ли она удовлетворять соотношениям (22) и (23).

Для того чтобы реализовать этот план, надо прежде всего позаботиться о *существовании* решения уравнения (20). Для этого достаточно, например, чтобы коэффициенты  $b$  и  $\sigma$  удовлетворяли при некотором  $M > 0$  условию Липшица

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq M|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^m, \quad (25)$$

где норма  $|\cdot|$  понимается соответствующим образом для векторов и для матриц. При этом вместо условий на  $\sigma$  можно потребовать следующее: все элементы матрицы  $a$  входят в класс  $C_b^2(\mathbb{R}^m)$ . Чтобы функция  $g$  в (24) имела смысл, естественно также предполагать, что

$$\mathbb{P}^x(\tau_{\partial G} < \infty) = 1 \quad \text{для всех } x \in G, \quad (26)$$

где  $\tau_{\partial G}$  — момент первого выхода процесса  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  на границу области  $G$ . (Определение "регулярности" точек границы, данное выше для броуновского движения, сохраняется и для диффузионных процессов.)

К сожалению, *в отличие от броуновского движения* (когда  $L = \Delta/2$ ) указанный выше подход в общем случае не приводит к решению задачи (22)–(23). Тем не менее, при некотором видоизменении этой задачи, изложенные выше идеи позволяют получить "вероятностное" решение так называемой "стохастической задачи Дирихле".

**Определение 3.** Локально ограниченная измеримая функция  $g$  называется  $X$ -гармонической в области  $G \subset \mathbb{R}^m$  для диффузионного процесса  $X$ , если

$$g(x) = \mathbb{E}^x g(X_{\tau_U})$$

при всех  $x \in G$  и всех ограниченных открытых множеств  $U \ni x, U \subset G$ .

Пусть  $f = f(x)$  — некоторая ограниченная измеримая функция, определенная для  $x \in \partial G$ . Будем говорить, что функция  $g = g(x)$ ,  $x \in G$ , является решением “стохастической задачи Дирихле”, если

$$g \text{ является } X\text{-гармонической функцией в } G \quad (27)$$

и

$$\lim_{t \uparrow \tau_{\partial G}} g(X_t) = f(X_{\tau_{\partial G}}) \quad \text{Р}^x\text{-п. н. для } x \in G. \quad (28)$$

**Теорема 6** (см. [169; с. 139]). Пусть  $f$  — ограниченная измеримая функция на  $\partial G$ , где область  $G \subset \mathbb{R}^m$ . Тогда существует решение стохастической задачи Дирихле (27)–(28), которое задается формулой (24). Решение стохастической задачи Дирихле единственно в том смысле, что если  $g$  — ограниченная на  $G$  функция, удовлетворяющая (27) и (28), то  $g$  задается формулой (24).

Приведем один результат, показывающий, что при определенных условиях решение стохастической задачи Дирихле будет являться также решением исходной задачи Дирихле (22)–(23).

Для целого неотрицательного  $k$  и  $\alpha \in (0, 1]$  пусть  $C^{k+\alpha}(G)$  обозначает множество действительных функций, заданных в области  $G \subset \mathbb{R}^m$  таких, что существуют все их частные производные до порядка  $k$  включительно и  $k$ -я производная удовлетворяет условию Гёльдера с показателем  $\alpha$ . По-прежнему будем предполагать выполненными упоминавшиеся условия, обеспечивающие существование решения уравнения (20), в том числе условие (25).

**Теорема 7** ([169; с. 141]). Пусть  $L$  — равномерно эллиптический оператор в области  $G$ , т. е. для  $x \in G$  все собственные значения матрицы  $(a_{ij}(x))$  отделены от нуля некоторым положительным числом. Пусть  $f$  — ограниченная непрерывная на  $\partial G$  функция такая, что  $f \in C^{2+\alpha}(G)$  при некотором  $\alpha \in (0, 1)$ . Тогда формула (24) дает решение задачи Дирихле (22)–(23).

Броуновское движение и диффузионные процессы позволяют получать “вероятностные” решения не только задачи Дирихле, но и многих других классических задач теории дифференциальных уравнений с частными производными (задача Коши, задача Стефана и др.). Приведем один известный результат, относящийся к этому направлению.

**Теорема 8** (формула Фейнмана–Каца). Пусть функция  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^m)$  и

$$u(t, x) = \mathbb{E}^x \left( f(X_t) \exp \left\{ - \int_0^t q(X_s) ds \right\} \right), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

где  $q$  — ограниченная непрерывная функция. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au - qu,$$

где  $A$  — генератор диффузионного процесса  $X = \{X_t, t \geq 0\}$ .

Подробные сведения о затронутых выше проблемах, а также о вероятностном подходе к другим уравнениям в частных производных см., например, в [5, 95, 148, 169].

## Приложение 8

### Большие уклонения

§ 1. Во многих интересных задачах приходится рассматривать семейства очень маловероятных событий. Так, в §19 главы IV мы видели, что при определенных условиях вероятность разорения компании, имеющей начальный капитал  $y_0$ , убывает (по  $y_0$ ) экспоненциально быстро. Оказывается, в ряде случаев удается идентифицировать показатель экспоненты, задающий скорость убывания (по некоторому параметру) изучаемой вероятности. Термин *большие уклонения* возник в связи с изучением сумм независимых слагаемых. Если  $X_1, X_2, \dots$  — последовательность независимых одинаково распределенных центрированных величин и  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), то *большими уклонениями* называют события, состоящие в отклонении  $S_n$  от нуля (т. е. от среднего) на величину порядка  $n$ . Иначе говоря, в отличие от *нормальных уклонений*, т. е. уклонений порядка  $\sqrt{n}$ , фигурирующих в центральной предельной теореме, речь идет о вероятностях событий вида  $\{S_n \geq xn\}$ ,  $\{S_n \leq -xn\}$ ,  $\{|S_n| \geq xn\}$ , где  $x > 0$ . Так, классическая теорема Крамера (см., например, [115]) описывает при определенных условиях на производящую функцию моментов  $\Psi(t) = \mathbb{E} \exp\{tX_1\}$ , где  $t \in \mathbb{R}$ , асимптотическое поведение<sup>\*)</sup>  $(1/n) \log \mathbb{P}(S_n \geq xn)$  при  $n \rightarrow \infty$  для  $x > 0$ . Эквивалентным образом можно сказать, что изучается  $(1/n) \log \mathbb{P}(S_n/n \in F)$ , где замкнутое множество  $F$  есть полупрямая  $[x, \infty)$ . Разумеется, можно ставить аналогичную задачу о вероятности попадания в множество  $B \subset \mathbb{R}$  сумм  $S_n$  при нормировках, отличных от  $1/n$ . Ответ будет зависеть от выбора нормировки, от распределения слагаемых и от множества  $B$ .

Излагаемый ниже подход к исследованию логарифмической асимптотики вероятностей семейств определенных событий проводится в рамках общей теории функциональных предельных теорем: будут рассматриваться семейства мер в метрических пространствах. Вводимая далее функция уклонений играет ключевую роль при описании упомянутой асимптотики. При этом вместо сумм случайных величин можно изучать семейства (должным образом нормированных) случайных процессов. Мы также покажем, что *функциональный закон повторного логарифма* в форме Штрассена теснейшим образом связан с распределением вероятностей процессов  $\{\sqrt{\varepsilon} W(t), t \in [0, T]\}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , где  $W$  — винеровский процесс. Для этого будет установлена теорема Шильдера. В свою очередь, для ее доказательства потребуются свойства функции уклонений, а также вспомогательные результаты, относящиеся к поведению  $m$ -мерного винеровского процесса. В заключение этого раздела кратко рассматриваются и некоторые другие обобщения закона повторного логарифма.

---

<sup>\*)</sup> В этом разделе натуральный логарифм будем обозначать  $\log$ .

§ 2. Всюду далее  $S$  — польское пространство с метрикой  $\rho$ . Напомним

**Определение 1.** Функция  $f: S \rightarrow [-\infty, \infty]$  называется *полу непрерывной снизу* в точке  $x \in S$ , если для любой последовательности  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  точек из  $S$  такой, что  $x_n \rightarrow x$  при  $n \rightarrow \infty$ , верно неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Легко видеть, что это свойство равносильно соотношению

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{y \in V_\varepsilon(x)} f(y) = f(x),$$

где  $V_\varepsilon(x) = \{y \in S: \rho(y, x) < \varepsilon\}$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Говорят, что функция  $f: S \rightarrow [-\infty, \infty]$  *полу непрерывна снизу*, если она полунепрерывна снизу в каждой точке  $x \in S$ . Нетрудно показать, что  $f$  полунепрерывна снизу тогда и только тогда, когда для любого  $c \in \mathbb{R}$  множество  $\{x: f(x) \leq c\}$  является замкнутым.

**Определение 2.** Функция  $I: S \rightarrow [0, \infty]$  называется *функцией уклонений*, если

- 1)  $I \neq \infty$ ;
- 2)  $I$  полунепрерывна снизу;
- 3) для любого  $c \in [0, \infty)$  множество  $\{x: I(x) \leq c\}$  есть компакт.

Заметим, что свойство 2) вытекает из 3) и включается в определение лишь по традиции.

**Определение 3.** Семейство (вероятностных) мер  $\{P_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ , заданных на  $(S, \mathcal{B}(S))$ , удовлетворяет *принципу больших уклонений* с функцией уклонений  $I$ , если

- 1°.  $\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log P_\varepsilon(F) \leq -I(F)$  для любого замкнутого множества  $F$ ,
- 2°.  $\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log P_\varepsilon(G) \geq -I(G)$  для любого открытого множества  $G$ ,

где

$$I(B) := \inf_{x \in B} I(x), \quad B \subset S.$$

В частности, если для  $B \in \mathcal{B}(S)$

$$\inf_{x \in B^0} I(x) = \inf_{x \in [B]} I(x),$$

где  $B^0$  и  $[B]$  обозначают соответственно внутренность и замыкание множества  $B$ , то из 1° и 2° вытекает, что

$$P_\varepsilon(B) = \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} (I(B) + o(1)) \right\} \quad \text{при } \varepsilon \downarrow 0.$$

Таким образом, если  $0 < I(B) < \infty$ , то экспоненциально быстрое убывание  $P_\varepsilon(B)$  при  $\varepsilon \downarrow 0$  фактически описывает функция  $\exp\{-I(B)/\varepsilon\}$ .

Определение 3 родственно определению слабой сходимости вероятностных мер (см. теорему 1 главы V). Заметим также, что используется модификация определения 3, в которой вместо множителя  $\varepsilon$  фигурирует *скорость*  $v(\varepsilon)$ , т. е. некоторая положительная функция  $v(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \downarrow 0$ .

Приведем аналог понятия плотности семейства мер.

**Определение 4.** Семейство мер  $\{P_n\}_{n \geq 1}$  называется *экспоненциально плотным*, если для любого  $M > 0$  существует компакт  $K_M \subset S$  такой, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n(S \setminus K_M) \leq -M.$$

Нетрудно видеть, что если семейство мер  $\{P_n\}_{n \geq 1}$  удовлетворяет принципу больших уклонений (в определении 3 вместо  $\varepsilon$  берется  $1/n$  и вместо  $P_\varepsilon$  — мера  $P_n$ ), то оно экспоненциально плотно.

Следующие два результата выявляют связь принципа больших уклонений для семейства мер с исследованием предельного поведения интегралов по этим мерам от определенных семейств функций. Первый из упомянутых результатов (см., например, [115; с. 32]) называют *леммой Варадана*.

**Теорема 1** (Варадан). Пусть семейство мер  $\{P_n\}_{n \geq 1}$  удовлетворяет принципу больших уклонений (с функцией уклонений  $I$ ). Пусть функция  $H: S \rightarrow \mathbb{R}$  является непрерывной и ограниченной сверху. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \int_S e^{nH(x)} P_n(dx) = \sup_{x \in S} (H(x) - I(x)).$$

Результат, обратный к лемме Варадана, содержит

**Теорема 2** (Брик, [104]). Пусть семейство мер  $\{P_n\}_{n \geq 1}$  экспоненциально плотно. Пусть для всех  $H \in C_b(S)$

$$\Lambda_n(H) := \frac{1}{n} \log \int_S e^{nH(x)} P_n(dx) \rightarrow \Lambda(H) \in \mathbb{R} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда  $\{P_n\}_{n \geq 1}$  удовлетворяет принципу больших уклонений с функцией уклонений

$$I(x) = \sup_{H \in C_b(S)} (H(x) - \Lambda(H)).$$

О больших уклонениях семейства мер в топологических пространствах см., например, [114].

**§ 3.** Чтобы привести содержательный пример функции уклонений (а также семейства мер, удовлетворяющих принципу больших уклонений), который будет использован далее, нам понадобится простое утверждение.

Для  $B \subset S$  и  $\delta > 0$  пусть, как обычно,  $B^\delta$  обозначает  $\delta$ -окрестность множества  $B$ , т. е.  $B^\delta = \{x \in S: \rho(x, B) < \delta\}$ , здесь  $\rho(x, B) = \inf\{\rho(x, y): y \in B\}$ .

**Лемма 1.** Если  $I$  — функция уклонений и  $F$  — замкнутое подмножество  $S$ , то  $I(F^\delta) \rightarrow I(F)$  при  $\delta \downarrow 0$ .

**Доказательство.** Очевидно,

$$I(F^\delta) = \inf_{x \in F^\delta} I(x) \leq \inf_{x \in F} I(x) = I(F),$$

причем функция  $I(F^\delta)$  не возрастает на  $[0, \infty]$ . Допустим,  $I(F) < \infty$ . Тогда для любого  $n \in \mathbb{N}$  найдется точка  $x_n \in F^{1/n}$  такая, что  $I(x_n) \leq I(F^{1/n}) + 1/n \leq I(F) + 1$ . Из свойства 3) в определении 2 вытекает, что последовательность  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  принадлежит некоторому компакту  $V$  в  $S$ . Следовательно, существует  $x \in V$  и подпоследовательность  $\{n_j\}$  такая, что  $x_{n_j} \rightarrow x$  при  $j \rightarrow \infty$ . Поэтому  $\liminf_{j \rightarrow \infty} I(x_{n_j}) \geq I(x)$ . Кроме того,  $x \in F$ , поскольку  $x_{n_j} \in F^{1/n_j}$  для  $j \in \mathbb{N}$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} I(F) \leq I(x) &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} I(x_{n_j}) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} (I(F^{1/n_j}) + 1/n_j) = \\ &= \liminf_{\delta \downarrow 0} I(F^\delta) \leq \limsup_{\delta \downarrow 0} I(F^\delta) \leq I(F). \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть теперь  $I(F) = \infty$ , т.е.  $I(x) = \infty$  для каждого  $x \in F$ . Допустим, что  $\{I(F^{1/n})\}_{n \geq 1}$  не стремится к  $\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда найдутся  $M > 0$  и последовательность  $\{r_j\}_{j \geq 1}$  такие, что  $I(F^{1/r_j}) \leq M$  при всех  $j \in \mathbb{N}$ . Дальнейшие рассуждения совершенно аналогичны оценкам в (1). Лемма доказана.  $\square$

**§ 4.** Введем на пространстве  $S = C([0, T]; \mathbb{R}^m)$  функцию (функционал)

$$I(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\varphi}|^2 dt, & \text{если } \varphi \text{ — абсолютно непрерывная функция, } \varphi(0) = 0, \\ \infty & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2)$$

здесь  $|\cdot|$  для вектора в  $\mathbb{R}^m$  обозначает евклидову норму,  $\dot{\varphi}(t) = (\dot{\varphi}^{(1)}(t), \dots, \dot{\varphi}^{(m)}(t))$ , а абсолютная непрерывность вектор-функции  $\varphi$  означает, что при  $t \in [0, T]$ ,  $k = 1, \dots, m$

$$\varphi^{(k)}(t) = \varphi^{(k)}(0) + \int_0^t \dot{\varphi}^{(k)}(u) du, \quad \text{где } \dot{\varphi}^{(k)} \in L^1[0, T].$$

**Лемма 2.** Введенная функция  $I$  является функцией уклонений на  $S$ .

**Доказательство.** Условие 1) определения 3, очевидно, выполнено. Проверим справедливость условия 3). Докажем, что множество  $S_M = \{\varphi \in S: I(\varphi) \leq M\}$ , где  $M \geq 0$ , есть компакт в  $S$ . Для  $\varphi \in S_M$  и  $s, t \in [0, T]$ , воспользовавшись неравенством Коши–Буняковского–Шварца, имеем

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(s)| &= \left| \int_s^t \dot{\varphi}(u) du \right| \leq \int_s^t |\dot{\varphi}(u)| du \leq \\ &\leq \left( \int_s^t |\dot{\varphi}(u)|^2 du \right)^{1/2} |t - s|^{1/2} \leq (2M|t - s|)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где интеграл от вектор-функции, как обычно, берется покомпонентно.

Следовательно,  $|\varphi(t)| \leq (2MT)^{1/2}$  при  $t \in [0, T]$ . Таким образом, множество  $S_M$  состоит из функций, являющихся равномерно ограниченными и равностепенно

непрерывными. По теореме Арцела–Асколи замыкание множества  $S_M$  в  $S$  есть компакт. Осталось проверить, что  $S_M$  замкнуто.

Для  $\varphi \in S$  и  $n \in \mathbb{N}$  введем функционалы

$$J_n(\varphi) := \frac{n}{2T} \sum_{k=1}^n |\varphi(kT/n) - \varphi((k-1)T/n)|^2. \quad (4)$$

Возьмем замкнутое множество  $S^{(0)} = \{\varphi \in S: \varphi(0) = 0\}$  и положим

$$J(\varphi) := \begin{cases} \sup_{n \in \mathbb{N}} J_n(\varphi), & \varphi \in S^{(0)}, \\ \infty, & \varphi \in S \setminus S^{(0)}. \end{cases} \quad (5)$$

Из (4) вытекает, что  $G(\varphi) = \sup_n J_n(\varphi)$  является полунепрерывной снизу функцией на  $S$  (как верхняя грань непрерывных функций). Имеем  $J(\varphi) = G(\varphi)$  для  $\varphi \in S^{(0)}$  и  $J(\varphi) = \infty$  для  $\varphi \in S \setminus S^{(0)}$ . Поэтому, очевидно,  $J$  — полунепрерывная снизу функция на  $S^{(0)}$ . Таким образом, для справедливости свойства 3) достаточно доказать, что

$$J = I \text{ на } S. \quad (6)$$

Вначале убедимся, что если  $I(\varphi) < \infty$ , то  $J(\varphi) < \infty$  ( $\varphi \in S^{(0)}$ ). Аналогично (3) получаем

$$J_n(\varphi) = \frac{n}{2T} \sum_{k=1}^n \left| \int_{(k-1)T/n}^{kT/n} \dot{\varphi}(u) du \right|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)T/n}^{kT/n} |\dot{\varphi}(u)|^2 du = I(\varphi). \quad (7)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае  $J(\varphi) \leq I(\varphi) < \infty$ .

Пусть теперь  $J(\varphi) < \infty$ , где  $\varphi \in S^{(0)}$ . Далее  $\varphi_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) обозначает кусочно линейную функцию, имеющую узлы интерполяции  $(kT/n, \varphi(kT/n))$ ,  $k = 0, \dots, n$ .

Очевидно,

$$J_n(\varphi) \leq J(\varphi) \text{ и } J_n(\varphi) = J_n(\varphi_n) = I(\varphi_n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Пусть  $\psi \in C_0^\infty([0, T]; \mathbb{R}^m)$ . Учитывая равномерную сходимость  $\varphi_n$  к  $\varphi$  при  $n \rightarrow \infty$ , имеем

$$\int_0^T \langle \varphi(t), \dot{\psi}(t) \rangle dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \varphi_n(t), \dot{\psi}(t) \rangle dt,$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^m$ . Формула интегрирования по частям дает

$$\int_0^T \langle \varphi(t), \dot{\psi}(t) \rangle dt = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \dot{\varphi}_n(t), \psi(t) \rangle dt.$$

Принимая во внимание (8), получаем

$$\left| \int_0^T \langle \varphi(t), \dot{\psi}(t) \rangle dt \right| \leq \limsup_n \left( \int_0^T |\dot{\varphi}_n(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^T |\psi(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq J(\varphi) \|\psi\|_{L^2},$$

здесь  $\|\cdot\|_{L^2}$  — норма в пространстве  $L^2[0, T]$ , состоящем из (классов эквивалентных) вектор-функций со значениями в  $\mathbb{R}^m$ , имеющих компоненты, интегрируемые в квадрате по мере Лебега. Итак, на пространстве  $C_0^\infty([0, T]; \mathbb{R}^m)$ , всюду плотном в  $L^2[0, T]$ , возник ограниченный линейный функционал

$$F(\psi) = \int_0^T \langle \varphi(t), \dot{\psi}(t) \rangle dt, \quad (9)$$

который по теореме Хана–Банаха (см., например, [35; гл. IV, § 4, п. 3]) продолжается на  $L^2[0, T]$  с сохранением нормы. Согласно лемме Рисса (см., например, [60; т. 1, с. 57])

$$F(\psi) = \int_0^T \langle \alpha(t), \psi(t) \rangle dt$$

для некоторого элемента  $\alpha \in L^2[0, T]$ . Поскольку  $L^2[0, T] \subset L^1[0, T]$ , то, интегрируя по частям, для  $\psi \in C_0^\infty([0, T]; \mathbb{R}^m)$  получаем

$$F(\psi) = - \int_0^T \left\langle \int_0^t \alpha(u) du, \dot{\psi}(t) \right\rangle dt. \quad (10)$$

Сопоставляя (9) и (10), заключаем, что

$$\varphi(t) = - \int_0^t \alpha(u) du, \quad t \in [0, T].$$

Следовательно, функция  $\varphi$  абсолютно непрерывна и  $I(\varphi) < \infty$ .

Итак, мы доказали, что

$$\{\varphi \in S: I(\varphi) < \infty\} = \{\varphi \in S: J(\varphi) < \infty\}.$$

Множество  $\mathcal{S} = \{\varphi \in S: I(\varphi) < \infty\}$  называется *пространством Камерона–Мартина*. Проверим, что  $I(\varphi) = J(\varphi)$  для  $\varphi \in \mathcal{S}$ .

Пусть  $\varphi \in C^\infty([0, T]; \mathbb{R}^m)$ . Тогда  $\sup_{t \in [0, T]} |\ddot{\varphi}^{(j)}(t)| = c_j < \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Поэтому, пользуясь формулой Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} J_n(\varphi) &= \frac{n}{2T} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m |\varphi^{(j)}(kT/n) - \varphi^{(j)}((k-1)T/n)|^2 \\ &= \frac{T}{2n} \sum_{k=1}^n |\dot{\varphi}((k-1)T/n)|^2 + O(n^{-1}). \end{aligned}$$

Поскольку  $\dot{\varphi} \in C([0, T]; \mathbb{R}^m)$ , то

$$\frac{T}{2n} \sum_{k=1}^n |\dot{\varphi}((k-1)T/n)|^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\varphi}(t)|^2 dt < \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Из (5), (8) и (11) вытекает, что

$$J(\varphi) = I(\varphi) \quad \text{для } \varphi \in C^\infty([0, T]; \mathbb{R}^m), \quad \varphi(0) = 0. \quad (12)$$



Если  $\varphi \in \mathcal{S}$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется функция  $\varphi^{(\varepsilon)} \in C^\infty([0, T]; \mathbb{R}^m)$  такая, что  $\varphi^{(\varepsilon)}(0) = 0$  и

$$I(\varphi - \varphi^{(\varepsilon)}) = \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}^{(\varepsilon)}(t)|^2 dt < \varepsilon.$$

Пользуясь свойством нормы (в  $L^2[0, T]$ ), имеем

$$|I^{1/2}(\varphi) - I^{1/2}(\varphi^{(\varepsilon)})| \leq I^{1/2}(\varphi - \varphi^{(\varepsilon)}) < \varepsilon^{1/2}, \quad (13)$$

поэтому с учетом (7) и (8) находим, что

$$\begin{aligned} |J_n^{1/2}(\varphi) - J_n^{1/2}(\varphi^{(\varepsilon)})| &= |I^{1/2}(\varphi_n) - I^{1/2}(\varphi_n^{(\varepsilon)})| \leq I^{1/2}(\varphi_n - \varphi_n^{(\varepsilon)}) = \\ &= J_n^{1/2}(\varphi - \varphi^{(\varepsilon)}) \leq I^{1/2}(\varphi - \varphi^{(\varepsilon)}) < \varepsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда легко выводим, что

$$|J^{1/2}(\varphi) - J^{1/2}(\varphi^{(\varepsilon)})| \leq \varepsilon^{1/2}. \quad (14)$$

Таким образом, для  $\varphi \in \mathcal{S}$  в силу (13)–(14) приходим к оценке

$$\begin{aligned} |I^{1/2}(\varphi) - J^{1/2}(\varphi)| &\leq |I^{1/2}(\varphi) - I^{1/2}(\varphi^{(\varepsilon)})| + |I^{1/2}(\varphi^{(\varepsilon)}) - J^{1/2}(\varphi^{(\varepsilon)})| + \\ &\quad + |J^{1/2}(\varphi^{(\varepsilon)}) - J^{1/2}(\varphi)| \leq 2\varepsilon^{1/2}, \end{aligned}$$

что завершает доказательство совпадения  $I$  и  $J$  на  $\mathcal{S}$ . Лемма доказана.  $\square$

**§ 5.** В этом параграфе устанавливаются некоторые свойства  $m$ -мерного винеровского процесса  $W = \{W(t), t \geq 0\}$ , заданного на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ .

**Лемма 3.** Для любых  $\gamma, v > 0$  верно неравенство

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, v]} |W(t)| \geq \gamma\right) \leq 2m \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{2mv}\right\}. \quad (15)$$

**Доказательство.** Для  $\theta \in \mathbb{R}^m$  введем процесс

$$X_\theta(t) = \exp\left\{\langle W(t), \theta \rangle - \frac{1}{2}|\theta|^2 t\right\}, \quad t \geq 0.$$

Легко проверить, что  $\{X_\theta(t), t \geq 0\}$  является мартингалом относительно естественной фильтрации винеровского процесса  $W$ .

Для любого  $\lambda > 0$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, v]} \langle W(t), \theta \rangle \geq \gamma\right) &\leq \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, v]} \exp\left\{\lambda \langle W(t), \theta \rangle - \frac{1}{2}\lambda^2 |\theta|^2 t\right\} \geq \exp\left\{\lambda\gamma - \frac{1}{2}\lambda^2 |\theta|^2 v\right\}\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, v]} X_{\lambda\theta}(t) \geq \exp\left\{\lambda\gamma - \frac{1}{2}\lambda^2 |\theta|^2 v\right\}\right). \end{aligned}$$

Пусть  $|\theta| = 1$ . Тогда по следствию 5 главы IV последняя вероятность не превосходит

$$\frac{\mathbb{E} X_{\lambda\theta}^+(v)}{e^{\lambda\gamma - \frac{1}{2}\lambda^2 v}} = \frac{\mathbb{E} X_{\lambda\theta}(0)}{e^{\lambda\gamma - \frac{1}{2}\lambda^2 v}} = e^{-\lambda\gamma + \frac{1}{2}\lambda^2 v} \leq e^{-\frac{\gamma^2}{2v}},$$

где учтено, что минимум функции  $g(\lambda) = -\lambda\gamma + \frac{1}{2}\lambda^2 v$  достигается в точке  $\lambda = \gamma/v$ .

Если  $\theta_k$  обозначает единичный вектор  $k$ -й координатной оси ( $k = 1, \dots, m$ ), то

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, v]} |W(t)| \geq \gamma\right) &\leq \sum_{k=1}^m \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, v]} |\langle W(t), \theta_k \rangle| \geq \frac{\gamma}{\sqrt{m}}\right) \leq \\ &\leq 2m \sup_{\theta: |\theta|=1} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, v]} \langle W(t), \theta \rangle \geq \frac{\gamma}{\sqrt{m}}\right) \leq 2me^{-\frac{\gamma^2}{2mv}}. \quad \square \end{aligned}$$

**Лемма 4.** Пусть детерминированная вектор-функция  $a \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^m)$ . Тогда

$$\int_0^T \langle a(u), dW(u) \rangle = \langle a(T), W(T) \rangle - \int_0^T \langle \dot{a}(u), W(u) \rangle du. \quad (16)$$

**Доказательство.** Очевидно, достаточно рассмотреть случай  $m = 1$ . В силу леммы 4 главы VIII

$$\int_0^T a(u) dW(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} a(t_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)), \quad (17)$$

где точки  $t_k = kT/n$ ,  $k = 0, \dots, n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} a(t_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)) &= a(T)W(T) - \sum_{k=0}^{n-1} W(t_k)(a(t_{k+1}) - a(t_k)) = \\ &= a(T)W(T) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} W(t_k) \dot{a}(u) du. \end{aligned}$$

Учитывая независимость приращений винеровского процесса, видим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \int_0^T a(u) dW(u) - a(T)W(T) + \int_0^T \dot{a}(u)W(u) du \right)^2 &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W(u) - W(t_k)) \dot{a}(u) du \right)^2 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} \left( \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W(u) - W(t_k)) \dot{a}(u) du \right)^2 \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W(u) - W(t_k))^2 du \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{a}(u)^2 du = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (u - t_k) du \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{a}(u)^2 du = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_{k+1} - t_k)^2}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{a}(u)^2 du = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T^2}{2n} \int_0^T \dot{a}(u)^2 du = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Нам понадобится также частный случай теоремы Гирсанова (теорема 18 главы VIII).

**Лемма 5.** Пусть детерминированная вектор-функция  $a \in C([0, T]; \mathbb{R}^m)$ . Тогда процесс

$$B(t) = W(t) - \int_0^t a(u) du, \quad t \in [0, T], \quad (18)$$

является винеровским процессом на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbf{P}})$ , где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}(A) &= \mathbf{E} \mathbf{1}_A X_T, \quad A \in \mathcal{F}, \\ X_T &= \exp \left\{ \int_0^T \langle a(u), dW(u) \rangle - \frac{1}{2} \int_0^T |a(u)|^2 du \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Иначе говоря,  $\tilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}$  и  $d\tilde{\mathbf{P}}/d\mathbf{P} = X_T$ .

**Доказательство.** Достаточно установить, что при любых  $n \geq 1$ ,  $0 = t_0 < \dots < t_n = T$  и  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^m$

$$\tilde{\mathbf{E}} \exp \{ i \langle B(t_1), \lambda_1 \rangle + \dots + i \langle B(t_n) - B(t_{n-1}), \lambda_n \rangle \} = \prod_{k=0}^{n-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\lambda_{k+1}|^2 (t_{k+1} - t_k) \right\}, \quad (20)$$

где  $\tilde{\mathbf{E}}$  обозначает усреднение по мере  $\tilde{\mathbf{P}}$ .

Левую часть формулы (20) с учетом (19) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \exp \left\{ i \sum_{k=0}^{n-1} \left( \langle W(t_{k+1}) - W(t_k), \lambda_{k+1} \rangle - \left\langle \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(u) du, \lambda_{k+1} \right\rangle \right) \right\} X_T d\mathbf{P} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T |a(u)|^2 du - i \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(u) du, \lambda_{k+1} \right\rangle \right\} \times \\ & \times \prod_{k=0}^{n-1} \mathbf{E} \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \langle a(u) + i\lambda_{k+1}, dW(u) \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Пользуясь соотношением (17), получаем, что

$$\xi_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \langle a(u), dW(u) \rangle \sim \mathbf{N} \left( 0, \int_{t_k}^{t_{k+1}} |a(u)|^2 du \right), \quad (22)$$

$$\zeta_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \langle a(u) + i\lambda_{k+1}, dW(u) \rangle = \text{l. i. m.}_{r \rightarrow \infty} \zeta_{k,r}, \quad (23)$$

где

$$\zeta_{k,r} = \sum_{j=0}^{r-1} \langle a(t_{k,j}) + i\lambda_{k+1}, W(t_{k,j+1}) - W(t_{k,j}) \rangle, \quad t_{k,j} = t_k + j \frac{t_{k+1} - t_k}{r}, \quad j = 0, \dots, r.$$

Для любых  $u, v \in \mathbb{R}$  имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(u+iv)x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = e^{\frac{\sigma^2}{2}(u^2+2iuv-v^2)}, \quad u, v \in \mathbb{R}, \quad (24)$$

поскольку этот интеграл равен  $e^{\frac{\sigma^2 u^2}{2}} \mathbb{E} e^{i\eta v}$ , где  $\eta \sim N(\sigma^2 u, \sigma^2)$ . Теперь заметим, что

$$|\mathbb{E} \exp\{\zeta_k\} - \mathbb{E} \exp\{\zeta_{k,r}\}| \leq (\mathbb{E} \exp\{2|\zeta_k| + 2|\zeta_k - \zeta_{k,r}|\})^{1/2} (\mathbb{E} |\zeta_k - \zeta_{k,r}|^2)^{1/2}.$$

С учетом (22) и (23), принимая во внимание гауссовость величин  $\zeta_{k,r}$ , нетрудно получить, что

$$\mathbb{E} \exp\{\zeta_k\} = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp\{\zeta_{k,r}\}.$$

Пользуясь (24), находим  $\prod_{k=1}^n \mathbb{E} \exp\{\zeta_k\}$  и заключаем, что выражение (21) совпадает с правой частью формулы (20). Это и требовалось показать.  $\square$

**§ 6.** Пусть теперь  $W = \{W(t), t \in [0, T]\}$  есть  $m$ -мерный винеровский процесс, заданный на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и отрезке  $[0, T]$ . Для  $\varepsilon > 0$  на борелевской  $\sigma$ -алгебре пространства  $\mathbf{S} = C([0, T]; \mathbb{R}^m)$ , снабженного *sup*-нормой  $\|\cdot\|$ , введем меры

$$\mathbf{Q}_\varepsilon(B) = \mathbb{P}(\sqrt{\varepsilon} W(\cdot) \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{S}). \quad (25)$$

**Теорема 3** (Шильдер). Семейство мер  $\{\mathbf{Q}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  удовлетворяет принципу больших уклонений с функцией уклонений  $I$  вида (2).

**Доказательство.** Проверим соотношение 1° определения 3. Возьмем любое замкнутое множество  $F \subset \mathbf{S}$ . Пусть  $\varphi_n$  для  $\varphi \in \mathbf{S}$  по-прежнему обозначает кусочно-линейную функцию с узлами  $(kT/n, \varphi(kT/n))$ ,  $k = 0, \dots, n$ .

При каждом  $n \in \mathbb{N}$  и  $\delta > 0$  имеем

$$F = \{\varphi \in F: \|\varphi - \varphi_n\| < \delta\} \cup \{\varphi \in F: \|\varphi - \varphi_n\| \geq \delta\}.$$

Очевидно,

$$F \subset A_n(\delta) \cup C_n(\delta), \quad (26)$$

где

$$A_n(\delta) = \{\varphi \in \mathbf{S}: \varphi_n \in F^\delta\}, \quad C_n(\delta) = \{\varphi \in \mathbf{S}: \|\varphi - \varphi_n\| \geq \delta\}.$$

Положим  $L_\delta = \min\{I(F^\delta), 1/\delta\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\varepsilon(A_n(\delta)) &\leq \mathbf{Q}_\varepsilon(\varphi \in \mathbf{S}: I(\varphi_n) \geq L_\delta) = \mathbb{P}(I((\sqrt{\varepsilon} W)_n) \geq L_\delta) = \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{n}{T} \sum_{k=1}^n \left|W\left(\frac{kT}{n}\right) - W\left(\frac{(k-1)T}{n}\right)\right|^2 \geq \frac{2L_\delta}{\varepsilon}\right) = \\ &= \int_{(2L_\delta)/\varepsilon}^{\infty} \frac{u^{\frac{nm}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}}{2^{\frac{nm}{2}} \Gamma(\frac{nm}{2})} du, \end{aligned} \quad (27)$$

здесь учтено (25) и то, что  $\frac{n}{T} \sum_{k=1}^n \left| W\left(\frac{kT}{n}\right) - W\left(\frac{(k-1)T}{n}\right) \right|^2$  имеет хи-квадрат распределение с числом степеней свободы  $nm$ .

Для  $z > 0$  и  $\mu \in \mathbb{R}$  получаем

$$J(z, \mu) = \int_z^\infty u^\mu e^{-\frac{u}{z}} du = 2z^\mu e^{-\frac{z}{2}} + 2\mu \int_z^\infty u^{\mu-1} e^{-\frac{u}{z}} du \leq 2z^\mu e^{-\frac{u}{2}} + \frac{2\mu}{z} J(z, \mu).$$

Поэтому  $J(z, \mu) \leq 4z^\mu e^{-\frac{z}{2}}$  при каждом  $\mu \in \mathbb{R}$  и  $z > 4\mu$ . Следовательно, при каждом  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\delta > 0$  и всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  справедливо неравенство

$$\varepsilon \log \mathbf{Q}_\varepsilon(A_n(\delta)) \leq -L_\delta + \varepsilon nm \log((2L_\delta)/\varepsilon) + \varepsilon \log 4 - \varepsilon \log \left( 2^{\frac{nm}{2}} \cdot \left( \frac{nm}{2} \right) \right). \quad (28)$$

Отсюда

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log \mathbf{Q}_\varepsilon(A_n(\delta)) \leq -L_\delta. \quad (29)$$

В силу леммы 3 при всех  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\delta > 0$  и  $\varepsilon > 0$  получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\varepsilon(C_n(\delta)) &\leq \mathbf{P} \left( \max_{0 \leq k \leq n-1} \sup_{t \in [0, T/n]} \left| W\left(\frac{kT}{n} + t\right) - W\left(\frac{kT}{n}\right) \right| \geq \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) \leq \\ &\leq 2nm \exp \left\{ - \left( \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} \right)^2 \frac{n}{2mT} \right\}. \end{aligned}$$

Выберем  $n = n(\delta, T, m)$  так, чтобы  $\delta^2 n / (16mT) > L_\delta$ . Тогда

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log \mathbf{Q}_\varepsilon(C_n(\delta)) \leq -2L_\delta. \quad (30)$$

Принимая во внимание, что для любых  $a, b > 0$

$$\log(a + b) \leq \log(2 \max\{a, b\}) = \log 2 + \max\{\log a, \log b\},$$

из (26), (29) и (30) получаем при всех  $\delta > 0$  оценку

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log \mathbf{Q}_\varepsilon(F) \leq -L_\delta. \quad (31)$$

В силу леммы 1 из (31) вытекает требуемое свойство 1°.

Возьмем открытое множество  $G \subset \mathbf{S}$  и проверим свойство 2° определения 3. Если  $I(G) = \infty$ , то 2°, очевидно, справедливо. Поэтому далее  $I(G) < \infty$ . Для любого  $\alpha > 0$  найдется такая функция  $\psi_\alpha \in G$ , что

$$I(\psi_\alpha) < I(G) + \alpha. \quad (32)$$

Поскольку  $G$  — открытое множество, то  $V_{r_\alpha}(\psi_\alpha) \subset G$  для некоторого  $r_\alpha > 0$ , где  $V_r(\psi) = \{\varphi \in \mathbf{S} : \|\varphi - \psi\| < r\}$ . Для каждого  $\beta \in (0, \alpha)$  нетрудно выбрать функцию  $\varphi \in C^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$  с  $\varphi(0) = 0$  так, чтобы  $I^{1/2}(\psi_\alpha - \varphi) < \beta/\sqrt{2}$ . Тогда

$$I^{1/2}(\varphi) \leq I^{1/2}(\psi_\alpha) + I^{1/2}(\psi_\alpha - \varphi) \leq I^{1/2}(\psi_\alpha) + \beta. \quad (33)$$

Кроме того, для  $t \in [0, T]$

$$|\psi_\alpha(t) - \varphi(t)| \leq \int_0^t |\dot{\psi}_\alpha(u) - \dot{\varphi}(u)| du \leq \sqrt{2t} I^{1/2}(\psi_\alpha - \varphi).$$

Поэтому

$$\|\psi_\alpha - \varphi\| \leq \beta\sqrt{T}.$$

Таким образом, при  $\beta\sqrt{T} < r_\alpha/2$  имеем  $V_\delta(\varphi) \subset G$  для  $\delta < r_\alpha/2$ .

Следовательно,

$$Q_\varepsilon(G) \geq Q_\varepsilon(V_\delta(\varphi)) = P(\sqrt{\varepsilon}W \in V_\delta(\varphi)) = P(\|W - \varphi/\sqrt{\varepsilon}\| < \delta/\sqrt{\varepsilon}). \quad (34)$$

Заметим, что

$$\varphi(t) = \int_0^t \dot{\varphi}(u) du.$$

Поэтому по лемме 5, используя (16) и (18), правую часть формулы (34) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{1} \left\{ \|B\| < \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^T \langle \dot{\varphi}(u), dB(u) \rangle - \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T |\dot{\varphi}(u)|^2 du \right\} = \\ & = \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} I(\varphi) \right\} \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{1} \left\{ \|B\| < \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^T \langle \dot{\varphi}(u), dB(u) \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Далее, в силу (16)

$$\left| \int_0^T \langle \dot{\varphi}(u), dW(u) \rangle \right| \leq |\langle W(T), \dot{\varphi}(T) \rangle| + \left| \int_0^T \langle \ddot{\varphi}(u), W(u) \rangle du \right| \leq h\|W\|, \quad (36)$$

где

$$h = (1 + T) \sup_{t \in [0, T]} \{ |\dot{\varphi}(t)| + |\ddot{\varphi}(t)| \}.$$

Из (35) и (36) получаем оценки

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon(G) & \geq \exp\{-I(\varphi)/\varepsilon\} \mathbf{E} \mathbf{1} \{ \|W\| < \delta/\sqrt{\varepsilon} \} \exp\{-h\|W\|/\sqrt{\varepsilon}\} \geq \\ & \geq \exp\{-(I(\varphi) + h\delta)/\varepsilon\} P(\|W\| < \delta/\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\varepsilon \log Q_\varepsilon(G) \geq -I(\varphi) - h\delta + \varepsilon \log P(\|W\| < \delta/\sqrt{\varepsilon}).$$

Тогда

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log Q_\varepsilon(G) \geq -I(\varphi). \quad (37)$$

Учитывая (32), (33) и (37), приходим к требуемому свойству 2°. Теорема установлена.  $\square$

**§ 7.** В этом параграфе доказывается *функциональный закон повторного логарифма в форме Штрассена*. Для этого потребуются вспомогательный результат.

Пусть  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  есть  $m$ -мерный винеровский процесс, заданный на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Введем семейство случайных функций

$$f_n(t) = \frac{W(nt)}{\sqrt{n}\phi(n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, T], \quad (38)$$

где  $\phi(1) = \phi(2) = 1$  и  $\phi(n) = \sqrt{2 \log \log n}$ ,  $n \geq 3$ , а вектор-функция умножается на скаляр покомпонентно.

Для изучения предельных точек этого семейства понадобится следующая лемма.

**Лемма 6.** Пусть детерминированная вектор-функция  $g \in C([0, \infty); \mathbb{R}^m)$  и

$$g_n(t) = \frac{g(nt)}{\sqrt{n}\phi(n)}, \quad t \in [0, T], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (39)$$

Пусть множество  $\Lambda \subset (1, \infty)$  и точка 1 принадлежит замыканию  $\Lambda$ . Предположим, что для любого  $\lambda \in \Lambda$

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \rho(g_{n_r(\lambda)}, V) = 0, \quad (40)$$

где  $V$  — некоторый компакт в пространстве  $S = C([0, T]; \mathbb{R}^m)$ ,  $n_r(\lambda) = [\lambda^r]$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $[\cdot]$  — целая часть числа,  $\rho(f, V) = \inf\{\rho(f, h) : h \in V\}$ ,  $\rho$  — равномерная метрика в  $S$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(g_n, V) = 0 \quad (41)$$

и множество функций  $\{g_n\}_{n \geq 1}$  предкомпактно в  $S$ .

**Доказательство.** Если  $V$  — компакт в  $S$ , то по теореме Арцела–Асколи существует  $M > 0$  такое, что

$$\sup_{f \in V} \|f\| \leq M \quad (42)$$

и найдется функция  $\Delta: [0, T] \rightarrow [0, \infty)$  такая, что  $\Delta(s) \downarrow 0$  при  $s \downarrow 0$  и

$$\sup_{f \in V} |f(t) - f(s)| \leq \Delta(t - s), \quad 0 \leq s, t \leq T, \quad (43)$$

здесь, как и ранее,  $\|\cdot\|$  есть  $\sup$ -норма в  $S$ .

Возьмем  $\lambda \in \Lambda$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Найдем  $r = r(\lambda, n)$  такое, что  $n_r(\lambda) < n \leq n_{r+1}(\lambda) =: N$ , где  $N = N(\lambda, n)$  и  $n_0(\lambda) = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|g_n - g_N\| &= \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\sqrt{N}\phi(N)}{\sqrt{n}\phi(n)} g_N(nt/N) \mp g_N(nt/N) - g_N(t) \right| \leq \\ &\leq \left( \frac{\sqrt{N}\phi(N)}{\sqrt{n}\phi(n)} - 1 \right) \|g_N\| + \sup_{t \in [0, T]} |g_N(nt/N) - g_N(t)|. \end{aligned} \quad (44)$$

Из (40) вытекает, что при каждом  $\lambda \in \Lambda$  для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся функции  $v_{n_r(\lambda)} \in V$  такие, что

$$\rho(g_{n_r(\lambda)}, v_{n_r(\lambda)}) < \varepsilon \quad \text{при } r \geq N_0(\varepsilon, \lambda). \quad (45)$$

Отсюда и из (42) следует, что при всех достаточно больших  $N$

$$\|g_N\| \leq M + \varepsilon.$$

Кроме того, при всех  $n > N_1 = N_1(\lambda)$

$$\frac{\sqrt{N}\phi(N)}{\sqrt{n}\phi(n)} - 1 \leq 2(\lambda - 1). \quad (46)$$

Теперь заметим, что согласно (45) и (43) при всех достаточно больших  $n$  имеем

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} |g_N(nt/N) - g_N(t)| &\leq \sup_{t \in [0, T]} |g_N(nt/N) - g_N(t) \pm v_N(nt/N) \pm v_N(t)| \leq \\ &\leq 2\varepsilon + \sup_{t \in [0, T]} |v_N(nt/N) - v_N(t)| \leq 2\varepsilon + \Delta(2T(\lambda - 1)), \end{aligned}$$

поскольку

$$\left| \frac{nt}{N} - t \right| \leq T \left( 1 - \frac{n}{N} \right) \leq T \frac{[\lambda^{r+1}] - [\lambda^r]}{[\lambda^{r+1}]} \rightarrow T(\lambda - 1), \quad r \rightarrow \infty.$$

Выбрав  $\lambda \in \Lambda$  достаточно близким к единице, получим, что справедливо (41).

Возьмем любую подпоследовательность  $\{g_{n_j}\}$ , где  $\{n_j\} \subset \mathbb{N}$ . По доказанному найдутся  $h_{n_j} \in V$  такие, что  $\rho(g_{n_j}, h_{n_j}) \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ . Можно извлечь подпоследовательность  $\{n'_j\} \subset \{n_j\}$  такую, что  $h_{n'_j} \rightarrow h \in V, j \rightarrow \infty$ . Тогда  $g_{n'_j} \rightarrow h$  при  $j \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Теорема 4** (Штрассен). *C вероятностью единица для семейства случайных функций вида (38) справедливы соотношения:*

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n, K) = 0$ , где  $K$  — шар Штрассена, т. е.

$$K = \{\varphi \in S: I(\varphi) \leq 1/2\} = \left\{ \varphi \in \mathcal{S}: \int_0^T |\dot{\varphi}(u)|^2 du \leq 1 \right\},$$

а функция  $I$  определена в (2);

2) для любой функции  $f \in K$  и п. в.  $\omega \in \Omega$  найдутся последовательности  $\{n_j(\omega)\} \subset \mathbb{N}$  такие, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \rho(f_{n_j(\omega)}, f) = 0.$$

Иначе говоря, почти навсрное семейство функций  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  предкомпактно в  $S$  и совокупность предельных точек этого семейства совпадает с множеством  $K$ .

**Доказательство.** Для  $\delta > 0$  рассмотрим множество  $S_{(1+\delta)/2} = \{\varphi \in S: I(\varphi) < (1 + \delta)/2\}$ . Если  $\varphi \in S_{(1+\delta)/2}$  и  $\varphi \notin K$ , то существует  $z \in [0, T]$  такое, что

$$\int_0^z |\dot{\varphi}(u)|^2 du = 1.$$

Возьмем функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [0, z], \\ \varphi(z), & t \in (z, T]. \end{cases}$$

Тогда  $\psi \in K$  и

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{t \in [z, T]} |\varphi(t) - \varphi(z)| \leq \left( \int_z^T |\dot{\varphi}(u)|^2 du \right)^{1/2} (T - z)^{1/2} < \sqrt{\delta T}. \quad (47)$$



Итак, для  $\sqrt{\delta T}$ -окрестности шара  $K$  имеем

$$K \subset S_{(1+\delta)/2} \subset K^{\sqrt{\delta T}}. \quad (48)$$

Для замкнутого множества  $F = S \setminus K^{\sqrt{\delta T}}$  по теореме Шильдера

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log Q_\varepsilon(F) \leq -I(F),$$

т. е. при любом  $\gamma > 0$  и всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$

$$Q_\varepsilon(F) \leq \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} (I(F) - \gamma) \right\}, \quad (49)$$

здесь  $Q_\varepsilon$  — распределение в  $S$  процесса  $\sqrt{\varepsilon} W$ , где  $W = \{W(t), t \in [0, T]\}$ .

В силу (48) имеем  $F \subset \overline{S_{(1+\delta)/2}} = S \setminus S_{(1+\delta)/2}$ . Поэтому

$$I(F) \geq I(\overline{S_{(1+\delta)/2}}) \geq (1 + \delta)/2. \quad (50)$$

Таким образом, при  $\gamma = \delta/4$  из (49) и (50) имеем

$$Q_\varepsilon(F) \leq \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{2} + \frac{\delta}{4} \right) \right\}.$$

Заметим, что распределение случайной функции  $f_n$  вида (38) есть  $Q_{\varepsilon_n}$ , где  $\varepsilon_n = 1/\phi^2(n)$ .

Следовательно, для любого  $\lambda > 1$  и  $n_r(\lambda) = [\lambda^r]$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , получаем

$$\sum_{r=r_0}^{\infty} P(f_{n_r(\lambda)} \notin K^{\sqrt{\delta T}}) \leq \sum_{r=r_0}^{\infty} (\log n_r(\lambda))^{-1-\frac{\delta}{2}} < \infty, \quad \lambda^{r_0} \geq 3.$$

По лемме Бореля–Кантелли для п. в.  $\omega \in \Omega$  имеем  $f_{n_r(\lambda)} \in K^{\sqrt{\delta T}}$  при  $r > M_0(\omega, \lambda, \delta)$ . Иначе говоря, п. н.

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \rho(f_{n_r(\lambda)}, K) = 0.$$

В силу леммы 6 утверждение 1) теоремы Штрассена доказано.

Докажем утверждение 2). Достаточно рассматривать лишь  $f \in K$ , для которых  $I(f) < 1/2$ . Действительно, если  $I(f) = 1/2$ , то для  $\delta \in (0, 1)$  возьмем точку  $u \in [0, T]$  такую, что

$$\int_0^u |\dot{f}(s)|^2 ds = 1 - \delta.$$

Тогда аналогично (47) находим, что  $\sup_{t \in [0, T]} |f(t) - h(t)| \leq \sqrt{\delta T}$  для функции  $h$  такой, что  $h(t) = f(t)$  при  $t \in [0, u]$  и  $h(t) = f(u)$  при  $t \in [u, T]$ .

Для последовательности  $\{k^r\}_{r \geq 1}$ , где  $k \geq 2$ , имеем

$$\|f_{k^r} - f\|_{[0, T]} \leq \|f_{k^r}\|_{[0, T/k]} + \|f\|_{[0, T/k]} + \|f_{k^r} - f\|_{[T/k, T]}, \quad (51)$$

здесь  $\|g\|_{[a,b]}$  для  $g \in C([0, T]; \mathbb{R}^m)$  и  $[a, b] \subset [0, T]$  обозначает норму в пространстве  $C([a, b]; \mathbb{R}^m)$  сужения функции  $g$  на отрезок  $[a, b]$ .

Очевидно, для любого  $\varepsilon > 0$  и любой функции  $f \in \mathbf{K}$  имеем  $\|f\|_{[0, T/k]} \leq \sqrt{T/k} < \varepsilon$  при  $k > T/\varepsilon^2$ .

В силу доказанного утверждения 1) для почти всех  $\omega \in \Omega$  и каждого  $k \geq 2$  в  $\mathbf{K}$  найдутся функции  $g_{k^r}(t)$  (зависящие и от  $\omega$ ) такие, что

$$\|f_{k^r} - g_{k^r}\|_{[0, T]} < \varepsilon \quad \text{при } r > M_0(\varepsilon, k, \omega). \quad (52)$$

Поэтому при  $k > T/\varepsilon^2$  и  $r > M_0(\varepsilon, k, \omega)$

$$\|f_{k^r}\|_{[0, T/k]} \leq \|g_{k^r}\|_{[0, T/k]} + \|f_{k^r} - g_{k^r}\|_{[0, T]} < 2\varepsilon.$$

Для  $k \geq 2$  и  $t \in [0, T]$  положим

$$f(t, k) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T/k], \\ f(t) - f(T/k), & t \in (T/k, T]. \end{cases}$$

Введем случайные функции

$$g_{r,k}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T/k], \\ \frac{1}{\sqrt{k^r} \phi(k^r)} (W(k^r t) - W(k^r T/k)), & t \in (T/k, T]. \end{cases}$$

Тогда

$$\|f_{k^r} - f\|_{[T/k, T]} \leq \|f_{k^r} - g_{r,k}\|_{[T/k, T]} + \|g_{r,k} - f(\cdot, k)\|_{[T/k, T]} + \|f(\cdot, k) - f\|_{[T/k, T]}.$$

Очевидно, при всех достаточно больших  $k$

$$\|f(\cdot, k) - f\|_{[T/k, T]} \leq \|f\|_{[0, T/k]} < \varepsilon.$$

Далее, для п. в.  $\omega \in \Omega$

$$\|f_{k^r} - g_{r,k}\|_{[T/k, T]} = \left| \frac{W(k^{r-1}T)}{\sqrt{k^{r-1}} \phi(k^{r-1})} \frac{\phi(k^{r-1})}{\sqrt{k} \phi(k^r)} \right| < (1 + 2\varepsilon)/\sqrt{k},$$

так как  $\phi(k^{r-1})/\phi(k^r) \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow \infty$ , а в силу (52) с вероятностью единица  $\|f_{k^{r-1}}\|_{[0, T]} < 1 + \varepsilon$  для всех достаточно больших  $r$ .

При каждом  $k \geq 2$  события  $\{\|g_{r,k} - f(\cdot, k)\|_{[T/k, T]} < \delta\}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , независимы в совокупности, поскольку они определяются приращениями винеровского процесса на непересекающихся промежутках времени.

Используя марковское свойство  $m$ -мерного винеровского процесса (совершенно аналогичное теореме 2 главы III), получаем для  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\|g_{r,k} - f(\cdot, k)\|_{[T/k, T]} < \delta) &= \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, v]} \left| \frac{W(tk^r)}{\sqrt{k^r} \phi(k^r)} - \varphi(t, k) \right| < \delta\right) = \\ &= \mathbf{P}(\|\sqrt{\varepsilon_{k^r}} W(\cdot) - \varphi(\cdot, k)\|_{[0, v]} < \delta) = \mathbf{Q}_{\varepsilon_{k^r}}^{(v)}(G), \end{aligned}$$

здесь  $v = T(1 - 1/k)$ ,  $\varphi(t, k) = f(t + \frac{T}{k}) - f(\frac{T}{k})$  при  $t \in [0, v]$ , открытое множество  $G = \{\psi \in C([0, v]; \mathbb{R}^m) : \|\psi(\cdot) - \varphi(\cdot, k)\|_{[0, v]} < \delta\}$ , а мера  $\mathbf{Q}_{\varepsilon_n}^{(v)} = \text{Law}(\{\sqrt{\varepsilon_n} W(t), t \in [0, v]\})$ , где  $\varepsilon_n = 1/\phi^2(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Заметим, что

$$\int_0^v |\dot{\varphi}(t, k)|^2 dt \leq 1 - \alpha, \quad \alpha \in (0, 1).$$

По теореме Шильдера (для мер  $\mathbf{Q}_{\varepsilon_n}^{(v)}$  на пространстве  $C([0, v]; \mathbb{R}^m)$ )

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log \mathbf{Q}_{\varepsilon}^{(v)}(G) \geq -I^{(v)}(G),$$

где  $I^{(v)}$  — функция уклонений. Поэтому для любого  $\gamma > 0$  и всех достаточно малых  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\varepsilon}^{(v)}(G) &\geq \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(I^{(v)}(G) + \gamma)\right\} \geq \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(I^{(v)}(\varphi(\cdot, k)) + \gamma)\right\} \geq \\ &\geq \exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon}(1 - \alpha + 2\gamma)\right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, при  $\gamma = \alpha/4$

$$\mathbf{Q}_{\varepsilon^r}^{(v)}(G) \geq (r \log k)^{-1 + \frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{Q}_{\varepsilon^r}^{(v)}(G) = \infty.$$

Согласно лемме Бореля–Кантелли для п.в.  $\omega \in \Omega$  найдется последовательность  $\{r_j(\omega)\}$  такая, что

$$\|g_{r_j(\omega), k} - f(\cdot, k)\|_{[T/k, T]} < \delta.$$

Учитывая проведенные выше оценки слагаемых, фигурирующих в правой части формулы (51), приходим к искомому утверждению 2).  $\square$

**§ 8.** Рассмотрим некоторые другие обобщения закона повторного логарифма. Прежде всего, по аналогии с принципом инвариантности (теорема 8 главы V) введем в пространстве  $C[0, 1]$  случайные ломаные, построенные следующим образом по последовательности независимых одинаково распределенных величин  $X_1, X_2, \dots$ , имеющих нулевое среднее и единичную дисперсию. Пусть  $(k/n, S_n/(\sqrt{n}\phi(n)))$  — узлы интерполяции кусочно линейной (случайной) функции  $h_n(t)$ , где, по-прежнему,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $\phi(1) = \phi(2) = 1$ ,  $\phi(n) = \sqrt{2 \log \log n}$  при  $n \geq 3$ ,  $t \in [0, 1]$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Иначе говоря, при построении случайных ломаных  $h_n(t)$  вместо нормировки  $\sqrt{n}$ , отвечающей центральной предельной теореме, использована нормировка, присущая закону повторного логарифма.

С помощью теоремы 13 главы III устанавливается следующий результат.

**Теорема 5** (Штрассен). *Для введенного семейства случайных ломаных  $\{h_n\}_{n \geq 1}$  справедливы все утверждения теоремы 4, относившиеся к семейству случайных функций  $\{f_n\}_{n \geq 1}$ , построенных по винеровскому процессу.*

1. Используя теорему 5, получите теорему Хартмана–Винтнера:

*Пусть  $X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные величины с  $EX_1 = 0$ ,  $EX_1^2 = 1$ . Тогда с вероятностью единица множество предельных точек  $\{S_n/\sqrt{2n \log \log n}\}_{n \geq 3}$  совпадает с отрезком  $[-1, 1]$  (здесь  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ).*

2. Докажите, что если  $\{X_k\}, \{S_k\}$  — те же, что в упражнении 1, и  $f(t)$  — действительная интегрируемая по Риману функция на  $[0, 1]$ , то п. н.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (2n^3 \log \log n)^{-1/2} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) S_k = \left( \int_0^1 F^2(u) du \right)^{1/2},$$

где

$$F(u) = \int_u^1 f(t) dt, \quad u \in [0, 1].$$

**Определение 5.** Детерминированная положительная функция  $\Psi(t) \nearrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$  ( $t \in [0, \infty)$ ) называется *верхней функцией* винеровского процесса  $W = \{W(t), t \geq 0\}$ , если для почти всех  $\omega \in \Omega$  существует  $N = N(\omega) > 0$  такое, что  $W(t, \omega) \leq \Psi(t)$  при всех  $t \geq N$ . Если для почти всех  $\omega \in \Omega$  функция  $\Psi$  не является верхней, то она называется *нижней функцией*.

3. Может ли быть так, что свойство, заложенное в определение верхней (нижней) функции винеровского процесса выполнено для точек  $\omega \in A$ , где  $0 < P(A) < 1$ ?

Приведем знаменитый *интегральный критерий Колмогорова–Петровского* (см., например, [31]); говорят также: интегральный критерий Колмогорова–Петровского–Эрдёша–Феллера, имея в виду и аналог упомянутого результата для флуктуаций последовательности частных сумм независимых слагаемых).

**Теорема 6.** Пусть  $\varphi(t), t > 0$ , — неубывающая функция такая, что  $\varphi(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда функция  $\Psi(t) = \sqrt{t} \varphi(t)$  будет верхней функцией винеровского процесса, если  $I(\varphi) < \infty$ , и — нижней, если  $I(\varphi) = \infty$ , где

$$I(\varphi) = \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t} \exp\{-\varphi(t)^2/2\} dt. \quad (53)$$

Эта теорема дает более тонкий результат, нежели обычный закон повторного логарифма: вычисление  $I(\varphi)$  показывает, что функции  $\varphi(t) = (1 + \varepsilon)\sqrt{2t \log \log t}$  являются *верхними* или *нижними* соответственно, когда  $\varepsilon > 0$  и  $\varepsilon \leq 0$  (теорема 8 главы III не охватывает случай  $\varepsilon = 0$ ).

В связи с теоремой 4 естественно возникает вопрос: каково множество предельных точек более общего, нежели (38), семейства

$$F_n(t) = \frac{W(nt)}{\sqrt{n}\varphi(n)}, \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (54)$$

где  $\varphi$  — та же функция, что и в теореме 6? Ответ дается с помощью функционала, обобщающего (53). При этом оказывается, что скорость сходимости к шару Штрассена необычайно чувствительна к выбору нормировки и даже добавление константы к используемой нормировке  $\varphi$  может изменить для семейства (54) (степенной) порядок скорости сходимости к шару Штрассена (см. [9] и там же ссылки).

Имеется много направлений, в которых происходило и происходит развитие закона повторного логарифма. Например, о функциональном законе повторного логарифма в топологиях, отличных от равномерной, см. [48]. Упомянем также исследования, относящиеся к функциональному закону повторного логарифма для эмпирических процессов, для гауссовских процессов более общих, чем броуновское движение, для процессов частных сумм со значениями в абстрактных пространствах (в том числе для суперпроцессов), а также случайных полей.

## Заключительные замечания

Не расширяя чрезмерно список литературы, невозможно перечислить все замечательные книги, направленные на изложение вопросов, относящихся даже к “ядру” теории случайных процессов. Для удобства читателей из общего списка цитируемых работ выделим учебную литературу по теории вероятностей: [4, 18, 34, 63, 68, 78, 85, 101, 106, 123, 131, 143, 189], а также — по теории случайных процессов: [12, 17, 25, 30, 32, 39, 42, 61, 72, 77, 83, 93, 100, 103, 110, 125, 135, 142, 146, 149, 177, 185, 192]. Отдельно укажем на энциклопедию [57], справочники [37, 56], а также книгу контрпримеров [75] и задачник [55]. Отметим, что многие из приведенных выше книг посвящены одновременно и теории вероятностей и теории случайных процессов.

Имеется ряд направлений современной теории случайных процессов и ее приложений, с которыми будет легче познакомиться, завершив изучение обязательных основ. Перечислим некоторые из этих направлений, не задаваясь целью упорядочить их, следуя моде и т. п.

Прежде всего заметим, что наряду с аксиоматикой Колмогорова существуют другие подходы к построению теории вероятностей. Известен подход, основанный на алгоритмическом понятии сложности (см., например, А. Н. Ширяев “Дополнение” к [34]). С другой стороны, большое внимание в настоящее время уделяется квантовой вероятности (в том числе квантовым случайным процессам), см., например, [88, 165, 167, 171].

Статистика случайных процессов (или анализ “временных рядов”) — направление исключительно важное, как для теории, так и для приложений. Об исследованиях в этой области можно прочесть в [6, 80, 134, 137, 160, 183, 191]. При этом отметим проблемы численных методов в теории случайных процессов, см., например, [102, 144].

Обширное и традиционное направление — построение моделей, описывающих различные варианты зависимых наблюдений. В данном курсе рассматривались гауссовские, марковские процессы, а также мартингалы. Описание зависимости событий,  $\sigma$ -алгебр, систем случайных величин может производиться и в других терминах (перемешивание, ассоциированность, семинварианты и т. д.) При тех или иных формах зависимости устанавливаются результаты как классического направления теории предельных теорем, так и нетрадиционного; см., например, [8, 28, 98, 105, 117, 118, 137, 162, 168, 198].

Во многих вопросах существенную роль играют события малой вероятности. Об экстремумах случайных процессов см., например, [38, 45, 52]. С теорией больших отклонений можно ознакомиться, обратившись, например, к [114, 115, 116, 127, 194].

Много интересных задач находится на стыке различных дисциплин. В качестве яркого иллюстрирующего примера была рассмотрена задача Дирихле. О различ-

ных проблемах анализа и вероятности см., например, [95, 108, 121].

Прослеживается постоянная тенденция максимального обобщения результатов классической теории вероятностей благодаря рассмотрению случайных элементов со значениями в бесконечномерных пространствах, см., например, [140, 157].

Отдельного упоминания заслуживает огромное поле деятельности, предоставляемое стохастической финансовой математикой. Еще раз сошлемся на книги [86, 147], где имеется обширная библиография. Кроме того, упомянем вероятностные задачи теории страхования и актуарной математики.

По-прежнему, физика, химия, биология, другие естественные и гуманитарные науки, а также техника постоянно дают новые модели, требующие глубокого вероятностного анализа. В этой связи укажем, например, на исследования [10, 132, 176].

## Список литературы

1. *Афанасьева Л. Г., Булинская Е. В.* Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами. – М.: Изд-во МГУ, 1980.
2. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977.
3. *Боровков А. А.* Математическая статистика. – М.: Наука, 1984.
4. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. – 3-е изд. – М.: Новосибирск: Эдиториал УРСС; Ин-т математики, 1999.
5. *Бородин А. Н., Салминен П.* Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы. – СПб.: Лань, 2000.
6. *Бриллингджер Д.* Временные ряды. Обработка данных и теория. – М.: Мир, 1980.
7. *Булинский А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов и полей. – М.: Изд-во МГУ, 1981.
8. *Булинский А. В.* Предельные теоремы в условиях слабой зависимости. – М.: Изд-во МГУ, 1989.
9. *Булинский А. В., Лифшиц М. А.* Скорость сходимости в функциональном законе повторного логарифма при нестандартных нормирующих множителях // УМН. – 1995. – Т. 50, № 5. – С. 83–102.
10. *Ван Кампен Н. Г.* Стохастические процессы в физике и химии. – М.: Высшая школа, 1990.
11. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – М.: Наука, 1986.
12. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. – 2-е изд. – М.: Наука, 1996.
13. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1991.
14. *Гапошкин В. Ф.* Критерии усиленного закона больших чисел для классов стационарных в широком смысле процессов и однородных случайных полей // ТВП. – 1977. – Т. 22, № 2. – С. 295–319.
15. *Георги Х.-О.* Гиббсовские меры и фазовые переходы. – М.: Мир, 1992.
16. *Гизман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. 1–3. – М.: Наука, 1971, 1973, 1975.
17. *Гизман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – 2-е изд. – М.: Наука, 1977.
18. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. – 6-е изд. – М.: Наука, 1988.
19. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. – 2-е изд. – М.: Наука, 1987.



20. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. – М.–Л.: Гостехиздат, 1949.
21. Добрушин Р. Л. Пример счетного однородного марковского процесса, все состояния которого являются мгновенными // ТВП. – 1956. – Т. 1, № 4. – С. 481–485.
22. Добрушин Р. Л. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений // ТВП. – 1970. – Т. 15, № 3. – С. 469–497.
23. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963.
24. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. – М.: Наука, 1967.
25. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. – М.: ИЛ, 1956.
26. Жакод Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. – М.: Физматлит, 1994.
27. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986.
28. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. – М.: Наука, 1965.
29. Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А. Гауссовские случайные процессы. – М.: Наука, 1970.
30. Ито К. Вероятностные процессы. Вып. 1, 2. – М.: ИЛ, 1960, 1963.
31. Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. – М.: Мир, 1968.
32. Карлин С. Основы теории случайных процессов. – М.: Мир, 1971.
33. Колмогоров А. Н. Математика и механика. Избранные труды. Т. 1. – М.: Наука, 1985.
34. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. – 3-е изд. – М.: Фазис, 1998.
35. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – 7-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
36. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. – М.: Наука, 1980.
37. Королюк В. С. (ред.) Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – Киев: Наукова думка, 1978.
38. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. – М.: Мир, 1969.
39. Крылов Н. В. Введение в теорию случайных процессов. Части 1 и 2. – М.: Изд-во МГУ, 1986, 1987.
40. Крылов Н. В. Введение в стохастическое исчисление // Стохастическое исчисление / Под ред. Ю. В. Прохорова, А. Н. Ширяева. – М.: ВИНТИ, 1989. (Серия соврем. проблемы матем. Фундаментальные направления. Т. 45. Гл. 1.)
41. Куратовский К. Топология. Т. 1, 2. – М.: Мир, 1966.
42. Ламперти Дж. Случайные процессы. – Киев: Вища школа, 1983.
43. Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. – М.: Наука, 1972.
44. Леоненко Н. Н., Иванов А. В. Статистический анализ случайных полей. – Киев: Вища школа, 1986.

45. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. – М.: Мир, 1989.
46. *Липцер Р. А., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986.
47. *Лигgett Т.* Марковские процессы с локальным взаимодействием. – М.: Мир, 1989.
48. *Лифшиц М. А.* Гауссовские случайные функции. – Киев: ТВiМС, 1995.
49. *Малышев В. А., Минлос Р. А.* Гиббсовские случайные поля. – М.: Наука, 1985.
50. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. – М.: Наука, 1987.
51. *Пешикир Г., Ширяев А. Н.* Неравенства Хинчина и мартингалное расширение сферы их действия // УМН. – 1995. – Т. 50, № 5. – С. 3–62.
52. *Питербарг В. И.* Асимптотические методы в теории гауссовских процессов и полей. – М.: Изд-во МГУ, 1988.
53. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1988.
54. *Престон К.* Гиббсовские состояния на счетных множествах. – М.: Мир, 1977.
55. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – М.: Наука, 1986.
56. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – 3-е изд. – М.: Наука, 1987.
57. Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия / Под ред. Ю. В. Прохорова. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1999.
58. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. – М.: Физматгиз, 1960.
59. *Ревюз Д.* Цепи Маркова. – М.: РФФИ, 1997.
60. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1–4. – М.: Мир, 1977–1982.
61. *Розанов Ю. А.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1982.
62. *Розанов Ю. А.* Марковские случайные поля. – М.: Наука, 1981.
63. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. – М.: Наука, 1985.
64. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. – 2-е изд. – М.: Наука, 1990.
65. *Саханенко А. И.* О сильном принципе инвариантности для сумм независимых случайных векторов // Труды Ин-та математики им. С. Л. Соболева. – Новосибирск, 1980.
66. *Севастьянов Б. А.* Э르고дическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами // ТВП. – 1957. – Т. 2, № 1. – С. 106–116.
67. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971.
68. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1982.
69. *Синай Я. Г.* Теория фазовых переходов. Строгие результаты. – М.: Наука, 1980.
70. *Синай Я. Г.* Введение в эргодическую теорию. – 2-е изд. – М.: Фазис, 1996.

71. *Скорород А. В.* Исследования по теории случайных процессов. – Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1961.
72. *Скорород А. В.* Элементы теории вероятностей и случайных процессов. – Киев: Вища школа, 1980.
73. *Скорород А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. – 2-е изд. – М.: Наука, 1986.
74. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. – М.: Мир, 1969.
75. *Стоянов Й.* Контрпримеры в теории вероятностей. – М.: Факториал, 1999.
76. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1987.
77. *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей и случайных процессов. – М.: Изд-во МГУ, 1992.
78. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. – М.: Мир, 1984.
79. *Ферник К.* Регулярность траекторий гауссовских случайных функций // Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения. – М.: Мир, 1978. – С. 63–132.
80. *Хеннан Э.* Многомерные временные ряды. – М.: Мир, 1974.
81. *Хида Т.* Броуновское движение. – М.: Наука, 1987.
82. *Чжун Кай-лай.* Однородные цепи Маркова. – М.: Мир, 1964.
83. *Ширяев А. Н.* Случайные процессы (лекции для студентов 3 курса). – М.: Изд-во МГУ, 1972.
84. *Ширяев А. Н.* Статистический последовательный анализ. – 2-е изд. – М.: Наука, 1976.
85. *Ширяев А. Н.* Вероятность. Т. 1, 2. – 3-е изд. – М.: МЦНМО, 2004.
86. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. – М.: Фазис, 1998, 2004.
87. *Яглом А. М.* Корреляционная теория стационарных случайных функций. – Л.: Гидрометеиздат, 1987.
88. *Accardi L., Frigerio A., Lewis J. T.* Quantum stochastic processes // Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto. – 1982. – V. 18, № 1. – P. 97–133.
89. *Adler R. J.* The Geometry of Random Fields. – Chichester: Wiley, 1981.
90. *Alexander K. S., Pyke R.* A uniform central limit theorem for set-indexed partial-sum processes with finite variance // Ann. Probab. – 1986. – V. 14, № 2. – P. 582–597.
91. *Barbour A. D.* Stein's method for diffusion approximations // Probab. Theory Related Fields. – 1990. – V. 84, № 3. – P. 297–322.
92. *Barlow M.* One-dimensional stochastic differential equations with no strong solution // J. London Math. Soc. (2). – 1982. – V. 26, № 2. – P. 335–347.
93. *Bartlett M. S.* An Introduction to Stochastic Processes, with Special Reference to Methods and Applications. – Cambridge Univ. Press, 1978.
94. *Bass R. F.* Law of the iterated logarithm for set-indexed partial sum processes with finite variance // Z. Wahr. verw. Geb. – 1985. – Bd. 70, H. 4. – S. 591–608.
95. *Bass R. F.* Probabilistic Techniques in Analysis. – New York: Springer-Verlag, 1995.

96. *Bass R. F., Pyke R.* A strong law of large numbers for partial-sum processes indexed by sets // *Ann. Probab.* – 1984. – V. 12, № 1. – P. 268–271.
97. *Bass R. F., Pyke R.* A central limit theorem for  $\mathcal{D}(A)$ -valued processes // *Stochastic Process Appl.* – 1987. – V. 24, № 1. – P. 109–131.
98. *Berkes I., Morrow G. J.* Strong invariance principles for mixing random fields // *Z. Wahr. verw. Geb.* – 1981. – Bd. 57, H. 1. – S. 15–37.
99. *Bertoin J.* Lévy Processes. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
100. *Bhattacharya R. N., Waymire E. C.* Stochastic Processes with Applications. – New York: Wiley, 1990.
101. *Borkar V. S.* Probability Theory. An Advanced Course. – New York: Springer-Verlag, 1995.
102. *Bouleau N., Lépine D.* Numerical Methods for Stochastic Processes. – New York: Wiley, 1994.
103. *Brzeźniak Z., Zastawniak T.* Basic Stochastic Processes. – London: Springer-Verlag, 1999.
104. *Bryc W.* Large deviations by the asymptotic value method // *Diffusion Processes and Related Problems in Analysis. V. 1* / Ed. M. Pinsky. – Boston: Birkhäuser, 1990. – P. 447–472.
105. *Bulinski A. V., Keane M. S.* Invariance principle for associated random fields // *J. Math. Sci.* – 1996. – V. 81, № 5. – P. 2905–2911.
106. *Chow Y. S., Teicher H.* Probability Theory: Independence. Interchangeability. Martingales. – 3-rd ed. – New York: Springer-Verlag, 1997.
107. *Chung K. L.* Lectures from Markov Processes to Brownian Motion. – New York: Springer-Verlag, 1982.
108. *Chung K. L.* Green, Brown, and Probability. – River Edge: World Scientific, 1995.
109. *Csörgő M., Révész P.* Strong Approximations in Probability and Statistics. – New York: Academic Press, 1981.
110. *Cox D. R., Miller H. D.* The Theory of Stochastic Processes. – London: Chapman & Hall, 1980.
111. *Daley D. J., Vere-Jones D.* An Introduction to the Theory of Point Processes. – New York: Springer-Verlag, 1988.
112. *Daniell P. J.* Integrals in an infinite number of dimensions // *Ann. of Math. (2)*. 1918–1919. – V. 20. – P. 281–288.
113. *Dawson D. A.* Measure-valued Markov processes. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, XXI, Lect. Notes Math. V. 1541. Springer, 1991.
114. *Dembo A., Zeitouni O.* Large Deviations Techniques and Applications. – 2-nd ed. – New York: Springer-Verlag, 1998.
115. *Den Hollander F.* Large Deviations. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000.
116. *Deuschel J.-D., Stroock D. W.* Large Deviations. – Boston: Academic Press, 1989.
117. *Dobrushin R. L., Major P.* Non-central limit theorems for non-linear functionals of Gaussian fields // *Z. Wahr. verw. Geb.* – 1979. – Bd. 50, № 1. – S. 27–52.
118. *Doukhan P.* Mixing. Properties and Examples. – LNS, 85. – Springer-Verlag, 1994.
119. *Dozzi M.* Stochastic Processes with a Multidimensional Parameter. – Harlow: Longman, 1989.

120. *Dudley R. M.* A course on empirical processes. – Lect. Notes Math. V. 1097. – Berlin: Springer, 1984. – P. 1–142.
121. *Dudley R. M.* Real Analysis and Probability. – Pacific Grove, CA: Wadsworth & Brooks / Cole Advanced Books & Software, 1989.
122. *Dudley R. M., Philipp W.* Invariance principles for sums of Banach-space valued random elements and empirical processes // *Z. Wahr. verw. Geb.* – 1983. – Bd. 62, H. 4. – S. 509–552.
123. *Durrett R.* Probability: Theory and Examples. – 2-nd ed. – Belmont, CA: Duxbury Press, 1996.
124. *Durrett R.* Stochastic Calculus: A Practical Introduction. – Boca Raton, FL: CRC Press, 1996.
125. *Durrett R.* Essentials of Stochastic Processes. – New York: Springer, 1999.
126. *Dynkin E. B.* Superprocesses and partial differential equations // *Ann. Probab.* – 1993. – V. 21, № 3. – P. 1185–1262.
127. *Ellis R. S.* Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics. – New York: Springer-Verlag, 1985.
128. *Émery M.* Stochastic Calculus in Manifolds. – Berlin: Springer-Verlag, 1989.
129. *Föllmer H., Protter Ph., Shiryaev A. N.* Quadratic covariation and an extention of Itô's formula // *Bernoulli*. – 1995. – V. 1, № 1/2. – P. 149–169.
130. *Freedman D.* Brownian Motion and Diffusion. – 2-nd ed. – New York: Springer-Verlag, 1983.
131. *Fristedt B., Gray L.* A Modern Approach to Probability Theory. – Boston, MA: Birkhäuser, 1997.
132. *Gardiner C. W.* Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences. – Berlin: Springer-Verlag, 1983.
133. *Gnedenko B. V., Korolev V. Yu.* Random Summation. Limit Theorems and Applications. – Boca Raton, FL: CRC Press, 1996.
134. *Grenander U.* Abstract Inference. – New York: Wiley, 1981.
135. *Grimmett G. R., Stirzaker D. R.* Probability and Stochastic Processes. – 2-nd ed. – Oxford: Clarendon Press, 1992.
136. *Grimmett G. R., Stirzaker D. R.* Probability and Random Processes: Problems and Solutions. – Oxford: Clarendon Press, 1992.
137. *Guyon X.* Random Fields on a Network. Modeling, Statistics, and Applications. – New York: Springer-Verlag, 1995.
138. *Hall P., Heyde C. C.* Martingale Limit Theorem and its Applications. – New York: Academic Press, 1980.
139. *Harris T. E.* The Theory of Branching Processes. – New York: Dover, 1989.
140. *Hoffmann-Jørgensen J.* Stochastic Processes on Polish Spaces. – Aarhus: Aarhus Univ. Math. Inst., 1991.
141. *Hughes B. D.* Random Walks and Random Enviroments. Vol. 1, 2. – Oxford: Clarendon Press, 1995, 1996.
142. *Iranpour R., Chacon P.* Basic Stochastic Processes. – New York: Macmillan, 1988.
143. *Jacod J., Protter Ph.* Probability Essentials. – Berlin: Springer-Verlag, 2000.
144. *Janicki A., Weron A.* Simulation and Chaotic Behavior of  $\alpha$ -stable Stochastic Processes. – New York: M. Dekker, 1994.

145. *Kallenberg O.* Random Measures. – 3-rd ed. – London: Academic Press, 1983.
146. *Kallenberg O.* Foundations of Modern Probability. – New York: Springer, 1997.
147. *Karatzas I., Shreve S. E.* Methods of Mathematical Finance. – New York: Columbia Univ. Press, 1995.
148. *Karatzas I., Shreve S. E.* Brownian Motion and Stochastic Calculus. – 2-nd ed. – New York: Springer-Verlag, 1991.
149. *Karlin S., Taylor H. M.* A Second Course in Stochastic Processes. – New York–London: Academic Press, 1981.
150. *Kindermann R., Snell J. L.* Markov Random Fields and their Applications. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1980.
151. *Kingman J. F. C.* Poisson Processes. – Oxford: Clarendon Press, 1993.
152. *Komlós J., Major P., Tusnády G.* An approximation of partial sums of independent RV's and the sample DF. I, II // *Z. Wahr. verw. Geb.* – 1975. – Bd. 32. – S. 111–131; – 1976. – Bd. 34. – S. 33–58.
153. *Kôno N.* Recent development on random fields and their sample paths. Part I: sample path continuity of random fields // *Soochow J. Math.* – 1990. – V. 16, № 2. – P. 123–161.
154. *Krylov N. V.* Introduction to the Theory of Diffusion Processes. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995.
155. *Lamberton D., Lapeyre B.* Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. – London: Chapman & Hall, 1996.
156. *Last G., Brandt A.* Marked Point Processes on the Real Line: The Dynamic Approach. – New York: Springer-Verlag, 1995.
157. *Ledoux M., Talagrand M.* Probability in Banach Spaces. – Berlin: Springer-Verlag, 1991.
158. *Lévy P.* Théorie de l'addition des variables aléatoires. – Paris: Gauthier-Villars, 1937.
159. *Lindvall T.* Lectures on coupling method. – New York: Wiley, 1992.
160. *Liptser R. S., Shiryaev A. N.* Statistics of Random Processes. V. 1: General Theory. V. 2: Applications. – Berlin: Springer-Verlag, 2001.
161. *Lomnicki Z., Ulam S.* Sur la théorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités. I: Variables indépendentes // *Fund. Math.* – 1934. – V. 23. – P. 237–278.
162. *McLeish D. L.* Dependent central limit theorems and invariance principles // *Ann. Probab.* – 1974. – V. 2. – P. 620–628.
163. *Major P.* Multiple Wiener–Itô integrals // *Lect. Notes Math.* – 1981. – V. 849. – P. 1–127.
164. *Mandelbrot B. B., Van Ness J. W.* Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. – *SIAM Rev.* – 1968. – V. 10. – P. 422–437.
165. *Meyer P.-A.* Quantum Probability for Probabilists // *Lecture Notes in Math.* V. 1538. – Berlin: Springer-Verlag, 1993.
166. *Molchanov S. A.* Ideas in the Theory of Random Media // *Acta Appl. Math.* – 1991. – V. 22. № 2–3. – P. 139–282.
167. *Nelson E.* Construction of quantum fields from Markoff fields // *J. Funct. Anal.* – 1973. – V. 12. – P. 97–112.

168. *Newman C. M., Wright A. L.* A invariance principle for certain dependent sequences // *Ann. Probab.* – 1981. – V. 9, № 4. – P. 671–675.
169. *Øksendal B.* Stochastic Differential Equations. – 4-th ed. – Berlin: Springer-Verlag, 1995.
170. *Ortega J., Wschebor M.* On the increments of the Wiener process // *Z. Wahr. verw. Geb.* – 1984. – Bd. 65, H. 3. – S. 329–339.
171. *Parthasarathy K. R.* An Introduction to Quantum Stochastic Calculus. – Basel: Birkhäuser, 1992.
172. *Pollard D.* Convergence of Stochastic Processes. – New York: Springer-Verlag, 1984.
173. *Protter P.* Stochastic Integration and Differential Equations. A new Approach. – Berlin: Springer-Verlag, 1990.
174. *Pyke R.* The Haar-function construction of Brownian motion indexed by sets // *Z. Wahr. verw. Geb.* – 1983. – Bd. 64, H. 4. – S. 523–539.
175. *Rachev S. T.* Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models. – Chichester: Wiley, 1991.
176. *Ramakrishnan A.* Stochastic Processes in Physics and Astronomy. – Madras: Inst. of Math. Sci., 1978.
177. *Rao M. M.* Stochastic Processes. General Theory. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.
178. *Reiss R.-D.* A Course on Point Processes. – New York: Springer-Verlag, 1993.
179. *Resnick S. L.* Adventures in Stochastic Processes. – Boston, MA: Birkhäuser, 1992.
180. *Reuter G. E. H.* Denumerable Markov processes and the associated contraction semigroups on  $l$  // *Acta Math.* – 1957. – V. 97, № 1–2. – P. 1–46.
181. *Révész P.* On the increments of the Wiener and related processes // *Ann. Probab.* – 1982. – V. 10, № 3. – P. 613–622.
182. *Revus D., Yor M.* Continuous Martingales and Brownian Motion. – 2-nd ed. – Berlin: Springer-Verlag, 1994.
183. *Ripley B. D.* Statistical inference for spatial processes. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
184. *Rogers L. C. G., Williams D.* Diffusion, Markov Processes, and Martingales. – V. 1. 2-nd ed. – Chichester: Wiley, 1994. – V. 2. – New York: Wiley, 1987.
185. *Rosenblatt M.* Random Processes. – New York: Springer-Verlag, 1974.
186. *Rosenblatt M.* Stationary Sequences and Random Fields. – Boston, MA: Birkhäuser, 1985.
187. *Samorodnitsky G., Taqqu M. S.* Stable Non-Gaussian Random Processes. – New York: Chapman & Hall, 1994.
188. *Strassen V.* An invariance principle for the law of the iterated logarithm // *Z. Wahr. verw. Geb.* – 1964. – Bd. 3. – S. 211–226.
189. *Stroock D. W.* Probability Theory. An analytic view. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
190. *Thorisson H.* Coupling, Stationarity, and Regeneration. – Berlin: Springer, 2000.
191. *Tong H.* Nonlinear Time Series. A Dynamical System Approach. – Oxford: Clarendon Press, 1990.

192. *Todorovic P.* An Introduction to Stochastic Processes and Their Applications. – New York: Springer-Verlag, 1992.
193. *Van der Vaart A. W., Wellner J. A.* Weak Convergence and Empirical Processes. – New York: Springer-Verlag, 1996.
194. *Varadhan S. R. S.* Large Deviations and Applications. – Philadelphia, PA: Soc. for Industrial and Appl. Math., 1984.
195. *Walsh J. B.* Martingales with a multidimensional parameter and stochastic integrals in the plane – Lect. Notes Math. V. 1215. – 1986.
196. *Walsh J. B.* An introduction to stochastic partial differential equations. – Lect. Notes Math. V. 1180. – Berlin: Springer-Verlag, 1985. – P. 265–439.
197. *Williams D.* Probability and Martingales. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
198. *Yu H.* A strong invariance principle for associated sequences // Ann. Probab. – 1996. – V. 24, № 4. – P. 2079–2097.



## Алфавитный указатель

- $(B, S)$ -рынок 143  
Càdlàg функция 69  
 $\mathcal{D}$ -система 15  
 $L$ -гармоническое расширение  $f$  362  
 $L^2$ -процесс 53, 267  
– комплекснозначный 234  
 $Q$ -решение 220  
 $U$ -статистика 137  
 $X$ -гармоническая функция 362  
 $(x, f, N)$ -хедж 146  
 $\delta$ -импульс 273  
 $\lambda$ -система 14  
 $\pi$ -система 14  
 $\mathcal{F}$ -измеримость 13  
 $\mathcal{F} | \mathcal{B}$ -измеримое отображение 13  
 $\sigma$ -алгебра 20  
– борелевская 13  
–  $\mathcal{E}$  расщепляет  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$  224  
– инвариантных множеств 274  
– опциональная 300  
– перестановочных событий 139  
– предсказуемая 300  
– расширенная 16  
– событий, наблюдаемых до случайного момента  $\tau$  81  
– цилиндрическая 24, 33  
 $\sigma$ -конечная мера 22  
 $\varepsilon$ -сеть 72  
 $\varepsilon$ -энтропия множества 72
- Абсолютно непрерывная мера  $\mu$**   
относительно меры  $\nu$  28  
Автомодельный случайный процесс 302  
Адаптированный процесс 299  
Актив безрисковый 143  
– рисковый 143  
Алгебра цилиндрическая 31  
Аналог закона Эрдёша–Реньи 71  
Арифметическое среднее  $A(v)$  257
- Банковский счет 143  
Барлоу М. 311  
Безгранично делимые законы 336  
Безрисковый актив 143  
Белый шум 244, 267, 268  
Блуждание случайное 21  
– – возвратное 65  
– – –, критерий Чжуна–Фукса 65  
– – в  $\mathbb{R}^m$  простейшее симметричное 67  
– –, симметризация 66  
– – транзитное (невозвратное) 65  
– –, эффективная размерность 66  
Блуждания случайные в случайной среде 68  
Большие отклонения 364  
Борелевская  $\sigma$ -алгебра 13  
Борелевское пространство 26  
Броуновский мост 163, 310  
Броуновское движение 49  
– – Леви 106  
– семейство 347
- Ван Несс Й. 302  
Варадарайн 326  
Вариант закона больших чисел 240  
Вариационный ряд 162  
Ведущая мера 23  
Векторный процесс 267  
Величина “перескока” за уровень  $t$  214  
Венгерский метод 175  
Вероятностная мера 13  
Вероятность потери требования  
в стационарном режиме 211  
Версия процесса 35  
Верхняя функция 381  
Ветвящийся процесс Гальтона–  
Ватсона 125  
Винеровская мера 63  
Винеровский процесс 49  
Возвратное случайное блуждание 65

- Волатильность 306
- Воспроизводящее ядро гильбертова пространства 55
- Выборочная функция 19
- Гарсиа А. 275
- Гауссовская случайная функция действительная 51
- — — комплексная 50
- Гауссовский (нормальный) случайный вектор 50
- Геометрическое броуновское движение 306
- среднее  $G(v)$  257
- Движение броуновское 49
- — в точке 0, локальное время 309
- — геометрическое 306
- — Леви 106
- — многомерное 50
- — мультифрактальное 303
- — фрактальное, представление 302
- — фрактальное (дробное) 105
- — экономическое 306
- Движения броуновские, семейство 344, 347
- Дворецкий А. 78
- Демимартингал 143
- Детерминированный процесс 249
- Диаграмма переходов 208
- Дискретизация 19
- Дискретный аналог формулы Танака 114
- Дисперсионная (ковариационная) матрица 158
- Дифференцирование в среднем квадратическом 271
- Диффузия 306
- Доминирующая мера 176
- Дробовый шум 216
- Дробь Ляпунова 178
- Дуб Дж. 304
- Дэвис Б. 97, 136
- Единственность сильного решения 291
- Естественная фильтрация 78
- Задача Дирихле 354
- восстановления полугруппы по ее генератору 219
- о разорении 119
- Закон арксинуса 97
- Закон больших чисел, вариант 240
- — — равномерный усиленный 42
- Закон больших чисел усиленный (Колмогоров) 140
- нуля или единицы, Хьюитт–Сэвидж 139
- — —, Колмогоров 87
- повторного логарифма (Хинчин) 91
- — — локальный 93
- — — функциональный в форме Штрассена 375
- Законы безгранично делимые 336
- Измеримое пространство 13
- Измеримый случайный процесс 37
- Изоморфизм измеримых пространств 26
- Изотропное случайное поле 268
- Импульсная переходная функция 273
- Инвариантная мера 201
- Инвариантное множество 274
- Инвестиционная стоимостью платежного обязательства 146
- стратегия 144
- Индикатор множества 17
- Интеграл Ито 282
- по ортогональной случайной мере 229
- Стратоновича 313
- Хеллингера 177
- Интегральный критерий Колмогорова–Петровского–Эрдёша–Феллера 381
- Интегрирование в среднем квадратическом случайных процессов 272
- Интенсивности вероятностей переходов 218
- Инфинитезимальная матрица 204
- Ито К. 304
- Какутани С. 78
- Капитал портфеля 144
- Каплинг-метод 178
- Като Т. 220
- Квадратическая вариация процесса 115
- ковариация 308
- характеристика мартингала 115
- Квадратично интегрируемый мартингал 115
- Кларк Дж. 304
- Класс  $P$ -нулевых множеств 16
- Дирихле 305
- множеств, конечно-аппроксимируемый относительно меры  $Q$  41
- , определяющий (слабую) сходимость 170

- Класс, определяющий меру 169  
 Ковариационная функция 53, 234  
 Колмогоров А. Н. 271, 302  
 Комлош Й. 175  
 Компенсатор 115  
 Комплекснозначный  $L^2$ -процесс 234  
 Конечно-аппроксимируемый относительно меры  $Q$  класс множеств 41  
 Конечномерные распределения 25  
 – – марковской цепи 189  
 Консервативная цепь 204  
 Контракт с опционом 145  
 Координатное отображение 24  
 Координатный процесс 34  
 Коэффициент нагрузки 211  
 – передачи 273  
 Крамер Г. 254, 270  
 Кратные стохастические интегралы 302  
 Критерий Пойа 67  
 – согласия Колмогорова 161  
 – Чжуна–Фукса возвратности случайного блуждания 65  
 Кузнецов С. Е. 193  
 Ледерман В. 220  
 Лемма Бореля–Кантелли 61  
 – Варадана 366  
 – Дуба о числе пересечений 122  
 – Рисса 369  
 – Улама 169  
 Линейный прогноз 248  
 Логарифм отношения правдоподобия 67  
 Локальная абсолютная непрерывность меры  $Q$  относительно меры  $P$  111  
 Локально компактное хаусдорфово пространство 173  
 – конечная мера 48  
 Локальное время броуновского движения в точке 0 309  
 Локальный закон повторного логарифма 93  
 – мартингал (субмартингал, супермартингал) 142  
 – снос 306  
 Мажорирующая вероятностная мера 74  
 Майор П. 175  
 Максимальное неравенство 158  
 Максимальные  $L^p$ -неравенства (Дуб) 121  
 – и минимальные вероятностные неравенства (Дуб) 120  
 Мандельбротт Б. 302  
 Маркированный точечный случайный процесс 216  
 Марковская переходная функция 192  
 – полугруппа 175  
 – случайная функция 224  
 Марковский момент 79  
 – процесс 180, 185  
 Марковское свойство винеровского процесса 78  
 – семейство 223  
 Мартингал 109, 185  
 – Леви 111  
 – с многопараметрическим индексом 143  
 Мартингал-разность 110  
 Мартингаловая вероятностная мера 144  
 Мартингаловое преобразование 111  
 Матрица дисперсионная (ковариационная) 158  
 – инфинитезимальная 204  
 –, неотрицательно определенная 50  
 – полустохастическая 220  
 Матричное дифференциальное уравнение Риккати 314  
 Мера 13  
 – ведущая 23  
 – вероятностная 13  
 – винеровская, Винера 63  
 – доминирующая 176  
 – инвариантная 201  
 – локально конечная 48  
 – мажорирующая вероятностная 74  
 – мартингаловая вероятностная 144  
 –  $\mu$ , абсолютно непрерывная относительно меры  $\nu$  28  
 – ортогональная случайная 226  
 – пребывания процесса 65  
 – пуассоновская случайная 23, 43  
 – Радона 215  
 –  $\sigma$ -конечная 22  
 – сингулярная 176  
 – случайная 179  
 – спектральная 239, 240  
 – структурная 226, 240, 269  
 – считающая 40  
 – точечная без кратных точек 215  
 – – случайная 215  
 – эмпирическая 22  
 Метод Крамера–Уолда 170  
 Метрика Ки Фан 177  
 – Леви–Прохорова 168  
 Миксингал 143

- Минимальная  $\varepsilon$ -сеть 72  
 Многомерная центральная предельная теорема (Линдберг) 157  
 Многомерное броуновское движение 50  
 Многомерный вариант теоремы Гливенко–Кантелли 41  
 Множество возвратности 65  
   – в среднем 65  
   – достижимости 65  
 Модель Блэка–Мертона–Шоулса 315  
   – страхования Крамера–Лундберга 22  
 Модификация процесса 35  
 Модуль непрерывности функции 154  
 Момент остановки 79  
   – первого выхода из множества 97  
   – достижения множества 97  
   – последнего пребывания в множестве 97  
 Мост броуновский 163, 310  
 Мультифрактальное броуновское движение 303  
 Начальное распределение 189  
 Независимые случайные величины 20  
 Независящая от  $\sigma$ -алгебры случайная функция 78  
 Необходимое и достаточное условие непрерывности действительной гауссовской случайной функции 75  
   – – – ограниченности действительной гауссовской случайной функции 75  
 Неотрицательная определенность матрицы 50  
 Неотрицательно определенная действительная функция 52  
   – комплекснозначная функция 52  
   – матричная функция множества 269  
 Непосредственно заданный процесс 34  
 Непрерывность процесса в среднем квадратическом 242  
 Непрерывный цилиндр 33  
 Неравенства Хинчина и Марцинкевича–Зигмунда 135  
 Неравенство Коши–Буняковского–Шварца 338  
   – Оттавиани 69  
 Неразличимые процессы 36  
 Нерегулярная точка границы 359  
 Несобственное решение 220  
 Нижняя функция 381  
 Нормальные отклонения 364  
 Нормальный случайный вектор 50  
 Носитель меры 66  
 Обновляющий процесс 254, 270  
 Обобщенная вторая производная 272  
   – обратная функция 39  
 Образ меры 18  
 Обращенная версия теоремы Леви 139  
 Обращенный мартингал (субмартингал, супермартингал) 137  
 Обычные условия 142  
 Однородная диффузия 309  
   – марковская цепь 196  
 Однородное изотропное векторное поле 269  
 Однородный марковский процесс 195  
 Оператор Гильберта–Шмидта 260  
   – Фредгольма 259  
   – сдвига 251, 347  
   – на случайную величину 351  
 Опцион 145  
   – американского типа 145  
   – европейского типа 145  
   – колл (опцион на продажу) 146  
   – пут (опцион на покупку) 146  
 Опциональная  $\sigma$ -алгебра 300  
   – случайная мера 226  
 Опциональный момент 128  
   – процесс 300  
 Ортогональные приращения 257  
 Основная теорема теории восстановления 42  
   – – финансовой математики 144  
 Основное свойство стохастического интеграла 233  
 Остановленный процесс 302  
 Отраженный процесс 85  
 Оценка Бартлета 248  
 Ошибка линейного прогноза 249  
 Парадокс времени ожидания 214  
 Параметр Харста 105  
 Перестановочная последовательность случайных величин 137  
 Переходная функция 193  
 Переходные вероятности 188  
 Периодограмма 247  
 Планк М. 222  
 Платежное обязательство 145  
 Плотное семейство мер 154  
 Плотность меры  $\mu$  по мере  $\nu$  28  
 Поглощающее состояние 218  
 Подкласс арбитражных портфелей 144  
 Поле дробового шума 265

- Поле однородное изотропное  
     векторное 269  
 – случайное 19  
   – – изотропное 268  
   – – Винера–Ченцова 106  
   – – Леви–Шемберга 106  
 Положительно определенная матричная  
   функция 267  
 Полосовой фильтр 274  
 Полукольцо подмножеств 225  
 Полунепрерывность снизу 365  
 Полустохастическая матрица 220  
 Полуэллиптический оператор 361  
 Польское пространство 26  
 Пополнение исходного вероятностного  
   пространства 16  
 Портфель 144  
   – хеджирующий 145  
 Поток  $\sigma$ -алгебр (фильтрация) 78  
 Предсказуемая  $\sigma$ -алгебра 300  
   – последовательность 111  
 Предсказуемый процесс 300  
 Представление фрактального  
   броуновского движения 302  
 Пример Т. Арака 179  
 Принцип инвариантности Донскера–  
   Прохорова 157  
   – отражения 85  
 Прогрессивная измеримость 299  
 Продолжение меры 16  
 Продолжения функций  $p_{ij}(s, t)$  189  
 Производная Радо–Никодима 176  
 Прореженный процесс 217  
 Простая функция 17, 229, 301  
 Простейшее симметричное случайное  
   блуждание в  $\mathbb{R}^m$  67  
 Пространства Скорохода  $D([0, 1]^q)$  и  
    $D([0, \infty)^q)$  174  
 Пространство  $C(T, S)$  33  
 Пространство борелевское 26  
   – вероятностное, расширение 37  
   – –, стандартное расширение 37  
   – гильбертово, воспроизводящее ядро 55  
   – измеримое 13  
   – исходное вероятностное, пополнение 16  
   – Камерона–Мартина 369  
   – локально компактное хаусдорфово 173  
   – польское 26  
   – Скорохода  $D[0, 1]$  40  
   – Скорохода  $D[0, \infty)$  69  
   – состояний 187  
 Пространство фазовое 187  
   – фильтрованное вероятностное 110  
 Процесс автомодельный случайный 302  
   – авторегрессии — скользящего  
     среднего 274  
   – адаптированный 299  
   – Бесселя размерности  $m$  136  
   – векторный 267  
   –, версия 35  
   – восстановления 21  
   – Гальтона–Ватсона ветвящийся 125  
   – винеровский 49  
   – –, марковское свойство 78  
   – –, явная конструкция 58  
   – детерминированный 249  
   – измеримый случайный 37  
   – Ито 286  
   –, квадратическая вариация 115  
   – Кокса 216  
   – координатный 34  
   – Леви 70  
   – маркированный точечный  
     случайный 216  
   – марковский 180, 185  
   –, мера пребывания 65  
   –, модификация 35  
   – заданный непосредственно 34  
   – Орнштейна–Уленбека 107, 290  
   –, непрерывность в среднем  
     квадратическом 242  
   – обновляющий 254, 270  
   – однородный марковский 195  
   – опциональный 300  
   – остановленный 302  
   – отраженный 85  
   – предсказуемый 300  
   – прореженный 217  
   – пуассоновский 48, 191  
   – регулярный 249  
   – рождения и гибели 221  
   – – независимыми приращениями 46, 186  
   – пуассоновский 48, 191  
   –, явная конструкция 48  
   – сепарабельный случайный 44  
   – – траекториями ограниченной  
     вариации 143  
   – – стационарными приращениями 105  
   – сингулярный 249  
   –, скачок в фиксированной точке 70  
   – скользящего среднего 244  
   – случайный 19

- Процесс случайный, интегрирование в среднем квадратическом 272
- , спектральное представление стационарных (в широком смысле) процессов 240
  - стандартный пуассоновский с постоянной интенсивностью 48
  - стационарный в узком смысле 200, 274
  - стационарный в широком смысле 238
  - стохастически непрерывный случайный 45
  - точечный случайный 179, 215
  - частных сумм 22
  - чисто дискретный 68
  - – недетерминированный 249
  - эргодический 274
- Процессы неразличимые 36
- с векторными значениями 267
  - стохастически эквивалентные 35
  - – – в широком смысле 36
  - эквивалентные 35
- Прямоугольник 25
- Пуассоновская случайная мера 23, 43
- Пуассоновский процесс 48, 191
- Равенство Парсеваля 59, 338
- Равномерная метрика 33
- Равномерно интегрируемое семейство действительных случайных величин 98
- эллиптический оператор 363
- Равномерный усиленный закон больших чисел 42
- Разбиение  $\Omega$  188
- Разложение Вольда 252, 256
- Дуба 112
  - Дуба–Мейера 305
  - Крикеберга 135
  - Рисса 135
- Распределение случайного элемента 18
- Расстояние Какутани–Хеллингера 177
- по вариации 176
- Расширение вероятностного пространства 37
- Расширенная  $\sigma$ -алгебра 16
- Реализация 19
- Регулярная точка границы 359
- условная вероятность 193
- Регулярный процесс 249
- Результат Винера и Пэли 95
- Дадли 74
  - Звонкина 310
- Результат Колмогорова 87
- П. Леви 90
  - Харди 95
  - Хинчина 90
- Римановская последовательность 308
- Рисковый актив 143
- Ройтер Г. 220
- Самофинансируемый класс портфелей 144
- Самуэльсон П. 306
- Свойство автомодельности 64
- локальности условного математического ожидания 116
  - марковости (сильных) решений стохастических дифференциальных уравнений 297
  - регулярности меры 15
- Сглаженные оценки спектральной плотности 247
- Семейство броуновских движений 344, 347
- Семимартингал 143, 303
- Сепарабельный случайный процесс 44
- Сильное решение 289, 291
- Сильный принцип инвариантности 175
- Симметризация случайного блуждания 66
- Симметризованные векторы 334
- Симметричное устойчивое распределение 66
- Сингулярная мера 176
- Сингулярный процесс 249
- Система массового обслуживания 209
- – – с отказами 209
- Скачок процесса в фиксированной точке 70
- Скорость 365
- Слабая единственность решения 311
- сходимости мер 147
- Слабое решение 310
- Следствие Башелье 89
- Дуба 131
- Случайная величина 13
- мера 179
  - последовательность 19
  - функция 18
- Случайное блуждание 21
- Случайное поле 19
- – Винера–Ченцова 106
  - – Леви–Шемберга 106

- Случайные блуждания в случайной среде 68
- Случайный вектор 13
- процесс 19
  - элемент 13
- Смешанные моменты 238
- Собственное решение 220
- События из “прошлого” и “будущего” 181
- Совершенное хеджирование 316
- Спектральная мера 239, 240
- Спектральная плотность 243
- Спектральное представление стационарных (в широком смысле) процессов 240
- Спектральные окна 247
- Спираль Винера 302
- Справедливая цена опциона 146
- Среднее арифметическое  $A(v)$  257
- геометрическое  $G(v)$  257
- Стандартная однородная цепь Маркова 201
- подгруппа, порожденная однородной цепью Маркова 201
- Стандартное расширение вероятностного пространства 37
- Стандартный пуассоновский процесс с постоянной интенсивностью 48
- Статистическая фрактальная размерность 302
- Статистический последовательный анализ Вальда 67
- Статистическое оценивание спектральной плотности 246
- Стационарное распределение 199
- Стационарный процесс в узком смысле 200
- Стационарным процесс в широком смысле 238
- Стохастическая задача Дирихле 362
- подгруппа 196
  - последовательность 116
  - экспонента 143
- Стохастически возмущенное уравнение роста популяции 306
- непрерывный случайный процесс 45
  - эквивалентные процессы 35
  - в широком смысле процессы 36
- Стохастические интервалы 300
- Стохастический базис 110
- дифференциал 286
- Стохастическое дифференциальное уравнение с начальным условием 291
- Строго марковское свойство 83
- Структурная мера 226, 240, 269
- Субординатор 70
- Супергармоническая функция 135
- Схема построения интеграла по процессу  $M \in \mathcal{M}_2^c$  305
- Сходимость по распределению 150
- Счет банковский 143
- Считающая мера 40
- Талагран М. 75
- Телеграфная волна (сигнал) 213, 264
- Телескопическое свойство условного математического ожидания 109
- Теорема А. Д. Александрова 148
- Ароншайна 55
  - Арцела–Асколи 155
  - Банаха–Алаоглу 324
  - Биркгофа–Хинчина 274
  - Блэкуэлла 42
  - – и Дубинса 140
  - Боровкова 178
  - Бохнера–Хинчина 242
  - Буркхольдера 136
  - Буркхольдера–Дэвиса–Ганди 136
  - Гапошкина 266
  - Герглотца 239
  - Гильберта–Шмидта 260
  - Гирсанова 312, 372
  - Даниеля 27
  - Даниеля–Колмогорова 27
  - Де ла Валле Пуссена 98
  - Дуба 64, 112, 121, 123, 135, 171
  - Ионеску Тулча 322
  - Ито 309
  - –, Кларка 303
  - Карунена 235
  - Карунена–Лоэва 261
  - Колмогорова 26, 72, 161, 256
  - Колмогорова–Сегё 257
  - Котельникова–Шеннона 270
  - Крамера 243, 364
  - Ледермана–Ройтера 222
  - Линдеберга 158
  - Ломницкого–Улама 21
  - Мандельбротта, Ван Несса 303
  - Мерсера 261
  - о возвратности 66
  - – дихотомии 65
  - – монотонных классах 15

- Теорема о полноте  $(B, S)$ -рынка 145  
 – – свободном выборе или об остановке (Дуб) 116  
 Теорема П. Леви 68, 128, 311  
 – Парзена 57  
 – Проттера, Фельмера, Ширяева 309  
 – Прохорова 154, 156, 173  
 – Пуассона 176  
 – Пэли–Винера–Зигмунда 76  
 – Радона–Никодима 108  
 – Рисса–Маркова 323  
 – Скорохода 104, 165  
 – Стоуна 271  
 – Феллера 332  
 – Хана–Банаха 369  
 – Хартмана–Винтнера 381  
 – Хинчина 97  
 – Шеффе 177  
 – Ширяева 304  
 – Штрассена 175, 177, 377, 381  
 Теория массового обслуживания 209  
 – фильтрации 313  
 Тожества Вальда 99  
 Топология равномерной сходимости на компактах 173  
 Точечная мера без кратных точек 215  
 – случайная мера 215  
 Точечный случайный процесс 179, 215  
 Траектория 19  
 Транзитное (невозвратное) случайное блуждание 65  
 Тушнади Г. 175  
**У**бывающее семейство  $\sigma$ -алгебр 137  
 Уравнение Колмогорова–Чепмена 192, 195  
 – Ланжевена 288  
 – Маркова 189  
 Усиленный закон больших чисел (Колмогоров) 140  
 Условие Линдеберга 156  
 – Липшица 291  
 – Новикова 312  
 – асимптотической малости 328  
 – бесконечной малости 178  
 – подчиненности 252  
 – равномерной малости 335  
 Условия симметрии и согласованности мер 27, 29  
 – согласованности проекций меры 35  
 Условное математическое ожидание 108  
 Устойчивое состояние 218  
**Ф**азовое пространство 187  
 Феллер В. 220  
 Феллеровское однородное марковское семейство 348  
 Ферник К. 75  
 Физически осуществимый фильтр 244  
 Фильтр 244, 273  
 Фильтр Кальмана–Бьюси 314  
 Фильтрация 78  
 Фильтрованное вероятностное пространство 110  
 Фильтрованный стохастический эксперимент 110  
 Фоккер 222  
 Формула Блэка–Шоулса 316  
 – Дынкина 361  
 – замены переменных в интеграле Лебега 28  
 – Ито 287  
 – Леви 70  
 – Леви–Хинчина 71  
 – обращения 28  
 – Танака 309  
 – –, дискретный аналог 114  
 – Фейнмана–Каца 363  
 – Хинчина 69  
 Формулы Эрланга 209  
 Фрактальное (дробное) броуновское движение 105  
 Фундаментальное уравнение 316  
 Фундаментальный результат математической теории страхования 131  
 Функции класса Харди  $\mathcal{H}_2$  257  
 Функции  $p_{ij}(s, t)$ , продолжение 189  
 – Хаара 58  
 – Шаудера 59  
 Функциональный закон повторного логарифма в форме Штрассена 375  
 Функция Càdlàg 69  
 –  $X$ -гармоническая 362  
 – верхняя 381  
 – восстановления 42  
 – выборочная 19  
 – гауссовская действительная случайная 51  
 – – комплексная случайная 50  
 – действительная гауссовская случайная, необходимое и достаточное условие непрерывности 75  
 – – – – – ограниченности 75



- Функция импульсная переходная 273  
– ковариационная 53, 234  
– Линдеберга 328  
– марковская переходная 192  
– – случайная 224  
– матричная положительно  
определенная 267  
– меры характеристическая 27  
– множества матричная, неотрицательно  
определенная 269  
–, модуль непрерывности 154  
– неотрицательно определенная  
действительная 52  
– – – комплекснозначная 52  
– нижняя 381  
– обобщенная обратная 39  
– переходная 193  
– простая 17, 229, 301  
– распределения эмпирическая 40  
– случайного вектора характеристичес-  
кая 28  
– случайная, независимая от  
 $\sigma$ -алгебры 78  
– супергармоническая 135  
– уклонений 365  
Функционал меры характеристичес-  
кий 171  
Характеристическая функция меры 27  
– – случайного вектора 28  
Характеристический функционал  
меры 171  
Хеджирование 145  
Хеджирующий портфель 145  
Цилиндр 31  
Цилиндрическая  $\sigma$ -алгебра 24, 33  
– алгебра 31  
Частотная характеристика 273  
Чисто дискретный процесс 68  
– недетерминированный процесс 249  
Шаг распределения 42  
Шум белый 244, 267, 268  
– дробовый 216  
– –, поле 265  
Эквивалентные процессы 35  
Экономическое броуновское  
движение 306  
Экспоненциально плотное семейство  
мер 366  
Элементарный цилиндр 23  
Эмпирическая мера 22  
– функция распределения 40  
Эргодическая теорема 196  
Эргодический процесс 274  
Эргодичность процесса  $X$  в  $L^2(\Omega)$  241  
Эрдеш П. 78  
Этемади Н. 140  
Эффективная размерность случайного  
блуждания 66  
Явная конструкция винеровского  
процесса 58  
– – пуассоновского процесса 48  
Ядро интегрального оператора 259  
Ядро Фейера 247

Учебное издание

*БУЛИНСКИЙ Александр Вадимович*  
*ШИРЯЕВ Альберт Николаевич*

## **ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Редактор *И.Л. Легостаева*  
Оригинал-макет: *А.Д. Изаак*  
Оформление переплета: *А.А. Логунов*

Подписано в печать 09.04.03. Формат 70×100/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 32,41. Уч.-изд. л. 35,65. Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90  
E-mail: [fizmat@maik.ru](mailto:fizmat@maik.ru), [fmlsale@maik.ru](mailto:fmlsale@maik.ru);  
<http://www.fml.ru>

Отпечатано в ПФ «Полиграфист»  
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3  
Тел.: (8172) 72-07-92, 72-61-75, 72-60-63; факс: (8172) 76-00-49, 72-71-11  
E-mail: [forma@pfpoligrafist.com](mailto:forma@pfpoligrafist.com)

ISBN 978-5-9221-0335-0



9 785922 103350