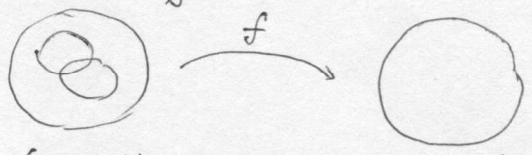
1. Модели случайных экспериментов, зависящих от времени. Необходимые определения из курса ТВ: измеримые отображения, распределение случайного элемента, независимость семейства случайных элементов. Случайная функция как семейство случайных элементов. Траектории. Формулировка теоремы Ломницкого – Улама.

Напоминание:

1) $f: V \to S$

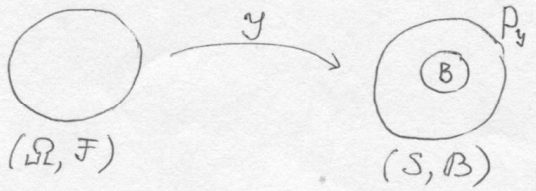


$(V, \mathcal{A})$ – измер. пр-во, $\mathcal{A}$ – σ-алгебра на V; $(S, \mathcal{B})$

$f: V \to S$

$f \in \mathcal{A}|\mathcal{B}$ – <u>измеримо</u>, если $\forall B \in \mathcal{B}$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

2) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вер. пр-во



$(\Omega, \mathcal{F})$; $(S, \mathcal{B})$

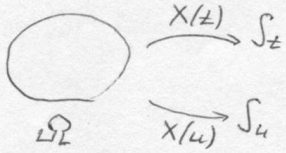
$y: \Omega \to S$

$y \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$ – <u>случайный элемент</u>

Если $S = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, то y – случайный вектор, $m > 1$
y – случайная величина, $m = 1$

$P_y(B) := P(y^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{B}$, т.е. $P_y(B) = P(\underbrace{\omega: y(\omega) \in B}_{\in \mathcal{F}})$

<u>Опр.</u> Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ – семейство измеримых пространств. <u>Случайный процесс</u>, ассоциированный с этим семейством $X = \{X(t), t \in T\}$ – это семейство случ. элементов $X(t): \Omega \to S_t$, $X(t) \in \mathcal{F}|_{\mathcal{B}_t}$



T – любое множ-во, $(S_t, \mathcal{B}_t)$ – любые измер. пр-ва

Если $T \subset \mathbb{R}$, то $t \in T$ интерпритируется как время

$T = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $T = [a, b]$
$T = \mathbb{Z}$, $T = \mathbb{Z}_+$, $T = [a, b] \cap \mathbb{Z}$, $T = \mathbb{N}$ – дискретный случай

Если $T \subset \mathbb{R}^d$, то говорят о случайном поле

<u>Опр.</u> Случ. эл-ты $X_1, \dots, X_n$ наз. <u>независимыми</u>, если $P(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \in B_k\}) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \in B_k)$ $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_n$ (т.е. независимы σ-алгебры $\sigma\{X_1\}, \dots, \sigma\{X_n\}$)

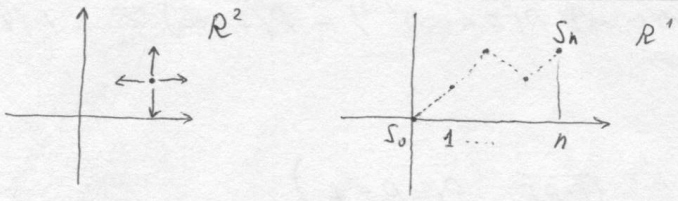
Теорема (Ломницкий - Улам)
Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t\in T}$ - семейство вер. пр-в. Тогда на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\exists$ семейство независимых сл. эл-тов $X_t : \Omega \to S_t$, $X_t \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_t$ и $P_{X_t} = Q_t$, $t \in T$. $\{X_t, t\in T\}$ сост. из независимых сл. эл-тов, если $\forall$ конечное $J \subset T$ набор X_t, $t \in J$ - независимы

<u>Опр</u> При фикс. $\omega_0 \in \Omega$ ф-ция $X_t(\omega)|_{\omega=\omega_0}$ наз. <u>траекторией</u> процесса X_t

2. Случайные блуждания. Определение возвратности и невозвратности простого случайного блуждания по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$. Исследование возвратности простого блуждания с помощью аппарата характеристических функций. Теорема Поя.

<u>Опр.</u> Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ – н.о.р.с. векторы со знач. в $\mathbb{R}^d$ ($P_{X_k} = P_X$)
<u>Случайным блужданием</u> в $\mathbb{R}^d$ наз. процесс $S = \{S_n, n \geq 0\}$ т.ч. $S_0 = x \in \mathbb{R}^d$ (начальн. точка), $S_n := x + X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$

<u>Опр.</u> <u>Простое сл. блуждание</u> в $\mathbb{Z}^d$ – когда $P(X = e_k) = P(X_k = -e_k) = \frac{1}{2d}$
$e_k = (0, \dots, \underset{k}{1}, \dots, 0)$, $k = 1, \dots, d$. Начальн. точка $x := 0 \in \mathbb{Z}^d$



Введем $N := \sum_{n=0}^{\infty} I\{S_n = \overset{\mathbb{Z}^d}{0}\}$ $(\leq \infty)$

<u>Опр.</u> Простое сл. блуждание $S = \{S_k, n \geq 0\}$ наз. <u>возвратным</u>, если $P(N = \infty) = 1$ и <u>невозвратным</u>, если $P(N < \infty) = 1$

Введем $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$, $\tau := \infty$, если $S_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Лемма 1</u> $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(N = n) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1}$

▷ При $n = 1$ ф-ла верна т.к. $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$

Индукция: $P(N = n+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (P(N = n+1, \tau = k)) = \sum_k P(\sum_{m=0}^{\infty} I(S_{k+m} - S_k = 0) = n, \tau = k)$

$= P(\sum_{m=0}^{\infty} I(S'_m = 0) = n) \cdot \sum_k P(\tau = k) = P(N' = n) \cdot P(\tau \leq \infty)$

$S_{m+k} - S_k = X_{k+1} + \dots + X_{k+m} \in \sigma\{X_{k+1}, X_{k+2}, \dots\}$

$X'_1 = X_{k+1}$, $X'_2 = X_{k+2}, \dots$ распределены как $X_1, X_2, \dots$

$\Rightarrow S'_m$ распр. также как S_m, N как N'

$P(N = n+1, \tau < \infty) = P(N' = n) \cdot P(\tau < \infty)$

$P(N = n+1) = P(N = n+1, \tau < \infty) + \underbrace{P(N = n+1, \tau = \infty)}_{0} =$

$= \underbrace{P(N' = n)}_{P(N'' = n)} \cdot P(\tau < \infty)$

(по предпол. инд.) $= P(\tau = \infty) \cdot P(\tau < \infty)^{n-1} \cdot P(\tau < \infty) = P(\tau = \infty) \cdot P(\tau < \infty)^n$ ◁

Следствие $P(N=\infty)$ равно 0 или 1
$P(N=\infty)=1 \iff P(\tau<\infty)=1$

▷ Пусть $P(\tau<\infty)<1$. Тогда $P(N<\infty)=\sum_n P(N=n)=\sum_n P(\tau=\infty)P(\tau<\infty)^{n-1}=$
$=\dfrac{P(\tau=\infty)}{-P(\tau<\infty)+1}=\dfrac{P(\tau=\infty)}{P(\tau=\infty)}=1$

Если $P(\tau<\infty)=1 \Rightarrow P(\tau=\infty)=0 \Rightarrow P(N=n)=0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$
$\Rightarrow P(N<\infty)=0$

Теорема 1 Простое случ. блуждание в $\mathbb{Z}^d$ возвратно
$\iff EN=\infty$ (невозвр. $\iff EN<\infty$)

▷ Если $EN<\infty \Rightarrow P(N<\infty)=1$

Обратно, пусть $P(N<\infty)=1 \iff P(\tau<\infty)<1$

$EN=\sum_n n\,P(N=n)=\sum_n n\left(P(\tau=\infty)\cdot P(\tau<\infty)^{n-1}\right)=P(\tau=\infty)\sum_n n\,P(\tau<\infty)^{n-1}$
$=\dfrac{P(\tau=\infty)}{(1-P(\tau<\infty))^2}=\dfrac{1}{1-P(\tau<\infty)}$

(т.к. $\sum_n n p^{n-1}=\left(\sum_n p^n\right)'=\left(\dfrac{1}{1-p}\right)'=\dfrac{1}{(1-p)^2} \quad 0\le p<1$) ◁

$N=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{I(S_n=0)}_{\ge 0} \Rightarrow$ можно интегрировать почленно
$EN=\sum_n EI(S_n=0)=\sum_n P(S_n=0)$
Итак, S возвр. $\iff \sum_n P(S_n=0)$

Следствие: S возвр. при $d=1$ и $d=2$.

▷ $P(S_{2n}=0)=\left(\dfrac{1}{2d}\right)^{2n}\sum\limits_{n_1+\dots+n_d=n}\dfrac{(2n)!}{(n_1!)^2\dots(n_d!)^2}$

$d=1$: $P(S_{2n}=0)=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$

$m!\sim\left(\dfrac{m}{e}\right)^m\sqrt{2\pi m}$, $m\to\infty \quad \Rightarrow P(S_{2n}=0)\sim\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$, $n\to\infty \quad \sum_n\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}=\infty$

$d=2$: $P(S_n=0)\sim\left(\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}\right)^2\sim\dfrac{1}{\pi n} \qquad \sum_n\dfrac{1}{\pi n}=\infty$

Исследование сл. блужданий с помощью х.ф.

Теорема Для простого случ. блуждания в $\mathbb{Z}^d$
$EN=\lim\limits_{c\uparrow 1}\dfrac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{[-\pi,\pi]^d}\dfrac{1}{1-c\varphi(t)}\,dt$, где $\varphi(t)$ – х.ф. X, $t\in\mathbb{R}^d$

▷ Заметим, что
$\int\limits_{[-\pi,\pi]}\dfrac{e^{inx}}{2\pi}\,dx=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\ne 0\end{cases}$, $n\in\mathbb{Z} \qquad x\in\mathbb{R}$

и $I(S_n=0)=\prod\limits_{k=1}^{d}I(S_n^{(k)}=0)$ ($S_n^{(k)}$ – сумма k-ых координат)

Тогда

$$I(S_n=0)=\prod_{k=1}^{d}\int_{[-\pi,\pi]}\frac{e^{it_k S_n^{(k)}}}{2\pi}\,dt_k = (\text{теор. Фубини}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{i(S_n,t)}\,dt$$

$$EI(S_n=0)=E\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{i(S_n,t)}\,dt = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\underbrace{E\,e^{i(S_n,t)}}_{\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X^k}(t)=(\varphi_X(t))^n}\,dt$$

$$\Rightarrow P(S_n=0)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\varphi_X(t)^n\,dt$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n P(S_n=0)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]}\sum_n (c\varphi(t))^n\,dt = (|c\varphi|\le c<1) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\frac{1}{1-c\varphi(t)}\,dt$$

$0<c<1$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c^n P(S_n=0)\xrightarrow[c\uparrow 1]{}\sum_{n=0}^{\infty}P(S_n=0)=EN$$

◁

<u>Следствие</u> При $d\ge 3$ случ. блуждание невозвратно

▷ $\varphi(t)=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\cos t_k$ $\quad\left(\varphi_X(t)=Ee^{i\langle t,X\rangle}=E\left(\sum_{k=1}^{d}\cos t_k X^{(k)}+i\underbrace{\sum_{k=1}^{d}\sin t_k X^{(k)}}_{=0}\right)\right.$

$P(X^{(n)}=\pm 1)=\frac{1}{d}$

$$\lim_{c\uparrow 1}\frac{1}{(2\pi)^d}\underbrace{\int_{[-\pi,\pi]^d}\frac{1}{1-c\varphi(t)}\,dt}_{\sim\int\frac{1}{\|t\|^2}dt \text{ в окр. } 0} < \infty$$

(после будет расписано более корректно)

$$\left(1-c\varphi(t)\underset{\text{в окр. } 0}{\sim}1-\sum\frac{1}{d}\cos t_k\sim 1-\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\left(1-\frac{t_k^2}{2}\right)=\sum_{k=1}^{d}\frac{t_k^2}{2}\sim \underset{\text{const}}{c_1}\|t\|^2\right)$$

(разл. в ряд Тейлора)

В интеграле перейдём к сферическим координатам, тогда $|J|=r^{d-1}\Theta(\theta_1,\dots,\theta_{d-1})$

ф-ция от углов ограничена и непрерывна

$\Rightarrow$ интеграл от этой ф-ции по конечн. области конечен

$\Rightarrow$ конечность или бесконечность зависит от

$\int\frac{r^{d-1}}{r^2}\,dr=\int r^{d-3}\,dr$ бесконечный при $d\ge 3$.

◁

<u>Теорема Пойа</u> При $d=1$ и $d=2$ бл. возвратно, при $d\ge 3$ невозвр. (Возвр. $\Leftrightarrow$ $P(S_n=0$ бескон. часто$)=1$)

<u>Опр.</u> $P(\|S_n-x\|<\varepsilon$ б.ч.$)=1$, то блуждание возвратно в окрестности (ε-окрестности) x

<u>Опр.</u> $R(S)=\{x\in\mathbb{R}^d:$ случ. блужд. возвратно в окр. точки $x\}$

<u>Опр.</u> z достижима сл. бл. $\Leftrightarrow$ $\forall\,\varepsilon>0\ \exists N\ P(\|S_N-z\|<\varepsilon)>0$

$P(S)$ – множ-во достижимости (точек достижимости)

Теорема (Чжун - Фукс) $S = \{S_n, n \geq 0\}$. Если $R(S) \neq \varnothing$, то $R(S) = P(S)$

<u>Следствие</u> 1) $0 \in R(S)$
2) $0 \in R(S)$, то $R(S) = \varnothing$

При $d = 1$ и $d = 2$ все точки возвратны и при $d \geq 3$ нет точек возвратности

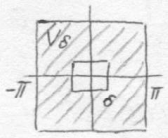
Замечание: более детально разберем почему
$$\lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)}\, dt < \infty \quad \text{при } d \geq 3$$

▷ $\varphi(t) = \frac{1}{2d} e^{it_1} + \frac{1}{2d} e^{-it_1} + \ldots + \frac{1}{2d} e^{it_d} + \frac{1}{2d} e^{-it_d}$

$\underset{\in \mathbb{R}^d}{\varphi(t)} = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos t_k$

$$\lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1 - \frac{c}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos t_k} \overset{?}{\leq} \infty$$

Рассмотрим окрестность нуля $B_\delta = (-\delta, \delta)^d$
$V_\delta = [-\pi, \pi]^d \setminus B_\delta$



Докажем, что $\forall d \in \mathbb{N}$
$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{V_\delta} \frac{1}{1 - \frac{c}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos t_k}\, dt < \infty$$

Оценим $\frac{1}{1 - \frac{c}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos t_k}$, принимает максимальное значение при $\frac{c}{d} \max_{t \in V_\delta} \sum_{k=1}^{d} \cos t_k$, т.к. $t \notin B_\delta$, то хотя-бы по одному направлению значение $\cos t_i > \delta$, остальные косинусы заменим на 1. Тогда

$$\frac{c}{d} \max_{t \in V_\delta} \sum_{k=1}^{d} \cos t_k = b(\delta) < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - b(\delta)} = a(\delta)$$

Осталось рассмотреть в окрестности 0:
В окр-ти 0 косинус ведет себя так:

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$

$$\frac{c}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos t_k \leq \frac{c}{d} \sum_{k=1}^{d} \left(1 - \frac{t_k^2}{2} + o(t_k^4)\right) \leq c - \frac{c}{d} \|t\|^2 + \bar{o}(\|t\|^2)$$

$$\frac{1}{1 - \frac{c}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos t_k} \leq \frac{1}{\underbrace{1-c}_{>0} + \frac{c}{d}\|t\|^2 + \bar{o}(\|t\|^2)} \leq \frac{1}{\frac{c}{d}\|t\|^2 + \bar{o}(\|t\|^2)} \underset{\text{если } \delta \text{ достаточно мало}}{\leq} \frac{1}{\frac{c}{d \cdot 2}\|t\|^2}$$

$\frac{c}{d \cdot 2}$ не влияет на сх-ть $\Rightarrow$ достаточно рассмотреть

$\int_{B_\delta} \frac{dt}{\|t\|^2}$ интеграл Лебега не зависит от значения в конкретной точке, поэтому положим в точке 0 $\frac{1}{0} := 0$

Рассмотрим шар, содерж. B_δ окрестность, назовём её B_δ

$$\Rightarrow \int_{B_\delta} \frac{dt}{\|t\|^2} \leq \int_{G_\delta \setminus \{0\}} \frac{dt}{\|t\|^2}$$

Далее переходим к полярным координатам (смотри док-во выше)

3. Ветвящиеся случайные процессы. Модель Гальтона-Ватсона. Нахождение вероятности вырождения с помощью производящей функции. Докритические, критические и надкритические процессы.

Модель Гальтона - Ватсона

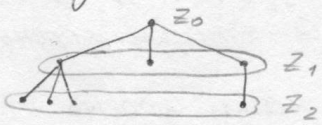
Пусть $\{\xi, \xi_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}\}$ - массив н.о.р. случ. вел.
$P(\xi = m) = p_m \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ (массив $\exists$ по теореме Ломницкого - Улама)

Положим $Z_0 = 1$ (начальный момент),
а для $n \in \mathbb{N}$ положим

$$Z_n := \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k} \qquad \left(\text{т.е. } Z_n(\omega) = \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega)\right)$$

(рассматривается сумма случ. числа случ. величин)

Наглядно:



Введем событие $A = \{\omega : \exists n = n(\omega),\ Z_n(\omega) = 0\}$ (вырождение)

$\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\} \quad \Longrightarrow \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$

по свойству непрерывности вер. меры $\quad P(A) = \lim_n P(Z_n = 0)$

<u>Опр.</u> Пусть дана последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$
Производящей ф-цией этой последовательности явл.

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k \qquad (\text{сходится при } |s| \leq 1)$$

Пусть $a_k = P(Y = k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k (P(Y = k)) = E s^Y \quad \text{явл. произв. ф. случ. вел. } Y.$$

<u>Лемма</u> Вероятность $P(A)$ является корнем уравнения $f_\xi(p) = p$ (могут быть и другие корни)

▷ $f_{Z_n}(s) = E s^{Z_n} = E\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}}\right) =$ (по формуле полной вероятности + счетн. аддитивность интеграла) $=$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} E\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \cdot I(Z_{n-1} = j)\right) = \sum_{j=0}^{\infty} E\left(\left(s^{\sum_{k=1}^{j} \xi_{n,k}}\right) \cdot I(Z_{n-1} = j)\right) = (*) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} E\left(s^{\sum_{k=1}^{j} \xi_{n,k}}\right) \cdot E\, I(Z_{n-1} = j) = \sum_{j=0}^{\infty} E\left(s^{\sum_{k=1}^{j} \xi_{n,k}}\right) \cdot P(Z_{n-1} = j)$$

$$\left(* \text{ - т.к. } \underbrace{\sigma\{\xi_{n,k}, k \in \mathbb{N}\}}_{\sigma\text{-алгебра}} \underset{\text{независ.}}{\perp\!\!\!\perp} \sigma\{\xi_{m,k}, m = 1, \dots, n-1, k \in \mathbb{N}\}\right)$$

(вообще говоря нужно доказывать, удобнее всего по индукции)

Заметим, что

$$E\left(s^{\sum_{k=1}^{j}\xi_{n,k}}\right) = (\xi_{n,k},\ k\in\mathbb{N} \text{ независ.}) = E\left(s^{\xi_{n,1}}\dots s^{\xi_{n,j}}\right) = \prod_{k=1}^{j} E s^{\xi_{n,k}} = \prod_{k=1}^{j} E s^{\xi} = \psi_\xi^{\,j}(s)$$

$$\Rightarrow f_{Z_n}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_\xi(s)^j P(Z_{n-1}=j) = f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(s))$$

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(s)) = \psi_\xi(\psi_\xi(\dots(\psi_\xi(s))) = \psi_\xi(f_{Z_{n-1}}(s))$$

Тогда при $s=0$ имеем

$P(Z_n=0) = \psi_\xi(P(Z_{n-1}=0))$

ψ_ξ - непрерывна на $[0,1]$ и $P(Z_n=0)\uparrow P(A)$ при $n\to\infty$

Тогда перейдем к пределу по n:

$P(A) = \psi_\xi(P(A))$ т.е. $p=\psi_\xi(p)$ $p\in[0,1]$ ◁

<u>Теорема</u> Вероятность вырождения процесса Г-В p есть наименьший корень уравнения $\psi(p)=p$ (*), где $\psi=\psi_\xi$

▷ Пусть $p_0 = P(\xi=0)=0 \Rightarrow P(\xi\geq 1)=1 \Rightarrow P(\{\bigcap_{n,k}\xi_{n,k}\geq 1\})=1$

поэтому $Z_n\geq 1$ при $\forall n$ $\Rightarrow P(A)=0$ - наим. корень (*)

Пусть $p_0=1$. Тогда $P(\xi=0)=1 \Rightarrow P(A)=1$ - наим. корень

Пусть $0<p_0<1 \Rightarrow \exists\, m\in\mathbb{N}: p_m>0 \Rightarrow \psi$ строго возрастает на $[0,1]$

Рассмотрим $\Delta_n = [\psi_{Z_n}(0), \psi_{Z_{n+1}}(0))$, $\Delta_0=[0,\psi(0))$

На каждом промежутке Δ_n:

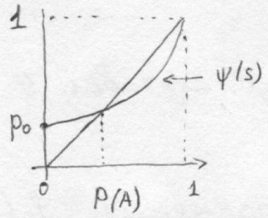
$\psi(s)-s > \psi(\psi_{Z_n}(0)) - \psi_{Z_{n+1}}(0) = 0$

$\Rightarrow$ на каждом Δ_n не имеет корней

$\bigcup_{n=0}^{\infty}\Delta_n = [0,P(A))$ $\psi_{Z_n}(0)\xrightarrow[n\to\infty]{} P(A)$

по лемме $P(A)$ является корнем ур. $\Rightarrow$ $P(A)$ - наим. корень ◁

Наглядно это видно на картинке



<u>Теорема</u> Вероятность вырождения $P(A)$ есть $0 \iff p_0=0$

Пусть $p_0>0$. Тогда при $E\xi\leq 1$ имеем $P(A)=1$, при $E\xi>1$ имеем $P(A)<1$.

▷ Напоминание:

$f_y(s)=\sum_{k=0}^{\infty} s^k P(y=k)$ равномерно сход. на отрезке $s\in[0,1]$, значит можно дифференц. почленно

$\Rightarrow \exists$ (не обяз. конечная) $f_y'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot s^{k-1}P(y=k)$, $s\in[0,1]$

$\Rightarrow f_y'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,P(y=k) = E\,y \leq \infty$

имеется ввиду предел слева

Перейдём к доказательству:

$\psi(s) = s$

$1 - \psi(s) = 1 - s$ т.к. $\exists$ конечная производная

$\psi(1) - \psi(s) = 1 - s$ и непрерывна на замкнутом отрезке

$\psi(1) - \psi(s) = \psi'(\theta(s))(1-s)$ $\Rightarrow$ применима формула Лагранжа

$\theta(s) \in (0,1)$

Равенство достигается в случае 1) $s = 1$

2) $\psi'(\theta(s)) = 1$, $\theta(s) \in (0,1)$

$\psi'(\theta(s)) < \psi'(1) = E\xi$ $\triangle$

<u>Следствие</u> При $E\xi < 1$ процесс называется докритическим

$= 1$ — // — критическим

> 1 — // — надкритическим

$EZ_n = (E\xi)^n$, $n \in N$ при $E\xi < \infty$

▷ 1) можно доказать при помощи п.ф.

$\varphi_{Z_n}(t) = \underbrace{\varphi_\xi(\ldots\varphi_\xi}_{n}(t)$ $\Rightarrow$ $\varphi'_{Z_n}(1) = (\varphi'(1))^n$

2) непосредственными вычислениями

$$EZ_n = E\left(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} E\left(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}\right) \cdot I(Z_{n-1} = j) =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} E\left(\sum_{k=1}^{j} \xi_{n,k}\right) \cdot EI(Z_{n-1} = j) = \sum_{j=0}^{\infty} j\, E\xi \cdot P(Z_{n-1} = j) =$$

$$E\xi \cdot EZ_{n-1} = (E\xi)^n$$

Замечание: докажем последнюю теорему более детально:

- $p_0 = 0 \Leftrightarrow p = 0$ наим. корень ур-я $\psi(p) = p$
- $p_0 > 0$, если $E\xi \le 1$, то $p = 1$

  $E\xi > 1$, то $p < 1$

▷ $\psi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$ $\psi(1) = 1$

радиус сх-ти ряда 1

$\Rightarrow \exists\ \psi'(s)$, $s \in (0,1)$

Производная $\exists$ на откр. промежутке, а на замкнутом непрерывно

$\Rightarrow$ применима теорема Лагранжа

$\psi(1) - \psi(s) = \psi'(\theta)(1-s)$, где $\theta \in (s,1)$

$\psi'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} p_k$ $\psi''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) s^{(k-2)} p_k$

Если $\exists\ p_k > 0$, $k \ge 2$ $\Rightarrow \psi''(s) > 0$ $\Rightarrow \psi'(s)$ возрастает

① Пусть $\underset{E\xi}{\psi'(1)} \le 1$, тогда $\psi'(\theta) < 1$

тогда $\psi(s) - s > 0$ для $s \in (0,1)$ $\Rightarrow$ остались точки 0 и 1

$\psi(0) - 0 = p_0 > 0$ $\Rightarrow$ наим. корень ур-я $\psi(p) = p$ есть 1

(2) Пусть $E\xi > 1$. Тогда для всех s достаточно близких к 1
$\psi'(0) > 1$
Для таких s $\psi(s) - s < 0$, но $\psi(0) - 0 = p_0 > 0$
$\Rightarrow$ непрерывная ф-ция принимает „+" и „-" значения
$\Rightarrow \exists$ ноль ф-ции $\psi(p) - p$ на отрезке $(0,1)$

Пусть $\nexists\ p_k > 0$, $k \geq 2$
Тогда $\psi(s) = p_0 + (1-p_0)s$
$\Rightarrow \psi(s) - s = p_0 + p_1 s - s = p_0 - s(1-p_1) = \overset{>0}{p_0}(1-s)$
$\Rightarrow$ наим. корень ур-я $\psi(p) = p$ есть $p = 1$

4. Процессы восстановления. Исследование вспомогательного процесса восстановления, порожденного последовательностью независимых бернуллиевских величин, умноженных на константу.

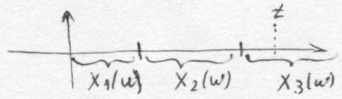
Процессы восстановления

Пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad X, X_1, X_2, \ldots$ - н.о.р. сл. в. $\quad X \geq 0$

Для $t = 0$ положим $Z(0) = 0$

Для $t > 0$ пусть $z(t) := \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}$ ($\sup \varnothing := \infty$ по опр.)

$Z(t, \omega) = \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n(\omega) \leq t\}$



$Z(t) = 2$ на картинке

$\{Z(t) = n\} = \{S_n \leq t, S_{n+1} > t\}$

Следовательно, $\{Z(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}$

Замечание: $Z(t) \leq \infty$ по определению, но почти наверное $< \infty$

Также $Z(t)$ можно определить как $Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I(S_n \leq t)$, $t > 0$

Вспомогательный процесс

Рассмотрим процесс восстановления $\{Z^*(t), t \geq 0\}$, построенный по н.о.р. $Y, Y_1, \ldots$ $\quad P(Y = \alpha) = p \in (0,1)$
$P(Y = 0) = 1 - p$

Исключим из рассмотрения случай, когда $Y \equiv const$
1) если $c = 0$ $\quad Z(t) = \infty \quad \forall t > 0$
2) если $c > 0$ $\quad Z(t) = [\frac{t}{c}]$

<u>Лемма</u> $P(Z^*(t) = m) = \begin{cases} 0, & m < j \\ C_m^j p^{j+1} (1-p)^{m-j} \end{cases}$, где $j = [\frac{t}{\alpha}]$

▷ На отрезке $[0, t]$ было j ненулевых скачков из m, идущих в любом порядке, и т.к. $S_{m+1} > t$, то в конце будет еще один ненулевой скачок

<u>Опр.</u> V имеет <u>геометрическое</u> распределение с параметром $p \in (0,1)$, если $P(V = t) = (1-p)^t p$
(число неудач до первого успеха)

<u>Лемма</u> Для $\forall t > \alpha$ $P(Z^*(t) = m) = P(j + V_0 + \ldots + V_j = m)$, где $V, V_1, \ldots$ - н.о.р. геом. величины с параметром p

$\triangleright$ $P(\nu_0 + \ldots + \nu_j = m-j) = \sum\limits_{(k_0,\ldots,k_j)\in M} P(\nu_0 = k_0, \ldots, \nu_j = k_j)$, где $M = \{(k_0,\ldots,k_j),\ k_i \geq 0,\ \sum\limits_{i=0}^{j} k_i = m-j\}$

$$= \sum_{(k_0,\ldots,k_j)\in M} p(1-p)^{k_0} \ldots p(1-p)^{k_j} = \sum_{(k_0,\ldots k_j)\in M} p^{j+1}(1-p)^{k_0+\ldots+k_j} =$$

$$= p^{j+1}(1-p)^{m-j} \cdot \underset{\text{мощность}}{\#M} = C_m^j\, p^{j+1}(1-p)^{m-j}$$

Почему $\#M = C_m^j$?

Сводится к задаче из теор. вер.

Есть $m-j$ шариков, нужно найти кол-во вариантов разбить их на $j+1$ кучи

$m-j$ шариков, j перегородок, каждый вариант задается расстановкой перегородок

$\Rightarrow$ нужно расставить j объектов на $m-j+j = m$ мест

5. Сравнение исходного процесса восстановления с построенным вспомогательным. Усиленный закон больших чисел. Доказательство элементарной теоремы восстановления.

<u>Лемма</u> Пусть $t > \alpha$. Тогда $E Z^*(t) \le At$, $E Z^*(t)^2 \le Bt^2$, где $A = A(p,\alpha) > 0$, $B = B(p,\alpha) > 0$

▷ Из предыдущих лемм

$E Z^*(t) = E(j + v_0 + \ldots + v_j) = j + (j+1)Ev = \left(Ev = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p = a(p) < \infty\right) =$

$= j + (j+1)a(p) \le (j+1)(1 + a(p)) \le$

$j = \left[\frac{t}{\alpha}\right] \le \frac{t}{\alpha}$, $t > \alpha$

$\le \left(\frac{t+\alpha}{\alpha}\right)(a(p)+1) \le \left(\frac{2t}{\alpha}\right)(a(p)+1) = At$, где $A = \frac{2(a(p)+1)}{\alpha}$

$$E Z^*(t)^2 = \underbrace{D Z^*(t)}_{(j+1)Dv} + \underbrace{(E Z^*(t))^2}_{\le ((j+1)(a(p)+1))^2} \le (j+1)^2(\sigma^2(p) + (a(p)+1)^2) \le Bt^2$$

Пусть $X \ge 0$ (если $X \ne const$, то функц. распр. есть ступенчатая)
Тогда $\exists\, \alpha > 0 : P(X > \alpha) = p \in (0,1)$

Определим вспомогательный процесс восстановления
Пусть $Y_n = \begin{cases} \alpha, & X_n > \alpha \\ 0, & X_n \le \alpha \end{cases}$ Y_n независимы как ф-ции от незав. переменных
$Z^* = \{Z^*(t), t \ge 0\}$ - процесс построен по Y_n

По построению $Y_n \le X_n \Rightarrow Z(t) \le Z^*(t) \quad \forall\, t \ge 0$
Тогда $\forall\, \alpha > t$ $E Z(t) \le E Z^*(t) < \infty \Rightarrow Z(t) < \infty$ п.н.
$E Z(t)^2 \le E Z^*(t)^2$

Следствие: $P(\forall t \ge 0 \quad Z(t) < \infty) = 1$

▷ Z явл. неубывающ. процессом. Рассмотрим процесс в целых точках $P(Z(n) < \infty$ для $n \in \mathbb{N}) = P(\bigcap_n Z(n) < \infty) = 1$ как вероятность пересечения счётного числа событий вер-ти 1.

Следствие: $E(Z(t) \le At$, $E Z(t)^2 < Bt^2 \quad t > \alpha$

<u>Усиленный закон больших чисел</u>
Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ - н.о.р. сл. вел. $X \ge 0$
Тогда $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{п.н.} \mu \in [0,\infty]$ при $n \to \infty$, где $\mu = EX$

▷ Если $\mu < \infty$, то утверждение леммы есть УЗБЧ Колмогорова

Если $\mu = \infty$. Положим для $c > 0$ $V_n(c) = X_n I\{X_n \le c\}$
Тогда по УЗБЧ Колмогорова $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k \xrightarrow{п.н.} EXI\{X \le c\}$

Возьмём $c = m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\lim_n \inf \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq \lim_n \inf \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k \overset{\exists\,\text{предел}}{=} E X I\{X \leq m\} \quad \text{почти наверное}$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq \lim_m E X I\{X \leq m\} = (\text{по теореме о монотон. сх-ти}) = EX = \infty$$

<u>Элементарная теорема восстановления</u>

Пусть $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$, – процесс восстановления, построенный по последов-ти н.о.р. сл. вел. $X, X_1, X_2, \ldots$. Тогда

1) $\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu}$ при $t \to \infty$ где: $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$

2) $\frac{E Z(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ при $t \to \infty$ (элемент. теорема восстан.)

▷ Если $\mu = 0$, то $X_n = 0$ п.н. Поэтому утв. теоремы справедливо ($Z(t) = \infty \ \forall t$)

Теперь $\mu > 0$. Заметим, что для $t > 0$ $S_{Z(t)} \leq t \leq S_{Z(t)+1}$ (*)
$Z(t_n, \omega) = n$, где $t_n = S_n(\omega)$. Поэтому $Z(t) \to \infty$ п.н.
(так как Z - монотон. по t и используя У354 (прошл. утв.))

$\Rightarrow 0 < Z(t, \omega) < \infty$ п.н. $\forall t \geq T_0(\omega)$

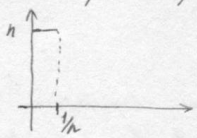
Поделим обе части нер-ва (*) на $Z(t)$. Тогда

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \leq \frac{t}{Z(t)} \leq \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \cdot \frac{Z(t)+1}{Z(t)}$$

$$\frac{Z(t)+1}{Z(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{п.н.}} 1 \qquad \frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{п.н.}} \mu \qquad \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \to \mu$$

$$\Rightarrow \frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н}} \mu \text{ при } t \to \infty \Rightarrow \frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu}$$

Замечание: Из сходимости п.н. не следует сходимости М.О.
$\xi_t \to \xi \not\Rightarrow E\xi_t \to E\xi \quad t \to \infty \quad (t \in (\alpha, \infty), \alpha > 0)$
Например:



$\xi_n \to 0 = \xi$

$E\xi_n = 1 \neq 0$

Условие равномерн. интегрируемости:
$$\sup_{t>\alpha} E|\xi_t I(|\xi_t| > c)| \underset{c\to\infty}{\to} 0$$

Для неотриц. величин равном. интегрируемость явл. необходимым и достаточным условием для сходимости средних.

<u>Теорема</u> (де ла Вилле Пуссен) $\{\xi_t, t > \alpha\}$ равном. интегр. $\Leftrightarrow$ $\exists\, g$ - неубыв., т.ч. $g(t)/t \to \infty$ при $t \to \infty$ и $\sup_t E g(|\xi_t|) < \infty$

Вернемся к док-ву теоремы:
Возьмём $g(t) = t^2$, $t > 0$, $\xi_t = \frac{Z(t)}{t}$, $t > 0$

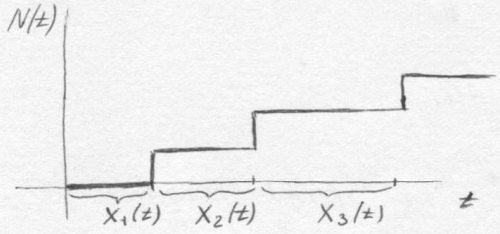
$$E\xi(t)^2 = \frac{E Z(t)^2}{t^2} \leq \frac{B t^2}{t^2} = B < \infty$$

6. Пуассоновский процесс постоянной интенсивности как процесс восстановления. Парадокс времени ожидания

<u>Опр.</u> Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ н.о.р. величины <u>распределены экспоненциально</u>

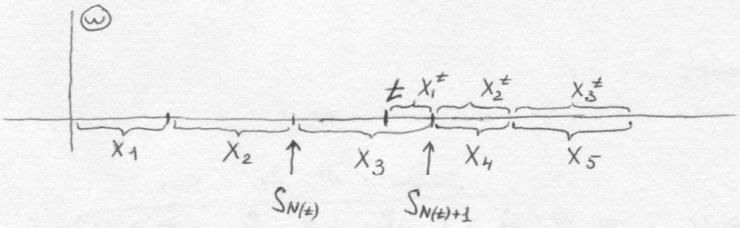
$\xi \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ $\quad p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

<u>Опр.</u> Пуассоновский процесс $N = \{N(t), t \geq 0\}$ есть процесс восстановления, построенный на величинах $\xi_1, \xi_2, \dots$



По определению $N(0) = 0$

Теперь для $t > 0$ введем $\quad X_1^t := S_{N(t)+1} - t \quad X_k^t := X_{N(t)+k}$, $k \geq 2$



Иногда X_1^t называют „недоскок"

<u>Лемма</u> Для $\forall\ t > 0$ величины $N(t), X_1^t, X_2^t, \dots$ явл. независимыми, причем $N(t) \sim Pois(\lambda t)$, $X_k^t \sim Exp(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots$

▷ Для проверки независимости $N(t), X_1^t, X_2^t, \dots$ достаточно проверить, что $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+$, $\forall\ u_1, \dots, u_k \geq 0$

$$P(N(t) = n,\ X_1^t \geq u_1, \dots, X_k^t \geq u_k) = P(N(t) = n) \cdot P(X_1^t \geq u_1) \cdot \ldots \cdot P(X_k^t \geq u_k)$$

Докажем это по индукции.
Пусть $k = 1$

$$P(N(t) = n,\ X_1^t \geq u_1) = P(S_n \leq t,\ S_{n+1} > t,\ S_{N(t)+1} - t \geq u_1) =$$

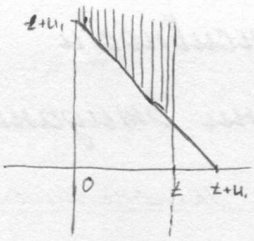
$$P(S_n \leq t,\ S_{n+1} > t,\ S_{n+1} \geq u_1 + t) = P(S_n \leq t,\ S_{n+1} \geq t + u_1) =$$

[Так как сумма независимых величин $\xi_i \sim Exp(\lambda)$ распределена как гамма величина (с распр. гамма):
$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n \quad \xi_i \sim Exp(\lambda) \quad \Rightarrow$

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$= P(S_n \leq t,\ \underbrace{S_n + X_{n+1}}_{\text{независимы}} \geq t + u_1) = \iint\limits_{\substack{x \leq t \\ x+y \geq t+u_1}} p_{S_n}(x)\, p_{X_{n+1}}(y)\, dx\, dy =$$

Рассмотрим область, по которой нужно проинтегрировать и перейдем к другим пределам интегрирования



Заштрихованная область - область интегрирования

$$\iint\limits_{\substack{0\le x\le t\\ x+y\ge t+u_1\\ y\ge 0}} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}\cdot \lambda e^{-\lambda y}\,dx\,dy = (\text{по теореме Фубини}) =$$

$$\int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}\,dx \int_{t+u_1-x}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y}\,dy = \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}\cdot e^{-\lambda(t+u_1-x)}\,dx =$$

$$e^{-\lambda(t+u_1)} \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dx = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\cdot e^{-\lambda u_1}$$

$$\Rightarrow \quad P(N(t)=n,\ X_1^t \ge u_1) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda u_1}$$

Возьмём $u_1 = 0$ $\quad P(N(t)=n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ т.к. $N(t) \sim Pois(\lambda t)$

Аналогично:

$$P(X_1^t \ge u_1) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}_{=1}\cdot e^{-\lambda u_1} = e^{-\lambda u_1}$$

$\Rightarrow$ $N(t)$ и X_1^t независимы

Пусть теперь $k \ge 2$

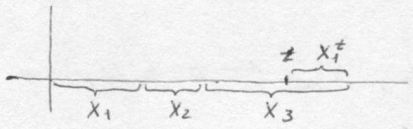
$$P(N(t)=n,\ X_1^t \ge u_1, \dots, X_k^t \ge u_k) = P(\overbrace{S_n \le t,\ S_{n+1} > t,\ S_{n+1} - t \ge u_1}^{\text{зависит от } X_1,\dots,X_{n+1}},\ X_{n+2} \ge u_2, \dots, X_{n+k} \ge u_k)$$

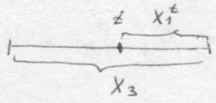
$= (\text{по теореме о группировке}) =$

$= P(N(t)=n)\,P(X_1^t \ge u_1)\cdot \ldots \cdot P(X_k^t \ge u_k)$

$\Rightarrow$ $X_k^t \sim Exp(\lambda)$

<u>Парадокс времени ожидания.</u>





отрезок имеет распр. $Exp(\lambda)$, но его часть также имеет распределение $Exp(\lambda)$

парадокс

Это возможно потому как границы отрезка случайны

6. Независимость приращений пуассоновского процесса

<u>Опр.</u> Процесс $Y = \{Y(t),\ t \geq 0\}$ имеет независимые приращения, если $\forall\ 0 \leq t_0 < \ldots < t_n$ $(\forall\ n \in \mathbb{N})$
$Y(t_0),\ Y(t_1) - Y(t_0),\ \ldots,\ Y(t_n) - Y(t_{n-1})$

<u>Теорема</u> Пуассоновский процесс интенсивности λ имеет независимые приращения

▷ Введем процесс $N^t(s) := \sup\{n : \sum_{k=1}^{n} X_k^t \leq s\}$
Этот процесс $\{N_s^t,\ s \geq 0\}$ – пуассоновский процесс интенсивности λ

$N^t(s) \in \sigma\{X_1^t, X_2^t, \ldots\}$ $\Rightarrow$ $N(t)$ независит от $\underset{N(t+s)-N(t)}{\underset{\shortparallel}{N^t(s)}}$ для $\forall\ s$

Для $n = 1$ утв. теоремы доказано $[t_0 = t,\ t_1 = t + s]$

Возьмем $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ $\quad n \geq 2$
Фиксируем t_0 и рассмотрим $N^{t_0}(s)$
Заметим, что

$$N^{t_0}(t_k - t_0) - N^{t_0}(t_{k-1} - t_0) = N(t_k - t_0 + t_0) - N(t_0) - (N(t_{k-1} - t_0 + t_0) - N(t_0)) = N(t_k) - N(t_{k-1})$$

$$N(t_0),\ N(t_1) - N(t_0),\ \ldots,\ N(t_n) - N(t_{n-1})$$
$$N^{t_0}(s_1),\ \ldots,\ N^{t_0}(s_n) - N^{t_0}(s_n - s_{n-1}) \quad , \text{где } s_k = t_k - t_0,\ k = 1, \ldots, n$$

$\underbrace{\xi_0,}_{\text{незав}}\ \overbrace{\xi_1, \ldots, \xi_n}^{\text{незав.}}$ $\Rightarrow$ $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности

(хар. функции распадается на независ. компоненты)

7. Построение пространственного пуассоновского процесса, отвечающего σ-конечной мере интенсивности.

Пусть $(S, \mathcal{B})$ – измеримое пр-во и μ явл. σ-конечной мерой на $(S, \mathcal{B})$

Напоминание: σ-конечность

$S = \bigcup_{q=1}^{\infty} S_q$, $S_q \in \mathcal{B}$ $\mu(S_q) < \infty$

<u>Опр.</u> Процесс $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}\}$ наз. <u>пространственным пуассоновским процессом</u> с мерой интенсивности μ, если выполняются условия:

1) $N(B) \sim Pois(\mu(B))$, $B \in \mathcal{B}$
2) $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$, таких что $B_i B_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\mu(B_i) < \infty$ $\forall i = 1, \dots, n$ величины $N(B_1), \dots, N(B_n)$ – независимы

Замечание: $\xi \sim Pois(a)$

$a = 0 \Rightarrow \xi = 0$ (п.н.)

$a = \infty \Rightarrow \xi = \infty$ (п.н.)

$0 < a < \infty \Rightarrow P(\xi = k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}$ $k = 0, 1, \dots$

Пусть $\mu(S) < \infty$. Введем независ. случ. вел. $\nu, X_1, X_2, \dots$ так что $\nu \sim Pois(\mu(S))$ $\nu : \Omega \to \mathbb{Z}_+$

$X : \Omega \to S$, $X_1, \dots$ – н.о.р., $X \in \mathcal{F} | \mathcal{B}$

$P(X_1 \in B) = \frac{\mu(B)}{\mu(S)}$

(хотя величины из различных вероятностных пространств, определить величины так можно по теореме Ломницкого – Улама)

Определим $N(B) = \sum_{n=1}^{\nu} I_B(X_n)$ (она явл. случ. вел. при каждом фиксированном $B \in \mathcal{B}$)

$N(B, \omega) := \sum_{n=1}^{\nu(\omega)} I_B(X_n(\omega))$, $\omega \in \Omega$

<u>Теорема</u> $\{N(B), B \in \mathcal{B}\}$ есть пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности μ.

▷ Возьмём $n \in \mathbb{N}$ и $\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ $(B_i \cap B_j = \varnothing, i \neq j)$ $(\mu(B_i) < \infty$ $\forall i$ т.к. $\mu(B_i) \leq \mu(S) < \infty)$

Убедимся, что $\forall m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_+$

$P(N(B_1) = m_1, \dots, N(B_n) = m_n) = \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} e^{-\mu(B_1)} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{-\mu(B_n)}$

$P(N(B_1) = m_1, \dots, N(B_n) = m_n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(B_1) = m_1, \dots, N(B_n) = m_n, \nu = k) =$

$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{P\left(\sum_{i=1}^{k} I_{B_1}(X_i) = m_1, \dots, \sum_{i=1}^{k} I_{B_n}(X_i) = m_n\right)}_{\text{полиномиальное распределение (нужно положить } m_1 \text{ шариков в } B_1, \dots, m_n \text{ в } B_n)} \cdot \underbrace{P(\nu = k)}_{= \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)}}$ $=$

$$= \sum_{\substack{k=m \\ m_0+\dots+m_n=m}}^{\infty} \frac{k!}{m_0!\, m_1! \dots m_n!} \left(\frac{\mu(B_0)}{\mu(S)}\right)^{m_0} \left(\frac{\mu(B_1)}{\mu(S)}\right)^{m_1} \dots \left(\frac{\mu(B_n)}{\mu(S)}\right)^{m_k} \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)} \circledeq$$

, где $B_0 = S \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} B_i)$ и $k-m = m_0$

$$\circledeq \; e^{-\mu(S)} \cdot \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \cdot \dots \frac{\mu(B_n)^{m_k}}{m_k!} \cdot \underbrace{\sum_{k=m}^{\infty} \frac{\mu(B_0)^{k-m}}{(k-m)!}}_{= e^{+\mu(B_0)}} =$$

$$\frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} e^{-\mu(B_1)} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{-\mu(B_n)}$$

т.к. $e^{-\mu(S)} \cdot e^{\mu(B_0)} = e^{-(\mu(B_1)+\dots\mu(B_n))}$

<u>Лемма</u> Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – независимые сл. вел., $\xi_i \sim Pois(\lambda_k)$, $k \in \mathbb{N}$
Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sim Pois\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\right)$

▷ Если некот. $\lambda_k = \infty$, то $Pois(\lambda_k) := \infty$, то утв. справедливо
Далее все $\lambda_k < \infty$ $\forall k$

1) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$, тогда $E\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right) \overset{\text{т.к. } \xi_k \geq 0}{=} \sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k := \xi \overset{(п.н.)}{<} \infty$

$$\varphi_{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}(u) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(u) = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k(e^{iu}-1)} = e^{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (e^{iu}-1)} \Rightarrow \xi \sim Pois\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)$$

2) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$ Находим Z_j $Z_1 < Z_2 < \dots$ т.ч. $\sum_{Z_j}^{Z_{j+1}} \lambda_k \geq 1$
Тогда введем $\eta_j = \sum_{k=Z_j}^{Z_{j+1}} \xi_k \Rightarrow \eta_1, \eta_2$ – не завис., $\eta_i \sim Pois\left(\sum_{k=Z_j}^{Z_{j+1}} \lambda_k\right)$
$P(\eta_i \geq 1) = 1 - P(\eta_j = 0) \geq 1 - e^{-1} > 0$
По теореме Бореля – Кантелли $\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j = \infty$ п.н.

Пусть $\mu(S) = \infty$ $\{S_q\}$ – разбиение S

σ-конечная мера
Пусть $\eta_q \sim Pois(\mu(S_q))$, $X_{q,1}, X_{q,2}, \dots$ независ.
$P(X_{q,i} \in \underset{B \cap S_q \in \mathcal{B}}{C}) = \frac{\mu(C)}{\mu(S_q)}$

Построим процесс $N_q(C) := \sum_{n=1}^{\eta_q} I_C(X_{q,n})$
Положим
$N(B) := \sum_{q=1}^{\infty} N_q(B \cap S_q)$ $(\sim Pois(\mu(B \cap S_q))$, N_q – независимы

По теореме М-У $\{\eta_q, X_{qi}, q \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}\}$ – независимые сл.в.
$\Rightarrow$ по лемме $N(B) \sim Pois(\sum \mu(B \cap S_q)) = Pois(\mu(B))$

<u>Упр.</u> Доказать, что $N(B_1), \dots, N(B_n)$ – незав., $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$
$\mu(B_i) < \infty$, $i = 1, \dots, n$

8. Функционал Лапласа точечного процесса. Характеризация пространственного точечного пуассоновского процесса с помощью функционала Лапласа. Маркированный пуассоновский процесс.

<u>Опр.</u> Процесс $\{N(B),\ B \in \mathcal{B}\}$ наз. <u>точечным</u>, если его можно представить в виде:

$$N(B) = \sum_{n=1}^{\infty} I_B(Z_n),\ B \in \mathcal{B},\ \text{где}\ Z_n : \Omega \to S,\ Z_n \in \mathcal{F}/\mathcal{B}$$

Пусть $\mu(S) = \infty$, μ – есть σ-кон. мера на $(S, \mathcal{B})$

$$N(B) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{y_q} I_{B \cap S_q}(X_{q,n})$$

Пусть $V_0 := 0,\ V_1 = y_1, \dots, V_k = \sum_{j=1}^{k} y_j$

Введем $Z_n,\ n \in \mathbb{N}$. Пусть для точки $\omega \in \Omega$ вып. $V_{k-1} \le n \le V_k$

Определим $Z_n(\omega) := X_{k,\, n - V_{k-1}(\omega)}(\omega)$

Почему это случайная величина? При фиксир. $V_{k-1} = i$ и $V_k = j$ получим случ. вел., завис. только от ω. И пересеч. и объед. событий тоже событие

Тогда получим:

$$N(B) = \sum_{k=1}^{\infty} I_B(Z_n) \Rightarrow \text{пространств. пуассон. процесс – точечный}$$

<u>Опр.</u> Пусть $f : S \to \mathbb{R}_+,\ f \in \mathcal{B}/\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$

измеримая ф-ция

$$\mathcal{L}(f) := E\, e^{-\sum_n f(Z_n)}$$

<u>Замечание</u>: $e^{-\infty} = 0$ по определению

$\Rightarrow$ математ. ожидание $\exists$

<u>Теорема</u> $N = \{N(B),\ B \in \mathcal{B}\}$ явл. пространственным пуассоновским процессом с σ-конечной мерой интенсивности μ тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{L}(f) = e^{\int (e^{-f(x)} - 1)\, \mu(dx)}$$

▷ Сначала рассмотрим простые функции

$f = \sum_{k=1}^{m} a_k I_{B_k}$, где $B_i \cap B_j = \varnothing\ \ i \ne j$, $\mu(B_k) < \infty\ \ k = 1, \dots, m$

$$\mathcal{L}(f) = E\, e^{-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} \overset{\ge 0}{a_k} \overset{\ge 0}{I_{B_k}}(Z_n)} = \Big|\ \text{члены ряда положительны (неотр.)} \Rightarrow \text{можно менять порядок суммир.}\ \Big| =$$

$$= E\, e^{\sum_{k=1}^{m} a_k \sum_{n=1}^{\infty} I_{B_k}(Z_n)} = E\, e^{-\sum_{k=1}^{m} a_k N(B_k)} = \Big|\ \text{т.к. } N(B_1), \dots, N(B_m) \text{ независимы}\ \Big|$$

$$= \prod_{k=1}^{m} E\, e^{-a_k N(B_k)} \quad (=)$$

Вспомним, что если $\xi \sim Pois(a)$, то

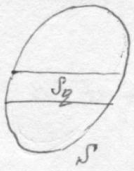
$$E\, e^{-v\xi} = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-vr} P(\xi = r) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-vr} \frac{a^r e^{-a}}{r!} = e^{-a} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(e^{-v} a)^r}{r!} =$$

$$= e^{-a} \cdot e^{e^{-v} a} = e^{a(e^{-v} - 1)}$$

$$(=) \prod_{k=1}^{m} e^{\mu(B_k)(e^{-a_k}-1)} = e^{\sum_{k=1}^{m} \mu(B_k)(e^{-a_k}-1)} = e^{\int_S (e^{-f(x)}-1)\mu(dx)}$$

$\Rightarrow$ для простой функции установлено

<u>Лемма</u> Пусть $f: S \to \mathbb{R}_+$ измеримая ф-ция. Тогда $\exists \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ простых функций, таких что $f_j \uparrow f$ на S при $j \to \infty$

▷ 

Определим
$$f_{q,j}(x) := I_{S_q}(x) \sum_{r=0}^{j2^j-1} r\,2^{-j}\, I\{r\,2^{-j} \le f < (r+1)\,2^{-j}\}$$
на каждом S_q заменяем $f(x)$ на $r\,2^{-j}$

Очевидно, что $0 \le f_{q,j} \le f_{q,j+1}$ (на каждом шаге приближение точнее)

Пусть $0 \le f_j = \sum_{q=1}^{j} f_{q,j} \to f$ на S (линейн. комбинация индикаторов конечной меры)

<u>Лемма</u> Пусть $0 \le a_{n,j} \uparrow a_n$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \uparrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $j \to \infty$

▷ 1) $\sum a_n < \infty$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \sum_{N+1}^{\infty} a_n < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда $\sum_{N+1}^{\infty} a_{n,j} < \frac{\varepsilon}{3}$

$\sum_{n=1}^{N} |a_{n,j} - a_n| < \frac{\varepsilon}{3}$, если j достаточно велико

2) $\sum a_n = \infty$ аналогично

Завершаем док-во теоремы:

Берем $0 \le f_j \uparrow f$ (согласно лемме 1) Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_j(z_n) \to \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n)$ (по лемме 2). Тогда $E e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f_j(z_n)} \longrightarrow E e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(z_n)}$ сходится по теореме Лебега (все функции ограничены 1)

Итак, $\mathcal{L}(f) = \lim_{j\to\infty} e^{\int_S (e^{-f_j(x)}-1)\mu(dx)} = e^{\int_S (e^{-f(x)}-1)\mu(dx)}$

т.к. $\int_S \underbrace{(1-e^{-f_j(x)})}_{\ge 0}\mu(dx) \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_S (1-e^{f(x)})\mu(dx)$

В одну сторону доказали.

Обратно: пусть $\mathcal{L}(f) = e^{\int_S (e^{-f(x)}-1)\mu(dx)}$

Возьмём $f = \sum_{k=1}^{m} a_k I_{B_k}$ $\quad B_i \cap B_j = \varnothing \quad i \ne j$, $\mu(B_k) < \infty$, $k = 1, \dots, m$

Тогда $E e^{-\sum_{k=1}^{\infty} f(z_n)} = E e^{\sum_{k=1}^{\infty} a_k X(B_k)}$ ← ещё не знаем что это $N(B_k)$

Если $f = I_B$

$E e^{-aX(B)} = e^{\mu(B)(e^{-a}-1)}$ а это есть преобразование Лапласа для $\xi \sim Pois(\mu(B))$

Между преобразованием Лапласа и функцией распределения имеется взаимно-однозначное соответствие

$\Rightarrow \{X(B), B \in \mathcal{B}\}$ пуассон. процесс с мерой интенсивности μ

*) В дискретном случае $\Omega \to \{0, \dots\}$ легко предъявить обратное преобразование Лапласа

$\psi_\xi(u) = E e^{-u\xi}$ бесконечно дифференц. $\psi_\xi^{(k)}(\cdot)$ во всех точках непрерывности

Задача $e^{-\lambda\theta} \sum_{k \le \lambda x} \frac{(\lambda\theta)^k}{k!} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \begin{cases} 1, & \theta \gtrless x \\ 0, & \end{cases}$

9. Анализ числа клиентов в системе массового обслуживания $M|G|\infty$

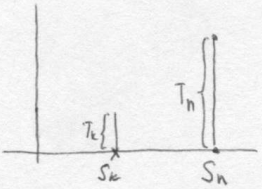
Пусть T_n, $0 \le T, T_1, \dots, T_n, \dots$ – н.о.р. величины

Процесс, заданный элементом $Z_n := (S_n, T_n)_{n \ge 1}$ является простран. пуассоновским процессом с мерой интенсивности

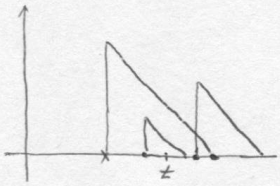
$$\underset{\text{мера Лебега}}{\lambda \cdot \nu} \otimes \underset{\text{распределение } T}{Q}$$

$$(T_n) \underset{\text{независимы}}{\perp\!\!\!\perp} (S_n)$$

Наглядно это можно представить как:



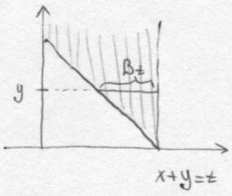
- приходят клиенты и находятся случ. время T_n
- ломаются приборы, их чинят случ. время T_n



Процесс Y_t формально показывает „во сколько Δ-ков попала точка t"

$$Y_t = \{n : S_n \le t < S_n + T_n\} = \{n : (S_n, T_n) \in B_t\} = \sum_n I_{B_t}(S_n, T_n) \sim Pois((\lambda \cdot \nu \otimes Q)(B_t))$$

$$(*) \quad (\lambda \cdot \nu \otimes Q)(B_t) = \int_0^t Q(dy) \cdot y \cdot \lambda + \int_t^\infty Q(dy)\, t \cdot \lambda = \lambda \int_0^\infty (t \wedge y)\, Q(dy)$$



Итак, в системе $M|G|\infty$

$$Y_t \sim Pois\left(\lambda \int_0^\infty (t \wedge y)\, Q(dy)\right) \quad \forall t > 0$$

Если $ET < \infty$, то $Pois\left(\lambda \int_0^\infty (t \wedge y)\, Q(dy)\right)$ превращается при $t \to \infty$ в $Pois(\lambda ET)$

Замечание: распишем (*) более детально

$$(\lambda \cdot \nu \otimes Q)(B_t) = \int_{\mathbb{R}_+^2} I_{B_t}(x,y)\, \lambda\, dx\, Q(dy) = \int_0^t Q(dy)\, \lambda \underbrace{\int_{t-y}^t dx}_{=y} + \int_t^\infty Q(dy) \underbrace{\int_0^t dx}_{=x} =$$

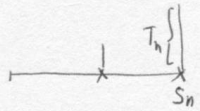
$$\lambda \int_0^t Q(dy) \cdot \underset{\substack{y \wedge t \\ \text{минимум}}}{y} + \int_t^\infty Q(dy) \cdot \underset{\substack{y \wedge t \\ \text{минимум}}}{t} = \lambda \int_0^\infty (y \wedge t)\, Q(dy)$$

Замечание: обозначение $M|G|\infty$ означает

- M – пуассоновск. процесс
- G (general) общее (произвольн) распределение T_n
- ∞ – кол-во приборов (или клиентов) в системе

<u>Теорема</u> $(S_n, T_n)_{n=1}^{\infty}$ – точечный процесс

$T_n \perp\!\!\!\perp S_n$



Тогда (S_n, T_n) – пространственный пуассоновск. процесс с мерой интенсивности $\nu \, mes \times Q$, где Q – распред. T_i

▷ $\mathcal{L}(f) = E\, e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n, T_n)}$

Если имеется измеримая ф-ция g

$E(g(\underset{\text{независ.}}{\xi, \eta}) \mid \xi = u) = E(g(u, \eta))$

Вычислим $E(e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n, T_n)} \mid S_1 = u_1, S_2 = u_2, \dots) =$

$E\, e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(u_n, T_n)} = (T_1, T_2, \dots$ – независ.$) = \prod_{n=1}^{\infty} E\, e^{-f(u_n, T_n)}$ $\textcircled{=}$

$E\, e^{-f(u, T_n)} = \int_{R_+} e^{-f(u,x)} Q(dx) = g(\underset{>0}{\overset{\le 1}{u}})$

$\textcircled{=} \prod_{n=1}^{\infty} g(u_n)$

Теперь заметим, что $E(g(\xi, \eta)) = E(E(g(\xi, \eta) \mid \xi))$

$\Rightarrow \mathcal{L}(f) = E \prod_{n=1}^{\infty} g(S_n) = E\, e^{-\sum_{n=1}^{\infty} (-\log g(S_n))} = E\, e^{-\sum_{n=1}^{\infty} h(S_n)}$,

где $h = -\log g \geq 0$

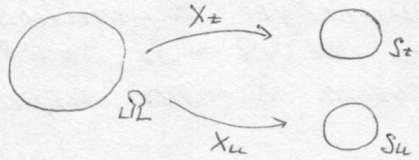
$= e^{\int_{R_+} (e^{-h(x)} - 1) \nu(dx)} =$

$= e^{\int_{R_+} (g(x) - 1) \nu(dx)} = e^{\int_{R_+} (\int_{R_+} e^{-f(x,y)} Q(dy) - 1) \nu(dx)} = e^{\int_{R_+ \times R_+} (e^{-f(x,y)} - 1) Q(dy) \nu(dx)}$

10. Теорема Колмогорова о согласованных распределениях, условиях согласованности на языке характеристических функций для действительных случайных процессов (док-во необходимости упомянутых условий)

$(S_t, \mathcal{B}_t)_{t\in T}$ $\quad X = \{X_t, t\in T\}$

$X_t : \Omega \to S_t, \quad X_t \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_t, \ t\in T$



Рассмотрим $\tau = (t_1, \dots, t_n)$, где $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$

Пусть $S_\tau = S_{t_1} \times \dots \times S_{t_n}$
$\mathcal{B}_\tau = \mathcal{B}_{t_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{t_n}$ $\quad (\underset{\in \mathcal{B}_{t_1}}{B_{t_1}} \times \dots \times \underset{\in \mathcal{B}_{t_n}}{B_{t_n}})$ – прямоугольник

$X_\tau : \Omega \to S_\tau \qquad X_\tau \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_\tau \quad (\Leftrightarrow X_{t_k} \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{t_k} \quad k = 1, \dots, n)$

$X_\tau = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$

$\xi \in \mathcal{F}/\mathcal{B}$

$P_\xi(B) := P(\xi^{-1}(B))$

Распределение X_τ обозначим P_τ $\quad P_{t_1,\dots,t_n}$ – упорядоченный набор

<u>Опр.</u> Семейство мер $P_{t_1,\dots,t_n}$, где $t_1, \dots, t_n \in T$ $(t_j \neq t_i, i \neq j)$, $n \in \mathbb{N}$ называется семейством конечномерных распределений процесса $X = \{X_t, t\in T\}$

Рассмотрим прямоугольник $B = B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}$

$P_{t_1,\dots,t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B) = P(X_{t_1} \in B_{t_1}, \dots, X_{t_n} \in B_{t_n}) =$
$= |\ \forall$ перестановки $(i_1, \dots, i_n)$ мн-ва $(1, \dots, n)\ | = P(X_{t_{i_1}} \in B_{t_{i_1}}, \dots, X_{t_{i_n}} \in B_{t_{i_n}}) =$
$= P_{t_{i_1},\dots,t_{i_n}}(B_{t_{i_1}}, \dots, B_{t_{i_n}})$

$P_{t_1,\dots,t_k,\dots,t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{k-1}} \times S_{t_k} \times B_{t_{k+1}} \times \dots \times B_{t_n}) = P_{t_1,\dots,t_{k-1},t_{k+1},\dots,t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{k-1}} \times B_{t_{k+1}} \times \dots$

т.к. $\{X_{t_k} \in S_{t_k}\} = \Omega \qquad A\Omega = A$

Условия согласованности мер

1) $\forall$ перестановки $(i_1, \dots, i_n)$ мн-ва $(1, \dots, n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$P_{t_1,\dots,t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = P_{t_{i_1},\dots,t_{i_n}}(B_{t_{i_1}} \times \dots \times B_{t_{i_n}})$

2) $P_{t_1,\dots,t_{k-1},t_k,t_{k+1},\dots,t_n}(B_{t_1} \times \dots B_{t_{k-1}} \times S_{t_k} \times B_{t_{k+1}} \times \dots \times B_{t_n}) =$
$= P_{t_1,\dots,t_{k-1},t_{k+1},\dots,t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{k-1}} \times B_{t_{k+1}} \times \dots \times B_{t_n})$

<u>Опр.</u> $(S, \mathcal{B})$ изоморфно $(V, \mathcal{A})$, если $\exists\, h: S \to V$, $h \in \mathcal{B}/\mathcal{A}$, $h^{-1}: V \to S$, $h^{-1} \in \mathcal{A}/\mathcal{B}$

<u>Опр.</u> Пространство $(S, \mathcal{B})$ наз. борелевским, если оно изоморфно борелевскому подмнож-ву отрезка $[0,1]$

<u>Теорема Колмогорова</u>

Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ – семейство борелевских пространств. Пусть $P_{t_1,\dots,t_n}$ меры на $(S_{t_1} \times \dots \times S_{t_n}, \mathcal{B}_{t_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{t_n})$, которые удовлетворяют условиям согласованности 1 и 2. Тогда на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ существует случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ такие, что $X_t: \Omega \to S_t$, $X_t \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_t$, $t \in T$ и конечномерн. распред. процесса X – это мера $P_{t_1,\dots,t_n}$

* В отличие от теоремы Л-У на пространство накладываются ограничения топологического характера

Пусть Q – мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Х.ф. меры Q:

$$\underset{\substack{\parallel \\ (u_1,\dots,u_n)}}{\varphi_Q(u)} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(u,x)} Q(dx)$$

Если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$: $\varphi_\xi(u) := \varphi_{P_\xi}(u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(u,x)} P_\xi(dx) = \int_\Omega e^{i(u,\xi)} dP = E e^{i(u,\xi)}$

Существует биективное соответствие $\varphi_\xi \longleftrightarrow P_\xi$

<u>Теорема</u> Пусть $\varphi_{t_1,\dots,t_n}$ – семейство х.ф. некоторых мер на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Тогда $\exists$ случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$, $X_t: \Omega \to \mathbb{R}$, $t \in T$, для которого х.ф. конечно-мерного распределения есть $\varphi_{t_1,\dots,t_n}$, в том и только том случае, когда:

1) $\varphi_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n) = \varphi_{t_{i_1},\dots,t_{i_n}}(u_{i_1},\dots,u_{i_n})$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall$ перестановки $(i_1,\dots,i_n)$
2) $\varphi_{t_1,\dots,t_k,\dots,t_n}(u_1,\dots,\underset{k}{0},\dots,u_n) = \varphi_{t_1,\dots,t_{k-1},t_{k+1},\dots,t_n}(u_1,\dots,u_{k-1},u_{k+1},\dots,u_n)$

Замечание: Если $X = \{X_t, t \in T\}$, где $T \subset \mathbb{R}$, то достаточно рассмотреть $P_{t_1,\dots,t_n}$, где $t_1 < \dots < t_n$

11. Теорема, дающая необходимость и достаточность условия существования процесса, для которого приращения имеют заданные характеристические функции. Следствие, показывающее существование пуассоновского процесса интенсивности λ, вводимого как определенный процесс с независимыми приращениями.

$X = \{X(t), t \geq 0\}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \; 0 \leq t_0 \leq t_1 < \ldots < t_n$

$X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ – независимы

<u>Теорема</u> Для того, чтобы существовал процесс $X = \{X(t), t \geq 0\}$ с независимыми приращениями такой, что х.ф. $X(t) - X(s)$ для $0 \leq s \leq t$ была $\varphi(s, t, \cdot)$ необходимо и достаточно $\forall \; 0 \leq s < u < t$ выполнялось

$$\varphi(s, t, v) = \varphi(s, u, v) \cdot \varphi(u, t, v) \quad \forall v \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

При этом начальное распределение процесса P_0 может быть выбрано любым.

▷ Необходимость условия очевидна, поскольку хар. функция суммы независ. случайных величин равна произведению хар. функций слагаемых.

Теперь пусть выполнено условие $(*)$. Допустим, что удалось построить некоторое вер. прост-во $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и искомый процесс X, причем $\mathrm{Law}(X_0 | P) = P_0$

Тогда х.ф. величины X_0 равна $\varphi_{P_0}(\lambda)$, а х.ф. $\xi = (X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ для $n \in \mathbb{N}$ и $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$

$$\varphi_\xi(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \varphi_{P_0}(\lambda_0)\, \varphi(t_0, t_1; \lambda_1) \cdots \varphi(t_{n-1}, t_n; \lambda_n)$$

Заметим, что
$$\begin{pmatrix} X_{t_0} \\ X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t_0} \\ X_{t_1} - X_{t_0} \\ \ldots \\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \end{pmatrix}$$

скалярн. произвед.

$$\Rightarrow \varphi_{A\xi}(\lambda) = E \exp(i \langle \lambda, A\xi \rangle) = E \exp(i \langle A^T \lambda, \xi \rangle) = \varphi_\xi(A^T \lambda)$$

$\Rightarrow$ при $n \in \mathbb{N}$ и $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ конечномерные распределения процесса X должны задаваться хар. функциями

$$\varphi_{t_0, t_1, \ldots, t_n}(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \varphi_\xi(A^T \lambda) = \varphi_{P_0}(\mu_0)\, \varphi(0, t_1; \mu_1) \ldots \varphi(t_{n-1}, t_n; \mu_n),$$

где $\mu_0 = \lambda_0 + \ldots + \lambda_n, \ldots, \mu_n = \lambda_n$

Кроме того должно выполняться $\varphi_{t_0}(\lambda_0) = \varphi_{P_0}(\lambda_0)$

$$\varphi_{t_1, \ldots, t_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \varphi_{t_0, t_1, \ldots, t_n}(0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Итак, предположив существование искомого процесса X, мы выяснили, какие х.ф. должны быть у его конечно-мерных распределений

Зная заданные ф-ции $\varphi_{P_0}(\cdot)$ и $\varphi(s, t, \cdot)$ $\quad 0 \leq s < t < \infty$ введем описанным выше способом х.ф. $\varphi_{t_0}, \varphi_{t_0, \ldots, t_n}, \varphi_{t_1}, \ldots, \varphi_{t_n}$

по теореме Колмогорова надо проверить условия симметричности и согласованности. Заметим, что первое условие проверять не нужно т.к. $t_1 < \ldots < t_n$ берутся упорядоченными.
Второе условие очевидно выполняется т.к.

$$E e^{i(\xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n)} \underset{u_k = 0}{=} E e^{i(\xi_1 u_1 + \ldots + \xi_{k-1} u_{k-1} + \xi_{k+1} u_{k+1} + \ldots \xi_n u_n)}$$

12. Модификация процесса. Пример процесса, у которого траектории разрывны п.н., но существует п.н. непрерывная модификация.

$X = \{X_t, t \geq 0\}$ $\qquad$ $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$

<u>Опр.</u> Процесс Y явл. модификацией процесса X, если $\forall t \in T$
$P(X_t = Y_t) = 1$

Пример: $X(t,\omega) = 0$, $t \in [0,1]$, $\omega \in [0,1]$ $\quad \mathcal{F} = \mathcal{B}[0,1]$

$$Y(t,\omega) = \begin{cases} 1, & t = \omega \\ 0, & t \neq \omega \end{cases}$$

все непр. траектории

все разрывн. траектории

X – есть непрерывна модификация Y т.к
$P(X(t) \neq Y(t)) = P(\{t\}) = 0$

13. Фильтрация, её расширение. Марковские моменты, примеры, σ-алгебра $\mathcal{F}_\tau$, где τ - марковский момент

<u>Опр.</u> Семейство σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$, где $T \subset \mathbb{R}$, называется <u>фильтрацией</u>, если $\forall\, s<t$, $s\in T$, $t\in T$ выполнено $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ - σ-алгебра пр-ва $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

<u>Естественной фильтрацией</u> процесса $X = \{X_t,\ t\in T\}$, $T\subset\mathbb{R}$, явл. семейство $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s,\ s\le t,\ s\in T\}$, $t\in T$

<u>Опр.</u> Отображение $\tau: T \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ наз. <u>марковским моментом</u> относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, если $\forall\, t\in T$ $\{\omega : \tau(\omega)\le t\}\in\mathcal{F}_t$

Марковский момент τ наз. <u>моментом остановки</u> если $\tau<\infty$ п.н.

Если τ - марковский момент, то $\forall\, t\in T$ $\{\tau = t\}\in\mathcal{F}_t$

$\{\tau=t\} = \{\tau\le t\}\setminus\{\tau<t\} = \{\tau\le t\}\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\tau\le t-1/k\}\in\mathcal{F}_t$

Если $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ τ - марковский момент $\Leftrightarrow$ $\forall\, n\in\mathbb{Z}_+$ $\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n$

$\Rightarrow$ $\{\tau=n\} = \{\tau\le n\}\setminus\{\tau\le n-1\}\in\mathcal{F}_n$

$\Leftarrow$ $\{\tau\le n\} = \bigcup_{i=1}^{n}\{\tau=i\}\in\mathcal{F}_n$

Пример: рассмотрим действительный процесс $X=\{X_n,\ n\in\mathbb{Z}_+\}$
Пусть $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, введем $\tau_B(\omega) := \inf\{n : X_n(\omega)\in B\}$
(если $X_n\notin B$ $\forall\, n=0,1,2,\dots$, то считаем $\tau=\infty$)
$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$. Тогда τ_B - марковский момент отн. фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$

Проверим что $\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n$ $\forall\, n\in\mathbb{Z}_+$

$\{\tau=0\} = \{X_0\in B\}\in\sigma\{X_0\} = \mathcal{F}_0$

$\{\tau=n\} = \{X_0\notin B, \dots, X_{n-1}\notin B,\ X_n\in B\}\in\sigma\{X_0, X_1, \dots, X_n\} = \mathcal{F}_n$ при $n\ge 1$

Пусть τ - марковский момент относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$
Определим σ-алгебру $\mathcal{F}_\tau := \{A\in\mathcal{F} : A\cap\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t\ \ \forall\, t\in T\}$
- это σ-алгебра событий, наблюдаемых до момента τ

Покажем, что $\mathcal{F}_\tau$ действительно явл. σ-алгеброй

1) $\Omega\in\mathcal{F}_\tau$ $\quad \Omega\cap\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t$

2) $A\in\mathcal{F}_\tau \Rightarrow \bar{A}\in\mathcal{F}_\tau$ $\quad A\cap\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t$
$\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t$ $\Rightarrow \bar{A}\cap\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t$

3) $\{A_i\}\in\mathcal{F}_\tau \Rightarrow \bigcap_i A_i\in\mathcal{F}_\tau$ $\quad A_i\cap\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t$
$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\cap\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t$

14. Строго марковское свойство процесса $X = \{X(t), t \geq 0\}$, имеющего независимые стационарные приращения

<u>Опр.</u> Процесс имеет стационарные приращения, если $\forall$ точек $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$
$\forall h: t_1, \ldots, t_n, t_1 + h, \ldots, t_n + h \in T$ выполнено

(*) $\mathrm{law}(X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) = \mathrm{law}(X_{t_1+h} - X_{t_0+h}, \ldots, X_{t_n+h} - X_{t_{n-1}+h})$

„law of probability" - распределение

Если процесс X имеет ещё и независимые приращения, то (*)
$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{law}(X_t - X_s) = \mathrm{law}(X_{t+h} - X_{s+h})$ $\forall s, t, s+h, t+h \in T$, $s < t$

<u>Задача</u> Доказать, что пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$ является процессом со стационарными независимыми приращениями

<u>Лемма</u> Пусть $\{X_t, t \geq 0\}$ - процесс с независимыми приращениями. Тогда $\forall$ константы $a > 0$ процесс $Z(t) := X(t+a) - X(a)$, $t \geq 0$ имеет независимые приращения и $\{Z(t), t > 0\}$ не зависит от $\mathcal{F}_a = \sigma\{X_s, s \leq a\}$

▷ Возьмём $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ и рассмотрим

$$\begin{array}{ccccc} Z(t_0), & Z(t_1) - Z(t_0), & \ldots, & Z(t_n) - Z(t_{n-1}) \\ \| & \| & & \| \\ X(t_0+a) - X(a), & X(t_1+a) - \cancel{X(a)} - X(t_0+a) + \cancel{X(a)}, & \ldots, & X(t_n+a) - X(t_{n-1}+a) \end{array}$$

Независимы т.к. $X(a) \perp X(t_0+a) - X(a) \perp \ldots \perp X(t_n+a) - X(t_{n-1}+a)$

σ-алгебра $\mathcal{F}_a$ порожд. π-системой событий (пересечение $\forall$ кол-ва событий принадлежит системе) $\{X_{s_1} \in B_1, \ldots, X_{s_m} \in B_m\}$
Поэтому достаточно проверить, что независимы векторы
$\xi = (X_{s_1}, \ldots, X_{s_m})$ $0 \leq s_1 < \ldots < s_m \leq a$ и $\eta = (Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n})$ $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$

$$\xi = \begin{pmatrix} X_{s_1} \\ X_{s_2} \\ \vdots \\ X_{s_{m-1}} \\ X_{s_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & & \\ 1 & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} X_{s_1} \\ X_{s_2} - X_{s_1} \\ \vdots \\ X_{s_{m-1}} - X_{s_{m-2}} \\ X_{s_m} - X_{s_{m-1}} \end{pmatrix}}_{\zeta}$$

$\zeta \perp\!\!\!\perp \eta$ т.к. X имеет независ. прир.
$f(\zeta) = \xi \perp\!\!\!\perp \eta$ ◁

<u>Теорема</u> Пусть $X = \{X_t, t \geq 0\}$ - процесс со стационарн. независ. приращениями такой, что п.н. его траектории непрерывн. справа. Пусть τ - момент остановки относительно естеств. фильтрации X. Введем

$$y(t, \omega) = \begin{cases} X(t + \tau(\omega), \omega) - X(\tau(\omega), \omega) \\ 0, \quad \tau(\omega) = \infty \end{cases}$$

$y_t = X(t + \tau) - X(\tau)$ $t \geq 0$

Тогда процесс $y = \{y_t, t \geq 0\} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_\tau$ и $\{y(t), t \geq 0\}$ имеет те же конечномерные распределения что и процесс $\{X(t) - X(0), t \geq 0\}$

▷ 1) Процесс Y корректно задан

(!) Считаем, что вероятностное пр-во $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ полно и <u>все</u> σ-алгебры расширены классом N - нулевых событий

$\sigma\{\mathcal{F}, N\} = \underset{A}{\underset{\cup}{\mathcal{F}}} \cup \underset{C}{\underset{\cup}{N}}$ Пусть $P(A)=0$, $C \subset A$ тогда $\overline{P}(C) := 0$

$P(A \cup C) = P(A)$

Без ограничения общности считаем, что $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{P})$ - расширен.

Если τ - марк. момент отн. $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ (все $\mathcal{F}_t$ расширены классом N) и $\alpha = \tau$ п.н., то α - марк. момент отн. $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$

Далее в теореме можем считать, что $\tau < \infty$ на Ω $(\alpha := \tau I\{\tau < \infty\})$

Введем $\tau_n := \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-n} I_{A_{n,k}}$, где $A_{n,1} = \{w : \tau(w) \le 2^{-n}\}$, $\dots$, $A_{n,k} = \{w : (k-1)2^{-n} < \tau(w) \le k 2^{-n}\}$, $k \ge 2$

Тогда $\tau_n \downarrow \tau$ на всем Ω

τ_n - марк. момент отн. $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$

т.к. $\{\tau_n \le t\} = \{\tau \le k 2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}} \in \mathcal{F}_t$, где $k = \sup\{r : r 2^{-n} \le t\}$

Траектории X п.н. непр. справа, поэтому п.н.

$X(t + \tau_n(w), w) \to X(t + \tau(w), w)$, $n \to \infty$ для канд. $t \ge 0$

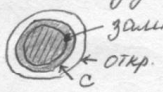
$\{w : X(t + \tau_n(w), w) \le z\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ \underset{\in \mathcal{F}}{X(t + k2^{-n}, w) \le z}, \underset{\in \mathcal{F}}{\tau_n = k 2^{-n}} \}$

Следовательно, $X(t+\tau_n)$ - случ. вел. $\forall n \xrightarrow{\text{п.н.}} X(t+\tau)$ - случ. вел.

Значит, мы доказали, что $Y(t) = X(t+\tau) - X(\tau)$ - случ. вел. для $\forall t \ge 0$

2) Докажем, что $Y \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_\tau$. Достаточно проверить, что $\forall A \in \mathcal{F}_\tau$ и вектора $\xi := (Y(t_1), \dots, Y(t_m))$, где $0 \le t_1 < \dots < t_m$ $P(A \cap \{\xi \in \underset{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)}{C}\}) = P(A) P(\xi \in C)$ (**)

(!) Вместо C достаточно рассмотреть замкнутое мн-во $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ (это следует из регулярности вероятностной меры)



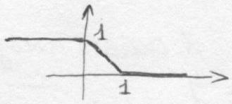
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \underset{\text{замкн.}}{B_\varepsilon} \subset C \quad \exists \underset{\text{откр.}}{G_\varepsilon} \supset C \quad P(G_\varepsilon \setminus B_\varepsilon) < \varepsilon$

Далее считаем, что $C = B$ замкнутое. Покажем, что (**) $\Leftrightarrow E I_A f(\xi) = E I_A E f(\xi)$ $\forall$ непр. и огран. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

($\Rightarrow$) очевидно из независимости случ. вел.

($\Leftarrow$) Пусть

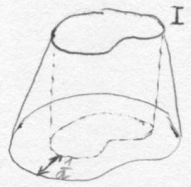
$$y(t) := \begin{cases} 1, & t \le 0 \\ 1-t, & t \in [0,1] \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$



Определим $\underset{\text{непрерывная ф-ция по } x}{\rho(x, B)} = \inf_{y \in B} \rho(x,y)$, где $\rho(x,y)$ - евклидово расстояние, т.к. B - замкнуто

Пусть $f_j(x) = y(j \cdot \rho(x, B))$

Тогда $f_j(x) \downarrow I_B(x)$ при $j \to \infty$



Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сх-ти

$$E I_A f_j(\xi) \to E I_A I\{\xi \in B\} = P(A \cap \{\xi \in B\})$$

$$\| $$

$$E I_A E f_j(\xi) \to E I_A \cdot E I\{\xi \in B\} = P(A) \cdot P(\xi \in B)$$

по теореме Лебега т.к. индикаторы ограничены единицей

Вернемся к док-ву теоремы: положим

$\xi_n := (X(t_1+\tau_n) - X(\tau_n), \dots, X(t_m+\tau_n) - X(\tau_n))$

$\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$ т.к. $\tau_n \downarrow \tau$ при $n \to \infty$

Следовательно, $E I_A f(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} E I_A f(\xi_n)$

Введем $\xi_{n,k} = (X(t_1 + k2^{-n}) - X(k\cdot 2^{-n}), \dots, X(t_m + k2^{-n}) - X(k2^{-n}))$

$A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\} = A \cap A_{n,k} = A \cap \{(k-1)2^{-n} < \tau \le k2^{-n}\} =$

$= A \cap \{\tau \le k2^{-n}\} \setminus A \cap \{\tau \le (k-1)2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}}$

По лемме $\xi_{n,k}$ не зависит от $\mathcal{F}_{k2^{-n}}$

Тогда

$E I_A f(\xi_n) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} E I_A f(\xi_n) I\{\tau_n = k2^{-n}\} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} E I(A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\} f(\xi_{n,k})$

$= \sum\limits_{k=1}^{\infty} E I(A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}) \cdot E f(\xi_{n,k}) \quad (=)$

Заметим, что $\xi_{n,k} \overset{law}{=} (X(t_1) - X(0), \dots, X(t_m) - X(0)) =: \gamma$

$(=) \; E f(\gamma) \sum\limits_{k=1}^{\infty} E I_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} = E f(\gamma) E I_A = E f(\gamma) P(A)$

Таким образом, $E I_A f(\xi) = E I_A E f(\gamma) \quad \forall A \in \mathcal{F}_\tau$

Тогда для $A = \Omega$ $\quad E f(\xi) = E f(\gamma)$

15. Конструкция винеровского процесса, использующая последовательность независимых стандартных гауссовских величин и функции Шаудера.

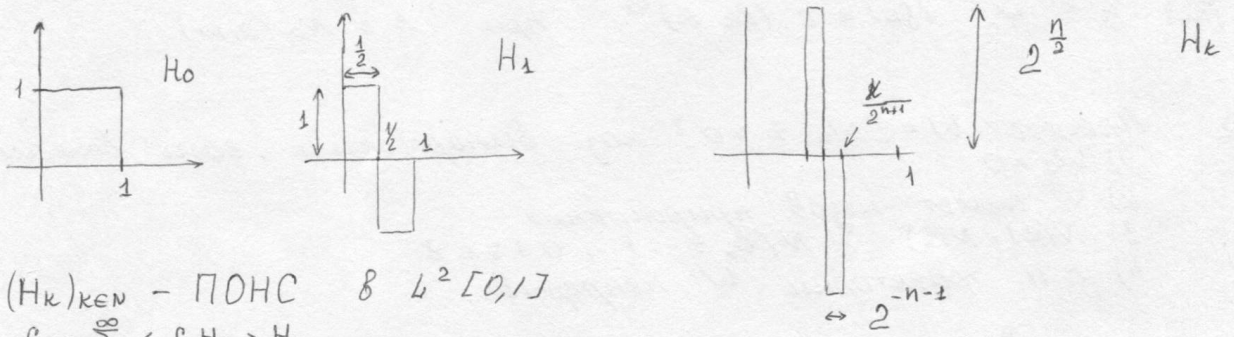
<u>Опр</u> Функции Хаара задаются формулой на отрезке $[0,1]$

$H_0 \equiv 1$

$H_1 = I_{[0,\frac{1}{2}]} - I_{[\frac{1}{2},1]}$

$$H_k(x) = 2^{\frac{n}{2}}\left(I_{[\frac{(2k-2)}{2^{n+1}},\ \frac{(2k-1)}{2^{n+1}}]}(x) - I_{[\frac{2k-1}{2^{n+1}},\ \frac{2k}{2^{n+1}}]}(x)\right)$$

для $2^n < k \le 2^{n+1}$



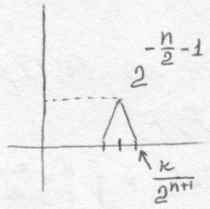
$(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ – ПОНС в $L^2[0,1]$

$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, H_k\rangle H_k$

$\langle f,g\rangle := \int_{[0,1]} f(t)g(t)\,dt$ мера Лебега

Тогда из равенства Парсеваля $\langle f,g\rangle = \sum_k \langle f, H_k\rangle \langle g, H_k\rangle$

<u>Опр.</u> Функции Шаудера $S_k(t) := \int_{[0,t]} H_k(u)\,du = \langle H_k, I_{[0,t]}\rangle$



<u>Лемма</u> Пусть $a_k = \underline{O}(k^{\varepsilon})$ при $k\to\infty$, где $\varepsilon\in(0,1/2)$
Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t)$ сходится равномерно на $[0,1]$ $\Rightarrow$ дает непрерывную ф-цию по теореме Вейерштрасса

▷ Достаточно показать, что хвосты $R_m := \sup_{t\in[0,1]} \sum_{k>2^m} |a_k| S_k(t) \to 0$ $m\to\infty$

$|a_k| \le ck^{\varepsilon}$ $\forall k\ge 1$ и некоторого $c>0$

$$\sum_{2^n<k\le 2^{n+1}} |a_k| S_k(t) \le c\cdot 2^{(n+1)\varepsilon} \sum_{2^n<k\le 2^{n+1}} S_k(t) \le c\,2^{(n+1)\varepsilon}\cdot 2^{-\frac{n}{2}-1} \le c\cdot 2^{\varepsilon - n(1/2-\varepsilon)}$$

т.к. S_k имеют непересекающиеся носители и $0\le S_k \le 2^{-\frac{n}{2}-1}$

$\Rightarrow$ т.к $\varepsilon < 1/2$ $R_m \le c\,2^{\varepsilon}\sum_{n\ge m} 2^{-n(1/2-\varepsilon)} \to 0$ при $m\to\infty$

т.к. хвосты оценены ф-цией не зависящей от t, то сходимость равномерна

Лемма Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ - сл. вел. на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\xi_k \sim N(0,1)$ $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall\ c > \sqrt{2}$ и почти всех ω $\exists\ N_0(c, \omega)$: $|\xi_k| \le c \cdot (\ln k)^{1/2}$ $\forall\ k \ge N_0(c,\omega)$

▷ Если $\xi \sim N(0,1)$, то

из интегрир. по частям

$$P(\xi \ge x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \le \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \forall\ x > 0$$

Следовательно, $P(|\xi| \ge x) \le \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\sum_{k=2}^\infty P(|\xi_k| \ge c(\ln k)^{1/2}) \le \sum_{k=2}^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{c(\ln k)^{1/2}} e^{-\frac{c^2}{2}\ln k} \le \tilde{c} \sum_{k=1}^\infty |k|^{-\frac{c^2}{2}} < \infty$$

По лемме Бореля - Кантелли

Если $\sum_k P(A_k) < \infty \Rightarrow P(A_n\ \text{б.ч.}) = 0 \Rightarrow$

для п.в. ω $|\xi_k| < c(\ln k)^{1/2}$ при $k \ge N_0(c,\omega)$ ◁

Опр. Процесс $W = \{W_t, t \ge 0\}$ наз. винеровским, если выполнено

1) $W_0 = 0$
2) W имеет незав. приращения
3) $N(t) - N(s) \sim N(0, t-s)$, $0 \le s \le t$
4) п.н. траектории W непрерывн.

Построим явным образом процесс

Теорема Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ н.о.р. $\xi_k \sim N(0,1)$, $k \in \mathbb{N}$

Введем $W(t,\omega) := \sum_{k=1}^\infty \xi_k(\omega) S_k(t)$ $\quad t \in [0,1]$

Тогда $\{W(t), t \in [0,1]\}$ обладает свойствами 1-4

▷ • $W(0) = 0$ п.н. т.к. $S_k(0) = 0$

• Проверим независимость приращений и непрерывн. траекторий п.н.

Согласно лемме

$\sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t) \xrightarrow{\text{п.н.}} W(t)$ при $n \to \infty$, причем сходимость на $[0,1]$ равномерн.

Заметим, что $\sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t)$ имеют предел в $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$E\left|\sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t) - \sum_{k=1}^m \xi_k S_k(t)\right|^2 = E\left|\sum_{k=m+1}^n \xi_k S_k(t)\right|^2 = \left| \text{т.к. } E\xi_k\xi_l = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k \ne l \end{cases} \right| =$$

$$= \sum_{k=m+1}^n S_k^2(t) \le 2^{-m-1} \to 0$$

$\Rightarrow$ получили фундаментальную последовательность в плотном линеал-ве $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t) =: V(t)$ в смысле $L^2(\Omega)$

Таким образом $V(t) = W(t)$ п.н., т.е. $\sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t) \to W(t)$ п.н. в $L^2(\Omega)$

$$\left(\begin{array}{l} \eta_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \eta \Rightarrow \eta_n \xrightarrow{P} \eta \\ \eta_n \xrightarrow{L^2} \xi \Rightarrow \eta_n \xrightarrow{P} \xi \end{array} \right.$$ предел $\exists! \Rightarrow \eta = \xi$ п.н.)

Рассмотрим вектор приращений

$$\left(\sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t_0), \dots, \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t_{j+1}) - \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t_j), \dots, \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t_m) - \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t_{m-1})\right) =: U_n$$

$$\left(\sum_{k=1}^\infty \xi_k S_k(t_0), \dots, \sum_{k=1}^\infty \xi_k S_k(t_{j+1}) - \sum_{k=1}^\infty \xi_k S_k(t_j), \dots, \sum_{k=1}^\infty \xi_k S_k(t_m) - \sum_{k=1}^\infty \xi_k S_k(t_{m-1})\right) =: U$$

$U_n \xrightarrow{L^2} U$, $U_n \xrightarrow{\text{п.н.}} U$ $\quad U_n$ - гауссовский как лин. преобр. гаус. вектора

Рассмотрим характеристическую ф-цию

$$\varphi_{U_n}(\underset{\lambda_1, \dots, \lambda_m}{\lambda}) = e^{i(\lambda, \underset{0}{a}) - \frac{1}{2}(C\lambda, \lambda)} = e^{-\frac{1}{2}(C\lambda, \lambda)}$$

т.к. $EU_n = 0$

$$\operatorname{cov}(U_j^n, U_r^n) = \sum_{k=1}^{n} S_k(t_{j+1}) S_k(t_{r+1}) - \sum_{k=1}^{n} S_k(t_{j+1}) S_k(t_r) - \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_j) S_k(t_{r+1})$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} S_k(t_j) S_k(t_r) \longrightarrow$$

т.к. векторы сходятся в L^2 и в силу непрерывности скалярного произвед. скалярное произведение тоже сходится

$$\longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_{j+1}) S_k(t_{r+1}) - \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_{j+1}) S_k(t_r) - \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_j) S_k(t_{r+1}) + \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_j) S_k(t_r)$$
$$= \min(t_{j+1}, t_{r+1}) - \min(t_{j+1}, t_r) - \min(t_j, t_{r+1}) + \min(t_j, t_r) = 0$$
если $j \neq r$

т.к. $\sum_{k=1}^{\infty} S_k(t) S_k(v) =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \langle H_k, I_{[0,t]} \rangle \langle H_k, I_{[0,v]} \rangle =$ | равенство Парсеваля | $=$

$= \langle I_{[0,t]}, I_{[0,v]} \rangle = \min(t, v)$

$\Rightarrow$ матрица ковариаций диагональна, а для гауссовских векторов это означает независимость компонент

$\Rightarrow$ получили что компоненты т.е приращения независимы и $U_j \sim N(0, t_{j+1} - t_j)$

Построение $W(t)$ на $[0, \infty)$

Для $j \in \mathbb{N}$ берем $\xi_1^j, \xi_2^j \ldots$ н.о.р. $N(0,1)$ и строим

$W^j(t, w) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^j(w) S_k(t)$

Дальше непрерывно склеиваем эти процессы

$W(t) := W_j(t) + W(j-1) \qquad j \in \mathbb{N}$

$W_1(t) = W^1 \qquad t \in [0,1]$

$W_2(t) = W^1(1) + W^2(t-1) \qquad t \in [1,2]$

$W_3(t) = \quad + W_2(1) + W^3(t-2) \qquad t \in [2,3]$

16. Недифференцируемость траекторий винеровского процесса (теорема Винера-Зигмунда-Пэли)

<u>Теорема</u> С вероятностью 1 траектории броуновского движения $W := \{W(t), t \geq 0\}$ не дифференцируемы ни в одной точке $R_+ = [0, \infty)$

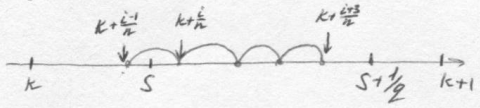
▷ Рассмотрим $[k, k+1)$, $k = 0, 1, \ldots$. Допустим, что $W(\cdot, \omega)$ дифференц. в точке $s \in [k, k+1)$. Тогда $\exists$ правая производная $W(\cdot, \omega)$ в точке s.

Тогда $\exists\ l, q \in \mathbb{N}$: $|W(s,\omega) - W(t,\omega)| \leq \overset{\text{огранич.}}{l}(t-s)$, причем $|t-s| < \frac{1}{q}$
$q = q(s,\omega)$, $l = l(s,\omega)$

Фиксируем $k \in \mathbb{Z}_+$
Введем событие $A_{l,n,i} = \left\{ \omega : \left|W\left(k + \frac{j+1}{n}, \omega\right) - W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right)\right| \leq \frac{7l}{n}, \ j = i, i+1, i+2 \right\}$

Пусть $\frac{4}{n} < \frac{1}{q}$, т.е. $n > 4q$ и i выбрано так, что:

$$k + \frac{i-1}{n} < s \leq k + \frac{i}{n}$$



$\exists\ i = i(s,n)$ т.ч. ω - точка дифф-ти W в точке s

Если $n > 4q$, то

$$\left|W\left(k + \frac{j+1}{n}, \omega\right) - W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right)\right| \leq \overbrace{\left|W(s,\omega) - W\left(k + \frac{j+1}{n}, \omega\right)\right|}^{\frac{4l}{n}} + \underbrace{\left|W(s,\omega) - W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right)\right|}_{\frac{3l}{n}} = \frac{7l}{n}$$

$\Rightarrow$ если $\omega \in D_k$ - точки дифференцируемости траектории W на $[k, k+1]$, то

$$D_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcap_{n > 4q} \bigcup_{i=1}^{n} A_{l,n,i}$$

Заметим, что $\forall$ последовательности событий $B_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \lim_{n\to\infty} \inf P(B_n)$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n > 4q} \bigcup_{i=1}^{n} A_{l,n,i}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \inf P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{l,n,i}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \sum_{i=1}^{n} P(A_{l,n,i}) \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \inf n \left(P\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right| < \frac{7l}{n}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} \inf n \left(P\left(|W(1)| \leq \frac{7l}{\sqrt{n}}\right)\right)^3 \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \inf n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{14l}{\sqrt{n}}\right)^3 = 0$$

т.к. $P(|W(1)| \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2z$

$\Rightarrow P(D_k) = 0 \quad \forall\ k = 0, 1, 2, \ldots$

Если D - мн-во точек ω, для которых $W(\cdot, \omega)$ дифференцируема хотя бы в одной точке $s \in [0, \infty)$, то $D = \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k$
$\Rightarrow P(D) = 0$

17. Принцип отражения.

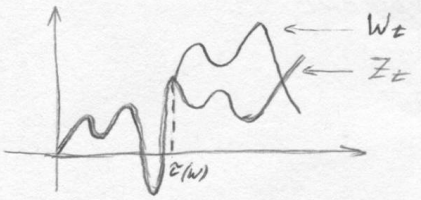
Теорема Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ - винеровский процесс и τ - момент остановки относительно естественной фильтрации W

Введем процесс Z

$$Z(t,\omega) = \begin{cases} W(t,\omega) & t \leq \tau(\omega) \\ 2W(\tau(\omega),\omega) - W(t,\omega) & t > \tau(\omega) \end{cases}$$

Если $\tau(\omega) = \infty$, то $Z(t,\omega) \equiv 0$

Тогда $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ - винеровский процесс



▷ Для всех $t \geq 0$ и $\omega \in \Omega$

$Z(t,\omega) = W(t,\omega) I_{\{t \leq \tau(\omega)\}} + (2W(\tau(\omega),\omega) - W(t,\omega)) I_{\{t > \tau(\omega)\}}$

$\Rightarrow Z(t,\cdot)$ - случайная величина при каждом $t \geq 0$

Траектории $Z(\cdot,\omega)$ непрерывны п.н., поэтому $Z(\cdot,\omega)$ есть случайный элемент со значениями в польском пространстве $C_0(\mathbb{R}^+) = \{f \in C(\mathbb{R}^+), f(0)=0\}$, снабженном метрикой равномерной сходимости на компактах:

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\sup_{t\in[0,n]} |f(t)-g(t)|}{1+\sup_{t\in[0,n]}|f(t)-g(t)|}, \quad f,g \in C_0[0,\infty)$$

Введем 2 вспомогательных процесса

$X(t,\omega) = W(t \wedge \tau(\omega), \omega)$

$Y(t,\omega) = W(t+\tau, \omega) - W(\tau)$

Y по строго марковскому свойству явл. винеровским процессом

Определим для $b \in \mathbb{R}_+$, $f,g \in C_0(\mathbb{R}_+)$ отображение (склейку)

$h(b,f,g)(t) := f(t) I_{[0,b]}(t) + (f(b) + g(t-b)) I_{(b,\infty)}$

h - непрерывное отображение ← ?

$\forall \omega \in \{\tau < \infty\}$

$h(\tau(\omega), X, Y) = W$, $\quad h(\tau(\omega), X, -Y) = Z$

Т.к. h - непрерывное отображение, то осталось показать, что $(\tau, X, Y) \overset{law}{=} (\tau, X, -Y)$

Докажем, что (τ, X) - $\mathcal{F}_\tau$ - измерим. Надо проверить X $\mathcal{F}_\tau$-измеримость. Для этого построим последовательность сходящихся к X $\mathcal{F}_\tau$-измеримых случайных элементов X_n. Введем

$a_n(\omega) := \sum_{k=0}^{\infty} k 2^{-n} I_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n})}(\tau(\omega)) \nearrow \tau(\omega)$

$X_n(\omega) := W(\min(t, a_n(\omega)), \omega)$ $\quad X_n$ - измеримы $\Rightarrow X$ измерим

$\Rightarrow (\tau, X)$ - $\mathcal{F}_\tau$-измерим, $Y \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_\tau$ по строго марковскому свойству

$\Rightarrow law(\tau, X, Y) = law(\tau, X) \times law(Y) = law(\tau, X) \times law(W)$

$\qquad\qquad\qquad

Замечание: h - отображение $R_+ \times C_0[0,\infty) \times C_0[0,\infty) \longrightarrow C_0[0,\infty)$

на произведении трех пространств зададим метрику $\tilde{\rho}$

$\tilde{\rho} = \max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$

евклидова метрика на R_+ $\quad \rho \quad \rho$

если возьмём $\tilde{b}, \tilde{f}, \tilde{g}$ т.ч. $\tilde{\rho}((b,f,g),(\tilde{b},\tilde{f},\tilde{g})) < \delta$

$\Rightarrow |h(b,f,g) - h(\tilde{b},\tilde{f},\tilde{g})| < \varepsilon$

сходимость равномерна на каждом компакте

$\Rightarrow$ на отрезке, содержащем $b, \tilde{b}$ сходимость равномерн

$\Rightarrow$ отображение h непрерывно

17. Теорема Башелье.

<u>Лемма</u> Пусть W - винеровский процесс, тогда $\forall\ t, x, y \geq 0$ положим $\tau_y := \inf\{t \geq 0 : W_t = y\}$. Тогда
$$P(\tau_y \leq t,\ W_t \leq y - x) = P(W_t \geq y + x)$$

▷ При $y = 0$ утв. очевидно выполняется. Далее считаем, что $y > 0$

τ_y - момент остановки отн. естественной фильтрации

Заметим, что $\{\tau_y \leq t\} = \{\sup\limits_{s \in [0,t]} W_s \geq y\}$

Введем процесс Z - отраженное броуновское движение, τ_y - момент отражения

Тогда пусть $\sigma_y = \inf\{s \geq 0;\ Z_s = y\} \Rightarrow \tau_y \equiv \sigma_y$

$$P(\tau_y \leq t,\ W \in B) = P\left(\sup_{s \in [0,t]} W(s) \geq y,\ W \in B\right) = P(W \in \tilde{B} \cap B)$$
$\forall\ B \in \mathcal{B}(C[0,\infty))$, $t \geq 0$, где $\tilde{B} = \{f \in C[0,\infty) : \sup\limits_{s \in [0,t]} f(s) \geq y\}$

По теореме об остановке аналогично получим
$$P(\sigma_y \leq t,\ Z \in B) = P(Z \in \tilde{B} \cap B) = P(W \in \tilde{B} \cap B)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \operatorname{law}(\tau_y, W) = \operatorname{law}(\sigma_y, Z) \\ Z(t,\omega) = 2W(\tau_y(\omega), \omega) - W(t,\omega) = 2y - W(t,\omega) \text{ для } t \geq \sigma_y(\omega) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$P(\tau_y \leq t,\ W(t) < y - x) = P(\sigma_y \leq t,\ Z(t) < y - x) = P(\sigma_y \leq t,\ W(t) > y + x) =$$
$$P(\tau_y \leq t,\ W(t) > y + x) = P(W(t) > y + x)$$ ◁

<u>Теорема Башелье</u>

Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ - винеровский процесс. Тогда
$$P\left(\sup_{s \in [0,t]} W_s \geq y\right) = 2P(W_t \geq y) = P(|W_t| \geq y)$$

▷ В предыдущей лемме возьмём $x = 0$
$$P(\tau_y \leq t,\ W(t) < y) = P\left(\sup_{s \in [0,t]} W_s \geq y,\ W(t) < y\right) = P(W(t) \geq y)$$

$\Rightarrow$
$$P\left(\sup_{s \in [0,t]} W_s \geq y\right) = P\left(\sup_{s \in [0,t]} W_s \geq y,\ W(t) < y\right) + P\left(\sup_{s \in [0,t]} W_s \geq y,\ W(t) \geq y\right) =$$
$$P(W(t) \geq y) + P(W(t) \geq y) = 2P(W(t) \geq y)$$

18. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Определения и примеры. Лемма о получении субмартингала из мартингала с помощью выпуклой функции

<u>Опр.</u> Процесс $X = \{X_t, t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}$ наз. <u>мартингалом</u> относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, если

1) $X_t \in \mathcal{F}_t \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $t \in T$
2) $E|X_t| < \infty$, $t \in T$
3) $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ п.н. $s \le t$ $s, t \in T$

X наз. <u>субмартингалом</u> отн. $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, если выполнено 1, 2 и 3'

3') $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \ge X_s$ п.н. $s \le t$ $s, t \in T$

X наз. <u>супермартингалом</u> отн. $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, если выполнено 1, 2 и 3''

3'') $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) < X_s$ п.н $s \le t$ $s, t \in T$

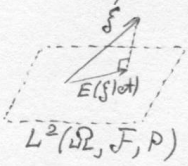
Напоминание: Условное мат. ожидание

$E(\xi \mid \mathcal{A}) := \eta$, где $\mathcal{A}$ - σ-алгебра, $\subset \mathcal{F}$; $E|\xi| < \infty$ (интегрируема)

Если выполняется

1) $\eta \in \mathcal{A} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$
2) $\forall A \in \mathcal{A}$ $E\eta I_A = E\xi I_A$

По теореме Радона-Никодима η $\exists$ и определена однозначно п.н.



Если $E\xi^2 < \infty$, то $E(\xi \mid \mathcal{A}) = \underset{L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)}{Pr}\, \xi$

* Будем развивать теорию для функций, у которых $\exists$ только 1-ый момент

Пример 1. Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ - процесс с независ. приращениями $\mathcal{F}_t := \sigma\{X_s, s \le t, s \in T, t \in T\}$, тогда X явл. мартингалом отн. $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ $\iff$ когда $EX_t = EX_s = const$ $\forall s, t \in T$

Действительно, $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = E(X_t - X_s + X_s \mid \mathcal{F}_s) = E(X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s) + E(X_s \mid \mathcal{F}_s) = E(X_t - X_s) + X_s = X_s + EX_t - EX_s = 0$ $\forall s, t \in T$

Следовательно:
- винеровский процесс $W = \{W_t, t \ge 0\}$ - мартингал относительно естественной фильтрации
- пуассоновский процесс не явл. мартингалом относительно естественной фильтрации
- $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, ξ_i - независимы, $E|\xi_i| < \infty$. S_n, $n \ge 1$ - мартингал отн. естественной фильтрации $\iff$ $E\xi_2 = E\xi_3 = \dots = 0$
- если $\xi_1, \xi_2, \dots$ - н.о.р., то S_n - мартингал $\Rightarrow$ $E\xi_n = 0$

Пример 2. (мартингал Леви)

Пусть $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, $T \subset \mathbb{R}$ - фильтрация, $E|\xi| < \infty$

Тогда $X_t := E(\xi \mid \mathcal{F}_t)$, $t \in T$ - мартингал отн. $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$

1) $X_t \in \mathcal{F}_t \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$

2) $E|X_t| < \infty$ $E(E(|\xi| \mid \mathcal{A})) = E|\xi| < \infty$

3) $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \overset{?}{=} X_s$

маленький сигм большого

$E(E(\xi \mid \mathcal{A}_1) \mid \mathcal{A}_2) = E(\xi \mid \mathcal{A}_2)$, если $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$

Неравенство Йенсена

$h(E(\xi \mid \mathcal{A})) \leq E(h(\xi) \mid \mathcal{A})$, если h - выпуклая

Пример 3 Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ - н.о.р $E\xi_k = 1$, $k \in \mathbb{N}$

$X_n := \xi_1 \ldots \xi_n$ $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$

Замечание: Если $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ - мартингал, то $\Longleftrightarrow E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$

19. Предсказуемые процессы. Разложение Дуба.

<u>Теорема Дуба</u>

Пусть $(X_n)_{n\geq 0}$ – случайный процесс, т.ч. $E|X_n| < \infty$ $\forall n$
$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ – фильтрация, причем $X_n \in \mathcal{F}_n / \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда
$\boxed{X = M + A \quad (*)}$, где $M = (M_n)_{n\geq 0}$ – мартингал относительно $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ $A = (A_n)_{n\geq 0}$ – предсказуемый процесс (A_n измеримы относ. $\mathcal{F}_{n-1}$ ($\mathcal{F}_{-1} := \{\emptyset, \Omega\}$)), такой, что $A_0 = 0$
$X_n = M_n + A_n \quad n \geq 0$

▷ Пусть справедливо $(*)$. Положим $\Delta X_n := X_n - X_{n-1}$
Тогда $\Delta X_n = \Delta M_n + \Delta A_n \Rightarrow \Delta A_n = \Delta X_n - \Delta M_n$

$$\underbrace{E(\Delta A_n \mid \mathcal{F}_{n-1})}_{\Delta A_n} = E(\Delta X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) - \underbrace{E(\Delta M_n \mid \mathcal{F}_{n-1})}_{E(M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} - M_{n-1} = 0}$$

$\Rightarrow \Delta A_n = E(\Delta X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$
$A_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k \Rightarrow A_n = \sum_{k=1}^{n} E(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1})$

Теперь задан процесс X_n
Положим $A_n = \sum_{k=1}^{n} E(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1})$, $n \geq 1$, $A_0 \equiv 0$
Тогда $(A_n)_{n\geq 0}$ – предсказуемый процесс
$M_n = X_n - A_n \Rightarrow \Delta M_n = \Delta X_n - \Delta A_n = \Delta X_n - E(\Delta X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$
$\Rightarrow E(\Delta M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(\Delta X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) - E(\Delta X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0$
$\Rightarrow (M_n)_{n\geq 0}$ – мартингал

Замечание: можно считать, что $A_0 = 0$ п.н., если все σ-алгебры пополнены классом N – нулевых событий
Если $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – мартингал, то $(X_t, \overline{\mathcal{F}_t})_{t\in T}$ точки непрерывности, где $\overline{\mathcal{F}_t} = \sigma\{\mathcal{F}_t, N\}$

20. Дискретный вариант формулы Танаки.

<u>Лемма</u> Пусть $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ - мартингал, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - выпуклая ф-ция
Тогда $(h(X_n), \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ - субмартингал

▷ По неравенству Йенсена:
$E(h(X_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}) \geq h(E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})) = h(X_{n-1})$ ◁

<u>Формула Танаки</u>

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - н.о.р. случ. вел., т.ч. $P(\xi_k = -1) = P(\xi_k = 1) = \frac{1}{2}$
Построим процесс $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, $S_0 := 0$
Тогда S_n - мартингал и $\Rightarrow (|S_n|)_{n\geq 0}$ - субмарт. отн. $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$
Найдем разложение Дуба для этой последовательности
$A_n = \sum_{k=1}^{n} E(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1})$, где $X_k = |S_k|$ по доказанному ранее

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} E(|S_k| - |S_{k-1}| \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \left(E(|S_k| \mid \mathcal{F}_{k-1}) - |S_{k-1}|\right)$$

$E(|S_k| \mid \mathcal{F}_{k-1}) = E(|S_{k-1} + \xi_k| \mid \mathcal{F}_{k-1}) = E(|S_{k-1} + \xi_k| \cdot I\{S_{k-1} > 0\} +$
$|S_{k-1} + \xi_k| \cdot I\{S_{k-1} = 0\} + |S_{k-1} + \xi_k| \cdot I\{S_{k-1} < 0\} \mid \mathcal{F}_{k-1}) =$ / по линейности УМО /
$E(|S_{k-1} + \xi_k| \cdot I\{S_{k-1} > 0\} \mid \mathcal{F}_{k-1}) + E(|S_{k-1} + \xi_k| \cdot I\{S_{k-1} = 0\} \mid \mathcal{F}_{k-1}) +$
$E(|S_{k-1} + \xi_k| \cdot I\{S_{k-1} < 0\} \mid \mathcal{F}_{k-1}) =$
$I\{S_{k-1} > 0\} \cdot E(S_{k-1} + \xi_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) + I\{S_{k-1} = 0\} \cdot E(|\xi_k| \mid \mathcal{F}_{k-1}) - I\{S_{k-1} < 0\} \cdot E(S_{k-1} + \xi_k \mid \mathcal{F}_{k-1})$
$= I\{S_{k-1} > 0\} \cdot S_{k-1} + I\{S_{k-1} = 0\} - I\{S_{k-1} < 0\} \cdot S_{k-1} = |S_{k-1}| + I\{S_{k-1} = 0\}$

$$\Rightarrow A_n = \sum_{k=1}^{n} I\{S_{k-1} = 0\}$$

$$M_n = X_n - A_n = \sum_{k=1}^{n} (|S_k| - |S_{k-1}| - I\{S_{k-1} = 0\}) = \sum_{k=1}^{n} (|S_{k-1} + \xi_k| - |S_{k-1}| - I\{S_{k-1} = 0\}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (\xi_k \cdot I\{S_{k-1} > 0\} - \xi_k \cdot I\{S_{k-1} < 0\} + |\xi_k| \cdot I\{S_{k-1} = 0\} - I\{S_{k-1} = 0\}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (\xi_k \cdot I\{S_{k-1} > 0\} - \xi_k \cdot I\{S_{k-1} < 0\}) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \cdot \operatorname{sign} S_{k-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{|S_n|}_{X_n} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} I\{S_{k-1} = 0\}}_{A_n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \Delta S_k \cdot \operatorname{sign} S_{k-1}}_{M_n}$$

<u>Следствие</u>: Обозначим через $L_n(0)$ число нулей последовательности $(S_k)_{0\leq k\leq n}$
$L_n(0) = A_n$. Верно: $EL_n(0) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi} n}$, $n \to \infty$

▷ $EM_n = 0 \Rightarrow EL_n(0) = EA_n = E|S_n|$

$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{law} y \sim N(0,1)$ и т.к. $|\cdot|$ - непр. ф-ция $\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{law} |y|$
В общем случае $\xi_n \xrightarrow{law} \xi \not\Rightarrow E\xi_n \to E\xi$ $n \to \infty$
Для сходимости М.О. нужно проверить равномерную интегрируемость (ξ_n)
т.е. найти $\delta > 0$ т.ч. $\sup_n E|\xi_n|^{1+\delta} < \infty$

Проверим для $\delta = 1$
$E\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^2 = E\frac{S_n^2}{n} = \frac{DS_n}{n} = \frac{n D\xi_1}{n} = 1 < \infty \Rightarrow E\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \to E|y| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ $n \to \infty$

$\Rightarrow EL_n(0) \to \sqrt{\frac{2}{\pi} n}$

21. Теорема Дуба об остановке.

<u>Теорема Дуба об остановке</u>

Пусть X_n измерима относительно $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ (- фильтрация). $E|X_n|<\infty$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $(X_n, \mathcal{F}_n)$ - мартингал

2) $\forall$ моментов остановки $0\leq\sigma\leq\tau\leq m$, $m\in\mathbb{N}$ - фиксировано

$E(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$

▷ $1\to 2$: Пусть $(X_n, \mathcal{F}_n)$ - мартингал

$E|X_\tau| = \sum_{k=0}^{m} |X_\tau|\cdot I\{\tau=k\} \leq \sum_{k=0}^{m} E|X_n| < \infty \Rightarrow$ УМО корректно задано

Надо проверить, что а) X_σ - $\mathcal{F}_\sigma$ - измерима

б) $\forall A\in\mathcal{A}$ $E X_\sigma I_A = E X_\tau I_A$

а) $\{X_\sigma \overset{\text{борел.}}{\in} B\} \cap \{\sigma\leq k\} \overset{?}{\in} \mathcal{F}_k$

$\overset{\shortparallel}{\bigcup_{r=0}^{m} \{X_\sigma\in B\}\cap\{\sigma=r\}\cap\{\sigma\leq k\}} = \bigcup_{r=0}^{m\wedge k} \{\underbrace{X_r}_{\in\mathcal{F}_r}\in B\}\cap\{\underbrace{\sigma=r}_{\in\mathcal{F}_r}\} \in \mathcal{F}_{m\wedge k}\subset\mathcal{F}_k$

б) $\sigma\leq\tau \Rightarrow I\{\sigma\leq\tau\} \overset{\text{п.н.}}{=} 1$

$E X_\sigma I_A = E X_\sigma I_A I\{\sigma\leq\tau\} = \sum_{k=0}^{m} E X_\sigma\cdot I\{\sigma=k\}\cdot I_A\cdot I\{\sigma\leq\tau\} = |A\cap\overset{\in\mathcal{F}_k}{\{\sigma=k\}}=B$

$= \sum_{k=0}^{m} E X_k I_{B_k}\cdot I\{\tau\geq k\} = \sum_{k=0}^{m} E X_k I_{B_k}(I\{\tau=k\} + I\{\tau\geq k+1\}) =$

$= \sum_{k=0}^{m} E X_k I_{B_k} I\{\tau=k\} + \sum_{k=0}^{m} E X_k I_{B_k} I\{\tau\geq k+1\} = \sum_{k=0}^{m} E X_k I_{B_k} I\{\tau=k\} +$

$+ \sum_{k=0}^{m} E(E(X_{k+1}\mid\mathcal{F}_k)\cdot I_{B_k}\cdot I\{\tau\geq k+1\}) =$ / т.к. $\{\tau\geq k+1\} = \Omega\setminus\{\tau\leq k\}\in\mathcal{F}_k$ /

$= \sum_{k=0}^{m} E X_k I_{B_k} I\{\tau=k\} + \sum_{k=0}^{m} E(E(X_{k+1} I_{B_k} I\{\tau\geq k+1\}\mid\mathcal{F}_k)) =$

$= \sum_{k=0}^{m} E X_k I_{B_k} I\{\tau=k\} + \sum_{k=0}^{m} E(X_{k+1} I_{B_k} I\{\tau\geq k+1\})$

$\Rightarrow E X_\sigma I_A = \sum_{k=0}^{m} E X_k I_{B_k} I\{\tau\geq k\} = \sum_{k=0}^{m} E X_k I_{B_k}(I\{\tau=k\}+\ldots+I\{\tau=m\}) =$

$= \sum_{k=0}^{m} E X_\tau I_{B_k} I\{\tau\geq k\} = \sum_{k=0}^{m} E X_\tau I_A I\{\sigma=k\} I\{\tau\geq k\} = E X_\tau I_A I\{\tau\geq\sigma\} =$

$= E X_\tau I_A$

$2\to 1$: Пусть известно, что $\forall$ моментов остановки $\sigma\leq\tau\leq m$ $E(X_\tau\mid\mathcal{F}_\sigma)=X_\sigma$

Проверим 3 свойство мартингала. Возьмем $i<j$ $\sigma\equiv i$, $\tau\equiv j$

$\mathcal{F}_\sigma\equiv\mathcal{F}_i$, $\mathcal{F}_\tau\equiv\mathcal{F}_j$ $\Rightarrow$ $(X_n)_{n\geq 0}$ - мартингал

<u>Следствие</u> Пусть выполнены условия теоремы Дуба, тогда для любого ограниченного марковского момента $\tau\leq m$, тогда $EX_\tau = EX_0$

<u>Следствие</u> Пусть τ - момент остановки. Пусть $|X_{\tau\wedge n}|\leq C$ $\forall n\geq 0$, тогда $EX_\tau = EX_0$

▷ $X_{\tau\wedge n}\to X_\tau$ п.н. $|X_{\tau\wedge n}|\leq C$ (п.н.)

По теореме Лебега $\exists$ EX_τ

$EX_0 = EX_{\tau\wedge n}\to EX_\tau$ $n\to\infty$

т.к. $\tau\wedge n$ - марковский момент

22. Задача о разорении игрока.

<u>Первое тождество Вальда</u>

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ - н.о.р. случ. вел., $E|\xi_1| < \infty$. τ - марковский момент относительно естественной фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $E\tau < \infty$
Тогда $E\left(\sum_{i=1}^{\tau} \xi_i\right) = E\xi_1 \cdot E\tau$

▷ $\sum_{i=1}^{\tau} \xi_i = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k I\{\tau \geq k\}$, $\{\tau \geq k\} = \Omega \setminus \{\tau \leq k-1\} \in \mathcal{F}_{k-1}$
$\Rightarrow \{\tau \geq k\}$ независимо с ξ_k

$\Rightarrow E\left(\sum_{i=1}^{\tau} \xi_i\right) = E\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k I\{\tau \geq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k \cdot E I\{\tau \geq k\} = E\xi_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} P\{\tau \geq k\} =$
$E\xi_1 \cdot E\tau$

<u>Задача о разорении игрока</u>

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ - н.о.р. случ. вел., $P(\xi_1 = 1) = p$, $P(\xi_1 = -1) = 1-p := q$
Возьмём целые числа a, b $(a < b)$ и $x \in (a, b)$
Положим $S_0 := x$, $S_n := x + \xi_1 + \dots + \xi_n$ $(S_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ - мартингал
(т.к. процесс с независ. приращениями и постоян. М.О)

Введем $\tau_a := \min\{n : S_n = a\}$
$\tau_b := \min\{n : S_n = b\}$ - марковские моменты
$\tau := \min\{n : S_n \notin (a, b)\}$ относительно естест. фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$

Задача: найти $P(\tau_a < \tau_b)$ - ?

▷ Рассмотрим случай $p = q = \frac{1}{2}$. $|S_{\tau_n}| = |S_{\min(\tau, n)}| \leq \max(|a|, |b|)$
тогда по следствию из теоремы Дуба $ES_\tau = ES_0 = x$

$$\Rightarrow \begin{cases} a P(S_\tau = a) + b P(S_\tau = b) = ES_\tau = ES_0 = x \\ P(S_\tau = a) + P(S_\tau = b) = 1 \end{cases} \Rightarrow P(S_\tau = a) = \frac{b - x}{b - a}$$

Рассмотрим случай $p \neq q$: положим $X_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$
Проверим, что $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ - мартингал:

1) X_n измерим относительно $\mathcal{F}_n$
2) $E|X_n| < \infty$ $\quad \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\max(|a|, |b|)} < \infty$ - ограничен
3) $E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n + \xi_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \cdot E\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_{n+1}} = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\left(q \cdot \frac{p}{q} + p \cdot \frac{q}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$

$\Rightarrow$ применимо следствие теоремы Дуба

$$\begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^a P(S_\tau = a) + \left(\frac{q}{p}\right)^b P(S_\tau = b) = EX_\tau = EX_0 = \left(\frac{q}{p}\right)^x \\ P(S_\tau = a) + P(S_\tau = b) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(S_\tau = a) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^a}$$

23. Марковские процессы с дискретным и непрерывным временем. Определения и примеры. Теорема, утверждающая, что процессы с независимыми приращениями являются марковскими

<u>Опр.</u> Введем σ-алгебру $\mathcal{F}_{\geq s} = \sigma\{X_u, u \geq s, u \in T\}$. Тогда процесс $X = \{X_t, t \in T\}$, согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, называется марковским процессом, если $\forall s \in T \quad \forall B \in \mathcal{F}_{\geq s}$

$$P(X_s \in B \mid \mathcal{F}_s) = P(X_s \in B \mid X_s)$$

<u>Замечание</u> Пусть $X_t : \Omega \to S_t$, где $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ - семейство борелевских пространств. Тогда процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ является марковским процессом $\Longleftrightarrow$ $\forall s \leq t$, $s, t \in T$ и $\forall$ $\mathcal{B}_t$-измеримой ф-ции $f : S_t \to \mathbb{R}$

$$E(f(X_t) \mid \mathcal{F}_s) = E(f(X_t) \mid X_s)$$

<u>Теорема</u> Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}$ - процесс с независимыми приращениями. Тогда X - марковский процесс относительно своей естественной фильтрации

▷ Возьмём $\forall s_1 < \ldots < s_m < t \quad s_i, t \in T \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Положим $\xi_1 := X_{s_1}$, $\xi_2 := X_{s_2} - X_{s_1}$, $\ldots$, $\xi_m := X_{s_m} - X_{s_{m-1}}$

$\eta := X_t - X_{s_m}$

$\sigma\{X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}\} = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$

так как случ. величины связаны невырожд. линейным преобразованием

$\Rightarrow E(f(X_t) \mid X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}) = E(f(\xi_1 + \ldots + \xi_m + \eta) \mid \xi_1, \ldots, \xi_m)$

, где $\forall$ измеримой и ограниченной f

т.к. η и $\sum \xi_i$ независимы, то используя формулу $E(g(\overset{\text{независ.}}{\widehat{\eta, \xi}}) \mid \xi = x) = E g(\eta, x)$ получим что

$E(f(\eta + \sum_{i=1}^{m+1} \xi_i) \mid \xi_1 = x_1, \ldots, \xi_m = x_m) = E(f(\eta + \sum_{i=1}^{m} x_i)) := \varphi(\sum_{i=1}^{m} x_i)$

где φ - ограниченная борелевская ф-ция

$\Rightarrow E(f(X_t) \mid X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}) = \varphi(\sum_{i=1}^{m} \xi_i)$

Тогда по телескопическому свойству условного матожидания:

$$E(f(X_t) \mid X_{s_m}) = E(f(X_t) \mid \sum_{i=1}^{m} \xi_i) = E(E(f(X_t) \mid \xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \sum_{i=1}^{m} \xi_i) =$$
$$= E(\varphi(\sum_{i=1}^{m} \xi_i) \mid \sum_{i=1}^{m} \xi_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{m} \xi_i) = E(f(X_t) \mid X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}) =$$
$$= E(f(X_t) \mid \mathcal{F}_s)$$

Следствие: случайное блуждание, пуассоновский процесс и винеровский процесс являются марковскими процессами.

Замечание: Эквивалентное определение марковости:
$\forall m \geq 1$ и всех $s_1 < \ldots < s_m < s \leq t$, где $s_i, t, s \in T$, а также $\forall$ ограниченной $\mathcal{B}_t$-измеримой (X при каждом $t \in T$ значения $\in$ пространству $(S_t, \mathcal{B}_t)$ функции f

$$E(f(X_t) \mid X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}, X_s) = E(f(X_t) \mid X_s)$$

24. Марковские цепи с дискретным и непрерывным временем. Переходные вероятности и их четыре свойства. Конечномерные распределения марковской цепи.

<u>Опр.</u> Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ – марковский процесс. $X_t : \Omega \to S$, где S – конечно или счетно, то X наз. цепью Маркова

Замечание: Если $X_t : \Omega \to S$, где S конечно или счетно, то определение марковости равносильно следующему:

$\forall m \quad \forall s_1 < \ldots < s_m < t, \quad s_i, t \in T \quad \forall i_1, \ldots, i_m, j \in S$

$P(X_t = j \mid X_{s_1} = i_1, \ldots, X_{s_m} = i_m) = P(X_t = j \mid X_{s_m} = i_m)$

при условии, что $P(X_{s_1} = i_1, \ldots, X_{s_m} = i_m) \neq 0$

<u>Опр.</u> Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ – марковский процесс, $X_t : \Omega \to S$

Обозначим $S_t := \{i \in S : P(X_t = i) \neq 0\}$

Введем для $s \leq t \quad i \in S_s, j \in S_t$

$p_{ij}(s,t) := P(X_t = j \mid X_s = i)$

то $p_{ij}(s,t)$ называется переходной вероятностью

Свойства переходных вероятностей

Если $\{X_t, t \in T\}$ – цепь Маркова, то $p_{ij}(s,t)$ обладают свойствами:

1) $p_{ij}(s,t) \geq 0$
2) $\sum\limits_{j \in S_t} p_{ij}(s,t) = 1$
3) $p_{ij}(s,s) = \delta_{ij}$
4) $\forall s < u < t \quad p_{ij}(s,t) = \sum\limits_{k \in S_u} p_{ik}(s,u)\, p_{kj}(u,t)$

(уравнение Колмогорова – Чепмена)

▷ Первые 3 свойства очевидно выполняются. Докажем 4-ое

$$p_{ij}(s,t) = P(X_t = j \mid X_s = i) = \frac{P(X_t = j, X_s = i)}{P(X_s = i)} = \sum_{k \in S} \frac{P(X_t = j, X_u = k, X_s = i)}{P(X_s = i)} =$$

$$= \sum_{k : P(X_u = k, X_s = i) \neq 0} P(X_t = j \mid X_u = k, X_s = i) \cdot \frac{P(X_u = k, X_s = i)}{P(X_s = i)} = \sum_{k \in S_u} P(X_t = j \mid X_u = k)$$

$$\cdot P(X_u = k \mid X_s = i) = \sum_{k \in S_u} p_{ik}(s,u) \cdot p_{kj}(u,t)$$

Замечание: функции $p_{ij}(s,t)$ можно продолжить для всех $i, j \in S$ $s < t \in T$ с сохранением свойств 1-4. Доопределим:

1) если $i \in S_s$, $j \notin S_t$, то $p_{ij}(s,t) := 0$
2) если $i \in S_s$ возьмем $i_0 \in S_s$ и положим $p_{ij}(s,t) = p_{i_0 j}(s,t)$

<u>Теорема</u> Конечномерные распределения цепи Маркова $X = \{X_t, t \in T\}$, причём $0 \in T \subset [0, \infty)$, однозначно определяются начальным распределением $P(X_0 = i)$ и переходными вероятностями $p_{ij}(s,t)$

▷ $\forall t_1 < \ldots < t_n, \quad \forall i_1, \ldots, i_n \in S$

$P(X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n) = P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \cdot$

$P(X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \cdot P(X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) =$

Продолжаем таким же образом, получим:

$$P(X_{t_1}=i_1,\dots,X_{t_n}=i_n) = P(X_{t_1}=i_1)\cdot p_{i_1 i_2}(t_1,t_2)\dots p_{i_{n-1} i_n}(t_{n-1},t_n)$$

Осталось показать, что $P(X_{t_1}=i_1)$ зависит от $P(X_0=k)$ и $p_{ij}(s,t)$

$$P(X_{t_1}=i_1) = \sum_{k\in S} P(X_{t_1}=i_1, X_0=k) = \sum_{k\in S} P(X_{t_1}=i_1 \mid X_0=k)\cdot P(X_0=k)$$

$\triangle$

Замечание: если есть функции $p_{ij}(s,t)$ со свойствами 1-4 и начальное распределение цепи, то $\exists$ цепь Маркова и её конечномерные распределения удовлетворяют теореме Колмогорова

25. Компьютерное моделирование марковских цепей с дискретным временем и конечным числом состояний

$\forall\ n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ Введем $p_{ij}^{(n)} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$

Тогда $p_{ij}^{(n)} \geq 0$ $\sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)} = 1$ и

$P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_0 = i_0) \cdot p_{i_0 i_1}(0,1) \dots p_{i_{n-1} i_n}(n-1, n) =$

$= p_{i_0}(0) \cdot p_{i_0 i_1}^{(0)} p_{i_1 i_2}^{(1)} \dots p_{i_{n-1} i_n}^{(n-1)}$

<u>Лемма</u> Пусть $X_0, U_0, U_1, \dots,$ независ. случ. вел., $X_0 : \Omega \to S$, U_i распределены равномерно на $[0,1]$, $i \in \mathbb{Z}_+$. Введем
$X_{n+1} = h_n(X_n, U_{n+1})$, где h_n - измеримая функция
Тогда $X_0, X_1, \dots$ - цепь Маркова.

▷ Проверим свойство:
$E(f(X_{n+1}) \mid X_1, \dots, X_n) \overset{?}{=} E(f(X_{n+1}) \mid X_n)$

В силу рекуррентной формулы $X_n = H_n(X_0, U_0, \dots, U_n)$ независим с U_{n+1}, где H_k - измеримая функция
и используя формулу $E(g(\xi, \eta) \mid \xi = x) = E g(x, \eta)$ для ξ и η независим получим:

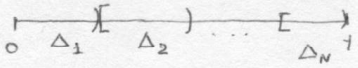
$E(f(h_n(X_n, U_{n+1})) \mid X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = E(f(h_n(x_n, U_{n+1})))$

$E(f(h_n(X_n, U_{n+1})) \mid X_n = x_n) = E(f(h_n(x_n, U_{n+1})))$

Последние равенства эквивалентны проверяемому свойству. ◁

Выберем h_n так, чтобы построенная ЦМ имела заданное начальное распределение и заданные переходные вероятности $p_{ij}^{(n)}$:

Для набора $p_i(0)$ $i \in S$ - конечно ($\# S = N$). Рассмотрим следующее разбиение отрезка $[0,1]$



$\Delta_1 = [0, p_1(0)$
$\Delta_2 = [p_1(0), p_1(0) + p_2(0))$
$\vdots$
$\Delta_N = [p_1(0) + \dots + p_{N-1}(0), 1)$

Тогда определим $f(x) := k$, если $x \in \Delta_k$ и положим $X_0 := f(U_0)$
$P(X_0 = i) = P(f(U_0) = i) = P(U_0 \in \Delta_i) = |\Delta_i| = p_i(0)$

Для $p_{ij}^{(n)}$ разбиения отрезка $[0,1]$ строится аналогично

Замечание: эту конструкцию удобно использовать, когда N - небольшое число

26. Однородные марковские цепи. Теорема о предельном поведении переходных вероятностей однородной марковской цепи с конечным или счётным пространством состояний и дискретным или непрерывным временем. Стационарное распределение марковской цепи.

<u>Опр.</u> Марковская цепь $X = \{X_t, t \in T\}$ называется однородной, если $\forall\ s < t,\ s, t, s+h, t+h \in T,\ \forall\ i, j \in S$
$p_{ij}(s,t) = p_{ij}(s+h, t+h)$

Поэтому вместо $p_{ij}(s,t)$ для однородных цепей пишут $p_{ij}(t-s)$ $t > s$
И свойства переходных вероятностей перепишутся как:

1) $p_{ij}(t) \geq 0$
2) $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$
3) $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$
4) $p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s)\, p_{kj}(t)$

Введём матрицы $P(t) := (p_{ij}(t))_{i,j \in S}$
Тогда свойства 1-4 в терминах матриц будут выглядеть так:

1) $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ $P(t)$ – стохастическая матрица
2) (сост. из неотр. эл-тов и сумма эл-тов по $\forall$ строке $= 1$)
3) $P(0) = I$
4) $P(s+t) = P(s)P(t)$

$\Rightarrow$ $(P(t), t \in T)$ образуют полугруппу (т.к. нет обратного элемента)

Введем вектор-строку $p := (p_1(0), p_2(0), \dots)$, тогда
$P(X_t = j) = pP(t) = \sum_{i \in S} p_i(0) \cdot p_{ij}(t)$

<u>Опр.</u> Распределение вероятностей, задаваемое вектором p, называется стационарным, если оно не меняется во времени:
$pP(t) = p \quad \forall t \in T$

<u>Теорема</u> Пусть для некоторого $j_0 \in S$, $h > 0$, $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon \leq 1)$ выполнено
$p_{ij_0}(h) \geq \varepsilon \quad \forall i \in S$
Тогда $\exists!$ стационарное распределение π, такое что $\forall$ начального распределения μ
$\|\mu P(t) - \pi\|_{\ell_1} \leq (1-\varepsilon)^{[t/h]}$, где $\|p\|_{\ell_1} = \sum_{i \in S} |p_i|$

▷ Для доказательства теоремы докажем лемму:

<u>Лемма</u> Пусть выполнены условия теоремы и $\sum_i p_i = 0$. Тогда
$\|pP(t)\| \leq \|p\|(1-\varepsilon)^{[\frac{t}{h}]}$, $t \geq 0$

▷ Пусть $t \in [0, h)$. Тогда $[\frac{t}{h}] = 0$

$$\|pP(t_j)\| = \sum_j |(pP(t))_j| = \sum_j \left|\sum_i p_i p_{ij}(t)\right| \leq \sum_j \sum_i |p_i| \cdot |p_{ij}(t)| \overset{\text{т.к. ряд абс. сход}}{=}$$

$$= \sum_i |p_i| \sum_j p_{ij}(t) = \sum_i |p_i| = \|p\|_{\ell_1} \doteq \|p\|_{\ell_1}(1-\varepsilon)^{[\frac{t}{h}]}$$

Докажем утверждение по индукции:
Пусть утверждение справедливо при $t < mh$
Возьмём $t \in [mh, (m+1)h)$. При таких t

$$pP(t) = pP(t-h)P(h)$$

Т.к. $\sum_j (pP(t-h))_j = \sum_j \sum_i p_i p_{ij}(t-h) = \sum_i p_i \sum_j p_{ij}(t-h) = \sum_i p_i = 0$, то

$$(pP(t-h)P(h))_j = \sum_i (pP(t-h))_i p_{ij}(h) = \sum_i (pP(t-h))_i (p_{ij}(h) - \varepsilon \delta_{jj_0})$$

Тогда

$$\|pP(t)\| = \sum_j |(pP(t-h)P(h))_j| = \sum_j |\sum_i (pP(t-h))_i (p_{ij}(h) - \varepsilon\delta_{jj_0})| \le$$

$$\le \sum_j \sum_i |pP(t-h)_i| \cdot |p_{ij}(h) - \varepsilon\delta_{jj_0}| = (\text{т.к. } p_{ij_0}(h) \ge \varepsilon, \text{ то второй множитель} \ge 0$$

$$= \sum_i |(pP(t-h))_i| \sum_j (p_{ij}(h) - \varepsilon\delta_{jj_0}) = \sum_i |(pP(t-h))_i|(1-\varepsilon) \le$$

$$\le \|p\|_{\ell_1} (1-\varepsilon)^{[\frac{t-h}{h}]}(1-\varepsilon) = \|p\|_{\ell_1}(1-\varepsilon)^{[\frac{t}{h}]}$$

$\triangle$

Вернемся к доказательству теоремы. Возьмем произвольный вектор μ, задающий начальное распределение цепи. Тогда $\mu_i \ge 0$, $\sum_i \mu_i = 1$
Покажем, что последовательность $\mu P(n)$ фундаментальна по норме ℓ_1.
поскольку $\sum_i ((\mu P(u))_i - \mu_i) = 0$, то можно применить лемму с $p = (\mu P(u) - \mu)$:

$$\|\mu P(t+u) - \mu P(t)\| = \|\mu P(u)P(t) - \mu P(t)\| = \|(\mu P(u) - \mu)P(t)\| \le$$

$$\le \|\mu P(u) - P(t)\|(1-\varepsilon)^{[\frac{t}{h}]} \le 2(1-\varepsilon)^{[\frac{t}{h}]}$$

поскольку оба вектора $\mu P(u)$ и μ задают вероятностн. распредел.
Доказана фундаментальность.

В силу полноты пространства ℓ_1 $\exists$ вектор π такой, что
$\|\mu P(t) - \pi\|_{\ell_1} \to 0$ при $t \to \infty$
Тогда $\pi_i \ge 0$ $\forall i$ (иначе ℓ_1-норма разности была всегда больше модуля отрицательного π_i и, $\Rightarrow$, не сходилась бы к нулю)
и $\|\pi\|_{\ell_1} = 1$, поскольку $\|\mu P(t)\|_{\ell_1} = 1$, то есть π задает вероятностное распределение.

Докажем, что вектор π задает стационарное распред. Для этого проверим, что $\forall t \in T$ $\pi P(t) = \pi$. По лемме $\forall t \in T$

$$\|\mu P(u+t) - \pi P(t)\| = \|(\mu P(u) - \pi)P(t)\|_{\ell_1} \le \|\mu P(u) - \pi\|_{\ell_1}(1-\varepsilon)^{[\frac{t}{h}]} \to 0 \quad u \to \infty$$

также $\|\mu P(u+t) - \pi\|_{\ell_1} \to 0$ $\Rightarrow$ $\|\pi - \pi P(t)\|_{\ell_1} \to 0$
$\Rightarrow \forall t \in T$ $\pi P(t) = \pi$

Докажем единственность: пусть $\exists$ ещё один вектор ν: $\nu P(t) = \nu$
Тогда по лемме

$$\|\pi - \nu\|_{\ell_1} = \|\pi P(t) - \nu P(t)\|_{\ell_1} = \|(\pi - \nu)P(t)\|_{\ell_1} \le 2(1-\varepsilon)^{[\frac{t}{h}]} \to 0 \quad t \to \infty$$

$\Rightarrow \nu = \pi$

$\triangle$

<u>Следствие</u>: Возьмём $\mu = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots)$. Тогда $\forall i$ $\exists \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j$ (который не зависит от i). Таким образом, система „забывает" состояние, из которого она стартовала

26. Формулировка теоремы Дуба о консервативных марковских цепях. Стационарные в узком смысле марковские цепи.

Напоминание: вектор π задает стационарное распределение - это означает, что $P(B) = \sum_{i \in B} \pi_i$, $\pi_i \geq 0$, $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$

<u>Опр.</u> $X = \{X_t, t \in T\}$ – строго стационарный процесс, если $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall t_1 < \ldots < t_n$, $t_1, \ldots, t_n, t_1+h, \ldots, t_n+h \in T$
$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \overset{law}{=} (X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h})$

<u>Теорема</u> Пусть однородная ЦМ $X = \{X_t, t \in T\}$ имеет начальное и стационарное распределение π. Тогда X – строго стационарный процесс

▷ $P(X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n) = P(X_{t_1} = i_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \ldots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$

$P(X_{t_1+h} = i_1, \ldots, X_{t_n+h} = i_n) = P(X_{t_1+h} = i_1) p_{i_1 i_2}(t_2 + h - t_1 + h) \ldots p_{i_{n-1} i_n}(t_n + h - t_{n-1} - h)$

В силу стационарности начального распределения π:
$P(X_t = i_1) = P(X_{t+h} = i_1)$ ◁

<u>Теорема</u> Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ - однородная консервативная марковская цепь с инфинитезимальной матрицей Q. Тогда
$P(X(u) = i, s \leq i \leq s+t \mid X(s) = i) = e^{q_{ii} t}$
то есть время ожидания между переходами из состояния в состояние распределено экспоненциально

27. Генератор (инфинитезимальная матрица) полугруппы переходных вероятностей стандартной однородной марковской цепи $X = \{X(t), t \geq 0\}$ с конечным или счетным числом состояний.

<u>Опр.</u> Однородная марковская цепь называется стандартной, если $P(t) \to I$ при $t \to 0+$, т.е. $p_{ij}(t) \to \delta_{ij}$ при $t \to 0+$ ($P(t)$ непрерывно в 0)

<u>Теорема</u> Пусть однородная цепь маркова с конечным или счетным числом состояний стандартна. Тогда $\forall\, i \neq j$

1) $\exists$ конечный

$$\lim_{t \to 0+} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \frac{p_{ij}(t) - \overset{\delta_{ij}}{p_{ij}(0)}}{t - 0} := q_{ij} \quad \Leftarrow \text{неотрицательн.}$$

2) $\exists$ $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{p_{ii}(t) - 1}{t} := q_{ii} \in [-\infty, 0]$

<u>Опр.</u> Однородная марковская цепь называется консервативной, если инфинитезимальная матрица $Q := (q_{ij})_{i,j \in S}$ содержит только конечные элементы и $\sum\limits_{j \in S} q_{ij} = 0$

Замечание: Если однородная марковская цепь стационарна и имеет конечное число состояний, то она консервативна

▷ $\sum\limits_{j=1}^{N} p_{ij}(t) \Rightarrow \forall\, t > 0 \quad \dfrac{1 - p_{ii}(t)}{t} = \dfrac{\sum\limits_{i \neq j} p_{ij}(t)}{t}$

По теореме для $i \neq j$ $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{p_{ij}(t)}{t} = q_{ij}$

$\Rightarrow$ т.к. сумма конечна, то существует конечный предел $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{\sum\limits_{i \neq j} p_{ij}(t)}{t} = \sum\limits_{i \neq j} q_{ij}$

$\Rightarrow$ и у левой части $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{1 - p_{ii}(t)}{t} = -q_{ii}$

$\Rightarrow \sum\limits_{j \in S} q_{ij} = 0$ ◁

27. Теорема, описывающая генератор стандартной однородной марковской цепи с конечным числом состояний.

<u>Теорема</u> Пусть дана матрица $Q = (q_{ij})_{i,j \in S}$ такая что $-q_{ii} < \infty$
$q_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ $\quad \sum_{j=1}^{N} q_{ij} = 0$
Тогда $\exists$ однородная марковская цепь с инфинитезимальной матрицей Q и пространством состояний мощности N

Напоминание: По определению матричной экспоненты:
$e^{B} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}$, при этом $B^0 = I$
Также если $BC = CB$, то выполнено: $e^{B+C} = e^{B} \cdot e^{C}$

▷ Положим $P(t) := e^{tQ}$, $t \geq 0$
Докажем, что $P(t)$ обладает свойствами 1-4 переходных вероятностей

1) Проверим, что $p_{ij}(t) \geq 0 \quad \forall i,j \in S \quad \forall t \geq 0$
Определим $\gamma = \min_{i=1,\dots,N} q_{ii} \leq 0$
Пусть $\tilde{Q} = (\tilde{q}_{ij}) = Q - \gamma I_N$, тогда $\tilde{q}_{ij} \geq 0 \ \forall i,j$
Пусть $\tilde{P}(t) := e^{t\tilde{Q}} = e^{t\tilde{Q}}$, $\tilde{P}(t)$ имеет неотрицательные элементы
$e^{t\tilde{Q}} = e^{tQ - t\gamma I_N} = e^{tQ} \cdot e^{-t\gamma I_N} = P(t) e^{-t\gamma I_N}$
$\Rightarrow P(t) = e^{t\gamma I_N} \cdot \tilde{P}(t)$
матрица справа имеет неотрицательные элементы
$\Rightarrow$ у матрицы $P(t)$ тоже будут неотрицательные элементы

2) Проверим, что $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}(t) = 1$
Обозначим через α единичный вектор-столбец
Тогда по определению $Q\alpha = 0$
$P(t)\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q^n}{n!} \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q^n \alpha}{n!} = I_N \alpha = \alpha$

3) $P(0) = e^{0Q} = I_N$

4) $P(s+t) = e^{(s+t)Q} = e^{sQ + tQ} = e^{sQ} \cdot e^{tQ} = P(s)P(t)$

Следовательно существует цепь с заданной инфинитезимальной матр.

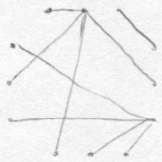
Замечание: условия, наложенные на матрицу Q являются ещё и необходимыми.

28. Обратимые марковские цепи. Случайное блуждание на графах.

<u>Опр.</u> Пусть $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ - однородная марковская цепь с переходными вероятностями за единицу времени p_{ij}. Вектор π, задающий распределение вероятностей, называется <u>обратимым</u>, если $\forall\ i, j \in S$, где S - конечно

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$$

<u>Случайное блуждание на графах.</u>



$\mathbb{V}, \mathbb{E}$ - мн-ва вершин и ребёр

Вершины v_i и v_j называются соседними, если их соединяет ребро

Пусть d_i - кратность вершины v_i

$$p_{ij} = \begin{cases} 1/d_i, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ соседние} \\ 0, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ не явл. соседними} \end{cases}$$

Цепь называется обратимой, если у неё $\exists$ обратимое распределение

Тогда введенная цепь обратима

$$\pi_i = \frac{d_i}{d}, \quad i \in S \qquad d = \sum_i d_i$$

$$\sum_i \pi_i p_{ij} = \sum_i \pi_j p_{ji} = \pi_j \sum_i p_{ji} = \pi_j$$

Если цепь обратима и π - обрат. распредел. $\Rightarrow$ π явл. стац. распр. вероят.

28. Метод Монте-Карло с использованием марковских цепей (алгоритм Метрополиса-Хастингса).

Возьмем связный граф с вершинами из S и введем цепь с переходными вероятностями:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_i} \cdot \min\left\{ \frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j}, 1 \right\}, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ соседние} \\ 0, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ не соседние} \\ 1 - \sum_i \frac{1}{d_i} \min\left\{ \frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j}, 1 \right\}, & \text{если } i = j \end{cases}$$

Такая цепь обратима, её обратимое распр. есть π, т.к.

Если $\frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j} \geq 1$, то

$$\pi_i p_{ij} = \pi_i \frac{1}{d_i} = \pi_j \frac{1}{d_j} \frac{\pi_i d_j}{\pi_j d_i} = \pi_j p_{ji}$$

Если $\frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j} \leq 1$, то

$$\pi_i p_{ij} = \pi_i \frac{1}{d_i} \frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j} = \pi_j \frac{1}{d_j} = \pi_j p_{ji}$$

29. Слабая сходимость вероятностных мер, заданных на метрическом пространстве. Сходимость по распределению случайных элементов со значениями в метрическом пространстве. Сохранение слабой сходимости случайных элементов под действием непрерывных отображений. Формулировка теоремы Александрова

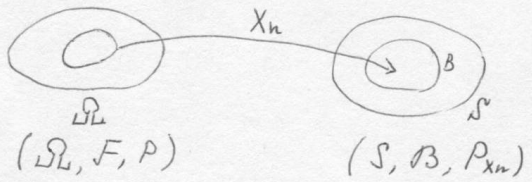
Пусть $(S, \mathcal{B})$ – метрическое пространство (с метрикой ρ). $\mathcal{B} = \mathcal{B}(S)$ – борелевская σ-алгебра подмножеств S

<u>Опр.</u> Пусть Q_n, $n \in \mathbb{N}$, вероятностные меры на $(S, \mathcal{B}(S))$. Q – вероятностная мера на $(S, \mathcal{B})$. Говорят, что $Q_n \Rightarrow Q$ (слабо сходится), если $\forall\ f \in C_b(S, \mathbb{R})$
[т.е. $f: S \to \mathbb{R}$; f – непрерывная и ограниченная]

$$\int_{\Omega} f(x)\, Q_n(dx) \longrightarrow \int_S f(x)\, Q(dx) \qquad n \to \infty$$

<u>Опр.</u> Пусть $X_n : \Omega \to S$, $X_n \in \mathcal{F}/\mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$, $X : \Omega \to S$, $X \in \mathcal{F}/\mathcal{B}$
Говорят, что $X_n \xrightarrow{law} X$ при $n \to \infty$ (сходимость по распределению) если $P_{X_n} \Rightarrow P_X$ при $n \to \infty$

$$\int_S f(x) P_{X_n}(dx) = \int_{\Omega} f(X_n)\, dP \quad \text{, т.е. } P_{X_n}(B) = P(X^{-1}(B)) \qquad B \in \mathcal{B}$$



Следовательно, $X_n \xrightarrow{law} X$ при $n \to \infty$
$\Longleftrightarrow$
$Ef(X_n) \to Ef(X) \quad \forall f \in C_b(S, \mathbb{R})$

<u>Теорема Александрова</u>

Следующие утверждения эквивалентны:

1. $Q_n \Rightarrow Q$ (слабо сходится)
2. $\overline{\lim_n}\, Q_n(F) \le Q(F) \quad \forall$ замкнутого $F \subset S$
3. $\underline{\lim_n}\, Q_n(G) \ge Q(G) \quad \forall$ открытого $G \subset S$
4. $\lim_n Q_n(B) = Q(B) \quad \forall\ B \in \mathcal{B} \quad Q(\partial B) = 0$ — ∂B – замкнуто $\Rightarrow$ оно борелевское $\Rightarrow$ на нем определена мера.

$Q_n \longleftrightarrow F_n \qquad [\, F_n(x) := Q_n((-\infty, x]) \,, \ x \in \mathbb{R}$
$Q \longleftrightarrow F$
$Q_n \longleftrightarrow Q \qquad$ тогда и только тогда $F_n(x) \to F(x)$ при $n \to \infty$ для $\forall$ точки непрерывности $x \in \mathbb{R}$

Пусть X_n и X – случайные величины $[\, X_n : \Omega \to \mathbb{R},\ X : \Omega \to \mathbb{R} \,]$
$X_n \xrightarrow{law} X \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$, $n \to \infty$

Сходимость характеристических функций распространяется и на случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^k$

$$\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t) = Ee^{i(t,x)} = Ee^{i\sum_{j=1}^{k} t_j x_j}$$
$$\forall\ t \in \mathbb{R}^k \qquad n \to \infty$$

30. Слабая относительная компактность и плотность семейства вероятностных мер. Теорема Прохорова, критерий слабой сходимости вероятностных мер в пространстве $C[0,1]$, формулировка принципа инвариантности Донскера - Прохорова (формулировки).

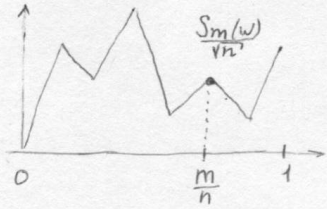
<u>Опр.</u> Семейство вероятностных мер $\{Q_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ называется <u>слабо относительно компактным</u>, если из любой последовательн. $\{Q_\alpha\}$ можно извлечь слабо сходящуюся последоват. $\{Q_{\alpha_n}\}$; что $Q_{\alpha_n} \Rightarrow Q$ (Q не обязательно принадлежит семейству $\{Q_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$)

<u>Опр.</u> Семейство мер $\{Q_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ называется <u>плотным</u>, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ компакт K_ε такой, что $\forall\ \alpha \in \Lambda$ $Q_\alpha(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$

<u>Теорема Прохорова</u>

Пусть (S, ρ) - польское пространство (полное сепарабельное метрическое пр-во). Тогда семейство вероятностных мер $\{Q_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ слабо относительно компактно тогда и только тогда, когда оно полно.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - н.о.р. величины такие, что $EX_n = 0$, $DX_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$
Построим случайные ломаные:



$S_0 := 0$
$S_m := X_1(\omega) + \ldots + X_m(\omega) \quad \omega \in \Omega$

Линейно интерполируем по значениям в узлах

$S_n(t, \omega)$ - случайная ломаная
$S_n(t, \omega)$ - случайный элемент в пространстве $C[0,1]$

Обозначим $P_{S_n}(\cdot)$ - распределение случайного элемента $S_n(\cdot)$ в $(C[0,1], \mathcal{B}(C[0,1]))$

<u>Теорема Донскера (принцип инвариантности)</u>

$P_{S_n}(\cdot) \Rightarrow W$, где W - распределение винеровского процесса $W = \{W(t), t \in T\}$, $T = [0,1]$

<u>Лемма</u> Пусть $X_n \xrightarrow{law} X$, $X_n : \Omega \to S$, $X : \Omega \to S$ при $n \to \infty$
$h : S \to \mathbb{R}$ - непрерывная. Тогда $h(X_n) \xrightarrow{law} h(X)$ при $n \to \infty$

▷ $\forall\ f \in C_B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ верно, что $E(f(h(X_n)) \to E(f(h(X))$ при $n \to \infty$
т.к. $f \circ h$ - непрерывн. ограниченая

Пусть $h(X(\cdot)) := X(1)$, h - непрерывное отображение $C[0,1] \to \mathbb{R}$
Поэтому теорема Донскера следует из Ц/ПТ

$h(S_n(\cdot)) := \frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{law} h(\{W(t), t \in [0,1]\}) = W(1) \sim N(0,1)$

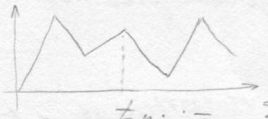
<u>Теорема</u> $X_n \xrightarrow{law} X$ в пространстве $C[0,1]$ $\Longleftrightarrow$

1) все конечномерные распределения X_n сходятся к конечномерным распределениям X
$[\,(X_n(t_1), \dots, X_n(t_r)) \xrightarrow{law} X(t_1), \dots, X(t_r)\ ,\ n \to \infty\,]$
2) семейство $(P_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ плотно

Замечание: теорема Донскера обобщается на серии независимых случайных величин, удовлетворяющих условиям Линдеберга:
$\forall\, \varepsilon > 0$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n_n} E\left(X_{n,j} - E X_{n,j}\right)^2 I\left(|X_{n,j} - E X_{n,j}| > \varepsilon B_n\right) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

где $B_n^2 = \sum_{j=1}^{n_n} D X_{n,j}$



$t_{n_j} := \sum_{l=1}^{j} \frac{D X_{n,l}}{B_n^2}$

Этот результат называется принципом инвариантности Донскера – Прохорова

31. Действительные и комплексные гауссовские процессы (теорема существования)

<u>Опр.</u> Пусть случайный процесс $W = \{W(t), t \in [0,1]\}$ - винеровский процесс на отрезке $[0,1]$. Тогда броуновским мостом называется процесс
$$W_0 := \{W(t) - t\,W(1),\ t \in [0,1]\} \qquad W_0(0) = W_0(1) = 0 \text{ п.н.}$$

Напоминание:
<u>Критерий согласия Колмогорова</u>
Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - н.о.р. сл. вел., $F(x)$ - функция распределения ξ_1.
Пусть $F(x)$ непрерывная ф-ция на $\mathbb{R}$. Тогда
$$P\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \sqrt{n}\,|F_n(x) - F(x)| \le z\right) \to K(z), \quad n \to \infty$$
где $F_n(x) := 1/n \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i \le x)$
$$K(z) := \left(1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2z^2}\right) I(z > 0)$$

▷ Схема доказательства:
Обозначим $X_n := \sqrt{n}\,|F_n(x) - F(x)|$
Доказательство теоремы сводится к проверке след. утверждений
1) $X_n \xrightarrow{d} W_0$ в $C[0,1]$ при $n \to \infty$
2) $P\left(\sup_{0\le t\le 1} |W_0(t)| \le z\right) = K(z) \quad z \ge 0$

<u>Опр.</u> Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ (столбец) называется <u>гауссовским</u>, если его характеристическая ф-ция $\varphi_\xi(t)$ имеет вид
$$\varphi_\xi(t) = \exp\left\{i(a,t) - \frac{1}{2}(Ct,t)\right\}, \text{ где } (Ct,t) = \sum_{j=1}^{k} C_{mj}\, t_m t_j$$
$C = C^T$ и $C \ge 0$ (т.е. $(Ct,t) \ge 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^k$)

Замечание: если $C > 0$, т.е. $(Ct,t) > 0 \quad \forall t \ne 0 \in \mathbb{R}^k$, то $\exists$ плотность:
$$p_\xi(x) = (2\pi)^{-k/2}\,|C|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(C^{-1}(x-a), (x-a)\right)\right.$$

<u>Опр.</u> Процесс $X = \{X_t, t \in T\}$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ называется <u>гауссовским</u>, если $\forall n \ \forall t_1, \dots, t_n \in T$ вектор $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ является гауссовским

<u>Опр.</u> Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ - гауссовский (действительнозначн.) процесс тогда $a(t) := EX(t)$ наз. ф-цией среднего
$r(s,t) := \operatorname{cov}(X(s), X(t))$ наз. ковариационной ф-цией

<u>Замечание</u>: ковариационная ф-ция неотрицательно определена, т.е. $(r(t_m, t_j)) \ge 0 \quad \forall t_1, \dots, t_n \in T$
т.е. $\sum_{m,j=1}^{k} r(t_m, t_j)\lambda_m \lambda_j \ge 0 \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

<u>Теорема</u> Пусть a - произвольн. действительнозначная ф-ция.
$r(s,t)$ - симметричн., неотрицательно определ. ф-ция
Тогда $\exists$ гауссовский (действит-значн.) процесс с ф-цией среднего a и матрицей ковариаций $r(s,t)$.

▷ Для $\forall n \ \forall t_1, \dots, t_n \in T$ введем гауссовские меры $Q_{t_1 \dots t_n}$, задаваемые хар. ф-циями:
$$\varphi_{t_1,\dots,t_n}(u_1, \dots, u_n) = \exp\left\{i\sum_{j=1}^{n} a(t_j)u_j - \frac{1}{2}\sum_{m,j=1}^{n} r(t_j, t_m)u_j u_m\right\}$$

То по теореме Колмогорова о согласовании распределений процесс X существует (легко проверяются два свойства) Процесс будет гауссовским т.к. хар. ф-ция имеет нужный вид.

Замечание: Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ L_2 - процесс (т.е. $E|X_t|^2 < \infty$, $t \in T$) Тогда ф-ция $r(s,t) := cov(X(s), X(t))$ явл. неотр. определенно

$\triangle$ $\sum_{m,j=1} cov(X(t_m), X(t_j)) \lambda_m \lambda_j = cov(\sum_{m=1}^{n} \lambda_m X(t_m), \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X(t_j)) = cov(\xi, \xi) \geq 0$

Следовательно, требование налагаемое на $r(s,t)$ явл. необходимыми

<u>Опр.</u> Процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ называется комплекснозначным гауссовским процессом, если $\forall$ n, $t_1, \dots, t_n$ вектор $(Re\ X_{t_1}, Im\ X_{t_1}, \dots, Re\ X_{t_n}, Im\ X_{t_n})$ - гауссовск. вектор в $\mathbb{R}^{2n}$

<u>Опр.</u> Комплекснозначная ф-ция $R(s,t)$ $R: T \times T \to \mathbb{C}$, $s, t \in T$ называется неотрицательно-определенной, если $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall$ $t_1, \dots, t_n \in T$, $\forall$ $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$
$\sum_{m,j=1}^{n} R(t_m, t_j) z_m \overline{z_j} \geq 0$

<u>Теорема</u> Класс неотрицательно определенных ф-ций $R: T \times T \to \mathbb{C}$ совпадает с классом ковариационных ф-ций комплексно-значных процессов

32. Ковариационные функции и их свойства. Гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром. Теорема Аронштайна (формулировка). Теорема Герглотца.

<u>Опр.</u> Функция $K(s,t)$, $s,t \in T$ называется <u>воспроизводящим ядром</u> гильбертова пространства H, состоящего из ф-ций $f: T \to \mathbb{C}$ если
1) $K(\cdot, t) \in H \quad \forall t \in T$
2) $\langle f, K(\cdot, t) \rangle = f(t) \quad \forall t \in T, f \in H$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скал. произв в H

<u>Теорема Аронштайна</u>

Функция $K(s,t)$, $s,t \in T$ является неотрицательно определенной тогда и только тогда, когда она представляет собой воспроизводящее ядро некоторого гильбертова пространства функций, заданных на T и принимающих значения в $\mathbb{C}$

Замечание: ковариация комплекснозначных случайных величин задается формулой $\operatorname{cov}(\xi, \eta) := E(\xi - E\xi)\overline{(\eta - E\eta)}$

<u>Теорема (свойства ковариационных ф-ций)</u>

Пусть $K, K_1, \dots, K_n, \dots$ - неотрицательно определенные ф-ции, тогда:
1) $K(cs, ct)$ - неотрицательно опред. ф-ция $\forall c \in \mathbb{R}$
2) $a_1 K_1 + \dots + a_n K_n$ - неотриц. опр. ф-ция $\forall a_1, \dots, a_n \geq 0$
3) $K_1 \cdot \ldots \cdot K_n$ - неотриц. опр. ф-ция
4) если $K_n(s,t) \to K_0(s,t)$ при $n \to \infty$ $\forall s,t \in T$, то K_0 - неотрицательно определенная ф-ция

▷ 1) По определению
2) Возьмём независимые гауссовские процессы с ковар. ф-циями $K_1, \dots K_n$: $X_1(t), \dots, X_n(t)$. Рассмотрим процесс X: $X(t) := \sqrt{a_1} X_1(t) + \dots + \sqrt{a_n} X_n(t)$, тогда его ковар. ф-ция есть $\operatorname{cov}(X(s), X(t)) = a_1 K_1 + \dots + a_n K_n$
3) Аналогично для $X(t) := X_1(t) \cdot \ldots \cdot X_n(t)$
4) Верно т.к. предельный переход сохраняет нестрогие неравенства

<u>Опр.</u> Функция $R(t)$, $t \in T$ называется неотрицательно определенной, если ф-ция $R(s,t) := R(s-t)$ неотриц. определена.

<u>Теорема Герглотца</u>

Функция $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, неотрицательно определена тогда и только тогда, когда

(*) $R(n) = \int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{in\lambda} Q(d\lambda)$, где Q - конечная мера на $\mathcal{B}([-\pi,\pi])$ (спектральная мера)

▷ Достаточность:
Пусть выполнено (*). Тогда:

$$\sum_{k,l=1}^{n} R(t_k - t_l) z_k \overline{z_l} = \sum_{k,l=1}^{n} z_k \overline{z_l} \int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{i(t_k - t_l)\lambda} Q(d\lambda) =$$

$$= \int\limits_{-[\pi,\pi]} \sum_{k=1}^{n} z_k e^{it_k\lambda} \overline{\sum_{l=1}^{n} \overline{z_l} e^{it_l\lambda}} Q(d\lambda) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} z_k e^{it_k\lambda} \right|^2 Q(d\lambda) \geq 0$$

$\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$

Необходимость:

Для $N \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in [-\pi, \pi]$ введем непрерывные и неотрицательные функции:

$$g_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{k,l=1}^{N} R(k-l)\, e^{-ik\lambda} e^{il\lambda} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|m|<N} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) R(m)\, e^{-im\lambda}$$

т.к. имеется $N-|m|$ пар (k,l), для которых $k-l=m$

Определим на $\mathcal{B}([-\pi,\pi])$ меру Q_N:

$$Q_N(B) := \int_B g_N(\lambda)\, d\lambda \quad , \text{где } B \in \mathcal{B}([-\pi,\pi])$$

Тогда:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} Q_N(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} g_N(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) R(n) & , N > |n| \\ 0 & , N \le |n| \end{cases}$$

$\Rightarrow Q_N([-\pi,\pi]) = R(0) < \infty$ (при $n=0$ из равенства выше)

По теореме Прохорова, взяв компакт $K = [-\pi,\pi]$, имеем что $\exists \{N_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что $Q_{N_k} \Rightarrow Q$ при $k \to \infty$.

Тогда для каждого $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} Q_{N_k}(d\lambda) \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} Q(d\lambda)$$

$$\left(1 - \frac{|n|}{N_k}\right) R(n) \longrightarrow R(n)$$

◁

Существует аналог теоремы Герглотца с непрерывным временем

<u>Теорема Бохнера - Хинчина</u>

Функция $R(t), t \in \mathbb{R}$, непрерывная в одной точке (равносильно непрерывности на всей прямой) является неотрицательно определенной $\Longleftrightarrow$

$R(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} Q(d\lambda)$, $t \in \mathbb{R}$, Q - конечная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (спектральная мера)

<u>Теорема Рисса</u>

Если $R(t), t \in \mathbb{R}$, - неотрицательно определенная измеримая ф-ция, то

$R(t) = R_c(t) + R_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где R_c - непрерывн. ф-ция, описанная в теореме Б.-Х., $R_0 = 0$ п.в по мере Лебега

<u>Теорема Гнейтинга</u>

Если $R(t) = R(\|t\|)$, $t \in \mathbb{R}^d$ $d \ge 2$, то $R(t) = R_c(t) + a I_{\{0\}}$, $a \ge 0$

33. Ортогональная случайная мера и её свойства. Структурная мера.

<u>Опр.</u> Функция $Z: B \to Z(B)$, где $B \in \mathcal{A}$ - алгебра подмножеств Λ, $Z(B) \in L^2(\Omega)$ называется <u>ортогональной случайной мерой</u>, если

1) $Z(B) \perp Z(C) \quad \forall\, B, C \in \mathcal{A} \quad B \cap C = \varnothing$ $\quad (\xi, \eta) = E\xi\overline{\eta}$ $\in L^2(\Omega)$

(т.е $(Z(B), Z(C)) = 0$, где $(\cdot,\cdot)$ - скалярн. произведение в $L^2(\Omega)$)

2) $\forall\, B, B_1, \dots, B_k, \dots \in \mathcal{A}$: $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$: $Z(B) = \sum_{k=1}^{\infty} Z(B_k)$ п.н., где ряд сходится в $L^2(\Omega)$

Замечание: множ-во $\omega \in \Omega$, для которых выполнено св-во (2) имеет вероятность 1, но зависит от множеств B_i

<u>Опр.</u> Пусть Z - ортогональная случайная мера, заданная на алгебре подмножеств Λ, тогда функция $\mu(B) := E|Z(B)|^2$, $B \in \mathcal{A}$, называется <u>структурной мерой</u> ортогональной случайной меры Z

Проверим, что μ есть мера на $\mathcal{A}$:

Очевидно, $\mu \geq 0$

Возьмём $B, B_1, \dots, \in \mathcal{A}$ $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$ $\quad B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}$, тогда:

$\left(\sum_{k=1}^{n} Z(B_k), \sum_{k=1}^{n} Z(B_k)\right) =$ (по св-ву скалярн. произв. в $L^2(\Omega)$) $= \sum_{k,l=1}^{n} (Z(B_k), Z(B_l)) =$

$= \sum_{k=1}^{n} (Z(B_k), Z(B_k)) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$

$\sum_{k=1}^{n} Z(B_k) \xrightarrow{L_2(\Omega)} Z(B)$ (2-ое св-во) и из непрерывности скалярного произв. в $L^2(\Omega)$

$\|\sum_{k=1}^{n} Z(B_k)\|_{L^2(\Omega)} \to \|Z(B)\|_{L^2(\Omega)} = \mu(B)$ при $n \to \infty$

$\quad \| $

$\sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$ $\qquad$ Следовательно, $\mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$

<u>Лемма</u> 1) Пусть Z - ортогональная мера на алгебре $\mathcal{A}$ подмн. Λ. Тогда $\forall\, B, C \in \mathcal{A}$ $\quad (Z(B), Z(C)) = \mu(B \cap C)$ $\quad (*)$, где μ - структурная мера

2) Пусть $Z = \{Z(B), B \in \mathcal{A}\}$ - семейство случайных величин из $L^2(\Omega)$ и для некоторой комплексной меры на $\mathcal{A}$ верно $(*)$. Тогда Z - ортогональная случайная мера на $\mathcal{A}$ со структ. мерой μ.

▷ 1) $B = (B \cap C) \cup (B \setminus C) \qquad C = (B \cap C) \cup (C \setminus B)$

По свойству 2 получаем конечную аддитивность Z (при $B_i = \varnothing$ при $i \geq 2$)

$(Z(B), Z(C)) = (Z(B \cap C) + Z(B \setminus C), Z(B \cap C) + Z(C \setminus B)) = (Z(B \cap C), Z(B \cap C) + 0$
$= \mu(B \cap C)$

2) $\left(Z(B) - \sum_{k=1}^{n} Z(B_k), Z(B) - \sum_{k=1}^{n} Z(B_k)\right) = (Z(B), Z(B)) + \sum_{k=1}^{n} (Z(B_k), Z(B_k))$

$- \sum_{k=1}^{n} (Z(B), Z(B_k)) - \sum_{k=1}^{n} (Z(B_k), Z(B)) = \mu(B) - \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \to 0$ при $n \to \infty$

Возьмём $B = C$ в $(*)$, тогда $E|Z(B)|^2 = \mu(B \cap B) = \mu(B)$ ◁

Пример: Пусть $\Lambda = [a, b]$, $0 \leq a \leq b < \infty$, $\mathcal{A} = \{B = \bigcup_{k=1}^{n} [a_i, b_i)$, где $a \leq a_1 \leq b_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Положим $Z([a, b]) = W(b) - W(a)$, где W - винеровский процесс. Тогда Z есть ортогональная случайная мера на $\mathcal{A}$, имеющая структурной функцией μ меру Лебега

34. Интеграл по ортогональной случайной мере. Свойства интеграла.

<u>Опр.</u> Функция $f : \Lambda \to \mathbb{C}$ наз. <u>простой</u>, если $f = \sum_{k=1}^{m} c_k I_{B_k}$, где $c_k \in \mathbb{C}$, где $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{A}$ образуют разбиение Λ

<u>Опр.</u> Отображение J, заданное на пр-ве простых функций со значениями в $L^2(\Omega)$ называется интегралом по ортогональной случайной мере Z на алгебре $\mathcal{A}$, если
$$J(f) = \sum_{i=1}^{m} c_i Z(B_i)$$

<u>Лемма</u> Пусть f и g - простые функции, тогда $(J(f), J(g)) = \langle f, g \rangle$, где $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в $L^2(\Omega)$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярное произведение в пр-ве $L^2(\Lambda, \sigma\{\mathcal{A}\}, \mu)$
$$\langle f, g \rangle := \int_\Lambda f(\lambda) \overline{g(\lambda)} \mu(d\lambda)$$

! Считаем, что μ продолжается на $\sigma\{\mathcal{A}\}$ (по теореме Каратеодори единственным образом)

▷ $(J(f), J(g)) = \left(\sum_{k=1}^{m} c_k Z(B_k), \sum_{j=1}^{n} d_j Z(D_j) \right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_k \overline{d_j} \mu(B_k \cap D_j) =$
$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_k \overline{d_j} \int_\Lambda I_{B_k \cap D_j}(\lambda) \mu(d\lambda) = \int_\Lambda \sum_k c_k I_{B_k} \overline{\sum_j d_j I_{D_j}} \mu(d\lambda) =$
$= \int_\Lambda f(\lambda) \overline{g(\lambda)} \mu(d\lambda) = \langle f, g \rangle$ ◁

Отсюда следует корректность определения J:
пусть $\sum c_k I_{B_k} = \sum d_j I_{D_j}$
$\|f - g\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Rightarrow J(f) = J(g)$ п.н.

<u>Лемма</u> J является линейным отображением на линейном пространстве простых функций

▷ f, g - простые функции, $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha f + \beta g$ - простая ф-ция
$(J(\alpha f + \beta g) - \alpha J(f) - \beta J(g), J(\alpha f + \beta g) - \alpha J(f) - \beta (J(g)) =$
$= \langle \alpha f + \beta g, \alpha f + \beta g \rangle - \alpha \langle f, \alpha f + \beta g \rangle - \beta \langle g, \alpha f + \beta g \rangle = 0$
$\Rightarrow J(\alpha f + \beta g) = \alpha J f + \beta J g$ ◁

<u>Лемма</u> Простые функции плотны в пространстве $L^2(\Lambda)$

▷ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists H = H(\varepsilon)$ так что $\int_\Lambda |f(\lambda)|^2 I_{\{|f(\lambda)| > H\}} \mu(d\lambda) < \varepsilon$ для $f \in L^2(\Lambda)$
Тогда f можно аппроксимировать линейной комбинацией простых ф-ций, которые $\in \sigma\{\mathcal{A}\}$ ◁

Изометрии с пр-вом простых функций можно продолжить до изометрии на замыкании в $L^2(\Lambda)$ этих ф-ций, т.е. по предыдущей лемме на все $L^2(\Lambda)$

$$\underset{\text{прост.}}{f_n} \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f \Rightarrow J(f) := \lim_{n \to \infty} J(f_n) \quad (\lim \text{ в } L^2(\Omega))$$

$$\underset{\text{норма в } L^2(\Omega)}{\|J(f_n) - J(f_m)\|} = \|J(f_n - f_m)\| = \underset{\text{норма в } L^2(\Lambda)}{|f_n - f_m|} \to 0 \quad n, m \to \infty$$

Тем самым получим:

$J(f) = \int_\Lambda f(\lambda) Z(d\lambda)$, $f \in L^2(\Lambda)$ $\quad (J(f), J(g)) = \langle f, g \rangle \quad \forall f, g \in L^2(\Lambda)$

Пусть $Z = \{ Z(B), B \in \mathcal{B} \}$ - семейство случайных величин в $L^2(\Omega)$

<u>Опр.</u> Пусть $\mathcal{B}$ - σ-алгебра на Λ. $\mathcal{O} = \{ B \in \mathcal{B} : \mu(B) < \infty \}$, где μ - конечная мера на $L^2(\Omega)$

<u>Опр</u> Z - ортогональная случайная мера на $\mathcal{B}$, если $(Z(B), Z(C)) = \mu(B \cap C)$, $B, C \in \mathcal{O}$

Рассмотрим Λ_n - разбиение Λ : $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ и $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset$ при $i \neq j$

Введем $B_n := B \cap \Lambda_n$

На $(\Lambda_n, \mathcal{B}_n)$ возьмём ортогональную случайную меру $Z_n = \{ Z(B), B \in \mathcal{B}_n \}$, определим соответсующее отображение J_n

<u>Опр.</u> Для функции $f \in L^2(\Lambda)$ введем интеграл $J(f)$:
$J(f) = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(f_n)$, где ряд сходится в $L^2(\Omega)$

35. Теорема Карунена.

<u>Теорема Карунена</u>

Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ - центрированный комплекснозначный L^2-процесс ($M.O. = 0$), заданный на вероятностном пр-ве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Его ковариация допускает факторизацию, т.е

$$r(s,t) = \int_\Lambda f(s,\lambda)\overline{f(t,\lambda)}\,\mu(d\lambda), \quad s,t \in T, \quad \text{где } \{f(t,\cdot), t \in T\} -$$

семейство функций из $L^2(\Lambda, \mathcal{B}, \mu)$, где μ - σ-конечн. мера

(2) **Тогда** существует центрированная ортогональная случайная мера Z, заданная на системе множеств $\mathcal{Y} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \infty\}$ возможно на расширении $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, со структурной мерой μ, такая, что

$$X(t) = \int_\Lambda f(t,\lambda)\,Z(d\lambda) \quad \text{для каждого } t \in T \qquad (*)$$

(1) Если семейство ф-ций $\{f(t,\cdot), t \in T\}$ полно в $L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ т.е.

$$\psi \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu) \text{ и } \int_\Lambda f(t,\lambda)\overline{\psi(\lambda)}\,\mu(d\lambda) = 0 \quad \forall t \in T \Rightarrow \psi = 0 \ \mu\text{-п.н.},$$

то расширять исходное $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ не требуется

<u>Замечание</u>: Достаточное условие интегрального представления $(*)$ являются достаточными и необходимыми.

▷ (1) Если семейство $\{f(t,\cdot), t \in T\}$ полно в $L^2(\Lambda)$

Введем отображение G для $t \in T$:

$$G : f(t,\cdot) \to X(t,\cdot)$$

Продолжим отобр. G по линейности:

$$G\left(\sum_{k=1}^n c_k f(t_k,\cdot)\right) = \sum_{k=1}^n c_k X(t_k,\cdot), \quad \text{где } c_k \in \mathbb{C},\ t_k \in T$$

Покажем корректность определения:

Пусть $g = \sum_{l=1}^m d_l f(s_l,\cdot)$, $f = \sum_{k=1}^n c_k f(t_k,\cdot)$

$$\left(\sum_{k=1}^n c_k X(t_k), \sum_{l=1}^m d_l X(s_l)\right)_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_k \overline{d_l}\, E\left(X(t_k)\overline{X(s_l)}\right) =$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_k \overline{d_l}\, r(t_k, s_l) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_k \overline{d_l} \int_\Lambda f(t_k,\lambda)\overline{f(s_l,\lambda)}\,\mu(d\lambda) =$$

$$= \int_\Lambda \sum_{k=1}^n c_k f(t_k,\lambda)\overline{\sum_{l=1}^m d_l f(s_l,\lambda)}\,\mu(d\lambda) = \langle f, g\rangle_{L^2(\Lambda)}$$

Следовательно, $(Gf, Gg)_{L^2(\Omega)} = \langle f, g\rangle_{L^2(\Lambda)}$

и если $f = g \Rightarrow 0 = \|f-g\|_{L^2(\Lambda)} = \|Gf - Gg\|_{L^2(\Omega)} \Rightarrow Gf = Gg$ п.н.

Получили, что G_n - изометрическая ф-ция на всех $\sum_{k=1}^n c_k f(t_k,\cdot)$

G (как изометрия) продолжается на замыкание в $L^2(\Lambda)$ ф-ций вида $\sum_{k=1}^n c_n f(t_k,\cdot)$

Назовем это пр-во $L^2[f]$

В случае (1) $L^2[f] = L^2(\Lambda)$

Заметим, что $I_B \in L^2(\Lambda)$, если $\mu(B) < \infty$

Следовательно, можем ввести $Z(B) := G(I_B)$, $B \in \mathcal{Y}$

Тогда Z - ортогональная случайная мера со структурной мерой μ

Действительно:

$(Z(B), Z(C))_{L^2(\Omega)} = (G(I_B), G(I_C))_{L^2(\Omega)} = \langle I_B, I_C \rangle_{L^2(\Lambda)} = \int_\Lambda I_B(\lambda) I_C(\lambda) \mu(d\lambda)$

$= \int_\Lambda I_{B\cap C}(\lambda) \mu(d\lambda) = \mu(B \cap C)$

Заметим, что Z - центрирована, поскольку $Z(B) \in L^2[X]$ для каждого $B \in \mathcal{B}$, и $E\xi = 0 \quad \forall\ \xi \in L^2[X]$, т.к. процесс имеет нулевое среднее

Определим $J(f) := \int_\Lambda f\, Z(d\lambda)$, $f \in L^2(\Lambda)$. J - изометрия

Итак, имеются две изометрии

$G: L^2(\Lambda) \to L^2(\Omega)$

$J: L^2(\Lambda) \to L^2(\Omega)$ $\qquad G I_B = J I_B \ (= Z(B))$

$B \subset \mathcal{B} \Rightarrow$ и того, что линейная комбинация индикаторов из $\mathcal{B}$ плотно в $L^2(\Lambda)$ следует, что $G = J$ на $L^2(\Lambda)$.

$G(f(t,\cdot)) = X(t)$

Следовательно, $X(t) = \int_\Lambda f(t,\lambda)\, Z(d\lambda)$

② Пусть система $\{f(t,\cdot), t \in T\}$ не является полной в $L^2(\Lambda)$

Рассмотрим $L^2(\Lambda) - L^2[f]$

т.е. $L^2(\Lambda) = L^2[f] \oplus \widetilde{L^2}$, $\widetilde{L^2} \perp L^2[f]$

В $\widetilde{L^2}$ введем базис $g(s,\cdot)$, $s \in T'$ $\quad (T' \cap T = \emptyset)$

Тогда ф-ция $p(s,u) = \int_\Lambda g(s,\lambda)\, \overline{g(t,\lambda)}\, \mu(d\lambda)$ $\quad s,u \in T$

будет неотрицательно определенной т.к.

$\sum_{k,l=1}^{n} z_k \overline{z_l}\, p(s_k, s_l) = \int_\Lambda \left| \sum_{k=1}^{n} z_k g(t_k,\lambda) \right|^2 \mu(d\lambda) > 0$

Следовательно $\exists$ центрированный комплекснозначный гауссовск. процесс $Y = \{Y(s), s \in T'\}$, заданный на $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ такой, что $\operatorname{cov}(Y_s, Y_u) = E\, Y_s \overline{Y_u} = p(s,u)$

Возьмём $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{P}) = (\Omega, F, P) \times (\Omega', \mathcal{F}', P')$. Тогда для каждых $t \in T$, $s \in T'$ величины $X(t) = X(t,\tilde{\omega}) = X(t,\omega)$, $Y(s) = Y(s,\tilde{\omega}) = Y(s,\omega')$ независимы на этом пр-ве (для $\tilde{\omega} = (\omega,\omega') \in \widetilde{\Omega}$)

Положим $\xi(t,\tilde{\omega}) = \begin{cases} X(t,\omega), & t \in T \\ Y(t,\omega'), & t \in T' \end{cases}$

для неё

$$\operatorname{cov}(\xi_s, \xi_t) = \begin{cases} r(s,t), & s,t \in T \\ p(s,t), & s,t \in T' \\ 0, & s \in T, t \in T' \text{ или } t \in T', s \in T' \end{cases}$$

$\Rightarrow \operatorname{cov}(\xi_s, \xi_t) = \int_\Lambda h(s,\lambda)\, \overline{h(t,\lambda)}\, \mu(d\lambda)$, где $h(t,\lambda) = \begin{cases} f(t,\lambda), & t \in T \\ g(t,\lambda), & t \in T' \end{cases}$

Тогда семейство функций $\{h(t,\cdot), t \in T \cup T'\}$ полна в $L^2(\Lambda)$ и по доказанному в ①

$\xi(t,\tilde{\omega}) = \int_\Lambda h(t,\lambda)\, Z(d\lambda)$ для некоторой ортогон. случ. меры

$\underset{t \in T}{X(t,\omega)} = \xi(t,\tilde{\omega}) = \int_\Lambda f(t,\lambda)\, Z(d\lambda)$, т.к. $h(t,\lambda) = f(t,\lambda)$, $t \in T$ ◄

36. Процессы, стационарные в узком и широком смыслах. Связь этих понятий.

теорема с. 242

<u>Опр.</u> Процесс $X = \{X(t), t \in T\}$ наз. стационарным в узком смысле, если $\forall n \ \forall t_1, \dots, t_n \in T \ \forall h: t_1+h, \dots, t_n+h \in T$:

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \overset{law}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$$

Пример: цепь Маркова со стационарным начальным распределением

<u>Опр.</u> Процесс $X = \{X_t, t \in T\}$, где T - некоторая группа, называется стационарным в широком смысле, если

1) $EX_t = a = const \quad \forall t \in T$
2) $cov(X_s, X_t) = R(s-t), \quad s, t \in T$

$cov(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)\overline{(\eta - E\eta)}$

В общем случае из одной стационарности не следует другая
Но для гауссовских процессов понятия стационарности совпадают

Замечание: если процесс X, стационарный в узком смысле, явл. L^2-процессом (т.е. $E|X(t)| < +\infty \ \forall t$), то X стационарен в широком смысле

Пусть X - стационарный в широком смысле процесс, то $R(t) = cov(X_s, X_{t+s})$ будет неотрицательно определенной функцией

<u>Теорема</u> Стационарный в широком смысле процесс $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ непрерывен в среднеквадратическом на $\mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$ ковариационная функция $R = R(t)$ непрерывна в нуле

▷ <u>Необходимость</u> Процессы $X(t)$ и $X(t) - a$, где $a = const$, очевидно, одновременно являются непрерывными (в среднеквадратическом). Поэтому можем считать, что процесс имеет нулевое среднее
Его ковариац. ф-ция $r(s,t) = E X_s \overline{X_t} = R(s-t)$ для $s, t \in \mathbb{R}$

$|R(t) - R(0)| = |r(t,0) - r(0,0)| \le \|X(t) - X(0)\| \cdot \|X(0)\|$

$\Longrightarrow$ непрерывность процесса X в среднеквадратическом на $\mathbb{R}$ (даже в точке 0 (только в 0)) влечет $R(t) \to R(0)$, когда $t \to 0$

<u>Достаточность</u> $\|X(s) - X(t)\|^2 = -(R(t-s) - R(0)) - (R(s-t) - R(0)) \to 0$ при $s \to t$ т.к. ковар. ф-ция непрерывна в 0 ◁

Спектральное представление процессов, стационарных в широком смысле

Теорема Герглотца утверждает что $R(n) = \int_{[-\pi,\pi]} e^{in\lambda} Q(d\lambda)$, где Q конечн. мера на $B(-\pi,\pi)$

$$cov(X_n, X_m) = R(n-m) = \int_{[-\pi,\pi]} e^{i(n-m)\lambda} Q(d\lambda) = \int_{[-\pi,\pi]} e^{in\lambda} \overline{e^{im\lambda}} Q(d\lambda)$$

получили факторизацию ковариац. ф-ции, поэтому

$X_n = \int_{[-\pi,\pi]} e^{in\lambda} Z(d\lambda)$, $n \in \mathbb{Z}$, где Z - центрирован. ортогональная мера

<u>Теорема</u> $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ - центрир., стационарн. в широком смысле процесс непрерывен в среднеквадратичном, то

$$X_t = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} Z(d\lambda) \quad t \in \mathbb{R}$$

▷ Из теоремы Колмогорова расширять $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ не требуется

37. Определение и простейшие свойства интеграла Ито. Формула Ито (без доказательства)

Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ – винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ будем считать, что вероятностное пр-во полно и σ-алгебры $\mathcal{F}^W$ расширены классом N событий нулевой вероятности

$$I_t(f) = \int_{[0,t]} f(s,\omega)\, d W_s(\omega)$$

! Данный стохастический интеграл <u>НЕЛЬЗЯ</u> понимать как потраекторный интеграл т.к. при каждом ω процесс W_s не дифференцируем ни в одной точке.

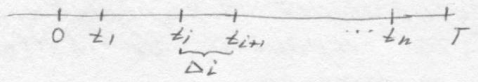
$\{I_t, t \geq 0\}$ – мартингал относительно расширенной фильтрации

Если f является простой детерминированной ф-цией вида $f_1(\omega) = I_{[a,b]}(t)$, где $t \in [0,T]$, $(a,b] \subset [0,T]$, то под стохастическим интегралом $I_T(f)$ понимают случайную величину:

$$I_T(f) = W_b(\omega) - W_a(\omega)$$

Определим для ступенчатых функций

$$f(t,\omega) := \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(\omega)\, I_{\Delta i-1} + \xi(\omega) I\{0\}$$



$$I(f) := \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \right)$$

<u>Теорема</u> Для ступенчатых процессов f выполнено

1) $E\, I(f) = 0$
2) $(I(f), I(g))_{L^2(\Omega)} = \int_0^T E f(t) \overline{g(t)}\, dt$

▷ 1) $E\, \xi_{i-1} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = E\left(E\, \xi_{i-1} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right) =$

$= E\, \xi_{i-1}\, E(W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}) = E\, \xi_{i-1}\, \underbrace{E(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})}_{=0} = 0$

т.к. $W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_{i-1}}$

2) $f(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1} I_{\Delta i-1}(t)$
$g(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_{i-1} I_{\Delta i-1}(t)$ рассматриваем на общем разбиении

$$(I(f), I(g)) = \sum_{i,j=1}^{n} E\, \xi_{i-1} \eta_{j-1} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) = \sum_{i<j} \dots + \sum_{i>j} \dots + \sum_{i=j} \dots$$

Рассмотрим $\sum_{i<j} \dots$

$$E\, \xi_{i-1} \eta_{j-1} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) = E\left(E\left(\xi_{i-1} \eta_{j-1} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right)\right) = 0$$

$\Rightarrow \sum_{i>j} = 0$ и аналогично $\sum_{j>i} = 0$

$$\sum_{i=j} = \sum_{i=1}^{n} E\, \xi_{i-1} \eta_{i-1} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = E\left(E\, \xi_{i-1} \eta_{i-1} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right) =$$

$$= E\, \xi_{i-1} \eta_{i-1}\, E(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = \sum_{i=1}^{n} E\, \xi_{i-1} \eta_{i-1} (t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \int_{[0,T]} E f(t) \overline{g(t)}\, dt$$

◁

<u>Опр</u> Ф-ция $f(t,\omega)$, $t\in[0,T]$, $\omega\in\Omega$ называется <u>прогрессивно измеримой</u> (относительно $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$), если $\{f(t,\omega),\ t\in[0,T],\ \omega\in\Omega\}$ является $\mathcal{B}[0,t]\otimes\mathcal{F}_s$ -измеримой

Ступенчатый процесс является прогрессивно-измеримым
Каждый прогрессивно измеримый процесс адаптирован (т.е. согласован с фильтрацией F)

<u>Лемма</u> $\forall$ ф-цию $f\in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ (адаптирован) можно приблизить в L^2 с помощью ступенчатых процессов (без док-ва)

I продолжается как изометрия на $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$

Будем говорить, что п.н. непрерывный на $[0,\infty)$ действительный процесс $X=\{X_t,\ t\geq 0\}$ допускает „стохастический дифференциал"

$$dX_t = f(t,\omega)\,dW_t + g(t,\omega)\,dt$$

если $X_0\in\mathcal{F}_0/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ и с вероятностью 1 сразу для всех $t\geq 0$

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s,\omega)\,dW_s + \int_0^t g(s,\omega)\,ds$$

<u>Формула Ито</u>

Пусть процесс $X=\{X_t,\ t\geq 0\}$ с действительными значениями имеет стохастический дифференциал. Пусть функция $H:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такова, что существуют непрерывные производные $\partial H/\partial t$, $\partial^2 H/\partial x^2$, то процесс $Y_t=\{H(t,X_t),\ t\geq 0\}$ имеет стохастический дифференциал

$$dY_t = \frac{\partial H}{\partial t}(t,X_t)\,dt + \frac{\partial H}{\partial x}(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2$$

где

$$dt\cdot dt = dt\cdot dW_t = dW_t\cdot dt = 0,\quad dW_t\cdot dW_t = dt$$

$$(f\,dW_t + g\,dt) := f^2 dt$$

$$\int_0^T f\,dW_t\ I(A) = \lim_{\substack{\max\\(t_i,t_{i-1})\\ \to 0}} \overset{\text{в } L^2(\Omega)}{\sum_{i=1}^n} \underbrace{f(t_{i-1})}_{\text{непрерывны в среднеквадрат.}}(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})$$

Важно, что берется не промежуточная точка, а левая точка разбиения

38. Уравнение Ланжевена. Доказательство того, что при определенных условиях решением этого уравнения является процесс Орнштейна - Уленбека.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение движения частицы в жидкой среде

$\boxed{m\dot{v} = -\beta v + \dot{W}}$ оно называется <u>уравнением Ланжевена</u>

где m - масса частицы

v - скорость частицы

$\beta > 0$ - вязкость среды

$\dot{W}$ - „шум" (ввиду соударения частиц)

Пока что данная запись является бессмысленной т.к. не определено $\dot{W}$

Придадим строгий смысл этому уравнению:

(*) $\dot{v} = av + \sigma f \quad t \geq 0$, где $a = \frac{-\beta}{m} < 0$, $\sigma = \frac{1}{m} > 0$

Общее решение этого уравнения $v(t) = Ce^{at}$, $C = v(0)$

Методом вариации произвольной постоянной ищем частное решение

В результате получим:

$$v(t) = v(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)}\sigma f(u)\,du, \quad t \geq 0$$

Уравнение (*) можно записать в дифференциальной форме

$$dv = av\,dt + \sigma f\,dt$$

или $$v(t) = v(0) + \int_0^t av(s)\,ds + \int_0^t \sigma f(s)\,ds \quad t \geq 0$$

Значит, в стохастическом смысле уравнение надо понимать в интегральном виде

$$\boxed{V(t) = V(0) + \int_0^t aV(s)\,ds + \int_0^t \sigma\,dW_s} \qquad dV(t) = aV(t)\,dt + \sigma\,dW_t$$

Будет ли решением уравнения

$$V(t) = V(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)}\sigma\,dW_s \quad ?$$

Положим $X_t = \int_0^t e^{-au}\,dW_u \qquad H(t,x) = \sigma e^{at}x \qquad t \geq 0$

$dX_t = e^{-at}\,dW_t \qquad Y_t = H(t, X_t)$

$$dY_t = \frac{\partial H}{\partial t}(t, X_t)\,dt + \frac{\partial H}{\partial t}(t, X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2$$

$$dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0 \qquad dW_t \cdot dW_t = dt$$

$$dY_t = \sigma a e^{at} X_t\,dt + \sigma e^{at}\,dX_t + 0 = \sigma a e^{at} X_t\,dt + \sigma\,dW_t$$

$d(V(0)e^{at}) = ae^{at}V(0)\,dt$

$V(0)$ явл. $\mathcal{F}_0$-измеримой величиной

<u>Теорема</u> Пусть $V(0) \in \mathcal{F}_0 / \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и $V(0) \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha})$, где $\alpha = -a > 0$
Тогда решение уравнения Ланжевена является процесс Орнштейна-Уленбека, т.е. гауссовский процесс $V = \{V(t), t \geq 0\}$ имеющий нулевое среднее и ковариационную функцию
$cov(V(s), V(t)) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|s-t|}$, $s, t \geq 0$

▷ $EV(t) = EV(0)e^{at} + E\int_0^t e^{-a(t-s)}\sigma dW_s$

$= e^{at} EV(0)$ т.к. математическое ожидание интеграла Ито $= 0$
$= 0$ т.к. $V(0) \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha})$

$cov(V_s, V_t) = E(V_0 e^{as} + \int_0^s e^{a(s-u)}\sigma dW_u)(V_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-u)}\sigma dW_u) =$

$E(\int_0^s e^{a(s-u)} dW_u \int_0^t e^{a(t-u)} dW_u = \int_0^{s\wedge t} e^{a(s-u)} e^{a(t-u)} du = \frac{e^{a(s+t)}}{2a}(1 - e^{-2a(s\wedge t)})$

$E\, V(0) \int_0^t e^{a(t-u)} dW_u = E(E(V(0) \int_0^t e^{a(t-s)}\sigma dW_s \mid \mathcal{F}_0) =$
$= E(V(0) E(\int_0^t e^{a(t-u)} dW_u \mid \mathcal{F}_0)) = 0$

$E(V(0))^2 = -\frac{\sigma^2}{2a}$

Осталось доказать, что $V = V(t)$ – гауссовский процесс
$V_t = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{измерим отн. } \mathcal{F}_0}}{V(0)} e^{at} + \underset{\substack{\downarrow \\ \perp \mathcal{F}_0}}{\int_0^t e^{a(t-s)}\sigma dW_s}$

Значит, достаточно установить, что $\forall n$ $\forall\ 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ гауссовость вектора $(V_{t_1}, \ldots, V_{t_k})$, где $V_t = \int_0^t e^{a(t-s)}\sigma dW_s$, $t \geq 0$

Для каждого $m = 1, \ldots, n$ величина $V(t_m)$ есть предел в $L^2(\Omega)$ при $n \to \infty$
$\eta_m(n) = \sum_{j=0}^{n} \exp(-a t_j^{(m)}(n))(W(t_{j+1}^{(m)}(n)) - W(t_j^{(m)}(n)))$, где $t_j^{(m)}(n) = \frac{j t_m}{n}$

Вектор $(\eta_1(n), \ldots, \eta_k(n))$ имеет многомерное нормальное распределение
Совершив предельный переход в $L^2(\Omega)$, получим требуемое.

39. Пример дифференциального уравнения первого порядка (с данным начальным условием), имеющего континуум различных решений. Лемма Гронуолла

$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \qquad t \in [0,T]$

$X_0 = Z$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая величина

Это формальная запись диф. ур. первого порядка

Понимают эту запись как:

(*) $X_t = \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \qquad t \in [0,T]$

где b и σ определены $[0,T] \times \mathbb{R}$

и b и σ „хорошие" функции, т.ч. интегралы в (*) определены

<u>Опр.</u> Уравнение (*) имеет <u>сильное решение</u> на отрезке $[0,T]$, если процесс $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ имеющий п.н. непрерывные траектории, согласованный с фильтрацией $\mathbb{F}$, при подстановке X_t в левую и правую части формулы (*) при каждом $t \in [0,T]$ получается равенство п.н.

Пусть выполнено условие Липшица

1°. Существует константа $L = L(T) > 0$ т.ч.

$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \le L|x-y| \qquad x,y \in \mathbb{R},\ t \in [0,T]$

2°. $b(t,x)^2 + \sigma(t,x)^2 \le C(1+x^2)$, где $C = C(T) > 0 \qquad x \in \mathbb{R}$

Замечание: если $b(t,x) \overset{\text{и } \sigma(t,x)=\sigma(x)}{=} b(x)$, то из 1° следует 2°

Пример: Рассмотрим $\frac{dX(t)}{dt} = 3X_t^{3/2}$, $t \in [0,T]$, $X(0) = 0$

Условие Липшица не выполняются

$X_t = \begin{cases} 0, & t < a \\ (t-a)^3, & t \ge a \end{cases} \qquad a > 0,\ a \in [0,T]$ получили не единственное решение

<u>Теорема</u> (док-во в след. билете) Пусть b и σ удовлетворяют условиям 1° и 2°, $Z \in \mathcal{F}_0 | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $EZ^2 < \infty$. Тогда $\exists!$ сильное решение стохастического диф. ур-ния (*) с начальным условием Z (единственное в классе решений $\sup_{t \in [0,T]} EX_t^2 < \infty$)

<u>Лемма Гронуолла</u>

Пусть u и f — неотрицательные непрерывные функции такие, что для некоторого $k \ge 0$

$u(t) \le k + \int_0^t u(s)f(s)ds \qquad (**)$

Тогда

$u(t) \le k e^{\int_0^t f(s)ds}$

▷ Ф-ла (**) можно переписать в виде $\frac{u(t)f(t)}{k + \int_0^t u(s)f(s)ds} \le f(t)$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \ln\left(k + \int_0^t u(s)f(s)ds\right) \le f(t)$ проинтегрируем от 0 до t

$\Rightarrow \ln\left(\frac{k + \int_0^t u(s)f(s)ds}{k}\right) \le \int_0^t f(s)ds$

$\Rightarrow u(t) \le k + \int_0^t u(s)f(s)ds \le k e^{\int_0^t f(s)ds}$

Самостоятельно рассмотреть случай $k = 0$

т.к. тогда брать логарифм нельзя

40. Теорема существования и единственности сильного решения стохастического дифференциального уравнения.

<u>Теорема</u> Пусть b и σ удовлетворяют условию Липшица, $Z \in \mathcal{F}_0 | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $E Z^2 < \infty$. Тогда $\exists!$ сильное решение стохастич. диф. ур.

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \quad \text{с начальн. усл. } X_0 = Z$$

такое, что $X_t \in L^2(\Omega)$ для $\forall\ t \in [0,T]$ и EX_t^2 ограничена на $[0,T]$

▷ Воспользуемся методом последовательных приближений

$X_t^{(0)} = Z \quad , t \in [0,T]$

$X_t^{(n)} = Z + \int_0^t b(s, X_s^{(n-1)})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n-1)})dW_s$

(A) Оценим $E(X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)})^2$

при $n=0$:

$$E\left(\int_0^t b(s,Z)ds + \int_0^t \sigma(s,Z)dW_s\right)^2 \overset{(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2}{\le} 2E\left(\int_0^t b(s,Z)ds\right)^2 + 2E\left(\int_0^t \sigma(s,Z)dW_s\right)^2 \le$$

$\left(\left(\int_0^t b(s,Z)ds\right)^2 \underset{\text{Коши-Буняковского}}{\le} t\int_0^t b^2(s,Z)ds\right)$ + 2 усл Липшица

$$\le 2tE\int_0^t c(1+|Z|^2)ds \le 2t\cdot c(1+EZ^2)\cdot t \le t\cdot 2c(T(1+EZ^2)) \le t\cdot M_1$$

Для $n \ge 1$ и $t \in [0,T]$

$$E|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 = E\left(\int_0^t (b(s,X_s^{(n)}) - b(s,X_s^{(n-1)}))ds + \int_0^t (\sigma(s,X_s^{(n)}) - \sigma(s,X_s^{(n-1)}))dW_s\right)^2 \le$$

$$\le 2E\left(\int_0^t (b(s,X_s^{(n)}) - b(s,X_s^{(n-1)}))ds\right)^2 + 2E\left(\int_0^t (\sigma(s,X_s^{(n)}) - \sigma(s,X_s^{(n-1)}))^2 ds\right) \le \text{1 усл Липшица}$$

$$\le 2L^2T\int_0^t E|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2 ds$$

$\Rightarrow$ по индукции имеем: $E|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \le \frac{M^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!}$, где $M = \max\{M_1, 2L^2(1+T)\}$

Тогда при $m > n$ и $t \in [0,T]$

$$(E|X_t^{(m)} - X_t^{(n)}|^2)^{1/2} \le \sum_{k=n}^{m-1} \|X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}\|_{L^2(\Omega)} \le \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{(MT)^{k+1}}{(k+1)!}\right)^{1/2} \to 0 \text{ при } n\to\infty$$

Это значит, что $(X_t^{(n)})$ фундаментальная последовательность в $L^2(\Omega)$, следовательно, имеет предел: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} X_t^{(n)} := X_t$

X_t допускает непрерывную модификацию

(B) $$\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \le \int_0^T (b(s,X_s^{(n)}) - b(s,X_s^{(n-1)}))ds + \sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t \sigma(s,X_s^{(n)}) - \sigma(s,X_s^{(n-1)})dW_s\right)$$

По неравенству Дуба для непрерывн квадр. интегрируемых мартинг.

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t| \ge a\right) \le \frac{EX_t^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow P\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > 2^{-n}\right) \le P\left(\left(\int_0^T |b(s,X_s^{(n)}) - b(s,X_s^{(n-1)})|ds\right)^2 > 2^{-n-1}\right)$$

$$+ P\left(\sup_{0\le t\le T} \left|\int_0^t (\sigma(s,X_s^{(n)}) - \sigma(s,X_s^{(n-1)}))dW_s\right| > 2^{-n-1}\right) \le \ldots \le \frac{(4MT)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \sum P\left(\sup |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \le 2^{-n}\right) < \infty$$

$\Rightarrow$ по лемме Бореля-Кантелли следует, что

$$P\left(\sup_{0\le t\le T} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > 2^{-n} \text{ бесконечно часто}\right) = 0$$

Следовательно, для п.в. ω $\exists$ $N_0 = N_0(\omega)$ такое, что для всех $n \geq N_0(\omega)$

$$\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \leq 2^{-n}$$

Значит, последовательность $X_t^{(n)}(\omega) = X_t^0(\omega) + \sum_{k=0}^{n-1} (X_t^{(k+1)}(\omega) - X_t^{(k)}(\omega))$ состоящая из ф-ций, п.н. непрерывных на $[0,T]$, с вероятностью 1 равномерно сходится на этом отрезке

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\int_0^t b(s, X_s^{(n)})ds \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\Omega)} \int_0^t b(s, X_s)ds$$

$$\int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})ds \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\Omega)} \int_0^t \sigma(s, X_s)ds$$

и $\exists$ $n_k(\omega)$ т.ч. при $n > n_k$ сходится п.н.

(C) Пусть есть другое решение $Z, \tilde{Z}$, $X, \tilde{X}$

$$\underbrace{E|X_t - \tilde{X}_t|}_{u(t)} \leq 3\underbrace{E|Z-\tilde{Z}|^2}_{k} + \int_0^t E|X_s - \tilde{X}_s|^2 ds \cdot \underbrace{3(1+t)L^2}_{C_1}$$

$(a+b+c)^2 \leq 3a^2+3b^2+3c^2$

$u(t) \leq k e^s$, если $Z = \tilde{Z}$, то $k = 0$

$\Rightarrow E(\tilde{X}_t - X_t) = 0 \Rightarrow \tilde{X}_t = X_t \quad t \in [0,T]$

т.к. траектории непрерывны $\Rightarrow$

$P(X_t = \tilde{X}_t \quad \forall t \in [0,T]) = 1$

◁