

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция от 08.02.17. Случайные блуждания</b>	<b>3</b>
1.1	Понятие случайного процесса . . . . .	3
1.2	Случайные блуждания . . . . .	4
1.3	Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Лекция от 15.02.17. Ветвящиеся процессы и процессы восстановления</b>	<b>9</b>
2.1	Модель Гальтона–Ватсона . . . . .	9
2.2	Процессы восстановления . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Лекция от 22.02.17. Пуассоновские процессы</b>	<b>14</b>
3.1	Процессы восстановления (продолжение) . . . . .	14
3.2	Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным . . . . .	15
3.3	Элементарная теорема восстановления . . . . .	16
3.4	Пуассоновский процесс как процесс восстановления . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Лекция от 01.03.17. Точечные процессы</b>	<b>21</b>
4.1	Независимость приращений пуассоновского процесса . . . . .	21
4.2	Пространственный пуассоновский процесс . . . . .	22
4.3	Функционал Лапласа точечного процесса . . . . .	26
4.4	Маркирование пуассоновских процессов . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Лекция от 15.03.17. Процессы с независимыми приращениями</b>	<b>28</b>
5.1	Функционал Лапласа точечного процесса (продолжение) . . . . .	28
5.2	Теорема Колмогорова о согласованных распределениях . . . . .	33
5.3	Процессы с независимыми приращениями . . . . .	35
5.4	Модификация процесса . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Лекция от 22.03.17. Винеровский процесс</b>	<b>37</b>
6.1	Фильтрации. Марковские моменты . . . . .	37
6.2	Строго марковское свойство . . . . .	38
6.3	Функции Хаара и Шаудера . . . . .	42
6.4	Винеровский процесс . . . . .	44
<b>7</b>	<b>Лекция от 29.03.17. Свойства винеровского процесса</b>	<b>46</b>
7.1	Недифференцируемость траекторий броуновского движения . . . . .	46
7.2	Принцип отражения . . . . .	48
7.3	Теорема Башелье . . . . .	50
<b>8</b>	<b>Лекция от 05.04.17. Мартингалы</b>	<b>52</b>
8.1	Мартингалы. Определения. Примеры . . . . .	52
8.2	Разложение Дуба . . . . .	54
8.3	Формула Танаки . . . . .	55
8.4	Теорема Дуба об остановке . . . . .	57

<b>9</b>	<b>Лекция от 12.04.17. Марковские процессы</b>	<b>61</b>
9.1	Задача о разорении игрока . . . . .	61
9.2	Марковские процессы . . . . .	63
9.3	Свойства переходных вероятностей . . . . .	65
<b>10</b>	<b>Лекция от 19.04.17. Свойства марковских процессов</b>	<b>67</b>
10.1	Компьютерное моделирование марковских цепей с дискретным временем и конечным числом состояний . . . . .	67
10.2	Предельное поведение переходных вероятностей . . . . .	69
10.3	Генератор марковской цепи с непрерывным временем . . . . .	72
10.4	Инфинитезимальная матрица конечной марковской цепи . . . . .	74
<b>11</b>	<b>Лекция от 26.04.17. Применения марковских цепей</b>	<b>75</b>
11.1	Формулировка теоремы Дуба о консервативных цепях. Стационарные марковские цепи . . . . .	75
11.2	Обратимые цепи . . . . .	76
11.3	Метод Монте-Карло, использующий цепи Маркова . . . . .	77
<b>12</b>	<b>Лекция от 03.05.17. Слабая сходимость вероятностных мер. Ковариационные функции</b>	<b>78</b>
12.1	Слабая сходимость и сходимость по распределению . . . . .	78
12.2	Функциональные предельные теоремы . . . . .	79
12.3	Критерий согласия Колмогорова . . . . .	81
12.4	Гауссовские процессы . . . . .	82
12.5	Свойства ковариационных функций . . . . .	84
<b>13</b>	<b>Лекция от 10.05.17. Стационарные процессы</b>	<b>87</b>
13.1	Стационарные процессы . . . . .	87
13.2	Ортогональная случайная мера, заданная на алгебре . . . . .	88
13.3	Интеграл по ортогональной случайной мере, заданной на алгебре . . . . .	91
13.4	Интеграл по ортогональной случайной мере $Z$ , отвечающей $\sigma$ -конечной мере $\mu$ . . . . .	93
<b>14</b>	<b>Лекция от 17.05.17. Интеграл Ито</b>	<b>94</b>
14.1	Теорема Карунена . . . . .	94
14.2	Спектральное представление стационарного в широком смысле процесса . . . . .	98
14.3	Интеграл Ито . . . . .	98
14.4	Формула Ито . . . . .	100
<b>15</b>	<b>Лекция от 24.05.17. Стохастические дифференциальные уравнения</b>	<b>101</b>
15.1	Уравнение Ланжевена . . . . .	101
15.2	Стохастические дифференциальные уравнения . . . . .	105
	<b>Список литературы</b>	<b>115</b>

# 1 Лекция от 08.02.17

## Случайные блуждания

### 1.1 Понятие случайного процесса

**Определение 1.1.** Пусть  $V$  — множество, а  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра его подмножеств. Тогда  $(V, \mathcal{A})$  называется *измеримым пространством*.

**Определение 1.2.** Пусть есть  $(V, \mathcal{A})$  и  $(S, \mathcal{B})$  — два измеримых пространства,  $f: V \rightarrow S$  — отображение.  $f$  называется  $\mathcal{A}|\mathcal{B}$ -измеримым, если  $\forall B \in \mathcal{B} \ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ . Обозначение:  $f \in \mathcal{A}|\mathcal{B}$ .

**Определение 1.3.** Пусть есть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство,  $Y: \Omega \rightarrow S$  — отображение. Если  $Y \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$ , то  $Y$  называется *случайным элементом*.

**Определение 1.4.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство,  $Y: \Omega \rightarrow S$  — случайный элемент. *Распределение вероятностей, индуцированное случайным элементом  $Y$* , — это функция на множествах из  $\mathcal{B}$ , задаваемая равенством

$$P_Y(B) := P(Y^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

**Определение 1.5.** Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  — семейство измеримых пространств. *Случайный процесс, ассоциированный с этим семейством*, — это семейство случайных элементов  $X = \{X(t), t \in T\}$ , где

$$X(t): \Omega \rightarrow S_t, \quad X(t) \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t \quad \forall t \in T.$$

Здесь  $T$  — это произвольное параметрическое множество,  $(S_t, \mathcal{B}_t)$  — произвольные измеримые пространства.

*Замечание.* Если  $T \subset \mathbb{R}$ , то  $t \in T$  интерпретируется как время. Если  $T = \mathbb{R}$ , то время *непрерывно*; если  $T = \mathbb{Z}$  или  $T = \mathbb{Z}_+$ , то время *дискретно*; если  $T \subset \mathbb{R}^d$ , то говорят о *случайном поле*.

**Определение 1.6.** Случайные элементы  $X_1, \dots, X_n$  называются *независимыми*, если  $P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in B_k) \quad \forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_n$ .

**Теорема 1.1** (Ломницкого-Улама). Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$  — семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  существует семейство независимых случайных элементов  $X_t: \Omega \rightarrow S_t, X_t \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t$  таких, что  $P_{X_t} = Q_t, t \in T$ .

*Замечание.* Это значит, что на некотором вероятностном пространстве можно задать независимое семейство случайных элементов с наперед указанными распределениями. При этом  $T$  по-прежнему любое, как и  $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)_{t \in T}$  — произвольные вероятностные пространства. Независимость здесь означает независимость в совокупности  $\forall$  конечного поднабора.

## 1.2 Случайные блуждания

**Определение 1.7.** Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  - независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в  $\mathbb{R}^d$ . *Случайным блужданием в  $\mathbb{R}^d$*  называется случайный процесс с дискретным временем  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) такой, что

$$\begin{aligned} S_0 &:= x \in \mathbb{R}^d \quad (\text{начальная точка}); \\ S_n &:= x + X_1 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

**Определение 1.8.** *Простое случайное блуждание в  $\mathbb{Z}^d$*  — это такое случайное блуждание, что  $x = 0$  и

$$P(X = e_k) = P(X = -e_k) = \frac{1}{2d},$$

где  $e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0)$ ,  $k = 1, \dots, d$ .

**Определение 1.9.** Введем  $N := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$  ( $\leq \infty$ ). Это, по сути, число попаданий нашего процесса в точку 0. Простое случайное блуждание  $S = \{S_n, n \geq 0\}$  называется *возвратным*, если  $P(N = \infty) = 1$ ; *невозвратным*, если  $P(N < \infty) = 1$ .

**Определение 1.10.** Число  $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$  ( $\tau := \infty$ , если  $S_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ) называется *моментом первого возвращения в 0*.

*Замечание.* Следует понимать, что хотя определение 1.9 подразумевает, что  $P(N = \infty)$  равно либо 0, либо 1, пока что это является недоказанным фактом. Это свойство будет следовать из следующей леммы.

**Лемма 1.2.** Для  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P(N = n) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1}.$$

*Доказательство.* При  $n = 1$  формула верна:  $\{N = 1\} = \{\tau = \infty\}$ . Докажем по индукции.

$$\begin{aligned} P(N = n + 1, \tau < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N = n + 1, \tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_{m+k} - S_k = 0\} = n, \tau = k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S'_m = 0\} = n\right) P(\tau = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N' = n) P(\tau = k), \end{aligned}$$

где  $N'$  определяется по последовательности  $X'_1 = X_{k+1}$ ,  $X'_2 = X_{k+2}$  и так далее. Из того, что  $X_i$  — независимые одинаково распределенные случайные векторы, следует, что  $N'$  и  $N$  распределены одинаково. Таким образом, получаем, что

$$P(N = n + 1, \tau < \infty) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Заметим теперь, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n + 1, \tau < \infty) + P(N = n + 1, \tau = \infty),$$

где второе слагаемое обнуляется из-за того, что  $n + 1 \geq 2$ . Из этого следует, что

$$P(N = n + 1) = P(N = n) P(\tau < \infty).$$

Пользуемся предположением индукции и получаем, что

$$P(N = n + 1) = P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^n,$$

что и завершает доказательство леммы.  $\square$

**Следствие.**  $P(N = \infty)$  равно 0 или 1.  $P(N < \infty) = 1 \Leftrightarrow P(\tau < \infty) < 1$ .

*Доказательство.* Пусть  $P(\tau < \infty) < 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} P(N < \infty) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = \\ &= \frac{P(\tau = \infty)}{1 - P(\tau < \infty)} = \frac{P(\tau = \infty)}{P(\tau = \infty)} = 1. \end{aligned}$$

Это доказывает первое утверждение следствия и импликацию справа налево в формулировке следствия. Докажем импликацию слева направо.

$$\begin{aligned} P(\tau < \infty) = 1 &\Rightarrow P(\tau = \infty) = 0 \Rightarrow P(N = n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(N < \infty) = 0. \end{aligned}$$

Следствие доказано.  $\square$

**Теорема 1.3.** Простое случайное блуждание в  $\mathbb{Z}^d$  возвратно  $\Leftrightarrow EN = \infty$  (соответственно, не возвратно  $\Leftrightarrow EN < \infty$ ).

*Доказательство.* Если  $EN < \infty$ , то  $P(N < \infty) = 1$ . Пусть теперь  $P(N < \infty) = 1$ . Это равносильно тому, что  $P(\tau < \infty) < 1$ .

$$\begin{aligned} EN &= \sum_{n=1}^{\infty} n P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau = \infty) P(\tau < \infty)^{n-1} = \\ &= P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau < \infty)^{n-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} p^n \right)' = \left( \frac{1}{1-p} \right)' = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Тогда, продолжая цепочку равенств, получаем, что

$$P(\tau = \infty) \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau < \infty)^{n-1} = \frac{P(\tau = \infty)}{(1 - P(\tau < \infty))^2} = \frac{1}{1 - P(\tau < \infty)},$$

что завершает доказательство теоремы.  $\square$

*Замечание.* Заметим, что поскольку  $N = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = 0\}$ , то

$$EN = \sum_{n=0}^{\infty} E\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0),$$

где перестановка местами знаков матожидания и суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда. Таким образом,

$$S \text{ возвратно} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) = \infty.$$

**Следствие.**  $S$  возвратно при  $d = 1$  и  $d = 2$ .

*Доказательство.* Заметим, что

$$P(S_{2n} = 0) = \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2}.$$

$$\text{Случай } d = 1: P(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

Согласно формуле Стирлинга,

$$m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Соответственно,

$$P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow$  блуждание возвратно. Аналогично рассматривается случай  $d = 2$ :

$$P(S_{2n} = 0) = \dots = \left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right\}^2 \sim \frac{1}{\pi n}$$

$\Rightarrow$  ряд тоже разойдется  $\Rightarrow$  блуждание возвратно (подробнее см. [2], т.1, стр. 354). Теорема доказана.  $\square$

### 1.3 Исследование случайного блуждания с помощью характеристической функции

**Теорема 1.4.** Для простого случайного блуждания в  $\mathbb{Z}^d$

$$\mathbb{E}N = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt,$$

где  $\varphi(t)$  — характеристическая функция  $X$ ,  $t \in \mathbb{R}^d$ .

*Доказательство.*  $\int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{inx}}{2\pi} dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$ . Следовательно,

$$\mathbb{I}\{S_n = 0\} = \prod_{k=1}^d \mathbb{I}\{S_n^{(k)} = 0\} = \prod_{k=1}^d \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{iS_n^{(k)} t_k}}{2\pi} dt_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt.$$

По теореме Фубини

$$\mathbb{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathbb{E} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(S_n, t)} dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E} e^{i(S_n, t)} dt.$$

Заметим, что

$$\mathbb{E} e^{i(S_n, t)} = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = (\varphi(t))^n.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\mathbb{I}(S_n = 0) = \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} (\varphi(t))^n dt.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt, \quad \text{где } 0 < c < 1.$$

Поскольку  $|c\varphi| \leq c < 1$ , то ряд под интегралом сходится равномерно и

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{n=0}^{\infty} (c\varphi(t))^n dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - c\varphi(t)} dt$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \mathbb{P}(S_n = 0) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{E}N, \quad c \uparrow 1,$$

где предельный переход возможен в силу неотрицательности слагаемых, что и завершает доказательство теоремы.  $\square$

**Следствие** (теорема Пойа). *При  $d \geq 3$  простое случайное блуждание невозвратно.*

*Доказательство.* Запишем характеристическую функцию  $X$  в явном виде:

$$\varphi(t) = \mathbb{E}e^{i(t,X)} = \sum_{k=1}^d \left( \frac{1}{2d} e^{it_k} + \frac{1}{2d} e^{-it_k} \right) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \cos(t_k).$$

Тогда

$$\mathbb{E}N = \lim_{c \uparrow 1} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - \frac{c}{d}(\cos(t_1) + \dots + \cos(t_d))} dt.$$

Из вида подынтегрального выражения ясно, что расходимость может происходить только из-за особенности  $t = 0$ . Введем обозначения

$$B_\delta := (-\delta, \delta)^d, \quad V_\delta := [-\pi, \pi]^d \setminus B_\delta.$$

Ясно, что

$$\forall d \in \mathbb{N} \quad \int_{V_\delta} \frac{1}{1 - \frac{c}{d}(\cos(t_1) + \dots + \cos(t_d))} dt < \infty.$$

Поэтому для того чтобы понять, сходится интеграл или нет, достаточно посмотреть на интеграл по замыканию малой окрестности нуля  $B_\delta$ . Воспользуемся разложением косинуса в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{1 - \frac{c}{d}(\cos(t_1) + \dots + \cos(t_k))} \sim \frac{1}{1 - \frac{1}{d}(1 - t_1^2 + \dots + 1 - t_d^2)} \sim \frac{d}{\|t\|^2},$$

где

$$c \uparrow 1, \quad t \rightarrow 0.$$

Поскольку якобиан перехода к  $d$ -мерной сферической системе координат содержит множитель  $R$  в степени  $d - 1$ , то интеграл сойдется  $\Leftrightarrow d \geq 3$ . Теорема доказана.  $\square$

*Доказательство (комбинаторное).* Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) &= \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{2n!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2} \left( \frac{1}{2d} \right)^{2n} = \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \left( \frac{n!}{n_1! \dots n_d!} \right)^2 \left( \frac{1}{2d} \right)^{2n} \leq \\ &\leq \frac{(2n)!}{n!n!} \left( \frac{1}{2d} \right)^{2n} \frac{n!}{((n/d)!)^d} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_d!} \sim \\ &\sim \frac{(2n)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{n^{2n} \sqrt{2\pi n}^2} \left( \frac{1}{2d} \right)^{2n} \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{(n/d)^n \sqrt{2\pi n/d}^d} d^n = \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{d/2}}{(2\pi)^{d/2-1/2}} n^{-d/2} = \Theta(n^{-d/2})$$

по формуле Стирлинга. Соответственно, при  $d \geq 3$  ряд из вероятностей сходится, что и требовалось доказать (подробнее см. [2], т.1, стр. 354).  $\square$

*Замечание.* Можно говорить и о случайных блужданиях в  $\mathbb{R}^d$ , если  $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Но тогда о возвратности приходится говорить в терминах бесконечно частого попадания в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x$ .

**Определение 1.11.** Пусть есть случайное блуждание  $S$  на  $\mathbb{R}^d$ . Тогда *множество возвратности* случайного блуждания  $S$  — это множество

$$R(S) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \text{блуждание возвратно в } \varepsilon\text{-окрестности точки } x \right\}$$

**Определение 1.12.** Пусть есть случайное блуждание  $S$  на  $\mathbb{R}^d$ . Тогда *точки, достижимые случайным блужданием  $S$* , — это множество  $P(S)$  такое, что

$$\forall z \in P(S) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n : P(\|S_n - z\| < \varepsilon) > 0.$$

**Теорема 1.5** (Чжуна-Фукса). Если  $R(S) \neq \emptyset$ , то  $R(S) = P(S)$ .

**Следствие.** Если  $0 \in R(S)$ , то  $R(S) = P(S)$ ; если  $0 \notin R(S)$ , то  $R(S) = \emptyset$ .

*Замечание.* Подробнее см. [1], стр. 65.

## 2 Лекция от 15.02.17

### Ветвящиеся процессы и процессы восстановления

#### 2.1 Модель Гальтона–Ватсона

**Описание модели** Пусть  $\{\xi, \xi_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}\}$  — массив независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$P(\xi = m) = p_m \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Такие существуют в силу теоремы Ломницкого–Улама. Положим

$$Z_0(\omega) := 1, \\ Z_n(\omega) := \sum_{k=1}^{Z_{n-1}(\omega)} \xi_{n,k}(\omega) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Здесь подразумевается, что если  $Z_{n-1}(\omega) = 0$ , то и вся сумма равна нулю. Таким образом, рассматривается сумма случайного числа случайных величин. Определим  $A = \{\omega : \exists n = n(\omega), Z_n(\omega) = 0\}$  — *событие вырождения популяции*. Заметим, что если  $Z_n(\omega) = 0$ , то  $Z_{n+1}(\omega) = 0$ . Таким образом,  $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$  и  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$ .

По свойству непрерывности вероятностной меры,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0).$$

**Определение 2.1.** Пусть дана последовательность  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  неотрицательных чисел такая, что  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$ . Производящая функция для этой последовательности — это

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k a_k, \quad |s| \leq 1$$

(нас в основном будут интересовать  $s \in [0, 1]$ ).

Заметим, что если  $a_k = P(Y = k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , то

$$f_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Y = k) = E s^Y, \quad s \in [0, 1].$$

**Лемма 2.1.** Вероятность  $P(A)$  является корнем уравнения  $\psi(p) = p$ , где  $\psi = f_{\xi}$  и  $p \in [0, 1]$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(s) &= E s^{Z_n} = E \left( s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left[ \left( s^{\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left[ \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку  $\sigma\{Z_r\} \subset \sigma\{\xi_{m,k}, m = 1, \dots, r, k \in \mathbb{N}\}$ , которая независима с  $\sigma\{\xi_{n,k}, k \in \mathbb{N}\}$  (строгое и полное обоснование остается в качестве упражнения (на самом деле все тут понятно: первый множитель под матожиданием является борелевской функцией от  $\xi_{n,\bullet}$ , а второй — от  $\xi_{i,\bullet}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , эти два множества случайных величин независимы)), то

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} E \left[ \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} \right] &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) E \mathbb{I}\{Z_{n-1} = j\} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left( s^{\sum_{k=1}^j \xi_{n,k}} \right) P(Z_{n-1} = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^j E s^{\xi_{n,k}} P(Z_{n-1} = j) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{\xi}^j(s) P(Z_{n-1} = j) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)) \end{aligned}$$

в силу независимости и одинаковой распределенности  $\xi_{n,k}$  и определения производящей функции. Таким образом,

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(s)), \quad s \in [0, 1].$$

Подставим  $s = 0$  и получим, что

$$f_{Z_n}(0) = f_{Z_{n-1}}(\psi_{\xi}(0))$$

Заметим, что

$$f_{Z_n}(s) = f_{Z_{n-1}}(\psi_\xi(s)) = f_{Z_{n-2}}(\psi_\xi(\psi_\xi(s))) = \dots = \underbrace{\psi_\xi(\psi_\xi \dots (\psi_\xi(s)) \dots)}_{n \text{ итераций}} = \psi_\xi(f_{Z_{n-1}}(s)).$$

Тогда при  $s = 0$  имеем, что

$$P(Z_n = 0) = \psi_\xi(P(Z_{n-1} = 0)).$$

Но  $P(Z_n = 0) \nearrow P(A)$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $\psi_\xi$  непрерывна на  $[0, 1]$ . Переходим к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда

$$P(A) = \psi_\xi(P(A)),$$

то есть  $P(A)$  — корень уравнения  $p = \psi_\xi(p)$ ,  $p \in [0, 1]$ .  $\square$

**Теорема 2.2.** Вероятность  $p$  вырождения процесса Гальтона–Ватсона есть **наименьший** корень уравнения

$$\psi(p) = p, \quad p \in [0, 1], \quad (1)$$

где  $\psi = \psi_\xi$ .

*Доказательство.* Пусть  $p_0 := P(\xi = 0) = 0$ . Тогда

$$P(\xi \geq 1) = 1, \quad P\left(\bigcap_{n,k} \{\xi_{n,k} \geq 1\}\right) = 1.$$

Поэтому  $Z_n \geq 1$  п.н. при  $\forall n$ , то есть  $P(A) = 0$  — наименьший корень уравнения (1), поскольку  $\psi(0) = 0$ .

Пусть теперь  $p_0 = 1$ . Тогда  $P(\xi = 0) = 1 \Rightarrow P(A) = 1$  — наименьший корень уравнения (1), поскольку  $\psi \equiv 1$ .

Пусть, наконец,  $0 < p_0 < 1$ . Из этого следует, что  $\exists m \in \mathbb{N}$ :  $p_m > 0$ , а значит,  $\psi$  строго возрастает на  $[0, 1]$ . Рассмотрим

$$\Delta_n = [\psi_n(0), \psi_{n+1}(0)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\psi_n(s)$  — это производящая функция  $Z_n$ . Пусть  $s \in \Delta_n$ . Тогда из монотонности  $\psi$  на  $[0, 1]$  получаем, что

$$\psi(s) - s > \psi(\psi_n(0)) - \psi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(0) - \psi_{n+1}(0) = 0,$$

что означает, что у уравнения (1) нет корней на  $\Delta_n \forall n \in \mathbb{Z}_+$ . Заметим, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n = [0, P(A)], \quad \psi_n(0) \nearrow P(A).$$

По лемме 2.1  $P(A)$  является корнем уравнения (1). Следовательно, показано, что  $P(A)$  — наименьший корень, что и требовалось доказать.  $\square$

**Теорема 2.3.** 1. Вероятность вырождения  $P(A)$  есть нуль  $\Leftrightarrow p_0 = 0$ .

2. Пусть  $p_0 > 0$ . Тогда при  $E\xi \leq 1$  имеем  $P(A) = 1$ , при  $E\xi > 1$  имеем  $P(A) < 1$ .

*Доказательство.* 1. Пусть  $P(A) = 0$ . Тогда  $p_0 = 0$ , потому что иначе была бы ненулевая вероятность вымирания  $P(A) \geq P(Z_1 = 0) = p_0$ . В другую сторону, если  $p_0 = 0$ , то вымирания не происходит (почти наверное) из-за того, что у каждой частицы есть как минимум один потомок (почти наверное).

2. Знаем, что

$$\psi_\xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k, \quad \psi_\xi(1) = 1, \quad \exists \psi'_\xi(s), \quad s \in (0, 1).$$

Воспользуемся формулой Лагранжа:  $\forall s \in (0, 1)$

$$\psi_\xi(1) - \psi_\xi(s) = \psi'_\xi(\theta)(1 - s), \quad \theta \in (s, 1).$$

Формулой Лагранжа можно пользоваться, поскольку  $\psi_\xi(s)$  непрерывна на отрезке  $[0, 1]$  и дифференцируема на интервале  $(0, 1)$ . Тогда

$$\psi_\xi(s) - s = 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1 - s) = (1 - s) \left( 1 - \psi'_\xi(\theta) \right).$$

Знаем, что при  $s \in (0, 1)$

$$\psi'_\xi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} p_k, \quad \psi''_\xi(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) s^{k-2} p_k.$$

Заметим, что если  $\exists p_k > 0$ ,  $k \geq 2$ , то  $\psi''_\xi(s) > 0$ ,  $s \in (0, 1)$ , а значит,  $\psi'_\xi(s)$  строго возрастает на  $s \in (0, 1)$ . Будем сначала рассматривать этот случай.

- (а) Пусть  $E\xi = \psi'_\xi(1) \leq 1$ . Из этого следует, что  $\psi'_\xi(\theta) < 1$ . Тогда получаем, что

$$\psi_\xi(s) - s = 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1 - s) = (1 - s) \left( 1 - \psi'_\xi(\theta) \right) > 0 \quad \forall s \in (0, 1),$$

причем  $\psi_\xi(0) - 0 = p_0 > 0$  по условию. Из этого следует, что наименьшим корнем уравнения  $\psi_\xi(s) - s = 0$  будет  $s = 1$ .

- (б) Пусть  $E\xi = \psi'_\xi(1) > 1$ . Тогда для всех  $s$ , достаточно близких к 1,

$$\psi'_\xi(\theta) > 1, \quad \theta \in (s, 1),$$

в силу непрерывности производящей функции на отрезке  $[0, 1]$ . Тогда

$$\psi_\xi(s) - s = 1 - s - \psi'_\xi(\theta)(1 - s) = (1 - s) \left( 1 - \psi'_\xi(\theta) \right) < 0,$$

при этом  $\psi_\xi(0) - 0 = p_0 > 0$  по условию. Это значит, что на интервале  $(0, 1)$  найдется корень уравнения  $\psi_\xi(s) - s = 0$  в силу непрерывности производящей функции.

(с) Рассмотрим теперь случай  $p_k = 0 \forall k \geq 2$ . В рамках этого предположения

$$\psi_\xi(s) = p_0 + (1 - p_0)s,$$

а значит,

$$\psi_\xi(s) - s = p_0 + (1 - p_0)s - s = p_0(1 - s) > 0 \quad \forall s < 1.$$

Из этого следует, что у уравнения  $\psi_\xi(s) - s = 0$  наименьший корень на отрезке  $[0, 1]$  — это  $s = 1$ . Теорема доказана.  $\square$

**Следствие.** Пусть  $E\xi < \infty$ . Тогда  $EZ_n = (E\xi)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.* Доказательство проводится по индукции.

База индукции:  $n = 1 \Rightarrow EZ_1 = E\xi$ .

Индуктивный переход:

$$EZ_n = E \left( \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} j E\xi P(Z_{n-1} = j) = E\xi EZ_{n-1} = (E\xi)^n.$$

$\square$

**Определение 2.2.**

При  $E\xi < 1$  процесс называется *докритическим*.

При  $E\xi = 1$  процесс называется *критическим*.

При  $E\xi > 1$  процесс называется *надкритическим*.

## 2.2 Процессы восстановления

**Определение 2.3.** Пусть  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X, X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $X \geq 0$ . Положим

$$Z(0) := 0;$$

$$Z(t) := \sup \{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

(здесь считаем, что  $\sup \emptyset := 0$ ,  $\sup \mathbb{N} := \infty$ ). Таким образом,

$$Z(t, \omega) = \sup \{n \in \mathbb{N} : S_n(\omega) \leq t\}.$$

Иными словами,

$$\{Z(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}.$$

Так определенный процесс  $Z(t)$  называется *процессом восстановления*.

*Замечание.* Полезно заметить, что

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

**Определение 2.4.** Рассмотрим вспомогательный процесс восстановления  $\{Z^*(t), t \geq 0\}$ , который строится по  $Y, Y_1, Y_2, \dots$  — независимым одинаково распределенным случайным величинам, где

$$P(Y = \alpha) = p \in (0, 1); \quad P(Y = 0) = q = 1 - p.$$

Исключаем из рассмотрения случай, когда  $Y = C = \text{const}$ : если  $C = 0$ , то  $Z(t) = \infty \quad \forall t > 0$ ; если же  $C > 0$ , то  $Z(t) = \left\lfloor \frac{t}{c} \right\rfloor$ .

**Лемма 2.4.**

$$P(Z^*(t) = m) = \begin{cases} C_m^j p^{j+1} q^{m-j}, & \text{где } j = \left\lfloor \frac{t}{\alpha} \right\rfloor, \text{ если } m \geq j; \\ 0 & \text{, если } m < j, \end{cases}$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ .

**Определение 2.5.**  $U$  имеет геометрическое распределение с параметром  $p \in (0, 1)$ , если  $P(U = k) = (1 - p)^k p$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

*Замечание.* Наглядная иллюстрация этой случайной величины такова: это число неудач до первого успеха, если вероятность успеха равна  $p$ , а вероятность неудачи, соответственно, равна  $1 - p$ .

**Лемма 2.5.** Рассмотрим независимые геометрические величины  $U_0, \dots, U_j$  с параметром  $p \in (0, 1)$ . Тогда  $\forall t \geq \alpha$  и  $m \geq j$

$$P(j + U_0 + \dots + U_j = m) = P(Z^*(t) = m).$$

### 3 Лекция от 22.02.17

#### Пуассоновские процессы

##### 3.1 Процессы восстановления (продолжение)

*Доказательство.* Заметим, что

$$P(U_0 + \dots + U_j = m - j) = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} P(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j).$$

В силу независимости  $U_i$  получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} P(U_0 = k_0, \dots, U_j = k_j) &= \\ &= \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} P(U_0 = k_0) \dots P(U_j = k_j) = \\ &= \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} p(1 - p)^{k_0} \dots p(1 - p)^{k_j} = \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} p^{j+1} (1 - p)^{k_0 + \dots + k_j} = \\ &= \sum_{\substack{k_0, \dots, k_j \geq 0 \\ k_0 + \dots + k_j = m - j}} p^{j+1} (1 - p)^{m-j} = p^{j+1} (1 - p)^{m-j} \#M, \end{aligned}$$

где  $M$  — множество всевозможных упорядоченных наборов целых чисел  $k_j$ , удовлетворяющих условию под знаком суммы, а  $\#M$  — мощность этого множества. Заметим, что задача нахождения  $\#M$  эквивалентна "задаче о перегородках" из курса теории вероятностей с числом элементов  $m-j$  и числом перегородок  $j$ . Таким образом,

$$\#M = C_m^j,$$

и, соответственно,

$$\mathbf{P}(U_0 + \dots + U_j = m - j) = C_m^j p^{j+1} (1-p)^{m-j},$$

что и требовалось доказать.  $\square$

### 3.2 Сопоставление исходного процесса восстановления со вспомогательным

**Лемма 3.1.** Пусть  $t > \alpha$ . Тогда

$$\mathbf{E}Z^*(t) \leq At, \quad \mathbf{E}(Z^*(t))^2 \leq Bt^2,$$

где  $A = A(p, \alpha) > 0$ ,  $B = B(p, \alpha) > 0$ .

*Доказательство.* По лемме 2.5

$$\mathbf{E}Z^*(t) = \mathbf{E}(j + U_0 + \dots + U_j) = j + (j+1)\mathbf{E}U,$$

где

$$\mathbf{E}U = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p = a(p) < \infty.$$

Следовательно,

$$j + (j+1)\mathbf{E}U = j + (j+1)a(p) \leq (j+1)(a(p)+1) \leq \frac{2t}{\alpha}(a(p)+1) = At,$$

поскольку  $j = \left\lfloor \frac{t}{\alpha} \right\rfloor \leq \frac{t}{\alpha}$ , а  $t > \alpha$ ; здесь  $A = \frac{2(a(p)+1)}{\alpha}$ . Рассмотрим теперь  $\mathbf{E}(Z^*(t))^2$ .

$$\mathbf{E}(Z^*(t))^2 = \mathbf{D}Z^*(t) + (\mathbf{E}Z^*(t))^2 = (j+1)\mathbf{D}U + (\mathbf{E}Z^*(t))^2.$$

Обозначим через  $\sigma^2(p) := \mathbf{D}U$ . Используя оценку выше для  $\mathbf{E}Z^*(t)$ , получаем, что

$$(j+1)\mathbf{D}U + (\mathbf{E}Z^*(t))^2 \leq (j+1)^2 \left( \sigma^2(p) + (a(p)+1)^2 \right) \leq Bt^2,$$

так как  $(j+1)^2 \geq (j+1)$ . Лемма доказана.  $\square$

*Замечание.* Пусть случайная величина  $X \geq 0$ ,  $X$  отлична от константы. Тогда

$$\exists \alpha > 0 : \mathbf{P}(X > \alpha) = p \in (0, 1).$$

Определим тогда по  $X$  вспомогательный процесс восстановления  $Z^* = \{Z^*(t), t \geq 0\}$ : пусть

$$Y_n = \begin{cases} \alpha, & X_n > \alpha \\ 0, & X_n \leq \alpha \end{cases}.$$

По построению  $Y_n \leq X_n \Rightarrow Z(t) \leq Z^*(t) \quad \forall t \geq 0$ . Тогда  $\forall t > \alpha$

$$\mathbb{E}Z(t) \leq \mathbb{E}Z^*(t) < \infty, \quad \mathbb{E}(Z(t))^2 \leq \mathbb{E}(Z^*(t))^2 \Rightarrow Z(t) < \infty$$

почти наверное.

**Следствие.**  $\mathbb{P}(\forall t \geq 0 \quad Z(t) < \infty) = 1$ .

*Доказательство.*  $Z$  является неубывающим процессом:

$$s \leq t \Rightarrow Z(s) \leq Z(t) \Rightarrow \mathbb{P}(Z(t) < \infty \quad \forall t \geq 0) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z(n) < \infty\}\right).$$

Поскольку счетное пересечение множеств вероятности 1 имеет вероятность 1, то

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z(n) < \infty\}\right) = 1,$$

что и завершает доказательство.  $\square$

**Следствие.**  $\mathbb{E}Z(t) \leq At; \quad \mathbb{E}(Z(t))^2 < Bt^2, \quad t > \alpha$ .

### 3.3 Элементарная теорема восстановления

**Лемма 3.2.** Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $X \geq 0$ . Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu \in [0, \infty], \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $\mu = \mathbb{E}X$ .

*Доказательство.* Если  $\mu < \infty$ , то утверждение следует из УЗБЧ. Пусть теперь  $\mu = \infty$ . Положим для  $c > 0$

$$V_n(c) := X_n \mathbb{I}\{X_n \leq c\}.$$

Тогда по УЗБЧ

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k(c) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}X \mathbb{I}\{X \leq c\}.$$

Возьмем  $c = m \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k = \mathbb{E}X \mathbb{I}\{X \leq m\} \text{ почти наверное.}$$



Тогда по теореме о монотонной сходимости

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} X \mathbb{I}\{X \leq m\} = \mathbb{E} X = \mu = \infty,$$

что и завершает доказательство леммы.  $\square$

**Теорема 3.3.** Пусть  $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$  — процесс восстановления, построенный по последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин  $X, X_1, X_2, \dots, X \geq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{Z(t)}{t} &\xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty; \\ \frac{\mathbb{E} Z(t)}{t} &\rightarrow \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где  $\frac{1}{0} := \infty, \frac{1}{\infty} := 0$ .

*Доказательство.* Если  $\mu = 0$ , то  $X_n = 0$  почти наверное, поэтому утверждение теоремы верно ( $Z(t) = \infty \forall t$ ).

Далее  $\mu > 0$ . Заметим, что для  $t > 0$

$$S_{Z(t)} \leq t < S_{Z(t)+1}. \quad (2)$$

Поскольку  $Z(t_n, \omega) = n$ , если  $t_n = S_n(\omega)$ , то  $Z(t) \rightarrow \infty$  почти наверное ( $Z$  монотонна по  $t$ ). Итак, рассмотрим  $(t, \omega)$  такие, что

$$0 < Z(t, \omega) < \infty \quad \text{почти наверное.}$$

Тогда для этих  $(t, \omega)$  поделим обе части неравенства (2) на  $Z(t)$ :

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \leq \frac{t}{Z(t)} \leq \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \frac{Z(t)+1}{Z(t)}.$$

Согласно лемме 3.2,

$$\frac{S_{Z(t)}}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \quad \frac{S_{Z(t)+1}}{Z(t)+1} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \quad \frac{Z(t)+1}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 1.$$

Следовательно,

$$\frac{t}{Z(t)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu, \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\frac{Z(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty,$$

что завершает доказательство первого утверждения теоремы.

Следует понимать, что второе утверждение из первого нельзя получить, попросту "навесив" на него сверху матожидание: вообще говоря,

$$\xi_t \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \not\Rightarrow \mathbb{E} \xi_t \rightarrow \mathbb{E} \xi, \quad t \rightarrow \infty:$$

наглядным примером является последовательность

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} t, & \omega \in [0, 1/t] \\ 0, & \omega \notin [0, 1/t] \end{cases}.$$

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, введем следующее понятие.

**Определение 3.1.** Семейство случайных величин  $\{\xi_t, t > \alpha\}$  называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\sup_{t > \alpha} \mathbb{E} \left( |\xi_t| \mathbb{I} \{ |\xi_t| > c \} \right) \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty.$$

Без доказательства предлагаются следующие утверждения.

**Теорема 3.4.** Если  $\{\xi_t, t > \alpha\}$  равномерно интегрируемо, то  $\mathbb{E}\xi_t \rightarrow \mathbb{E}\xi$ . Для неотрицательных случайных величин это условие является необходимым и достаточным.

**Теорема 3.5** (де ла Валле Пуссена).  $\{\xi_t, t > \alpha\}$  равномерно интегрируемо  $\Leftrightarrow \exists$  неубывающая функция  $g$  такая, что

$$\frac{g(t)}{t} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \sup_t \mathbb{E}g(|\xi_t|) < \infty.$$

Возьмем  $g(t) := t^2$ ,  $\xi_t := \frac{Z(t)}{t}$ ,  $t > 0$ . Тогда по лемме 3.1

$$\mathbb{E}(\xi_t)^2 = \frac{\mathbb{E}(Z(t))^2}{t^2} \leq \frac{Bt^2}{t^2} = B < \infty,$$

что позволяет нам использовать теорему 3.5 и получить по теореме 3.4 второе утверждение теоремы 3.3, что и требовалось сделать.  $\square$

### 3.4 Пуассоновский процесс как процесс восстановления

**Определение 3.2.** Пусть  $X, X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ , то есть

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Тогда пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$   $N = \{N(t), t \geq 0\}$  есть процесс восстановления, построенный на  $\{X_i\}$ .

**Определение 3.3.** Определим для  $t > 0$

$$\begin{aligned} X_1^t &:= S_{N(t)+1} - t, \\ X_k^t &:= X_{N(t)+k}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

**Лемма 3.6.** Для  $\forall t > 0$  величины  $N(t), X_1^t, X_2^t, \dots$  независимы, причем

$$N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t), \quad X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda), \quad k = 1, 2, \dots$$

*Доказательство.* Для доказательства независимости достаточно показать, что для  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}_+, \forall u_1, \dots, u_k \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u, \dots, X_k^t \geq u_k) &= \\ &= \mathbb{P}(N(t) = n) \mathbb{P}(X_1^t \geq u_1) \dots \mathbb{P}(X_k^t \geq u_k). \end{aligned}$$

Будем доказывать это равенство по индукции по  $k$ .  
Докажем базу индукции:  $k = 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(N(t) = n, X_1^t \geq u_1\right) &= \mathbf{P}\left(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{N(t)+1} - t \geq u_1\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(S_n \leq t, S_{n+1} \geq t + u_1\right), \end{aligned}$$

поскольку

$$\{S_n \leq t, S_{n+1} > t\} = \{N(t) = n\}.$$

Из курса теории вероятностей известно, что если

$$S_n = X_1 + \dots + X_n,$$

где  $X_i$  независимы и  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ , то

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(S_n \leq t, S_{n+1} \geq t + u_1\right) &= \mathbf{P}\left(S_n \leq t, S_n + X_{n+1} \geq t + u_1\right) = \\ &= \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1}} p_{S_n}(x) p_{X_{n+1}}(y) dx dy = \\ &= \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1 \\ y \geq 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx dy \end{aligned}$$

в силу независимости  $S_n$  и  $X_{n+1}$ . Воспользуемся теоремой Фубини, чтобы вычислить этот интеграл:

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ x+y \geq t+u_1 \\ y \geq 0}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx dy &= \int_0^t \frac{\lambda (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx \int_{t+u_1-x}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = \\ &= \int_0^t \frac{\lambda (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+u_1-x)} dx = e^{-\lambda(t+u_1)} \int_0^t \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \\ &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$\mathbf{P}\left(N(t) = n, X_1^t \geq u_1\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1}. \quad (3)$$

Возьмем в равенстве (3)  $u_1 = 0$  и получим, что

$$\mathbf{P}\left(N(t) = n\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

то есть

$$N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t).$$

Теперь просуммируем равенство (3) по всем  $n \in \mathbb{Z}_+$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u_1) &= \mathbb{P}(X_1^t \geq u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda u_1} = \\ &= e^{-\lambda u_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda u_1}, \end{aligned}$$

то есть

$$X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Таким образом, полностью доказана база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода: пусть  $k \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n, X_1^t \geq u, \dots, X_k^t \geq u_k) &= \\ &= \mathbb{P}\left(\underbrace{S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{n+1} - t \geq u_1}_{\text{зависят от } X_1, \dots, X_{n+1}}, \underbrace{X_{n+2} \geq u_2, \dots, X_{n+k} \geq u_k}_{\text{зависят от } X_{n+2}, \dots}\right) = \\ &= \mathbb{P}(N(t) = n) \underbrace{\mathbb{P}(X_1 \geq u_1)}_{= e^{-\lambda u_1}} e^{-\lambda u_2} \dots e^{-\lambda u_k} = \mathbb{P}(N(t) = n) e^{-\lambda u_1} \dots e^{-\lambda u_k} \end{aligned}$$

по предположению индукции. Таким образом, доказано, что

$$X_k^t \sim \text{Exp}(\lambda),$$

а также показана независимость. Теорема доказана.  $\square$

*Замечание* (парадокс времени ожидания). Из доказанного следует, что

$$X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda), \quad X_{N(t)+1} \sim \text{Exp}(\lambda),$$

несмотря на то что отрезок длины  $X_{N(t)+1}$  содержит отрезок длины  $X_1^t$  по определению. Можно привести следующую иллюстрацию: пусть автобусы подходят на остановку в случайные моменты времени  $S_n$ , то есть между последовательными прибытиями автобусов на остановку проходят случайные промежутки времени  $X_i$ , а мы пришли на остановку в момент времени  $t$  и хотим понять, как распределено время нашего ожидания следующего автобуса; в частности, нам интересно, сколько в среднем мы будем этот автобус ждать. Из достигнутого выше результата следует, что время ожидания нами этого автобуса распределено так же (и имеет то же среднее), как и время между прибытиями автобусов. Разгадка этого "парадокса" заключается в том, что концы отрезков также случайны.

## 4 Лекция от 01.03.17

### Точечные процессы

#### 4.1 Независимость приращений пуассоновского процесса

**Определение 4.1.** Процесс  $\{Y(t), t \geq 0\}$  имеет *независимые приращения*, если

$$\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

случайные величины

$$Y(t_0), Y(t_1) - Y(t_0), \dots, Y(t_n) - Y(t_{n-1})$$

независимы в совокупности.

**Теорема 4.1.** Пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$  имеет независимые приращения.

*Доказательство.* Доказательство будем проводить по индукции по  $n$ . Введем процесс

$$N^t(s) := \sup \left\{ n : \sum_{k=1}^n X_k^t \leq s \right\}, \quad s \geq 0.$$

Из доказанного ранее следует, что  $\{N^t(s), s \geq 0\}$  — пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$ . Заметим, что по определению  $N^t(s)$  измерима относительно  $\sigma\{X_1^t, X_2^t, \dots\}$ , из чего следует, что  $N(t)$  независима с  $N^t(s) \forall s$ . Но

$$N^t(s) = N(t+s) - N(t),$$

а значит, для  $n=1$  утверждение доказано:  $t_0 = t, t_1 = t+s$ . Тем самым получена база индукции. Перейдем к доказательству индуктивного перехода. Зафиксируем  $t_0$  и рассмотрим  $N^{t_0}(s)$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} N^{t_0}(t_k - t_0) - N^{t_0}(t_{k-1} - t_0) &= \\ &= N(t_k - t_0 + t_0) - N(t_0) - (N(t_{k-1} - t_0 + t_0) - N(t_0)) = \\ &= N(t_k) - N(t_{k-1}). \end{aligned}$$

Тогда можем заменить последовательность случайных величин

$$N_{t_0}, N(t_1) - N(t_0), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

на равную ей последовательность

$$N_{t_0}, N^{t_0}(s_1), \dots, N^{t_0}(s_n) - N^{t_0}(s_{n-1}),$$

где  $s_k = t_k - t_0, k = 1, \dots, n$ . Но поскольку мы знаем, что  $N_{t_0}$  независима с  $N^t(s) \forall s$ , мы можем перейти к предположению индукции для случайных величин

$$N^{t_0}(s_1), \dots, N^{t_0}(s_n) - N^{t_0}(s_{n-1}),$$

рассматривая их как приращения нововведенного пуассоновского процесса интенсивности  $\lambda$   $N^t(s)$ . Таким образом, доказана независимость. Теорема доказана.  $\square$

## 4.2 Пространственный пуассоновский процесс

**Определение 4.2.** Пусть  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство, а  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера на нем, то есть

$$S = \bigcup_{q=1}^{\infty} S_q, \quad S_q \in \mathcal{B}, \quad \mu(S_q) < \infty \quad \forall q.$$

Тогда процесс  $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}\}$  называется *пространственным пуассоновским процессом с мерой интенсивности  $\mu$* , если выполнены два условия: во-первых,

$$N(B) \sim \text{Poiss}(\mu(B)), \quad B \in \mathcal{B};$$

во-вторых,

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B} \text{ таких, что } B_i B_j = \emptyset \text{ при } i \neq j, \\ \mu(B_i) < \infty \quad \forall i = 1, \dots, n, \text{ выполнено, что } N(B_1), \dots, N(B_n) \text{ независимы.}$$

*Замечание.* В определении выше сознательно не отбрасывались случаи  $\mu(B) = 0$  и  $\mu(B) = \infty$ . Положим по определению, что если  $\xi \sim \text{Poiss}(a)$ , то

$$\begin{aligned} a = 0 &\Rightarrow \xi = 0 \text{ почти наверное;} \\ a = \infty &\Rightarrow \xi = \infty \text{ почти наверное;} \\ 0 < a < \infty &\Rightarrow P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

**Определение 4.3.** Пусть  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство, а  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера на нем. Пусть  $\mu(S) < \infty$ . Введем независимые случайные величины  $Y, X_1, X_2, \dots$  такие, что

$$\begin{aligned} Y : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+, \quad Y \sim \text{Poiss}(\mu(S)), \\ X_i : \Omega \rightarrow S, \quad X \in \mathcal{F} | \mathcal{B}, \quad P(X_1 \in B) = \frac{\mu(B)}{\mu(S)}. \end{aligned}$$

Возможность введения такого семейства случайных величин объясняется теоремой Ломницкого–Улама. Определим тогда

$$N(B) := \sum_{n=1}^Y \mathbb{I}_B(X_n), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Более подробно,

$$N(B, \omega) := \sum_{n=1}^{Y(\omega)} \mathbb{I}_B(X_n(\omega)), \quad B \in \mathcal{B}, \quad \omega \in \Omega.$$

*Замечание.*  $\sum_1^0 := 0$ .

**Теорема 4.2.** В терминах определения 4.3  $\{N(B), B \in \mathcal{B}\}$  есть пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности  $\mu$ .

*Доказательство.* Возьмем

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}, \text{ что } B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ если } i \neq j.$$

Заметим, что

$$\mu(B_i) < \mu(S) < \infty.$$

Убедимся, что  $\forall m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(B_1) = m_1, \dots, N(B_n) = m_n) &= \\ &= \mathbb{P}(N(B_1) = m_1), \dots, \mathbb{P}(N(B_n) = m_n) = \\ &= \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} e^{-\mu(B_1)} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{-\mu(B_n)}. \end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(B_1) = m_1, \dots, N(B_n) = m_n) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(B_1) = m_1, \dots, N(B_n) = m_n, Y = k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \dots, \sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n\right) \mathbb{P}(Y = k) \end{aligned}$$

по формуле полной вероятности. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} m &:= m_1 + \dots + m_n; \\ m_0 &:= k - m; \\ B_0 &:= S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right). \end{aligned}$$

Заметим, что сейчас фактически происходит следующее: у нас есть случайные величины ("частицы")  $X_i, i = 1, \dots, k$ , которые нужно расположить в попарно непересекающихся множествах ("ящиках")  $B_j, j = 0, \dots, n$ ; мы хотим узнать, какова вероятность того, что в каждом ящике будет ровно  $m_j$  частиц. Такая задача эквивалентна хорошо известной задаче о ящиках из курса теории вероятностей. Воспользуемся ее решением, а также тем, что  $Y$  — пуассоновская случайная величина:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \dots, \sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n\right) \mathbb{P}(Y = k) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_1}(X_i) = m_1, \dots, \sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{B_n}(X_i) = m_n\right) \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)} = \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{m_0! \dots m_n!} \left(\frac{\mu(B_0)}{\mu(S)}\right)^{m_0} \dots \left(\frac{\mu(B_n)}{\mu(S)}\right)^{m_n} \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)} = \\ &= e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\mu(B_0)^{k-m}}{(k-m)!}. \end{aligned}$$

Поскольку ряд в последней строчке — это ряд для экспоненты, а множества  $B_j$  попарно не пересекаются, цепочку равенств можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\mu(B_0)^{k-m}}{(k-m)!} &= \\ &= e^{-\mu(S)} \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{\mu(B_0)} = \\ &= \frac{\mu(B_1)^{m_1}}{m_1!} e^{-\mu(B_1)} \dots \frac{\mu(B_n)^{m_n}}{m_n!} e^{-\mu(B_n)}, \end{aligned}$$

потому что

$$e^{-\mu(S)} e^{\mu(B_0)} = e^{-(\mu(B_1) + \dots + \mu(B_n))}.$$

Теорема доказана.  $\square$

**Лемма 4.3.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $\xi_k \sim \text{Poiss}(\lambda_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sim \text{Poiss} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \right),$$

где ряд может расходиться.

*Доказательство.* Если некоторое  $\lambda_k = \infty$ , то  $\xi_k = \infty$ , как и вся левая часть. Далее все  $\lambda_k < \infty$ .

1. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty.$$

Имеем

$$\mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$$

по теореме о монотонной сходимости (здесь важно, что  $\xi_k$  неотрицательны). Из этого следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \xi < \infty$$

почти наверное. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{\text{d}} \xi.$$

Тогда

$$\varphi_{\sum_{k=1}^n \xi_k}(u) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(u) = \prod_{k=1}^n e^{\lambda_k(e^{iu} - 1)} =$$



$$= \exp \sum_{k=1}^n \lambda_k (e^{iu} - 1) \rightarrow \exp \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (e^{iu} - 1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда из непрерывного соответствия между характеристическими функциями и функциями распределения заключаем, что

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sim \text{Pois} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \right).$$

2. Пусть теперь

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty.$$

Находим последовательность  $r_j$  со свойством

$$\sum_{k=r_j}^{r_{j+1}-1} \lambda_k \geq 1,$$

которая существует в силу расходимости ряда и неотрицательности его членов. Введем обозначение

$$\eta_j := \sum_{k=r_j}^{r_{j+1}-1} \xi_k;$$

Тогда  $\eta_1, \eta_2, \dots$  независимы, к тому же

$$\eta_j \sim \text{Pois} \left( \sum_{k=r_j}^{r_{j+1}-1} \lambda_k \right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{P}(\eta_j \geq 1) = 1 - \mathbf{P}(\eta_j = 0) \geq 1 - e^{-1} > 0.$$

Тогда по лемме Бореля–Кантелли, поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(\eta_j \geq 1) = \infty,$$

то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j = \infty$$

почти наверное. Лемма доказана. □

**Определение 4.4.** Пусть  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство, а  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера на нем, то есть

$$S = \bigcup_{q=1}^{\infty} S_q, \quad S_q \in \mathcal{B}, \quad \mu(S_q) < \infty \quad \forall q.$$

Пусть теперь  $\mu(S) = \infty$ . Для каждого  $S_q$  вводим множество независимых случайных величин (все как в определении 4.3):

$$Y_q : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+, \quad Y_q \sim \text{Poiss} \left( \mu(S_q) \right),$$

$$X_{q,i} : \Omega \rightarrow S_q, \quad X \in \mathcal{F} | \mathcal{B} \cap S_q, \quad \mathbb{P}(X_{q,i} \in C) = \frac{\mu(C)}{\mu(S_q)},$$

где

$$C \in \mathcal{B} \cap S_q \in \mathcal{B}.$$

Строим процесс

$$N_q(C) := \sum_{n=1}^{Y_q} \mathbb{I}_C(X_{q,n}).$$

Положим

$$N(B) := \sum_{q=1}^{\infty} N_q(B \cap S_q), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Заметим, что все члены ряда независимы, а также что

$$N_q(B \cap S_q) \sim \text{Poiss}(\mu(B \cap S_q)).$$

Тогда по лемме 4.3

$$N(B) \sim \text{Poiss} \left( \sum_{q=1}^{\infty} \mu(B \cap S_q) \right) = \text{Poiss}(\mu(B)).$$

### 4.3 Функционал Лапласа точечного процесса

**Определение 4.5.** Процесс  $\{X(B), B \in \mathcal{B}\}$  называется (*простым*) *точечным процессом*, если

$$X(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(Z_n), \quad B \in \mathcal{B},$$

где

$$Z_n : \Omega \rightarrow S, \quad Z_n \in \mathcal{F} | \mathcal{B}.$$

**Пример 4.1.** Пусть  $\mu(S) = \infty$ ,  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера на  $(S, \mathcal{B})$ , а также

$$N(B) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{Y_q} \mathbb{I}_{B \cap S_q}(X_{q,n}).$$

Пусть

$$V_0 := 0, \quad V_k := \sum_{j=1}^k Y_j.$$

Введем  $Z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Пусть для  $\omega \in \Omega$

$$V_{k-1}(\omega) \leq n < V_k(\omega).$$

Определим

$$Z_n(\omega) := X_{k,n-V_{k-1}(\omega)}(\omega).$$

Тогда

$$N(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(Z_n)$$

(это, по сути, перенумерация  $X_{q,n}$ : в этом несложно убедиться, нарисовав  $S$ , распилив его на  $S_q$ , набросав в каждый из них  $Y_q$  точек  $X_{q,n}$  и проведя нумерацию двумя способами).

**Определение 4.6.** Пусть  $f : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f \in \mathcal{B}|\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ . Тогда функционал Лапласа  $\mathcal{L}(f)$  определяется следующим образом:

$$\mathcal{L}(f) := \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n)},$$

где  $e^{-\infty} := 0$ .

#### 4.4 Маркирование пуассоновских процессов

**Определение 4.7.** Рассмотрим  $T, T_1, T_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины. Пусть  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$  независима с  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ . На следующей лекции будет показано, что процесс, заданный элементами

$$Z_n := (S_n, T_n)_{n \geq 1},$$

является пространственным пуассоновским процессом с мерой

$$\lambda\nu \otimes \mathbf{G},$$

где  $\nu$  — мера Лебега на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ ,  $\mathbf{G}$  — мера, задаваемая распределением  $T$ .

*Замечание.* Наглядно: модель массового обслуживания. Пусть  $S_n$  — время начала работы с клиентом,  $T_n$  — время работы с клиентом,  $Y_t$  — число клиентов, обслуживание которых происходит в момент  $t$ . Такая модель называется моделью  $M|G|\infty$ :  $M$  указывает на то, что процесс пуассоновский,  $G$  (general) указывает на то, что распределение времени обслуживания клиента произвольно, а  $\infty$  означает, что имеется бесконечное число приборов (в том смысле, что не создается очередей: работа с клиентом начинается в момент его прихода). Тогда

$$\begin{aligned} Y_t &= \#\{n : S_n \leq t < S_n + T_n\} = \#\{n : (S_n, T_n) \in B_t\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{B_t}(S_n, T_n) \sim \text{Pois}((\lambda\nu \otimes \mathbf{G})(B_t)), \end{aligned}$$

где

$$B_t := \{(x, y) : 0 \leq x \leq t < x + y\},$$

а точка  $(x, y)$  задается парой  $(S_n, T_n)$ . Вычислим:

$$(\lambda\nu \otimes \mathbf{G})(B_t) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{I}_{B_t}(x, y) \lambda\nu(dx) \mathbf{G}(dy) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t G(dy) \int_{t-y}^t \lambda dx + \int_t^\infty G(dy) \int_0^t \lambda dx = \int_0^t \lambda y G(dy) + \int_t^\infty \lambda t G(dy) = \\
&= \lambda \int_0^\infty \min(t, y) G(dy).
\end{aligned}$$

Итак,

$$Y_t \sim \text{Pois} \left( \lambda \int_0^\infty \min(t, y) G(dy) \right) \quad \forall t > 0.$$

Если  $ET < \infty$ , то

$$\text{Pois} \left( \lambda \int_0^\infty \min(t, y) G(dy) \right) \rightarrow \text{Pois}(\lambda ET), \quad t \rightarrow \infty.$$

## 5 Лекция от 15.03.17

### Процессы с независимыми приращениями

#### 5.1 Функционал Лапласа точечного процесса (продолжение)

*Напоминание.* Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство,  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство,  $Z_n : \Omega \rightarrow S$ ,  $Z_n \in \mathcal{F} | \mathcal{B}$ . Пусть также есть точечный процесс

$$N(B, \omega) := \sum_{n=1}^\infty \mathbb{I}_B(Z_n(\omega)), \quad B \in \mathcal{B}$$

согласно определению 4.5. Введем для него функционал Лапласа согласно определению 4.6 по следующей формуле:

$$\mathcal{L}(f) := E e^{-\sum_{n=1}^\infty f(Z_n)} < \infty,$$

где  $f : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f \in \mathcal{B} | \mathcal{B}_+$ ,  $e^{-\infty} := 0$ ,  $\mathcal{B}_+$  — борелевская  $\sigma$ -алгебра на  $\mathbb{R}_+$ .

**Теорема 5.1.**  $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}\}$  является пространственным пуассоновским процессом с  $\sigma$ -конечной мерой интенсивности  $\mu \Leftrightarrow$

$$\mathcal{L}(f) = \exp \left[ \int_S (e^{-f(x)} - 1) \mu(dx) \right].$$

*Доказательство.* Сначала докажем **необходимость** ( $\Rightarrow$ ). Возьмем простую функцию  $f$ . Пусть  $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}\}$  — пространственный пуассоновский процесс с мерой  $\mu$ . Сначала положим

$$f(x) := \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{I}_{B_k}(x), \quad a_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (4)$$

где

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j; \quad B_i \in \mathcal{B}, \quad i = 1, \dots, m; \quad \mu(B_i) < \infty, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} = \mathbb{E} e^{-\sum_{k=1}^m a_k \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} = \mathbb{E} e^{-\sum_{k=1}^m a_k N(B_k)},$$

где перестановка знаков суммы возможна в силу неотрицательности членов ряда по следствию из теоремы Бешпо Леви о монотонной сходимости. Заметим, что если  $\xi \sim \text{Pois}(a)$ , то

$$\mathbb{E} e^{-v\xi} = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-vr} \mathbb{P}(\xi = r) = e^{a(e^{-v}-1)}.$$

Воспользуемся также независимостью в совокупности  $N(B_k)$  в силу того, что множества  $B_i$  попарно не пересекаются. Тогда получим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\sum_{k=1}^m a_k N(B_k)} &= \prod_{k=1}^m \mathbb{E} e^{-a_k N(B_k)} = \prod_{k=1}^m e^{\mu(B_k)(e^{-a_k}-1)} = \\ &= e^{\sum_{k=1}^m \mu(B_k)(e^{-a_k}-1)} = e^{\int_S (e^{-f(x)}-1) \mu(dx)}. \end{aligned}$$

Для продолжения доказательства теоремы сформулируем и докажем две леммы.

**Лемма 5.2.** Пусть  $(S, \mathcal{B})$  — измеримое пространство с  $\sigma$ -конечной мерой  $\mu$ ,  $f: S \rightarrow \mathbb{R}_+$  — измеримая функция на нем. Тогда существует последовательность  $(f_j)_{j=1}^{\infty}$  простых функций вида (4) таких, что

$$f_j \nearrow f \text{ на } S \text{ при } j \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Как и на прошлой лекции, разобьем  $S$  на множества  $S_q$ ,  $\mu(S_q) < \infty$ , что возможно ввиду  $\sigma$ -конечности меры  $\mu$ . Определим

$$f_{q,j}(x) = \mathbb{I}_{S_q}(x) \left( \sum_{r=0}^{2^{2j}-1} r 2^{-j} \mathbb{I} \left\{ r 2^{-j} \leq f(x) < (r+1) 2^{-j} \right\} + 2^j \mathbb{I} \left\{ f(x) \geq 2^j \right\} \right).$$

Тогда несложно проверить, что

$$0 \leq f_{q,j} \leq f_{q,j+1}, \quad 0 \leq f_j = \sum_{q=1}^j f_{q,j} \nearrow f \text{ на } S.$$

□

*Замечание.* Про это (с несколько другим построением простых функций) также можно почитать в [3] (страница 189).

**Лемма 5.3.** Пусть  $0 \leq a_{n,j} \nearrow a_n$ . Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad j \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Рассмотрим два случая.

1. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m > N$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из монотонной сходимости и предельного перехода в неравенстве получаем, что

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_{n,j} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall j.$$

Зафиксируем  $N$ . Из сходимости следует, что

$$\forall n \exists N(n) : \forall m(n) > N(n) \quad |a_{n,m(n)} - a_n| < \frac{\varepsilon}{3N}.$$

Возьмем

$$M := \max_{n=1, \dots, N} N(n).$$

Тогда для любого  $j > M$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^N a_n - \sum_{n=1}^N a_{n,j} \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{n,j} \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^N |a_n - a_{n,j}| + \frac{2\varepsilon}{3} \leq N \frac{\varepsilon}{3N} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, показано, что  $\forall \varepsilon \exists M : \forall j > M$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \right| \leq \varepsilon,$$

то есть показана требуемая сходимость.

2. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Тогда  $\forall C > 0 \exists N : \forall m \geq N$

$$\sum_{n=1}^m a_n > 2C.$$

Снова зафиксируем  $N$ . Из сходимости следует, что

$$\forall n \exists N(n) : \forall m(n) > N(n) \quad |a_{n,m(n)} - a_n| < \frac{C}{N}.$$

Возьмем

$$M := \max_{n=1, \dots, N} N(n).$$

Тогда для любого  $j > M$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \geq \sum_{n=1}^N a_{n,j} = \sum_{n=1}^N a_n - \sum_{n=1}^N |a_n - a_{n,j}| \geq 2C - N \frac{C}{N} = C,$$

чем снова показана требуемая сходимость. Лемма доказана.  $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Возьмем  $0 \leq f_j \nearrow f$  по лемме 5.2. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_j(Z_n) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n), \quad j \rightarrow \infty,$$

по лемме 5.3. Тогда

$$\mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f_j(Z_n)} \rightarrow \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n)}$$

по теореме Лебега. Итак,

$$\mathcal{L}(f) = \lim_{j \rightarrow \infty} \exp \left[ \int_S \left( e^{-f_j(x)} - 1 \right) \mu(dx) \right] = \exp \left[ \int_S \left( e^{-f(x)} - 1 \right) \mu(dx) \right],$$

поскольку

$$\int_S \left( 1 - e^{-f_j(x)} \right) \mu(dx) \rightarrow \int_S \left( 1 - e^{-f(x)} \right) \mu(dx), \quad j \rightarrow \infty,$$

ввиду неотрицательности подынтегрального выражения. Перейдем к доказательству **достаточности** ( $\Leftarrow$ ). Пусть

$$\mathcal{L}(f) = \exp \left[ \int_S \left( e^{-f(x)} - 1 \right) \mu(dx) \right].$$

Возьмем

$$f = \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{I}_{B_k}, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

Тогда

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} f(Z_n)} = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{I}_{B_k}(Z_n)} = \mathbb{E} e^{-\sum_{k=1}^m a_k X(B_k)}.$$

Если  $f = a \mathbb{I}_B$ , то

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} e^{-aX(B)} = e^{\mu(B)(e^{-a}-1)},$$

из чего следует, что  $X(B) \sim \text{Pois}(\mu(B))$  в силу непрерывного соответствия между преобразованием Лапласа и функциями распределения. Более того, снова взяв  $f = \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{I}_{B_k}$ , прямым вычислением можно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\sum_{k=1}^m a_k X(B_k)} &= \mathcal{L}(f) = \exp \left[ \int_S (e^{-f(x)} - 1) \mu(dx) \right] = \\ &= \exp \left[ \sum_{k=1}^m \int_{B_k} (e^{-a_k(x)} - 1) \mu(dx) \right] = \prod_{k=1}^m e^{\mu(B_k)(e^{-a_k} - 1)} = \prod_{k=1}^m \mathbb{E} e^{-a_k X(B_k)}. \end{aligned}$$

Из этого следует, что  $X(B_k)$  — независимые случайные величины по теореме факторизации (см. [3], стр.304), так как здесь функционал Лапласа — это характеристическая функция вектора  $(X(B_1), \dots, X(B_m))$  с аргументом, помноженным на  $-i$ . Таким образом,  $X$  — пространственный пуассоновский процесс. Теорема доказана.  $\square$

Приведем доказательство утверждения, которое было дано без доказательства в конце прошлой лекции.

**Теорема 5.4.** Пусть  $(S_n, T_n)_{n=1}^\infty$  — точечный процесс, причем  $(S_n)$  и  $(T_n)$  независимы, где  $(S_n)$  задают пуассоновский процесс с мерой интенсивности  $\nu$ , где  $\nu$  — мера Лебега на  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ . Тогда  $(S_n, T_n)_{n=1}^\infty$  задают пространственный пуассоновский процесс с мерой интенсивности  $\nu \otimes \mathbf{G}$ , где  $\mathbf{G}$  — распределение  $T_i$ .

*Доказательство.* Вспомним, что

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^\infty f(S_n, T_n)}.$$

Из курса математической статистики известно, что

$$\mathbb{E}(g(\xi, \eta) \mid \xi = u) = \mathbb{E}g(u, \eta),$$

если  $\xi$  независима с  $\eta$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( e^{-\sum_{n=1}^\infty f(S_n, T_n)} \mid S_1 = u_1, S_2 = u_2, \dots \right) &= \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^\infty f(u_n, T_n)} = \\ &= \prod_{n=1}^\infty \mathbb{E} e^{-f(u_n, T_n)} \end{aligned}$$

в силу независимости  $(T_i)$ . Введем обозначение

$$g(u) := \mathbb{E} e^{-f(u, T_n)} = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-f(u, x)} \mathbf{G}(dx).$$

Заметим, что  $0 < g(u) \leq 1$ . Из курса математической статистики известно, что

$$\mathbb{E}(g(\xi, \eta)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(g(\xi, \eta) \mid \xi)).$$



Тогда

$$\mathcal{L}(f) = \mathbb{E} \prod_{n=1}^{\infty} g(S_n) = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} (-\log g(S_n))} = \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} h(S_n)},$$

где  $h := -\log g \geq 0$ . Воспользуемся тем, что  $(S_n)$  задают пуассоновский процесс:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} h(S_n)} &= \exp \left[ \int_{\mathbb{R}_+} (e^{-h(x)} - 1) \nu(dx) \right] = \exp \left[ \int_{\mathbb{R}_+} (g(x) - 1) \nu(dx) \right] = \\ &= \exp \left[ \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\mathbb{R}_+} e^{-f(x,y)} \mathbf{G}(dy) - 1 \right) \nu(dx) \right] = \\ &= \exp \left[ \iint_{\mathbb{R}_+^2} (e^{-f(x,y)} - 1) \mathbf{G}(dy) \nu(dx) \right]. \end{aligned}$$

Соответственно, в силу теоремы 5.1, процесс  $(S_n, T_n)$  является пространственным пуассоновским процессом. Теорема доказана.  $\square$

## 5.2 Теорема Колмогорова о согласованных распределениях

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  — вероятностное пространство,  $(S_t, \mathcal{B}_t)$  — семейство измеримых пространств,  $T$  — произвольное множество. Введем случайный процесс

$$X := \{X_t, t \in T\}, \quad X_t : \Omega \rightarrow S_t, \quad X_t \in \mathcal{F} | \mathcal{B}_t \quad \forall t \in T.$$

Рассмотрим упорядоченный набор

$$\tau := (t_1, \dots, t_n), \quad t_i \neq t_j \quad \forall i \neq j.$$

Определим тогда

$$S_\tau := S_{t_1} \times \dots \times S_{t_n}, \quad \mathcal{B}_\tau := \mathcal{B}_{t_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{t_n}.$$

Введем прямоугольник

$$(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}), \quad B_{t_i} \in \mathcal{B}_{t_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Введем также случайный элемент

$$X_\tau : \Omega \rightarrow S_\tau, \quad X_\tau \in \mathcal{F} | \mathcal{B}_\tau \quad (\Leftrightarrow X_{t_k} \in \mathcal{F} | \mathcal{B}_{t_k}, \quad k = 1, \dots, n),$$

то есть

$$X_\tau = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}).$$

Распределение  $X_\tau$  обозначим через  $\mathbf{P}_\tau = \mathbf{P}_{t_1 \dots t_n}$ , где набор  $t_1, \dots, t_n$  упорядочен.

**Определение 5.1.** Семейство мер  $P_{t_1 \dots t_n}$ , где

$$t_1, \dots, t_n \in T, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t_i \neq t_j \quad \forall i \neq j,$$

называется *семейством конечномерных распределений*  $X = \{X_t, t \in T\}$ .

Рассмотрим прямоугольник  $B = B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}$ .

$$\begin{aligned} P_{t_1 \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) &= P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B) = \\ &= P(X_{t_1} \in B_{t_1}, \dots, X_{t_n} \in B_{t_n}) = P(X_{t_{i_1}} \in B_{t_{i_1}}, \dots, X_{t_{i_n}} \in B_{t_{i_n}}) = \\ &= P_{t_{i_1} \dots t_{i_n}}(B_{t_{i_1}} \times \dots \times B_{t_{i_n}}) \end{aligned}$$

для любой перестановки  $(i_1, \dots, i_n)$ . Таким образом, получили свойство:

**Свойство 5.1.**  $\forall n \forall$  перестановки  $(i_1, \dots, i_n)$  индексов  $(1, \dots, n)$

$$P_{t_{i_1} \dots t_{i_n}}(B_{t_{i_1}} \times \dots \times B_{t_{i_n}}) = P_{t_1 \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}).$$

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned} P_{t_1 \dots t_k \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{k-1}} \times S_{t_k} \times B_{t_{k+1}} \times \dots \times B_{t_n}) &= \\ &= P_{t_1 \dots t_{k-1} t_{k+1} \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{k-1}} \times B_{t_{k+1}} \times \dots \times B_{t_n}), \end{aligned}$$

поскольку  $\{X_{t_k} \in S_{t_k}\} = \Omega$ . Таким образом, получили еще одно свойство:

**Свойство 5.2.**

$$\begin{aligned} P_{t_1 \dots t_k \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{k-1}} \times S_{t_k} \times B_{t_{k+1}} \times \dots \times B_{t_n}) &= \\ &= P_{t_1 \dots t_{k-1} t_{k+1} \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{k-1}} \times B_{t_{k+1}} \times \dots \times B_{t_n}). \end{aligned}$$

**Определение 5.2.** Свойства 5.1 и 5.2 называются *условиями согласованности*.

**Определение 5.3.** Измеримые пространства  $(S, \mathcal{B})$  и  $(V, \mathcal{A})$  *изоморфны*, если

$$\begin{aligned} \exists h : S &\rightarrow V, \quad h \in \mathcal{B}|\mathcal{A}, \\ \exists h^{-1} : V &\rightarrow S, \quad h^{-1} \in \mathcal{A}|\mathcal{B}. \end{aligned}$$

**Определение 5.4.** Измеримое пространство  $(S, \mathcal{B})$  называется *борелевским*, если оно изоморфно борелевскому подмножеству отрезка  $[0, 1]$ .

**Определение 5.5.** Метрическое пространство  $(X, \rho)$  называется *польским*, если оно является полным и сепарабельным.

*Замечание.* Любое борелевское подмножество польского пространства является борелевским пространством.

**Теорема 5.5** (Колмогорова). Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  — семейство борелевских пространств. Пусть для каждой  $n \in \mathbb{N}$  и  $t_1, \dots, t_n \in T$  таких, что  $t_i \neq t_j, i \neq j$ ,  $P_{t_1 \dots t_n}$  — мера на  $(S_{t_1} \times \dots \times S_{t_n}, \mathcal{B}_{t_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{t_n})$ , которая удовлетворяет условиям согласованности 5.1 и 5.2. Тогда на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  существует случайный процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$  такой, что  $X_t : \Omega \rightarrow S_t, X_t \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t \quad \forall t \in T$  и конечномерные распределения которого — это меры  $P_{t_1 \dots t_n}$ .

*Доказательство.* Теорема предлагается без доказательства.  $\square$

*Замечание.* В отличие от теоремы Ломницкого–Улама, в этой теореме накладываются ограничения топологического характера.

**Определение 5.6.** Пусть  $Q$  — мера на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ . *Характеристической функцией меры  $Q$  называется*

$$\varphi_Q(u) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(u,x)} Q(dx), \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

*Замечание.* Если  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , то

$$\varphi_\xi(u) := \varphi_{P_\xi}(u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(u,x)} P_\xi(dx) = \int_{\Omega} e^{i(u,\xi)} dP = E e^{i(u,\xi)}.$$

**Теорема 5.6.** Пусть  $\varphi_{t_1 \dots t_n}$  — семейство характеристических функций мер на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ . Тогда существует случайный процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$ ,  $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \in T$ , для которого  $\varphi_{t_1 \dots t_n}$  — характеристические функции конечномерных распределений, в том и только в том случае, когда

1.  $\varphi_{t_1 \dots t_n}(u_1, \dots, u_n) = \varphi_{t_{i_1} \dots t_{i_n}}(u_{i_1}, \dots, u_{i_n}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (i_1, \dots, i_n) —$   
— перестановки  $(1, \dots, n)$ ;
2.  $\varphi_{t_1 \dots t_k \dots t_n}(u_1, \dots, u_{k-1}, 0, u_{k+1}, \dots, u_n) = \varphi_{t_1 \dots \widehat{t_k} \dots t_n}(u_1, \dots, \widehat{0}, \dots, u_n).$

*Доказательство.* Теорема предлагается без доказательства (но вроде как на экзамене его знать надо; см. [1], стр. 29).  $\square$

*Замечание.* Если  $X = \{X_t, t \in T\}$ , где  $T \subset \mathbb{R}$ , то достаточно рассмотреть  $P_{t_1 \dots t_n}$ ,  $t_1 < \dots < t_n$ .

*Замечание.* Про эти теоремы почитать подробнее можно в [1].

### 5.3 Процессы с независимыми приращениями

**Теорема 5.7.** Для того чтобы существовал процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  с независимыми приращениями такой, чтобы характеристическая функция случайной величины  $X(t) - X(s)$  была равна  $\varphi(s, t, \cdot)$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi(s, t, v) = \varphi(s, u, v) \varphi(u, t, v) \quad \forall 0 < s < u < t \quad \forall v \in \mathbb{R}.$$

При этом начальное распределение процесса  $P_0$  может быть выбрано любым.

*Замечание* (от наборщика). Судя по всему, знание доказательства этой теоремы является обязательным. Доказательство см. [1], стр. 47.

## 5.4 Модификация процесса

**Определение 5.7.** Процесс  $Y = \{Y_t, t \in T\}$  называется *модификацией* процесса  $X = \{X_t, t \in T\}$ , если

$$P(Y_t = X_t) = 1 \quad \forall t \in T.$$

**Лемма 5.8.** Из теоремы 5.7 следует, что существует процесс с независимыми приращениями  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  такой, что

$$N_t - N_s \sim \text{Pois}(\lambda(t-s)) \quad \forall 0 < s < t.$$

*Доказательство.* Вспомним, что если  $\xi \sim \text{Pois}(a)$ , то характеристическая функция  $\xi$  равна

$$\varphi_\xi(v) = e^{a(e^{iv} - 1)}.$$

Тогда запишем

$$\varphi_{N_t - N_s}(v) = e^{\lambda(t-s)(e^{iv} - 1)} = \varphi(s, t, v).$$

Но тогда

$$\varphi(s, t, v) = \varphi(s, u, v) \varphi(u, t, v),$$

что и требовалось показать.  $\square$

*Замечание.* Можно доказать, что у построенного процесса существует такая модификация, что ее траектории обладают следующими свойствами:

- они неубывают;
- они непрерывны справа;
- они имеют предел слева;
- все их скачки имеют величину 1;
- длина промежутков между скачками распределена экспоненциально;
- промежутки между скачками независимы.

Таким образом, этот процесс можно рассматривать как процесс восстановления.

**Пример 5.1.** Рассмотрим вероятностное пространство  $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \nu)$ , где  $\nu$  — мера Лебега, и измеримое пространство  $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1])$ . Введем случайные процессы  $X = \{X_t, t \in T\}$  и  $Y = \{Y_t, t \in T\}$  следующим образом:

$$X(t, \omega) \equiv 0, \quad Y(t, \omega) = \begin{cases} 1, & t = w \\ 0, & t \neq w \end{cases}, \quad t, \omega \in [0, 1].$$

Тогда все траектории  $X$  непрерывны, а все траектории  $Y$  разрывны, но вместе с этим

$$P(X_t \neq Y_t) = \nu(\{t\}) = 0,$$

то есть  $Y$  является модификацией  $X$ . Таким образом, отношение эквивалентности, порождаемое свойством 'быть модификацией друг друга', не сохраняет непрерывности траекторий.

## 6 Лекция от 22.03.17

### Винеровский процесс

#### 6.1 Фильтрации. Марковские моменты

**Определение 6.1.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство. Семейство  $\sigma$ -алгебр  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  на этом вероятностном пространстве, где  $T \subset \mathbb{R}$ , называется *фильтрацией*, если  $\forall s < t, s, t \in T$ ,

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}.$$

**Определение 6.2.** *Естественная фильтрация* процесса  $X = (X_t, t \in T)$ ,  $T \subset \mathbb{R}$ , — это семейство

$$\mathcal{F}_t := \sigma \{X_s, s \leq t, s \in T\}, t \in T.$$

**Определение 6.3.** Отображение  $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$  называется *марковским моментом относительно фильтрации*  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , если

$$\forall t \in T \quad \{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Марковский момент  $\tau$  называется *моментом остановки*, если  $\tau < \infty$  почти наверное.

*Замечание.* Если  $\tau$  — марковский момент, то  $\forall t \in T \quad \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ , поскольку

$$\{\tau = t\} = \{\tau \leq t\} \setminus \{\tau < t\}, \quad \{\tau < t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \tau \leq t - \frac{1}{k} \right\}.$$

*Замечание.* Если  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ , то

$$\tau \text{ — марковский момент} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

**Пример 6.1.** Рассмотрим действительный процесс с дискретным временем  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ . Пусть  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Введем

$$\tau_B(\omega) := \inf_n \{n : X_n(\omega) \in B\}, \quad \mathcal{F}_n = \sigma \{X_0, X_1, \dots, X_n\}, n \in \mathbb{Z}_+$$

(если  $X_n \notin B \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$ , то  $\tau = \infty$ ). Тогда  $\tau_B$  — марковский момент относительно  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ : проверим, что  $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$ :

- $n = 0$ :  $\{\tau = 0\} = \{X_0 \in B\} \in \sigma \{X_0\} = \mathcal{F}_0$ ;
- $n \geq 1$ :  $\{\tau = n\} = \{X_0 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} \in \sigma \{X_0, X_1, \dots, X_n\} = \mathcal{F}_n$ .

**Определение 6.4.** Пусть  $\tau$  — марковский момент относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ . Определим  $\sigma$ -алгебру

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in T\}.$$

Эта  $\sigma$ -алгебра называется  *$\sigma$ -алгеброй событий, наблюдаемых до момента  $\tau$* .

**Упражнение 6.1.** Доказать, что объект из определения 6.4 —  $\sigma$ -алгебра.

## 6.2 Строго марковское свойство

**Определение 6.5.** Процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$ ,  $T \subset \mathbb{R}$ , имеет *стационарные приращения*, если  $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall h : t_0, \dots, t_n, t_0 + h, \dots, t_n + h \in T$

$$\begin{aligned} \text{Law}(X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) = \\ = \text{Law}(X_{t_1+h} - X_{t_0+h}, \dots, X_{t_n+h} - X_{t_{n-1}+h}) \end{aligned} \quad (5)$$

*Замечание.* Если процесс  $X$  имеет еще и независимые приращения, то

$$(5) \Leftrightarrow \text{Law}(X_t - X_s) = \text{Law}(X_{t+h} - X_{s+h}) \quad \forall t, s, t+h, s+h \in T, s < t.$$

*Замечание.* Пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda > 0$  — процесс со стационарными независимыми приращениями.

**Лемма 6.1** (марковское свойство). Пусть  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  — процесс с независимыми приращениями. Тогда  $\forall$  константы  $a > 0$  процесс  $Z(t) := X(t+a) - X(a)$ ,  $t \geq 0$ , имеет независимые приращения и

$$\{Z_t, t \geq 0\} \text{ независим с } \mathcal{F}_a = \sigma\{X_s, s \leq a\}.$$

*Доказательство.* Докажем независимость приращений по определению: возьмем  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$  и рассмотрим

$$Z(t_0), Z(t_1) - Z(t_0), \dots, Z(t_n) - Z(t_{n-1}).$$

Заметим, что по определению  $Z(t)$

$$Z(t_0) = X(t_0 + a) - X(a), \quad Z(t_k) - Z(t_{k-1}) = X(t_k + a) - X(t_{k-1} + a);$$

из этого получаем, что приращения  $Z$  независимы вследствие независимости приращений  $X$ , которая есть по условию леммы. Докажем второе утверждение леммы: заметим, что  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}_a$  порождается системой событий

$$\{X_{s_1} \in B_1, \dots, X_{s_m} \in B_m\}, \quad 0 \leq s_1 < \dots < s_m \leq a.$$

Поэтому достаточно (вообще это следует из [1], стр. 20, лемма 9) проверить, что независимы векторы

$$\xi = (X_{s_1}, \dots, X_{s_m}) \quad \text{и} \quad \eta = (Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n}), \quad 0 \leq t_1 < \dots < t_n.$$

Заметим, что

$$\xi = \begin{pmatrix} X_{s_1} \\ X_{s_2} \\ \vdots \\ X_{s_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{s_1} \\ X_{s_2} - X_{s_1} \\ \vdots \\ X_{s_m} - X_{s_{m-1}} \end{pmatrix}.$$

Введем обозначение  $\zeta := (X_{s_1}, X_{s_2} - X_{s_1}, \dots, X_{s_m} - X_{s_{m-1}})$ . Тогда  $\zeta$  и  $\eta$  независимы, поскольку  $X$  имеет независимые приращения. Но  $\xi$  — это борелевская функция от  $\zeta$ , следовательно,  $\xi$  независим с  $\eta$ .  $\square$

**Теорема 6.2** (строго марковское свойство). Пусть  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  — процесс со стационарными независимыми приращениями такой, что его траектории непрерывны справа. Пусть  $\tau$  — момент остановки относительно естественной фильтрации  $X$ . Введем

$$Y(t, \omega) := \begin{cases} X(t + \tau(\omega), \omega) - X(\tau(\omega), \omega), & \tau(\omega) < \infty, \\ 0, & \tau(\omega) = \infty. \end{cases}$$

По сути,  $Y(t) = X(t + \tau) - X(\tau)$ ,  $t \geq 0$ . Тогда процесс  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$  независим с  $\mathcal{F}_\tau$  и имеет те же конечномерные распределения, что и процесс  $\{X_t - X_0, t \geq 0\}$ .

*Доказательство.* Покажем сначала, что процесс  $Y$  корректно задан. Пополним исходное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  классом нулевых событий  $\mathcal{N}$  и получим  $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ , то есть

$$\forall A : \mathbb{P}(A) = 0 \quad \forall C \subset A \quad C \in \mathcal{N}, \quad \bar{\mathbb{P}}(C) := 0,$$

где новая  $\sigma$ -алгебра определяется как

$$\bar{\mathcal{F}} = \sigma\{\mathcal{F}, \mathcal{N}\}.$$

Известно, что

$$\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \mathcal{N}, \quad \bar{\mathbb{P}}(A \cup C) = \mathbb{P}(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}, C \in \mathcal{N}.$$

Поэтому можно считать, что с самого начала рассматривалось пополненное вероятностное пространство  $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ , которое и будет дальше обозначаться просто  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Дальше считаем, что все  $\sigma$ -алгебры также пополнены классом нулевых событий.

Если  $\tau$  — марковский момент относительно  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  и  $\alpha = \tau$  почти наверное, то  $\alpha$  — тоже марковский момент относительно  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ . Поэтому далее можем считать, что  $\tau < \infty$  на  $\Omega$ .

Покажем, что  $Y(t)$  — случайная величина  $\forall t \geq 0$ . Введем

$$\tau_n := \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-n} \mathbb{I}_{A_{n,k}},$$

где

$$\begin{aligned} A_{n,1} &:= \{\omega : \tau(\omega) \leq 2^{-n}\}, \\ A_{n,k} &:= \{\omega : (k-1)2^{-n} < \tau(\omega) \leq k2^{-n}\}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Тогда  $\tau_n \searrow \tau$  на всем  $\Omega$ . Заметим, что  $\tau_n$  — марковские моменты относительно  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ :

$$\{\tau_n \leq t\} = \{\tau \leq k2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}} \subset \mathcal{F}_t,$$

где  $k := \sup\{r : r2^{-n} \leq t\}$ .

Поскольку траектории  $X$  непрерывны справа почти наверное, то

$$X(t + \tau_n(\omega), \omega) \xrightarrow{\text{п.н.}} X(t + \tau(\omega), \omega), \quad n \rightarrow \infty \quad \forall t \geq 0.$$

Заметим, что

$$\left\{ \omega : X(t + \tau_n(\omega), \omega) \leq z \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ X(t + k2^{-n}, \omega) \leq z, \tau_n = k2^{-n} \right\}.$$

Поскольку

$$\left\{ X(t + k2^{-n}, \omega) \leq z \right\} \in \mathcal{F}, \quad \left\{ \tau_n = k2^{-n} \right\} \in \mathcal{F},$$

то  $X(t + \tau_n)$  — случайная величина  $\forall n$ . Поскольку  $X(t + \tau_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} X(t + \tau)$ , то  $X(t + \tau)$  — тоже случайная величина из полноты случайного пространства: пространство полно относительно сходимости почти наверное, так как оно было пополнено классом нулевых событий (это результат действительного анализа). Таким образом, показали, что  $Y(t) = X(t + \tau) - X(\tau)$  — случайная величина  $\forall t \geq 0$ .

Докажем, что  $Y$  независим с  $\mathcal{F}_\tau$ . Для этого достаточно (вообще это следует из [1], стр. 20, лемма 9) проверить, что

$$\mathbf{P}(A \cap \{\xi \in C\}) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(\xi \in C) \quad \forall A \in \mathcal{F}_\tau, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m),$$

где

$$\xi := (Y(t_1), \dots, Y(t_m)), \quad 0 \leq t_1 < \dots < t_m.$$

Воспользуемся свойством регулярности вероятностной меры:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \quad \exists$  открытое множество  $G$  и замкнутое множество  $F$  такие, что  $F \subset C \subset G$  и  $\mathbf{P}(G \setminus F) < \varepsilon$  (доказательство см., например, [4], стр. 4, на лекции оно не рассказывалось). Соответственно, достаточно рассматривать только замкнутые  $C$  (можно любое борелевское множество  $C$  приблизить снизу последовательностью замкнутых вложенных в  $C$  множеств  $C_n$  и перейти к пределу по свойству непрерывности вероятностной меры).

Покажем, что

$$\mathbf{P}(A \cap \{\xi \in C\}) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(\xi \in C) \Leftrightarrow \mathbf{E} \mathbb{I}_A f(\xi) = \mathbf{E} \mathbb{I}_A \mathbf{E} f(\xi)$$

для любой непрерывной ограниченной  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Заметим, что импликация слева направо ( $\Rightarrow$ ) следует из того, что если  $\sigma$ -алгебры, индуцированные на вероятностное пространство двумя случайными величинами, независимы, то матожидание произведения этих случайных величин распадается в произведение соответствующих матожиданий. Докажем импликацию справа налево ( $\Leftarrow$ ). Положим

$$\varphi(t) := \begin{cases} 1 & , \quad t \leq 0, \\ 1 - t & , \quad t \in [0, 1], \\ 0 & , \quad t > 1. \end{cases}$$

Определим  $\rho(x, C) := \inf_{y \in C} \rho(x, y)$ , где  $\rho(x, y)$  — евклидово расстояние между точками. Заметим, что  $\rho(x, C)$  — непрерывная функция от  $x$ . Положим

$$f_j(x) := \varphi(j\rho(x, C)), \quad j \in \mathbb{N}.$$



Тогда  $f_j(x) \searrow \mathbb{I}_C$ ,  $j \rightarrow \infty$  (здесь важно, что  $C$  — замкнутое множество!). Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \mathbb{I}_A f_j(\xi) &\rightarrow \mathbb{E} \mathbb{I}_A \mathbb{I}_{\{\xi \in C\}} = \mathbb{P}(A \cap \{\xi \in C\}), \\ \mathbb{E} \mathbb{I}_A \mathbb{E} f_j(\xi) &\rightarrow \mathbb{E} \mathbb{I}_A \mathbb{E} \mathbb{I}_{\{\xi \in C\}} = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(\xi \in C).\end{aligned}$$

Таким образом, импликация справа налево доказана. Положим

$$\xi_n := (X(t_1 + \tau_n) - X(\tau_n), \dots, X(t_m + \tau_n) - X(\tau_n)).$$

Тогда  $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ , поскольку  $\tau_n \searrow \tau$ . Следовательно,  $\mathbb{E} \mathbb{I}_A f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \mathbb{I}_A f(\xi_n)$ . Положим

$$\xi_{n,k} := (X(t_1 + k2^{-n}) - X(k2^{-n}), \dots, X(t_m + k2^{-n}) - X(k2^{-n})).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\} &= A \cap A_{n,k} = A \cap \{(k-1)2^{-n} < \tau \leq k2^{-n}\} = \\ &= A \cap \{\tau \leq k2^{-n}\} \setminus A \cap \{\tau \leq (k-1)2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}}.\end{aligned}$$

По лемме 6.1  $\xi_{n,k}$  независим с  $\mathcal{F}_{k2^{-n}}$ . Тогда получаем, что

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \mathbb{I}_A f(\xi_n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \mathbb{I}_A f(\xi_n) \mathbb{I}_{\{\tau_n = k2^{-n}\}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \mathbb{I}_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} f(\xi_{n,k}) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \mathbb{I}_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} \mathbb{E} f(\xi_{n,k}).\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\xi_{n,k} \stackrel{\text{law}}{=} (X(t_1) - X(0), \dots, X(t_m) - X(0)) =: \gamma.$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \mathbb{I}_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} \mathbb{E} f(\xi_{n,k}) &= \mathbb{E} f(\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \mathbb{I}_{A \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} = \mathbb{E} f(\gamma) \mathbb{E} \mathbb{I}_A = \\ &= \mathbb{E} f(\gamma) \mathbb{P}(A).\end{aligned}$$

Таким образом, получили, что  $\mathbb{E} \mathbb{I}_A f(\xi) = \mathbb{E} \mathbb{I}_A \mathbb{E} f(\gamma) \quad \forall A \in \mathcal{F}_\tau$ . Осталось взять  $A = \Omega$ : тогда получится, что

$$\mathbb{E} f(\xi) = \mathbb{E} f(\gamma).$$

Из этого следует, что

$$\mathbb{E} \mathbb{I}_A f(\xi) = \mathbb{E} \mathbb{I}_A \mathbb{E} f(\xi) \quad \forall A \in \mathcal{F}_\tau,$$

а также что

$$\xi \stackrel{\text{law}}{=} \gamma.$$

Таким образом, доказаны оба утверждения теоремы.  $\square$

### 6.3 Функции Хаара и Шаудера

**Определение 6.6.** Функции Хаара  $H_k(x)$  задаются следующими формулами на  $[0, 1]$ :

$$H_0(x) \equiv 1;$$

$$H_1(x) = \mathbb{I}_{[0, \frac{1}{2}]}(x) - \mathbb{I}_{(\frac{1}{2}, 1]}(x);$$

$$H_k(x) = 2^{n/2} \left( \mathbb{I}_{\left(\frac{k-2^n}{2^n}, \frac{1/2+k-2^n}{2^n}\right]}(x) - \mathbb{I}_{\left(\frac{1/2+k-2^n}{2^n}, \frac{1+k-2^n}{2^n}\right]}(x) \right), \quad 2^n \leq k < 2^{n+1},$$

$$n \in \mathbb{N}; \quad H_{2^n}(0) = 2^{n/2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Упражнение 6.2.** Посмотреть в [1], стр. 59, графики функций Хаара, чтобы формула не вызывала ужаса.

*Замечание.* Известно, что  $\{H_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  — полная ортонормированная система в  $L^2[0, 1]$ .

**Определение 6.7.** Функции Шаудера  $S_k(t)$  задаются следующими формулами на  $[0, 1]$ :

$$S_k(t) = \int_{[0, t]} H_k(u) du = \left\langle H_k, \mathbb{I}_{[0, t]} \right\rangle_{L^2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

где  $H_k(u)$  — функции Хаара.

*Замечание.* Известно, что  $S_k(t)$  непрерывны  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ .

**Лемма 6.3.** Пусть  $a_k = O(k^\varepsilon)$  при  $k \rightarrow \infty$ , где  $0 < \varepsilon < 1/2$ . Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t)$$

сходится равномерно на  $[0, 1]$ .

*Доказательство.* Будем доказывать равномерную сходимость к нулю хвостов ряда. Перепишем хвост ряда:

$$\sum_{k > 2^m} a_k S_k(t) = \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{2^n < k \leq 2^{n+1}} a_k S_k(t).$$

Заметим, что

$$S_k(t) \leq 2^{-\frac{n}{2}-1}, \quad 2^n < k \leq 2^{n+1}.$$

Поскольку  $|a_k| = O(k^\varepsilon)$ , то

$$|a_k| \leq C k^\varepsilon,$$

где  $C$  — некоторая фиксированная константа. Оценим:

$$\sum_{2^n < k \leq 2^{n+1}} |a_k| S_k(t) \leq C 2^{(n+1)\varepsilon} \sum_{2^n < k \leq 2^{n+1}} S_k(t).$$

Поскольку носители  $S_k(t)$  не пересекаются при  $2^n < k \leq 2^{n+1}$ , то

$$C2^{(n+1)\varepsilon} \sum_{2^n < k \leq 2^{n+1}} S_k(t) \leq C2^{(n+1)\varepsilon} 2^{-\frac{n}{2}-1} = C2^{\varepsilon-n(\frac{1}{2}-\varepsilon)}.$$

Вернемся к исходному хвосту ряда:

$$\sum_{k > 2^m} |a_k| S_k(t) \leq \sum_{n=m}^{\infty} C 2^{\varepsilon-n(\frac{1}{2}-\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

так как  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ . Таким образом, поскольку оценка является числовым рядом, не зависящим от  $t$ , показана равномерная сходимость хвостов ряда к нулю, то есть его равномерная сходимость. Лемма доказана.  $\square$

*Замечание.* Из леммы 6.3 и теоремы Вейерштрасса следует, что этот ряд сходится к непрерывной функции.

**Лемма 6.4.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — случайные величины на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\forall c > \sqrt{2}$  и для почти всех  $\omega \in \Omega$   $\exists N_0(c, \omega)$ :

$$|\xi_k| \leq c (\ln k)^{\frac{1}{2}} \quad \forall k \geq N_0(c, \omega).$$

*Доказательство.* Поскольку  $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , то

$$\mathbb{P}(\xi_k \geq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad \forall x > 0.$$

Оценим этот интеграл:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \frac{u}{u} e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du = \\ &= \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} -de^{-\frac{u^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Тогда получаем, что

$$\mathbb{P}(|\xi| \geq x) \leq \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Воспользуемся леммой Бореля–Кантелли:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}\left(|\xi_k| \geq c (\ln k)^{\frac{1}{2}}\right) \leq \sum_{k=2}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{c (\ln k)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{c^2 \ln k}{2}} \leq \tilde{c} \sum_{k=2}^{\infty} k^{-\frac{c^2}{2}} < \infty.$$

Поскольку ряд из вероятностей сошелся почти наверное, то событий происходит конечное число почти наверное. Из этого следует, что для каждого фиксированного  $\omega$  можно выбрать  $k$ , после которого события выполняться перестают. Лемма доказана.  $\square$

## 6.4 Винеровский процесс

**Определение 6.8.** Процесс  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  называется *винеровским*, если

1.  $W(0) = 0$  почти наверное;
2.  $W$  имеет независимые приращения;
3.  $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s) \quad \forall 0 \leq s < t$ ;
4. траектории  $W$  непрерывны почти наверное.

**Теорема 6.5** (явная конструкция винеровского процесса). Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Введем

$$W(t, \omega) := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) S_k(t), \quad t \in [0, 1],$$

где  $S_k(t)$  — функции Шаудера. Тогда  $W = \{W(t), t \in [0, 1]\}$  — винеровский процесс на  $[0, 1]$ .

*Доказательство.* Будем доказывать свойства 1. – 4. для построенного процесса. Свойство 1. выполнено, так как  $S_k(0) = 0$ . Заметим, что согласно лемме 6.3

$$\sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t) \xrightarrow{\text{п.н.}} W(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Более того, согласно лемме 6.4 сходимость равномерна на  $[0, 1]$ , что дает непрерывность траекторий почти наверное. Таким образом, свойство 4. тоже получено. Проверим независимость приращений этого процесса. Для этого нужно проверить независимость случайных величин

$$W(t_0), W(t_1) - W(t_0), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1}), \quad 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m.$$

Заметим, что случайные величины  $\sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t)$  имеют предел в  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ : поскольку

$$\mathbb{E} \xi_k \xi_l = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases}$$

то

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t) - \sum_{k=1}^r \xi_k S_k(t) \right|^2 = \mathbb{E} \left| \sum_{k=r+1}^n \xi_k S_k(t) \right|^2 = \mathbb{E} \sum_{k=r+1}^n S_k^2(t) \rightarrow 0, \\ r, n \rightarrow \infty,$$

как часть хвоста сходящегося ряда, поскольку  $S_k(t) \leq 2^{-\frac{n+2}{2}}$ . Таким образом, показано, что последовательность частичных сумм фундаментальна в  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Известно, что это пространство полно; тогда обозначим

$$V(t) := (L^2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t).$$

Из этого следует, что  $V(t) = W(t)$  почти наверное, и частные суммы сходятся к  $W(t)$  не только почти наверное, но и в  $L^2$  (потому что из сходимости почти наверное, равно как и из сходимости в  $L^2$ , следует сходимость по вероятности, предел которой определен однозначно).

Рассмотрим теперь вектор из приращений частных сумм:

$$U_n := \left( \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t_0), \dots, \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t_{j+1}) - \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t_j), \dots \right. \\ \left. \dots, \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t_m) - \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t_{m-1}) \right).$$

Сразу отметим, что этот вектор является гауссовским, так как он является линейным преобразованием гауссовского вектора из независимых нормальных случайных величин  $\xi_i$ . Введем также предельный вектор

$$U := \left( \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t_0), \dots, \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t_{j+1}) - \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t_j), \dots \right. \\ \left. \dots, \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t_m) - \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t_{m-1}) \right).$$

Тогда по доказанному выше

$$U_n \xrightarrow{\text{п.н.}} U, \quad U_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} U.$$

Поскольку  $U_n = (U_n^1, \dots, U_n^m)$  — гауссовский вектор, его характеристическая функция имеет известный вид:

$$\varphi_{U_n}(\lambda) = e^{i(\lambda, a) - \frac{1}{2}(C\lambda, \lambda)},$$

где  $a$  — математическое ожидание  $U_n$ , а  $C$  — матрица ковариаций  $U_n$ .

Заметим, что  $EU_n = 0$ . Разберемся с матрицей ковариаций:

$$\text{cov} \left( U_n^j, U_n^r \right) = EU_n^j U_n^r = \sum_{k=1}^n S_k(t_{j+1}) S_k(t_{r+1}) - \sum_{k=1}^n S_k(t_j) S_k(t_{r+1}) - \\ - \sum_{k=1}^n S_k(t_{j+1}) S_k(t_r) + \sum_{k=1}^n S_k(t_j) S_k(t_r).$$

Поскольку  $EU_n^j U_n^r$  — это скалярное произведение в  $L^2$ , которое обладает свойством непрерывности, то

$$\text{cov} \left( U_n^j, U_n^r \right) = EU_n^j U_n^r \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_{j+1}) S_k(t_{r+1}) - \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_j) S_k(t_{r+1}) - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_{j+1}) S_k(t_r) + \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t_j) S_k(t_r), \quad n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим одно из слагаемых, воспользовавшись представлением функций Шаудера через функции Хаара (образующие базис в пространстве  $L^2$ ), а также равенством Парсеваля:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} S_k(t)S_k(v) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle H_k, \mathbb{I}_{[0,t]} \right\rangle_{L^2} \left\langle H_k, \mathbb{I}_{[0,v]} \right\rangle_{L^2} = \left\langle \mathbb{I}_{[0,t]}, \mathbb{I}_{[0,v]} \right\rangle_{L^2} = \\ &= \min(v, t).\end{aligned}$$

Тогда в предположении  $t_j < t_r$  получаем, что

$$\begin{aligned}\text{cov}\left(U_n^j, U_n^r\right) &\rightarrow \min(t_{j+1}, t_{r+1}) - \min(t_j, t_{r+1}) - \min(t_{j+1}, t_r) + \min(t_j, t_r) = \\ &= t_{j+1} - t_j - t_{j+1} + t_j = 0.\end{aligned}$$

Если же  $j = r$ , то

$$\begin{aligned}\text{cov}\left(U_n^j, U_n^j\right) &= DU_n^j \rightarrow \min(t_{j+1}, t_{j+1}) - \min(t_j, t_{j+1}) - \\ &\quad - \min(t_{j+1}, t_j) + \min(t_j, t_j) = t_{j+1} - t_j.\end{aligned}$$

Так как сходимость почти наверное влечет сходимость характеристических функций и так как из-за сходимости в  $L^2$  есть сходимость моментов, из этого следует, что матрица ковариаций вектора  $U$  диагональна, что в свою очередь влечет некоррелированность его компонент  $U^1, \dots, U^m$ ; также предельным переходом получаем явный вид характеристической функции вектора  $U$ , что доказывает гауссовость вектора и независимость его компонент. Теорема доказана.  $\square$

**Следствие** (построение  $W$  на  $[0, \infty)$ ). Для каждого  $j \in \mathbb{N}$  берем  $\xi_1^j, \xi_2^j, \dots$  — независимые одинаково распределенные  $\mathcal{N}(0, 1)$  случайные величины. Определяем

$$W^j(t, \omega) := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^j(\omega) S_k(t).$$

Дальше склеиваем эти процессы последовательно и непрерывно:

$$W(t) := W^j(t) + W(j-1), \quad W(0) \equiv 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда  $W$  — винеровский процесс.

*Доказательство.* Доказательство см. [1], стр. 63 (на экзамене его знать нужно).  $\square$

## 7 Лекция от 29.03.17

### Свойства винеровского процесса

#### 7.1 Недифференцируемость траекторий броуновского движения

**Теорема 7.1** (Винера – Пэли – Зигмунда). С вероятностью 1 траектории винеровского процесса  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  не дифференцируемы ни в одной точке  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим промежуток  $[k, k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Допустим, что  $W(\cdot, \omega)$  дифференцируем в точке  $s \in [k, k+1)$ . Тогда существует правая производная  $W(\cdot, \omega)$  в точке  $s$ . Из этого следует, что

$$\exists l, q \in \mathbb{N} : |W(t, \omega) - W(s, \omega)| \leq l(t-s) \text{ при } |t-s| < \frac{1}{q}, t > s.$$

Зафиксируем  $k \in \mathbb{Z}_+$  и введем событие

$$A_{l,n,i} := \left\{ \omega : \left| W\left(k + \frac{j+1}{n}, \omega\right) - W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right) \right| \leq \frac{7l}{n}, j = i, i+1, i+2 \right\}.$$

Пусть  $\frac{4}{n} < \frac{1}{q}$ , то есть  $n > 4q$ . Тогда если  $\omega$  — точка дифференцируемости  $W$  в точке  $s$ , то  $\exists i = i(s, n)$ , что

$$\begin{aligned} \left| W\left(k + \frac{j+1}{n}, \omega\right) - W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right) \right| &\leq \\ &\leq \left| W\left(k + \frac{j+1}{n}, \omega\right) - W(s, \omega) \right| + \left| W(s, \omega) - W\left(k + \frac{j}{n}, \omega\right) \right| \leq \\ &\leq \frac{3l}{n} + \frac{4l}{n} = \frac{7l}{n}, j = i, i+1, i+2, \end{aligned}$$

поскольку в разрешенный промежуток длины  $\frac{1}{q}$  точно попадет целиком хотя бы 3 отрезка длины  $\frac{1}{n}$  ( $i$  выбирается таким образом, чтобы  $k + \frac{i-1}{n} \leq s < k + \frac{i}{n}$ ). Таким образом, если  $\omega \in D_k$ , где  $D_k$  — такие  $\omega$ , что  $W(\cdot, \omega)$  дифференцируема в точке  $s \in [k, k+1)$ , то по показанному выше

$$D_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{n-3} A_{l,n,i}.$$

Покажем, что

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{n-3} A_{l,n,i} \right) = 0 \quad \forall l, q \in \mathbb{N};$$

если мы это сделаем, то тогда автоматически получится, что  $\mathbb{P}(D_k) = 0$ , что и доказывает утверждение теоремы. Для начала заметим, что

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_n B_n \right) \leq \liminf_n \mathbb{P}(B_n),$$

поскольку пересечение вложено в каждый из отдельно взятых элементов. Поэтому

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{n-3} A_{l,n,i} \right) \leq \liminf_n \mathbb{P} \left( \bigcup_{i=1}^n A_{l,n,i} \right) \leq \liminf_n \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_{l,n,i}).$$

Оценим общий член этой суммы. Так как приращения винеровского процесса независимы и стационарны, то

$$\mathbb{P}(A_{l,n,i}) = \left( \mathbb{P} \left( |W(1/n) - W(0)| \leq \frac{7l}{n} \right) \right)^3 = \left( \mathbb{P} \left( \frac{|W(1/n)|}{\sqrt{1/n}} \leq \frac{7l}{\sqrt{n}} \right) \right)^3.$$

Введем обозначение

$$\xi := \frac{W(\frac{1}{n})}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Тогда воспользуемся тем, что

$$\mathbb{P}(|\xi| \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \frac{2z}{\sqrt{2\pi}} = z \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

и продолжим цепочку неравенств:

$$\left( \mathbb{P} \left( \frac{|W(1/n)|}{\sqrt{1/n}} \leq \frac{7l}{\sqrt{n}} \right) \right)^3 \leq \left( \frac{7l}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^3.$$

Тогда, возвращаясь к сумме, получаем, что

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{n-3} A_{l,n,i} \right) \leq \liminf_n n \left( \frac{7l}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^3 = 0.$$

Теорема доказана.  $\square$

*Замечание.* Это доказательство (точно такое же, но с картинками) можно посмотреть в [1], стр. 76.

*Замечание.* Из последнего шага доказательства становится ясно, почему нужно было брать именно три отрезка, а не один или два.

## 7.2 Принцип отражения

**Теорема 7.2** (принцип отражения). Пусть  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  — винеровский процесс,  $\tau$  — момент остановки относительно естественной фильтрации процесса  $W$ . Введем новый (отраженный) процесс

$$Z(t, \omega) = \begin{cases} W(t, \omega), & t \leq \tau(\omega), \\ 2W(\tau(\omega), \omega) - W(t, \omega), & t > \tau(\omega) \end{cases}$$

для всех  $\omega \in \{\tau < \infty\}$ ; для всех остальных  $\omega$  определим  $Z(t, \omega) \equiv 0$ . Иными словами,

$$Z(t, \omega) = W(t, \omega) \mathbb{I}\{t \leq \tau(\omega)\} + (2W(\tau(\omega), \omega) - W(t, \omega)) \mathbb{I}\{t > \tau(\omega)\}.$$

Тогда  $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$  — винеровский процесс.



*Доказательство.* Введем польское (то есть метрическое полное сепарабельное) пространство  $C_0(\mathbb{R}_+) = \{f : f \in C(\mathbb{R}_+), f(0) = 0\}$  с метрикой

$$\rho(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\sup_{t \in [0, n]} |f(t) - g(t)|}{1 + \sup_{t \in [0, n]} |f(t) - g(t)|}.$$

Введем два вспомогательных процесса  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  и  $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ :

$$\begin{aligned} X(t, \omega) &:= W(\min(t, \tau(\omega)), \omega), \\ Y(t, \omega) &:= W(t + \tau, \omega) - W(\tau). \end{aligned}$$

Смысл этих процессов таков:  $X$  — это процесс  $W$ , остановленный после момента  $\tau$ ;  $Y$  — это процесс  $W$ , отсеченный в момент  $\tau$ . Сразу отметим, что  $Y$  — винеровский процесс по строго марковскому свойству (теорема 6.2). Введем для всех  $b \in \mathbb{R}_+$ ,  $f, g \in C_0(\mathbb{R}_+)$  отображение "склеивания"  $h$  функций  $f$  и  $g$  в точке  $b$ :

$$h(b, f(\cdot), g(\cdot))(t) := f(t)\mathbb{I}_{[0, b]}(t) + (f(b) + g(t - b))\mathbb{I}_{(b, \infty)}(t).$$

Отметим, что

$$h : (\mathbb{R}_+ \times C_0[0, \infty) \times C_0[0, \infty), \tilde{\rho}) \rightarrow (C_0[0, \infty), \rho),$$

где метрика  $\tilde{\rho}$  вводится следующим образом:

$$\tilde{\rho} := \max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\},$$

где  $\rho_1$  — евклидова метрика на  $\mathbb{R}_+$ , а  $\rho_2$  и  $\rho_3$  совпадают с метрикой  $\rho$ , является непрерывным отображением. Заметим, что тогда для всех  $\omega \in \{\tau < \infty\}$

$$\begin{aligned} h(\tau(\omega), X(\cdot, \omega), Y(\cdot, \omega)) &= W(\cdot, \omega), \\ h(\tau(\omega), X(\cdot, \omega), -Y(\cdot, \omega)) &= Z(\cdot, \omega). \end{aligned}$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$h(\tau(\omega), X(\cdot, \omega), Y(\cdot, \omega)) \stackrel{\text{law}}{=} h(\tau(\omega), X(\cdot, \omega), -Y(\cdot, \omega)),$$

для чего достаточно доказать, что элементы  $(\tau, X, Y)$  и  $(\tau, X, -Y)$  имеют одинаковое распределение, в силу непрерывности  $h$ . Перейдем к этому. Сначала докажем, что вектор  $(\tau, X)$   $\mathcal{F}_\tau$ -измерим. Для этого достаточно доказать, что  $\mathcal{F}_\tau$ -измеримы его компоненты.  $\mathcal{F}_\tau$ -измеримость  $\tau$  очевидна. Перейдем к доказательству  $\mathcal{F}_\tau$ -измеримости  $X$ . Для этого построим последовательность сходящихся к  $X$   $\mathcal{F}_\tau$ -измеримых случайных элементов  $X_n$ . Введем величины

$$a_n(\omega) := \sum_{k=0}^{\infty} k 2^{-n} \mathbb{I}_{[k 2^{-n}, (k+1) 2^{-n})}(\tau(\omega)) \nearrow \tau(\omega), \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \omega.$$

Построим по ним

$$X_n(\omega) := W\left(\min(t, a_n(\omega)), \omega\right).$$

Тогда  $X_n$   $\mathcal{F}_\tau$ -измеримы и, как следствие,  $X$   $\mathcal{F}_\tau$ -измерим. Тогда и весь вектор  $(\tau, X)$   $\mathcal{F}_\tau$ -измерим. По строго марковскому свойству  $Y$  независим с  $\mathcal{F}_\tau$  и, как следствие, с вектором  $(\tau, X)$ . Вследствие этого получаем, что

$$\text{Law}((\tau, X, Y)) = \text{Law}((\tau, X)) \otimes \text{Law}(Y) = \text{Law}((\tau, X)) \otimes \text{Law}(W).$$

Поскольку  $Y$  — винеровский процесс, то

$$\text{Law}((\tau, X, -Y)) = \text{Law}((\tau, X)) \otimes \text{Law}(-Y) = \text{Law}((\tau, X)) \otimes \text{Law}(W).$$

Теорема доказана.  $\square$

*Замечание.* Доказательство взято из [1], стр. 85.

### 7.3 Теорема Башелье

**Лемма 7.3.** Пусть  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Положим

$$\tau_y := \inf\{t \geq 0 : W(t) = y\}.$$

Тогда  $\forall t, x, y \geq 0$

$$\mathbb{P}(\tau_y \leq t, W(t) < y - x) = \mathbb{P}(W(t) > y + x).$$

*Доказательство.* При  $y = 0$  теорема верна, поскольку равенство в ее формулировке превращается в равенство  $\mathbb{P}(W(t) \leq -x) = \mathbb{P}(W(t) \geq x)$ .

Пусть теперь  $y > 0$ . Согласно обязательной задаче 6.2  $\tau_y$  — момент остановки относительно естественной фильтрации  $W$ . Построим отраженный процесс  $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$  так же, как в теореме 7.2, используя  $\tau_y$  в качестве момента отражения  $\tau$ . Введем

$$\sigma_y := \inf\{t \geq 0 : Z(t) = y\}.$$

Очевидно, тогда  $\tau_y \equiv \sigma_y$  для всех  $\omega \in \{\tau_y < \infty\}$ . Заметим, что

$$\mathbb{P}(\tau_y \leq t, W \in B) = \mathbb{P}\left(\sup_{s \in [0, t]} W(s) \geq y, W \in B\right) = \mathbb{P}(W \in \tilde{B} \cap B)$$

$\forall B \in \mathcal{B}(C[0, \infty))$ ,  $t \geq 0$ , где

$$\tilde{B} = \left\{f \in C[0, \infty) : \sup_{s \in [0, t]} f(s) \geq y\right\}.$$

Аналогично получаем, что

$$\mathbb{P}(\sigma_y \leq t, Z \in B) = \mathbb{P}(Z \in \tilde{B} \cap B) = \mathbb{P}(W \in \tilde{B} \cap B)$$

по теореме 7.2. Таким образом, показали, что случайные элементы  $(\tau_y, W)$  и  $(\sigma_y, Z)$  имеют одинаковые распределения. Из этого следует, что  $\forall x \in \mathbb{R}, t, y \geq 0$

$$\mathbf{P}(\tau_y \leq t, W(t) < y - x) = \mathbf{P}(\sigma_y \leq t, Z(t) < y - x).$$

В силу непрерывности траекторий  $W$  имеем  $W(\tau_y(\omega), \omega) = y, y \geq 0$ . Поэтому для  $t \geq \sigma_y(\omega)$  по определению  $Z$  получаем, что

$$Z(t, \omega) = 2W(\tau_y(\omega), \omega) - W(t, \omega) = 2y - W(t, \omega).$$

Таким образом, при всех  $y \geq 0$  получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau_y \leq t, W(t) < y - x) &= \mathbf{P}(\sigma_y \leq t, Z(t) < y - x) = \\ &= \mathbf{P}(\sigma_y \leq t, W(t) > y + x) = \mathbf{P}(\tau_y \leq t, W(t) > y + x). \end{aligned}$$

Тогда при  $x \geq 0$  получаем, что

$$\mathbf{P}(\tau_y \leq t, W(t) < y - x) = \mathbf{P}(\tau_y \leq t, W(t) > y + x) = \mathbf{P}(W(t) > y + x),$$

что и требовалось доказать.  $\square$

*Замечание.* Доказательство взято из [1], стр. 89.

**Теорема 7.4** (Башелье). Пусть  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Тогда

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \in [0, t]} W_s \geq y\right) = 2\mathbf{P}(W_t \geq y) = \mathbf{P}(|W_t| \geq y).$$

*Доказательство.* Возьмем  $x = 0$  в лемме 7.3. Тогда получим, что

$$\mathbf{P}(\tau_y \leq t, W(t) < y) = \mathbf{P}\left(\sup_{s \in [0, t]} W(s) \geq y, W(t) < y\right) = \mathbf{P}(W(t) > y).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sup_{s \in [0, t]} W(s) \geq y\right) &= \\ &= \mathbf{P}\left(\sup_{s \in [0, t]} W(s) \geq y, W(t) < y\right) + \mathbf{P}\left(\sup_{s \in [0, t]} W(s) \geq y, W(t) \geq y\right) = \\ &= \mathbf{P}(W(t) > y) + \mathbf{P}(W(t) \geq y) = 2\mathbf{P}(W(t) \geq y), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.  $\square$

*Замечание.* Доказательство взято из [1], стр. 90.

## 8 Лекция от 05.04.17

### Мартингалы

#### 8.1 Мартингалы. Определения. Примеры

**Определение 8.1.** Действительный процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$ ,  $T \subset \mathbb{R}$ , называется *мартингалом* относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , если выполнены три условия:

1.  $X_t \in \mathcal{F}_t | \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall t \in T$ ;
2.  $E|X_t| < \infty \quad \forall t \in T$ ;
3.  $E(X_t | \mathcal{F}_s) \stackrel{\text{н.н.}}{=} X_s \quad \forall s, t \in T, s \leq t$ .

$X$  называется *субмартингалом* относительно  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , если

1.  $X_t \in \mathcal{F}_t | \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall t \in T$ ;
2.  $E|X_t| < \infty \quad \forall t \in T$ ;
3.  $E(X_t | \mathcal{F}_s) \stackrel{\text{н.н.}}{\geq} X_s \quad \forall s, t \in T, s \leq t$ .

$X$  называется *супермартингалом* относительно  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , если

1.  $X_t \in \mathcal{F}_t | \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall t \in T$ ;
2.  $E|X_t| < \infty \quad \forall t \in T$ ;
3.  $E(X_t | \mathcal{F}_s) \stackrel{\text{н.н.}}{\leq} X_s \quad \forall s, t \in T, s \leq t$ .

*Замечание.* Дальше будем также использовать для мартингала обозначение  $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ .

**Пример 8.1.** Пусть  $X = \{X_t, t \in T\}$  — процесс с независимыми приращениями,  $\mathcal{F}_t := \sigma\{X_s, s \leq t, s \in T\}$ ,  $t \in T$ , — естественная фильтрация процесса. Тогда  $X$  — мартингал относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  тогда и только тогда, когда  $EX_t = EX_s \quad \forall s, t \in T$ , то есть  $EX_t = \text{const}$ .

*Доказательство.* Действительно, пусть  $X$  — мартингал,  $s \leq t$ . Тогда

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) = E(X_t - X_s + X_s | \mathcal{F}_s) = E(X_t - X_s | \mathcal{F}_s) + E(X_s | \mathcal{F}_s).$$

Известны следующие свойства условного математического ожидания: во-первых, если случайная величина  $\xi$  независима с  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{F}$ , то

$$E(\xi | \mathcal{F}) = E\xi;$$

во-вторых, если случайная величина  $\eta$  измерима относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}$ , то

$$E(\eta | \mathcal{F}) = \eta.$$

Воспользуемся в силу независимости приращений этими свойствами с  $\xi = X_t - X_s$  и  $\eta = X_s$ :

$$E(X_t - X_s | \mathcal{F}_s) + E(X_s | \mathcal{F}_s) = EX_t - EX_s + X_s = X_s$$

по условию 3. Из этого и получаем, что  $\forall t, s \in T$

$$EX_t = EX_s.$$

Для доказательства утверждения в обратную сторону достаточно провести то же рассуждение в обратном порядке.  $\square$

**Следствие.** Винеровский процесс  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  — мартингал относительно естественной фильтрации, поскольку  $EW_t \equiv 0$ .

Пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$   $N = \{N_t, t \geq 0\}$  не является мартингалом относительно естественной фильтрации, поскольку  $EN_t = \lambda t \neq \text{const}$ . Однако процесс  $\{N_t - EN_t, t \geq 0\}$  является мартингалом относительно естественной фильтрации.

*Замечание.* Если  $X$  — мартингал относительно какой-то фильтрации, то он заведомо является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса.

**Пример 8.2.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые случайные величины такие, что  $E|\xi_k| < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$ . Построим по ним процесс  $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Тогда  $(S_n)_{n \geq 1}$  — мартингал относительно естественной фильтрации  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  процесса  $S$  (которая совпадает с естественной фильтрацией последовательности  $\xi_1, \xi_2, \dots$ )  $\Leftrightarrow E\xi_2 = E\xi_3 = \dots = 0$  (при этом  $E\xi_1$ , вообще говоря, может быть любым). Если величины  $\xi_k$  при этом еще и одинаково распределены, то тогда и  $E\xi_1$  обязано равняться нулю.

**Пример 8.3** (мартингал Леви). Пусть  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ ,  $T \subset \mathbb{R}$ , — фильтрация,  $\xi$  — случайная величина,  $E|\xi| < \infty$ . Тогда

$$X_t := E(\xi | \mathcal{F}_t), t \in T, \text{ — мартингал относительно } (\mathcal{F}_t)_{t \in T}.$$

*Доказательство.* Проверим свойства 1.–3. из определения мартингала:

1.  $X_t \in \mathcal{F}_t | \mathcal{B}(\mathbb{R})$  по определению условного математического ожидания;
2.  $E|X_t| < \infty$ , так как

$$E\left(|E(\xi | \mathcal{F}_t)|\right) \leq E\left(E(|\xi| | \mathcal{F}_t)\right) = E|\xi| < \infty;$$

3.  $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$  по телескопическому свойству условного математического ожидания

$$E\left(E(\xi | \mathcal{A}_1) | \mathcal{A}_2\right) = E(\xi | \mathcal{A}_2) \quad \forall \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{F},$$

примененному к  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{F}_s$ ,  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{F}_t$ .

□

**Пример 8.4.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные величины,  $E\xi_k = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ . Построим по ним процесс  $X_n := \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n$ . Тогда  $(X_n)_{n \geq 1}$  — мартингал относительно естественной фильтрации (как и в примере 8.2, в этом случае  $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ).

*Доказательство.* Проверим свойства 1.–3. из определения мартингала:

1.  $X_t \in \mathcal{F}_t | \mathcal{B}(\mathbb{R})$  по определению  $\mathcal{F}_t$ ;
2.  $E|X_t| = 1 < \infty$ ;
3.  $E(\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_t | \mathcal{F}_s) = E(\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_s \cdot \dots \cdot \xi_t | \mathcal{F}_s) = \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_s E(\xi_{s+1} \cdot \dots \cdot \xi_t) = \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_s = X_s$ .

□

## 8.2 Разложение Дуба

**Определение 8.2.** Процесс  $A = \{A_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  называется *предсказуемым*, если  $A_n$  измерим относительно  $\mathcal{F}_{n-1} \forall n \geq 0$ . Здесь полагаем  $\mathcal{F}_{-1} := \{\emptyset, \Omega\}$ .

**Теорема 8.1** (Дуба). Пусть  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  — случайный процесс такой, что  $E|X_n| < \infty \forall n$ ,  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  — фильтрация, причем  $X_n \in \mathcal{F}_n | \mathcal{B}(\mathbb{R}) \forall n \in \mathbb{Z}_+$ . Тогда

$$X = M + A,$$

то есть

$$X_n = M_n + A_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

где

$M = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  — мартингал относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ ,

$A = (A_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  — предсказуемый процесс такой, что  $A_0 \equiv 0$ .

Это представление процесса  $X$  в виде суммы мартингала и предсказуемого процесса однозначно почти наверное.

*Доказательство.* Теорема утверждает существование и единственность (почти наверное) такого разложения. Сначала предположим, что существование доказано, и выведем единственность.

Положим  $\Delta X_n := X_n - X_{n-1}$ . Тогда  $\Delta X_n = \Delta M_n + \Delta A_n$ , то есть  $\Delta A_n = \Delta X_n - \Delta M_n$ . Из предсказуемости процесса  $A$  получаем, что

$$\Delta A_n = E(\Delta A_n | \mathcal{F}_{n-1}) = E(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - E(\Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}),$$

при этом

$$E(\Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = E(M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = E(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) - M_{n-1} = 0$$

по свойству 3. из определения мартингала. Таким образом, получаем, что

$$\Delta A_n = E(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}),$$

из чего вытекает, что

$$A_n = \sum_{k=1}^n E(\Delta X_k | \mathcal{F}_{k-1}),$$

то есть  $A_n$  определяется по  $X$  однозначно (почти наверное, как и вообще равенство случайных величин); тогда и  $M_n = X_n - A_n$  тоже определяется однозначно по  $X$ , то есть разложение единственно.

Теперь докажем существование. Рассуждение выше подсказывает нам явный вид  $A_n$ . Положим

$$A_n = \sum_{k=1}^n E(\Delta X_k | \mathcal{F}_{k-1}), \quad n \geq 1; \quad A_0 \equiv 0.$$

Тогда  $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  — предсказуемый процесс. Тогда

$$M_n := X_n - A_n \Rightarrow \Delta M_n := \Delta X_n - \Delta A_n = \Delta X_n - E(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}),$$

из чего получаем, что

$$E(\Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0,$$

то есть  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  — мартингал. Теорема доказана.  $\square$

*Замечание.* Несмотря на то что все равенства случайных величин в теореме 8.1 считаются равенствами почти наверное, в формулировке теоремы  $A_0$  полагается тождественно равным нулю. Это делается, чтобы обеспечить измеримость  $A_0$  относительно антидискретной  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_{-1}$ . Если договориться, что все  $\sigma$ -алгебры пополняются классом нулевых событий, то можно считать, что  $A_0 = 0$  почти наверное. При этом если  $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$  — мартингал, то и  $(X_t, \bar{\mathcal{F}}_t)_{t \in T}$  — мартингал, где  $\bar{\mathcal{F}}_t$  —  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}_t$ , пополненная классом нулевых событий.

### 8.3 Формула Танаки

**Лемма 8.2.** Пусть  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  — мартингал,  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая вниз функция. Тогда

$$(h(X_n), \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} \text{ — субмартингал.}$$

*Доказательство.* Воспользуемся неравенством Йенсена для условного математического ожидания:

$$\mathbb{E}(h(X_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}) \geq h(\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})) = h(X_{n-1}).$$

□

**Пример 8.5** (формула Танаки). Пусть  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что  $\mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = 1/2$ . Построим по ним процесс  $S_n := \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_0 := 0$ . Тогда из примера 8.1 следует, что  $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  — мартингал, а из леммы 8.2 следует, что  $(|S_n|)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  — субмартингал относительно фильтрации, состоящей из  $\sigma$ -алгебр вида  $\mathcal{F}_n = \sigma\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ .

Найдем разложение Дуба для этого субмартингала, подходящего под условия теоремы 8.1.

Знаем из 8.1, что

$$A_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}), \quad X_k = |S_k|,$$

то есть

$$A_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|S_k| - |S_{k-1}| \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \left( \mathbb{E}(|S_k| \mid \mathcal{F}_{k-1}) - |S_{k-1}| \right).$$

Рассмотрим первое слагаемое члена суммы, зная, что  $S_{k-1}$   $\mathcal{F}_{k-1}$ -измеримо, что  $\varepsilon_k$  независимо с  $\mathcal{F}_{k-1}$  и что  $\mathbb{E}\varepsilon_k = 0$ ,  $|\varepsilon| = 1$  почти наверное:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|S_k| \mid \mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbb{E}(|S_{k-1} + \varepsilon_k| \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \\ &= \mathbb{E}(|S_{k-1} + \varepsilon_k| \mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} + |S_{k-1} + \varepsilon_k| \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\} + \\ &+ |S_{k-1} + \varepsilon_k| \mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}((S_{k-1} + \varepsilon_k) \mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} \mid \mathcal{F}_{k-1}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbb{E} \left( |\varepsilon_k| \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\} \mid \mathcal{F}_{k-1} \right) - \mathbb{E} \left( (S_{k-1} + \varepsilon_k) \mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\} \mid \mathcal{F}_{k-1} \right) = \\
& = \mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} \mathbb{E} \left( (S_{k-1} + \varepsilon_k) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right) + \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\} - \\
& \quad - \mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\} \mathbb{E} \left( (S_{k-1} + \varepsilon_k) \mid \mathcal{F}_{k-1} \right) = \\
& = S_{k-1} \mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} + \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\} - S_{k-1} \mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\}.
\end{aligned}$$

Итак, получили, что

$$\mathbb{E} \left( |S_k| \mid \mathcal{F}_{k-1} \right) = S_{k-1} \mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} + \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\} - S_{k-1} \mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\}.$$

Заметим, что

$$|S_{k-1}| = S_{k-1} \mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} - S_{k-1} \mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\}.$$

Из двух равенств выше получаем, что

$$\mathbb{E} \left( |S_k| \mid \mathcal{F}_{k-1} \right) - |S_{k-1}| = \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\},$$

то есть

$$A_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\}.$$

Рассмотрим  $M_n$  (напомним, что  $S_0 \equiv 0$ ):

$$\begin{aligned}
M_n &= X_n - A_n = \sum_{k=1}^n (|S_k| - |S_{k-1}| - \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\}) = \\
&= \sum_{k=1}^n (|S_{k-1} + \varepsilon_k| - |S_{k-1}| - \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\}) = \\
&= \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k \mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} - \varepsilon_k \mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\} + |\varepsilon_k| \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\} - \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\}) = \\
&= \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k \mathbb{I}\{S_{k-1} > 0\} - \varepsilon_k \mathbb{I}\{S_{k-1} < 0\}) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \operatorname{sign} S_{k-1},
\end{aligned}$$

где

$$\operatorname{sign} x := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, получили, что

$$\underbrace{|S_n|}_{X_n} = \underbrace{\sum_{k=1}^n \mathbb{I}\{S_{k-1} = 0\}}_{A_n} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \Delta S_k \operatorname{sign} S_{k-1}}_{M_n}.$$

Это разложение Дуба и называется **формулой Танаки**.



**Следствие.** Обозначим через  $L_n(0)$  число нулей последовательности  $(S_k)_{0 \leq k < n}$ . Из формулы выше явно видно, что  $L_n(0) = A_n$ . Верно следующее утверждение:

$$EL_n(0) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} n, \quad n \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Так как  $EM_n = 0 \quad \forall n$ , то  $EA_n = E|S_n|$ . Поскольку  $S_n = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$ , то

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{law}} Y \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty$$

по центральной предельной теореме. Тогда

$$\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{law}} |Y|.$$

Как было показано в теореме 3.3,

$$\xi_n \xrightarrow{\text{law}} \xi \not\Rightarrow E\xi_n \rightarrow E\xi, \quad n \rightarrow \infty.$$

Согласно теоремам 3.4 и 3.5, для того чтобы показать сходимость матожиданий, достаточно найти  $\delta > 0$  такое, что

$$\sup_n E|\xi_n|^{1+\delta} < \infty.$$

Возьмем  $\delta = 1$ . Тогда

$$E\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^2 = E\frac{S_n^2}{n} = \frac{DS_n}{n} = \frac{nD\varepsilon_1}{n} = 1 < \infty.$$

Тогда

$$E\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \rightarrow E|Y| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

то есть

$$EL_n(0) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} n,$$

что и требовалось доказать.  $\square$

## 8.4 Теорема Дуба об остановке

**Теорема 8.3.** Пусть  $X_n$  измерима относительно  $\mathcal{F}_n \quad \forall n$ ,  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  — фильтрация,  $E|X_n| < \infty \quad \forall n$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1.  $(X_n, \mathcal{F}_n)$  — мартингал;
2.  $\forall$  марковских моментов  $0 \leq \sigma \leq \tau \leq t$ , где  $t \in \mathbb{N}$  — фиксированное число,

$$E(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma.$$

*Доказательство.* Докажем  $1. \Rightarrow 2.$

Пусть  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  — мартингал. Заметим, что

$$\mathbb{E}|X_\tau| = \mathbb{E} \sum_{k=0}^m |X_\tau| \mathbb{I}\{\tau = k\} \leq \sum_{k=0}^m \mathbb{E}|X_k| < \infty,$$

поэтому вообще целесообразно говорить о матожидании из утверждения 2.

Для того чтобы доказать, что  $\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ , необходимо и достаточно проверить, что  $X_\sigma$  —  $\mathcal{F}_\sigma$ -измеримая случайная величина, а также что  $\forall A \in \mathcal{F}_\sigma$

$$\mathbb{E}X_\tau \mathbb{I}(A) = \mathbb{E}X_\sigma \mathbb{I}(A),$$

то есть что выполнено интегральное свойство.

Покажем  **$\mathcal{F}_\sigma$ -измеримость**  $X_\sigma$ . Для этого по определению  $\mathcal{F}_\sigma$  нужно показать, что  $\forall$  борелевских  $B$  и  $\forall k$

$$\{X_\sigma \in B\} \cap \{\sigma \leq k\} \in \mathcal{F}_k.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \{X_\sigma \in B\} \cap \{\sigma \leq k\} &= \bigcup_{r=0}^m \{X_\sigma \in B\} \cap \{\sigma = r\} \cap \{\sigma \leq k\} = \\ &= \bigcup_{r=0}^{\min(m, k)} \{X_r \in B\} \cap \{\sigma = r\}. \end{aligned}$$

При этом  $\{X_r \in B\} \in \mathcal{F}_r$  и  $\{\sigma = r\} \in \mathcal{F}_r$ , поскольку  $\sigma$  — марковский момент. Тогда, поскольку  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  — фильтрация,

$$\{X_r \in B\} \cap \{\sigma = r\} \in \mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}_{\min(m, k)} \subset \mathcal{F}_k.$$

Измеримость доказана.

Проверим **интегральное свойство**. Напомним, что для этого нужно доказать равенство

$$\mathbb{E}X_\tau \mathbb{I}(A) = \mathbb{E}X_\sigma \mathbb{I}(A)$$

$\forall A \in \mathcal{F}_\sigma$ . Сначала заметим, что, поскольку  $\sigma \leq \tau$  почти наверное,

$$\mathbb{I}\{\sigma \leq \tau\} \stackrel{\text{п.н.}}{=} 1.$$

Тогда

$$\mathbb{E}X_\sigma \mathbb{I}_A = \mathbb{E}X_\sigma \mathbb{I}_A \mathbb{I}\{\sigma \leq \tau\} = \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_\sigma \mathbb{I}_A \mathbb{I}\{\sigma = k\} \mathbb{I}\{\sigma \leq \tau\}.$$

Обозначим  $\mathbb{I}_A \mathbb{I}\{\sigma = k\} = \mathbb{I}_{A \cap \{\sigma = k\}} = \mathbb{I}_{B_k}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_\sigma \mathbb{I}_A \mathbb{I}\{\sigma = k\} \mathbb{I}\{\sigma \leq \tau\} &= \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k\} = \\ &= \sum_{k=0}^m \mathbb{E}X_k \mathbb{I}_{B_k} (\mathbb{I}\{\tau = k\} + \mathbb{I}\{\tau \geq k+1\}) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k+1\}.$$

Поскольку  $X$  — мартингал, то

$$\mathbb{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = X_k.$$

Тогда продолжим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k+1\} &= \\ &= \sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^m \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k+1\} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку  $\{\tau \geq k+1\} = \Omega \setminus \{\tau \leq k\} \in \mathcal{F}_k$ , так как  $\tau$  — марковский момент, и  $B_k \in \mathcal{F}_k$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^m \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k+1\} \right] &= \\ &= \sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^m \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}(X_{k+1} \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k+1\} \mid \mathcal{F}_k) \right] = \\ &= \sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^m \mathbb{E} (X_{k+1} \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k+1\}). \end{aligned}$$

Таким образом, получили, что

$$\sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k\} = \sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau = k\} + \sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_{k+1} \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k+1\}.$$

Продолжая далее, расписывая  $\{\tau \geq k+1\} = \{\tau = k+1\} + \{\tau \geq k+2\}$  и так далее, получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k\} &= \\ &= \sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_k \mathbb{I}_{B_k} (\mathbb{I}\{\tau = k\} + \mathbb{I}\{\tau = k+1\} + \dots + \mathbb{I}\{\tau = m\}) = \\ &= \sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_k \mathbb{I}_{B_k} \mathbb{I}\{\tau \geq k\} = \sum_{k=0}^m \mathbb{E} X_k \mathbb{I}_A \mathbb{I}\{\tau \geq k\} = \\ &= \mathbb{E} X_\tau \mathbb{I}_A \mathbb{I}\{\tau \geq \sigma\} = \mathbb{E} X_\tau \mathbb{I}_A, \end{aligned}$$

поскольку, как указывалось выше,  $\mathbb{I}\{\tau \geq \sigma\} = 1$ . Таким образом, интегральное свойство доказано, а значит, доказано 1.  $\Rightarrow$  2.

Докажем 1.  $\Leftarrow$  2.

Пусть известно, что  $\forall$  моментов остановки  $\sigma \leq \tau \leq m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma,$$

и нужно доказать, что  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  — мартингал относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ . Проверим свойство 3.: возьмем  $i < j$ ,  $\sigma \equiv i$ ,  $\tau \equiv j$ . Тогда  $\mathcal{F}_\sigma \equiv \mathcal{F}_i$ ,  $\mathcal{F}_\tau \equiv \mathcal{F}_j$ , а значит,  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  — мартингал. Теорема доказана.  $\square$

**Следствие.** Пусть  $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$  — мартингал. Тогда для любого ограниченного марковского момента  $\tau \leq t \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0,$$

поскольку 0 — ограниченный марковский момент,  $0 \leq \tau$ .

**Следствие.** Пусть  $|X_{\min(\tau, n)}| \leq C \forall n \geq 0$  и  $\tau$  — момент остановки. Тогда

$$\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0.$$

*Доказательство.* Заметим, что  $\tau_n := \min(\tau, n)$  — это ограниченный марковский момент. Значит, для него и нуля применима теорема 8.3 и, следовательно,

$$\mathbb{E}X_{\tau_n} = \mathbb{E}X_0.$$

Заметим также, что  $X_{\tau_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} X_\tau$ , поскольку для каждой реализации процесса (то есть для каждой  $\omega \in \Omega$ ) найдется достаточно большое  $n$  такое, что  $n > \tau(\omega)$  и что, следовательно,  $\min(n, \tau(\omega)) = \tau(\omega)$ . При этом по условию  $|X_{\min(\tau, n)}| \leq C \forall n \geq 0$ . Поэтому применима теорема Лебега о мажорируемой сходимости, по которой

$$\mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}X_{\tau_n} \rightarrow \mathbb{E}X_\tau, n \rightarrow \infty,$$

что и требовалось доказать.  $\square$

**Теорема 8.4** (первое тождество Вальда). Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $\mathbb{E}|\xi_1| < \infty$ ,  $\tau$  — марковский момент относительно естественной фильтрации  $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ,  $\mathbb{E}\tau < \infty$ . Тогда

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\tau} \xi_i\right) = \mathbb{E}\xi_1 \mathbb{E}\tau.$$

*Доказательство.* Несложно видеть, что

$$\sum_{i=1}^{\tau} \xi_i = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mathbb{I}\{\tau \geq k\}.$$

Заметим, что

$$\{\tau \geq k\} = \Omega \setminus \{\tau \leq k-1\} \in \mathcal{F}_{k-1}.$$

Поэтому, поскольку  $\xi_i$  — независимые случайные величины,  $\xi_k$  независима с  $\mathbb{I}\{\tau \geq k\}$ . Тогда

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\tau} \xi_i\right) = \mathbb{E}\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mathbb{I}\{\tau \geq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\xi_k \mathbb{I}\{\tau \geq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\xi_k \mathbb{E}\mathbb{I}\{\tau \geq k\} =$$

$$= E\xi_1 \sum_{k=1}^{\infty} E\mathbb{I}\{\tau \geq k\} = E\xi_1 \sum_{k=1}^{\infty} P(\tau \geq k).$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\tau \geq k) = \sum_{p=1}^{\infty} p P\{\tau = p\},$$

то есть

$$E\left(\sum_{i=1}^{\tau} \xi_i\right) = E\xi_1 E\tau,$$

что и требовалось доказать.  $\square$

## 9 Лекция от 12.04.17

### Марковские процессы

#### 9.1 Задача о разорении игрока

**Пример 9.1** (задача о разорении игрока). Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $P(\xi_1 = 1) = p$ ,  $P(\xi_1 = -1) = 1 - p =: q$ . Возьмем целые числа  $x, a, b$  такие, что  $a < b$ ,  $x \in (a, b)$ . Положим

$$\begin{aligned} S_0 &:= x, \\ S_n &:= x + \xi_1 + \dots + \xi_n. \end{aligned}$$

Введем также

$$\begin{aligned} \tau_a &:= \inf\{n : S_n = a\}, \\ \tau_b &:= \inf\{n : S_n = b\}, \\ \tau &:= \inf\{n : S_n \notin (a, b)\}. \end{aligned}$$

Заметим, что все они являются марковскими моментами относительно естественной фильтрации процесса  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ , где  $\mathcal{F}_n := \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ,  $n \geq 1$ , а  $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ . Также отметим, что  $\tau$  — это момент остановки (это следует из обязательной задачи 1.1).

Задача состоит в том, чтобы найти  $P(\tau_a < \tau_b)$ .

Рассмотрим сначала отдельно (являющийся особым) случай  $p = q = 1/2$ . Сразу отметим, что в этом случае  $(S_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  — мартингал, поскольку это процесс с независимыми приращениями и постоянным матожиданием. Заметим, что

$$|S_{\tau_n}| := |S_{\min(\tau, n)}| \leq \max(|a|, |b|),$$

поскольку либо момент  $\tau$  первого выхода на границу интервала  $(a, b)$  наступил до  $n$ , и тогда неравенство верно, либо не наступил, тогда верно даже строгое неравенство (потому что все еще находимся внутри интервала). Это означает, что можно применить следствие 2 из теоремы 8.3 и сказать, что

$$ES_{\tau} = ES_0 = x.$$

При этом

$$\mathbb{E}S_\tau = a \mathbb{P}(S_\tau = a) + b \mathbb{P}(S_\tau = b).$$

Поскольку  $\tau$  — момент (первого) выхода на границу интервала  $(a, b)$ , то  $\mathbb{P}(S_\tau = a) + \mathbb{P}(S_\tau = b) = 1$ . Таким образом,

$$x = a \mathbb{P}(S_\tau = a) + b (1 - \mathbb{P}(S_\tau = a)),$$

то есть

$$\mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) = \mathbb{P}(S_\tau = a) = \frac{b - x}{b - a}.$$

Теперь рассмотрим случай  $p \neq q$ .

Положим

$$X_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  — мартингал. Действительно, проверим три свойства из определения мартингала:

1.  $X_n$  измерим относительно  $\mathcal{F}_n$ ;
2.  $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ , так как

$$\mathbb{E}|X_n| = \sum_{k=x-n}^{x+n} \left|\frac{q}{p}\right|^k \mathbb{P}(S_n = k);$$

3.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{x+\xi_1+\dots+\xi_n+\xi_{n+1}} \middle| \mathcal{F}_n\right) = \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \mathbb{E}\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_{n+1}} = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \left(p\frac{q}{p} + q\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} = X_n. \end{aligned}$$

Таким образом, показали, что это мартингал. При этом

$$|X_{\min(\tau, n)}| \leq \max\left(\left(\frac{q}{p}\right)^a, \left(\frac{q}{p}\right)^b\right).$$

Тогда, как и выше, применимо следствие 2 из теоремы 8.3 и, следовательно,

$$\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0 = \left(\frac{q}{p}\right)^x.$$

Вместе с этим

$$\mathbb{E}X_\tau = \left(\frac{q}{p}\right)^a \mathbb{P}(S_\tau = a) + \left(\frac{q}{p}\right)^b \mathbb{P}(S_\tau = b)$$

и

$$\mathbb{P}(S_\tau = a) + \mathbb{P}(S_\tau = b) = 1,$$

то есть

$$\left(\frac{q}{p}\right)^a \mathbb{P}(S_\tau = a) + \left(\frac{q}{p}\right)^b (1 - \mathbb{P}(S_\tau = a)) = \left(\frac{q}{p}\right)^x,$$

или

$$\mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) = \mathbb{P}(S_\tau = a) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^a}.$$

## 9.2 Марковские процессы

**Определение 9.1.** Введем  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{F}_{\geq s} = \sigma\{X_u, u \geq s, u \in T\}$ . Тогда процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$ , согласованный с фильтрацией  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , называется *марковским процессом*, если  $\forall s \in T$  и  $\forall B \in \mathcal{F}_{\geq s}$

$$P(B | \mathcal{F}_s) = P(B | X_s).$$

*Замечание* (эквивалентное определение 1). Пусть  $X_t : \Omega \rightarrow S_t$ , где  $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$  — семейство борелевских пространств. Тогда процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$  является марковским процессом тогда и только тогда, когда для любых  $s \leq t$ ,  $s, t \in T$  и для любой ограниченной  $\mathcal{B}_t$ -измеримой функции  $f : S_t \rightarrow \mathbb{R}$

$$E(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = E(f(X_t) | X_s).$$

*Доказательство.* Доказательства на лекции не было, на экзамене его знать не обязательно; его можно почитать в [1], стр. 184.  $\square$

*Замечание* (эквивалентное определение 2). Марковость относительно своей естественной фильтрации процесса  $X = \{X_t, t \in T\}$ , принимающего при каждом  $t \in T$  значения в борелевском пространстве  $(S_t, \mathcal{B}_t)$ , равносильна следующему свойству: для любого  $m \geq 1$  и всех  $s_1 < \dots < s_m < s \leq t$ , где  $s, t$  и все  $s_i$  лежат в  $T$ , а также для произвольной ограниченной  $\mathcal{B}_t$ -измеримой функции  $f$

$$E(f(X_t) | X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_s) = E(f(X_t) | X_s).$$

Последнее соотношение эквивалентно тому, что для любого множества  $B \in \mathcal{B}_t$

$$P(X_t \in B | X_{s_1}, \dots, X_{s_m}, X_s) = P(X_t \in B | X_s).$$

*Доказательство.* Доказательства на лекции не было, на экзамене его знать не обязательно; его можно почитать в [1], стр. 185.  $\square$

**Теорема 9.1.** Пусть  $X = \{X_t, t \in T\}$ ,  $T \subset \mathbb{R}$  — процесс с независимыми приращениями. Тогда  $X$  — марковский процесс относительно своей естественной фильтрации.

*Доказательство.* Будем показывать, что выполнены условия замечания выше. Возьмем  $\forall s_1, \dots, s_m \in T < t \in T \forall m \in \mathbb{N}$ . Положим  $\zeta_1 := X_{s_1}$ ,  $\zeta_2 := X_{s_2} - X_{s_1}, \dots, \zeta_m := X_{s_m} - X_{s_{m-1}}$ ,  $\eta := X_t - X_{s_m}$ . Тогда  $\sigma\{X_{s_1}, \dots, X_{s_m}\} = \sigma\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ , поскольку связь линейна и невырождена. Следовательно,

$$E(f(X_t) | X_{s_1}, \dots, X_{s_m}) = E(f(\zeta_1 + \dots + \zeta_m + \eta) | \zeta_1, \dots, \zeta_m).$$

Обозначим

$$\zeta := (\zeta_1, \dots, \zeta_m); \quad g(\zeta, \eta) := f(\zeta_1 + \dots + \zeta_m + \eta).$$

Тогда  $\zeta$  и  $\eta$  независимы,  $g$  — борелевская функция и

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( f(\zeta_1 + \dots + \zeta_m + \eta) \mid \zeta_1 = x_1, \dots, \zeta_m = x_m \right) &= \mathbb{E} \left( g(\zeta, \eta) \mid \zeta = x \right) = \\ &= \mathbb{E} g(x, \eta), \end{aligned}$$

поскольку  $\zeta$  и  $\eta$  независимы. Обозначим

$$\varphi \left( \sum_{i=1}^m x_i \right) := \mathbb{E} f \left( \sum_{i=1}^m x_i + \eta \right).$$

Тогда для любой ограниченной измеримой функции  $f$   $\varphi$  — измеримая ограниченная функция (это нуждается в дополнительном доказательстве). Таким образом,

$$\mathbb{E} \left( f(\zeta_1 + \dots + \zeta_m + \eta) \mid \zeta_1 = x_1, \dots, \zeta_m = x_m \right) = \varphi(x),$$

то есть

$$\mathbb{E} \left( f(X_t) \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m} \right) = \varphi \left( \sum_{i=1}^m \zeta_i \right).$$

Заметим тогда, что по телескопическому свойству условного математического ожидания

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( f(X_t) \mid X_{s_m} \right) &= \mathbb{E} \left( f(X_t) \mid \sum_{i=1}^m \zeta_i \right) = \\ &= \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( f(X_t) \mid \zeta_1, \dots, \zeta_m \right) \mid \sum_{i=1}^m \zeta_i \right) = \mathbb{E} \left( \varphi \left( \sum_{i=1}^m \zeta_i \right) \mid \sum_{i=1}^m \zeta_i \right) = \\ &= \varphi \left( \sum_{i=1}^m \zeta_i \right) = \mathbb{E} \left( f(X_t) \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m} \right), \end{aligned}$$

то есть

$$\mathbb{E} \left( f(X_t) \mid X_{s_1}, \dots, X_{s_m} \right) = \mathbb{E} \left( f(X_t) \mid X_{s_m} \right),$$

что и требовалось доказать.  $\square$

**Следствие.** *Случайное блуждание, пуассоновский процесс и винеровский процесс являются марковскими процессами.*

**Определение 9.2.** Пусть  $X = \{X_t, t \in T\}$  — марковский процесс, при этом  $X_t : \Omega \rightarrow S$ ,  $S$  конечно или счетно. Тогда  $X$  называется *марковской цепью*.

*Замечание.* В данном случае будем отождествлять каждый элемент  $S$  с его номером.



*Замечание.* Если  $X_t : \Omega \rightarrow S$ , где  $S$  конечно или счетно, то определение марковости можно переписать в следующей эквивалентной формулировке:  
 $\forall m \forall s_1 < \dots < s_m < t, s_i, t \in T, \forall i_1, \dots, i_m, j \in S$

$$\mathbf{P}(X_t = j \mid X_{s_1} = i_1, \dots, X_{s_m} = i_m) = \mathbf{P}(X_t = j \mid X_{s_m} = i_m)$$

при условии, что

$$\mathbf{P}(X_{s_1} = i_1, \dots, X_{s_m} = i_m) \neq 0.$$

### 9.3 Свойства переходных вероятностей

**Определение 9.3.** Пусть  $X = \{X_t, t \in T\}$  — марковский процесс, причем  $X_t : \Omega \rightarrow S$ . Обозначим

$$\mathbb{S}_t := \{i : \mathbf{P}(X_t = i) \neq 0\}.$$

Введем для  $s \leq t, i \in \mathbb{S}_s, j \in \mathbb{S}_t$

$$p_{ij}(s, t) := \mathbf{P}(X_t = j \mid X_s = i).$$

Число  $p_{ij}(s, t)$  называется *переходной вероятностью* (из  $i$  в момент  $s$  в  $j$  в момент  $t$ ).

**Теорема 9.2** (свойства переходных вероятностей). *Если  $X$  — марковская цепь, то  $p_{ij}(s, t)$  обладают следующими свойствами:*

1.  $p_{ij}(s, t) \geq 0$ ;
2.  $\sum_{j \in \mathbb{S}_t} p_{ij}(s, t) = 1$ ;
3.  $p_{ij}(s, s) = \delta_{ij}$ ;
4.  $\forall s < u < t \ p_{ij}(s, t) = \sum_{k \in \mathbb{S}_u} p_{ik}(s, u) p_{kj}(u, t)$ .

*Доказательство.* Проверим свойства.

1. Следует из определения: вероятности неотрицательны.
2. Следует из формулы полной вероятности.
3. Следует из определения.
4. По определению

$$\begin{aligned} p_{ij}(s, t) &= \mathbf{P}(X_t = j \mid X_s = i) = \frac{\mathbf{P}(X_t = j, X_s = i)}{\mathbf{P}(X_s = i)} = \\ &= \sum_{k \in S} \frac{\mathbf{P}(X_t = j, X_u = k, X_s = i)}{\mathbf{P}(X_s = i)} = \\ &= \sum_{k: \mathbf{P}(X_u = k, X_s = i) \neq 0} \mathbf{P}(X_t = j \mid X_u = k, X_s = i) \frac{\mathbf{P}(X_u = k, X_s = i)}{\mathbf{P}(X_s = i)} \end{aligned}$$

Поскольку  $X$  — марковская цепь, то

$$\mathbf{P}(X_t = j \mid X_u = k, X_s = i) = \mathbf{P}(X_t = j \mid X_u = k).$$

Тогда продолжим цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k: P(X_u=k, X_s=i) \neq 0} P(X_t=j | X_u=k, X_s=i) \frac{P(X_u=k, X_s=i)}{P(X_s=i)} = \\
&= \sum_{k: P(X_u=k, X_s=i) \neq 0} P(X_t=j | X_u=k) \frac{P(X_u=k, X_s=i)}{P(X_s=i)} = \\
&= \sum_{k \in \mathbb{S}_u} P(X_t=j | X_u=k) P(X_u=k | X_s=i) = \\
&= \sum_{k \in \mathbb{S}_u} p_{ik}(s, u) p_{kj}(u, t).
\end{aligned}$$

□

*Замечание* (доопределение переходных вероятностей). В определении 9.3 переходные вероятности  $p_{ij}(s, t)$  вводились не для всех возможных состояний  $i, j \in S$ , а только для  $i \in \mathbb{S}_s, j \in \mathbb{S}_t$ . Доопределим для всех  $i, j \in S, s < t \in T$  следующим образом:

1. если  $i \in \mathbb{S}_s, j \notin \mathbb{S}_t$ , то  $p_{ij}(s, t) := 0$ ;
2. если  $i \notin \mathbb{S}_s$ , то выбираем и фиксируем произвольное  $i_0 = i_0(s) \in \mathbb{S}_s$  и определяем  $p_{ij}(s, t) := p_{i_0j}(s, t)$ .

В случае  $s = t$  по определению полагаем  $p_{ij}(s, t) := \delta_{ij}$ .

Тогда для так определенных переходных вероятностей выполнены свойства 1.–4. из теоремы 9.2.

**Теорема 9.3.** Конечномерные распределения цепи Маркова  $X = \{X_t, t \in T\}$ , где  $0 \in T \subset [0, \infty)$ , однозначно определяются начальным распределением  $P(X_0 = i)$  и переходными вероятностями  $p_{ij}(s, t)$ .

*Доказательство.* Действительно, возьмем  $\forall t_1 < \dots < t_n$  и  $i_1, \dots, i_n \in S$ . Тогда запишем

$$\begin{aligned}
& P(X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) = \\
&= P(X_{t_n} = i_n | X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) P(X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = \\
&= P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) P(X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}),
\end{aligned}$$

поскольку  $X$  — марковская цепь. Продолжаем таким же образом далее и получаем, что

$$\begin{aligned}
& P(X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n}) = \\
&= P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \dots P(X_{t_2} = i_2 | X_{t_1} = i_1) P(X_{t_1} = i_1) = \\
&= P(X_{t_1} = i_1) p_{i_1 i_2}(t_1, t_2) \dots p_{i_{n-1} i_n}(t_{n-1}, t_n).
\end{aligned}$$

Вместе с этим

$$\begin{aligned}
P(X_{t_1} = i_1) &= \sum_{k \in S} P(X_{t_1} = i_1 | X_0 = k) P(X_0 = k) = \\
&= \sum_{k \in S} p_{ki_1}(0, t_1) P(X_0 = k),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

## 10 Лекция от 19.04.17

### Свойства марковских процессов

#### 10.1 Компьютерное моделирование марковских цепей с дискретным временем и конечным числом состояний

**Определение 10.1.** Пусть  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Введем

$$p_{ij}^{(n)} := P(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

*Замечание.* Тогда  $p_{ij}^{(n)} \geq 0$ ,  $\sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)} = 1$ . Аналогично рассуждению в теореме

9.3 получаем, что

$$\begin{aligned} P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) &= \\ &= P(X_0 = i_0) p_{i_0 i_1}^{(1)} \dots p_{i_{n-1} i_n}^{(n)} = p_{i_0}^{(0)} p_{i_0 i_1}^{(1)} \dots p_{i_{n-1} i_n}^{(n-1)}, \end{aligned}$$

то есть вероятность цепочки состояний определяется начальным распределением и переходными вероятностями за единицу времени.

**Лемма 10.1.** Пусть  $X_0, U_1, U_2, \dots$  — независимые случайные величины,  $X_0 : \Omega \rightarrow S$ ,  $U_i$  равномерно распределены на  $[0, 1]$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Введем

$$X_{n+1} := h_n(X_n, U_{n+1}), n \in \mathbb{Z}_+,$$

где  $h_n$  — измеримая функция. Тогда  $X_0, X_1, \dots$  — цепь Маркова.

*Доказательство.* Проверим, что

$$E(f(X_{n+1}) \mid X_0, \dots, X_n) = E(f(X_{n+1}) \mid X_n)$$

для любой ограниченной измеримой функции  $f$ . Заметим, что по определению  $X_{n+1}$

$$E(f(X_{n+1}) \mid X_0, \dots, X_n) = E(f(h_n(X_n, U_{n+1})) \mid X_0, \dots, X_n).$$

Поскольку для любых независимых случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  и любой измеримой функции  $g$

$$E(g(\xi, \eta) \mid \xi = x) = E g(x, \eta)$$

и поскольку по построению  $X_n = H_n(X_0, U_1, \dots, U_n)$  независим с  $U_{n+1}$ , где  $H_k$  — измеримая функция, то

$$E(f(h_n(X_n, U_{n+1})) \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = E f(h_n(x_n, U_{n+1})).$$

По той же самой причине

$$E(f(h_n(X_n, U_{n+1})) \mid X_n = x_n) = E f(h_n(x_n, U_{n+1})).$$

Таким образом, доказали, что

$$\mathbb{E} \left( f(X_{n+1}) \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n \right) = \mathbb{E} \left( f(X_{n+1}) \mid X_n = x_n \right),$$

что эквивалентно тому, что

$$\mathbb{E} \left( f(X_{n+1}) \mid X_0, \dots, X_n \right) = \mathbb{E} \left( f(X_{n+1}) \mid X_n \right).$$

Лемма доказана.  $\square$

**Пример 10.1** (модель марковской цепи). Как выбрать  $h_n$  так, чтобы построенная марковская цепь имела заданное начальное распределение  $p_i(0)$  и заданные переходные вероятности  $p_{ij}^{(n)}$ ? Для начального распределения  $p_i(0)$ ,  $i \in S$ ,  $\#S = N$ , рассмотрим следующее разбиение отрезка  $[0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &:= [0, p_1(0)), \\ \Delta_2 &:= [p_1(0), p_1(0) + p_2(0)), \\ &\vdots \\ \Delta_N &:= [p_1(0) + \dots + p_{N-1}(0), 1]. \end{aligned}$$

Определим для  $x \in [0, 1]$   $f(x) := k$ , если  $x \in \Delta_k$ . Положим

$$X_0 := f(U_0).$$

Тогда

$$\mathbb{P}(X_0 = i) = \mathbb{P}(f(U_0) = i) = \mathbb{P}(U_0 \in \Delta_i) = |\Delta_i| = p_i(0).$$

Для переходных вероятностей  $p_{ij}^{(n)}$  рассмотрим аналогичное разбиение отрезка  $[0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{i1}^{(n)} &:= [0, p_{i1}^{(n)}), \\ \Delta_{i2}^{(n)} &:= [p_{i1}^{(n)}, p_{i1}^{(n)} + p_{i2}^{(n)}), \\ &\vdots \\ \Delta_{iN}^{(n)} &:= [p_{i1}^{(n)} + \dots + p_{i(N-1)}^{(n)}, 1]. \end{aligned}$$

Снова определим для  $x \in [0, 1]$   $g_n(i, x) := j$ , если  $x \in \Delta_{ij}^{(n)}$ . Положим

$$X_{n+1} := g_n(X_n, U_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда по лемме 10.1  $X_0, X_1, \dots$  — марковская цепь с пространством состояний  $S$ , причем  $\mathbb{P}(X_0 = i) = p_i(0)$ ,  $i \in S$ , то есть начальное распределение получилось именно таким, каким мы его хотели. То же самое верно и для переходных вероятностей: поскольку по построению  $X_n$  независим с  $U_{n+1}$ , то

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) &= P(g_n(X_n, U_{n+1}) = j \mid X_n = i) = \\ &= P(g_n(i, U_{n+1} = j)) = P(U_{n+1} \in g_n^{-1}(i, \{j\})) = |\Delta_{ij}^{(n)}| = p_{ij}^{(n)} \end{aligned}$$

по построению. Таким образом, для любых наперед заданных переходных вероятностей и начального распределения смогли в явном виде предъявить цепь Маркова, соответствующую им.

*Замечание.* Фактически это означает, что все цепи Маркова с дискретным временем и конечным числом состояний устроены именно так.

*Замечание.* Для компьютерного моделирования с помощью этого метода подходят только цепи Маркова с относительно малым числом  $N$ .

## 10.2 Предельное поведение переходных вероятностей

**Определение 10.2.** Марковская цепь  $X = \{X_t, t \in T\}$  называется *однородной* (во времени), если

$$p_{ij}(s, t) = p_{ij}(s + h, t + h)$$

$\forall s < t, s, t, s + h, t + h \in T, \forall i, j \in S$ .

*Замечание.* Это определение означает именно то, что переходные вероятности зависят только от длины промежутка времени, за который происходит переход, а не от его начала или конца. Поэтому вместо  $p_{ij}(s, t)$  для однородных цепей будем писать  $p_{ij}(t - s), t > s$ .

Так что дальше будем рассматривать  $p_{ij}(t), i, j \in S, t \in T$ .

*Замечание* (переформулировка свойств марковской цепи). Для однородной цепи переформулируем свойства марковской цепи из теоремы 9.2:

1.  $p_{ij}(t) \geq 0$ ;
2.  $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$ ;
3.  $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ ;
4.  $p_{ij}(s + t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t)$ .

**Определение 10.3.** Введем для однородной марковской цепи матрицы

$$P(t) := (p_{ij}(t))_{i, j \in S}, \quad i, j \in S.$$

*Замечание* (определение стохастической полугруппы). Переформулируем для этих матриц свойства однородной марковской цепи:

1. элементы  $P(t)$  неотрицательны;
2.  $\sum_{j \in S} P_{ij}(t) = 1$ ;
3.  $P(0) = I$ ;
4.  $P(s + t) = P(s)P(t)$ .

**Определение 10.4.** Введем вектор–строку  $p := (p_1(0), p_2(0), \dots)$ . Тогда, соответственно,

$$P(X_t = j) = (pP(t))_j = \sum_{i \in S} p_i(0) p_{ij}(t).$$

Распределение вероятностей, задаваемое вектором  $p$ , называется *стационарным*, если

$$pP(t) = p \quad \forall t \in T.$$

**Теорема 10.2** (эргодичности). Пусть  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  — однородная марковская цепь такая, что для некоторого  $j_0 \in S$  и некоторых  $h > 0$  и  $0 < \varepsilon \leq 1$

$$p_{ij_0}(h) \geq \varepsilon \quad \forall i \in S.$$

Тогда существует и единственен вектор  $\pi$ , задающий стационарное распределение вероятностей, такой, что для любого начального распределения  $\mu$

$$\|\mu P(t) - \pi\|_{l_1} \leq 2(1 - \varepsilon)^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor}.$$

*Доказательство.* Для доказательства теоремы сформулируем и докажем лемму.

**Лемма 10.3.** Пусть выполнены условия теоремы и  $\sum_i \rho_i = 0$ . Тогда

$$\|\rho P(t)\|_{l_1} \leq \|\rho\|_{l_1} (1 - \varepsilon)^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor}.$$

*Доказательство.* Доказательство будем проводить по индукции. База индукции: пусть  $t \in [0, h)$ . Тогда  $\lfloor t/h \rfloor = 0$ . Вместе с этим

$$\begin{aligned} \|\rho P(t)\|_{l_1} &= \sum_j |(\rho P(t))_j| = \sum_j \left| \sum_i \rho_i p_{ij}(t) \right| \leq \sum_j \sum_i |\rho_i| |p_{ij}(t)| = \\ &= \sum_i \sum_j |\rho_i| p_{ij}(t) = \sum_i |\rho_i| \sum_j p_{ij}(t) = \sum_i |\rho_i| = \|\rho\|_{l_1} = \|\rho\|_{l_1} (1 - \varepsilon)^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor}, \end{aligned}$$

где перемена порядка суммирования возможна в силу абсолютной сходимости ряда. Таким образом, для  $t \in [0, h)$  лемма справедлива.

Индуктивный переход: пусть лемма верна для  $t \in [0, mh)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ; покажем, что она верна для  $t \in [mh, (m+1)h)$ . При таких  $t$

$$\rho P(t) = \rho P(t-h)P(h).$$

Поскольку

$$\sum_j (\rho P(t-h))_j = \sum_j \sum_i \rho_i p_{ij}(t-h) = \sum_i \rho_i \sum_j p_{ij}(t-h) = \sum_i \rho_i = 0,$$

то

$$(\rho P(t-h)P(h))_j = \sum_i (\rho P(t-h))_i p_{ij}(h) =$$

$$= \sum_i (\rho P(t-h))_i (p_{ij}(h) - \varepsilon \delta_{jj_0})$$

( $j_0$  здесь берется из формулировки теоремы!). Тогда

$$\begin{aligned} \|\rho P(t)\|_{l_1} &= \sum_j \left| (\rho P(t-h)P(h))_j \right| = \\ &= \sum_j \left| \sum_i (\rho P(t-h))_i (p_{ij}(h) - \varepsilon \delta_{jj_0}) \right| \leq \\ &\leq \sum_j \sum_i \left| (\rho P(t-h))_i \right| |p_{ij}(h) - \varepsilon \delta_{jj_0}|. \end{aligned}$$

Заметим, что  $(p_{ij}(h) - \varepsilon \delta_{jj_0}) \geq 0$ , поскольку  $p_{ij_0}(h) \geq \varepsilon$  по условию теоремы, так что модуль можно снять. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_i \left| (\rho P(t-h))_i \right| |p_{ij}(h) - \varepsilon \delta_{jj_0}| &= \\ = \sum_i \left| (\rho P(t-h))_i \right| \sum_j (p_{ij}(h) - \varepsilon \delta_{jj_0}) &= \sum_i \left| (\rho P(t-h))_i \right| (1 - \varepsilon). \end{aligned}$$

При этом, поскольку  $(t-h) < mh$ , применимо предположение индукции, и поэтому

$$\sum_i \left| (\rho P(t-h))_i \right| (1 - \varepsilon) \leq \|\rho\|_{l_1} (1 - \varepsilon)^{\lceil \frac{t-h}{h} \rceil} (1 - \varepsilon) = \|\rho\|_{l_1} (1 - \varepsilon)^{\lceil \frac{t}{h} \rceil},$$

то есть

$$\|\rho P(t)\|_{l_1} \leq \|\rho\|_{l_1} (1 - \varepsilon)^{\lceil \frac{t}{h} \rceil},$$

что и требовалось доказать.  $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Возьмем произвольный вектор  $\mu$ , задающий начальное распределение цепи. Тогда  $\mu_i \geq 0$  и  $\sum_i \mu_i = 1$ . Покажем, что последовательность  $\mu P(n)$  фундаментальна по норме  $l_1$ : поскольку

$$\sum_i \left( (\mu P(u))_i - \mu_i \right) = 0,$$

то можно применить лемму 10.3 с  $\rho = (\mu P(u) - \mu)$ :

$$\begin{aligned} \|\mu P(t+u) - \mu P(t)\|_{l_1} &= \|\mu P(u)P(t) - \mu P(t)\|_{l_1} = \|(\mu P(u) - \mu)P(t)\|_{l_1} \leq \\ &\leq \|\mu P(u) - \mu\|_{l_1} (1 - \varepsilon)^{\lceil \frac{t}{h} \rceil} \leq 2(1 - \varepsilon)^{\lceil \frac{t}{h} \rceil}, \end{aligned}$$

поскольку оба вектора  $\mu P(u)$  и  $\mu$  задают вероятностное распределение. Фундаментальность последовательности показали. В силу полноты пространства  $l_1$  существует вектор  $\pi$  такой, что

$$\|\mu P(t) - \pi\|_{l_1} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Тогда  $\pi_i \geq 0 \forall i$  (иначе бы  $l_1$ -норма разности была всегда больше модуля отрицательного  $\pi_i$  и, следовательно, не сходилась бы к нулю) и  $\|\pi\|_{l_1} = 1$ , поскольку  $\|\mu P(t)\|_{l_1} = 1$ , то есть  $\pi$  задает вероятностное распределение. Докажем, что вектор  $\pi$  задает стационарное распределение. Для этого нужно показать, что  $\forall t \in T \pi P(t) = \pi$ . По лемме 10.3  $\forall t \in T$

$$\begin{aligned} \|\mu P(u+t) - \pi P(t)\|_{l_1} &= \|\mu P(u)P(t) - \pi P(t)\|_{l_1} = \|(\mu P(u) - \pi) P(t)\|_{l_1} \leq \\ &\leq \|\mu P(u) - \pi\|_{l_1} (1 - \varepsilon)^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

вместе с этим

$$\|\mu P(u+t) - \pi\|_{l_1} \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty.$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} \|\pi - \pi P(t)\|_{l_1} &= \|\pi - \mu P(u+t) + \mu P(u+t) - \pi P(t)\|_{l_1} \leq \\ &\leq \|\mu P(u+t) - \pi\|_{l_1} + \|\mu P(u+t) - \pi P(t)\|_{l_1} \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что и означает, что  $\forall t \in T \pi P(t) = \pi$ . Теперь покажем единственность такого вектора  $\pi$ . От противного: пусть существует еще один задающий вероятностное распределение вектор  $\nu$  такой, что  $\nu P(t) = \nu$ . Тогда по лемме 10.3

$$\|\pi - \nu\|_{l_1} = \|\pi P(t) - \nu P(t)\|_{l_1} = \|(\pi - \nu) P(t)\|_{l_1} \leq 2(1 - \varepsilon)^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

то есть  $\nu = \pi$ . Теорема доказана.  $\square$

**Следствие.** Возьмем  $\mu = \left(0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots\right)$ . Тогда  $\forall i$  существует  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j$  (который не зависит от  $i$ ). Таким образом, система за большое время как бы "забывает" состояние, из которого она стартовала.

*Замечание.* В теореме 10.2 показано, что  $\pi$  не зависит от  $\mu$ , хотя изначально он от  $\mu$  зависел по построению. О других следствиях этой теоремы можно почитать в [1], стр. 198.

### 10.3 Генератор марковской цепи с непрерывным временем

**Определение 10.5.** Однородная марковская цепь называется *стандартной*, если

$$P(t) \rightarrow P(0) = I, \quad t \rightarrow 0+,$$

то есть

$$p_{ij}(t) \rightarrow \delta_{ij}, \quad t \rightarrow 0+.$$

**Теорема 10.4.** Пусть однородная марковская цепь стандартна. Тогда  $\forall i \neq j$



1. существует конечный

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{p_{ij}(t) - p_{ij}(0)}{t - 0} =: q_{ij} \geq 0;$$

2. существует

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{p_{ii}(t) - 1}{t} =: q_{ii} \in [-\infty, 0].$$

*Доказательство.* Теорема предлагается без доказательства.  $\square$

**Определение 10.6.** Однородная марковская цепь называется *консервативной*, если матрица  $Q := (q_{ij})_{i,j \in S}$  (называемая *генератором* или *инфинитезимальной матрицей*) содержит только конечные элементы и

$$\sum_{j \in S} q_{ij} = 0.$$

*Замечание.* Если однородная марковская стандартная цепь имеет конечное число состояний, то она консервативна: в силу свойства 2 переходных вероятностей

$$\sum_{j=1}^N p_{ij}(t) = 1,$$

то есть  $\forall t > 0$

$$\frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = \frac{\sum_{i \neq j} p_{ij}}{t}.$$

По теореме 10.5 для  $i \neq j$  существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{p_{ij}(t)}{t} = q_{ij},$$

то есть существует (поскольку сумма конечна) конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sum_{i \neq j} p_{ij}(t)}{t} = \sum_{i \neq j} q_{ij},$$

а значит, существует и конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = -q_{ii} = \sum_{i \neq j} q_{ij},$$

то есть

$$\sum_{j \in S} q_{ij} = 0,$$

что и доказывает, что цепь консервативна.

## 10.4 Инфинитезимальная матрица конечной марковской цепи

**Теорема 10.5.** Пусть дана матрица  $Q = (q_{ij})_{i,j \in S}$  такая, что  $Q \in \text{Mat}(N \times N)$ ,  $\forall i \neq j \ q_{ij} \geq 0$  и  $\sum_{j=1}^N q_{ij} = 0$ . Тогда существует однородная марковская цепь с генератором  $Q$  и пространством состояний мощности  $N$ .

*Доказательство.* Напомним определение матричной экспоненты:

$$e^B := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!},$$

при этом  $B^0 := I$ . Следовательно,

$$e^{tB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B^n}{n!}.$$

Известно следующее свойство матричной экспоненты: если  $BC = CB$ , то

$$e^{B+C} = e^B e^C.$$

Положим по определению

$$P(t) := e^{tQ}, \ t \geq 0.$$

Докажем, что  $P(t)$  обладает свойствами 1.–4., которыми должна обладать матрица переходных вероятностей однородной марковской цепи.

1. Проверим, что  $p_{ij}(t) \geq 0 \ \forall i, j \in S \ \forall t \geq 0$ . Обозначим

$$\gamma = \min_{i=1 \dots N} q_{ii}.$$

Введем также обозначение

$$\tilde{Q} = (\tilde{q}_{ij}) := Q - \gamma I_N.$$

Тогда  $\tilde{q}_{ij} \geq 0 \ \forall i, j$ . Пусть

$$\tilde{P}(t) := e^{t\tilde{Q}}.$$

Тогда  $\tilde{P}(t)$  имеет неотрицательные элементы по определению. Заметим, что

$$e^{t\tilde{Q}} = e^{tQ - t\gamma I_N} = e^{tQ} e^{-t\gamma I_N} = P(t) e^{-t\gamma I_N},$$

то есть

$$P(t) = \tilde{P}(t) e^{t\gamma I_N}.$$

Вместе с этим у обеих матриц справа элементы неотрицательны. Значит, и у матрицы  $P(t)$  элементы также неотрицательны.

2. Проверим, что  $\forall i = 1, \dots, N$

$$\sum_{j=1}^N p_{ij}(t) = 1.$$

Обозначим через  $\alpha$  единичный вектор–столбец. Тогда по условию  $Q\alpha = 0$ . Тогда

$$P(t)\alpha = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q^n}{n!} \right) \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q^n \alpha}{n!} = I_N \alpha = \alpha,$$

что и означает, что  $\forall i = 1, \dots, N$

$$\sum_{j=1}^N p_{ij}(t) = 1.$$

3.  $P(0) = e^{0 \cdot Q} = I_N$  по определению.

4.  $P(s+t) = e^{(s+t)Q} = e^{sQ} e^{tQ} = P(s)P(t)$ .

Таким образом, выполнены свойства 1.–4., а значит (см. [1], стр.190–191), существует (однородная) марковская цепь с инфинитезимальной матрицей  $Q$ .  $\square$

*Замечание.* Заметим, что условия, наложенные на матрицу  $Q$  в формулировке теоремы, являются не только достаточными, но и необходимыми, что видно из замечания после определения консервативной марковской цепи.

## 11 Лекция от 26.04.17

### Применения марковских цепей

#### 11.1 Формулировка теоремы Дуба о консервативных цепях. Стационарные марковские цепи

*Замечание.* Известно (см. обязательную задачу 9.2), что пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$  является марковской цепью, причем между скачками проходит время, распространенное экспоненциально. Оказывается, это верно для всех однородных консервативных марковских цепей.

**Теорема 11.1** (Дуба о консервативных цепях). Пусть  $X = \{X_t, t \in T\}$  — однородная консервативная марковская цепь с инфинитезимальной матрицей  $Q$ . Тогда

$$P\left(X(u) = i, s \leq u \leq s+t \mid X(s) = i\right) = e^{q_{ii}t},$$

то есть время ожидания между переходами из состояния в состояние распределено экспоненциально.

*Доказательство.* Доказательства на лекции не было, знать на экзамене его не обязательно; его можно почитать в [1], стр. 217.  $\square$

**Определение 11.1.**  $X = \{X_t, t \in T\}$  — строго стационарный процесс, если  $\forall n \in \mathbb{N} \forall t_1 < \dots < t_n, t_1 + h < \dots < t_n + h \in T$

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{\text{law}}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}).$$

**Теорема 11.2.** Пусть однородная марковская цепь  $X = \{X_t, t \in T\}$  имеет начальное распределение  $\pi$ , которое также является стационарным распределением для нее. Тогда  $X$  — строго стационарный процесс.

*Доказательство.* Заметим, что

$$\mathbb{P}(X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} = i_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \dots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1});$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t_1+h} = i_1, \dots, X_{t_n+h} = i_n) &= \\ &= \mathbb{P}(X_{t_1+h} = i_1) p_{i_1 i_2}(t_2 + h - t_1 - h) \dots p_{i_{n-1} i_n}(t_n + h - t_{n-1} - h) = \\ &= \mathbb{P}(X_{t_1+h} = i_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \dots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

Вместе с этим в силу стационарности начального распределения  $\pi$

$$\mathbb{P}(X_t = i_1) = (\pi P(t))_{i_1} = (\pi P(t+h))_{i_1} = \mathbb{P}(X_{t+h} = i_1),$$

что и завершает доказательство леммы.  $\square$

## 11.2 Обратимые цепи

**Определение 11.2.** Пусть  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  — однородная марковская цепь с переходными вероятностями за единицу времени  $p_{ij}$ . Тогда вектор  $\pi$ , задающий распределение вероятностей, называется *обратимым*, если  $\forall i, j \in S$

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}.$$

Марковская цепь называется *обратимой*, если у нее есть обратимый вектор.

**Пример 11.1** (случайные блуждания на графах). Рассмотрим граф  $(\mathbb{V}, \mathbb{E})$ , где  $\mathbb{V}$  — множество вершин графа, а  $\mathbb{E}$  — множество его ребер. Две вершины  $v_i$  и  $v_j$  из  $\mathbb{V}$  будем называть соседними, если их соединяет ребро из  $\mathbb{E}$ . Пусть  $d_i$  — кратность вершины  $v_i$ , то есть число инцидентных ей ребер. Введем переходные вероятности (из  $i$  в  $j$ ):

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_i}, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ соседние;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Введем также вектор  $\pi$ , задающий вероятностное распределение:

$$\pi_i = \frac{d_i}{\sum_{i \in S} d_i}.$$

Тогда  $\pi$  — обратимый вектор:

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} = \frac{1}{\sum_{i \in S} d_i} \mathbb{I}\{v_i \text{ и } v_j \text{ — соседи}\}.$$

Заметим, что если цепь обратима и  $\pi$  — ее обратимый вектор, то  $\pi$  задает стационарное распределение:

$$(\pi P(t))_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in S} \pi_j p_{ji} = \pi_j.$$

### 11.3 Метод Монте-Карло, использующий цепи Маркова

**Пример 11.2** (алгоритм Метрополиса–Хастингса). Пусть есть некоторое (дискретное) распределение вероятностей  $\pi$ . Задача состоит в том, чтобы смоделировать случайную величину с таким распределением. Возьмем для этого связный граф с вершинами из  $S$  такой, что  $d_i < \infty \forall i$  и введем на нем цепь:

$$p_{ij} := \begin{cases} \frac{1}{d_i} \min \left\{ \frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j}, 1 \right\}, & v_i \text{ и } v_j \text{ соседние}; \\ 0, & v_i \text{ и } v_j \text{ не соседние}; \\ 1 - \sum_{k \neq i} \frac{1}{d_i} \min \left\{ \frac{\pi_k d_i}{\pi_i d_k}, 1 \right\}, & i = j. \end{cases}$$

Такая цепь обратима, причем ее обратимое распределение есть  $\pi$ . Действительно, проверим, что  $\forall i, j$

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}.$$

Пусть сначала  $\frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j} \geq 1$ . Тогда  $\frac{\pi_i d_j}{\pi_j d_i} \leq 1$  и

$$\pi_i p_{ij} = \pi_i \frac{1}{d_i} = \pi_j \frac{1}{d_j} \frac{\pi_i d_j}{\pi_j d_i} = \pi_j p_{ji}.$$

Пусть теперь  $\frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j} \leq 1$ . Тогда  $\frac{\pi_i d_j}{\pi_j d_i} \geq 1$  и

$$\pi_i p_{ij} = \pi_i \frac{1}{d_i} \frac{\pi_j d_i}{\pi_j d_j} = \pi_j \frac{1}{d_j} = \pi_j p_{ji}.$$

Тогда  $\pi$  — стационарное распределение. Действительно,

$$\sum_i \pi_i p_{ij} = \sum_i \pi_j p_{ji} = \pi_j \sum_i p_{ji} = \pi_j.$$

Таким образом, получили, что распределение этой цепи Маркова стремится к распределению  $\pi$ , которое и нужно было смоделировать.

**Определение 11.3.** Пусть  $G = (V, E)$  — граф с конечным числом вершин. Пусть также  $X = \{X_t, t \in \mathbb{V}\}$  — случайное поле,  $X_t : \Omega \rightarrow S$ , где  $S$  конечно. Поле  $X$  называется *марковским*, если  $\forall t \in \mathbb{V}$  таких, что

$$P(X_s = x_s, s \neq t) \neq 0$$

выполнено

$$P(X_t = x_t \mid X_s = x_s, s \neq t) = P(X_t = x_t \mid X_s = x_s, s \in \delta\{t\}),$$

где  $\delta\{t\}$  — множество соседних с  $t$  вершин.

**Определение 11.4.** *Энергией* называется любая функция  $E : S^{\mathbb{V}} \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $S^{\mathbb{V}}$  — множество функций из  $\mathbb{V}$  в  $S$ .

**Определение 11.5.** Распределение вероятностей на  $S^{\mathbb{V}}$

$$P(B) := \begin{cases} \frac{\sum_{\omega \in B} e^{-E(\omega)}}{\sum_{\omega \in S^{\mathbb{V}}} e^{-E(\omega)}}, & B \neq \emptyset; \\ 0, & B = \emptyset, \end{cases}$$

называется *гиббсовским полем*.

**Определение 11.6.** *Потенциалом* называется любая действительная функция  $V_A(\omega) : \mathbb{V} \times S^{\mathbb{V}} \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $V_A(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in S^{\mathbb{V}}$ , если  $A = \emptyset$ .

*Замечание.* Известно, что любая энергия представляется с помощью потенциала:

$$E(\omega) = \sum_{A \subset \mathbb{V}} V_A(\omega).$$

**Определение 11.7.** Потенциал  $V_A(\omega)$  называется *потенциалом ближайших соседей*, если

$$V_A(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in S^{\mathbb{V}},$$

когда  $A$  не является кликой, то есть множеством вершин таким, что любые две вершины в нем соединены ребром.

**Теорема 11.3** (Аверинцева–Клиффорда–Хэммерсли). *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. мера  $P$  на  $(S^{\mathbb{V}}, A)$  является распределением марковского поля относительно графа  $(\mathbb{V}, E)$  и  $P(B) > 0$ ,  $B \neq \emptyset$ ;
2. мера  $P$  на  $(S^{\mathbb{V}}, A)$  является мерой Гиббса с потенциалом ближайших соседей.

## 12 Лекция от 03.05.17

### Слабая сходимость вероятностных мер. Ковариационные функции

#### 12.1 Слабая сходимость и сходимость по распределению

**Определение 12.1.** Пусть  $(S, \mathcal{B}, \rho)$  — метрическое пространство с метрикой  $\rho$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(S)$  —  $\sigma$ -алгебра борелевских подмножеств  $S$ . Пусть  $Q, Q_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  — вероятностные меры на  $(S, \mathcal{B})$ . Говорят, что  $Q_n$  *слабо сходятся* к  $Q$ , если для любой непрерывной ограниченной функции  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_S f(x) Q_n(dx) \rightarrow \int_S f(x) Q(dx), \quad n \rightarrow \infty.$$

Обозначается  $Q_n \Rightarrow Q$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

*Замечание.* Множество непрерывных ограниченных функций  $f : A \rightarrow B$  будем иногда дальше обозначать  $C_b(A, B)$ .

**Определение 12.2.** Пусть  $X_n : \Omega \rightarrow S$ ,  $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X : \Omega \rightarrow S$  — случайные величины на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Говорят, что  $X_n$  *сходятся по распределению* к  $X$ , если

$$P_{X_n} \Rightarrow P_X, \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $P_{X_n}$  — вероятностная мера, задаваемая случайной величиной  $X_n$  по формуле

$$P_{X_n}(B) = P(X_n^{-1}(B)).$$

Обозначается

$$X_n \xrightarrow{\text{law}} X, \quad n \rightarrow \infty.$$

*Замечание.* Поскольку

$$\int_S f(x) P_{X_n}(dx) = \int_{\Omega} f(X_n) dP,$$

то

$$X_n \xrightarrow{\text{law}} X \Leftrightarrow Ef(X_n) \rightarrow Ef(X)$$

для любой  $f \in C_b(S, \mathbb{R})$ .

**Лемма 12.1.** Пусть  $X_n \xrightarrow{\text{law}} X$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Пусть  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Тогда

$$h(X_n) \xrightarrow{\text{law}} h(X), \quad n \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* По определению, так как  $f \circ h$  — непрерывная ограниченная функция для любой  $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .  $\square$

**Теорема 12.2** (Александрова). Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $Q_n \Rightarrow Q$ ;
2.  $\limsup_n Q_n(F) \leq Q(F)$  для любого замкнутого  $F \subset S$ ;
3.  $\liminf_n Q_n(G) \geq Q(G)$  для любого открытого  $G \subset S$ ;
4.  $\lim_n Q_n(B) = Q(B)$  для любых  $B \in \mathcal{B}$  таких, что  $Q(\partial B) = 0$ .

*Доказательство.* Теорема предлагается без доказательства.  $\square$

*Замечание.* Поскольку  $\partial B$  замкнуто, то оно заведомо борелевское, а значит, на нем определена мера  $Q$ .

## 12.2 Функциональные предельные теоремы

**Определение 12.3.** Семейство вероятностных мер  $\{Q_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$  называется *слабо относительно компактным*, если из любой последовательности  $(Q_{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}}$  можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$Q_{\alpha'_n} \Rightarrow Q, \quad n \rightarrow \infty.$$

( $Q$  здесь не подразумевается обязательно принадлежащим семейству мер  $\{Q_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ ).

**Определение 12.4.** Семейство вероятностных мер  $\{Q_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$  называется *плотным*, если  $\forall \varepsilon > 0$  существует компакт  $K_\varepsilon$  такой, что  $\forall \alpha \in \Lambda$

$$Q_\alpha(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

**Теорема 12.3** (Прохорова). Пусть  $(S, \rho)$  — польское (то есть метрическое полное сепарабельное) пространство (с метрикой  $\rho$ ). Тогда семейство вероятностных мер  $\{Q_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$  слабо относительно компактно тогда и только тогда, когда оно плотно.

*Доказательство.* Теорема предлагается без доказательства.  $\square$

**Пример 12.1.** Пусть  $X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $EX_n = 0$ ,  $DX_n = 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Построим по ним случайные ломаные: введем

$$\begin{aligned} s_{0,0} &:= 0, \\ s_{n,m} &:= X_1(\omega) + \dots + X_m(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad m = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Возьмем случайные точки (узлы будущей ломаной)

$$x_{n,m} := \left( \frac{m}{n}, \frac{s_{n,m}}{\sqrt{n}} \right), \quad m = 0, \dots, n$$

и соединим для каждого фиксированного  $n$  отрезками  $x_{n,m}$  с  $x_{n,m+1}$  для всех  $m = 0, \dots, n-1$ , то есть положим

$$S_n(t, \omega) := \frac{s_{n,m}}{\sqrt{n}} + \frac{t - \frac{m}{n}}{\frac{1}{n}} \frac{X_{m+1}}{\sqrt{n}}, \quad t \in \left[ \frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right].$$

Таким образом, получили последовательность случайных ломаных  $S_n(t, \omega)$ ,  $t \in [0, 1]$  (точнее, ломаными являются графики этих функций при фиксированном  $\omega$ ). Тогда  $S_n = \{S_n(t), t \in [0, 1]\}$  — случайный элемент в пространстве  $C[0, 1]$ . Обозначим через  $P_n$  распределение элемента  $S_n$  в пространстве  $(C[0, 1], \mathcal{B}(C[0, 1]))$ . Тогда верна

**Теорема 12.4** (Донскера).  $P_n \Rightarrow W$ , где  $W$  — это распределение винеровского процесса  $W = \{W(t), t \in [0, 1]\}$ .

*Доказательство.* Теорема предлагается без доказательства.  $\square$

*Замечание.* Распределения  $X_n$  не важны, поэтому этот результат иногда называют принципом инвариантности.

*Замечание.* Пусть  $h : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывное отображение такое, что  $h(X(\cdot)) := X(1)$ . Тогда по теореме 12.4 и лемме 12.1

$$h(S_n(\cdot)) = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{law}} h(\{W(t), t \in [0, 1]\}) = W(1) \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

что является утверждением обычной центральной предельной теоремы.

**Теорема 12.5.**  $X_n \xrightarrow{\text{law}} X$  в пространстве  $C[0, 1]$  тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:



1. все конечномерные распределения  $X_n$  сходятся к конечномерным распределениям  $X$ , то есть  $\forall t_1, \dots, t_r \in [0, 1]$

$$(X_n(t_1), \dots, X_n(t_r)) \xrightarrow{law} (X(t_1), \dots, X(t_r)), \quad n \rightarrow \infty;$$

2. семейство  $(P_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$  плотно.

*Доказательство.* Теорема предлагается без доказательства.  $\square$

*Замечание.* Теорема Дonsкера обобщается на серии независимых случайных величин  $X_{n,1}, \dots, X_{n,m_n}$ , удовлетворяющих условию Линдберга:  
 $\forall \varepsilon > 0$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{m_n} E (X_{n,j} - EX_{n,j})^2 \mathbb{I} \left\{ |X_{n,j} - EX_{n,j}| > \varepsilon B_n \right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$B_n^2 = \sum_{j=1}^{m_n} DX_{n,j}, \quad t_{n,j} = \frac{\sum_{l=1}^j DX_{n,l}}{B_n^2}.$$

Этот результат и называется принципом инвариантности Дonsкера–Прохорова.

### 12.3 Критерий согласия Колмогорова

**Определение 12.5.** Пусть случайный процесс  $W = \{W(t), t \in [0, 1]\}$  — винеровский процесс на отрезке  $[0, 1]$ . Тогда *броуновским мостом* называется процесс

$$W_0 := \{W(t) - tW(1), t \in [0, 1]\}.$$

*Замечание.*  $W_0(0) = W_0(1) = 0$  почти наверное.

**Определение 12.6.** Функция

$$K(z) := \begin{cases} 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 z^2}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

называется *функцией распределения Колмогорова*.

**Лемма 12.6.**  $P \left( \sup_{t \in [0, 1]} |W_0(t)| \leq z \right) = K(z).$

*Доказательство.* Лемма предлагается без доказательства.  $\square$

**Следствие** (критерий согласия Колмогорова). Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $F(x)$  — функция распределения  $\xi_1$ . Пусть  $F(x)$  непрерывна на всей  $\mathbb{R}$ . Тогда

$$P \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} \sqrt{n} |F_n(x) - F(x)| \leq z \right) \rightarrow K(z), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$F_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I} \{ \xi_i \leq x \} -$$

— эмпирическая функция распределения.

*Доказательство.* Обозначим

$$X_n := \sqrt{n} |F_n(x) - F(x)|.$$

Тогда (по теореме 12.5, полное обоснование см. [5], гл. 2, §13)

$$X_n \xrightarrow{\text{law}} W_0.$$

Поскольку  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|$  является непрерывным отображением, то по лемме 12.1

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |X_n| \xrightarrow{\text{law}} \sup_{t \in [0, 1]} |W_0(t)|.$$

Тогда из леммы 12.6 получаем утверждение, которое требуется доказать.  $\square$

*Замечание.* Более полное доказательство (которое называется наброском и занимает 3 страницы) можно почитать в [1], стр. 161.

## 12.4 Гауссовские процессы

**Определение 12.7.** Случайный вектор  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  называется *гауссовским*, если его характеристическая функция  $\varphi_\xi(t)$  имеет вид

$$\varphi_\xi(t) = \exp \left\{ i(a, t) - \frac{1}{2} (Ct, t) \right\},$$

где  $a \in \mathbb{R}^n$  — вектор,  $C \in \text{Mat}_{n \times n}$  — симметрическая неотрицательно определенная матрица, то есть  $(Ct, t) \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}^n$ .

**Определение 12.8.** Процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$ ,  $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , называется *гауссовским*, если  $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall t_1, \dots, t_n$  вектор

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$$

является гауссовским.

**Определение 12.9.** Пусть  $X = \{X_t, t \in T\}$  — гауссовский процесс. Его *функцией среднего* называется

$$a(t) := \mathbb{E}X(t),$$

а его *ковариационной функцией* называется

$$r(s, t) := \text{cov}(X(s), X(t)).$$

**Определение 12.10.** Функция  $r : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$  называется *неотрицательно определенной*, если  $\forall t_1, \dots, t_n \in T$  матрица

$$(r(t_m, t_j))$$

является неотрицательно определенной, или, что то же самое,  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{m,j=1}^n r(t_m, t_j) \lambda_m \lambda_j \geq 0.$$

**Теорема 12.7.** Пусть  $a(t)$  — произвольная действительная функция  $T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r(s, t)$  — действительная функция  $T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ , являющаяся симметричной и неотрицательно определенной. Тогда существует гауссовский процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$  с функцией среднего  $a$  и ковариационной функцией  $r$ .

*Доказательство.* Для  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t_1, \dots, t_n \in T$  введем гауссовские меры  $\mathbf{Q}_{t_1 \dots t_n}$ , задаваемые характеристическими функциями

$$\varphi_{t_1 \dots t_n}(u_1, \dots, u_n) = \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n a(t_j) u_j - \frac{1}{2} \sum_{m,j=1}^n r(t_m, t_j) u_j u_m \right\}.$$

По теореме 5.6 искомый процесс  $X$  существует, поскольку выполнены условия согласованности характеристических функций (и он, само собой, будет гауссовским, поскольку характеристическая функция конечномерных распределений имеет требуемый вид).  $\square$

*Замечание.* Пусть имеется  $L_2$ -процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$ , то есть такой процесс, что  $E |X(t)|^2 < \infty, t \in T$ . Тогда функция  $r(s, t) := \text{cov}(X(s), X(t))$  является неотрицательно определенной. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{m,j=1}^n \text{cov}(X(t_m), X(t_j)) \lambda_m \lambda_j &= \text{cov} \left( \sum_{m=1}^n \lambda_m X(t_m), \sum_{j=1}^n \lambda_j X(t_j) \right) = \\ &= \text{cov}(\xi, \xi) \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, требования теоремы 12.7 являются необходимыми, так что гауссовский процесс задается функциями  $a$  и  $r$ .

**Определение 12.11.** Процесс  $X = \{X_t, t \in T\}$  называется *комплекснозначным гауссовским процессом*, если  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t_1, \dots, t_n \in T$  вектор

$$(\text{Re}X(t_1), \text{Im}X(t_1), \dots, \text{Re}X(t_n), \text{Im}X(t_n))$$

является гауссовским вектором в  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Определение 12.12.** Комплекснозначная функция  $R(s, t) : T \times T \rightarrow \mathbb{C}$  называется *неотрицательно определенной*, если  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t_1, \dots, t_n \in T$  и  $\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{m,j=1}^n R(t_m, t_j) z_m \overline{z_j} \geq 0.$$

**Теорема 12.8.** *Класс неотрицательно определенных функций  $T \times T \rightarrow \mathbb{C}$  совпадает с классом ковариационных функций  $L_2$ -процессов и, более того, совпадает с классом ковариационных функций комплекснозначных гауссовских процессов.*

*Доказательство.* См. [1], стр. 53.  $\square$

*Замечание.* Комплексные неотрицательно определенные функции всегда кососимметричны, то есть

$$R(t_1, t_2) = \overline{R(t_2, t_1)}.$$

Действительно, так как  $R(t, t) \geq 0 \forall t \in T$ , то из того, что  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  и  $\forall t_1, t_2 \in T$

$$|z_1|R(t_1, t_1) + z_1\overline{z_2}R(t_1, t_2) + \overline{z_1}z_2R(t_2, t_1) + |z_2|R(t_2, t_2) \geq 0,$$

получаем, что  $z_1\overline{z_2}R(t_1, t_2) + \overline{z_1}z_2R(t_2, t_1) \in \mathbb{R}$ . Тогда для  $z_1 = z_2 = 1$

$$R(t_1, t_2) + R(t_2, t_1) \in \mathbb{R},$$

а для  $z_1 = 1, z_2 = i$

$$-iR(t_1, t_2) + iR(t_2, t_1) \in \mathbb{R},$$

из чего следует, что  $R(t_1, t_2) = \overline{R(t_2, t_1)}$ .

**Определение 12.13.** Функция  $K(s, t)$ ,  $s, t \in T$ , называется *воспроизводящим ядром* гильбертова пространства  $H$ , состоящего из функций  $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ , если

1.  $K(\cdot, t) \in H \forall t \in T$ ;
2.  $(f, K(\cdot, t))_H = f(t) \forall t \in T, f \in H$ .

**Теорема 12.9** (Аронштейна). *Функция  $K(s, t)$ ,  $s, t \in T$ , является неотрицательно определенной тогда и только тогда, когда она представляет собой воспроизводящее ядро некоторого гильбертова пространства функций, заданных на  $T$  и принимающих значения в  $\mathbb{C}$ .*

*Доказательство.* Теорема предлагается без доказательства.  $\square$

## 12.5 Свойства ковариационных функций

**Определение 12.14.** Пусть  $\xi, \eta$  — комплекснозначные случайные величины. Тогда

$$\text{cov}(\xi, \eta) := E(\xi - E\xi)(\overline{\eta - E\eta}).$$

**Теорема 12.10.** Пусть  $K, K_1, \dots, K_n, \dots$  — неотрицательно определенные функции и  $a_1, \dots, a_n \geq 0$ . Тогда

1.  $K(cs, ct)$  — неотрицательно определенная функция  $\forall c \in \mathbb{R}$ ;
2.  $a_1K_1 + \dots + a_nK_n$  — неотрицательно определенная функция;
3.  $K_1 \cdot \dots \cdot K_n$  — неотрицательно определенная функция;
4. если  $K_n(s, t) \rightarrow K_0(s, t) \forall s, t \in T$ , то  $K_0$  — неотрицательно определенная функция.

*Доказательство.* 1. Следует из определения.

2. Возьмем независимые гауссовские процессы  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  с ковариационными функциями  $K_1, \dots, K_n$ ; рассмотрим

$$X(t) := \sqrt{a_1}X_1(t) + \dots + \sqrt{a_n}X_n(t).$$

Тогда

$$\text{cov}(X(s), X(t)) = a_1K_1(s, t) + \dots + a_nK_n(s, t).$$

3. Повторим шаг 2 с

$$X(t) := X_1(t) \cdot \dots \cdot X_n(t),$$

где у процессов  $X_i$  нулевые функции среднего.

4. Поскольку предельный переход сохраняет нестрогие неравенства,

$$0 \leq \sum_{m, j=1}^n K_n(t_m, t_j) z_m \bar{z}_j \rightarrow \sum_{m, j=1}^n K_0(t_m, t_j) z_m \bar{z}_j \geq 0.$$

□

**Определение 12.15.** Функция одного переменного  $R(t)$ ,  $t \in T$  называется *неотрицательно определенной*, если функция

$$R(s, t) := R(s - t)$$

неотрицательно определена.

**Теорема 12.11** (Герглотца). *Функция  $R(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , неотрицательно определена (в комплексном смысле) тогда и только тогда, когда*

$$R(n) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{in\lambda} Q(d\lambda),$$

где  $Q$  — конечная мера на  $\mathcal{B}[-\pi, \pi]$ .

*Доказательство.*  $\Leftarrow$  Пусть

$$R(n) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{in\lambda} Q(d\lambda).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k, l=1}^n R(t_k - t_l) z_k \bar{z}_l &= \sum_{k, l=1}^n z_k \bar{z}_l \int_{[-\pi, \pi]} e^{i(t_k - t_l)\lambda} Q(d\lambda) = \\ &= \int_{[-\pi, \pi]} \left( \sum_{k=1}^n z_k e^{it_k \lambda} \right) \left( \sum_{l=1}^n \bar{z}_l e^{-it_l \lambda} \right) Q(d\lambda) = \\ &= \int_{[-\pi, \pi]} \left| \sum_{k=1}^n z_k e^{it_k \lambda} \right|^2 Q(d\lambda) \geq 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$\sum_{k=1}^n \overline{z_k e^{it_k \lambda}} = \sum_{k=1}^n \overline{z_k} e^{-it_k \lambda}.$$

$\Rightarrow$  Пусть теперь  $R(n)$  неотрицательно определена. Тогда для  $N \in \mathbb{N}$  введем функции на  $[-\pi, \pi]$

$$g_N(\lambda) := \frac{1}{2\pi N} \sum_{k,l=1}^N R(k-l) e^{-ik\lambda} e^{il\lambda} \geq 0$$

ввиду неотрицательной определенности. Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi N} \sum_{k,l=1}^N R(k-l) e^{-ik\lambda} e^{il\lambda} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|m| < N} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) R(m) e^{-im\lambda},$$

поскольку найдется ровно  $N - |m|$  пар чисел  $(k, l)$  таких, что  $k - l = m$  и что  $0 < k, l \leq N$ .

Тогда  $g_N(\lambda)$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$  — непрерывные ограниченные неотрицательные функции. Определим тогда семейство мер на  $\mathcal{B}([-\pi, \pi])$

$$\mathbb{Q}_N(B) := \int_B g_N(\lambda) d\lambda.$$

Они являются  $\sigma$ -аддитивными мерами из-за  $\sigma$ -аддитивности интеграла Лебега и неотрицательности функций  $g_N$ . При этом

$$\mathbb{Q}_N([-\pi, \pi]) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} \sum_{|m| < N} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) R(m) e^{-im\lambda} d\lambda = R(0),$$

так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} e^{ik\lambda} d\lambda = \delta_{k0},$$

то есть (после нормировки) получим, что меры  $\mathbb{Q}_N$  можно считать вероятностными. Тогда это семейство мер плотно (в качестве компакта  $K_\varepsilon$  просто берем отрезок  $[-\pi, \pi]$ ) и, следовательно, по теореме 12.3 семейство мер  $\mathbb{Q}_N$  является слабо относительно компактным. Это значит, что из последовательности мер  $\mathbb{Q}_N$  можно выделить слабо сходящуюся к некоторой мере  $\mathbb{Q}$  подпоследовательность  $\mathbb{Q}_{n_k}$ , то есть

$$\int_{[-\pi, \pi]} e^{in\lambda} \mathbb{Q}_{n_k}(d\lambda) \rightarrow \int_{[-\pi, \pi]} e^{in\lambda} \mathbb{Q}(d\lambda).$$

При этом из явного вида плотности следует, что

$$\int_{[-\pi, \pi]} e^{in\lambda} \mathbb{Q}_{n_k}(d\lambda) = \left(1 - \frac{|n|}{N_k}\right) R(n) \rightarrow R(n),$$

из чего и следует, что

$$R(n) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{in\lambda} \mathbb{Q}(d\lambda).$$

□

**Теорема 12.12** (Бохнера–Хинчина). *Функция  $R(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , непрерывная в нуле, является неотрицательно определенной тогда и только тогда, когда*

$$R(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} Q(d\lambda),$$

где  $Q$  — конечная мера на  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

*Замечание.* Для неотрицательно определенных функций непрерывность в нуле равносильна непрерывности в каждой точке.

**Определение 12.16.** Меры  $Q$  из теорем 12.11 и 12.12 называются *спектральными мерами*.

**Теорема 12.13** (Рисса). *Если  $R(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  — неотрицательная ограниченная измеримая функция, то*

$$R(t) = R_C(t) + R_0(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где  $R_C(t)$  — непрерывная функция, а  $R_0(t) = 0$  почти всюду по мере Лебега.

*Доказательство.* Теорема предлагается без доказательства.  $\square$

**Теорема 12.14** (Гнайтинга). *Если  $R(t) = R(\|t\|)$ ,  $t \in \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , то*

$$R(t) = R_C(t) + a\mathbb{I}_0, \quad a \geq 0.$$

*Доказательство.* Теорема предлагается без доказательства.  $\square$

## 13 Лекция от 10.05.17

### Стационарные процессы

#### 13.1 Стационарные процессы

*Замечание.* Везде далее множество  $T$  подразумевается замкнутым по сложению.

**Определение 13.1.** Процесс  $\{X(t), t \in T\}$  называется *стационарным в узком смысле*, если  $\forall n \in \mathbb{N} \forall h, t_1, \dots, t_n \in T$

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{\text{law}}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}).$$

**Пример 13.1.** Однородная марковская цепь с начальным распределением, равным стационарному, является стационарным в узком смысле процессом.

**Определение 13.2.**  $L^2$ –процесс  $\{X(t), t \in T\}$  называется *стационарным в широком смысле*, если

1.  $EX_t = a \quad \forall t \in T$ ;
2.  $\text{cov}(X_s, X_t) = R(s-t), \quad s, t \in T$ .

*Замечание.* Из стационарности в узком смысле не следует стационарности в широком, поскольку стационарность в узком смысле не гарантирует наличия вторых моментов.

*Замечание.* Из стационарности в широком смысле не следует стационарность в узком смысле: возьмем, например, независимые одинаково распределенные случайные величины  $\xi_1, \xi_2$ ,  $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = 1/2$  и построим по ним процесс  $X$ :

$$X_t = \xi_1 \cos t + \xi_2 \sin t.$$

Тогда

$$EX_t = 0, \quad \text{cov}(X_t, X_s) = \cos(t - s),$$

но вместе с этим

$$\xi_1 = X_0 \stackrel{\text{law}}{\neq} X_{\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + \xi_2).$$

*Замечание.* Если  $L^2$ -процесс стационарен в узком смысле, то он стационарен в широком смысле.

*Замечание.* Понятия стационарности в широком и в узком смыслах совпадают для гауссовских процессов.

*Замечание.* Если  $X$  — стационарный в широком смысле процесс, то  $R(t) := \text{cov}(X_s, X_{s+t})$  — неотрицательно определенная функция.

## 13.2 Ортогональная случайная мера, заданная на алгебре

**Определение 13.3.** Пусть  $\mathcal{A}$  — некоторая алгебра подмножеств множества  $\Lambda$ . Отображение  $Z : \mathcal{A} \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  называется *ортогональной случайной мерой*, если

1.  $Z(B)$  ортогональна  $Z(C) \quad \forall B, C \in \mathcal{A} : B \cap C = \emptyset$ , то есть

$$(Z(B), Z(C)) = 0,$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение на  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , задаваемое формулой

$$(\xi, \eta) := E\xi\bar{\eta};$$

2.  $\forall B, B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A} : B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$  выполнено

$$Z(B) = \sum_{k=1}^{\infty} Z(B_k) \quad \text{почти наверное,}$$

где ряд подразумевается сходящимся в  $L^2(\Omega)$ .

*Замечание.* Во втором свойстве важно отдельно требовать, чтобы  $B \in \mathcal{A}$ , потому что, вообще говоря,  $\mathcal{A}$  не подразумевается  $\sigma$ -алгеброй.

*Замечание.* Из первого свойства следует, что  $(Z(\emptyset), Z(\emptyset)) = E|Z(\emptyset)|^2 = 0$ , то есть  $Z(\emptyset) = 0$  почти наверное.

*Замечание.* Второе свойство влечет конечную аддитивность: поскольку  $\mathcal{A}$  — алгебра, то можно все  $B_i$  с какого-то момента взять пустыми.



*Замечание.* Во втором свойстве равенство берется почти наверное, так что множество таких  $\omega \in \Omega$ , что равенство не выполнено, имеет меру 0; при этом само это множество зависит от конкретных  $B_i$ .

**Определение 13.4.** Пусть  $Z$  — ортогональная случайная мера, заданная на алгебре  $\mathcal{A}$  подмножеств множества  $\Lambda$ . Функция  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , задаваемая формулой

$$\mu(B) = (Z(B), Z(B)) = \mathbb{E} |Z(B)|^2,$$

называется *структурной мерой* ортогональной случайной меры  $Z$ .

**Теорема 13.1.**  $\mu$  —  $\sigma$ -аддитивная мера на  $\mathcal{A}$ .

*Доказательство.*  $\mu$  по определению неотрицательна. Проверим ее  $\sigma$ -аддитивность. Пусть  $B, B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}, B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$ . Тогда по первому свойству

$$\left( \sum_{k=1}^n Z(B_k), \sum_{k=1}^n Z(B_k) \right) = \sum_{k=1}^n (Z(B_k), Z(B_k)) = \sum_{k=1}^n \mu(B_k).$$

Вместе с этим по второму свойству

$$\sum_{k=1}^n Z(B_k) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \sum_{k=1}^{\infty} Z(B_k) = Z(B).$$

Из этого и непрерывности скалярного произведения получаем, что

$$\sum_{k=1}^n \mu(B_k) = \left( \sum_{k=1}^n Z(B_k), \sum_{k=1}^n Z(B_k) \right) \rightarrow (Z(B), Z(B)) = \mu(B),$$

из чего и получаем, что

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k).$$

□

**Лемма 13.2.**

1. Пусть  $Z$  — ортогональная случайная мера на алгебре  $\mathcal{A}$  подмножеств множества  $\Lambda$ . Тогда  $\forall B, C \in \mathcal{A}$

$$(Z(B), Z(C)) = \mu(B \cap C),$$

где  $\mu$  — структурная мера  $Z$ .

2. Пусть  $Z = \{Z(B), B \in \mathcal{A}\}$  — семейство случайных величин из  $L^2(\Omega)$  и для некоторой конечной  $\sigma$ -аддитивной меры  $\mu$  верно, что  $\forall B, C \in \mathcal{A}$

$$(Z(B), Z(C)) = \mu(B \cap C).$$

Тогда  $Z$  — ортогональная случайная мера на  $\mathcal{A}$  со структурной мерой  $\mu$ .

*Доказательство.*

1. Поскольку

$$\begin{aligned} B &= (B \cap C) \sqcup (B \setminus C), \\ C &= (B \cap C) \sqcup (C \setminus B), \end{aligned}$$

то по первому свойству

$$\begin{aligned} (Z(B), Z(C)) &= (Z(B \cap C) + Z(B \setminus C), Z(B \cap C) + Z(C \setminus B)) = \\ &= (Z(B \cap C), Z(B \cap C)) = \mu(B \cap C). \end{aligned}$$

2. Проверим, что для  $Z$  выполнены свойства из определения ортогональной случайной меры.

Во-первых,  $\forall B, C : B \cap C = \emptyset$

$$(Z(B), Z(C)) = \mu(B \cap C) = 0.$$

Во-вторых, проверим второе свойство из определения. Пусть  $B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}$ ,  $B_k \in \mathcal{A}$ . Тогда по условию

$$\begin{aligned} &\left( Z(B) - \sum_{k=1}^n Z(B_k), Z(B) - \sum_{k=1}^n Z(B_k) \right) = \\ &= (Z(B), Z(B)) - \sum_{k=1}^n (Z(B_k), Z(B_k)) + \sum_{k=1}^n (Z(B_k), Z(B_k)) - \\ &- \sum_{k=1}^n (Z(B_k), Z(B_k)) = (Z(B), Z(B)) - \sum_{k=1}^n (Z(B_k), Z(B_k)) = \\ &= \mu(B) - \sum_{k=1}^n \mu(B_k) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

то есть

$$Z(B) = \sum_{k=1}^{\infty} Z(B_k).$$

В-третьих, проверим, что  $\mu$  действительно является структурной мерой. Возьмем в условии  $B = C$  и получим, что

$$\mathbb{E} |Z(B)|^2 = (Z(B), Z(B)) = \mu(B),$$

то есть это действительно структурная мера.

□

**Пример 13.2** (пример ортогональной случайной меры). Пусть  $\Lambda = [a, b)$ ,  $0 \leq a < b < \infty$  и

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigsqcup_{k=1}^n [a_i, b_i), a \leq a_1 < b_1 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b \right\}.$$

Пусть также  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  — винеровский процесс. Положим

$$Z(B) := \sum_{k=1}^n (W(b_k) - W(a_k)).$$

Тогда из леммы 13.2 следует, что  $Z$  — ортогональная случайная мера на  $\mathcal{A}$  со структурной мерой  $\mu$ , равной мере Лебега на  $[a, b]$ .

**Упражнение 13.1.** Пусть  $\mu$  — конечная  $\sigma$ -аддитивная мера на алгебре  $\mathcal{A}$  подмножеств множества  $\Lambda$ . Тогда на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  существует ортогональная случайная мера  $Z$  со структурной мерой  $\mu$ .

### 13.3 Интеграл по ортогональной случайной мере, заданной на алгебре

**Определение 13.5.** Функция  $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$  называется *простой*, если

$$f = \sum_{k=1}^m b_k \mathbb{I}_{B_k},$$

где  $b_k \in \mathbb{C}$  и множества  $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{A}$  образуют разбиение множества  $\Lambda$ , то есть  $\Lambda = \bigsqcup_{k=1}^m B_k$ .

**Определение 13.6.** Отображение  $J$ , заданное на множестве простых функций на  $\Lambda$  со значениями в  $L^2(\Omega)$  называется *интегралом по ортогональной случайной мере  $Z$  на алгебре  $\mathcal{A}$* , если

$$J(f) = \sum_{k=1}^m b_k Z(B_k)$$

для любой простой функции  $f = \sum_{k=1}^m b_k \mathbb{I}_{B_k}$ .

**Лемма 13.3.** Пусть  $f$  и  $g$  — простые функции,  $f = \sum_{k=1}^m b_k \mathbb{I}_{B_k}$ ,  $g = \sum_{j=1}^r d_j \mathbb{I}_{D_j}$ ,  $J$  — интеграл по ортогональной случайной мере  $Z$ . Тогда

$$(J(f), J(g))_{L^2(\Omega)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\Lambda)},$$

где

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Lambda)} = \int_{\Lambda} f(\lambda) \overline{g(\lambda)} \mu(d\lambda)$$

является скалярным произведением на  $L^2(\Lambda) = L^2(\Lambda, \sigma\{\mathcal{A}\}, \mu)$ ; мера  $\mu$  продолжена с  $\mathcal{A}$  на  $\sigma\{\mathcal{A}\}$  по теореме Каратеодори.

*Доказательство.* По лемме 13.2

$$\begin{aligned}
(J(f), J(g)) &= \left( \sum_{k=1}^m b_k Z(B_k), \sum_{j=1}^r d_j Z(D_j) \right) = \\
&= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^r b_k \overline{d_j} \left( Z(B_k), Z(D_j) \right) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^r b_k \overline{d_j} \mu(B_k \cap D_j) = \\
&= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^r b_k \overline{d_j} \int_{\Lambda} \mathbb{I}_{B_k \cap D_j}(\lambda) \mu(d\lambda) = \\
&= \int_{\Lambda} \sum_{k=1}^m b_k \mathbb{I}_{B_k}(\lambda) \sum_{j=1}^r \overline{d_j} \mathbb{I}_{D_j}(\lambda) \mu(d\lambda) = \int_{\Lambda} f(\lambda) \overline{g(\lambda)} \mu(d\lambda) = \langle f, g \rangle.
\end{aligned}$$

□

**Следствие.** Из леммы 13.3 следует корректность определения  $J$ , то есть независимость  $J(f)$  от представления  $f$  в виде суммы индикаторов с множителями: если

$$f = \sum_{k=1}^m b_k \mathbb{I}_{B_k} = \sum_{j=1}^r d_j \mathbb{I}_{D_j} = g,$$

то

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k=1}^m b_k Z(B_k) - \sum_{j=1}^r d_j Z(D_j) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\
&= \left( \sum_{k=1}^m b_k Z(B_k) - \sum_{j=1}^r d_j Z(D_j), \sum_{k=1}^m b_k Z(B_k) - \sum_{j=1}^r d_j Z(D_j) \right) = \\
&= \|f - g\|_{L^2(\Lambda)}^2 = 0,
\end{aligned}$$

то есть  $J(f) = J(g)$  почти наверное.

**Лемма 13.4.**  $J$  является линейным отображением на линейном пространстве простых функций.

*Доказательство.* По лемме 13.3 путем раскрытия скобок по линейности

$$\begin{aligned}
&(J(\alpha f + \beta g) - \alpha J(f) - \beta J(g), J(\alpha f + \beta g) - \alpha J(f) - \beta J(g)) = \\
&= \langle \alpha f + \beta g, \alpha f + \beta g \rangle - \alpha \langle f, \alpha f + \beta g \rangle - \beta \langle g, \alpha f + \beta g \rangle - \\
&\quad - \overline{\alpha} \langle \alpha f + \beta g, f \rangle + \overline{\alpha} \langle \alpha f, f \rangle + \overline{\alpha} \langle \beta g, f \rangle - \\
&\quad - \overline{\beta} \langle \alpha f + \beta g, g \rangle + \overline{\beta} \langle \alpha f, g \rangle + \overline{\beta} \langle \beta g, g \rangle = 0,
\end{aligned}$$

то есть

$$J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$$

почти наверное, что и означает линейность. □

**Лемма 13.5.** Простые функции плотны в  $L^2(\Lambda)$ .

*Доказательство.* Пусть  $f \in L^2(\Lambda)$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  выберем  $H = H(\varepsilon) > 0$  так, чтобы

$$\int_{\Lambda} |f(\lambda)|^2 \mathbb{I}\{|f(\lambda)| > H\} \mu(d\lambda) < \varepsilon.$$

Функция  $f(\lambda)\mathbb{I}\{|f(\lambda)| \leq H\}$  аппроксимируется простыми функциями.  $\square$

**Следствие.** Продолжение интеграла со множества простых функций на все функции в  $L^2(\Lambda)$  по формуле

$$J(f) = (L^2) \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n),$$

где  $f_n$  — простые функции, корректно.

*Доказательство.* См. [1], стр. 231.  $\square$

**Определение 13.7.** Построенное отображение  $J : L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , обозначаемое

$$J(f) := \int_{\Lambda} f(\lambda) Z(d\lambda),$$

называется *стохастическим интегралом по ортогональной случайной мере*  $Z$ .

### 13.4 Интеграл по ортогональной случайной мере $Z$ , отвечающей $\sigma$ -конечной мере $\mu$

**Определение 13.8.** Пусть  $Z = \{Z(B), B \in \mathcal{B}\}$  — семейство случайных величин в  $L^2(\Omega)$ ,  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера на пространстве  $(\Lambda, \mathcal{B})$ , где  $\mathcal{B}$  —  $\sigma$ -алгебра. Введем множество

$$\mathfrak{g} := \{B \in \mathcal{B} : \mu(B) < \infty\}.$$

$Z$  называется *ортогональной случайной мерой* на  $\mathcal{B}$ , если

$$(Z(B), Z(C)) = \mu(B \cap C), \quad B, C \in \mathfrak{g}.$$

**Определение 13.9.** Пусть  $Z$  — ортогональная случайная мера на  $\mathcal{B}$ . Введем разбиение

$$\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n, \quad \Lambda_n \in \mathfrak{g}, \quad \Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

Обозначим

$$\mathcal{B}_n := \mathcal{B} \cap \Lambda_n.$$

Тогда на  $(\Lambda_n, \mathcal{B}_n)$  возникает ортогональная случайная мера

$$Z_n = \{X(B), B \in \mathcal{B}_n\}.$$

Воспользуемся предыдущей конструкцией интеграла по ортогональной случайной мере для конечной меры  $\mu$ : для любой функции  $f \in L^2(\Lambda)$  определим

$$J(f) := \sum_{n=1}^{\infty} J_n(f_n),$$

где  $J_n$  — это интеграл на  $L^2(\Lambda_n)$ , построенный выше, а  $f_n := f|_{\Lambda_n}$ . Такое отображение  $J$  и называется *интегралом по ортогональной случайной мере*  $Z$ .

*Замечание.* Корректность (независимость от разбиения и сходимости ряда в  $L^2(\Omega)$ ) определения остается в качестве упражнения. Про это можно почитать в [1], стр. 232.

## 14 Лекция от 17.05.17

### Интеграл Ито

#### 14.1 Теорема Карунена

**Определение 14.1.** Пусть  $X(t) = X(t, \omega)$ ,  $t \in T$ ,  $\omega \in \Omega$ , — случайный процесс,  $Z(B) = Z(B, \omega')$ ,  $B \in \mathcal{B}$ ,  $\omega' \in \Omega'$ , — ортогональная случайная мера, где  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и  $(\Omega', \mathcal{F}', P')$  — вероятностные пространства. *Расширенное вероятностное пространство* определим как

$$(\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', P \otimes P').$$

Случайный процесс и ортогональную случайную меру на это новое пространство продолжаем следующим образом:

$$X(t, (\omega, \omega')) := X(t, \omega), \quad Z(B, (\omega, \omega')) := Z(B, \omega').$$

**Определение 14.2.** Множество функций  $\{f(t, \cdot), t \in T\}$  *полно* в  $L^2(\Lambda)$ , если из того, что

$$\int_{\Lambda} f(t, \lambda) \overline{\psi(\lambda)} \mu(d\lambda) = 0 \quad \forall t \in T,$$

следует, что  $\psi = 0$   $\mu$ -почти наверное.

**Теорема 14.1** (Карунена). Пусть  $X = \{X(t), t \in T\}$  — заданный на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  комплекснозначный  $L^2$ -процесс такой, что его функция среднего тождественно равна нулю (такие процессы называются *центрированными*). Если его ковариационная функция допускает факторизацию, то есть

$$r(s, t) = \int_{\Lambda} f(s, \lambda) \overline{f(t, \lambda)} \mu(d\lambda),$$

где  $f(s, \cdot) \in L^2(\mu)$ ,  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера на  $(\Lambda, \mathcal{B})$ . Тогда на (возможно, расширенном) вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  существует центрированная ортогональная случайная мера  $Z$  со структурной мерой  $\mu$  такая, что

$$X(t) = \int_{\Lambda} f(t, \lambda) Z(d\lambda), \quad t \in T.$$

Если множество функций  $\{f(t, \cdot), t \in T\}$  полно в  $L^2(\Lambda)$ , то  $Z$  можно построить и на исходном вероятностном пространстве.

*Замечание.* Если

$$X(t) = \int_{\Lambda} f(t, \lambda) Z(d\lambda), \quad t \in T,$$

то из условий существования ковариационной функции процесса и равенства его функции среднего нулю получаем, что в силу изометричности  $J$  (лемма 13.3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X(s) \overline{X(t)} &= r(s, t) = \left( \int_{\Lambda} f(s, \lambda) Z(d\lambda), \int_{\Lambda} f(t, \lambda) Z(d\lambda) \right)_{L^2(\Omega)} = \\ &= \int_{\Lambda} f(s, \lambda) \overline{f(t, \lambda)} \mu(d\lambda), \end{aligned}$$

что является условием факторизуемости ковариационной функции. Таким образом, достаточное условие теоремы Карунена является и необходимым.

*Доказательство.* Сначала предположим, что система функций  $\{f(t, \cdot), t \in T\}$  полна в  $L^2(\Lambda)$ . Введем на ней отображение  $G$ :

$$G(f(t, \cdot)) := X(t, \cdot).$$

Пусть

$$f := \sum_{k=1}^n c_k f(t_k, \cdot), \quad g := \sum_{l=1}^m d_l f(s_l, \cdot).$$

Продолжим отображение  $G$  по линейности:

$$G(f) = G\left(\sum_{k=1}^n c_k f(t_k, \cdot)\right) := \sum_{k=1}^n c_k X(t_k, \cdot).$$

Тогда по условию

$$\begin{aligned} (Gf, Gg)_{L^2(\Omega)} &= \left( \sum_{k=1}^n c_k X(t_k), \sum_{l=1}^m d_l X(s_l) \right)_{L^2(\Omega)} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_k \overline{d_l} \mathbb{E}X(t_k) \overline{X(s_l)} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_k \overline{d_l} r(t_k, s_l) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_k \overline{d_l} \int_{\Lambda} f(t_k, \lambda) \overline{f(s_l, \lambda)} \mu(d\lambda) = \\ &= \int_{\Lambda} \sum_{k=1}^n c_k f(t_k, \lambda) \overline{\sum_{l=1}^m d_l f(s_l, \lambda)} \mu(d\lambda) = \langle f, g \rangle_{L^2(\Lambda)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$(Gf, Gg)_{L^2(\Omega)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\Lambda)}.$$

Из этого следует корректность определения  $G$ : если  $f = g$ , то

$$0 = \|f - g\|_{L^2(\Lambda)} = \|Gf - Gg\|_{L^2(\Omega)}.$$

Еще из этого следует, что  $G$  — это изометрия на функциях вида

$\sum_{k=1}^n c_k f(t_k, \cdot)$ . Тогда  $G$ , как изометрия, продолжается на замыкание в  $L^2(\Lambda)$  функций такого вида. Назовем это замыкание  $L^2[\Lambda]$ . В силу полноты исходной системы функций получаем, что

$$L^2[\Lambda] = L^2(\Lambda).$$

Поскольку  $\mathbb{I}_B \in L^2(\Lambda)$  при  $\mu(B) < \infty$ , то можно ввести

$$Z(B) := G(\mathbb{I}_B), \quad B \in \mathfrak{g}.$$

Так введенное отображение  $Z$  — это ортогональная случайная мера со структурной мерой  $\mu$ . Действительно, в силу изометричности  $G$

$$\begin{aligned} (Z(B), Z(C))_{L^2(\Omega)} &= (G(\mathbb{I}_B), G(\mathbb{I}_C))_{L^2(\Omega)} = \langle \mathbb{I}_B, \mathbb{I}_C \rangle_{L^2(\Lambda)} = \\ &= \int_{\Lambda} \mathbb{I}_B \mathbb{I}_C \mu(d\lambda) = \int_{\Lambda} \mathbb{I}_{B \cap C} \mu(d\lambda) = \mu(B \cap C), \end{aligned}$$

то есть по лемме 13.2  $Z$  — ортогональная случайная мера со структурной мерой  $\mu$ . Заметим, что  $Z$  — центрированная случайная мера. Действительно, поскольку процесс  $X$  имеет нулевую функцию среднего, то

$$\mathbb{E}\zeta = 0 \quad \forall \zeta \in L^2[X];$$

так как  $G(\mathbb{I}_B) \in L^2[X]$ , то и  $\mathbb{E}Z(B) = \mathbb{E}G(\mathbb{I}_B) = 0$ .

Введем интеграл по случайной мере  $Z$ :

$$J(f) := \int_{\Lambda} f(\lambda) Z(d\lambda), \quad f \in L^2(\Lambda).$$

Тогда по доказанному ранее  $J$  — изометрия. Итак, есть две изометрии

$$\begin{aligned} G : L^2(\Lambda) &\rightarrow L^2(\Omega), \quad G(\mathbb{I}_B) = Z(B), \quad B \in \mathfrak{g}, \\ J : L^2(\Lambda) &\rightarrow L^2(\Omega), \quad J(\mathbb{I}_B) = Z(B), \quad B \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Поскольку линейные комбинации индикаторов плотны в  $L^2(\Lambda)$ , то  $G = J$  на  $L^2(\Lambda)$ , то есть

$$J(f(t, \cdot)) = X(t).$$

Таким образом,

$$X(t) = \int_{\Lambda} f(t, \lambda) Z(d\lambda),$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь система функций  $\{f(t, \cdot), t \in T\}$  не является полной в  $L^2(\Lambda)$ .



Рассмотрим в  $L^2(\Lambda)$  ортогональное дополнение  $\widetilde{L}^2$  к пространству  $L^2[f]$ . Возьмем в  $\widetilde{L}^2$  базис  $\{g(s, \cdot), s \in T'\}$  (положив  $T \cap T' = \emptyset$ ). Тогда функция

$$\rho(s, u) := \int_{\Lambda} g(s, \lambda) \overline{g(t, \lambda)} \mu(d\lambda), \quad s, u \in T',$$

будет неотрицательно определенной:

$$\sum_{k, l=1}^n z_k \overline{z_l} \rho(s_k, s_l) = \int_{\Lambda} \left| \sum_{k=1}^n z_k g(t_k, \lambda) \right|^2 \mu(d\lambda) \geq 0.$$

Следовательно, существует центрированный комплекснозначный гауссовский процесс  $Y = \{Y(s), s \in T'\}$ , заданный на вероятностном пространстве  $(\Omega', \mathcal{F}', P')$  такой, что

$$\text{cov}(Y(s), Y(u)) = \rho(s, u), \quad s, u \in T'.$$

Возьмем расширенное вероятностное пространство

$$(\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', P \otimes P').$$

Тогда на нем случайные величины  $X(t)$  и  $Y(s)$  будут независимы (из-за того, как доопределяются отображения на расширенном вероятностном пространстве по определению) для любых  $s$  и  $t$ . Положим

$$\xi(t, \tilde{\omega}) = \begin{cases} X(t, \omega), & t \in T \\ Y(t, \omega'), & t \in T', \end{cases}$$

где  $\tilde{\omega} := (\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega', t \in T \sqcup T'$ . Тогда по независимости

$$\text{cov}(\xi(s, \cdot), \xi(t, \cdot)) = \begin{cases} r(s, t), & s, t \in T, \\ \rho(s, t), & s, t \in T', \\ 0, & s \in T, t \in T' \text{ или } s \in T', t \in T. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\text{cov}(\xi(s, \cdot), \xi(t, \cdot)) = \int_{\Lambda} h(s, \lambda) \overline{h(t, \lambda)} \mu(d\lambda),$$

где

$$h(t, \lambda) = \begin{cases} f(t, \lambda), & t \in T, \\ g(t, \lambda), & t \in T', \end{cases}$$

поскольку  $f(t, \cdot)$  ортогональна  $g(s, \cdot)$  по построению. Тогда система функций  $\{h(t, \cdot), t \in T \sqcup T'\}$  полна в  $L^2(\Lambda)$ . По доказанному в первом пункте доказательства

$$\xi(t, \tilde{\omega}) = \int_{\Lambda} h(t, \lambda) Z(d\lambda),$$

где  $Z$  — некоторая центрированная ортогональная случайная мера. Но тогда для  $t \in T$

$$X(t, \omega) = \xi(t, \tilde{\omega}) = \int_{\Lambda} h(t, \lambda) Z(d\lambda) = \int_{\Lambda} f(t, \lambda) Z(d\lambda),$$

что и требовалось доказать.  $\square$

## 14.2 Спектральное представление стационарного в широком смысле процесса

**Пример 14.1.** Пусть  $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — центрированный стационарный в широком смысле процесс. Тогда  $r(n, m) := \text{cov}(X_n, X_m) = r(n - m)$  — неотрицательно определенная функция. По теореме Герглотца существует такая мера  $\mathbf{Q}$ , что

$$r(n) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{in\lambda} \mathbf{Q}(d\lambda),$$

то есть

$$r(n - m) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{i(n-m)\lambda} \mathbf{Q}(d\lambda) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{in\lambda} \overline{e^{im\lambda}} \mathbf{Q}(d\lambda).$$

Таким образом, получили факторизацию ковариационной функции из формулировки теоремы Карунена. Поэтому

$$X_n = \int_{[-\pi, \pi]} e^{in\lambda} Z(d\lambda), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где  $Z$  — некоторая центрированная ортогональная случайная мера.

**Теорема 14.2.** Пусть  $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  — центрированный стационарный в широком смысле процесс, непрерывный в  $L^2$ . Тогда

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} Z(d\lambda), \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Доказательство.* Теорема предлагается без доказательства. □

## 14.3 Интеграл Ито

**Определение 14.3.** Пусть  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — фильтрация. Процесс  $W = \{W(t), t \geq 0\}$  называется *винеровским процессом относительно этой фильтрации*, если

1.  $W$  согласован с этой фильтрацией;
2.  $W(t) - W(s)$  независима с  $\mathcal{F}_s$   $\forall s \geq 0$ ;
3.  $W(0) = 0$ ;
4.  $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ ,  $t > s$ ;
5. траектории этого процесса непрерывны почти наверное.

*Замечание.* Из марковского свойства (обычного) винеровского процесса следует, что он является винеровским процессом относительно своей естественной фильтрации.

**Определение 14.4.** Рассмотрим разбиение отрезка  $[0, T]$ ,  $T > 0$ :  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  на полуинтервалы  $\Delta_i := (t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ . Пусть  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — фильтрация и  $\xi_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  — случайные величины такие, что

1.  $\xi_i \in \mathcal{F}_{t_i} | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ;

$$2. \mathbb{E} \xi_i^2 < \infty.$$

Ступенчатым случайным процессом будем называть

$$f(t, \omega) := \sum_{i=1}^n \xi_{i-1} \mathbb{I}_{\Delta_{i-1}} + \xi \mathbb{I}_{\{0\}}.$$

**Определение 14.5.** Интегралом Ито от ступенчатого процесса будем называть

$$I(f) := \sum_{i=1}^n \xi_{i-1} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}),$$

где  $W$  — это винеровский процесс (возможно, относительно заранее оговоренной фильтрации).

**Теорема 14.3.** Пусть  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  — фильтрация, а  $W$  — винеровский относительно нее процесс. Для ступенчатых процессов  $f$  и  $g$ , задаваемых формулами

$$\begin{aligned} f(t, \omega) &:= \xi(\omega) \mathbb{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(\omega) \mathbb{I}_{\Delta_{i-1}}(t), \\ g(t, \omega) &:= \eta(\omega) \mathbb{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^n \eta_{i-1}(\omega) \mathbb{I}_{\Delta_{i-1}}(t), \end{aligned}$$

где  $\{\Delta_i\}_{i=0}^{n-1}$  — разбиение на полуинтервалы  $(t_i, t_{i+1}]$  отрезка  $[0, T]$ , а величины  $\xi_i$  и  $\eta_i$   $\mathcal{F}_{t_i}$ -измеримы и имеют конечный второй момент, верны следующие утверждения:

1.  $\mathbb{E} I(f) = 0$ .
- 2.

$$(I(f), I(g))_{L^2(\Omega)} = \int_0^T \mathbb{E} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

*Доказательство.* 1.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \xi_{i-1} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) &= \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( \xi_{i-1} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}} \right) \right) = \\ &= \mathbb{E} \left( \xi \mathbb{E} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \right) = 0. \end{aligned}$$

2.

$$(I(f), I(g))_{L^2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E} \xi_{i-1} \overline{\eta_{j-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}).$$

Пусть  $i > j$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \xi_{i-1} \overline{\eta_{j-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) &= \\ &= \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( \xi_{i-1} \overline{\eta_{j-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left( \xi_{i-1} \overline{\eta_{j-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \mathbb{E} \left( (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) \right) = \\
&= \mathbb{E} \left( \xi_{i-1} \overline{\eta_{j-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \right) \mathbb{E} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) = 0.
\end{aligned}$$

Это же верно, когда  $i < j$ . Если же  $i = j$ , то

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \xi_{i-1} \overline{\eta_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = \\
&= \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( \xi_{i-1} \overline{\eta_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}} \right) \right) = \\
&= \mathbb{E} \xi_{i-1} \overline{\eta_{i-1}} \mathbb{E} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = \\
&= \mathbb{E} \xi_{i-1} \overline{\eta_{i-1}} (t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(I(f), I(g))_{L^2(\Omega)} = \mathbb{E} \xi_{i-1} \overline{\eta_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) = \int_0^T \mathbb{E} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

□

**Следствие.** Отсюда следует, что интеграл Ито — изометричное отображение.

**Определение 14.6.** Пусть  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  — фильтрация. Функция  $f(t, \omega)$  называется *прогрессивно измеримой относительно этой фильтрации*, если  $\forall t \in [0, T]$  ее сужение на  $[0, t] \times \Omega$  является  $\mathcal{B}[0, t] \otimes \mathcal{F}_t$ -измеримым.

**Определение 14.7.** Пространство  $L_{ad}^2([0, T] \times \Omega)$  — это пространство прогрессивно измеримых функций с конечным вторым моментом.

**Лемма 14.4.** Любую функцию из  $L_{ad}^2([0, T] \times \Omega)$  можно приблизить в  $L^2$  с помощью ступенчатых процессов.

*Доказательство.* Лемма предлагается без доказательства. □

**Следствие.** Интеграл Ито, таким образом, продолжается как изометрия на пространство  $L_{ad}^2([0, T] \times \Omega)$ .

## 14.4 Формула Ито

**Определение 14.8.** Будем говорить, что непрерывный почти наверное на  $[0, +\infty]$  процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  допускает стохастический дифференциал

$$dX_t = f(t, \omega) dW_t + g(t, \omega) dt,$$

если  $X_0 \in \mathcal{F}_0 | \mathcal{B}(\mathbb{R})$  и почти наверное сразу для всех  $t \geq 0$

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, \omega) dW_s + \int_0^t g(s, \omega) ds.$$

*Замечание.* Так как из теоремы Винера–Зигмунда–Пэли следует, что винеровский процесс почти наверное не дифференцируем ни в одной точке, то дифференциал от винеровского процесса следует понимать как формальную запись.

**Теорема 14.5 (Ито).** Пусть процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  допускает стохастический дифференциал. Пусть функция  $H(t, x) \in C^{1,2}$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Тогда процесс  $Y_t := H(t, X_t)$  допускает стохастический дифференциал вида

$$dY_t = \frac{\partial H(t, X_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial H(t, X_t)}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H(t, X_t)}{\partial x^2} (dX_t)^2,$$

причем  $(dX_t)^2$  определяется по следующему правилу:

$$dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt := 0, \quad dW_t \cdot dW_t := dt.$$

*Доказательство.* Теорема предлагается без доказательства. □

## 15 Лекция от 24.05.17

### Стохастические дифференциальные уравнения

#### 15.1 Уравнение Ланжевена

**Определение 15.1.** Рассмотрим дифференциальное уравнение, связанное с уравнением, описывающее движение частицы в вязкой среде:

$$m\dot{v} = -\beta v + \dot{W},$$

где  $m > 0$  — масса частицы,  $v$  — ее скорость,  $\beta > 0$  — параметр, обозначающий вязкость среды, а  $W$  — винеровский процесс, играющий роль "шума". Это уравнение называется *уравнением Ланжевена*.

*Замечание.* По теореме Винера–Зигмунда–Пэли, производная  $\dot{W}$  почти наверное не существует ни в одной точке. Нужно, таким образом, как-то придать смысл этому формальному выражению. Поделим на  $m$ :

$$\dot{v} = av + \sigma \dot{W}, \quad a < 0, \quad \sigma > 0.$$

Если бы вместо  $\dot{W}$  в уравнении выше стояла детерминированная непрерывная функция  $f$ , то получилось бы ОДУ с решением

$$v(t) = v(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)} \sigma f(s) ds$$

(это решение находится методом вариации постоянной). Перепишем уравнение:

$$dv(t) = av(t) dt + \sigma f(t) dt.$$

Формально подставим вместо  $f(t) dt$   $dW(t)$ :

$$dv(t) = av(t) dt + \sigma dW(t).$$

Таким образом, получилось стохастическое дифференциальное уравнение. Понимать его следует, ввиду недифференцируемости винеровского процесса, в интегральном смысле:

$$v(t) - v(0) = a \int_0^t v(s) ds + \sigma \int_0^t dW(s).$$

Таким образом придается смысл уравнению Ланжевена. Задача состоит в том, чтобы найти решение в виде непрерывного согласованного с фильтрацией  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  случайного процесса  $v(t, \omega)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\omega \in \Omega$  такого, что при подстановке его в интегральное уравнение выше получаем равенство почти наверное.

Логично (из-за связи этого стохастического ДУ с ОДУ, решение которого было получено выше) задаться вопросом о том, является ли случайный процесс

$$v(t) := v(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)} \sigma dW(s)$$

решением этого интегрального уравнения.

**Теорема 15.1.** *Да, является.*

*Доказательство.* Доказываем, что

$$dv(t) = av(t)dt + \sigma dW(t).$$

Положим

$$X(t) := \int_0^t e^{-au} dW(u), \quad H(t, x) := \sigma e^{at} x, \quad Y(t) := H(t, X(t)).$$

Тогда

$$v(t) = v(0)e^{at} + Y(t).$$

Заметим, что

$$dX_t = e^{-at} dW_t.$$

Тогда по формуле Ито (применимой, так как процесс  $X$  допускает стохастический дифференциал по определению и так как  $X_0 = 0$  по определению интеграла Ито)

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial H(t, X_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial H(t, X_t)}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H(t, X_t)}{\partial x^2} (dX_t)^2 = \\ &= \sigma a e^{at} X_t dt + \sigma e^{at} dX_t = \sigma a e^{at} X_t dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

При этом (снова по формуле Ито)

$$d(v(0)e^{at}) = av(0)e^{at} dt.$$

Получаем, что

$$\begin{aligned}
dv(t) &= av(0)e^{at} dt + \sigma ae^{at} X_t dt + \sigma dW_t = \\
&= av(0)e^{at} dt + \sigma ae^{at} \int_0^t e^{-au} dW(u) dt + \sigma dW_t = \\
&= \left( v(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)} \sigma dW(s) \right) a dt + \sigma dW(t) = \\
&= av(t)dt + \sigma dW(t),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.  $\square$

**Определение 15.2.** Процессом Орнштейна–Уленбека называется гауссовский процесс  $V = \{v(t), t \in [0, T]\}$  такой, что

$$\mathbb{E}v(t) \equiv 0, \quad \text{cov}(v(s), v(t)) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|s-t|},$$

где  $s, t \in [0, T]$ ,  $\alpha, \sigma > 0$ .

**Теорема 15.2.** Пусть  $v(0) \in \mathcal{F}_0 | \mathcal{B}(\mathbb{R})$  и  $v(0) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$ ,  $\alpha, \sigma > 0$ , где  $v(t)$  — решение уравнения Ланжевена с параметрами  $a = -\alpha$ ,  $\sigma = \sigma$ . Тогда  $v(t)$  является процессом Орнштейна–Уленбека.

*Доказательство.* Докажем, что  $\mathbb{E}v(t) \equiv 0$ .

Уже знаем, что решение уравнения Ланжевена записывается в явном виде:

$$v(t) = v(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)} \sigma dW(s).$$

Тогда

$$\mathbb{E}v(t) = e^{at} \mathbb{E}v(0) + \mathbb{E} \int_0^t e^{a(t-s)} \sigma dW(s) = 0,$$

так как  $\mathbb{E}v(0) = 0$  по условию теоремы и так как матожидание интеграла Ито всегда равно нулю.

Докажем, что  $\text{cov}(v(s), v(t)) = -\frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{a|s-t|} = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|s-t|}$ .

Распишем:

$$\begin{aligned}
\text{cov}(v(s), v(t)) &= \mathbb{E}v(s)v(t) - \mathbb{E}v(s)\mathbb{E}v(t) = \mathbb{E}v(s)v(t) = \\
&= \mathbb{E} \left( v(0)e^{as} + \int_0^s e^{a(s-u)} \sigma dW(u) \right) \left( v(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-u)} \sigma dW(u) \right).
\end{aligned}$$

Поскольку  $W(t) - W(s)$  независима с  $\mathcal{F}_s$ ,  $s < t$ , то (после  $L^2$ -предельного перехода к интегралу Ито)

$$\mathbb{E} \left( v(0)e^{as} + \int_0^s e^{a(s-u)} \sigma dW(u) \right) \left( v(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-u)} \sigma dW(u) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{a(s+t)} \mathbb{E} v^2(0) + \mathbb{E} \left( \int_0^s e^{a(s-u)} \sigma \, dW(u) \int_0^t e^{a(t-u)} \sigma \, dW(u) \right) = \\
&= e^{a(s+t)} \frac{\sigma^2}{2\alpha} + \mathbb{E} \left( \int_0^s e^{a(s-u)} \sigma \, dW(u) \int_0^t e^{a(t-u)} \sigma \, dW(u) \right).
\end{aligned}$$

Заметим, что, поскольку в силу изометричности интеграла Ито

$$\mathbb{E} I(f) I(g) = \int_0^t \mathbb{E} f(u) \overline{g(u)} \, du,$$

то

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left( \int_0^s e^{a(s-u)} \sigma \, dW(u) \int_0^t e^{a(t-u)} \sigma \, dW(u) \right) = \\
&= \mathbb{E} \left( \int_0^t e^{a(s-u)} \mathbb{I}_{[0, s]}(u) \sigma \, dW(u) \int_0^t e^{a(t-u)} \sigma \, dW(u) \right) = \\
&= \int_0^t \mathbb{E} \left( \sigma^2 e^{a(s+t-2u)} \mathbb{I}_{[0, s]}(u) \right) \, du = \int_0^t \sigma^2 e^{a(s+t-2u)} \mathbb{I}_{[0, s]}(u) \, du = \\
&= \sigma^2 e^{a(s+t)} \int_0^{\min(s, t)} e^{-2au} \, du = \frac{\sigma^2 e^{a(s+t)}}{2a} \left( 1 - e^{-2a \min(s, t)} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\text{cov}(v(s), v(t)) = -e^{a(s+t)} \frac{\sigma^2}{2a} + \frac{\sigma^2 e^{a(s+t)}}{2a} \left( 1 - e^{-2a \min(s, t)} \right) = -\frac{\sigma^2}{2a} e^{a|s-t|},$$

что и требовалось доказать.

Докажем, что  $v(t)$  — гауссовский процесс.

Для этого нужно доказать, что для любых  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$  вектор  $(v(t_1), \dots, v(t_k))$  является гауссовским. Поскольку

$$v(t) = v(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)} \sigma \, dW(s),$$

где  $v(0) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$  измерима относительно  $\mathcal{F}_0$ , а  $\int_0^t e^{a(t-s)} \sigma \, dW(s)$  независим с  $\mathcal{F}_0$ , то достаточно доказать, что является гауссовским вектор

$$\left( \int_0^{t_1} e^{a(t_1-s)} \sigma \, dW(s), \dots, \int_0^{t_k} e^{a(t_k-s)} \sigma \, dW(s) \right)$$



(достаточно, потому что если вектор из интегралов гауссовский, то вектор из  $v(t_i)$  получается линейным преобразованием из вектора из интегралов, к которому последней координатой присоединена случайная величина  $v(0)$ , которая независима с ними всеми; дополненный вектор получится гауссовский, потому что любая линейная комбинация его координат будет нормальной случайной величиной). Отбрасывая неслучайные функции, получаем, что достаточно доказать гауссовость вектора

$$\left( \int_0^{t_1} e^{-as} dW(s), \dots, \int_0^{t_k} e^{-as} dW(s) \right).$$

Разобьем каждый из отрезков  $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{k-1}, t_k]$  ( $t_0 := 0$ ) на  $n$  равных частей:

$$t^j := t_{[\frac{j}{n}]} + \left\{ \frac{j}{n} \right\} \left( t_{[\frac{j}{n}]+1} - t_{[\frac{j}{n}]} \right)$$

где  $j = 0, \dots, kn$ . Составим вектор:

$$\left( W(t^1) - W(t^0), \dots, W(t^{kn}) - W(t^{kn-1}) \right).$$

Заметим, что поскольку приращения винеровского процесса независимы, то вектор получился гауссовский. Любое линейное преобразование этого вектора будет гауссовским вектором. Составим по нему новый вектор размерности  $k$  с координатами

$$U(i) := \sum_{j=1}^{in} e^{-at^{j-1}} \left( W(t^j) - W(t^{j-1}) \right),$$

где  $i = 1, \dots, k$ . Поскольку преобразование линейно (сумма первых  $in$  координат с нужными коэффициентами), то вектор будет гауссовский.

Осталось заметить, что  $L^2$ -предел ( $n \rightarrow \infty$ ) этой последовательности векторов будет как раз тем самым вектором из интегралов, гауссовость которого сейчас доказывается. Поскольку  $L^2$ -предел последовательности гауссовских векторов всегда гауссовский (это следует из того, что  $L^2$ -сходимость влечет сходимость характеристических функций к характеристической функции предельного вектора и сходимость первых двух моментов, и из того, что характеристическая функция гауссовского вектора — экспонента, в показателе которой можно переходить к пределу), то теорема доказана.  $\square$

## 15.2 Стохастические дифференциальные уравнения

**Определение 15.3.** Будем рассматривать стохастические дифференциальные уравнения вида

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t.$$

Как и раньше, это лишь формальная запись, понимаемая в интегральном смысле:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad t \in [0, T].$$

Прогрессивно измеримый относительно фильтрации процесс  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$  с непрерывными почти наверное траекториями называется *сильным решением* стохастического дифференциального уравнения, если при каждом  $t \in [0, T]$  при подстановке  $X_s, s \in [0, t]$ , в правую часть интегрального выражения получается равенство почти наверное.

**Пример 15.1.** Рассмотрим уравнение

$$dX_t = 3X_t^{2/3} dt, \quad X_0 = 0, \quad t \in [0, T].$$

Тогда  $\forall a \in [0, T]$  процесс

$$X_t = \begin{cases} 0, & t < a; \\ (t-a)^3, & t \geq a, \end{cases}$$

является сильным решением уравнения; таким образом, сильных решений (как минимум) континуум.

**Теорема 15.3** (существования и единственности решения СДУ). *Пусть выполнены следующие условия:*

1.  $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L|x - y| \quad \forall t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R};$
2.  $b(t, x)^2 + \sigma(t, x)^2 \leq c(1 + x^2) \quad \forall t \in [0, T], x \in \mathbb{R}.$

*Пусть  $Z \in \mathcal{F}_0 | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $EZ^2 < \infty$ . Тогда существует и единственно сильное решение стохастического дифференциального уравнения*

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t$$

*с начальным условием  $Z$ .*

*Замечание.* Условие 1 также называется условием Липшица.

*Замечание.* В примере 15.1 условие Липшица не выполнено.

*Замечание.* Если  $b(t, x) = b(x)$ , то из первого условия следует второе.

*Доказательство.* Для доказательства теоремы сначала докажем лемму.

**Лемма 15.4** (Гронуолла). *Пусть  $u$  и  $f$  — неотрицательные непрерывные функции такие, что для некоторого  $K \geq 0$*

$$u(t) \leq K + \int_0^t u(s)f(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

*Тогда*

$$u(t) \leq K e^{\int_0^t f(s) ds} \quad \forall t \in [0, T].$$

*Доказательство.* Пусть  $K = 0$ . Заметим, что тогда  $u(0) = 0$ . В силу непрерывности  $f$  найдется константа  $C > 1$ , что

$$u(t) \leq C \int_0^t u(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Пусть  $u\left(\frac{1}{2C}\right) > 0$ . Тогда в силу грубой оценки интеграла

$$u\left(\frac{1}{2C}\right) \leq C \int_0^{\frac{1}{2C}} u(s) \, ds \leq \frac{1}{2} \max_{[0, \frac{1}{2C}]} u(t),$$

то есть

$$0 < 2u\left(\frac{1}{2C}\right) \leq \max_{[0, \frac{1}{2C}]} u(t).$$

Так как  $u$  — непрерывная функция, то этот максимум достигается в некоторой точке  $t_1 < \frac{1}{2C}$ . Далее аналогично:  $\exists t_2 < t_1$ :

$$\frac{1}{t_1} u(t_1) \leq \max_{[0, t_1]} u(t) = u(t_2)$$

и так далее. Получили последовательность  $t_i \rightarrow 0$  такую, что  $u(t_i) \rightarrow \infty$ , что противоречит непрерывности  $u$ . Поскольку вместо  $\frac{1}{2C}$  можно было брать любую точку на отрезке  $[0, \frac{1}{C}]$ , то получили, что  $u$  тождественно равна нулю на этом отрезке. Повторяя рассуждение для отрезков  $[\frac{i}{C}, \frac{i+1}{C}]$ , доказываем, что  $u \equiv 0$  на всем отрезке  $[0, T]$ .

Пусть теперь  $K > 0$ . Тогда условие леммы эквивалентно

$$\frac{u(t)f(t)}{K + \int_0^t u(s)f(s) \, ds} \leq f(t).$$

Заметим, что это равносильно тому, что

$$\frac{d}{dt} \ln \left( K + \int_0^t u(s)f(s) \, ds \right) \leq f(t).$$

Интегрируя по отрезку  $[0, t]$ , получаем, что

$$\ln \left( K + \int_0^t u(s)f(s) \, ds \right) - \ln K \leq \int_0^t f(s) \, ds.$$

Тогда, применяя экспоненту и пользуясь условием леммы, получаем, что

$$u(t) \leq K + \int_0^t u(s)f(s) \, ds \leq K e^{\int_0^t f(s) \, ds}.$$

Лемма доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы.

Докажем **существование** решения. Будем использовать метод последовательных приближений:

$$X_t^{(0)} := Z, \quad t \in [0, T];$$

$$X_t^{(n)} := Z + \int_0^t b(s, X_s^{(n-1)}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n-1)}) dW_s.$$

Оценим  $\mathbb{E} \left( X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right)^2$ .

При  $n = 0$  получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right)^2 &= \mathbb{E} \left( \int_0^t b(s, Z) ds + \int_0^t \sigma(s, Z) dW_s \right)^2 \leq \\ &\leq 2\mathbb{E} \left( \int_0^t b(s, Z) ds \right)^2 + 2\mathbb{E} \left( \int_0^t \sigma(s, Z) dW_s \right)^2. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского:

$$\left( \int_0^t 1 \cdot b(s, Z) ds \right)^2 \leq \int_0^t 1^2 ds \cdot \int_0^t b^2(s, Z) ds = t \int_0^t b^2(s, Z) ds.$$

Воспользуемся вторым условием и грубой оценкой интеграла:

$$t \int_0^t b^2(s, Z) ds \leq ct^2 (1 + Z^2).$$

Таким образом,

$$\mathbb{E} \left( \int_0^t b(s, Z) ds \right)^2 \leq ct^2 (1 + \mathbb{E}Z^2).$$

Теперь с сигмой: воспользуемся свойством изометричности интеграла Ито и вторым условием:

$$\mathbb{E} \left( \int_0^t \sigma(s, Z) dW_s \right)^2 = \int_0^t \mathbb{E} (\sigma(s, Z))^2 ds \leq ct (1 + \mathbb{E}Z^2).$$

Таким образом, получаем, что

$$\mathbb{E} \left( X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right)^2 \leq 2ct(t+1) (1 + \mathbb{E}Z^2).$$

Перепишем:

$$2ct(t+1) (1 + \mathbb{E}Z^2) \leq 2c(T+1) (1 + \mathbb{E}Z^2) \cdot t = M_1 t.$$

Таким образом,

$$\mathbb{E} \left( X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right)^2 \leq M_1 t.$$

Пусть теперь  $n \geq 1$ .

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left( X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right)^2 = \\
&= \mathbb{E} \left( \int_0^t \left( b(s, X_t^{(n)}) - b(s, X_t^{(n-1)}) \right) ds + \int_0^t \left( \sigma(s, X_t^{(n)}) - \sigma(s, X_t^{(n-1)}) \right) dW_s \right)^2 \leq \\
&\leq 2\mathbb{E} \left( \int_0^t \left( b(s, X_t^{(n)}) - b(s, X_t^{(n-1)}) \right) ds \right)^2 + \\
&\quad + 2\mathbb{E} \left( \int_0^t \left( \sigma(s, X_t^{(n)}) - \sigma(s, X_t^{(n-1)}) \right) dW_s \right)^2.
\end{aligned}$$

Воспользуемся первым условием:

$$\int_0^t \left( b(s, X_t^{(n)}) - b(s, X_t^{(n-1)}) \right) ds \leq \int_0^t L \left| X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)} \right| ds.$$

Воспользуемся неравенством Йенсена:

$$\left( \int_0^t L \left| X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)} \right| ds \right)^2 \leq tL^2 \int_0^t \left| X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)} \right|^2 ds.$$

Теперь с сигмой: воспользуемся свойством изометричности интеграла Ито и первым условием:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left( \int_0^t \left( \sigma(s, X_t^{(n)}) - \sigma(s, X_t^{(n-1)}) \right) dW_s \right)^2 = \\
&= \int_0^t \mathbb{E} \left( \sigma(s, X_t^{(n)}) - \sigma(s, X_t^{(n-1)}) \right)^2 ds \leq \\
&\leq L^2 \int_0^t \mathbb{E} \left| X_t^{(n)} - X_t^{(n-1)} \right|^2 ds.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbb{E} \left( X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right)^2 \leq 2L^2(1+T) \int_0^t \mathbb{E} \left| X_t^{(n)} - X_t^{(n-1)} \right|^2 ds.$$

Переписав, получим:

$$\mathbb{E} \left( X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right)^2 \leq M_2 \int_0^t \mathbb{E} \left| X_t^{(n)} - X_t^{(n-1)} \right|^2 ds.$$

Тогда по индукции, подставляя на каждом шаге вместо подынтегрального выражения превосходящий его интеграл и интегрируя получившееся в конце выражение, имеем, что

$$\mathbb{E} \left( X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right)^2 \leq \frac{M^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!}, \quad t \in [0, T].$$

где  $M := \max(M_1, M_2)$ . Покажем с помощью этого, что последовательность  $\{X_t^n\}$  фундаментальна в метрике  $L^2$  для любого  $t \in [0, T]$ . Действительно, по неравенству треугольника

$$\begin{aligned} \rho \left( X_t^{(n)} - X_t^{(m)} \right) &= \sqrt{\mathbb{E} \left( X_t^{(n)} - X_t^{(m)} \right)^2} \leq \sum_{k=m}^{n-1} \rho \left( X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)} \right) = \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} \sqrt{\mathbb{E} \left( X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)} \right)^2} \leq \sum_{k=m}^{n-1} \sqrt{\frac{M^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!}} \leq \\ &\leq \sum_{k=m}^{\infty} \sqrt{\frac{M^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!}} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность фундаментальна; поскольку  $L^2$  полно, то она сходится:

$$(L^2) \lim_{n \rightarrow \infty} X_t^n = X_t, \quad t \in [0, T].$$

Докажем теперь, что процесс  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$  допускает непрерывную модификацию.

Для дальнейшего доказательства понадобится

**Теорема 15.5** (Дуба о непрерывных квадратично интегрируемых мартингалах). Пусть  $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  — квадратично интегрируемый ( $\mathbb{E} X_t^2 < \infty$ ) мартингал с п.н. непрерывными траекториями. Тогда

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} |X_t| \geq a \right) \leq \frac{\mathbb{E} X_t^2}{a^2}.$$

*Доказательство.* Теорема предлагается без доказательства. □

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| &\leq \int_0^T |b(s, X_t^{(n)}) - b(s, X_t^{(n-1)})| ds + \\ &+ \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t (\sigma(s, X_t^{(n)}) - \sigma(s, X_t^{(n-1)})) dW_s \right|. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского:

$$\left( \int_0^T |b(s, X_t^{(n)}) - b(s, X_t^{(n-1)})| ds \right)^2 \leq T \int_0^T |b(s, X_t^{(n)}) - b(s, X_t^{(n-1)})|^2 ds.$$

Тогда по теореме 15.5, учитывая, что

$$\mathbf{P}(\xi + \eta > a) \leq \mathbf{P}\left(\xi > \frac{a}{2}\right) + \mathbf{P}\left(\eta > \frac{a}{2}\right),$$

с помощью неравенства Маркова, теоремы Фубини и первого условия получаем, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > 2^{-n}\right) \leq \\ & \leq \mathbf{P}\left(\left(\int_0^T |b(s, X_t^{(n)}) - b(s, X_t^{(n-1)})| ds\right)^2 > 2^{-2n-2}\right) + \\ & + \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} \left|\int_0^t (\sigma(s, X_t^{(n)}) - \sigma(s, X_t^{(n-1)})) dW_s\right| > 2^{-n-1}\right) \leq \\ & \leq 2^{2n+2} T \int_0^T \mathbf{E} |b(s, X_t^{(n)}) - b(s, X_t^{(n-1)})|^2 ds + \\ & + 2^{2n+2} \mathbf{E} \left(\int_0^t (\sigma(s, X_t^{(n)}) - \sigma(s, X_t^{(n-1)})) dW_s\right)^2 = \\ & = 2^{2n+2} T \int_0^T \mathbf{E} |b(s, X_t^{(n)}) - b(s, X_t^{(n-1)})|^2 ds + \\ & + 2^{2n+2} \int_0^T \mathbf{E} |\sigma(s, X_t^{(n)}) - \sigma(s, X_t^{(n-1)})|^2 ds \leq \\ & \leq 2^{2n+2} L^2 (T+1) \int_0^T \mathbf{E} |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2 ds \leq \\ & \leq 2^{2n+2} L^2 (T+1) \int_0^T \frac{M^n s^n}{n!} ds \leq \frac{(4MT)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4MT)^{n+1}}{(n+1)!} < \infty.$$

Из этого по лемме Бореля-Кантелли следует, что

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > 2^{-n} \text{ бесконечно часто} \right) = 0,$$

то есть для почти всех  $\omega$  существует  $N_0 = N_0(\omega)$  такой, что для всех  $n \geq N_0$

$$\sup_{t \in [0, T]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \leq 2^{-n}.$$

Таким образом, последовательность

$$X_t^{(n)}(\omega) = X_t^{(0)}(\omega) + \sum_{k=0}^{n-1} \left( X_t^{(k+1)}(\omega) - X_t^{(k)}(\omega) \right),$$

состоящая из почти наверное непрерывных на отрезке  $[0, T]$  функций, равномерно сходится на этом отрезке; получили, что  $X_t$  — непрерывная на отрезке  $[0, T]$  функция.

$\mathcal{F}_t$ -измеримость  $X_t$  получается предельным переходом из  $\mathcal{F}_t$ -измеримости  $X_t^{(n)}$ . Прогрессивная измеримость следует из непрерывности и согласованности с фильтрацией.

Таким образом, для того чтобы завершить доказательство существования, нужно показать, что при подстановке  $X_t$  в уравнение получается верное почти наверное тождество.

Идейно доказательство состоит в том, чтобы перейти к  $L^2$ -пределу при  $n \rightarrow \infty$  в выражении

$$X_t^{(n)} = Z + \int_0^t b(s, X_s^{(n-1)}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n-1)}) dW_s,$$

получив

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s,$$

что и требуется. Обоснуем законность такого перехода.

Поскольку

$$\mathbb{E} \left( X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right)^2 \leq \frac{M^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!}, \quad t \in [0, T],$$

то по неравенству треугольника из

$$X_t^{(n)}(\omega) = Z(\omega) + \sum_{k=0}^{n-1} \left( X_t^{(k+1)}(\omega) - X_t^{(k)}(\omega) \right)$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \|X_t^{(n)}\|_{L^2} &\leq \|Z\|_{L^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \|X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}\|_{L^2} = \\ &= \|Z\|_{L^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\mathbb{E} \left( X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)} \right)^2} \leq \|Z\|_{L^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{M^{k+1} T^{k+1}}{(k+1)!}} = \\ &= \|Z\|_{L^2} + c(M, T). \end{aligned}$$

Тогда и

$$\|X_t\|_{L^2} \leq \|Z\|_{L^2} + c(M, T).$$

Поэтому по теореме Фубини и по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем, что

$$\mathbb{E} \int_0^T \left( X_s - X_s^{(n)} \right)^2 ds = \int_0^T \mathbb{E} \left( X_s - X_s^{(n)} \right)^2 ds \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$



Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dW_s &\xrightarrow{L^2(\Omega)} \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \\ \int_0^t b(s, X_s^{(n)}) ds &\xrightarrow{L^2(\Omega)} \int_0^t b(s, X_s) ds, \end{aligned}$$

а значит, переход к пределу был законен.

Перейдем к доказательству **единственности**.

Пусть есть два различных начальных условия  $Z$  и  $\tilde{Z}$ , которым соответствуют два различных сильных решения  $X$  и  $\tilde{X}$ . Тогда, поскольку

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s,$$

получаем (так же, как в доказательстве существования), что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \tilde{X}_t - X_t \right|^2 &\leq \\ &\leq 3\mathbb{E} \left| \tilde{Z}_t - Z_t \right|^2 + 3\mathbb{E} \left( \int_0^t b(s, X_s) ds \right)^2 + 3\mathbb{E} \left( \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \right)^2 \leq \\ &\leq 3\mathbb{E} \left| \tilde{Z}_t - Z_t \right|^2 + 3(1+t)L^2 \int_0^t \mathbb{E} \left| \tilde{X}_s - X_s \right|^2 ds. \end{aligned}$$

Вспомним лемму 15.4, условие которой выглядело так:

$$u(t) \leq K + \int_0^t u(s)f(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Мы же получили выражение такого же вида:

$$u(t) := \mathbb{E} \left| \tilde{X}_t - X_t \right|^2, \quad K := 3\mathbb{E} \left| \tilde{Z}_t - Z_t \right|^2, \quad f(s) := 3(1+t)L^2.$$

Но тогда по лемме 15.4  $\mathbb{E} \left| \tilde{X}_t - X_t \right|^2 \equiv 0$ . Из этого следует, что

$$\mathbb{P} \left( \tilde{X}_t - X_t = 0 \right) = 1 \quad \forall t \in [0, T].$$

Из этого, поскольку объединение счетного числа множеств нулевой меры имеет нулевую меру, получаем, что

$$\mathbb{P} \left( \tilde{X}_t - X_t = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Q}, t \in [0, T] \right) = 1.$$

Траектории процесса  $\tilde{X}_t - X_t$  непрерывны почти наверное. Поскольку непрерывная функция со всюду плотного множества продолжается (если вообще продолжается) единственным образом, то получаем, что

$$\mathbf{P} \left( \tilde{X}_t - X_t = 0 \quad \forall t \in [0, T] \right) = 1,$$

что и означает единственность решения почти наверное. Теорема доказана.  $\square$

## Список литературы

- [1] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005
- [2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.
- [3] Ширяев А. Н. Вероятность.
- [4] Шашкин А. П. Слабая сходимость вероятностных мер. МГУ, 2013
- [5] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер.