где последнее равенство справедливо для любых точек a и b, являющихся точками непрерывности функции $F(x)$.

Итак, формула (25) доказана.

b) Пусть $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < \infty$. Обозначим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt.$$

Из теоремы о мажорируемой сходимости следует, что эта функция непрерывна по x и, следовательно, она интегрируема на интервале $[a, b]$. Поэтому, снова применяя теорему Фубини, находим, что

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^b \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt \right) dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \left[\int\limits_a^b e^{-itx}\, dx \right] dt = \lim_{c \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-c}^{c} \varphi(t) \left[\int\limits_a^b e^{-itx}\, dx \right] dt =$$
$$= \lim_{c \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

для всех точек a и b, являющихся точками непрерывности функции $F(x)$.

Отсюда вытекает, что

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(y)\, dy, \qquad x \in R,$$

и так как $f(x)$ — непрерывная, а $F(x)$ — неубывающая функции, то $f(x)$ есть плотность $F(x)$.

Теорема доказана.

Следствие. Формула обращения (25) дает другое доказательство утверждения теоремы 2.

Теорема 4. *Для того чтобы компоненты случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ были независимы, необходимо и достаточно, чтобы его характеристическая функция была произведением характеристических функций компонент:*

$$\mathsf{M} e^{i(t_1\xi_1 + \ldots + t_n\xi_n)} = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{M} e^{it_k\xi_k}, \qquad (t_1, \ldots, t_n) \in R^n.$$

Доказательство. Необходимость следует из задачи 1. Для доказательства достаточности обозначим $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ — функцию распределения вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $F_k(x)$ — функцию распределения ξ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Положим $G = G(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1)\ldots F_n(x_n)$. Тогда по теореме Фубини для всех $(t_1, \ldots, t_n) \in R^n$

$$\int_{R^n} e^{i(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)}\,dG(x_1\ldots x_n) = \prod_{k=1}^{n} \int_R e^{it_kx_k}\,dF_k(x) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathsf{M}e^{it_k\xi_k} = \mathsf{M}e^{i(t_1\xi_1+\ldots+t_k\xi_k)} = \int_{R^n} e^{i(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)}\,dF(x_1\ldots x_n).$$

Поэтому по теореме 2 (точнее по ее многомерному аналогу; см. задачу 3) $F = G$, и, следовательно, согласно теореме из § 5, величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы.

6. В теореме 1 сформулированы некоторые необходимые условия, которым удовлетворяет характеристическая функция. Таким образом, если для функции $\varphi = \varphi(t)$ не выполняется, скажем, одно из первых трех утверждений этой теоремы, то это означает, что рассматриваемая функция не является характеристической.

Сложнее обстоит дело с проверкой того, является ли интересующая нас функция $\varphi = \varphi(t)$ характеристической. Сформулируем (без доказательства) ряд результатов в этом направлении.

Теорема Бохнера — Хинчина. *Пусть $\varphi(t)$ — непрерывная функция, $t \in R$, и $\varphi(0) = 1$. Для того чтобы $\varphi(t)$ была характеристической, необходимо и достаточно, чтобы она была неотрицательно-определенной, т. е. для любых действительных $t_1, \ldots, t_n$ и любых комплексных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$,*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varphi(t_i - t_j)\lambda_i\bar{\lambda}_j \geqslant 0. \tag{32}$$

Необходимость условия (32) очевидна, поскольку, если $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x)$, то

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varphi(t_i - t_j)\lambda_i\bar{\lambda}_j = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{it_kx} \right|^2 dF(x) \geqslant 0.$$

Труднее доказывается достаточность условия (32).

Теорема Пойа. *Пусть непрерывная, четная и выпуклая книзу функция $\varphi(t)$ такова, что $\varphi(t) \geqslant 0$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда $\varphi(t)$ является характеристической функцией.*

Эта теорема дает весьма удобный способ конструирования функций, являющихся характеристическими. Таковыми будут, Из формул (21) и (23) видим, что

$$\varphi_Y(\lambda) = \int_\Omega \exp\{i\langle\lambda, Y(\omega)\rangle\}\,\mathsf{P}(d\omega) = \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i\langle\lambda, z\rangle\}\,\mathsf{P}Y^{-1}(dz) = \varphi_{\mathsf{P}_Y}(\lambda), \tag{27}$$

т. е. характеристическая функция вектора Y совпадает с характеристической функцией его распределения вероятностей.

§ **15.** Пусть семейство мер P_τ, $\tau = (t_1, \dots, t_n)$, на пространствах $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ индексируется не совпадающими друг с другом точками $t_1, \dots, t_n$ (варьируются $n \in \mathbb{N}$ и $t_1, \dots, t_n$ из T). Обозначим $\varphi_\tau = \varphi_\tau(\lambda)$ характеристическую функцию меры P_τ.

Если меры P_τ — конечномерные распределения процесса $X = \{X(t),\, t \in T\}$, то тогда φ_τ может быть представлена в виде:

$$\varphi_\tau(\lambda) = \mathsf{E}\,\exp\left\{i\sum_{k=1}^n X(t_k)\lambda_k\right\}, \qquad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{28}$$

Отсюда видно, что характеристическая функция $\varphi_\tau(\lambda)$ не должна меняться при одновременной перестановке координат векторов τ и λ, и характеристическая функция, индексированная "укороченным" вектором τ, получается из характеристической функции φ_τ подстановкой в ее аргументы $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ нулей на места "выкидываемых" в векторе τ координат.

Оказывается, эти простые условия в точности эквивалентны условиям симметрии и согласованности мер 1° и 2° (см. § 11).

Теорема 5. *Для симметрии и согласованности мер P_τ, $\tau = (t_1, \dots, t_n) \in T^n$, заданных на пространствах $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))_{n\geqslant 1}$, необходимо и достаточно, чтобы для любых $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in T^n$ и $n \geqslant 2$, одновременно выполнялись следующие два условия*:

$$\text{(a)}\quad \varphi_{\psi\tau}(\Psi\lambda) = \varphi_\tau(\lambda) \quad \textit{и} \quad \text{(b)}\quad \varphi_{\theta\tau}(\Theta\lambda) = \varphi_\tau(\Theta\lambda, 0),$$

где отображения ψ, Ψ, θ и Θ определены в § 13 (с $\mathsf{S}_t = \mathbb{R}$, $t \in T$), а $(\Theta\lambda, 0) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0)$ для $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. В силу взаимно-однозначного соответствия между мерами на $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ и характеристическими функциями условия (A) и (B) леммы 10 равносильны тому, что при $n \geqslant 2$

$$\varphi_{\psi\tau}(\lambda) = \varphi_{\mathsf{P}_\tau\Psi^{-1}}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \tag{29}$$

$$\varphi_{\theta\tau}(\mu) = \varphi_{\mathsf{P}_\tau\Theta^{-1}}(\mu), \quad \mu \in \mathbb{R}^{n-1} \tag{30}$$

(напомним, что $\varphi_\tau = \varphi_{\mathsf{P}_\tau}$). По лемме 8 найдется случайный вектор Y_τ со значениями в $\mathbb{R}^n$, такой что $\mathsf{P}_\tau = \mathsf{P}_{Y_\tau}$. Тогда $\mathsf{P}_\tau\Psi^{-1}$ есть распределение вектора ΨY_τ, поскольку $\mathsf{P}_{Y_\tau}\Psi^{-1}(B) = \mathsf{P}(Y_\tau \in \Psi^{-1}(B)) = \mathsf{P}(\Psi Y_\tau \in B)$. Далее,

$$\varphi_{\Psi Y_\tau}(\lambda) = \mathsf{E}\,\exp\{i\langle\Psi Y_\tau, \lambda\rangle\} = \mathsf{E}\,\exp\{i\langle Y_\tau, \Psi^*\lambda\rangle\} = \varphi_{Y_\tau}(\Psi^{-1}\lambda), \tag{31}$$

где мы отождествили Ψ с ортогональной матрицей, задающей это отображение (тогда $\Psi^* = \Psi^{-1}$, Ψ^* — транспонированная матрица Ψ). Согласно (31) условие (29) принимает вид $\varphi_{\psi\tau}(\lambda) = \varphi_\tau(\Psi^{-1}\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, что эквивалентно условию (a).

Аналогично,

$$\begin{aligned}\varphi_{\Theta Y_\tau}(\mu) &= \mathsf{E}\,\exp\{i\langle \Theta Y_\tau, \mu\rangle\} = \\ &= \mathsf{E}\,\exp\{i\langle Y_\tau, (\mu, 0)\rangle\} = \varphi_{Y_\tau}((\mu,0)), \quad \mu \in \mathbb{R}^{n-1}.\end{aligned} \tag{32}$$

Таким образом, (30) равносильно условию (b). □

Замечание 4. Пусть $X = \{(X_1(t), \ldots, X_m(t)),\ t \in T\}$ — (векторный) случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}^m$. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и любых $t_1, \ldots, t_n \in T$ рассмотрим вектор $\xi_{t_1,\ldots,t_n} = (X_1(t_1), \ldots, X_m(t_1), \ldots, X_1(t_n), \ldots, X_m(t_n))$, имеющий на $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{mn})$ распределение $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}$ с характеристической функцией $\phi_{t_1,\ldots,t_n}(\lambda)$, где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_j = (\lambda_j^{(1)}, \ldots, \lambda_j^{(m)}) \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, \ldots, n$. Теорема 5 верна и для *векторного* случая (для мер P_τ, заданных на пространствах $(\mathbb{R}^{mn}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^{mn}))_{n\geqslant 1}$). В этом (векторном) случае в условии (a) одновременно переставляются $t_1, \ldots, t_n$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, а в условии (b) вектор λ_n приравнивается нулю в $\mathbb{R}^m$.

§ **16.** Рассмотрим подробнее структуру σ-алгебры $\mathscr{B}_T$. Нам понадобятся некоторые новые понятия. Для *подмножества* $U \subset T$ (включение $\subset$ не предполагается, вообще говоря, строгим) аналогично пространству S_T и σ-алгебре $\mathscr{B}_T$ определяются пространство S_U и σ-алгебра $\mathscr{B}_U$. Заметим, что σ-алгебра $\mathscr{B}_U$ для конечного множества $U = \{t_1, \ldots, t_n\}$ близка по смыслу к σ-алгебре $\mathscr{B}_{t_1,\ldots,t_n}$, введенной в § 11. Отличие состоит в том, что, когда оперируют функциями (а не векторами), неважно, в каком порядке занумерованы точки множества U. Если $V \subset U \subset T$, то определим *отображение* (*“проектирование”*) $\pi_{U,V} \colon \mathsf{S}_U \to \mathsf{S}_V$ формулой

$$\pi_{U,V}\, y = y\big|_V, \qquad y \in \mathsf{S}_U, \tag{33}$$

где $y\big|_V$ есть *сужение* на множество V функции y, заданной на множестве U (см. рис. 4). Когда V состоит из одной точки t, то вместо $\pi_{T,\{t\}}$ пишем, как в (16), $\pi_{T,t}$.

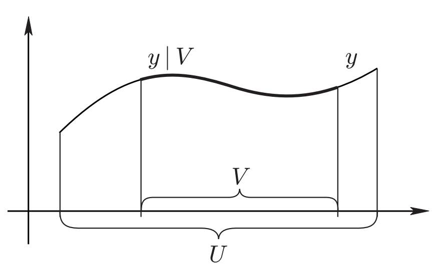

Рис. 4

Глава II

Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновские и гауссовские процессы

Критерий существования процесса с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс. Винеровский процесс (броуновское движение). Многомерное нормальное распределение. Построение действительной гауссовской случайной функции по функции среднего и ковариационной функции. Комплекснозначные гауссовские процессы. Неотрицательно определенные функции как ковариационные функции и как воспроизводящие ядра гильбертовых пространств. Теорема Парзена. Эквивалентность двух определений броуновского движения. Функции Хаара и Шаудера. Флуктуации последовательности стандартных гауссовских величин. Построение непрерывного винеровского процесса. Многомерное броуновское движение.

§ **1.** В этой главе изучается специальный, но обширный и важный класс случайных процессов, имеющих *независимые приращения*. При первом чтении можно опустить § 6 о комплекснозначных гауссовских процессах и § 7, в котором рассматриваются случайные процессы, индексированные семействами функций. Особое внимание желательно обратить на пуассоновский и винеровский процессы (вводимые в параграфах 2 и 3), широко используемые в последующих главах.

Определение 1. Действительный случайный процесс $X = \{X_t,\, t \geqslant 0\}$ называется *процессом* с *независимыми приращениями*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех $t_0, t_1, \ldots, t_n$ таких, что $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, величины X_{t_0}, $X_{t_1} - X_{t_0}$, $\ldots$, $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *независимы в совокупности.*

Теорема 1. *Пусть $\{\varphi(s, t;\, \cdot)\}$, где $0 \leqslant s < t < \infty$, — семейство характеристических функций, отвечающих некоторому семейству $\mathsf{Q}_{s,t}$, $0 \leqslant s < t < \infty$, вероятностных мер на $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Для существования случайного процесса $X = \{X_t,\, t \geqslant 0\}$ с независимыми приращениями такого, что характеристическая функция случайной величины $X_t - X_s$ есть $\varphi(s, t;\, \cdot)$ при любых $0 \leqslant s < t < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi(s, t; \nu) = \varphi(s, u; \nu)\, \varphi(u, t; \nu) \tag{1}$$

для всех $0 \leqslant s < u < t < \infty$, $\nu \in \mathbb{R}$. При этом распределение вероятностей Q_0 величины X_0 может быть выбрано каким угодно.

Доказательство. Необходимость условия (1) очевидна, поскольку характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

Пусть теперь выполнено условие (1). Допустим, что удалось построить некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ и искомый процесс X, причем $\mathrm{Law}(X_0 \,|\, \mathsf{P}) = \mathsf{Q}_0$. Тогда характеристическая функция величины X_0 равна $\varphi_{\mathsf{Q}_0}(\lambda)$, а характеристическая функция вектора $\xi = (X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ для $n \in \mathbb{N}$ и $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ есть

$$\varphi_\xi(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi_{\mathsf{Q}_0}(\lambda_0)\varphi(t_0, t_1; \lambda_1)\cdots\varphi(t_{n-1}, t_n; \lambda_n).$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} X_{t_0} \\ X_{t_1} \\ X_{t_2} \\ \dots \\ X_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t_0} \\ X_{t_1} - X_{t_0} \\ X_{t_2} - X_{t_1} \\ \dots \\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Для любого случайного вектора $\eta \in \mathbb{R}^q$, любой матрицы $A = (a_{k,m})_{k,m=1}^q$, где $a_{k,m} \in \mathbb{R}$ $(k, m = 1, \dots, q)$, и всех $\lambda \in \mathbb{R}^q$

$$\varphi_{A\eta}(\lambda) = \mathsf{E}\exp\{i\langle\lambda, A\eta\rangle\} = \mathsf{E}\exp\{i\langle A^*\lambda, \eta\rangle\} = \varphi_\eta(A^*\lambda), \tag{3}$$

где A^* — транспонированная матрица A, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^q$.

Следовательно, при $n \in \mathbb{N}$ и $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ конечномерные распределения самого процесса X должны задаваться характеристическими функциями

$$\varphi_{t_0, t_1, \dots, t_n}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi_\xi(A^*\lambda) = \varphi_{\mathsf{Q}_0}(\mu_0)\varphi(0, t_1; \mu_1)\cdots\varphi(t_{n-1}, t_n; \mu_n),$$

где $\mu = A^*\lambda$ и A — треугольная матрица, фигурирующая в (2): $\mu_0 = \lambda_0 + \dots + \lambda_n$, $\mu_1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \dots, \mu_n = \lambda_n$. Кроме того, мы должны иметь $\varphi_{t_0}(\lambda_0) = \varphi_{\mathsf{Q}_0}(\lambda_0)$, и $\varphi_{t_1,\dots,t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi_{t_0,t_1,\dots,t_n}(0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ при $n \in \mathbb{N}$ и $0 < t_1 < \dots < t_n$.

Итак, *предположив* существование искомого процесса X, мы выяснили, какие характеристические функции должны быть у его конечномерных распределений.

Отправляясь от заданных функций $\varphi_{\mathsf{Q}_0}(\,\cdot\,)$ и $\varphi(s, t; \,\cdot\,)$, где $0 \leqslant s < t < \infty$, введем теперь описанным выше способом характеристические функции φ_{t_0}, $\varphi_{t_0,t_1,\dots,t_n}$ и $\varphi_{t_1,\dots,t_n}$ $(0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n, n \in \mathbb{N})$ и воспользуемся теоремой 5 главы I.

Условие (a) этой теоремы не требует проверки в силу замечания 3 главы I, а условие (b), точнее, условие (b′), означающее подстановку 0 в $\varphi_\tau(\lambda)$ вместо любого аргумента λ_m, также выполнено, поскольку согласно (1) для $1 \leqslant m \leqslant n$

$$\varphi(t_{m-1}, t_m; 0 + \lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n)\varphi(t_m, t_{m+1}; \lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n) = \\ = \varphi(t_{m-1}, t_{m+1}; \lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n).$$

Тем самым, выполнены условия согласованности и, значит, существование требуемого процесса с независимыми приращениями вытекает из теоремы 5 главы I. Очевидно, что распределение X_0 будет искомым распределением Q_0. $\square$

на первый план могут выдвигаться некоторые специальные требования к *свойствам* используемых (изучаемых) процессов. Примером могут служить весьма обширные (и вообще говоря, пересекающиеся) классы случайных функций, такие как процессы с независимыми приращениями, гауссовские процессы, мартингалы и т. д., подробно изучаемые в последующих главах.

§ **8.** Сейчас мы напомним, предполагая заданным некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, понятие независимости σ-алгебр событий (и случайных элементов), чтобы привести ряд примеров случайных процессов.

Определение 5. Системы множеств (содержащие Ω, в частности, σ-алгебры) $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \subset \mathscr{F}$ $(n \geqslant 2)$ называются *независимыми* (в совокупности), если

$$\mathsf{P}(A_1 \cdots A_n) = \mathsf{P}(A_1) \cdots \mathsf{P}(A_n) \tag{7}$$

для любых $A_k \in \mathscr{A}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Бесконечное семейство систем множеств $\mathscr{A}_t \subset \mathscr{F}$ $(\Omega \in \mathscr{A}_t)$, $t \in T$, называется *независимым*, если набор $\mathscr{A}_{t_1}, \ldots, \mathscr{A}_{t_n}$ независим при всех $n \geqslant 2$ и любых несовпадающих друг с другом точках $t_1, \ldots, t_n \in T$.

Лемма 9. *Пусть независимы π-системы $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n \subset \mathscr{F}$ $(n \geqslant 2)$. Тогда независимы σ-алгебры $\sigma\{\mathscr{M}_1\}, \ldots, \sigma\{\mathscr{M}_n\}$. Если независимы σ-алгебры, то независимы и их расширения классом $\mathscr{N}$ нулевых событий.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{D}_1$ — система таких подмножеств $\mathscr{F}$, что (7) справедливо для любых $A_1 \in \mathscr{D}_1$ и всех $A_k \in \mathscr{M}_k$, $k = 2, \ldots, n$. Очевидно, $\mathscr{D}_1$ есть λ-система, причем $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{D}_1$. По теореме 1 получаем, что $\sigma\{\mathscr{M}_1\} \subset \mathscr{D}_1$. Аналогично рассматривается система $\mathscr{D}_2$, состоящая из событий A_2, для которых верно (7) при всех $A_1 \in \sigma\{\mathscr{M}_1\}$ и $A_k \in \mathscr{M}_k$, где $k = 3, \ldots, n$. Действуя таким образом, приходим к первому утверждению леммы.

Второе утверждение очевидно, поскольку любое событие A из σ-алгебры $\overline{\mathscr{G}}$, т. е. из расширения σ-алгебры $\mathscr{G}$ классом $\mathscr{N}$, имеет вид $A = C \cup D$, где $C \in \mathscr{G}$ и $D \in \mathscr{N}$. □

Независимость (в совокупности) семейства случайных величин $\{X_t,\ t \in T\}$, заданных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ и принимающих при каждом $t \in T$ значения в каком-либо измеримом пространстве $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)$, означает независимость порожденных ими σ-алгебр $\sigma\{X_t\} = X^{-1}(\mathscr{B}_t)$, $t \in T$.

Таким образом, величины X_t, $t \in T$ (множество T содержит не менее двух элементов), *независимы* в том и только том случае, если

$$\mathsf{P}(X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_{t_k} \in B_k) \tag{8}$$

для всех $n \geqslant 2$, любых несовпадающих точек $t_1, \ldots, t_n \in T$ и произвольных множеств $B_k \in \mathscr{B}_{t_k}$, $k = 1, \ldots, n$.

В связи с данным определением независимых случайных элементов представляет интерес следующий результат.

1 Меры на метрических пространствах, слабая сходимость мер.

Рассмотрим метрическое пространство (S, ρ), наделенное борелевской σ-алгеброй его подмножеств $\mathcal{B}(S)$, т.е. наименьшей σ-алгеброй, содержащей все открытые множества. Напомним, что функция $\mathsf{P} : \mathcal{B}(S) \to \mathbb{R}_+$ называется *вероятностной мерой*, если

1) $\mathsf{P}(S) = 1$,

2) P счетно-аддитивна, т.е. $\mathsf{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$ для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $A_i \in \mathcal{B}(S)$, $i \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.1 (*свойство регулярности вероятностной меры*). *Для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $A \in \mathcal{B}(S)$ существуют такие открытое множество $G \subset S$ и замкнутое $F \subset S$, что $F \subset A \subset G$ и $\mathsf{P}(G \setminus F) < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть сначала A замкнуто. Тогда можно взять $F = A$. Далее, множества $A^{(1/n)}$ открыты и образуют вложенную последовательность, причем $\cap_{n=1}^{\infty} A^{(1/n)} = A$. Следовательно, $\mathsf{P}(A^{(1/n)}) \to \mathsf{P}(A)$, $n \to \infty$, и можно найти такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\mathsf{P}(A^{(1/n)}) < \mathsf{P}(A) + \varepsilon$.

Пусть $\mathcal{R}$ — класс множеств A, обладающих описанным в условии теоремы свойством. Очевидно, $S \in \mathcal{R}$. Пусть $A \in \mathcal{R}$; по заданному $\varepsilon > 0$ выберем замкнутое F и открытое G из утверждения теоремы. Тогда $\overline{G} \subset \overline{A} \subseteq \overline{F}$ и $\mathsf{P}(\overline{F} \setminus \overline{G}) < \varepsilon$, причем $\overline{F}$ открыто, а $\overline{G}$ замкнуто. Поэтому $\overline{A} \in \mathcal{R}$. Далее, пусть $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$, $A := \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\varepsilon > 0$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ подберем замкнутое F_n и открытое G_n так, чтобы $F_n \subset A_n \subset G_n$ и $\mathsf{P}(G_n \setminus F_n) < \varepsilon/2^{n+1}$. Положим $G := \cup_{n=1}^{\infty} G_n$ и $F := \cup_{n \le n_0} F_n$, где n_0 выбрано так, чтобы $\mathsf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} F_n \setminus \cup_{n \le n_0} F_n) < \varepsilon/2$ (ввиду непрерывности меры это можно сделать). Тогда F замкнуто, G открыто, $F \subset A \subset G$ и

$$\mathsf{P}(G \setminus F) \le \frac{\varepsilon}{2} + \mathsf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus \cup_{n=1}^{\infty} F_n) \le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(G_n \setminus F_n) \le \varepsilon,$$

так что $A \in \mathcal{R}$.

Итак, $\mathcal{R}$ — сигма-алгебра, содержащая все замкнутые множества. Поэтому она содержит $\mathcal{B}(S)$. □

Напомним, что класс $\mathcal{C}$ множеств, содержащихся в S, называется *π-системой*, если он замкнут относительно конечных пересечений и $S \in \mathcal{S}$. Класс $\mathcal{M}$ называется *μ-системой* или *монотонным классом*, если

1) $S \in \mathcal{M}$,

2) если $A, B \in \mathcal{M}$ и $A \subseteq B$, то $B \setminus A \in \mathcal{M}$;

3) если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ и $A_i \subseteq A_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$, то $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.

Многие свойства мер удобнее проверять для множеств, образующих монотонные классы, и сложно — для элементов сигма-алгебр. Поэтому важную роль играет

Лемма 1.2 (*лемма о монотонных классах*). *Пусть $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$, где $\mathcal{C}$ — π-система, а $\mathcal{M}$ — монотонный класс. Тогда $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}$.*

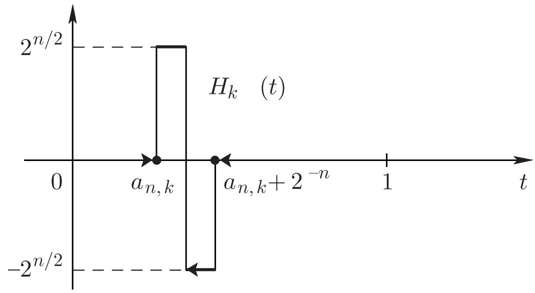

Рис. 6

Система функций $\{H_k\}$ является *полной и ортонормированной* в пространстве $L^2[0,1]$ с мерой Лебега и скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt, \qquad f, g \in L^2[0,1].$$

Действительно, ортонормированность системы $\{H_k\}$ очевидна, а ее полнота вытекает из того, что с помощью линейных комбинаций функций H_k можно записать *индикаторы* промежутков с двоично рациональными концами. Так, например,

$$\mathbf{1}_{[0,1/2]} = (H_1 + H_2)/2, \quad \mathbf{1}_{(1/2,1]} = (H_1 - H_2)/2,$$
$$\mathbf{1}_{[0,1/4]} = (\mathbf{1}_{[0,1/2]} + (1/\sqrt{2})H_2)/2, \quad \mathbf{1}_{(1/4,1/2]} = (\mathbf{1}_{[0,1/2]} - (1/\sqrt{2})H_2)/2, \quad \ldots,$$
$$\mathbf{1}_{[a_{n,k}, a_{n,k}+2^{-n-1}]} = (\mathbf{1}_{[a_{n,k}, a_{n,k}+2^{-n}]} + 2^{-n/2}H_k)/2 \quad \text{для} \quad 2^n < k \leqslant 2^{n+1}.$$

Следовательно, любую функцию $f \in L^2[0,1]$ можно представить в виде

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, H_k\rangle H_k, \tag{26}$$

где ряд в правой части (26) сходится в $L^2[0,1]$. Отметим также, что согласно *равенству Парсеваля*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, H_k\rangle\langle g, H_k\rangle. \tag{27}$$

По функциям Хаара определим теперь *функции Шаудера* (см. рис. 7):

$$S_k(t) = \int_0^t H_k(y)\,dy \equiv \langle \mathbf{1}_{[0,t]}, H_k\rangle, \qquad t \in [0,1], \quad k \in \mathbb{N}.$$

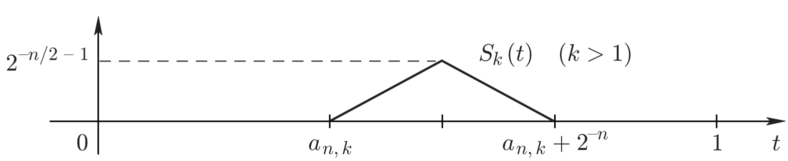

Рис. 7

Определение 12. Распределение вероятностей на σ-алгебре $\mathscr{B}(C[0,1])$ построенного случайного элемента $W = \{W(t),\, t \in [0,1]\}$ называется *мерой Винера*, или *винеровской мерой*, и обозначается $\mathbb{W}$.

§ **11.** Перейдем к построению винеровского процесса W на $[0,\infty)$. Пользуясь теоремой 2 главы I, зададим на некотором (полном) вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ последовательность *независимых случайных элементов* $W_n = \{W_n(t),\, t \in [0,1]\}$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что $W_n(\,\cdot\,,\omega) \in C[0,1]$ для $\omega \in \Omega$ и $\mathsf{P}_{W_n} = \mathbb{W}$ на $\mathscr{B}(C[0,1])$.

Требуемый процесс W на $[0,\infty)$ определим теперь с помощью непрерывного "склеивания" процессов W_n, т. е. положим

$$W(t,\omega) = \begin{cases} W_1(t,\omega) & \text{для } t \in [0,1), \\ \sum\limits_{j=1}^{k} W_j(1,\omega) + W_{k+1}(t-k,\omega) & \text{для } t \in [k,k+1),\ k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{33}$$

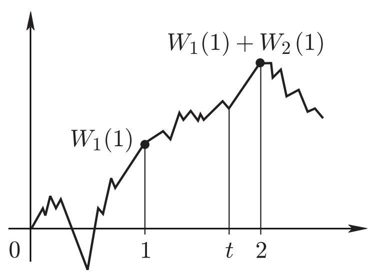

Рис. 8

Теорема 9. *Процесс W, определяемый формулой* (33), *есть винеровский процесс на $[0,\infty)$. Все траектории этого процесса непрерывны.*

Доказательство. Непрерывность процесса W очевидна по построению. Ясно также, что $W(0) = 0$. Покажем, что W есть процесс с независимыми приращениями, у которого $W(t) - W(s) \sim \mathsf{N}(0, t-s)$ при $0 \leqslant s < t < \infty$.

Если $s,t \in [k,k+1)$ для некоторого $k \geqslant 0$, то

$$W(t) - W(s) = W_{k+1}(t-k) - W_{k+1}(s-k) \sim \mathsf{N}(0, t-s).$$

Если же $s \in [k,k+1)$ и $t \in [m,m+1)$, где $k < m$, то

$$[s,t) = [s,k+1) \cup \bigcup_{k<l<m} [l,l+1) \cup [m,t) \qquad \Bigl(\bigcup_{l\in\varnothing}[l,l+1) = \varnothing\Bigr)$$

(см. рис. 9). Поэтому

$$\begin{aligned} W(t) - W(s) &= W(k+1) - W(s) + \sum_{k<l<m} \bigl(W(l+1) - W(l)\bigr) + W(t) - W(m) = \\ &= \zeta_k + \sum_{k<l<m} \zeta_l + \zeta_m. \end{aligned} \tag{34}$$

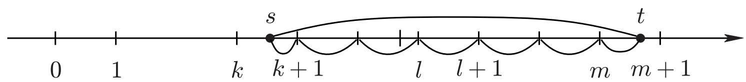

Рис. 9

Заметим, что величины $\zeta_k, \dots, \zeta_m$ независимы и $\zeta_i \sim \mathsf{N}(0, \sigma_i^2)$, $i = k, \dots, m$, поэтому $\zeta_k + \dots + \zeta_m \sim \mathsf{N}\Big(0, \sum\limits_{i=k}^{m} \sigma_i^2\Big)$. Тем самым, распределение $W(t) - W(s)$ является нормальным $\mathsf{N}(0, t-s)$.

Аналогичные рассуждения показывают, что процесс W имеет независимые приращения. Для доказательства надо учесть, что измеримые функции от непересекающихся наборов независимых величин будут независимы. □

Далее считаем, что все рассматриваемые винеровские процессы имеют п. н. непрерывные траектории.

Дополнения и упражнения

Обратимся к несколько более подробному рассмотрению введеного класса процессов с независимыми приращениями. Два важнейших представителя этого класса — *броуновское движение* и *пуассоновский процесс* — уже были определены в главе II.

1. Найдите ковариационную функцию пуассоновского процесса, имеющего постоянную интенсивность λ. Сопоставьте полученный ответ с ковариационной функцией винеровского процесса.

2. Пусть $r = r(s,t)$ — неотрицательно определенная функция ($s, t \in T$, где T — некоторое множество). Существует ли негауссовский процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ такой, что $\mathsf{cov}(X_s, X_t) = r(s,t)$ при всех $s, t \in T$?

3. Докажите, что если $P_n(z_1, \dots, z_m)$ — многочлен степени n (от m переменных) с положительными коэффициентами и $r_k(s,t)$ ($k = 1, \dots, m$; $s, t \in T$) — ковариационные функции, то $P_n(r_1(s,t), \dots, r_m(s,t))$ также является ковариационной функцией.

4. Для L^2-процесса $X = \{X_t, t \in T\}$, заданного на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, обозначим $L^2[X]$ замыкание в пространстве $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ линейной оболочки всех величин X_t, $t \in T$. Докажите, что если X — гауссовский процесс, то $L^2[X]$ есть гауссовская система, т. е. для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $Y_1, \dots, Y_n \in L^2[X]$ вектор $(Y_1, \dots, Y_n)$ имеет гауссовское распределение.

5 (свойство автомодельности). Пусть $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ — винеровский процесс и c — положительная константа. Докажите, что процесс $X = \Big\{X(t) = \frac{1}{\sqrt{c}} W(ct), t \geqslant 0\Big\}$ является винеровским процессом.

6. Докажите теорему 8, проверив исходное определение винеровского процесса, т. е. докажите, что процесс, задаваемый формулой (31), имеет независимые приращения. В силу *теоремы Дуба* (см. приложение 5) этот процесс с непрерывными траекториями автоматически будет *гауссовским*.

Глава III

Броуновское движение. Свойства траекторий

Недифференцируемость п.н. траекторий броуновского движения (винеровского процесса). Марковское свойство винеровского процесса. Фильтрация. Марковские моменты, их примеры. σ-алгебра $\mathscr{F}_\tau$, состоящая из событий, наблюдаемых до марковского момента τ. Строго марковское свойство винеровского процесса. Принцип отражения. Закон нуля или единицы. Распределения, связанные с максимумом винеровского процесса на $[0,t]$. Закон повторного логарифма. Локальный закон повторного логарифма.

§ 1. При первом чтении этой главы можно ограничиться знакомством с доказательством марковского и строго марковского свойств броуновского движения (§ 2 и § 6). Для этого важно овладеть понятиями марковского момента τ (§ 3) и σ-алгебры событий $\mathscr{F}_\tau$ (§ 5). Желательно разобрать доказательство закона повторного логарифма для винеровского процесса (§ 11), для чего требуется усвоить формулировку результата следствия 1 из § 10, описывающего распределение максимума винеровского процесса на отрезке $[0,T]$.

Следующий результат показывает, сколь *нерегулярно* устроены траектории броуновского движения.

Теорема 1 (Пэли–Винер–Зигмунд). *С вероятностью единица траектории броуновского движения $W=\{W(t),\ t\geqslant 0\}$ не дифференцируемы ни в одной точке t полуоси $[0,\infty)$.*

Доказательство. Рассмотрим промежуток $[k,k+1)$, где $k\in\{0,1,\dots\}$. Для $\omega\in\Omega$ из дифференцируемости $W(\,\cdot\,,\omega)$ хотя бы в одной точке $s\in[k,k+1)$ вытекала бы дифференцируемость справа в s, а это влекло бы существование $q,l\in\mathbb{N}$ $(q=q(\omega,s),\, l=l(\omega,s,q(s,\omega)))$ таких, что

$$|W(t,\omega)-W(s,\omega)|\leqslant l(t-s)\ \text{ при всех }\ t\in[s,s+q^{-1})\subset[k,k+1). \tag{1}$$

Для $l,n,i\in\mathbb{N}$ (и фиксированного k) введем события

$$A_{l,n,i}=\left\{\omega\colon \left|W\left(k+\frac{j}{n},\omega\right)-W\left(k+\frac{j-1}{n},\omega\right)\right|\leqslant\frac{7l}{n}\ \text{при}\ j=i+1,i+2,i+3\right\}.$$

Рассмотрим l и q, фигурирующие в (1). Если $4/n<1/q$ и $i=i(s,n)$ $(i\in\{1,\dots,n\})$ выбрано так, что $k+(i-1)/n\leqslant s<k+i/n$, то для $j=i+1,i+2,i+3$ и ω,

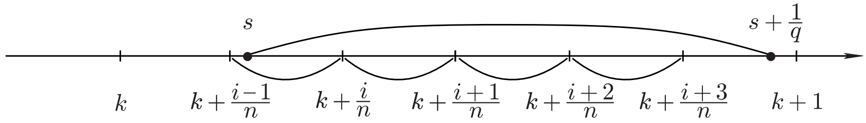

Рис. 10

удовлетворяющих (1) (см. рис. 10), получим

$$\begin{aligned}\left|W\left(k+\frac{j}{n},\omega\right)-W\left(k+\frac{j-1}{n},\omega\right)\right| &\leqslant \\ &\leqslant \left|W\left(k+\frac{j}{n},\omega\right)-W(s,\omega)\right|+\left|W(s,\omega)-W\left(k+\frac{j-1}{n},\omega\right)\right| \leqslant \\ &\leqslant l\cdot\frac{4}{n}+l\cdot\frac{3}{n}=\frac{7l}{n}.\end{aligned}$$

Поэтому, если для ω справедливо свойство (1), то $\omega\in\bigcap\limits_{n>4q}\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_{l,n,i}$. Введем множество $D_k=\{\omega\colon W(\,\cdot\,,\omega)$ дифференцируема хотя бы в одной точке $s\in[k,k+1)\}$ (если $s=k$, то подразумевается дифференцируемость справа). Из проведенных рассуждений следует, что

$$D_k\subset\bigcup_{q=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{n>4q}\bigcup_{i=1}^{n}A_{l,n,i}. \tag{2}$$

Заметим, что для любой последовательности событий $B_n\in\mathscr{F}$, $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\mathsf{P}(B_n).$$

Поэтому, принимая во внимание независимость приращений процесса W, для каждых $q,l\in\mathbb{N}$ получим, что

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(\bigcap_{n>4q}\bigcup_{i=1}^{n}A_{l,n,i}\right) &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_{l,n,i}\right)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A_{l,n,i})\leqslant \\ &\leqslant\liminf_{n\to\infty}n\left(\mathsf{P}\left(\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{7l}{n}\right)\right)^3= \\ &=\liminf_{n\to\infty}n\left(\mathsf{P}\left(|W(1)|\leqslant\frac{7l}{\sqrt{n}}\right)\right)^3\leqslant \\ &\leqslant\liminf_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{14\,l}{\sqrt{n}}\right)^3=0,\end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что $W(t)\sim\mathsf{N}(0,t)$ при $t\geqslant0$, а для $z>0$

$$\mathsf{P}(|W(1)|\leqslant z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z}^{z}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,2z.$$

(Теперь ясно, почему при определении $A_{l,n,i}$ надо было рассмотреть приращения процесса W на *трех* промежутках: $[(j-1)/n, j/n)$, $j = i+1, i+2, i+3$.)

Учитывая, что объединение счетного числа множеств меры нуль имеет меру нуль и что, как было оговорено ранее, вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ полно, получаем, что $\mathsf{P}(D_k) = 0$ для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$. Если D — множество точек ω, для которых $W(\,\cdot\,, \omega)$ дифференцируема хотя бы в одной точке $s \in [0, \infty)$, то $D = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} D_k$. Следовательно, $\mathsf{P}(D) = 0$. $\square$

Приведенное выше простое доказательство дано А. Дворецким, П. Эрдёшем и С. Какутани.

§ **2.** Покажем, что приращения винеровского процесса снова приводят к винеровскому процессу.

Определение 1. Случайная функция $X = \{X(t),\, t \in T\}$, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, называется *не зависящей от σ-алгебры $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$*, если независимы σ-алгебры $\sigma\{X_t,\, t \in T\}$ и $\mathscr{E}$.

Теорема 2 (марковское свойство винеровского процесса). *Для каждого числа $a \geqslant 0$ процесс $X = \{X(t) = W(t+a) - W(a),\, t \geqslant 0\}$ является винеровским процессом, не зависящим от σ-алгебры $\mathscr{F}_a^W = \sigma\{W(s)\colon 0 \leqslant s \leqslant a\}$.*

Доказательство. Очевидно, $X(0) = 0$, процесс $X = \{X(t),\, t \geqslant 0\}$ имеет непрерывные траектории, независимые приращения и $X(t) - X(s) = W(t+a) - W(s+a) \sim \mathsf{N}(0, t-s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$. Следовательно, процесс X является винеровским. Покажем теперь справедливость последнего утверждения теоремы.

В силу леммы 9 главы I достаточно проверить, что при любых $n, m \in \mathbb{N}$ и всех $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m \leqslant a$ независимы события

$$A_1 = \bigl\{X(t_0) \in B_0,\ X(t_1) \in B_1,\ \ldots,\ X(t_n) \in B_n\bigr\},$$
$$A_2 = \bigl\{W(s_0) \in C_0,\ W(s_1) \in C_1,\ \ldots,\ W(s_m) \in C_m\bigr\},$$

где $B_i, C_j \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ $(i = 0, \ldots, n;\ j = 0, \ldots, m)$. Векторы $\xi = (X(t_0), \ldots, X(t_n))$ и $\eta = (W(s_0), \ldots, W(s_m))$ получаются аналогично (II.2) с помощью линейных преобразований соответственно векторов $\widetilde{\xi} = (X(t_0),\, X(t_1) - X(t_0),\, \ldots,\, X(t_n) - X(t_{n-1}))$ и $\widetilde{\eta} = (W(s_0),\, W(s_1) - W(s_0),\, \ldots,\, W(s_m) - W(s_{m-1}))$. Независимость $\widetilde{\xi}$ и $\widetilde{\eta}$ вытекает из независимости приращений процесса $W = \{W(t),\, t \geqslant 0\}$. Поэтому (как функции от независимых векторов) независимы ξ и η. Следовательно, независимы события A_1 и A_2. $\square$

§ **3.** Естественно возникает вопрос: *можно ли обобщить теорему* 2, *взяв вместо константы a случайную величину*? Оказывается, это можно сделать для определенного класса случайных величин.

Определение 2. Пусть $(\Omega, \mathscr{F})$ — измеримое пространство, $T \subset \mathbb{R}$ и $\mathbb{F}_T = (\mathscr{F}_t)_{t \in T}$ — некоторый *поток* σ-алгебр в $\mathscr{F}$ ("фильтрация"), т.е. $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ для $s \leqslant t$ $(s, t \in T)$ и $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}$ при всех $t \in T$. *Естественной фильтрацией* процесса $X = \{X(t), t \in T\}$ называется поток σ-алгебр $\mathscr{F}_t^X = \sigma\{X(s),\, s \leqslant t,\, s \in T\}$, $t \in T$. Иначе говоря, σ-алгебра $\mathscr{F}_t^X$ при каждом $t \in T$ порождается *течением процесса* на промежутке $(-\infty, t] \cap T$.

Доказательство. Для $0 \leqslant t_1 < \dots < t_n$ ($t_k \in T$, $k = 1, \dots, n$), $n \geqslant 2$, и любых $j_1, \dots, j_n \in \mathsf{S}$, обозначив $A = \{X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_{n-1}} = j_{n-1}\}$, имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_n} = j_n) &= \mathsf{P}(X_{t_n} = j_n \mid A)\mathsf{P}(A) = \\ &= \mathsf{P}(X_{t_n} = j_n \mid X_{t_{n-1}} = j_{n-1})\mathsf{P}(A) = \\ &= \mathsf{P}(X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_{n-1}} = j_{n-1}) \cdot p_{j_{n-1},j_n}(t_{n-1}, t_n).\end{aligned}$$

Этот вывод, основанный на определении условной вероятности и формуле (18), предполагает, что $\mathsf{P}(X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_{n-1}} = j_{n-1}) \neq 0$. Однако полученное равенство справедливо и при $\mathsf{P}(X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_{n-1}} = j_{n-1}) = 0$ (функция $p_{j_{n-1},j_n}(t_{n-1}, t_n)$ всегда определена, согласно замечанию 2).

Таким образом, приходим к формуле

$$\mathsf{P}(X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_n} = j_n) = \mathsf{P}(X_{t_1} = j_1) \cdot p_{j_1,j_2}(t_1, t_2) \cdots p_{j_{n-1},j_n}(t_{n-1}, t_n), \quad (23)$$

имеющей вполне наглядный смысл. А именно, будем считать, что в момент t_1 некоторая “система” начинает свое движение из состояния j_1, переходя за время от t_1 до t_2 в состояние $j_2, \dots$, за время от t_{n-1} до t_n система совершает переход из j_{n-1} в j_n. Тогда формула (23) означает, что для подсчета вероятности “маршрута” $\{X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_n} = j_n\}$ надо поступить следующим (весьма естественным образом, если принимать во внимание, что рассматриваемая система функционирует по принципу “беспоследействия”): взять вероятность начального состояния $\mathsf{P}(X_{t_1} = j_1)$ и умножить ее на (условные) вероятности переходов “системы” ($j_{k-1} \to j_k$) за соответствующее время от t_{k-1} до t_k, где $k = 2, \dots, n$.

По формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}(X_{t_1} = j_1) = \sum_i p_i(0) p_{ij_1}(0, t_1),$$

что позволяет, в силу (23), для любого $B \subset \mathsf{S}^n$ найти искомое выражение *конечномерных распределений*:

$$\mathsf{P}\big((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B\big) = \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in B} \sum_i p_i(0) p_{ij_1}(0, t_1) \cdots p_{j_{n-1},j_n}(t_{n-1}, t_n). \ \square \quad (24)$$

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 5. *Пусть* $0 \in T \subset [0, \infty)$, *а некоторые непустые множества* $\mathsf{S}_s \subset \mathsf{S}$, $s \in T$, *где* S — *конечно или счетно. Пусть задан набор* $p_i(0) > 0$, $i \in \mathsf{S}_0$, *такой, что* $\sum_{i \in \mathsf{S}_0} p_i(0) = 1$, *и заданы функции* $p_{ij}(s, t)$ *при* $s \leqslant t$ ($s, t \in T$), $i \in \mathsf{S}_s$, $j \in \mathsf{S}_t$, *для которых выполнены приведенные в* §7 *условия* 1)–4). *Тогда на некотором вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *существует марковская цепь* $X = \{X_t,\ t \in T\}$ *с пространством состояний* S_t *при каждом* $t \in T$ (*т. е.* $X_t(\omega) \in \mathsf{S}_t$ *при любом* $t \in T$ *для всех* $\omega \in \Omega$) *такая, что справедливы соотношения* (22) *и* (19).

Доказательство. Если бы марковский процесс X с данными характеристиками (22) и (19) существовал, то его конечномерные распределения должны были бы определяться формулой (24). Поэтому ничего другого не остается, как ввести меры $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}$ на $\mathscr{B}^n$ (для $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$) с помощью правой части равенства (24) и проверить их согласованность. То, что при этом на $\mathscr{B}^n$ возникают вероятностные меры, обеспечивается требованиями, налагаемыми в условиях теоремы на $p_i(0)$ и $p_{ij}(s,t)$ (счетная аддитивность имеет место, поскольку ряды из неотрицательных чисел можно суммировать в любом порядке). Для согласованности мер $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}$ в силу замечания 3 главы I достаточно убедиться лишь в выполнении условия 3° § 11 главы I. Оно верно в силу условий 2), 3) и 4), которым удовлетворяют функции $p_{ij}(s,t)$; условие 3) обеспечивает согласованность, когда рассматриваются и не только несовпадающие друг с другом точки $t_1,\ldots,t_n$. Следовательно, по теореме Колмогорова существует процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ с данными конечномерными распределениями $\mathsf{P}_{t_1,\ldots,t_n}$ $(0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n,\ n \in \mathbb{N})$. Этот процесс будет марковским, поскольку (24) влечет (23), откуда немедленно вытекает (18), а также (19). Кроме того, полагая в (24) $n = 1$ и $t_1 = 0$, получаем (22). □

§ **9.** Важнейшим представителем марковских цепей с непрерывным временем является *пуассоновский процесс*, определенный в § 2 главы II.

Теорема 6. *Процесс $N = \{N_t,\ t \geqslant 0\}$ является пуассоновским (с ведущей локально-конечной мерой m на $\mathscr{B}([0,\infty)$, $m([0,\infty) = \infty)$ тогда и только тогда, когда N — цепь Маркова с пространством состояний $\mathsf{S} = \{0,1,2,\ldots\}$, для которой $p_i(0) = \delta_{i0}$ и переходные вероятности*

$$p_{ij}(s,t) = \begin{cases} \dfrac{(m((s,t]))^{j-i}}{(j-i)!} e^{-m((s,t])}, & j \geqslant i, \\ 0, & j < i, \end{cases} \tag{25}$$

где $0 \leqslant s < t$, $i,j \in \mathsf{S}$ и $p_{ij}(s,s) = \delta_{ij}$ для $s \geqslant 0$, $i,j \in \mathsf{S}$ (0^0 считается равным 1).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть N — пуассоновский процесс: $N_0 = 0$ п. н., процесс имеет независимые приращения и $N_t - N_s \sim \pi_{m((s,t])}$ при $t > s \geqslant 0$, т. е. приращение $N_t - N_s$ распределено по закону Пуассона с параметром $m((s,t])$. В силу теоремы 3 процесс N является марковским, при этом п. н. $N_t = N_t - N_0 \sim \pi_{m((0,t])}$, $t > 0$, и $\mathsf{P}(N_t \in \mathsf{S}) = 1$, где $\mathsf{S} = \{0,1,\ldots\}$. Очевидно также, что $p_i(0) = \mathsf{P}(N_0 = i) = \delta_{i0}$, $i \in \mathsf{S}$.

Для $0 \leqslant s < t$ имеем

$$p_{ij}(s,t) = \mathsf{P}(N_t = j \mid N_s = i) = \frac{\mathsf{P}(N_t - N_s = j - i,\ N_s = i)}{\mathsf{P}(N_s = i)} = \mathsf{P}(N_t - N_s = j - i),$$

что в силу указанного свойства распределений $N_t - N_s$ дает формулу (25). При $s \geqslant 0$ для всех $i,j \in \mathsf{S}$ находим, что $p_{ij}(s,s) = \mathsf{P}(N_s = j \mid N_s = i) = \delta_{ij}$.

Достаточность. Пусть $N = \{N_t,\ t \geqslant 0\}$ — цепь Маркова с переходными вероятностями (25) и начальным распределением, сосредоточенным в нуле. Очевидно, С учетом леммы 3 и равенства $\mathsf{D}\Big(S_n\big(t_{n,i}^{(2)}\big) - S_n\big(t_{n,i}^{(1)}\big)\Big) = t_{n,i}^{(2)} - t_{n,i}^{(1)}$ находим

$$p_{n,i} \leqslant 2\mathsf{P}\Big(\Big|S_n\big(t_{n,i}^{(2)}\big) - S_n\big(t_{n,i}^{(1)}\big)\Big| > \big(\lambda - \sqrt{2}\,\big)\sqrt{t_{n,i}^{(2)} - t_{n,i}^{(1)}}\,\Big),$$

где $\lambda = \nu \Big/ \Big(2\sqrt{t_{n,i}^{(2)} - t_{n,i}^{(1)}}\,\Big)$, i и n — те же, что и выше.

Пусть $t_{n,i}^{(1)} = t_{n,j_i}$, $t_{n,i}^{(2)} = t_{n,r_i}$, $j_i = j_i(n)$, $r_i = r_i(n)$. Рассмотрим в n-й серии величины с номерами l из множества $J_i^{(n)} = \{l\colon j_i < l \leqslant r_i\}$, $i = 1,\dots,N$. Обозначим $S_n^{(i)} = \sum\limits_{l\in J_i^{(n)}} X_{n,l} = S_n\big(t_{n,i}^{(2)}\big) - S_n\big(t_{n,i}^{(1)}\big)$. Тогда в силу (24) и (16) для любого $\nu > 0$

$$\sum_{l\in J_i^{(n)}} \mathsf{E}\left(\frac{X_{n,l}}{\sqrt{\mathsf{D}S_n^{(i)}}}\right)^2 \mathbf{1}\left\{\frac{|X_{n,l}|}{\sqrt{\mathsf{D}S_n^{(i)}}} > \nu\right\} \leqslant N\sum_{i=1}^{m_n} \mathsf{E}\,|X_{n,i}|^2\mathbf{1}\Big\{|X_{n,i}| > \frac{\nu}{\sqrt{N}}\Big\} \to 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно, по одномерной (т.е. при $k = 1$; см. начало § 7) теореме Линдеберга для $i = 1,\dots,N$ и любого $\nu > 0$ имеем при всех $n > n_0(\varepsilon,\nu,N)$

$$\Big|\mathsf{P}\Big(\big|S_n^{(i)}\big| > \big(\lambda - \sqrt{2}\,\big)\sqrt{\mathsf{D}S_n^{(i)}}\,\Big) - \mathsf{P}\Big(|\xi| > \lambda - \sqrt{2}\,\Big)\Big| < \varepsilon/(2N), \tag{26}$$

где $\xi \sim \mathsf{N}(0,1)$. Здесь мы воспользовались тем, что в центральной предельной теореме сходимость функций распределения *равномерна* на всей оси; см. упражнение 12. Согласно (24) при всех достаточно больших n для $i = 1,\dots,N$ получаем $\lambda \geqslant \nu\sqrt{N}/(2\sqrt{2}\,)$. Поэтому, если $N = N(\varepsilon,\nu)$ достаточно велико, то применив (II.29), придем к оценке

$$\mathsf{P}\big(|\xi| > \lambda - \sqrt{2}\,\big) < \varepsilon/2N.$$

Из последнего неравенства, (25) и (26) заключаем, что $\sum\limits_{i=1}^{N} p_{n,i} < \varepsilon$. В силу теоремы 7 и замечания 1 плотность семейства мер $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geqslant 1}$ установлена. Вместе с соотношением (21) это завершает доказательство теоремы 8. □

§ **9.** Наметим схему, по которой с помощью изложенной теории слабой сходимости можно доказать один из центральных результатов математической статистики — *критерий согласия Колмогорова*.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные действительные величины, имеющие функцию распределения $F = F(x)$. Определим согласно (I.34) *эмпирические меры* P_n. Взяв $B = (-\infty, x]$, получим *эмпирические функции распределения*

$$F_n(x,\omega) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty,x]}(\xi_i(\omega)), \qquad n \geqslant 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теорема 10 (Колмогоров). *Если функция распределения $F = F(x)$ непрерывна, то для всех $z > 0$ при $n \to \infty$*

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{-\infty<x<\infty} \sqrt{n}\,|(F_n(x,\omega) - F(x))| \leqslant z\Big) \to 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}e^{-2k^2z^2} = K(z). \tag{27}$$

Доказательство. Воспользовавшись заменой $\zeta_i = F^{\mathrm{inv}}(\xi_i)$, $i \geqslant 1$, где

$$F^{\mathrm{inv}}(t) = \inf\{x\colon F(x) \geqslant t\}, \qquad t \in [0,1],$$

— обобщенная обратная функция к функции $F = F(z)$, можно (учитывая непрерывность функции F) свести все рассмотрения к тому случаю, когда величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеют *равномерное* распределение на $[0,1]$. Таким образом, надо доказать, что для таких величин при всех $z \geqslant 0$

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |Y_n(t)| \leqslant z\Big) \to K(z), \qquad n \to \infty, \tag{28}$$

где $Y_n(t) = \sqrt{n}\,(F_n(t) - t)$, $t \in [0,1]$.

Определим функционал $h(x(\cdot)) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$. Естественно напрашивающийся путь доказательства (28) состоит в том, чтобы найти слабый предел распределений $Y_n(\cdot)$ и затем воспользоваться теоремой 2. Сложность заключается в том, что процессы Y_n имеют разрывные траектории (они принадлежат пространству Скорохода $D[0,1]$). Однако доказательство утверждения (28) можно дать и в рамках изложенной выше теории.

Пусть $\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(n)}$ — *вариационный ряд*, построенный по $\xi_1, \ldots, \xi_n$, т. е. при каждом ω величины $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ перенумерованы в порядке возрастания (п. н. все точки $\xi_1, \ldots, \xi_n$ различны). Пусть при каждом ω функция $G_n(t,\omega)$, $t \in [0,1]$, есть непрерывная случайная ломаная с узлами $(i/(n+1), \xi_{(i)}(\omega))$, $i = 0, \ldots, n+1$, где $\xi_{(0)}(\omega) = 0$, $\xi_{(n+1)}(\omega) = 1$. Так определенные функции $G_n(\cdot,\omega)$ (см. рис. 16) являются случайными элементами в пространстве $C[0,1]$ по теореме 7 главы I. Заметим, что

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |F_n(t) - G_n(t)| \leqslant n^{-1} \quad \text{п. н.},$$

поскольку $F_n(t,\omega) = i/n$ для $t \in [\xi_{(i)}(\omega), \xi_{(i+1)}(\omega))$, $i = 0, \ldots, n$.

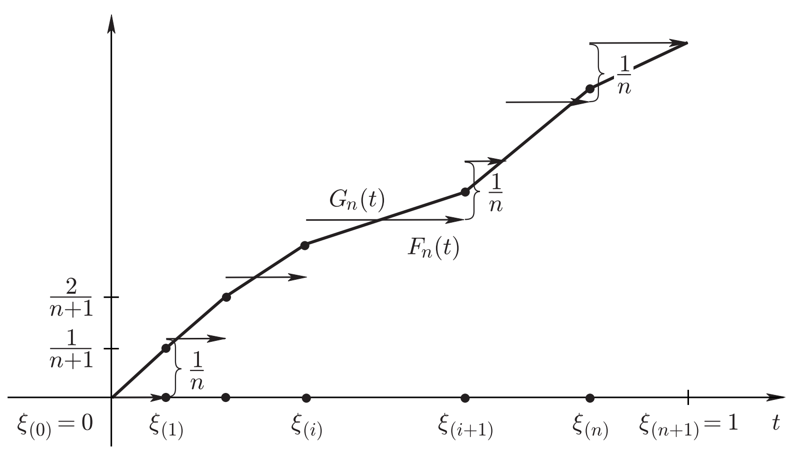

Рис. 16

Обозначая $Z_n(t) = \sqrt{n}\,(G_n(t) - t)$, $t \in [0,1]$, находим, что с вероятностью единица

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |Y_n(t) - Z_n(t)| \leqslant n^{-1/2}.$$

Следовательно, предельное распределение случайной величины $h(Y_n(\,\cdot\,))$ будет совпадать с предельным распределением случайной величины $h(Z_n(\,\cdot\,))$.

Доказательство теоремы Колмогорова сводится, тем самым, к проверке следующих двух утверждений:

1) $Z_n \xrightarrow{\mathscr{D}} W^0$ в $C[0,1]$ при $n \to \infty$, здесь W^0 — *броуновский мост*, определяемый как процесс $W^0(t) = \{W(t) - tW(1), t \in [0,1]\}$, где $W = \{W(t), t \in [0,1]\}$ — винеровский процесс на отрезке $[0,1]$;
2) $\mathsf{P}\Big(\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |W_0(t)| \leqslant z\Big) = K(z)$, $z \geqslant 0$.

Первое из этих утверждений доказывается по той же схеме, что и теорема 8 ("сходимость конечномерных распределений и плотность"). Соответствующее доказательство см., например, в [2; гл. 2, § 13].

Остановимся на доказательстве второго утверждения.

Определим семейство (условных) вероятностных мер на $(C[0,1], \mathscr{B}(C[0,1]))$

$$\mathbb{Q}_\varepsilon(C) = \mathsf{P}\big(W(\,\cdot\,) \in C \mid W(1) \in [-\varepsilon, \varepsilon]\big), \qquad \varepsilon > 0. \tag{29}$$

Лемма 4. *Если $\varepsilon \downarrow 0$, то $\mathbb{Q}_\varepsilon \Rightarrow \mathbb{W}^0$, где $\mathbb{W}^0$ — распределение броуновского моста в $C[0,1]$.*

Доказательство. В силу теоремы 1 (которая, очевидно, верна для мер, индексированых параметром $\varepsilon > 0$) достаточно показать, что

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{Q}_\varepsilon(F) \leqslant \mathsf{P}(W^0 \in F), \tag{30}$$

где F — произвольное замкнутое множество из $\mathscr{B}(C[0,1])$.

Для любых $0 \leqslant t_1 < \dots < t_k \leqslant 1$, $k \in \mathbb{N}$, вектор $(W^0(t_1), \dots, W^0(t_k))$ не зависит от $W(1)$. Действительно, $(W^0(t_1), \dots, W^0(t_k), W(1))$ имеет гауссовское распределение как линейное преобразование гауссовского вектора. Кроме того, $\mathsf{E}\,W^0(t)W(1) = \mathsf{E}\,W(t)W(1) - t\mathsf{E}\,W(1)^2 = \min\{t,1\} - t = 0$, $t \in [0,1]$, что и влечет указанную независимость.

Таким образом, для любого цилиндрического множества $C \in \mathscr{B}(C[0,1])$ и любого множества $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$\mathsf{P}\big(W^0(\,\cdot\,) \in C,\ W(1) \in B\big) = \mathsf{P}(W^0 \in C)\,\mathsf{P}(W(1) \in B). \tag{31}$$

Поскольку цилиндры образуют алгебру, порождающую $\mathscr{B}(C[0,1])$, то по лемме 3 главы I равенство (31) справедливо для любого множества $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ и всех множеств $C \in \mathscr{B}(C[0,1])$. Следовательно,

$$\mathsf{P}\big(W^0(\,\cdot\,) \in C \mid W(1) \in [-\varepsilon, \varepsilon]\big) = \mathsf{P}\big(W^0(\,\cdot\,) \in C\big)$$

при каждом $\varepsilon > 0$.

Определение 8. Случайная функция $X = \{X(t),\, t \in T\}$ (действительная или комплекснозначная) называется *L^2-процессом*, если $\mathsf{E}\,|X(t)|^2 < \infty$ для $t \in T$. *Ковариационная функция* $r = r(s,t)$ этого процесса вводится формулой

$$r(s,t) = \mathsf{E}\,\big(X(s) - \mathsf{E}\,X(s)\big)\overline{\big(X(t) - \mathsf{E}\,X(t)\big)}, \qquad s,t \in T. \tag{14}$$

Определение 9. Пусть $\xi(t), \eta(t)$ — действительные процессы. Случайная функция $X = \{X(t) = \xi(t) + i\eta(t),\, t \in T\}$ со значениями в $\mathbb{C}$ называется *гауссовской*, если $\{(\xi(t), \eta(t)),\, t \in T\}$ — гауссовский процесс в $\mathbb{R}^2$, т.е. для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех $t_1, \ldots, t_n \in T$ вектор $(\xi(t_1), \eta(t_1), \ldots, \xi(t_n), \eta(t_n))$ является гауссовским.

Теорема 4. *Для всех $s,t \in T$ класс неотрицательно определенных комплекснозначных функций $R = R(s,t)$ совпадает с классом ковариационных функций $r = r(s,t)$ L^2-процессов $X = \{X(t),\, t \in T\}$ и, более того, совпадает с классом ковариационных функций комплекснозначных гауссовских процессов $X = \{X(t),\, t \in T\}$.*

Доказательство. Если $X = \{X(t),\, t \in T\}$ есть L^2-процесс, то для каждого $n \in \mathbb{N}$, любых $t_1, \ldots, t_n \in T$ и всех $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ имеем

$$\sum_{k,m=1}^{n} z_k \bar{z}_m r(t_k, t_m) = \mathsf{E}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k X(t_k)\right|^2 \geqslant 0,$$

т.е. ковариационная функция $r = r(s,t)$ является неотрицательно определенной.

Пусть теперь $R = R(s,t)$, $s,t \in T$, — неотрицательно определенная функция. Положим $R_1(s,t) = \operatorname{Re} R(s,t)$ и $R_2(s,t) = \operatorname{Im} R(s,t)$, $s,t \in T$. Для $z_k = u_k + iv_k$, $k = 1, \ldots, n$, неравенство (13) после выделения действительной и мнимой частей примет вид

$$\sum_{k,m=1}^{n} R_1(t_k, t_m)(u_k u_m + v_k v_m) + \sum_{k,m=1}^{n} R_2(t_k, t_m)(u_k v_m - v_k u_m) +$$
$$+ i\Bigg[\sum_{k,m=1}^{n} R_1(t_k, t_m)(v_k u_m - u_k v_m) + \sum_{k,m=1}^{n} R_2(t_k, t_m)(u_k u_m + v_k v_m)\Bigg] \geqslant 0. \tag{15}$$

Из (13) при $n = 1$ видим, что $R(t,t) \geqslant 0$ для всех $t \in T$. При $n = 2$, любых $t_1, t_2 \in T$ и $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ согласно (13) имеем

$$|z_1|^2 R(t_1, t_1) + z_1 \overline{z}_2 R(t_1, t_2) + \overline{z}_1 z_2 R(t_2, t_1) + |z_2|^2 R(t_2, t_2) \geqslant 0.$$

Следовательно, $z_1 \overline{z}_2 R(t_1, t_2) + \overline{z}_1 z_2 R(t_2, t_1)$ — действительное число. В частности, при $z_1 = z_2 = 1$ получаем, что $R(t_1, t_2) + R(t_2, t_1) \in \mathbb{R}$ для всех $t_1, t_2 \in T$. Выбрав $z_1 = 1$, $z_2 = i$, приходим к тому, что $R(t_1, t_2) - R(t_2, t_1)$ есть чисто мнимое число. Таким образом, $R_1(s,t) = R_1(t,s)$ и $R_2(s,t) = -R_2(t,s)$ при $s,t \in T$. Иначе говоря, $R(s,t) = \overline{R(t,s)}$ для любых $s,t \in T$, т.е. имеет место свойство *эрмитовой сопряженности* функции $R(s,t)$. Поэтому неравенство (15) можно переписать в виде $\langle C\lambda, \lambda\rangle \geqslant 0$, где $\lambda = (u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$, $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2n}$, а матрица C — симметричная неотрицательно определенная с действительными элементами, состоящая из четырех блоков:

$$C = \left(\begin{array}{c|c} R_1(t_k, t_m) & R_2(t_k, t_m) \\ \hline -R_2(t_k, t_m) & R_1(t_k, t_m) \end{array}\right)_{k,m=1,\ldots,n}. \tag{16}$$

В силу замечания 4 главы I существует гауссовский процесс $\{(\xi(t), \eta(t)),\ t \in T\}$ со значениями в $\mathbb{R}^2$ при каждом t такой, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $t_1, \ldots, t_n \in T$ вектор $(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n), \eta(t_1), \ldots, \eta(t_n)) \sim \mathsf{N}(0, C)$, где матрица ковариаций C задается формулой (16). Возьмем

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\bigl(\xi(t) - i\eta(t)\bigr), \qquad t \in T. \tag{17}$$

Тогда для $s, t \in T$ (принимая во внимание, что $-R_2(t,s) = R_2(s,t)$, $s, t \in T$) имеем

$$\mathsf{E}\, X(s)\overline{X(t)} = \frac{1}{2}\bigl(R_1(s,t) - iR_2(t,s) + iR_2(s,t) + R_1(s,t)\bigr) = R(s,t). \ \square$$

Пример 2. Пусть $f(t)$ — комплекснозначная (в частности, действительная) функция, определенная на некотором множестве T. Тогда функция

$$R(s,t) = f(s)\overline{f(t)}, \qquad s, t \in T,$$

является неотрицательно определенной.

Действительно, справедливость условия (13) очевидна.

Замечание 4. Если функция $R = R(s,t)$ является неотрицательно определенной на множестве $T \times T$, то при любой константе $c \geqslant 0$ этим же свойством обладает функция $cR(s,t)$. Пусть $R_n = R_n(s,t)$ — неотрицательно определенные функции на $T \times T$ при $n = 1, \ldots, N$. Тогда функция $\sum\limits_{n=1}^{N} R_n(s,t)$ неотрицательно определена на $T \times T$. Если $R_n(s,t) \to R(s,t)$ при $n \to \infty$ для каждых $s, t \in T$, то функция $R = R(s,t)$ также является неотрицательно определенной (на $T \times T$).

Определение 10. Функция $\varphi = \varphi(t)$, где $t \in T \subset \mathbb{R}$, называется *неотрицательно определенной*, если $s - t \in T$ при $s, t \in T$ и функция $R(s,t) = \varphi(s-t)$ неотрицательно определена.

Пусть ξ — действительная случайная величина с характеристической функцией $\varphi = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Легко видеть, что φ является неотрицательно определенной функцией на $\mathbb{R}$. Таким образом, получаем

Пример 3. Следующие функции являются ковариационными функциями L^2-процессов, заданных на $\mathbb{R}$:

$$r(s,t) = \cos(s-t), \quad r(s,t) = \exp\{ia(s-t) - (s-t)^2\sigma^2/2\}, \quad \text{где} \quad a \in \mathbb{R}, \quad \sigma \geqslant 0;$$
$$r(s,t) = \exp\{-\lambda|s-t|\}, \quad r(s,t) = \exp\{\lambda(\exp\{i(s-t)\} - 1)\}, \quad \text{где} \quad \lambda > 0;$$
$$r(s,t) = (a - b|s-t|)\mathbf{1}_{[-a/b, a/b]}(s-t), \quad \text{где} \quad a \geqslant 0, \quad b > 0.$$

Определение 4. Для функций $f \in L^2(\Lambda)$ положим

$$J(f) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, J(f_n) \quad (\text{l.i.m.} \text{ — предел в } L^2(\Omega)), \tag{9}$$

где $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность простых функций таких, что $f_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f$ при $n \to \infty$.

Докажем, что определение 4 корректно. По лемме 2 существует последовательность простых функций $f_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f$ при $n \to \infty$. Пользуясь следствием 1 и леммой 1, имеем, обозначив $\|\cdot\|$ норму в $L^2(\Omega)$,

$$\|J(f_n) - J(f_m)\| = \|J(f_n - f_m)\| = |f_n - f_m| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty,$$

где $|\cdot|$ — норма в $L^2(\Lambda)$, поскольку сходящаяся последовательность $\{f_n\}$ является *фундаментальной.* В силу того, что пространство $L^2(\Omega)$ полно, получаем, что существует предел $J(f_n)$ в $L^2(\Omega)$. Покажем, что этот предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности простых функций. Пусть $g_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f$, где g_n — простые функции. Тогда $|g_n - f_n| \leqslant |g_n - f| + |f_n - f| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\|J(f_n) - J(g_n)\| = \|J(f_n - g_n)\| = |f_n - g_n| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Но если $J(f_n) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \xi$ и $J(g_n) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \zeta$, то $J(f_n) - J(g_n) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \xi - \zeta$. Таким образом, $\|J(f_n) - J(g_n)\| \to \|\xi - \zeta\| = 0$, т.е. $\xi = \zeta$ п.н. $\square$

Следствие 2. *Для любых функций $f, g \in L^2(\Lambda)$*

$$(J(f), J(g)) = \langle f, g\rangle; \tag{10}$$

$J(f)$ есть линейное отображение $L^2(\Lambda)$ в $L^2(\Omega)$. Пусть $h_n \in L^2(\Lambda)$ (необязательно простые) и $h_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f$. Тогда

$$J(h_n) \xrightarrow{L^2(\Omega)} J(f), \qquad n \to \infty. \tag{11}$$

Доказательство. Для проверки свойства (10) достаточно взять простые функции $f_n, g_n, n \geqslant 1$, такие что $f_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f$, $g_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} g$ (см. лемму 2), воспользоваться леммой 1 и учесть непрерывность скалярного произведения. Линейность $J = J(f)$ устанавливается так же, как при доказательстве следствия 1. Пользуясь линейностью J и соотношением (10), имеем

$$\|J(f) - J(h_n)\| = \|J(f - h_n)\| = |f - h_n| \to 0, \qquad n \to \infty. \ \square$$

§ **6.** Приведенная выше конструкция интеграла $J(f)$ для $f \in L^2(\Lambda) = L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$ предполагала, что $\mu(\Lambda) < \infty$. Рассмотрим теперь построение интеграла $J(f)$ для функций $f \in L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$ в том случае, когда μ есть σ-конечная мера.

Рассмотрим разбиение множества Λ на множества $\Lambda_n \in \mathscr{K}$ с $\mu(\Lambda_n) < \infty$, $n \geqslant 1$. Тогда

$$f \in L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu) \iff \begin{cases} f_n := f\big|_{\Lambda_n} \in L^2(\Lambda_n, \mathscr{A}_n, \mu_n), \quad n \geqslant 1, \\ \displaystyle\int_\Lambda |f(\lambda)|^2 \, \mu(d\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Lambda_n} |f_n(\lambda)|^2 \, \mu_n(d\lambda) < \infty, \end{cases} \tag{12}$$

где $\mathscr{A}_n = \sigma\{\mathscr{K}_n\}$, μ_n — лебегово продолжение меры $\mu\big|_{\mathscr{K}_n}$ с $\mathscr{K}_n = \mathscr{K} \cap \Lambda_n$ на $\mathscr{A}_n$. При этом значение интеграла $\int_\Lambda |f(\lambda)|^2 \, \mu(d\lambda)$ не зависит от выбора разбиения Λ на $\Lambda_n \in \mathscr{K}$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 5. Для функции $f \in L^2(\Lambda)$ введем интеграл $J(f)$ по ортогональной случайной мере Z формулой

$$J(f) = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(f_n), \tag{13}$$

где ряд сходится в $L^2(\Omega)$, функции f_n фигурируют в (12), отображения J_n определены на $L^2(\Lambda_n)$ описанным выше способом (индекс n подчеркивает связь с Λ_n и μ_n).

Проверим корректность определения (13). Если $f \in L^2(\Lambda)$, то, согласно (12), имеем $f_n \in L^2(\Lambda_n)$ для всех $n \geqslant 1$. Теперь заметим, что $J_n(f_n) - J_m(f_m)$ при $n \neq m$. Действительно, если f_n и f_m — простые функции, то это — очевидно, так как $(Z(B), Z(D)) = 0$ для $B \in \mathscr{E}_n$ и $D \in \mathscr{E}_m$ ($\mathscr{E}_n$ — алгебра, порожденная $\mathscr{K}_n$ в Λ_n, $n \in \mathbb{N}$). Для функций f_n и f_m, не являющихся простыми, надо взять их аппроксимации простыми функциями. Следовательно,

$$\left\| \sum_{n=1}^{M} J_n(f_n) - \sum_{n=1}^{N} J_n(f_n) \right\|^2 = \sum_{n=M\wedge N}^{M\vee N} \|J_n(f_n)\|^2 = \sum_{n=M\wedge N}^{M\vee N} \int_{\Lambda_n} |f_n(\lambda)|^2 \, \mu_n(d\lambda) \to 0$$

при $N, M \to \infty$ в силу изометричности J_n и сходимости ряда в (12).

Покажем, что величина $J(f)$ не зависит от вида разбиения Λ. Пусть $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} ?_n$, $?_n \in \mathscr{K}$, $?_n \cap ?_m = \varnothing$ $(n \neq m)$, $\mu(?_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $h_{n,m} = f\big|_{\Lambda_n \cap \Gamma_m}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда $f_n = f\big|_{\Lambda_n} = \sum_{m=1}^{\infty} f\big|_{\Lambda_n \cap \Gamma_m}$, $n \in \mathbb{N}$. Теперь заметим, что $\sum_{m=1}^{N} h_{n,m} \overset{L^2(\Lambda_n)}{\longrightarrow} f_n$ при $N \to \infty$ и, значит, в силу (11)

$$J_n(f_n) = \sum_{m=1}^{\infty} J_n(h_{n,m}),$$

где ряд сходится в $L^2(\Omega)$. По построению $J_{n,m}$ для $h \in L^2(\Lambda_n \cap ?_m) \subset L^2(\Lambda_n)$ имеем $J_{n,m}(h) = J_n(h)$, $n, m \geqslant 1$. Учитывая, что счетное объединение множеств меры нуль имеет меру нуль, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n(f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_{n,m}(h_{n,m}).$$

Аналогично, обозначив $g_m = f\big|_{\Gamma_m}$ и $\widetilde{J}_m$ — отображение, которое строится на $L^2(?\,_m)$ так же, как J_n на $L^2(\Lambda_n)$, $m, n \geqslant 1$, имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{J}_m(g_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_{n,m}(h_{n,m}).$$

Остается учесть, что $J_{n,m}(h_{n,m}) - J_{k,l}(h_{k,l})$, если $(n,m) \neq (k,l)$, и то, что данные ряды из ортогональных величин можно суммировать в любом порядке, поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \|J_{n,m}(h_{n,m})\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \|h_{n,m}\|^2_{L^2(\Lambda_n \cap \Gamma_m)} = \int_{\Lambda} |f(\lambda)|^2 \, \mu(d\lambda) < \infty. \ \square$$

Для действия J (см. (13)) на функции $f \in L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$ обычно используется *интегральная запись*

$$J(f) = \int_{\Lambda} f(\lambda) \, Z(d\lambda). \tag{14}$$

Интеграл в правой части (14) принято называть *стохастическим интегралом* по ортогональной случайной мере Z (от детерминированной функции $f \in L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$; сравните данное определение с определением в главе VIII стохастического интеграла Ито от *случайных* функций $f = f(\lambda; \omega)$).

§ **7.** Основное свойство введенного стохастического интеграла $J = J(f)$ содержит следующая теорема.

Теорема 2. *Стохастический интеграл* (14) *является изометрическим отображением* $L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$ (*где* μ *есть* σ*-конечная мера*) *на некоторое подпространство* $L^2_Z \subset L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. *При этом* Z *продолжается до ортогональной меры* (*со структурной функцией* μ) *на систему множеств* $\mathscr{G} = \{B \in \mathscr{A} \colon \mu(B) < \infty\}$ *по формуле*

$$Z(B) = J(\mathbf{1}_B). \tag{15}$$

Доказательство. Случай, когда $\mu(\Lambda) < \infty$, был подробно разобран выше. Надо рассмотреть лишь случай $\mu(\Lambda) = \infty$. Пусть $\Lambda = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$, где $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ — разбиение Λ и $\mu(\Lambda_n) < \infty$, $n \geqslant 1$. Возьмем $f, g \in L^2(\Lambda)$. Тогда $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, $g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$, где $f_n = f\big|_{\Lambda_n}$, $g_n = g\big|_{\Lambda_n}$, причем ряды сходятся в $L^2(\Lambda)$. Отсюда

$$\begin{aligned}
(Jf, Jg) &= \Big(\sum_n J_n f_n, \sum_m J_m g_m\Big) = \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{N} J_n f_n, \sum_{m=1}^{N} J_m g_m\Big) = \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (J_n f_n, J_n g_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle f_n, g_n \rangle = \\
&= \lim_{N\to\infty} \Big\langle \sum_{n=1}^{N} f_n, \sum_{m=1}^{N} g_m \Big\rangle = \langle f, g \rangle,
\end{aligned} \tag{16}$$

где учтено то, что $J_n(f_n) - J_m(g_m)$ при $n \neq m$ и то, что

$$\langle f_n, g_n \rangle_{L^2(\Lambda_n)} = \langle f\mathbf{1}_{\Lambda_n}, g\mathbf{1}_{\Lambda_n} \rangle_{L^2(\Lambda)}.$$

Итак, J — это изометрия. Очевидно, образ $L^2(\Lambda)$ при изометрии J есть подпространство в $L^2(\Omega)$, обозначенное L^2_Z. Для $B \in \mathscr{K}$ имеем $\mu(B) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) < \infty$, где $B_n = B \cap \Lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$. Далее, $\mathbf{1}_B \in L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$ и $\mathbf{1}_B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_n}$, где ряд сходится также в $L^2(\Lambda)$. Следовательно, из (13)

$$J(\mathbf{1}_B) = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\mathbf{1}_{B_n}).$$

В силу (7) имеем $J_n(\mathbf{1}_{B_n}) = Z(B_n)$, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Z(B_n) = Z(B)$ (ряд сходится в $L^2(\Omega)$). Таким образом, для любого $B \in \mathscr{K}$ получаем $J(\mathbf{1}_B) = Z(B)$, т.е. формула (15) определяет *продолжение* Z с $\mathscr{K}$ на $\mathscr{G}$. Кроме того, для $B, C \in \mathscr{G}$ по свойству изометричности J

$$(Z(B), Z(C)) = (J(\mathbf{1}_B), J(\mathbf{1}_C)) = \langle \mathbf{1}_B, \mathbf{1}_C \rangle = \mu(B \cap C). \ \square$$

Замечание 1. В силу (11) легко видеть, что если Z — центрированная ортогональная случайная мера (на $\mathscr{K}$), то

$$\mathsf{E}\,(J(f)) = 0 \ \text{ при всех } \ f \in L^2(\Lambda).$$

В частности, $\mathsf{E}\, Z(B) = 0$ для $B \in \mathscr{G}$.

§ **8.** Пусть $X = \{X(t),\, t \in T\}$ – *комплекснозначный* L^2-процесс, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, т.е. $\mathsf{E}\,|X(t)|^2 < \infty$ при каждом $t \in T$. Напомним, что для комплекснозначного L^2-процесса *ковариационная функция* определяется формулой

$$r(s,t) = \mathsf{cov}(X(s), X(t)) = \mathsf{E}\,(X(s) - \mathsf{E}\,X(s))(\overline{X(t) - \mathsf{E}\,X(t)}\,), \quad s, t \in T. \tag{17}$$

Будем в дальнейшем считать, что $\mathsf{E}\,X(t) = 0$, $t \in T$. Это предположение не ограничивает общности, и к этому случаю все можно свести, переходя от величин $X(t)$ к центрированным величинам $\widetilde{X}(t) = X(t) - \mathsf{E}\,X(t)$.

Один из основных результатов относительно возможности представления случайного процесса с помощью “просто” устроенных объектов (в рассматриваемом случае под этим понимаются *ортогональные случайные меры*) дает следующая теорема.

Теорема 3 (Карунен). *Пусть ковариационная функция центрированного комплекснозначного L^2-процесса $X = \{X(t),\ t \in T\}$, заданного на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, допускает факторизацию, т. е. представима в виде*

$$r(s,t) = \int_\Lambda f(s,\lambda)\overline{f(t,\lambda)}\,\mu(d\lambda), \qquad s,t \in T, \tag{18}$$

где $f(t,\,\cdot\,) \in L^2(\Lambda) = L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$ для каждого $t \in T$, а μ — некоторая σ-конечная мера. Тогда существует центрированная ортогональная случайная мера Z, заданная на системе множеств $\mathscr{G} = \{A \in \mathscr{A}\colon \mu(A) < \infty\}$ и на, вообще говоря, расширении исходного вероятностного пространства, имеющая структурную меру μ, такая, что

$$X(t) = \int_\Lambda f(t,\lambda) Z(d\lambda) \quad \textit{для каждого} \quad t \in T. \tag{19}$$

Если система функций $\{f(t,\,\cdot\,),\ t \in T\}$ полна в пространстве $L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$, т. е.

$$\Psi \in L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu) \ \text{ и } \int_\Lambda f(t,\lambda)\overline{\Psi(\lambda)}\,\mu(d\lambda) = 0 \ \ \forall\, t \in T \implies \Psi = 0 \ \ \mu\text{-п. н.}, \tag{20}$$

то требуемую меру Z можно построить и на исходном вероятностном пространстве.

Замечание 2. Если процесс $X = \{X(t),\, t \in T\}$ допускает представление (19) (с функциями $f(t,\,\cdot\,)$ из $L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$, где μ есть σ-конечная структурная мера центрированной ортогональной случайной меры Z), то свойство (18) справедливо в силу теоремы 2. При этом, согласно замечанию 1, L^2-процесс X будет центрированным.

Это замечание показывает, что *достаточные условия интегрального представления* (19) *являются и необходимыми.*

Доказательство теоремы. Пусть выполнено условие (20). Для $t \in T$ рассмотрим отображение G, определяемое формулой

$$G\colon f(t,\,\cdot\,) \mapsto X(t,\,\cdot\,), \tag{21}$$

и продолжим его по линейности:

$$G\biggl(\sum_{k=1}^n c_k f(t_k,\,\cdot\,)\biggr) = \sum_{k=1}^n c_k X(t_k,\,\cdot\,), \tag{22}$$

где $c_k \in \mathbb{C}$, $t_k \in T$, $k = 1, \ldots, n$.

Покажем корректность этого определения, т. е. покажем, что если

$$\sum_{k=1}^n c_k f(t_k,\,\cdot\,) = \sum_{l=1}^m d_l f(s_l,\,\cdot\,),$$

где $d_l \in \mathbb{C}$, $s_l \in T$, $l = 1, \dots, m$, то

$$\sum_{k=1}^{n} c_k X(t_k) = \sum_{l=1}^{m} d_l X(s_l) \quad (\text{п. н.}).$$

Для этого, учитывая (18), заметим, что

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k, \cdot), \sum_{l=1}^{m} d_l f(s_l, \cdot) \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} c_k \overline{d}_l \int_{\Lambda} f(t_k, \lambda) \overline{f(s_l, \lambda)}\, \mu(d\lambda) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} c_k \overline{d}_l r(t_k, s_l) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} c_k \overline{d}_l \mathsf{E}\, X(t_k) \overline{X(s_l)} =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} c_k X(t_k), \sum_{l=1}^{m} d_l X(s_l) \right).$$

Значит,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k, \cdot) - \sum_{l=1}^{m} d_l f(s_l, \cdot) \right| = \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k X(t_k) - \sum_{l=1}^{m} d_l X(s_l) \right\|,$$

откуда и следует требуемое утверждение о корректности определения (22).

Как изометрия отображение G продолжается на подпространство $L^2[f]$, полученное замыканием в $L^2(\Lambda)$ функций вида $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f(t_k, \cdot)$, где функция f — это функция из представления (18). При этом в силу (20) имеем $L^2[f] = L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$ и $G(L^2[f]) = L^2[X]$, где $L^2[X]$ — замыкание линейной оболочки процесса $X(t)$, т. е. в $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ берется замыкание линейных комбинаций вида $c_1 X(t_1) + \dots + c_n X(t_n)$ $(c_i \in \mathbb{C},\ t_i \in T,\ i = 1, \dots, n)$.

Для $B \in \mathscr{G}$, очевидно, $\mathbf{1}_B \in L^2(\Lambda)$, и мы можем определить

$$Z(B) = G(\mathbf{1}_B). \tag{23}$$

Тогда

$$(Z(B), Z(C)) = (G(\mathbf{1}_B), G(\mathbf{1}_C)) = \langle \mathbf{1}_B, \mathbf{1}_C \rangle = \mu(B \cap C).$$

Следовательно, $Z = Z(\,\cdot\,)$ — ортогональная случайная мера на $\mathscr{G}$ со структурной мерой μ. Мера Z центрирована, поскольку $Z(B) \in L^2[X]$ для каждого $B \in \mathscr{G}$, а $\mathsf{E}\,\zeta = 0$ для каждого $\zeta \in L^2[X]$, так как процесс X имеет нулевое среднее.

Для любой функции $h \in L^2(\Lambda)$ можно ввести стохастический интеграл

$$J(h) = \int_{\Lambda} h(\lambda)\, Z(d\lambda).$$

По теореме 2 J есть изометрическое отображение $L^2(\Lambda)$ на L^2_Z.

Итак, имеются две изометрии

$$G\colon L^2(\Lambda) \to L^2[X] \subset L^2(\Omega) \quad \text{и} \quad J\colon L^2(\Lambda) \to L^2_Z \subset L^2(\Omega),$$

при этом в силу (23) и (15) справедливы равенства $G(\mathbf{1}_B) = J(\mathbf{1}_B)$ для $B \in \mathscr{G}$. Но конечные линейные комбинации таких индикаторов плотны в $L^2(\Lambda)$, что обеспечивается леммой 2. Следовательно, $G = J$ на $L^2(\Lambda)$ и, кроме того, $L^2[X] = L^2_Z$. Из (21) вытекает, что $J(f(t,\,\cdot\,)) = X(t)$. Таким образом, получаем представление (19) (без расширения исходного вероятностного пространства).

Пусть теперь условие (20) не выполнено. Тогда $L^2[f] \subset L^2(\Lambda)$ и $L^2[f] \neq L^2(\Lambda)$. Рассмотрим $L^2(\Lambda) \ominus L^2[f]$, т. е. ортогональное дополнение к $L^2[f]$ в $L^2(\Lambda)$, и возьмем в нем какой-либо базис из функций $g(u,\,\cdot\,) \in L^2(\Lambda)$, $u \in T'$, где $T' \cap T = \varnothing$ (см. [60; т. 1, с. 59]). Введем функцию

$$\rho(s,t) = \int_\Lambda g(s,\lambda)\overline{g(t,\lambda)}\,\mu(d\lambda) = (g(s,\,\cdot\,), g(t,\,\cdot\,))_{L^2(\Lambda)}, \qquad s,t \in T'.$$

Очевидно, для $c_k \in \mathbb{C}$, $t_k \in T'$, $k = 1,\ldots,n$ и $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k,l=1}^n c_k\overline{c}_l\rho(t_k,t_l) = \int_\Lambda \Bigl|\sum_{k=1}^n c_k g(t_k,\lambda)\Bigr|^2 \mu(d\lambda) \geqslant 0.$$

В силу теоремы 4 главы II существует комплекснозначный центрированный гауссовский процесс $\{Y(t),\ t \in T'\}$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega', \mathscr{F}', \mathsf{P}')$, такой, что

$$\mathsf{cov}(Y(s), Y(t)) = \mathsf{E}\,'Y(s)\overline{Y(t)} = \rho(s,t), \qquad s,t \in T'.$$

Возьмем $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{F}}, \widetilde{\mathsf{P}}) = (\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P}) \times (\Omega', \mathscr{F}', \mathsf{P}')$. Тогда для каждых $t \in T$, $s \in T'$ величины $X(t)$ и $Y(s)$ будут независимы на этом пространстве (для $\widetilde{\omega} = (\omega, \omega') \in \widetilde{\Omega}$ имеем $X(t) = X(t,\widetilde{\omega}) = X(t,\omega)$, $Y(s) = Y(s,\widetilde{\omega}) = Y(s,\omega')$).

Введем на $(T \cup T') \times \widetilde{\Omega}$ центрированную случайную функцию

$$\xi(t,\widetilde{\omega}) = \begin{cases} X(t,\omega), & t \in T, \\ Y(t,\omega'), & t \in T'. \end{cases}$$

Для нее

$$\mathsf{cov}(\xi(s), \xi(t)) = \widetilde{\mathsf{E}}\,\xi(s)\overline{\xi(t)} = \begin{cases} r(s,t), & s,t \in T, \\ \rho(s,t), & s,t \in T', \\ 0, & s \in T,\ t \in T' \text{ или } s \in T',\ t \in T. \end{cases}$$

Иначе говоря,

$$\mathsf{cov}(\xi(s), \xi(t)) = \int_\Lambda h(s,\lambda)\overline{h(t,\lambda)}\,\mu(d\lambda),$$

где

$$h(t,\lambda) = \begin{cases} f(t,\lambda), & t \in T, \\ g(t,\lambda), & t \in T', \end{cases}$$

и учтено, что $f(t,\,\cdot\,) - g(s,\,\cdot\,)$ в $L^2(\Lambda)$ для $t \in T$ и $s \in T'$.

Кроме того, $L^2[h] = L^2(\Lambda)$, так как $\nexists\, \Psi \in L^2(\Lambda)$: $\Psi - h(t,\,\cdot\,)$ для всех $t \in T \cup T'$. Итак, по доказанному существует центрированная ортогональная случайная мера Z на $\mathscr{G} \times \widetilde{\Omega}$ такая, что $L^2[\xi] = L^2_Z$ и

$$\xi(t) = \int_\Lambda h(t,\lambda)\, Z(d\lambda), \qquad t \in T \cup T'.$$

Но при $t \in T$ имеем $\xi(t,\widetilde{\omega}) \equiv X(t,\widetilde{\omega})$. Следовательно, для всех $t \in T$

$$X(t,\widetilde{\omega}) = X(t,\omega) = \int_\Lambda h(t,\lambda)\, Z(d\lambda) = \int_\Lambda f(t,\lambda)\, Z(d\lambda). \ \square$$

§ **9.** Как следует из названия главы, наш основной интерес связан с рассмотрением *стационарных процессов*. Оказывается, что приведенная выше теорема Карунена, примененная к таким процессам, позволяет получить для них стохастические представления, допускающие весьма прозрачную "спектральную" интерпретацию.

Напомним, что суть понятия стационарности случайного процесса состоит в том, что статистические характеристики такого процесса инвариантны относительно сдвигов $t \mapsto t+u$. Сказанное нуждается в пояснении. Прежде всего, чтобы иметь возможность производить сдвиги аргумента t исследуемого процесса $X = \{X(t),\ t \in T\}$, предполагается, что T — некоторая группа (всюду — по сложению). В качестве временно́го множества T, как правило, будут рассматриваться множества $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \dots\}$ или $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, что соответствует изучению процессов с дискретным или непрерывным временем. Кроме того, значения $X(t)$ при каждом $t \in T$ считаются принадлежащими одному и тому же пространству S (обычно $\mathsf{S} = \mathbb{C}$ или $\mathsf{S} = \mathbb{R}$).

Определение 8 главы VI *стационарного в узком смысле* процесса сохраняется для случая, когда T является группой.

Во многих исследованиях представляют интерес свойства случайных процессов, зависящие лишь от *смешанных моментов* определенных порядков, т. е. от функций вида $\mathsf{E}\, X(t_1)^{k_1} \cdots X(t_n)^{k_n}$, где $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+$. Для класса L^2-процессов это делает естественным

Определение 6. Комплекснозначный (в частности, действительный) L^2-процесс $X = \{X(t),\ t \in T\}$, где T — некоторая группа, называется *стационарным в широком смысле* (или *стационарным второго порядка*), если

$$\mathsf{E}\, X(t) = a \quad \text{при любых} \quad t \in T, \tag{24}$$

$$r(s,t) = \mathsf{cov}(X(s), X(t)) = r(s-t, 0)\ (:= R(s-t)) \quad \text{при всех} \quad s,t \in T. \tag{25}$$

Легко видеть, что всякий стационарный в узком смысле L^2-процесс будет стационарным в широком смысле. Для гауссовских процессов эти понятия совпадают. Последовательность независимых одинаково распределенных величин, *не имеющих* математического ожидания, дает пример стационарного в узком смысле процесса, для которого бессмысленно говорить о стационарности в широком смысле.

Далее мы сосредоточимся на процессах, стационарных в широком смысле. Теория таких процессов тесно связана с теорией *кривых в гильбертовом пространстве* и со свойством *неотрицательной определенности* детерминированных функций.

$K = [-\pi, \pi]$, находим подпоследовательность $\{N_k\} \subset \mathbb{N}$ такую, что $Q_{N_k} \Rightarrow Q$, где Q — некоторая конечная неотрицательная мера на $[-\pi, \pi]$. Тогда, учитывая (29), получим для каждого $n \in \mathbb{Z}$ соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\, Q(d\lambda) = \lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\, Q_{N_k}(d\lambda) = R(n).\ \square$$

Доказанная теорема позволяет легко получить “спектральное представление” стационарных (в широком смысле) процессов.

Теорема 5. *Пусть $X = \{X_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ — центрированный стационарный в широком смысле процесс, определенный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Тогда на том же вероятностном пространстве существует ортогональная случайная мера Z, заданная на $\mathscr{B}([-\pi, \pi])$, такая, что (п. н.) имеет место стохастическое “спектральное представление”*

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\, Z(d\lambda), \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{30}$$

Доказательство. По теореме Герглотца для $s, t \in \mathbb{Z}$

$$r(s,t) = \mathsf{cov}(X_s, X_t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-t)\lambda}\, Q(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{is\lambda}\overline{e^{it\lambda}}\, Q(d\lambda), \tag{31}$$

где Q — конечная (неотрицательная) мера на $\mathscr{B}([-\pi, \pi])$. Значит, выполнено условие (18) теоремы Карунена (теорема 3), с $f(t, \lambda) = e^{it\lambda}$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $t \in \mathbb{Z}$. При этом также выполнено и условие (20), поскольку любую функцию из пространства $L^2 = L^2([-\pi, \pi], \mathscr{B}([-\pi, \pi]), Q)$ можно аппроксимировать в L^2 непрерывной функцией, принимающей одинаковые значения в точках $-\pi$ и π, а такая функция равномерно приближается суммами Фейера (см., например, [35; гл. VIII, § 2, п. 1]). Тем самым, требуемое представление (30) вытекает непосредственно из теоремы Карунена. $\square$

Напомним, что в силу теоремы Карунена *спектральная мера* Q, фигурирующая в формуле (31), является ни чем иным как *структурной мерой* (см. (2)) для ортогональной случайной меры Z, по которой ведется интегрирование в (30).

Меру Q, использующуюся в (26), можно переопределить (не меняя обозначений), перенеся “массу” $Q(\{-\pi\})$ из точки $-\pi$ в точку π, где возникнет “масса” $Q(\{-\pi\}) + Q(\{\pi\})$. При этом значение интеграла в правой части формулы (26) не изменится, поскольку $e^{-in\pi} = e^{in\pi}$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Указанное переопределение делается лишь для того, чтобы представить интеграл по промежутку $(-\pi, \pi]$ как интеграл по единичной окружности. Если такое перенесение массы произведено, то $Z(\{-\pi\}) = 0$ п. н. в силу теоремы 2, поэтому и в (30) интегрирование фактически ведется по $(-\pi, \pi]$. Разумеется, аналогичным образом интегрированние в (30) можно свести к интегрированию по полуинтервалу $[-\pi, \pi)$.

Завершая рассмотрение вопроса о спектральном представлении (30), отметим, что данная (“спектральная”) терминология навеяна тем, что (согласно (30)) значения X_t как бы “складываются” из спектральных гармоник $e^{i\lambda t}$ с соответствующими “весами” $Z(d\lambda)$.

§ **10.** В качестве приложения стохастического спектрального представления (30) рассмотрим следующий вариант *закона больших чисел*.

Глава VIII

Стохастический интеграл. Стохастические дифференциальные уравнения

Стохастический интеграл для простых случайных функций по винеровскому процессу. Конструкция Ито стохастического интеграла для неупреждающих случайных функций. Свойства стохастического интеграла. Формула замены переменных Ито. Уравнение Ланжевена. Процесс Орнштейна–Уленбека. Теорема существования и единственности сильного решения стохастического дифференциального уравнения. Марковость решения стохастического дифференциального уравнения.

§ **1.** В классическом анализе существуют различные подходы к операциям интегрирования, приводящие к таким, вообще говоря, отличающимся понятиям, как, например, интегралы Римана, Лебега, Римана–Стилтьеса, Лебега–Стилтьеса, Данжуа, Бохнера, Петтиса, А-интеграл Колмогорова и др.

В теории случайных процессов также рассматриваются разнообразные подходы к интегрированию случайных функций по случайным процессам, случайным мерам, и др., приводящие также к различным конструкциям "стохастических интегралов".

С одним (и простейшим) типом таких интегралов мы уже имели дело в предыдущей главе, где интегрирование *детерминированных* функций велось по *ортогональным случайным мерам* Z. Там же было показано, как с помощью таких интегралов удается дать стохастическое спектральное представление для стационарных в широком смысле случайных процессов (теорема 9 главы VII).

Если ортогональная случайная мера Z порождается винеровским процессом $W = \{W_t,\, t \geqslant 0\}$ (см. пример 1 главы VII) и детерминированный процесс $f = \{f_t,\, t \geqslant 0\}$ принадлежит классу $L^2 = L^2([0,\infty), \mathscr{B}([0,\infty)), \mathrm{mes})$, где mes — мера Лебега, то соответствующий интеграл $J(f)$ (см. (VII.14)) обычно записывают в виде

$$J(f) = \int_{[0,\infty)} f_t\, dW_t \tag{1}$$

или $J(f) = \int_0^\infty f_t\, dW_t$, подчеркивая тем самым аналогию с классическими процедурами интегрирования.

Заметим, что стохастический интеграл в (1) вообще говоря нельзя понимать как *потраекторный* интеграл, т. е. как интеграл Лебега–Стилтьеса при *каждом* фиксированном $\omega \in \Omega$ ($W_t = W_t(\omega)$), поскольку в силу теоремы 1 главы III траектории винеровского процесса (броуновского движения) имеют P-п. н. *неограниченные вариации*.

В формуле (1) функция $f = f_t$, $t \geqslant 0$, была *детерминированной*. Однако во многих вопросах стохастического анализа возникает необходимость рассмотрения интегралов типа (1), в которых подынтегральная функция f является *случайной*:

$$f = f_t(\omega), \qquad t \geqslant 0, \quad \omega \in \Omega. \tag{2}$$

Так, например, при рассмотрении стохастических дифференциальных уравнений (см. далее § 12–18)

$$dY_t = b(t, Y_t)\,dt + \sigma(t, Y_t)\,dW_t, \tag{3}$$

понимаемых как условная запись стохастических интегральных уравнений

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b(s, Y_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s)\,dW_s, \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

сама собой возникает необходимость в придании смысла "стохастическим интегралам" $\int_0^t \sigma(s, Y_s)\,dW_s(\omega)$, являющимся интегралами типа (1) от случайной функции $f\mathbf{1}_{(0,t]}$.

При первом чтении желательно ознакомиться с конструкцией интеграла Ито на отрезке $[0, T]$ и свойствами этого интеграла (§ 2–6), а также с формулой замены переменных (теорема 5 § 11), позволяющей легко решить классическое уравнение Ланжевена (§ 13). Следует разобраться с формулировкой теоремы существования и единственности (сильного) решения стохастического дифференциального уравнения (§ 17). Заслуживает внимания § 18, в котором доказывается марковость решения стохастического дифференциального уравнения. К техническим деталям приведенных доказательств можно вернуться позднее.

§ **2.** На чем, собственно говоря, основана надежда на то, что можно определить "стохастические интегралы" типа $\int_0^T f_s(\omega)\,dW_s(\omega)$ от *случайных* функций f (*интеграндов*) по винеровскому процессу W (играющему роль *интегратора*), в то время как ранее при определении стохастических интегралов по L^2-процессам с ортогональными приращениями предполагалось, что интегранды f суть детерминированные функции?

Дело здесь обстоит следующим образом. Винеровский процесс, как и всякий квадратично интегрируемый мартингал, входит в подкласс L^2-процессов с ортогональными приращениями. Но понятно, что, *сужая* класс интеграторов, можно рассчитывать на то, что соответствующий класс интеграндов окажется *шире* рассматриваемого ранее множества детерминированных функций f.

В случае винеровского процесса W конструкция стохастических интегралов от случайных функций f, удовлетворяющих приводимым ниже условиям измеримости и интегрируемости, была дана японским математиком К. Ито. Это объясняет, почему такие интегралы далее обозначаются $I_t(f)$ (I — от Ito).

Сама идея Ито построения стохастического интеграла в сущности та же, что и в случае процессов с ортогональными приращениями: (1) сначала интегралы определяются (вполне естественным образом) для кусочно постоянных "неупреждающих" случайных функций, а затем (2) для более общих функций f путем их аппроксимации простыми функциями $f^{(n)}$ и, основываясь на идеях изометрии, определяются стохастические интегралы $I_T(f)$ как пределы (в среднеквадратическом смысле) величин $I_T(f^{(n)})$, $n \to \infty$.

Эта конструкция работает (с привлечением разложения Дуба–Мейера) не только в случае винеровского процесса, но также и для других классов процессов, включая класс квадратично интегрируемых мартингалов, к которому принадлежит винеровский процесс.

§ **3.** Пусть $W = \{W_t,\ t \geqslant 0\}$ — винеровский процесс (броуновское движение), заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. По-прежнему, $\mathscr{F}_t^W$ обозначает σ-алгебру, порожденную величинами W_s, $0 \leqslant s \leqslant t$. Положим $\mathscr{F}^W = \sigma\{W_t,\ t \geqslant 0\}$. Будем считать, что вероятностное пространство полно и σ-алгебры $\mathscr{F}^W$, $\mathscr{F}_t^W$ $(t \geqslant 0)$ расширены классом $\mathscr{N}$ событий нулевой вероятности. Итак, рассматривается естественная фильтрация $(\mathscr{F}_t^W)_{t \geqslant 0}$, удовлетворяющая обычным условиям (см. определение 10 главы IV).

Займемся сначала конструкцией стохастического интеграла

$$I_T(f) = \int_{(0,T]} f_s(\omega)\, dW_s(\omega) \tag{5}$$

для некоторого фиксированного $T > 0$, а затем определим стохастические интегралы

$$I_t(f) = \int_{(0,t]} f_s(\omega)\, dW_s(\omega) \tag{6}$$

уже для всех $t \in [0, \infty)$.

Если f является *простой детерминированной* функцией вида $f_t(\omega) = I_{(a,b]}(t)$, где $t \in [0,T]$, $(a,b] \subset (0,T]$, то под стохастическим интегралом $I_T(f)$ понимают случайную величину

$$I_T(f) = W_b(\omega) - W_a(\omega),$$

в записи $I_T(f)$ аргумент ω опускается.

Пусть теперь функция f является простой, но несколько более общего вида:

$$f_t(\omega) = \varphi(\omega)\mathbf{1}_{(a,b]}(t), \tag{7}$$

где $\varphi(\omega)$ — некоторая случайная величина, тогда естественно положить

$$I_T(f) = \varphi(\omega)[W_b(\omega) - W_a(\omega)]. \tag{8}$$

Если функция f является простой вида

$$f_t(\omega) = \varphi_0(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i(\omega)\mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{9}$$

где $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$, $n \geqslant 2$ и $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ — случайные величины, то снова естественно определить

$$I_0(f) = 0, \quad I_t(f) = \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i(\omega)\bigl[W_{t_{i+1} \wedge t}(\omega) - W_{t_i \wedge t}(\omega)\bigr] \ \text{ для } \ 0 < t \leqslant T. \tag{10}$$

Другие варианты простых функций обсуждаются в дополнении к этой главе.

Оказывается, чтобы ввести интеграл $I_t(f)$ для более широкого запаса функций f, да к тому же с "хорошими" свойствами (см. далее лемму 1), на функции $\varphi_i(\omega)$ в (9) надо налагать более жесткие условия измеримости.

Напомним, что действительная случайная функция $f = \{f_t, t \in [0,T]\}$ называется *согласованной* с фильтрацией (потоком) $\mathbb{F}_T^W = (\mathscr{F}_t^W)_{t\in[0,T]}$, если при каждом $t \in [0,T]$ величина f_t является $\mathscr{F}_t^W$-измеримой. Разумеется, в этом определении вместо естественной фильтрации $\mathbb{F}_T^W$ можно использовать другую фильтрацию: $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$, а вместо отрезка $[0,T]$ — иной промежуток, например, $[0,\infty)$.

Определение 1. Будем говорить, что случайная функция $f = \{f_t, t \in [0,T]\}$ является *неупреждающей* по отношению к потоку $\mathbb{F}_T^W$, если она согласована с $\mathbb{F}_T^W$ и $\mathscr{B}([0,T]) \otimes \mathscr{F}^W$-измерима по паре переменных $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$. Класс таких случайных функций обозначим $\mathscr{A}_T$.

В случае простых функций f вида (9) их принадлежность классу $\mathscr{A}_T$ равносильна тому, что случайные величины $\varphi_i(\omega)$ в (9) являются $\mathscr{F}_{t_i}^W$-измеримыми. Обозначим класс таких простых функций $\mathscr{A}_T^0$.

Полезно заметить, что простые функции f допускают, вообще говоря, неоднозначное представление в виде (9). Но как и при определении соответствующих интегралов $J(f)$ показывается, что значения $I_t(f)$, $t \in [0,T]$, не зависят от способа представления функции f в виде (9).

Следующее предложение описывает основные свойства стохастических интегралов $I_t(f)$, $t \in [0,T]$, берущихся от простых функций.

Лемма 1. *Пусть на отрезке $[0,T]$ заданы простые неупреждающие функции $f = f_t(\omega)$, $t \in [0,T]$, вида (9) и $g = g_t(\omega)$, $t \in [0,T]$, аналогичной структуры:*

$$g_t(\omega) = \psi_0(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=1}^{n-1} \psi_j(\omega)\mathbf{1}_{(t_j,t_{j+1}]}(t). \tag{11}$$

Пусть все случайные величины $\varphi_i(\omega)$ и $\psi_j(\omega)$ имеют конечный второй момент.

Тогда стохастические интегралы $I_t(f)$ и $I_t(g)$, $t \in [0,T]$, обладают следующими свойствами:

(a) *$(I_t(f))_{t\in[0,T]}$ и $(I_t(g))_{t\in[0,T]}$ являются непрерывными квадратично интегрируемыми мартингалами с нулевым средним и*

$$\mathsf{E}\, I_t(f)I_t(g) = \mathsf{E}\left[\int_0^t f_s(\omega)g_s(\omega)\,ds\right] \tag{12}$$

при всех $t \in [0,T]$; в частности,

$$\mathsf{E}\, I_t^2(f) = \mathsf{E}\left[\int_0^t f_s^2(\omega)\,ds\right]. \tag{13}$$

(b) *Для каждого $t \in [0,T]$ п. н.*

$$\int_0^t f_s(\omega)\,dW_s(\omega) = \int_0^T f_s(\omega)\mathbf{1}_{(0,t]}(s)\,dW_s(\omega), \tag{14}$$

то есть, $I_0(f) = 0$ и при $0 < t \leqslant T$

$$I_t(f) = I_T(f\mathbf{1}_{(0,t]}) \quad \text{п. н.} \tag{15}$$

Доказательство. Непрерывность процесса $(I_t(f))_{t\in[0,T]}$ следует непосредственно из определения (10). Так как (п. н.)

$$\mathsf{E}\left[\varphi_i(W_{t_{i+1}}-W_{t_i}) \mid \mathscr{F}_{t_i}^W\right] = \varphi_i\,\mathsf{E}\left[W_{t_{i+1}}-W_{t_i} \mid \mathscr{F}_{t_i}^W\right] = 0, \tag{16}$$

то процесс $(I_t(f))_{t\in[0,T]}$ является мартингалом, к тому же квадратично интегрируемым, поскольку

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[\varphi_i^2(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})^2\right] &= \mathsf{E}\left[\varphi_i^2\,\mathsf{E}\left[(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})^2 \mid \mathscr{F}_{t_i}^W\right]\right] = \\ &= \mathsf{E}\left[\varphi_i^2\,\mathsf{E}\left[W_{t_{i+1}}-W_{t_i}\right]^2\right] = (\mathsf{E}\,\varphi_i^2)(t_{i+1}-t_i). \ \square\end{aligned}$$

Свойства (12) и (13) легко выводятся с учетом того, что для $i<j$

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\left[\varphi_i(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})\psi_j(W_{t_{j+1}}-W_{t_j})\right] = \\ &\quad= \mathsf{E}\left[\varphi_i(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})\mathsf{E}\left[\psi_j(W_{t_{j+1}}-W_{t_j}) \mid \mathscr{F}_{t_j}^W\right]\right] = 0.\end{aligned}$$

Наконец, свойство (b) следует непосредственно из (9) и (10).

§ **4.** Введем пространство $\mathscr{M}_T^2$, состоящее из квадратично интегрируемых мартингалов $M=(M_t)_{t\in[0,T]}$. Иначе говоря, при каждых $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$

$$\begin{gathered} M_t \text{ — } \mathscr{F}_t^W\text{-измеримы}, \\ \mathsf{E}\,(M_t \mid \mathscr{F}_s^W) = M_s \quad \text{п. н.}, \\ \mathsf{E}\,M_t^2 < \infty. \end{gathered}$$

Будем предполагать также, что все траектории рассматриваемых мартингалов $M\in\mathscr{M}_T^2$ непрерывны справа.

В пространстве $\mathscr{M}_T^2$ введем скалярное произведение

$$(M,N) = \mathsf{E}\,M_TN_T \tag{17}$$

и норму

$$\|M\|_{\mathscr{M}_T^2} = (\mathsf{E}\,M_T^2)^{1/2}. \tag{18}$$

Отметим ряд нужных нам свойств мартингалов из пространства $\mathscr{M}_T^2$.

Лемма 2. a) *Пространство $\mathscr{M}_T^2$ является гильбертовым (с введенным скалярным произведением).*

b) *Пусть последовательность мартингалов $M^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}$, сходится в $\mathscr{M}_T^2$ (по норме $\|\cdot\|_{\mathscr{M}_T^2}$) к мартингалу M. Тогда*

$$\mathsf{E}\sup_{t\in[0,T]}|M_t^{(n)}-M_t|^2 \to 0, \qquad n\to\infty. \tag{19}$$

c) *Множество непрерывных мартингалов из $\mathscr{M}_T^2$ образует замкнутое подпространство (в $\mathscr{M}_T^2$).*

Свойство неупреждаемости функций f, для которых введен интеграл Ито, является ключевым при обеспечении "хороших" свойств этого интеграла. В то же время имеются близкие понятия измеримости, как показывает следующее определение.

Определение 2. Пусть $\mathbb{F}_T = (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ — некоторый поток σ-алгебр в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Действительная случайная функция $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ называется *прогрессивно измеримой* (по отношению к $\mathbb{F}_T$), если для любого $t \in [0,T]$ отображение

$$(s,\omega) \mapsto (X_s(\omega), \omega), \quad \text{где} \quad (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega,$$

является $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$-измеримым. Другими словами, сужение функции X на $[0,t] \times \Omega$ должно быть $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$-измеримым при каждом $t \in [0,T]$.

Легко видеть, что любая прогрессивно измеримая по отношению к потоку $\mathbb{F}_T$ функция $f = f_t(\omega)$, $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$, будет неупреждающей по отношению к этому потоку (в определении 1 вместо $\mathbb{F}_T^W$ берется $\mathbb{F}_T$). Разумеется, данные выше определения переносятся на процесс $X = \{X_t,\, t \geqslant 0\}$. Представляет интерес следующий результат.

Теорема 3 (Чжун и Дуб; см., например, [148; с. 5]). *Пусть $X = \{X_t,\ t \geqslant 0\}$ — неупреждающий действительный процесс по отношению к фильтрации $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ (т. е. согласованный с $\mathbb{F}$ и $\mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F}$-измеримый). Тогда X имеет прогрессивно измеримую модификацию.*

Простое достаточное условие прогрессивной измеримости содержит

Теорема 4. *Пусть согласованный с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ действительный процесс $X = \{X_t,\ t \geqslant 0\}$ имеет траектории п. н. непрерывные слева на $(0,\infty)$ (или п. н. непрерывные на $[0,\infty)$). Тогда у процесса X существует прогрессивно измеримая модификация с теми же свойствами траекторий.*

Доказательство, основанное на построении должных аппроксимаций X прогрессивно измеримыми процессами X_n ($n \in \mathbb{N}$) и применении леммы 5 главы I, оставляем в качестве легкого упражнения.

Отметим, что вместо естественной фильтрации броуновского движения $\mathbb{F}_T^W$ при построении интеграла Ито (т. е. при задании $I_t(f)$, $t \in [0,T]$, формулой (10) для простых функций f вида (9) из класса $\mathscr{A}_T^0 \cap L_T^2$ и распространении этого интеграла на замыкание $\mathscr{A}_T^0 \cap L_T^2$ в пространстве L_T^2) можно использовать более общую фильтрацию $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$. В этой связи напомним следующее определение.

Определение 3. Говорят, что $W = \{W_t, t \geqslant\}$ — винеровский процесс относительно фильтрации $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, если процесс W согласован с $\mathbb{F}$, имеет п. н. непрерывные траектории, $W(0) = 0$ п. н. и для всех $0 \leqslant s < t < \infty$

$$W(t) - W(s) — \mathscr{F}_s, \qquad W(t) - W(s) \sim \mathsf{N}(0, t-s),$$

где "—" обозначает независимость.

Использование более общей фильтрации $\mathbb{F}$, нежели $\mathbb{F}^W$, предоставляет дополнительные возможности. Например, в случае естественной фильтрации измеримость

§ **11.** Краеугольным камнем всего стохастического исчисления является

Теорема 5 (формула Ито). *Пусть процесс $X = \{X_t,\, t \geqslant 0\}$ с действительными значениями имеет стохастический дифференциал* (35) (*функции f и g обладают указанными выше свойствами*). *Пусть функция $H\colon [0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такова, что существуют непрерывные производные $\partial H/\partial t$, $\partial^2 H/\partial x^2$. Пусть также процесс $h = \left\{ f(s,X_s)\dfrac{\partial H}{\partial x}(s,X_s),\ s\geqslant 0\right\} \in \mathscr{A}$. Тогда процесс $Y_t = \{H(t,X_t),\, t\geqslant 0\}$, имеет стохастический дифференциал*

$$dY_t = \frac{\partial H}{\partial t}(t,X_t)\,dt + \frac{\partial H}{\partial x}(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2, \tag{37}$$

где $(dX_t)^2$ определяется из (35) *по следующему правилу "оперирования с дифференциалами":*

$$dt\cdot dt = dt\cdot dW_t = dW_t\cdot dt = 0, \qquad dW_t\cdot dW_t = dt. \tag{38}$$

Иначе говоря, п. н. для всех $t \geqslant 0$

$$\begin{aligned} H(t,X_t) = H(0,X_0) + \int_0^t f(s,X_s)\frac{\partial H}{\partial x}(s,X_s)\,dW_s + \\ + \int_0^t \left(\frac{\partial H}{\partial t}(s,X_s) + g\frac{\partial H}{\partial x}(s,X_s) + \frac{1}{2}f^2\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(s,X_s)\right)ds. \end{aligned} \tag{39}$$

Этот фундаментальный результат удивителен в том отношении, что в выражении для *первого* дифференциала возникает *вторая* производная функции H.

Условие $h \in \mathscr{A}$ в теореме 5 требуется лишь для того, чтобы был определен стохастический интеграл по винеровскому процессу в (39). В дополнении к этой главе показано как расширить класс функций, для которых определено интегрирование по Ито. Тогда оказывается, что условие $H \in C^{1,2}$ является достаточным для выполнения формулы Ито. Точнее говоря, это условие уже обеспечивает существование стохастического дифференциала и справедливость формулы (39), в которой стохастический интеграл понимается в этом более широком смысле. Мы не будем доказывать приведенную теорему, поскольку даже для более узкого класса функций H доказательство весьма длинное (см., например, [12; § 12.3]). Кроме того, на сегодняшний день имеются далеко идущие ее обобщения, например, для процессов, являющихся непрерывными семимартингалами со значениями в $\mathbb{R}^m$. Мы рекомендуем ознакомиться с теоремами 15.19, 15.21 в [146]. Некоторые обобщения формулы Ито рассматриваются в дополнении к этой главе.

§ **12.** Покажем, как может использоваться формула Ито. Вернемся к примеру 1.

Воспользуемся теоремой 5, положив $X_t = W_t$ и $H(t,x) = \frac{1}{2}x^2$. Очевидно, все условия этой теоремы выполнены. Тогда для $Y_t = H(t,W_t) = \frac{1}{2}W_t^2$ имеем

$$dY_t = \frac{\partial H}{\partial t}\,dt + \frac{\partial H}{\partial x}\,dW_t + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(dW_t)^2 = 0 + W_t\,dW_t + \frac{1}{2}(dW_t)^2 = W_t\,dW_t + \frac{1}{2}\,dt.$$

Следовательно,

$$d\left(\frac{1}{2}W_t^2\right) = W_t\,dW_t + \frac{1}{2}\,dt.$$

Таким образом, в соответствии с интегральной формой записи стохастического дифференциала (см. (36)) и так как $W_0 = 0$, получаем

$$\frac{1}{2}W_t^2 = \int_0^t W_s\,dW_s + \frac{1}{2}\,t, \qquad t \geqslant 0, \tag{40}$$

т. е. другим способом приходим к (31).

§ **13.** Прежде чем излагать некоторые общие результаты о *стохастических дифференциальных уравнениях*, мы обратимся к одному частному, но важному случаю, связанному с описанием *движения частицы в жидкой среде*. Рассмотрим уравнение

$$m\dot{v} = -\beta v + \text{“шум”}, \qquad t \geqslant 0, \tag{41}$$

где m — масса частицы, v — ее скорость, параметр $\beta > 0$ характеризует вязкость среды. В соответствии с физическими представлениями в уравнении (41) “сила $m\dot{v}$”, тормозящая частицу, пропорциональна “скорости v”, а наличие “шума” связано с хаотическими соударениями данной частицы с молекулами среды (вследствие теплового движения последних).

Посмотрим как можно интерпретировать уравнение (41), если в качестве шума попытаться использовать, например, “процесс” $\dot{W}$, где $W = \{W_t,\, t \geqslant 0\}$ — броуновское движение. Согласно теореме 1 главы III, выписанная выше производная $\dot{W}$ не существует у траектории процесса $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ ни в одной точке t (с вероятностью единица). Значит, если попытаться как-то осмыслить уравнение

$$m\dot{v} = -\beta v + \dot{W}, \qquad t \geqslant 0, \tag{42}$$

известное в физике как *уравнение Ланжевена*, то следует, прежде всего, иметь в виду эту крайнюю нерегулярность в поведении “процесса” $\dot{W}$.

Придадим строгий смысл этому уравнению. Перепишем его вначале в виде

$$\dot{v} = av + \sigma\dot{W}, \qquad t \geqslant 0, \tag{43}$$

где

$$a = -\beta/m < 0, \qquad \sigma = 1/m > 0. \tag{44}$$

Хорошо известно, что решение *обыкновенного дифференциального уравнения* (с постоянными коэффициентами a, σ)

$$\dot{v} = av + \sigma f, \qquad t \geqslant 0, \tag{45}$$

находится применением к решению *однородного* уравнения $\dot{v} = av$, имеющему вид $v(t) = ce^{at}$ $(c = v(0))$, *метода вариации произвольной постоянной*, состоящего в том, что решения ищутся в виде $v(t) = c(t)e^{at}$. В результате находим, что

$$v(t) = v(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-u)}\sigma f(u)\,du, \qquad t \geqslant 0. \tag{46}$$

(Это решение существует для $t \in [0,T]$, если, например, f — непрерывная на $[0,T]$ функция.)

Уравнение (45) можно записать в дифференциальной форме

$$dv = av\,dt + \sigma f\,dt, \qquad t \geqslant 0, \tag{47}$$

являющейся эквивалентной записью интегрального уравнения

$$v(t) = v(0) + \int_0^t av(s)\,ds + \int_0^t \sigma f(s)\,ds, \qquad t \geqslant 0.$$

Это наводит на мысль, что и в "стохастическом" случае уравнение (43) надо понимать именно в *интегральном виде*:

$$V(t) = V(0) + \int_0^t aV(s)\,ds + \int_0^t \sigma\,dW_s, \qquad t \geqslant 0, \tag{48}$$

формально записываемом обычно (по аналогии с (47)) в следующей *дифференциальной форме*:

$$dV(t) = aV(t)\,dt + \sigma\,dW_t. \tag{49}$$

Таким образом, мы как бы заменили $\dot{W}dt$ на dW_t, а это позволило придать смысл уравнению (43). В (48) входит стохастический интеграл Ито $\int_0^t \sigma\,dW_s$, который равен (по определению этого интеграла) $\sigma W(t)$, так как σ в рассматриваемом случае есть константа. Тем самым, соотношение (48) принимает вид:

$$V(t) - V(0) = a\int_0^t V(s)\,ds + \sigma W_t. \tag{50}$$

Сильным решением этого уравнения будем называть такой п.н. *непрерывный* процесс $V = \{V(t),\, t \geqslant 0\}$, согласованный с фильтрацией $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, что для каждого $t \geqslant 0$ с вероятностью единица левая часть соотношения (48) равна его правой части. Отметим, что обе части указанного уравнения дают п.н. непрерывные процессы, поэтому с вероятностью единица совпадение обеих частей уравнения будет сразу *для всех* $t \geqslant 0$.

Подобно (46) естественно ожидать, что сильное решение этого уравнения, рассматриваемого как уравнение относительно $V = \{V(t), t \geqslant 0\}$, задается формулой

$$V(t) = V(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-u)}\sigma\,dW_u, \tag{51}$$

где в правой части фигурирует *интеграл Ито* (неслучайная функция $e^{-au} \in \mathscr{A}$). Таким образом, $f\,du$, "отвечающее" $\dot{W}\,du$, заменяется на dW_u.

Покажем, что выбрав (в силу теоремы 2) п.н. непрерывный на $[0,\infty)$ процесс V, определенный согласно (51), мы действительно получим сильное решение уравнения (48). Для этого воспользуемся формулой Ито.

Положим

$$X_t = \int_0^t e^{-au}\,dW_u, \quad H(t,x) = \sigma e^{at}x, \quad \text{где} \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда $dX_t = e^{-at}\,dW_t$ ($X_0 = 0$ по определению интеграла Ито). Возьмем $Y_t = H(t, X_t)$. В силу (37) имеем

$$dY_t = \sigma a e^{at} X_t\,dt + \sigma e^{at}\,dX_t = \sigma a e^{at} X_t\,dt + \sigma\,dW_t \tag{52}$$

(еще раз подчеркнем, что все *дифференциальные преобразования* имеют смысл только как сокращенная запись соответствующих интегральных соотношений).

Снова по формуле Ито легко убедиться, что

$$d(V(0)e^{at}) = a e^{at} V(0)\,dt, \tag{53}$$

где $V(0)$ является $\mathscr{F}_0$-измеримой величиной. Из (52), (53) и замечания 1 вытекает (49). Итак, доказана

Теорема 6. *Для всех $t \geqslant 0$ существует сильное решение уравнения Ланжевена с начальным условием $V\big|_{t=0} = V(0) \in \mathscr{F}_0 \,|\, \mathscr{B}(\mathbb{R})$, которое задается формулой* (51).

§ **14.** Рассмотрим некоторые свойства решения (51). Пусть существует $\mathsf{E}\,V(0)$. Поскольку математическое ожидание интеграла Ито равно нулю, из (51) выводим, что

$$\mathsf{E}\,V(t) = e^{at}\mathsf{E}\,V(0), \tag{54}$$

т. е. средняя скорость экспоненциально убывает (напомним, что $a < 0$).

Теорема 7. *Пусть начальное значение $V(0)$ является $\mathscr{F}_0 \,|\, \mathscr{B}(\mathbb{R})$-измеримой величиной и $V(0) \sim \mathsf{N}(0, \sigma^2/(2\alpha))$, где $\alpha = -a$. Тогда сильным решением уравнения Ланжевена является процесс Орнштейна–Уленбека, т. е. гауссовский процесс $V = \{V(t),\ t \geqslant 0\}$, имеющий нулевое среднее и ковариационную функцию*

$$\mathsf{cov}(V(s), V(t)) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|s-t|}, \qquad s, t \geqslant 0. \tag{55}$$

Доказательство. Из (54) следует, что $\mathsf{E}\,V(t) = 0$ при всех $t \geqslant 0$. Покажем, что для $s, t \geqslant 0$

$$\mathsf{E}\,V(s)V(t) = \mathsf{E}\,(V(0))^2 e^{a(s+t)} + \frac{\sigma^2}{2a} e^{a(s+t)}(1 - e^{-2a(s\wedge t)}), \tag{56}$$

где, как обычно, $s \wedge t = \min\{s, t\}$. Действительно, в силу (12)

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\left(\int_0^s e^{a(s-u)}\,dW_u \int_0^t e^{a(t-u)}\,dW_u\right) = \\ &\quad = \int_0^{s\wedge t} e^{a(s-u)} e^{a(t-u)}\,du = \frac{e^{a(s+t)}}{2a}(1 - e^{-2a(s\wedge t)}), \end{aligned} \tag{57}$$

а, кроме того, для всех $t \geqslant 0$ согласно теореме 2

$$\mathsf{E}\,V(0)\int_0^t e^{a(t-u)} dW_u = \mathsf{E}\left(V(0)\mathsf{E}\left(\int_0^t e^{a(t-u)} dW_u \,|\, \mathscr{F}_0\right)\right) = 0. \tag{58}$$

Если $\mathsf{E}\,(V(0))^2 = -\dfrac{\sigma^2}{2a}$, то из (56) получаем (55).

Докажем теперь, что $V = \{V(t),\, t \geqslant 0\}$ — гауссовский процесс. Прежде всего заметим, что $W_t = W_t - W_0 - \mathscr{F}_0$ при каждом $t \geqslant 0$, а поскольку $V(0)$ является $\mathscr{F}_0$-измеримой величиной, то $V(0) - W_t$ при любом $t \geqslant 0$. Из (51) следует, что достаточно установить при любом $k \in \mathbb{N}$ и всех $0 \leqslant t_1 < \dots < t_k < \infty$ гауссовость вектора $(U(t_1), \dots, U(t_k))$, где $U(t) = \int_0^t \exp\{-\alpha u\}\, dW_u$, $t \geqslant 0$. Пользуясь леммой 4, получаем, что для каждого $m = 1, \dots, k$ величина $U(t_m)$ есть предел в $L^2(\Omega)$ при $n \to \infty$ величин

$$\eta_m(n) = \sum_{j=0}^{n} \exp\{-\alpha t_j^{(m)}(n)\}\big(W(t_{j+1}^{(m)}(n)) - W(t_j^{(m)}(n))\big),$$

где $t_j^{(m)}(n) = jt_m/n$ $(n \in \mathbb{N})$. Очевидно, вектор $(\eta_1(n), \dots, \eta_k(n))$ имеет многомерное нормальное распределение. Совершив предельный переход в $L^2(\Omega)$ при $n \to \infty$, приходим к требуемому утверждению. $\square$

$\S$ **15.** Пусть, по-прежнему, имеется (расширенная P-нулевыми событиями) фильтрация $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ и винеровский процесс $W = \{W_t,\, t \geqslant 0\}$ относительно $\mathbb{F}$.

Обратимся теперь к более общим уравнениям, нежели (49). Именно, будем рассматривать стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{59}$$

с *начальным условием* $X_0 = Z$, являющимся $\mathscr{F}_0$-измеримой величиной. Понимается это уравнение просто как формальная запись стохастического интегрального уравнения

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{60}$$

где b и σ определены на $[0, T] \times \mathbb{R}$. При этом считается, что $b(s, X_s)$ и $\sigma(s, X_s)$ — "хорошие" функции, для которых правая часть формулы (60) определена.

Определение 5. *Сильным решением* уравнения (60) на отрезке $[0, T]$ называется процесс $X = \{X_t,\, t \in [0, T]\}$, имеющий п. н. непрерывные траектории, согласованный с фильтрацией $\mathbb{F}$ и такой, что при подстановке его в левую и правую части формулы (60) при каждом $t \in [0, T]$ получается равенство с вероятностью единица.

Как уже говорилось выше, подстановка процесса X в правую часть (60) должна приводить к тому, что п. н. при всех $t \in [0, T]$ определены оба содержащихся в ней интеграла (которые будут задавать непрерывные процессы). Разумеется, вместо отрезка $[0, T]$ можно рассматривать $[u, v]$ или $[u, \infty)$.

Определение 6. Говорят, что уравнение (60) имеет *единственное* сильное решение X на отрезке $[0, T]$, если из того, что процессы $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ и $U = \{U_t, t \in [0, T]\}$ являются (сильными) решениями указанного уравнения с одинаковыми начальными условиями, следует, что U есть модификация X (тем самым непрерывные процессы X и U будут *неразличимыми*).

Потребуем, чтобы выполнялось следующее *условие Липшица*: существует константа $L = L(T) > 0$ такая, что

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leqslant L|x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T]. \tag{61}$$

Пусть также для некоторого $c = c(T) > 0$

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leqslant c(1+x^2), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,T]. \tag{62}$$

Заметим, что даже при $\sigma \equiv 0$, т. е. при изучении обыкновенного дифференциального уравнения, без условий такого рода решение может не существовать или существовать, но быть неединственным.

Если, в частности, $b(t,x) = b(x)$, $\sigma(t,x) = \sigma(x)$, то (61) влечет (62).

§ **16.** Далее нам понадобятся простые вспомогательные утверждения.

Лемма 5. *Пусть действительный процесс* $Y = \{Y_s,\ s \in [0,T]\}$ *прогрессивно измерим на* $[0,T]$ *относительно фильтрации* $\mathbb{F}_T = (\mathscr{F}_s)_{s\in[0,T]}$ *в* $\mathscr{F}$. *Пусть действительная функция* $a(s,x)$ *задана на* $[0,T] \times \mathbb{R}$ *и измерима, т. е.* $\mathscr{B}([0,T]) \otimes \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$*-измерима. Тогда процесс* $U = \{U_t = a(t,Y_t),\ t \in [0,T]\}$ *прогрессивно измерим (относительно той же фильтрации* $\mathbb{F}_T$*).*

Доказательство. Покажем $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t \mid \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$-измеримость отображения $(s,\omega) \mapsto (s, Y_s(\omega))$ для $s \in [0,t]$ и $\omega \in \Omega$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$.

Возьмем $u \in [0,t]$ и $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, тогда

$$\big\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \colon (s, Y_s(\omega)) \in [0,u] \times B\big\} = \\ = \big\{(s,\omega) \in [0, t\wedge u] \times \Omega \colon Y_s(\omega) \in B\big\} \in \mathscr{B}([0,t\wedge u]) \times \mathscr{F}_{t\wedge u} \subset \mathscr{B}[0,t] \otimes \mathscr{F}_t.$$

Требуемая измеримость получается в силу следствия 1 главы I. Теперь заметим, что для $(s,x) \in [0,t] \times \mathbb{R}$ отображение $(s,x) \mapsto a(s,x)$ является по условию $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$-измеримым. Остается учесть, что суперпозиция измеримых отображений будет должным образом измерима. $\square$

Пусть измеримые на $[0,T] \times \mathbb{R}$ функции b и σ удовлетворяют введенным выше условиям (61), (62).

Возьмем $X_t^0 = Z$, $t \in [0,T]$, и положим для $n \geqslant 1$

$$X_t^{(n)} = Z + \int_0^t b(s, X_s^{(n-1)})\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n-1)})\, dW(s). \tag{63}$$

То, что эта рекуррентная процедура законна, обосновывает

Лемма 6. *Пусть* b *и* σ *— описанные выше функции. Пусть величина* Z *является* $\mathscr{F}_0$*-измеримой, причем* $\mathsf{E}\, Z^2 < \infty$. *Тогда при каждом* $n \in \mathbb{N}$ *процесс* $X^{(n)} = \{X_t^{(n)},\ t \in [0,T]\}$ *корректно определяется формулой* (63), *прогрессивно измерим (т. е. допускает такую модификацию). При этом* $\sup\limits_{t\in[0,T]} \mathsf{E}\,|X_t^{(n)}|^2 < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, *и правая часть* (63) *может быть выбрана п. н. непрерывной на* $[0,T]$.

Доказательство. Из (64) в предположении, что $c_0 + q\int_0^t y(s)\,ds > 0$, имеем для $t \geqslant 0$ (в нуле правая производная)

$$\left(\ln\left(c_0 + q\int_0^t y(s)\,ds\right)\right)' = \frac{qy(t)}{c_0 + q\int_0^t y(s)\,ds} \leqslant q. \tag{66}$$

Интегрируя от 0 до t, получаем

$$\ln\left(c_0 + q\int_0^t y(s)\,ds\right) - \ln c_0 \leqslant qt, \qquad t \in [0,T].$$

Следовательно,

$$c_0 + q\int_0^t y(s)\,ds \leqslant c_0 e^{qt}, \qquad t \in [0,T].$$

Самостоятельно рассмотрите элементарные случаи, когда проведенные рассуждения необходимо уточнить (если $c_0 = 0$ и $y(s) = 0$ при $s \in [0,u]$, то брать логарифм в (66) нельзя). □

§ **17.** Следующий результат представляет собой теорему *существования и единственности* решения стохастического дифференциального уравнения.

Теорема 8. *Пусть измеримые на* $[0,T] \times \mathbb{R}$ *функции* b *и* σ *удовлетворяют условиям* (61) *и* (62). *Пусть величина* Z *является* $\mathscr{F}_0$*-измеримой, причем* $\mathsf{E}\,Z^2 < \infty$. *Тогда существует единственное сильное решение уравнения* (60) *с* $\mathscr{F}_0$*-измеримым начальным условием* $X_0 = Z$ *такое, что* $X_t \in L^2(\Omega)$ *для любого* $t \in [0,T]$ *и функция* $\mathsf{E}\,X_t^2$ *ограничена на* $[0,T]$.

Доказательство. Воспользуемся методом последовательных приближений, оперируя п. н. непрерывными процессами $X^{(n)} = \{X_t^{(n)},\, t \in [0,T]\}$, определенными в (63).

Разобьем доказательство на несколько шагов.

A. Оценим сверху $\mathsf{E}\,|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2$. Если $n = 0$, то, учитывая (62), для $t \in [0,T]$ имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,|X_t^{(1)} - X_t^{(0)}|^2 &= \mathsf{E}\left|\int_0^t b(s,Z)\,ds + \int_0^t \sigma(s,Z)\,dW_s\right|^2 \leqslant \\ &\leqslant 2\mathsf{E}\left(\int_0^t b(s,Z)\,ds\right)^2 + 2\mathsf{E}\left(\int_0^t \sigma(s,Z)\,dW_s\right)^2 \leqslant \\ &\leqslant 2(t+1)\mathsf{E}\int_0^t c(1+|Z|^2)\,ds \leqslant \\ &\leqslant 2ct(t+1)(1+\mathsf{E}\,Z^2) \leqslant M_1 t, \quad M_1 = 2c(T+1)(1+\mathsf{E}\,Z^2).\end{aligned} \tag{67}$$

Для $n \geqslant 1$ и $t \in [0,T]$, применяя (61), получаем

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\,|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 = \\
&\quad = \mathsf{E}\left(\int_0^t \big(b(s,X_s^{(n)}) - b(s,X_s^{(n-1)})\big)\,ds + \int_0^t \big(\sigma(s,X_s^{(n)}) - \sigma(s,X_s^{(n-1)})\big)\,dW_s\right)^2 \leqslant \\
&\quad \leqslant 2\mathsf{E}\left(\int_0^t L|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|\,ds\right)^2 + 2\mathsf{E}\int_0^t \big(\sigma(s,X_s^{(n)}) - \sigma(s,X_s^{(n-1)})\big)^2\,ds \leqslant \\
&\quad \leqslant 2L^2(1+T)\int_0^t \mathsf{E}\,|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2\,ds.
\end{aligned} \tag{68}$$

Из (67) и (68) по индукции заключаем, что при $M = \max\{M_1, 2L^2(1+T)\}$

$$\mathsf{E}\,|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \leqslant \frac{M^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!}\,, \qquad n = 0,1,\ldots, \quad t \in [0,T]. \tag{69}$$

При $m > n \geqslant 0$ и $t \in [0,T]$ в силу (69)

$$\begin{aligned}
(\mathsf{E}\,|X_t^{(m)} - X_t^{(n)}|^2)^{1/2} &\leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \|X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\left[\frac{(MT)^{k+1}}{(k+1)!}\right]^{1/2} \to 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned} \tag{70}$$

Полнота пространства $L^2(\Omega)$ влечет существование для каждого $t \in [0,T]$ предела в $L^2(\Omega)$ величин $X_t^{(n)}$ при $n \to \infty$. Этот предел обозначим Y_t ($t \in [0,T]$).

B. Теперь заметим, что $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|$ оценивается сверху величиной

$$\int_0^T \big|b(s,X_s^{(n)}) - b(s,X_s^{(n-1)})\big|\,ds + \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t \big(\sigma(s,X_s^{(n)}) - \sigma(s,X_s^{(n-1)})\big)\,dW_s\right|.$$

Теорема 2, следствие 6 главы IV, неравенства (68) и (69) влекут оценки

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > 2^{-n}\Big) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \mathsf{P}\left(\left(\int_0^T \big|b(s,X_s^{(n)}) - b(s,X_s^{(n-1)})\big|\,ds\right)^2 > 2^{-2n-2}\right) + \\
&\qquad\quad + \mathsf{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t \big(\sigma(s,X_s^{(n)}) - \sigma(s,X_s^{(n-1)})\big)\,dW_s\right| > 2^{-n-1}\right) \leqslant \\
&\qquad \leqslant 2^{2n+2}T\int_0^T \mathsf{E}\,\big(b(s,X_s^{(n)}) - b(s,X_s^{(n-1)})\big)^2\,ds + \\
&\qquad\quad + 2^{2n+2}\int_0^T \mathsf{E}\,\big|\sigma(s,X_s^{(n)}) - \sigma(s,X_s^{(n-1)})\big|^2\,ds \leqslant \\
&\qquad \leqslant 2^{2n+2}L^2(T+1)\int_0^T \frac{M^n s^n}{n!}\,ds \leqslant \frac{(4MT)^{n+1}}{(n+1)!}\,.
\end{aligned} \tag{71}$$

По лемме Бореля–Кантелли из полученного неравенства следует, что

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|>2^{-n}\text{ бесконечно часто}\Big)=0. \tag{72}$$

Поэтому для п. в. ω существует $N_0=N_0(\omega)$ такое, что для всех $n\geqslant N_0(\omega)$

$$\sup_{t\in[0,T]}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|\leqslant 2^{-n}. \tag{73}$$

Итак, последовательность

$$X_t^{(n)}(\omega)=X_t^{(0)}(\omega)+\sum_{k=0}^{n-1}\big(X_t^{(k+1)}(\omega)-X_t^{(k)}(\omega)\big), \tag{74}$$

состоящая из функций, п. н. непрерывных на отрезке $[0,T]$, с вероятностью 1 равномерно сходится на этом отрезке. Пусть Ω_0 — множество, где все $X_t^{(n)}$ непрерывны на $[0,T]$ и равномерно сходятся; $\mathsf{P}(\Omega_0)=1$. Для $\omega\in\Omega_0$ обозначим $X_t(\omega)=\lim_{n\to\infty}X_t^{(n)}(\omega)$. Для $\omega\in\Omega\setminus\Omega_0$ и $t\in[0,T]$ пусть $X_t(\omega)=0$. Отсюда вытекает, что $X_t(\omega)$ является непрерывной функцией на $[0,T]$ для всех ω. Величина $X_t\in\mathscr{F}_t\mid\mathscr{B}(\mathbb{R})$ в силу леммы 6 главы I как предел величин $X_t^{(n)}$, являющихся $\mathscr{F}_t$-измеримыми. Прогрессивная измеримость процесса $\{X_t,\,t\in T\}$ вытекает из его непрерывности и согласованности с фильтрацией $\mathbb{F}_T$.

Очевидно, $Y_t=X_t$ п. н. при каждом $t\in[0,T]$, где процесс $Y=\{Y_t,\,t\in[0,T]\}$ построен в пункте **A**.

C. Покажем, что процесс $X=\{X_t,t\in[0,T]\}$ есть решение уравнения (60).

Из (70) для всех $t\in[0,T]$ и $m\in\mathbb{N}$ имеем

$$\|X_t^{(m)}\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\|Z\|_{L^2(\Omega)}+\sum_{k=0}^{\infty}\bigg(\frac{(MT)^{k+1}}{(k+1)!}\bigg)^{1/2}=\|Z\|_{L^2(\Omega)}+c(M,T). \tag{75}$$

Поэтому и

$$\|X_t\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\|Z\|_{L^2(\Omega)}+c(M,T)\quad\text{для}\quad t\in[0,T]. \tag{76}$$

Пользуясь теоремой Фубини и теоремой Лебега о мажорируемой сходимости, с учетом (75) и (76) получаем, что

$$\mathsf{E}\int_0^T(X_s-X_s^{(n)})^2\,ds=\int_0^T\mathsf{E}\,(X_s-X_s^{(n)})^2\,ds\to 0\quad\text{при}\quad n\to\infty. \tag{77}$$

В силу (61) и (77) для каждого $t\in[0,T]$ при $n\to\infty$

$$\int_0^t\sigma(s,X_s^{(n)})\,dW_s\xrightarrow{L^2(\Omega)}\int_0^t\sigma(s,X_s)\,dW_s,$$

$$\int_0^t b(s,X_s^{(n)})\,ds\xrightarrow{L^2(\Omega)}\int_0^t b(s,X_s)\,ds.$$

Таким образом, для каждого $t \in [0,T]$, переходя к пределу в (63) по подпоследовательности $\{n_m = n_m(t)\}$, получаем (60).

D. Докажем единственность решения. Прежде всего покажем, что если процесс $X = \{X_t,\, t \in [0,T]\}$ непрерывен п. н. на $[0,T]$ и $\sup\limits_{t\in[0,T]} \mathsf{E}\, X_t^2 < \infty$, то этот процесс непрерывен в среднем квадратическом на $[0,T]$.

Для $s, t \in [0,T]$ имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,(X_t - X_s)^2 &= \mathsf{E}\left[\int_s^t b(u, X_u)\, du + \int_s^t \sigma(u, X_u)\, dW_u\right]^2 \leqslant \\ &\leqslant 2(t-s)\int_s^t \mathsf{E}\, b^2(u, X_u)\, du + 2\int_s^t \mathsf{E}\,\sigma^2(u, X_u)\, du \leqslant \\ &\leqslant 2c(t-s)\Big(1 + \sup_{[0,T]} \mathsf{E}\, X_u^2\Big)(1+T).\end{aligned}$$

Заметим также, что $\|X_t\|_{L^2(\Omega)}$ является функцией, непрерывной на $[0,T]$.

Пусть X_t — сильное решение (60) с начальным условием $X_0 = Z$, а $\widetilde{X}_t$ — сильное решение (60) с начальным условием $\widetilde{X}_0 = \widetilde{Z}$ (Z и $\widetilde{Z}$ удовлетворяют условиям доказываемой теоремы), причем функции $\mathsf{E}\, X_t^2$ и $\mathsf{E}\, \widetilde{X}_t^2$ ограничены на $[0,T]$. Тогда процесс $X - \widetilde{X}$ непрерывен в среднем квадратическом на $[0,T]$ и функция $y(t) = \mathsf{E}\,(X_t - \widetilde{X}_t)^2$ непрерывна на $[0,t]$. Аналогично (68) находим, что

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,|X_t - \widetilde{X}_t|^2 &\leqslant 3\mathsf{E}\,|Z - \widetilde{Z}|^2 + 3\mathsf{E}\left(\int_0^t \big(b(s, X_s) - b(s, \widetilde{X}_s)\big)\, ds\right)^2 + \\ &\quad + 3\mathsf{E}\left(\int_0^t \big(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, \widetilde{X}_s)\big)\, dW_s\right)^2 \leqslant \\ &\leqslant 3\mathsf{E}\,|Z - \widetilde{Z}|^2 + 3(1+t)L^2 \int_0^t \mathsf{E}\,|X_s - \widetilde{X}_s|^2\, ds. \qquad (78)\end{aligned}$$

Таким образом, получаем неравенство (64), в котором $c_0 = \mathsf{E}\,|Z - \widetilde{Z}|^2$, $q = 3(1+T)L^2$.

Теперь нужное нам утверждение о единственности сильного решения вытекает из леммы 7: если $Z = \widetilde{Z}$ п. н., то $c_0 = 0$ в (64) и, следовательно, $\mathsf{E}\,|X_t - \widetilde{X}_t|^2 = 0$ для каждого $t \in [0,T]$. Принимая во внимание непрерывность траекторий $|X_t - \widetilde{X}_t|$, заключаем, что процессы X и $\widetilde{X}$ *неразличимы*, т. е.

$$\mathsf{P}\big(X_t(\omega) = \widetilde{X}_t(\omega) \text{ для всех } t \in [0,T]\big) = 1. \ \square$$

Замечание 2. Единственность сильного решения уравнения (60) можно доказать в более широком классе процессов (см. упражнение 21).

§ **18.** Этот раздел посвящен свойству марковости (сильных) решений стохастических дифференциальных уравнений.

Заметим, что теорема 8 очевидным образом переформулируется на случай, когда вместо $[0,T]$ рассматривается промежуток $[u,T]$, $0 \leqslant u < T < \infty$, т. е. когда ищется решение уравнения

$$Z_t = \xi + \int_u^t b(s, Z_s)\, ds + \int_u^t \sigma(s, Z_s)\, dW_s \qquad (79)$$