Основные классы случайных процессов

1. $\xi_t = \sin w_t$, $t \geq 0$.
   1) Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} m_\xi(t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} K_{\xi\xi}(t+s,t)$.
   2) Является ли процесс ξ_t *а*) непрерывным в среднем квадратичном; *б*) стационарным; *в*) гауссовским ?

2. $\xi_t = \sin w_t$, $t \geq 0$.
   1) Найти конечномерные распределения.
   2) Вычислить слабый предел одномерного распределения при $t \to \infty$.

3. $\xi_t = w_t^2 - t$, $t \geq 0$.
   1) Найти одномерные распределения.
   2) Является ли процесс *а*) гауссовским; *б*) стационарным; *в*) непрерывным в среднем квадратичном.

4. $\xi_t = \cos \pi_t$, $t \geq 0$.
   1) Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} m_\xi(t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} K_{\xi\xi}(t+s,t)$.
   2) Будет ли процесс ξ_t *а*) непрерывным в среднем квадратичном; *б*) стационарным; *в*) гауссовским ?

5. $\xi_t = (-1)^{\pi_t}$, где π_t — пуассоновский процесс.
   1) Является ли ξ_t цепью Маркова с непрерывным временем ? Если ответ утвердительный, найти переходные вероятности, матрицу интенсивностей, стационарное распределение ?
   2) Является ли процесс ξ_t дифференцируемым в среднем квадратичном ?

6. Пусть $\xi_t = \left\{\frac{1}{4}\pi_t\right\}$, $t \geq 0$, где π_t — пуассоновский процесс. Найти конечномерные распределения ξ_t.

7. Пусть $\xi_t = \exp(w_t - t/2)$. Найти $m_\xi(t)$, $K_{\xi\xi}(s,t)$. Будет ли процесс ξ_t *а*) непрерывным в среднем квадратичном; *б*) стационарным; *в*) гауссовским ?

Марковские процессы

8. Игральная кость последовательно перекладывается с одной грани равновероятно на любую из четырех соседних независимо от предыдущего. Найти предел при $t \to \infty$ вероятности того, что после t-го перекладывания кость окажется на грани "6" ?

9. Пусть π_t, $t \geq 0$, — пуассоновский процесс с параметром $\lambda > 0$. Найти матрицу переходов и стационарное распределение цепи Маркова

$$\xi_n = \pi_{nh}\,(mod\,9),$$

   где $h > 0$ — постоянная.

10. Является ли процесс $\xi_t = [w_t]$, $t \geq 0$, цепью Маркова ?

11. Является ли процесс $\xi_n = w_n$, $n \in \mathbb{N}$, цепью Маркова ?

12. Является ли процесс $\xi_n = w_n \,(mod\, 10)$, $n \in \mathbb{N}$, цепью Маркова ?

13. Найти стационарное распределение цепи Маркова с непрерывным временем, имеющей пространство состояний $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и следующие ненулевые интенсивности переходов: $q_{k,k+1} = \alpha_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $q_{j,,j-1} = \beta_j$, $j \in \mathbb{N}$.

14. Найти стационарное распределение дискретной цепи Маркова ($t \in \mathbb{Z}_+$) с пространством состояний $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и со следующими ненулевыми вероятностями переходов за один шаг: $p_{j,,j-1} = 1$, $j \in \mathbb{N}$, и $p_{0,k} = \gamma_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, где $\gamma_k > 0$, $\sum\limits_k \gamma_k = 1$.

15. Пусть $\xi_t = \left\{\frac{1}{4}\pi_t\right\}$, $t \geq 0$, где π_t — пуассоновский процесс. Является ли процесс ξ_t цепью Маркова ? Если ответ утвердительный, найти переходные вероятности, матрицу интенсивностей, стационарное распределение ?

16. Является ли процесс $\xi_t = |w_t|$, $t \geq 0$, марковским процессом ? Найти его конечномерные распределения, переходную функцию, стационарное распределение.

17. Является ли процесс $\xi_t = (1 + |w_t|)^{-1}$, $t \geq 0$, марковским процессом ? Найти его конечномерные распределения, переходную функцию, стационарное распределение.

18. Пусть $\xi_t = w_t \ (mod\ 2\pi)$. Является ли процесс ξ_t, $t \geq 0$, марковским процессом ? Найти его конечномерные распределения, переходную функцию, стационарное распределение.

Мартингалы

19. В начальный момент в урне находятся белый и черный шары. Каждый раз из урны вынимается один шар и заменяется двумя шарами того же цвета. Пусть ξ_n — доля белых шаров в урне после n таких операций. Доказать, что (ξ_n, $n \in \mathbb{N}$)— мартингал.

20.