① Лин. ур-я 2 порядка. Задача Коши. Характер. напр. и характер. пов-ти.

Опр. Ур-е в част. произв. – соотношение $\Phi\left(x_i, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right) = 0$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$.

Ур-е линейно, если Φ лин. по всем перем. и производным.

Опр. Лин. ур-е 2-го порядка – ур-е вида
$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f,$$
где $a_{ij}(x), b_i(x), c(x), f(x) \in C(Q)$, $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$

Задача Коши:

Q – обл, $S \subset Q$, $S: \{x : F(x) = 0\}$ – гиперпов-ть, $F(x) \in C^2(Q)$,

$|\nabla F| \neq 0$ $x \in S$

градиент

$l(x)$ – вект. поле в Q (считаем $|l(x)| = 1$)

$\nu = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$ – нормаль к S

$S_0 = U(x_0) \cap S$ $\quad (l(x), \nabla F(x)) \neq 0$ – вект. поле не кас-ся пов-ти

Опр. Задача нахождения решения ур-я $Lu = f$, удовл. усл. $u_0|_{S_0} = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{S_0} = u_1(x)$ наз-ся задачей Коши.

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

Можно считать, что $A = (a_{ij})$ симметрична, если нет, то заменяем $\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$ (т.к $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$)

Т.к. $|\nabla F(x)| \neq 0$, то $\exists$ произв. $\neq 0$.

$\exists F_{x_n}(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists U(x_0): \forall x \in U(x_0)$ $F_{x_n}(x) \neq 0$

1

$x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \dots \\ x_{n0} \end{pmatrix}$ Введём $\begin{cases} y_n = F(x_1, .., x_n) \\ y_1 = x_1 - x_{1,0} \\ \dots \\ y_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-1,0} \end{cases}$

$x_0 \to y_0 \quad (F(x)=0)$

$S_0 = \{x_n = \varphi(x_1, .., x_{n-1})\}$

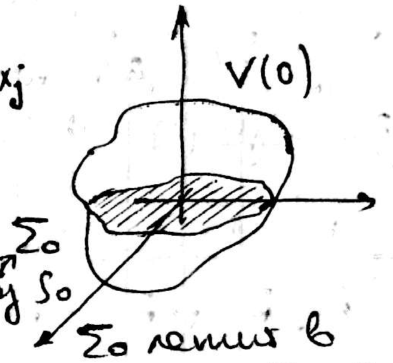
Якобиан замены: $J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ F_{x_1} & F_{x_2} \dots & F_{x_{n-1}} & F_{x_n} \end{vmatrix} = F_{x_n} \neq 0$ в окр-ти

замена невырожд.

Перепишем через $y_1, .., y_n$:

$$u_{x_i} = u_{y_1} y_{1x_i} + \dots + u_{y_n} y_{n x_i} = \sum_{p=1}^n u_{y_p} y_{p x_i}$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{p=1}^n u_{y_p} y_{p x_i x_j} + \sum_{p,q=1}^n u_{y_p y_q} y_{p x_i} y_{q x_j}$$



$$L^* u = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u)_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^n (b_i u)_{x_i} + cu$$

↑ формально сопрят. по Лагранжу

Σ_0 образ S_0

Σ_0 лежит в гиперпл-ти $y_n = 0$ $(y_n = F(x_1, .., x_n) = 0)$

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{p,q=1}^n u_{y_p y_q} y_{p x_i} y_{q x_j} + \sum_{p=1}^n u_{y_p} y_{p x_i x_j} \right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^n b_i \left(\sum_{p=1}^n u_{y_p} y_{p x_i} \right) + cu =$$

$$= \sum_{p,q=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_{p x_i} y_{q x_j} \right)}_{\alpha_{pq}} u_{y_p y_q} + \sum_{p=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_{p x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i y_{p x_i} \right)}_{\beta_p} u_{y_p} +$$

$$+ cu = \sum_{p,q=1}^n \alpha_{pq} u_{y_p y_q} + \sum_{p=1}^n \beta_p u_{y_p} + cu \; (= f_1(y))$$

$$\alpha_{pq} = (A(x(y)) \nabla y_p, \nabla y_q)$$

$$\alpha_{nn} = (A \nabla F, \nabla F)$$

Начальные условия:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{\Sigma_0} = \frac{1}{|l|} \sum_{i=1}^n u_{x_i} l_i \Big|_{\Sigma_0} = \frac{1}{|l|} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{p=1}^n u_{y_p} y_{p x_i} \right) l_i =$$

(1)

$$= \frac{1}{|l|} \sum_{p=1}^{n} u_{y_p} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} y_{p_{x_i}} l_i\right.}_{=\tilde{l}_p} = \frac{1}{|l|} \sum_{p=1}^{n} u_{y_p} \tilde{l}_p = (\nabla_y u, \tilde{\lambda}) = \tilde{u}_1$$

$$\tilde{\lambda} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial l}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial l}\right), \quad \frac{\partial y_n}{\partial l} \neq 0$$

$$\tilde{l}_n = \sum_{i=1}^{n} y_{n_{x_i}} l_i = (\nabla F, l) \neq 0$$

$$u\big|_{\Sigma_0} = u_0(y_1, \dots, y_{n-1}) \qquad \Sigma_0 = \{y_n = 0\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{l}}\Big|_{\Sigma_0} = \tilde{u}_1(y_1, \dots, y_{n-1})$$

$$u_{y_n y_n} = \frac{1}{\alpha_{nn}} \Big(- \sum_{\substack{p,q=1 \\ (p,q)\neq(n,n)}}^{n} \alpha_{pq} u_{y_p y_q} - \sum_{p=1}^{n} \beta_p u_{y_p} - \gamma u + f\Big)$$

Опр. Направление $\eta \in \mathbb{R}^n$, $|\eta| = 1$, наз. характеристич. для дифф. оператора L, если $(A\eta, \eta) = 0$.

Опр. Точка $x_0 \in S$ наз. характеристич. для L, если $(A\nabla F, \nabla F) = 0$ в x_0.

Пов-ть S наз. характеристич, если все её точки характеристич.

② Нехарактер. зад. Коши в классе аналит. ф-ций. Аналит. ф-ции неск. компл. перем. Мажоранты. Мажор. задачи Лок. теор. Коши – Ковал. Глоб. теор. Коши – Ковал.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f & (1) \\ (A \nabla F, \nabla F) \neq 0, \ x \in S \\ u|_S = u_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_S = u_1 \end{cases} \quad (2)$$

<u>Опр</u>. Задача (1),(2) наз-ся нехарактер. задачей Коши.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – область, $x_0 \in Q$

<u>Опр</u>. Ф-ция $g(x)$ наз-ся аналитической в т. $x_0 \in Q$, если $\exists\, U(x_0) \subset Q : \forall x \in U(x_0)$ $\quad g(x) = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{\infty} g_\alpha (x - x_0)^\alpha$, и ряд сх-ся абс.

мультииндекс $\alpha_1, \dots \alpha_n$ $\quad x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$

<u>Опр</u>. Аналит. в т. $x_0 \in Q$ ф-ция $\tilde{g}(x)$ наз-ся мажорантой ф-ции $g(x)$, если $\forall \alpha$, $0 \le |\alpha| < \infty$, $\quad |g_\alpha| \le \tilde{g}_\alpha$

$g(x) = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{\infty} g_\alpha x^\alpha$ – аналит. в т. $0 = x_0$

$\exists\, b > 0 : \ \underbrace{(b \dots b)}_{x} \subset U(x_0)$

$g(x) = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{\infty} g_\alpha b^{|\alpha|}$, ряд сх-ся абс

$\exists M\ \forall \alpha \quad |g_\alpha| b^{|\alpha|} \le M \Rightarrow |g_\alpha| \le \dfrac{M}{b^{|\alpha|}}$

Рассм. $\quad \tilde{g}(x) = M \sum\limits_{\alpha_1=0}^{\infty} \dots \sum\limits_{\alpha_n=0}^{\infty} \dfrac{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}}{b^{|\alpha|}} = M \dfrac{1}{1 - \frac{x_1}{b}} \cdot \ldots \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{x_n}{b}}$

Сх-ть абс при $\begin{cases} x_1 < b \\ \vdots \\ x_n < b \end{cases} \Rightarrow \tilde{g}(x)$ аналит. и явл. мажор.

$\tilde{\tilde{g}}(x) = \dfrac{M}{1 - \frac{x_1 + \dots x_n}{b}}$ – мажоранта для $g(x)$ при нек. M, b

$$\tilde{\tilde{g}} \geq \tilde{g} \geq g$$

(2)

$$\tilde{g}(x) = M\sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{(x_1+\ldots+x_n)^\beta}{b^\beta} = M\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{1}{b^{|\alpha|}}\sum_{\substack{k_1=0\\ k_n=0}}^{|\alpha|}\underbrace{\frac{|\alpha|!}{k_1!\ldots k_n!}}_{\geq 1}x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n} \geq$$

$\geq \tilde{g}(x)$, если $\frac{|x_1|+\ldots+|x_n|}{b} < 1$, то $\tilde{g}(x)$ мажоранта

Если ввести $\tilde{\tilde{g}}(x) = \frac{M}{1-\frac{x_1+\ldots\frac{x_n}{a}}{b}} = M\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(x_1+\ldots+x_{n-1}+\frac{x_n}{a})^j}{b^j}$,

то $\forall\, 0<a<1$ $\tilde{\tilde{g}}(x) \geq \tilde{g}$ – мажоранта

Пусть есть задача
$$\begin{cases} u_{y_n y_n} = \sum\limits_{\substack{i,j=1\\(i,j)\neq(n,n)}}^{n} p_{ij}u_{y_i y_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} q_i u_{y_i} + su + f \\ u|_\Sigma = \tilde{u}_0 \\ u_{y_n}|_\Sigma = \tilde{u}_1 \end{cases}$$

Опр. Мажорирующей по отнош. к этой задаче явл. задача
$$\begin{cases} v_{y_n y_n} = \sum\limits_{\substack{i,j=1\\(i,j)\neq(n,n)}}^{n} \tilde{p}_{ij}v_{y_i y_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{q}_i v_{y_i} + \tilde{s}u + \hat{f} \\ v|_\Sigma = \tilde{v}_0 \\ v_{y_n}|_\Sigma = \tilde{v}_1 \end{cases}$$
где $\tilde{p}_{ij}, \hat{q}_i, \hat{f}, \tilde{s}, \tilde{v}_0, \tilde{v}_1$ – мажор. в нуле для $p_{ij}, \ldots$, соответственно

Теор (Лок. теор К-К)

$Lu = f$ (1)

$u|_S = u_0$, $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_S = u_1$ (2)

Пусть данные задачи (1), (2) аналит. Тогда $\forall x_0 \in S$, $(A\nabla F, \nabla F) \neq 0$

$\exists\, U(x_0) \subset Q$, в кот. зад. (1), (2) имеет аналит. реш., и ни в какой окр. не м.б. больше одного аналит. реш.

Теор (Глоб. т. К-К)

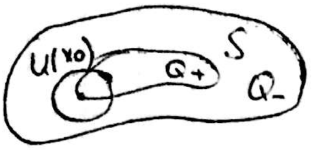
Пусть данные зад. (1), (2) аналит. и $(A\nabla F, \nabla F) \neq 0$ на S. Тогда $\exists\, Q' \subset Q$, $Q' \supset S$: в Q' $\exists$ аналит. реш. и ни в какой обл., содерж. S, не м.б. ≥ 1 аналит. реш.

③ Лок. теор. Коши-Ковал. Глоб. теор. Коши-Ковал. Принцип Адамара.

Задача Коши: $Lu = f$ (1)

$u|_S = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_S = u_1$ (2)

<u>Теор</u> (Лок. т. К-К).
Пусть данные зад. (1), (2) аналит. и $(A\nabla F, \nabla F) \neq 0$. Тогда $\forall x_0 \in S$ $\exists\, U(x_0) \subset Q$, в кот. (1), (2) имеет аналит. реш., и ни в какой окр. не м.б. ≥ 1 аналит. реш.

▲ 

Пусть $F_{x_n}(x_0) \neq 0$
Замена: $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_{10} \\ \dots \\ y_n = F(x) \end{cases}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} u_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_{y_i} + \gamma u = \tilde{f}$$

$$u|_\Sigma = u_0, \quad u_{y_n}|_\Sigma = u_1 \quad (4)$$

$$\alpha_{nn} = (A\nabla F, \nabla F) \neq 0$$

$$u_{y_n y_n} = \frac{1}{\alpha_{nn}}\Big(-\sum_{\substack{i,j=1\\(i,j)\neq(n,n)}}^{n} \alpha_{ij} u_{y_i y_j} - \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_{y_i} - \gamma u + \tilde{f}\Big) = \sum_{\substack{i,j=1\\(n,n)\neq(i,j)}}^{n} \tilde{\alpha}_{ij} u_{y_i y_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \tilde{\beta}_i u_{y_i} + \tilde{\gamma} u + \tilde{\tilde{f}} \quad (3)$$ – разреш. отн. $u_{y_n y_n}$

Рассм. ф-цию $V = u - u_0(y_1, .., y_{n-1}) - y_n u_1(y_1, .., y_{n-1})$
$u = V + V_0 + y_n u_1$

$$V_{y_n y_n} = \sum_{\substack{i,j=1\\(i,j)\neq(n,n)}}^{n} \tilde{\alpha}_{ij} V_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\beta}_i V_{y_i} + \tilde{\gamma} V + \tilde{\tilde{\tilde{f}}} \quad (5)$$

$$V|_{y_n=0} = 0, \quad V_{y_n}|_{y_n=0} = 0 \quad (6)$$

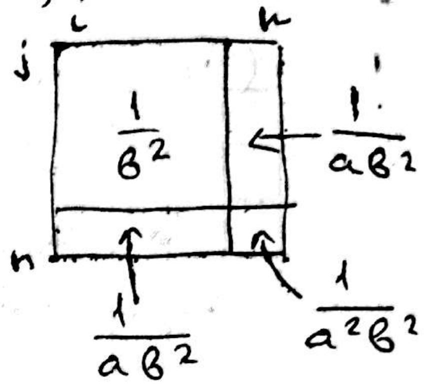
$$W_{y_n y_n} = \frac{M}{1 - \frac{y_1 + .. + y_{n-1} + \frac{y_n}{a}}{\theta}} \Big(\sum_{\substack{i,j=1\\(i,j)\neq(n,n)}}^{n} W_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{n} W_{y_i} + W + 1\Big) \quad (7)$$

мажор.
$0 < a \leq 1$

$$W|_{y_n=0} = 0 \quad W_{y_n}|_{y_n=0} = 0 \quad (8)$$

③ $(7), (8) \succcurlyeq (5), (6)$ (мажорирует)

$$w = \tilde w\left(\underbrace{\frac{y_1+\dots+y_{n-1}+\frac{y_n}{a}}{b}}_{z}\right) = \tilde w(z)$$



$$\frac{1}{a^2b^2}\tilde w'' = \frac{M}{1-\frac{y_1+\dots+y_{n-1}+\frac{y_n}{a}}{b}}\left(\left((n-1)^2\frac{1}{b^2} + 2(n-1)\frac{1}{ab^2}\right)\tilde w'' + \left(\frac{n-1}{b}+\frac{1}{ab}\right)\tilde w' + \tilde w + 1\right)$$

Взяли производную у (7)

хотим разрешить относ. старшей производной

$$\left(\frac{1}{a^2b^2} - \frac{M}{1-\frac{y_1+\dots+\frac{y_n}{a}}{b}}\left((n-1)^2\frac{1}{b^2} + \frac{2(n-1)}{ab^2}\right)\right)\tilde w'' =$$

$$= \frac{M}{1-\frac{y_1+\dots+\frac{y_n}{a}}{b}}\left(\left(\frac{n-1}{b}+\frac{1}{ab}\right)\tilde w' + \tilde w + 1\right)$$

При дост. малом a:

$y=0$: $\frac{1}{a^2b^2} - M\left(\frac{(n-1)^2}{b^2} + \frac{2(n-1)}{ab^2}\right) > 0 \Rightarrow$ в нек. окр. тоже >0

$\tilde w'' = \dots$ (9)

$\tilde w(0) = \tilde w'(0) = 0$ (10)

$|z|<\delta$ — аналит. реш. (9), (10)

ур-е (7) $\tilde w|_{y_n=0} = \tilde w\left(\frac{y_1+\dots+y_{n-1}}{b}\right)$

$$\tilde w_{y_n}|_{y_n=0} = \frac{1}{ab}\tilde w'\left(\frac{y_1+\dots+y_{n-1}}{b}\right)$$

$$\tilde w_{y_ny_n} = \frac{M}{1-\frac{y_1+\dots+\frac{y_n}{a}}{b}}\left(\sum_{\substack{i,j=1\\(i,j)\ne(n,n)}}^{n} \tilde w_{y_iy_j} + \sum_{i=1}^{n} w_{y_i} + \tilde w + 1\right)$$

Решение мажор. задачи — мажор-та решения

③

<u>Теор</u> (Глоб. т. К-К).

Пусть данные зад. (1), (2) аналит. и $(A\nabla F, \nabla F) \neq 0$ на S.
Тогда $\exists\, Q' \subset Q$, $S \subset Q'$: в Q' $\exists$ аналит. реш., ни в какой обл, содерж. S, не м.б. ≥ 1 аналит. реш.

<u>Пример Адамара</u> (об отсутствии непр. зависимости от нач. усл)

$\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0$

$S = \{x_2 = 0\}$ $\qquad Q = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (A\nu, \nu) = 1 \neq 0$

$u(x_1, 0) = d_m \sin m x_1$

$u_{x_2}(x_1, 0) = 0$

$u(x_1, x_2) = d_m \dfrac{e^{mx_2} + e^{-mx_2}}{2} \sin m x_1$

$u_{x_1x_1} = -m^2 d_m \dfrac{e^{mx_2} + e^{-mx_2}}{2} \sin m x_1$

$u_{x_2x_2} = m^2 d_m \dfrac{e^{mx_2} + e^{-mx_2}}{2} \sin m x_1$

Пусть $d_m = \dfrac{1}{m}$, тогда $u = \dfrac{1}{2m}(e^{mx_2} + e^{-mx_2}) \sin m x_1$

$u(x,0) = \dfrac{\sin m x_0}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

$u(x,0) = \dfrac{\cos m x_1}{e^{\sqrt{m}}} \underset{m\to\infty}{\overset{R}{\rightrightarrows}} 0$

④ Классификация лин. дифф. ур-ий 2 пор. Приведение к канон. виду.

$Lu = \sum a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum b_i u_{x_i} + cu = f$

$A = (a_{ij}(x))$ – симм (предполагаем)

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – с/з A

n_+ – кол-во $\lambda > 0$

n_- – $\lambda < 0$

n_0 – $\lambda = 0$

Опр. Ур-е наз. эллиптич. в т. x_0, если $n_+ = n$ или $n_- = n$

Ур-е наз. гиперб. в т. x_0, если $n_+ = 1$, $n_- = n-1$ или $n_+ = n-1$, $n_- = 1$.

Ур-е наз. ультрагиперб. в т. x_0, если $n_+ \geq 2$, $n_- \geq 2$, $n_0 = 0$

Ур-е наз. параболич. в шир. смысле, если $n_0 > 0$.

Хотим привести к канон виду

Замена $y(x)$: $\mathcal{U}(x_0) \to V(y_0)$, $y_i(x) \in C^2(\mathcal{U})$

$$u_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} u_{y_j} y_{j x_i}$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} u_{y_k y_l} y_{k x_i} y_{l x_j} + \sum_{k=1}^{n} u_{y_k} y_{k x_i x_j}$$

Подставляем: $\alpha_{kl} = \sum_{j,i=1}^{n} a_{ij} y_{k x_i} y_{l x_j}$

$$\beta_k = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{y_{k x_i x_j}} + \sum_{i=1}^{n} b_i y_{i x_k}$$

2 случая: $n=2$ и $n>2$

① $n=2$

$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu = f$

(ADF, DF): $a_{11} F_x^2 + 2a_{12} F_x F_y + a_{22} F_y^2 = 0$ – ур-е хар-к

Лемма. Ф-ция $\xi = \xi(x,y)$ явл. реш. ур-я $a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0 \iff$ она явл. интегралом ур-я

④ $a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0$

▲ $\Leftarrow \quad \xi(x,y) = c$

$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y} \Rightarrow a_{11}\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\xi_x}{\xi_y} + a_{22} = 0$ ■

∃ замена, приводящая к канон виду во всей обл.

$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y)$

$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \qquad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$

$u_{xx} = \dots \qquad u_{yy} = \dots$

$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x) + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$

$(a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2)u_{\xi\xi} + 2(a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y)u_{\xi\eta} + (a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2)u_{\eta\eta} = F$

1) $\Delta = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ (гиперболич.)

$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$ волновое

$\begin{cases}\xi = \Phi_1 \\ \eta = \Phi_2\end{cases}$ – 2 интеграла

$\boxed{u_{\xi\eta} = F}$ канон вид

2) $\Delta > 0$ (эллиптич)

$\begin{cases}\xi = \mathrm{Re}\,\Phi \\ \eta = \mathrm{Im}\,\Phi\end{cases}$

$\boxed{u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F}$ Лаплас

$\alpha = \Phi_1 = \tilde{\Phi} + i\hat{\tilde{\Phi}} \qquad u_{\alpha\beta} = F$

$\beta = \Phi_2 = \tilde{\Phi} - i\hat{\tilde{\Phi}} \qquad \xi = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \eta = \frac{\alpha-\beta}{2}$

4

3) $\Delta = 0$ (параболич) теплопроводность

$\begin{cases} \xi = \Phi & \text{- первый интеграл} \\ \eta = \eta & \text{- } \eta \text{ - любая, т.ч.} \end{cases}$ $\begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$

2 $n > 2$

Замена возможна только в окр. точки

(5) Задача Коши для волнового ур-я. Классич. реш. зад. Коши, его единственность.

Задача Коши:

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad (f(x,t)) \quad , x \in \mathbb{R}^n, t>0 \quad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x)$$
$$u_t(x,0) = \psi(x) \quad (2)$$

гипербол. тип
нехарактер. з. к.

Опр. Классич. реш. зад. Коши для волн. ур-я наз-ся $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)) \cap C^1(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$.

Теор. Задача (1), (2) имеет ≤ 1 классич. реш.

▲ Пусть u_1, u_2 – 2 реш., $v = u_1 - u_2 \Rightarrow v$ – тоже реш.

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0 \\ v(x,0) = 0 \\ v_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

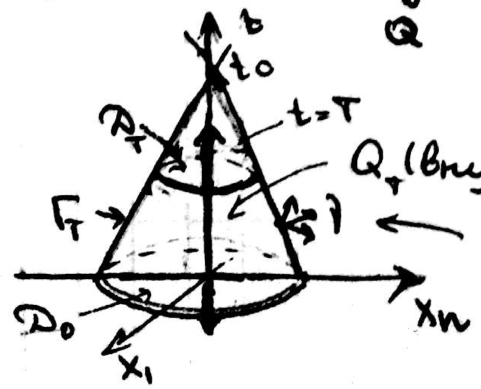
$$2v_t(v_{tt} - \Delta v) = 0$$

$$2v_t v_{tt} - 2v_t \Delta v = (v_t^2)_t - \operatorname{div}(2v_t \nabla v) + \underbrace{2(\nabla_t, \nabla u)}_{\frac{\partial}{\partial t}(|\nabla v|^2)} \ominus$$

$$\left[\begin{aligned} 2v_t \Delta v &= 2v_t \sum_1^n v_{x_i x_i} = \sum_1^n (2v_t v_{x_i})_{x_i} - 2\sum_1^n v_{t x_i} v_{x_i} = \\ &= \operatorname{div}(2v_t, \nabla v) - \left(\sum_1^n v_{x_i}^2\right)_t = \operatorname{div}(2v_t, \nabla v) - |\nabla v|^2_t \end{aligned} \right]$$

$$\ominus (v_t^2 + |\nabla v|^2)_t - \operatorname{div}(2v_t \nabla v) = \operatorname{div}_{n+1} \begin{pmatrix} -2v_t \nabla v \\ u_t^2 + |\nabla u|^2 \end{pmatrix}$$

Ф-ла Г-О: $\int\limits_Q \operatorname{div} \bar{b}\, dx = \int\limits_{S=\partial Q} (\bar{b}, \nu)\, ds$



$$\nu = \nu' + \nu_{n+1}$$
$$|\nu|^2 = |\nu'|^2 + |\nu_{n+1}| = 1$$

$$\operatorname{div}_{n+1} \begin{pmatrix} -2v_t \nabla v \\ v_t^2 + |\nabla v|^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$⑤\ 0 = \int\limits_{D_T} (v_t^2 + |\nabla v|^2)\,dx - \int\limits_{D_0} (v_t^2 + |\nabla v|^2)\,dx + \int\limits_{\Gamma_T} \Big(-2\nu_t(\nabla v, \nu') +$$

$$+ (v_t^2 + |\nabla v|^2)\,\nu_{n+1}\Big)\,ds \ \geq$$

$(t-t_0)^2 - |x|^2 = 0$ Находим градиент $\nu = \dfrac{(-x, t-t_0)}{\sqrt{|x|^2 + (t-t_0)^2}}$

$\nu' = \dfrac{-x}{\sqrt{\ldots}}$

$\nu_{n+1} = \dfrac{t-t_0}{\sqrt{\ldots}}$

$1 = |\nu|^2 = |\nu'|^2 + \nu_{n+1}^2$

$$|\nu'|^2 = \frac{x^2}{|x|^2 + (t-t_0)^2} = \frac{(t-t_0)^2}{|x|^2 + (t-t_0)^2} = \nu_{n+1}^2 \Rightarrow |\nu'| = \nu_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$a \geq -|a|$

$$-2\nu_t(\nabla v, \nu') \geq -2|v_t| \cdot |(\nabla v, \nu')| \geq -2|v_t|\,|\nabla v| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

? $\nu' \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ нер-во К-Б

$$\geq \int\limits_{D_T} (v_t^2 + |\nabla v|^2)\,dx - \int\limits_{D_0} (v_t^2 + |\nabla v|^2)\,dx + \int\limits_{\Gamma_T} \Big(-\frac{2}{\sqrt{2}}|v_t| \cdot$$

$$\cdot |\nabla v| + \frac{1}{\sqrt{2}}(v_t^2 + |\nabla v|^2)\Big)\,ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\Gamma_T} (v_t - |\nabla v|)^2\,ds +$$

$$+ \Big(\int\limits_{D_T} - \int\limits_{D_0}\Big)(v_t^2 + |\nabla v|^2)\,dx$$

Энергетич. нер-во:

$$\int\limits_{D_0} (v_t^2 + |\nabla v|^2)\,dx \geq \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\Gamma_T} (v_t - |\nabla v|^2)\,ds}^{\geq 0} + \int\limits_{D_T} (v_t^2 + |\nabla v|^2\,dx$$

$E(t) = \int\limits_{D_T} (v_t^2 + |\nabla v|^2)\,dx$ — перемещаем сечение

невозраст. ф-ция $0 < t < t_0$

$E(t) \leq E(0)$

$E(\tau) = 0 \quad \forall \tau \in [0, t_0]$

$\Rightarrow v_t = 0,\ \nabla v = 0$, т.к. $\int = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$

■

⑥ Формулы Кирхгофа, Пуассона, Даламбера. Метод спуска.

I Дана задача: $\begin{cases} \Delta u_1 - (u_1)_{tt} = 0 \\ u_1(x,0) = 0 \\ (u_1)_t(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$

$u = \dfrac{\partial u_1}{\partial t}$

$\rightarrow \begin{cases} \Delta u - u_{tt} = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(x,0) = \Delta u_1(x,0) = 0 \end{cases}$

Откуда реш. зад. $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \\ u(x,0) = \varphi \\ u_t(x,0) = \psi \end{cases}$ имеет вид:

$$u = u_\psi + \frac{\partial}{\partial t} u_\varphi = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} \psi(\xi)\, dS_\xi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} \varphi(\xi)\, d\xi\right)$$

ф-ла Кирхгофа ($n=3$)

II Метод спуска

$$\begin{cases} u_{tt}(x_1, x_2, t) - \Delta u(x_1, x_2, t) = 0 & (1) \\ u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2) & (2) \\ u_t(x_1, x_2, 0) = \psi(x_1, x_2) \end{cases}$$

Рассм. вспом. задачу:

$$\begin{cases} u_{tt}(x_1, x_2, x_3, t) - \Delta u(x_1, x_2, x_3, t) = 0 & (3) \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = \varphi(x_1, x_2) & (4) \\ u_t(x_1, x_2, x_3, 0) = \psi(x_1, x_2) \end{cases}$$

Для (3), (4) реш. ищется по ф-ле Кирхгофа:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} \psi(\xi_1, \xi_2)\, dS_\xi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} \varphi(\xi_1, \xi_2)\, dS_\xi\right) =$$

$$= J_\psi + \frac{\partial}{\partial t}(J_\varphi)$$

⑥ $\iint\limits_{\Gamma} u\,ds = \iint\limits_{D} u(x_1,x_2,f(x_1,x_2)) \frac{\sqrt{1+f_{x_1}^2+f_{x_2}^2}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\,dx_1\,dx_2$

$(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+(\xi_3-x_3)^2=t^2$

$f=\xi_3=x_3\pm\sqrt{t^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2}$

сферу проец. дважды

$J_\psi=\frac{1\cdot 2}{4\pi t}\int\limits_{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2<t^2}\psi(\xi_1,\xi_2)\,A\,d\xi_1\,d\xi_2 \ominus$

$\left[A=\sqrt{1+f_{\xi_1}^2+f_{\xi_2}^2}=\sqrt{\frac{t^2}{t^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2}}\right]$

$\ominus \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2<t^2}\frac{\psi_1(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2}{\sqrt{t^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2}}$

Ф-ла Пуассона $(n=2)$:

$u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t}\frac{\psi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2}{\sqrt{t^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2}}+$

$+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t}\frac{\varphi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2}{\sqrt{t^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2}}\right.$

III $n=1$.

$\begin{cases} u_{tt}(x_1,x_2,t)-\Delta u(x_1,x_2,t)=0 \\ u(x_1,x_2,0)=\varphi(x_1) \\ u_t(x_1,x_2,0)=\psi(x_1) \end{cases}$

$u(x_1,x_2,t)=J_\psi+\frac{\partial}{\partial t}J_\varphi$ по ф-ле Пуассона

$(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2=t^2 \Rightarrow \xi_2=x_2\pm\sqrt{t^2-(\xi_1-x_1)^2}$

$J_\psi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x_1-t}^{x_1+t}d\xi_1\int\limits_{x_2-\sqrt{t^2-(\xi_1-x_1)^2}}^{x_2+\sqrt{\dots}}\frac{\psi(\xi_1)\,d\xi_2}{\sqrt{t^2-(\ )^2-(\ )^2}}=$

$=\frac{1}{2\pi}\cdot\pi\int\limits_{x_1-t}^{x_1+t}\psi(\xi_1)\,d\xi_1=\frac{1}{2}\int\limits_{x_1-t}^{x_1+t}\psi(\xi_1)\,d\xi_1$

Ф-ла Д'аламбера $(n=1)$

$u(x_1,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x_1-t}^{x_1+t}\psi(\xi_1)\,d\xi_1+\frac{1}{2}(\varphi(x_1+t)+\varphi(x_1-t))$

(7) Задача Коши и первая смешанная задача для ур-я теплопроводности. классич. реш.

1ая краевая задача:

найти ф-цию $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega \times (0,\tau]) \cap C^0(\overline{\Omega} \times [0,\tau])$, ($\Omega$ — область для x)

удовл.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \; x \in \Omega \text{ — нач. усл.} \\ u\big|_{S_\tau} = \psi \text{ — гран. усл.} \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \; 0 \end{pmatrix} = A$ парабол.

$S_\tau = \partial\Omega \times [0,\tau]$ — боковая пов-ть

(φ, ψ — непр)

Задача Коши:

найти ф-цию $u(x,t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n_x \times (t>0)) \cap C^0(\mathbb{R}^n_x \times [t \geq 0])$,

удовл.

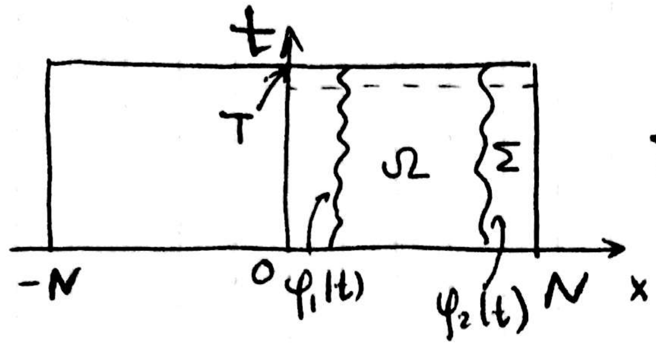
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \; x \in \mathbb{R}^n_x \text{ — нач. усл.} \end{cases}$$

$u(x,t)$ в таком случае — классич. решение

Одномерный случай: $u_t - u_{xx} = 0$

Если есть внешний источник тепла, то $= f(x,t)$

⑧ Принцип максимума для ур-я теплопров. в огр. обл. Единств. класс. решения.



$\Omega \subset (-N,N)\times(0,T)$

$\Sigma = ((\varphi_1(0), \varphi_2(0))\times\{0\}) \cup$
$\cup \{x=\varphi_1(t),\ 0\le t\le T\} \cup$
$\cup \{x=\varphi_2(t),\ 0\le t\le T\}$

$\Omega = \{\varphi_1(t) < x < \varphi_2(t),\ 0<t<T\}$

$u \in C^{2,1}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$

$\underbrace{\sup_{\Omega} u}_{=M},\ \underbrace{\sup_{\Sigma} u}_{=m} < \infty$

$u_t - u_{xx} = 0.$

Теор (принц. max $n=1$)

$\sup_{\Sigma} u = \sup_{\Omega} u \quad (m=M)$

▲ Пусть $M>m$.

$v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2,\ \varepsilon>0$

$\sup_{\Omega} v \ge \sup_{\Omega} u = M$

$\sup_{\Sigma} v \le \sup_{\Sigma} u + \varepsilon \sup_{\Sigma} x^2 \le m + \varepsilon N^2 \overset{\text{хотим}}{<} M$

$\varepsilon N^2 < M-m$

$\varepsilon = \frac{M-m}{2N^2}$

$\exists (x^*,t^*)\in\overline{\Omega}:\ v(x^*,t^*) = \sup_{\overline{\Omega}} v$

1) $(x^*,t^*)\in\Omega \quad (0\le t^* < T)$

$\frac{\partial v}{\partial t}(x^*,t^*)=0 \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x^*,t^*)=0$ (т.к. экстремум)

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x^*,t^*)<0$

$0 \le v_t(x^*,t^*) - v_{xx}(x^*,t^*) = \underbrace{u_t(x^*,t^*) - u_{xx}(x^*,t^*)}_{=0} - 2\varepsilon < 0$

Против.

2) $\exists (x^*,T):\ v(x^*,T) = \sup_{\Omega} v,\ \varphi_1(T) < x^* < \varphi_2(T)$

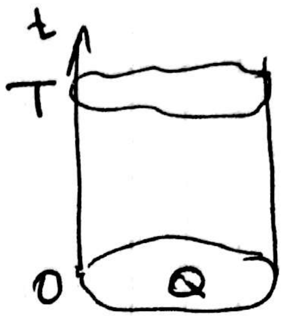
$\frac{\partial v}{\partial t}(x^*,T)\ge 0 \quad (v(x^*,T) = v(x^*,t) + v_t(x^*,\tilde{t})(T-t))$

(8) Дальше так же, как в 1. Противор.

$\Rightarrow m = M$. ■

Теор ($n \geq 2$)

$$\sup_{\Sigma} u = \sup_{\Omega} u$$



$\Omega = Q \times (0,T)$

$\Sigma = Q \times \{0\} \cup \underbrace{\cup(\partial Q \times [0,T])}_{\Pi}$

▲ Аналогично, пусть $M > m$

$v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x_1^2$, считаем, что $\Omega \subset \underbrace{\{|x_1| < N\} \times (0,T)}_{\text{слой}}$

$\sup v \leq m + \varepsilon N^2$

$\sup_{\Omega} v \geq M$ $\qquad \varepsilon = \dfrac{M-m}{2N^2}$ $\qquad$ Важно, что Q - огр. обл.

$\exists\, (x^*, t^*) \in \overline{\Omega}$: $v(x^*, t^*) = \sup_{\Omega} v$

1) $x^* \in Q$, $0 < t^* < T$

$\dfrac{\partial v}{\partial t}(x^*, t^*) = 0$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x^*, t^*) \leq 0$

$$v(x, t^*) = v(x^*, t^*) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 v(x_1^*, .., \tilde{x}_i, .., x_n^*, t)}{\partial x_i^2}}_{>0} \underbrace{(x_i - x_i^*)^2}_{\geq 0}$$

$$0 \leq \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}(x^*, t^*)}_{=0} - \underbrace{\Delta v(x^*, t^*)}_{\leq 0} = \frac{\partial u}{\partial t}(x^*, t^*) - \Delta u(x^*, t^*) - 2\varepsilon < 0$$

2) $x^* \in Q$, $t^* = T$

$\dfrac{\partial v}{\partial t}(x^*, T) \geq 0$

$$v(x,t) = v(x,t) + \frac{\partial v}{\partial t}(x, \tilde{t})(t - T)$$

$$0 \leq \frac{\partial v}{\partial t}(x^*, T) - \Delta v(x^*, T) = -2\varepsilon < 0$$

■

След. $\inf_{\Omega} u = \inf_{\Sigma} u$, $\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\Sigma} |u|$

Теор. $\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u|_{\partial Q \times (0,T)} = g(x,t) \end{cases}$ ← задача имеет ≤ 1 класс. реш.

▲ $v = u_1 - u_2$, $\sup_{\Omega} |v| = \sup_{\Sigma} |v| = 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$ ■

⑨ Теор. об убыв. реш. 1ой смеш. задачи для ур-я теплопров. в огр. обл.

$$u_t - \Delta u = 0$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad t \in (0,+\infty)$$
$$u|_{\partial Q \times (0,+\infty)} = 0$$
$$t \to +\infty$$

<u>Теор.</u> Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ - огр. обл., $\exists M>0, \alpha>0: \forall t>0$
$$\sup_{x\in Q} |u(x,t)| \le M e^{-\alpha t}$$

▲

$$v(x,t) = M_1 \cos(\beta x_1) e^{-\alpha t}$$
$$v_t - \Delta v = M_1(-\alpha e^{-\alpha t} \cos\beta x_1 + \beta^2 e^{-\alpha t}\cos\beta x_1) = M_1(-\alpha+\beta^2) e^{-\alpha t} \cdot$$
$\cdot \cos\beta x_1 = 0$ ← хотим, ищем такие α, β

$\alpha = \beta^2$, $\beta = \sqrt{\alpha}$ $\qquad v(x,t) = M_1 \cos(\sqrt{\alpha}\, x_1) e^{-\alpha t}$

$$v-u\,\big|_{\partial Q} = (M_1 \cos\sqrt{\alpha}\, x_1 e^{-\alpha t} - 0)\big|_{\partial Q} \ge 0$$

Q лежит в слое $\{|x_1| < N\}$

$$v-u\,\big|_{t=0} = M_1\cos\sqrt{\alpha}\,x_1 - \varphi(x) \ge M_1 \cos\sqrt{\alpha}\,x_1 - k \ge 0$$
$\sup_Q |\varphi(x)| = k$ $\qquad \cos\sqrt{\alpha}\,x_1 \ge \frac{k}{M_1}$

$$\cos\sqrt{\alpha}\,N = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sqrt{\alpha}\,N = \frac{\pi}{4} \qquad \alpha = \frac{\pi^2}{|8N|^2}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \ge \frac{k}{M_1}$, $\quad M_1 \ge \sqrt{2}\,k$

$v-u\,\big|_\Sigma \ge 0 \Rightarrow \quad v-u \ge 0$ в $\Omega = Q\times(0,+\infty)$

$u \le v$ в Ω

$$u+v\,\big|_{\partial Q} \ge 0$$
$u+v\,\big|_{t=0} \ge -k + M_1 \cos\sqrt{\alpha}\,x_1 \ge 0 \qquad u+v\ge 0$ в Ω

$u \ge -v$

$$|u| \le v = M_1 \cos\sqrt{\alpha}\,x_1\, e^{-\alpha t} \le M e^{-\alpha t}$$

■

(10) Формула Пуассона реш. з. Коши для ур-я теплопр.

З. Коши: $u_t - \Delta u = 0$

$u(x,0) = \varphi(x)$.

Теор. Пусть $|\varphi(x)| \le M$, $\varphi(x) \in C(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\exists$ класс. реш. з. Коши и оно представимо в виде

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}}_{\text{непр, дифф.}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi, \qquad \begin{matrix} t>0 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{matrix}$$

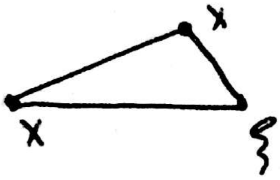
← интеграл Пуассона

▲ 1) Сх-ть интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi = \int_{|\xi|<L} \underbrace{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}}_{\text{непр}} \varphi(\xi)\, d\xi + \int_{|\xi|>L} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$= I_1 + I_2$

$\int$ берется по огр. мн-ву, $\Rightarrow$ он непр., сх-ся



$$|x-\xi| + |\xi| \ge |x| \Rightarrow \begin{matrix} |x-\xi| \ge |x| - |\xi| \\ |x-\xi| \ge |\xi| - |x| \end{matrix}$$

$$|I_2| \le \int_{|\xi|>L} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} |\varphi(\xi)|\, d\xi \le M \int_{|\xi|>L} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} d\xi \le$$

$$\le M \int_{|\xi|>L} e^{-\frac{(|\xi|-|x|)^2}{4t}} d\xi = M \overbrace{\int_{|\xi|>L} e^{-\frac{|\xi|^2}{16t}} d\xi}^{\text{сх-ся}} < \varepsilon$$

(для дост. большого L)

Рассм. $|x| < \frac{L}{2} \Rightarrow |\xi| - |x| > \frac{|\xi|}{2}$

Получим сумму непр. ф-ции и ф-ции, к-рую можно сделать сколь угодно малой $\Rightarrow$ это непр. ф-ция

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{2(x_i - \xi_i)}{4t}\right) \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2t}\Big(x_i \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \xi_i \varphi(\xi)\, d\xi \Big)$$

непр по тем же соображ.

2) Проверим, что это решение

(10) Хотим показать, что $\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\frac{1}{t^{n/2}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}=0$

$$\frac{\partial}{\partial t}t^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}=\cancel{-\frac{n}{2}t^{-\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}}+\cancel{t^{-\frac{n}{2}-2}\frac{|x-\xi|^2}{4}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}t^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}=t^{-\frac{n}{2}}\left(-\frac{(x_i-\xi_i)}{2t}\right)e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}t^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}=-\frac{1}{2}t^{-\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}+\frac{(x_i-\xi_i)^2}{4}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}t^{-\frac{n}{2}-2}$$

$$\Delta t^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}=\cancel{-\frac{n}{2}t^{-\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}}+\cancel{\frac{|x-\xi|^2}{4}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}t^{-\frac{n}{2}-2}}$$

Проверяем нач. усл.

$$\lim_{\substack{t\to 0+\\ x\to x_0}}u(x,t)=\varphi(x_0) \qquad (\varphi(x)=1)$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^n\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}d\xi=\left|\begin{array}{l}\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}}=z\\ d\xi=(2\sqrt{t})^n dz\end{array}\right|=\frac{1}{\sqrt{\pi^n}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|z|^2}dz=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_1^2}dz_1}_{\sqrt{\pi}}\cdots\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z_n^2}dz_n}_{\sqrt{\pi}}=1 \text{ - это решение}$$

$$|u(x,t)-\varphi(x_0)|=\left|\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}\varphi(\xi)\,d\xi-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}\varphi(x_0)\,d\xi\right|\le\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}\cdot$$

$$\cdot|\varphi(\xi)-\varphi(x_0)|\,d\xi=\left|\begin{array}{l}\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}}=z\\ d\xi=(2\sqrt{t})^n dz\end{array}\right|=\frac{1}{(\sqrt{\pi})^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|z|^2}\cdot$$

$$\cdot|\varphi(x+2\sqrt{t}z)-\varphi(x_0)|\,dz\to 0,\quad \begin{array}{l}t\to 0\\ x\to x_0\end{array}$$

т. Лебега

$(f_i \xrightarrow[n\to\infty]{} f,\ |f_i|\le g$ - интегр.$)$

$\int f_i \to \int f$

$$e^{-|z|^2}|\varphi(x+2\sqrt{t}z)-\varphi(x_0)|\le$$

$$\le 2Me^{-|z|^2}$$

Scanned by CamScanner

(11) Принцип максимума для реш. з. Коши для ур-я теплопров. в классе огр. ф-ций.

Теор (принц. макс.)
Пусть $u_t - \Delta u = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < t < T$, $\sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ 0<t<T}} |u(x,t)| = M < \infty$

$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x) = m$. Тогда $\sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ t\in(0,T)}} u(x,t) = m$

▲ $v(x,t) = m - u(x,t) \Rightarrow v_t - \Delta v = 0$

$v(x,0) = m - \varphi(x) \geq 0$

Хотим д-ть, что $v \geq 0$ на $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < t < T$

$w(x,t) = 2nt + |x|^2$

$w_t - \Delta w = 0$

$v_\varepsilon(x,t) = v(x,t) + \varepsilon w(x,t)$, $\varepsilon > 0$

$v_\varepsilon(x,0) \geq 0$

Рассм. обл. $Q_L = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < L\}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists L > 0 \; \forall x, |x| = L, \; v_\varepsilon(x,t) \geq -M + \varepsilon L^2 > 0$

$(v_\varepsilon \geq \inf v_\varepsilon \geq \inf v + \varepsilon \inf w)$

$\Rightarrow v_\varepsilon \geq 0$ и внутри цилиндра (по принц. макс.)

Рассм. $\varepsilon_j \to 0$, $L(\varepsilon_j) \to +\infty$

$L_j^2 > \frac{M}{\varepsilon_j}$, можем взять $L_j = \sqrt{\frac{2M}{\varepsilon_j}} \to +\infty$

$v_{\varepsilon_j} \geq 0$, $|x| < L_j$, $0 < t < T$

← посл-ть ф-ций в расшир. цилиндрах

$v_{\varepsilon_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} v(x,t)$ в $\forall$ фикс. (x,t)

$\Rightarrow v(x,t) \geq 0$ ■

(12) Беск. дифф-ть класс. реш. з. Коши для ур-я теплопров.

Решение з. Коши:
$$u_t - \Delta u = 0$$
$$u(x,0) = \varphi(x)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi \ , \quad t>0, \ x \in \mathbb{R}^n$$

← интеграл Пуассона

Продифф:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{2(x_i-\xi_i)}{4t}\right) \varphi(\xi)\, d\xi \cdot \left(\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \cdot \left(-\frac{1}{2t}\right) \cdot \left(x_i \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \xi_i \varphi(\xi)\, d\xi \right)$$ — можно дифф-ть и дальше

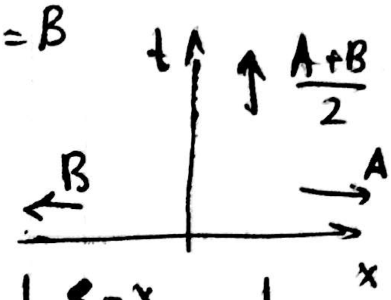
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \ldots + \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} = e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \cdot \frac{|x-\xi|^2}{4t^2}$$

13) Теор. о стабилизации реш. з. Коши для ур-я теплопр. с одной прост. перем.

Теор. $u_t - u_{xx} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = A$

$u(x,0) = \varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = B$



Тогда $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = \frac{A+B}{2}$, $x\in\mathbb{R}$

▲ $u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi = \left| \frac{\xi - x}{2\sqrt{t}} = z \right| =$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \varphi(x+2\sqrt{t}z)\, dz = I_1 + I_2$

$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-z^2} \varphi(x+2\sqrt{t}z)\, dz$

$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-z^2} \varphi(x+2\sqrt{t}z)\, dz$

$\left| I_1 - \frac{A}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left| \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-z^2} (\varphi(x+2\sqrt{t}z) - A)\, dz \right| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-z^2} \cdot$

$\cdot \left| \varphi(x+2\sqrt{t}z) - A \right| dz \xrightarrow[t\to\infty]{\text{т. Лебега}} 0$ $\quad x\in\mathbb{R}$, $z>0$

при $t\to\infty$ арг $\to\infty$

$z=0$ – плохая, но

$\mu\{z\} = 0$

Аналогично, $I_2 \to \frac{B}{2}$ ■

(14) Задача Ш–Л с краевыми усл. Дирихле. Св-ва с/з и с/ф-ций.

<u>Опр.</u> $(p(x)X')' + q(x)X = \lambda X$ (1)

$0<x<l$, $p(x)\in C^1[0,l]$ $\quad X(0)=0$, $X(l)=0$ (2)

$0<p_1<p(x)$, $q(x)\in C[0,l]$, $q(x)<0$

Те λ, при кот. $\exists$ ненул. X, удовл. (1), (2), наз. собств. знач, а соотв. $X\not\equiv 0$ – собств. ф-цией. $X\in C^2[0,l]$
Нахождение X – задача Штурма-Лиувилля.

<u>Утв 1</u>. $\lambda<0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

▲ $\overline{X}((pX')'+qX) = \lambda|X|^2$

$$\int_0^l (\overline{X}(pX')' + q|X|^2)dx = \lambda\int_0^l |X|^2dx$$

$$\underbrace{\int_0^l (-p|X'|^2+q|X|^2)dx}_{\le 0} = \lambda\underbrace{\int_0^l |X|^2dx}_{>0}$$

$$\int_0^l (pX')'\overline{X}dx = pX'\overline{X}\Big|_0^l - \int_0^l p|X'|^2dx$$

$$\lambda = \frac{\int_0^l (-p(X')^2 + qX^2)dx}{\int_0^l X^2dx} < 0 \text{ – отношение Рэлея}$$

■

<u>Утв 2</u>. Каждому с/з λ соотв одна (л/н) с/ф.

▲ $LX = (pX')' + qX = \lambda X$ $\qquad pX''+p'X'+qX-\lambda X=0$

$LX_1 = \lambda X_1$, $LX_2 = \lambda X_2$

$W(X_1,X_2) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_1' & X_2' \end{vmatrix}$ – опр. Вронского

$a_2u''+a_1u'+a_0u=0$ $\longrightarrow$ $-\int_{x_0}^x \frac{a_1(z)}{a_2(z)}dz$

$w = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$ $\qquad W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(z)}{a_2(z)}dz}$

ф-ла Остр – Лиувилля

$$W\big|_x = W\big|_{x_0} e^{-\int_{x_0}^x \frac{p'(z)}{p(z)}dz} = \frac{p(x_0)W'|_{x_0}}{p(x)} \Rightarrow p(x)W\big|_x = const$$

(14) $W|_0 = \begin{vmatrix} x_1(0)=0 & x_2(0)=0 \\ x_1'(0) & x_2'(0) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow W|_x = 0 \ \forall x$

$\Rightarrow$ ф-ции л/д. ■

$L_2(0,\ell)$: $(X_1, X_2) = \int_0^\ell X_1 X_2 \, dx$, $\|X\| = \sqrt{\int_0^\ell X^2(x)\,dx}$

<u>Утв 3</u>. $LX_1 = \lambda_1 X_1$, $LX_2 = \lambda_2 X_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (X_1, X_2) = 0$.

▲ $(LX_1, X_2) = \lambda_1 (X_1, X_2)$

$(LX_2, X_1) = \lambda_2 (X_1, X_2)$

$(pX_1')' + qX_1' = \lambda_1 X_1 \quad | \cdot X_2$

$-$

$(pX_2')' + qX_2' = \lambda_2 X_2 \quad | \cdot X_1$

$\int_0^\ell ((pX_1')' X_2 - (pX_2')' X_1)\,dx = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\ell X_1 X_2 \, dx$

$\int_0^\ell \cancel{(-pX_1' X_2')\,dx} + pX_1' X_2 \Big|_0^\ell + \cancel{\int_0^\ell pX_2' X_1'\,dx} - pX_2' X_1 \Big|_0^\ell =$

$= (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\ell X_1 X_2 \, dx \Rightarrow \int_0^\ell X_1 X_2 \, dx = 0$ ■

Scanned by CamScanner

(15) Ф-ция Грина задачи Ш-Л с краевыми усл. Дирихле, её единств. и симметрия.

<u>Опр</u>. Ф-ция Грина з. Ш-Л – ф-ция $G(x,y)\to\mathbb{R}$:

1) $G(x,y)\in C([0,l]\times[0,l])$

2) $G(0,y)=G(l,y)=0,\quad y\in[0,l]$

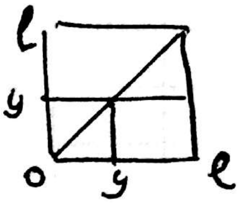
3) при $x\neq y$ $\quad L_x G(x,y)=0 \quad =(p(x)G')'+q(x)X$

$\exists\, G_x,\ G_{xx}$ – непр

усл. скачка

4) $p(x)\left(G_x(x+0,x)-G_x(x-0,x)\right)=1,\quad x\in(0,l)$

<u>Лемма 1</u>. $\exists$ не более 1 ф-ции Грина.



▲ Пусть есть 2.

$H(x,y)=G_1(x,y)-G_2(x,y)$

Для $H(x,y)$ вып. 1)–3).

4) $p(x)\left(H_x(x+0,x)-H_x(x-0,x)\right)=0$

$$0\ge\int_0^l\Big(-\underbrace{p(x)}_{>0}\underbrace{H_x^2(x,y)}_{\ge 0}+\underbrace{q(x)}_{\le 0}\underbrace{H^2(x,y)}_{\ge 0}\Big)dx=\int_0^y(-pH_x^2+qH^2)dx+$$

$$+\int_y^l(-pH_x^2+qH^2)dx =$$

$$\left[-\int_0^{y-\varepsilon}p(x)H_x^2(x,y)dx=\int_0^{y-\varepsilon}(p(x)H_x(x,y))_x H(x,y)dx-\right.$$

$$-p(x)H_x(x,y)H(x,y)\Big|_0^{y-\varepsilon}=\int_0^{y-\varepsilon}(p(x)H_x(x,y))_x H_x(x,y)dx-$$

$$\left.-p(y-\varepsilon)H_x(y-\varepsilon,y)H(y-\varepsilon,y),\quad \varepsilon\to+0\right]$$

$$=\int_0^y \underbrace{\cancel{((pH_x)_x+qH)}}_{=0}H\,dx-p(y)H_x(y-0,y)H(y,y)+$$

$$+\int_y^l \cancel{L_xH\cdot H\,dx}+p(y)H_x(y+0,y)H(y,y)=H(y,y)\,p(y)\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\left(H_x(y+0,y)-H_x(y-0,y)\right)}_{=0}=0$$

$\Rightarrow$ равны 0 слагаемые в интеграле;

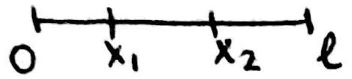
(15) $\int_0^l p(x) H_x^2(x,y)\,dx = 0$, $0 \le y \le l$, $H(x,y)$ - непр.

$H_x(x,y) = 0$, $x \in (0,l)$

$\Rightarrow$ при фикс. y $H(x,y) = const$, $H(0,y)=0 \Rightarrow H(x,y)=0$ ■

<u>Лемма 2</u>. $G(x,y) = G(y,x)$.

▲



$$0 = \int_0^{x_1-\varepsilon} \left(L_x G(x,x_1) G(x,x_2) - L_x G(x,x_2) G(x,x_1)\right) dx =$$

$$= \int_0^{x_1-\varepsilon} \left((-p(x) G_x(x,x_1))_x G(x,x_2) + (p(x) G_x(x,x_2))_x G(x,x_1)\right) dx =$$

$$= \left(-p(x) G_x(x,x_1) G(x,x_2) + p(x) G_x(x,x_2) G(x,x_1)\right)\Big|_0^{x_1-\varepsilon} =$$

$$= p(x_1-\varepsilon)\left(G_x(x_1-\varepsilon, x_2) G(x_1-\varepsilon, x_1) - G_x(x_1-\varepsilon, x_1) G(x_1-\varepsilon, x_2)\right) \to$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} p(x_1)\left(G(x_1,x_2) G(x,x_1) - G_x(x_1-0, x_1) G(x_1,x_2)\right)$$

■

(16) Сведение задачи Ш-Л с краевыми усл. Дирихле к интегр. ур-ю.

$$\begin{cases}(pu_x)_x + qu = f(x) & , x\in(0,l) \quad (1)\\ u(0)=u(l)=0 & f(x)\in C([0,l])\end{cases}$$

<u>Утв</u>. Если есть ф-ция Грина, то реш. имеет вид:

$$u(x) = \int_0^l G(x,y)f(y)\,dy = (Tf)(x)$$

▲ Удовл. краевым усл: $u(0)=u(l)=0$.
Подставляем в ур-е:

$$L(Tf)(x) = L\left(\int_0^x G(x,y)f(y)\,dy + \int_x^l G(x,y)f(y)\,dy\right) =$$

$$=\left(p(x)\int_0^x G_x(x,y)f(y)\,dy + \cancel{p(x)G(x,x)f(x)} - 0\right)_x +$$

$$+\left(p(x)\int_x^l G_x(x,y)f(y)\,dy + 0 - \cancel{p(x)G(x,x)f(x)}\right)_x +$$

$$+q(x)\int_0^l G(x,y)f(y)\,dy = \int_0^x \underbrace{(p(x)G_x(x,y))_x + q(x)G(x,y))}_{L_xG(x,y)=0}\cdot$$

$$\cdot f(y)\,dy + p(x)\underbrace{G_x(x+0,x)}_{=G_x(x,x-0)}f(x) +$$

$$+\int_x^l \underbrace{(p(x)G_x(x,y))_x + q(x)G(x,y))}_{L_xG(x,y)=0} f(y)\,dy - p(x)G_x(x,x-0)f(x) =$$

$$= p(x)\left(G_x(x+0,x) - G_x(x-0,x)\right)f(x) = f(x)$$

■

Scanned by CamScanner

⑰ Обоснование метода Фурье решения смеш. задачи.

$u_{tt} - (p(x)u_x)_x - q(x)u = f(x,t)$ $\quad 0<x<l$, $t>0$

$u(x,0) = \varphi(x)$ $\quad u(0,t) = u(l,t) = 0$

$u_t(x,0) = \psi(x)$

Ищем решение $u(x,t) \in C^2((0,l)\times(0,T)) \cap C([0,l]\times[0,T]) \cap$
$\cap\, C^{0,1}((0,l)\times[0,T])$

Ищем реш. в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$

$T''X - (pX')'T - qXT = 0$

$T''X = ((pX')' + qX)T \quad |:XT$ (в окр. точки, где они $\neq 0$)

$$\frac{T''}{T} = \frac{(pX')' + qX}{X} = \lambda < 0$$

$$\begin{cases} T'' - \lambda T = 0 & 0<t<T \\ (pX')' + qX = \lambda X & 0<x<l \end{cases} \quad X(0) = X(l) = 0$$

$\lambda_k \to +\infty$, $\{X_k(x)\}$ образуют ОНБ в $L_2(0,l)$ (по т. Гильберта-Шмидта)

если $\varphi \in L_2$, то $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x)$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k X_k(x)$$

$S_k^2 - \lambda = 0 \qquad S_k = \pm i\sqrt{-\lambda_k}$

$$T_k(t) = A_k \cos\sqrt{-\lambda_k}\,t + B_k \sin\sqrt{-\lambda_k}\,t$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos\sqrt{-\lambda_k}\,t + B_k \sin\sqrt{-\lambda_k}\,t) X_k(x)$$

(*) $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k \cos\sqrt{-\lambda_k}\,t + \psi_k \frac{\sin\sqrt{-\lambda_k}\,t}{\sqrt{-\lambda_k}}\right) X_k(x)$ — удовл всем усл. задачи

Хотим показать, что ряд сх-ся равн. в $[0,l]\times[0,T]$ и допускает двойное дифф-ние.

__Утв 1__. H — гильб. пр-во, $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ — о/н сист, $f \in H$, $c_k = (f, X_k)$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2$ — нер-во Бесселя.

(17) ▲ Рассм. $0 \le \|f - \sum_1^N c_k X_k\|^2 = (f - \sum_{k=1}^N c_k X_k, f - \sum_{k=1}^N c_k X_k) =$

$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^N c_k \underbrace{(f, X_k)}_{c_k} + \underbrace{\sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N c_k c_m (X_k, X_m)}_{= \sum_{k=1}^N c_k^2} = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N c_k^2$ ■

Если $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ – ОНБ, то $\sum_{k=1}^\infty c_k^2 = \|f\|^2$ – рав-во Парсеваля.

$f(x) \in L_2(0,l)$ $\qquad c_k = \int_0^a f X_k \, dx$

1) Пусть $f'(x)$ – кус-непр. на $[0,l]$, $f(0) = f(l) = 0$

$D(f,g) = \int_0^l (pf'g' - qfg)\,dx \overset{\text{по частям}}{=} pfg'\Big|_0^l - \int_0^l f((pg')' +$

$+ qg)\,dx = pfg'\Big|_0^l - (f, Lg) \qquad Lg = (pg')' + qg$

$D(f, X_k) = - (f, LX_k) = \underbrace{-\lambda_k}_{=|\lambda_k|} (f, X_k)$

$0 \le D(f - \sum_{k=1}^N c_k X_k, f - \sum_{k=1}^N c_k X_k) = D(f,f) - 2\sum_{k=1}^N c_k D(f, X_k) +$

$+ \sum\sum c_k c_m D(X_k, X_m) = D(f,f) + 2\sum_{k=1}^N \lambda_k c_k^2 - \sum_{k=1}^N \lambda_k c_k^2 =$

$= D(f,f) + \sum_{k=1}^N \lambda_k c_k^2$

$\Downarrow \quad \boxed{\sum_{k=1}^N (-\lambda_k) c_k^2 \le D(f,f)} = \int_0^l (pf'^2 - qf^2)\,dx$

2) Пусть $f \in C^2([0,l])$, $f(0) = f(l) = 0$

$(Lf, X_k) = \int_0^l ((pf')' + qf) X_k \, dx = -D(f, X_k) \overset{\text{по частям}}{=} \int_0^l f \cdot ((pX_k')' + qX_k)\,dx$

$= (f, LX_k) = \lambda_k \underbrace{(f, X_k)}_{c_k}$

$\boxed{\sum_{k=1}^N \lambda_k^2 c_k^2 \le \|Lf\|^2_{L_2(0,l)}}$

3) $f \in C^3([0,l])$, $f(0) = 0 = f(l)$, $Lf(0) = Lf(l) = 0$

Lf удовл. 1)

$\boxed{\sum_{k=1}^N (-\lambda_k)^3 c_k^2 \le D(Lf, f)} \Rightarrow \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|^3 c_k^2 < \infty$

— $X_k(x) = \lambda_k \int_0^l G(x,y) X_k(y)\,dy$?

(17) $X_k'(x) = \lambda_k \int_0^l G_x(x,y) X_k(y)\,dy$

Нер-во Бесс: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(X_k'(x))^2}{\lambda_k^2} \le \int_0^a G_x^2(x,y)\,dy \le C_3$

<u>Теор</u>. Пусть $\varphi(x) \in C^3([0,l])$, $\varphi(0) = L\varphi(0) = \varphi(l) = L\varphi(l) = 0$, $\psi(x) \in C^2([0,l])$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Тогда ряд для $u(x,t)$ (*) сх-ся равн. на $[0,l] \times [0,T]$ вместе с производн. до 2 пор. включ. и опред. канон. реш. задачи.

▲ • $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos\sqrt{-\lambda_k}\,t + B_k \sin\sqrt{-\lambda_k}\,t) X_k(x)$,

$A_k = (\varphi, X_k)$, $B_k = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}}(\psi, X_k)$

$\left|\sum_{k=m}^{n} (A_k \cos\sqrt{\ }\,t\ldots) X_k\right| \le \sum_{k=m}^{n} (|A_k| + |B_k|) \frac{|X_k(x)|}{\sqrt{|\lambda_k|}} \sqrt{|\lambda_k|} \le$

$\le \underbrace{\left(\sum_{k=m}^{n} |\lambda_k| (|A_k| + |B_k|)^2\right)^{1/2}}_{1)} \underbrace{\left(\sum_{k=m}^{n} \frac{X_k^2}{|\lambda_k|}\right)^{1/2}}_{\text{от}} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

• u_x: $\left|\sum_{k=m}^{n} (\ldots) X_k'\right| \le \sum_{k=m}^{n} (|A_k| + |B_k|) \frac{X_k'}{|\lambda_k|} |\lambda_k| \le$

$\le \underbrace{\left(\sum_{k=m}^{n} |\lambda_k|^2 (|A_k| + |B_k|)^2\right)^{1/2}}_{2)} \left(\sum_{k=m}^{n} \frac{X_k'}{\lambda_k^2}\right)^{1/2} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

• u_t: $\left|\sum_{k=m}^{n} (A_k \sqrt{-\lambda_k} \sin\sqrt{-\lambda_k}\,t + B_k \sqrt{-\lambda_k} \cos\sqrt{-\lambda_k}\,t) X_k\right| \le$

$\le \left(\sum_{k=m}^{n} \frac{X_k^2}{|\lambda_k|}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=m}^{n} \lambda_k^2 (A_k^2 + B_k^2)\right)^{1/2} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

• u_{tt}: $\left|\sum_{k=m}^{n} (-\lambda_k)(A_k \cos\ldots) X_k\right| \le \left(\sum_{k=m}^{n} \frac{X_k^2}{|\lambda_k|}\right)^{1/2} \cdot \sqrt{2} \cdot$

$\cdot \underbrace{\sum_{k=m}^{n} |\lambda_k|^3 (A_k^2 + B_k^2)^{1/2}}_{3)} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

• u_{xx}: $\left|\sum_{k=m}^{n} (A_k \cos\ldots) X_k''\right| \le \| \overbrace{pX_k'' + p'X_k' + qX_k}^{=\lambda_k X_k} \| \le$

$\le \left(\sum_{k=m} (|A_k| + |B_k|)\right) \underbrace{(A_1 |\lambda_k| + A_2)}_{\text{аналог } u_{tt}} \underbrace{|X_k|}_{\text{прост сумм}} + \underbrace{A_3 |X_k'|}_{\text{как } u_x}) \to 0$

■

(18) Гармон. ф-ции. Принцип максимума.

Опр. Гармонич. ф-ции — удовл. $\Delta u = 0$ в $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Теор. (Принц. макс.)
Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — огр. обл, $u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$, $\Delta u = 0$ в Q.
Тогда $\sup\limits_{\overline{Q}} u = \sup\limits_{\partial Q} u$.

▲ $M = \sup\limits_{\overline{Q}} u$, $m = \sup\limits_{\partial Q} u$

Пусть $M > m$. Рассм. $v(x) = u(x) + \varepsilon x_1^2$, $\varepsilon > 0$

$\sup\limits_{Q} v \geq M$, $\sup\limits_{\partial Q} v \leq m + \varepsilon N^2$

$M > m + \varepsilon N^2$ — можно взять $\varepsilon = \dfrac{M-m}{2N^2}$

Пусть достигается в т. $x_0 \in Q$:

$v(x_0) = \sup\limits_{\overline{Q}} v > \sup\limits_{\partial Q} v$

Необх. усл. экстремума: $\left.\dfrac{\partial v}{\partial x_i}\right|_{x_0} = 0$, $\left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\right|_{x_0} \leq 0$

$0 \geq \Delta v(x_0) = \Delta u + 2\varepsilon > 0$, против. ■

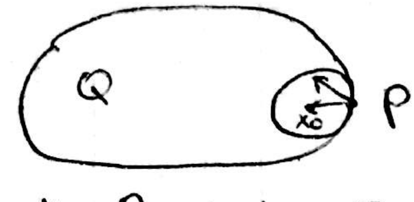
След. $\sup\limits_{\overline{Q}} |u| = \sup\limits_{\partial Q} |u|$

Scanned by CamScanner

(19) Лемма о знаке внутр. производной гармон. ф-ции.

<u>Лемма</u>. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $u \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$, $\Delta u = 0$ в Q, $u(x) > 0$ в Q, $u(P) = 0$ для $P \in \partial Q$. $\exists$ шар $B(x_0) \subset Q$: $P_{\in \partial Q} \in \partial B(x_0)$, l - вектор: $|l| = 1$, $|\underbrace{(\widehat{l, P_{x_0}})}_{>0}| < \frac{\pi}{2}$

Тогда, если $\exists \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P$, то $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P > 0$.

▲ 

1) $n = 2$: пусть $Q = \{x_1 > 0, x_2 > 0\}$, $u = x_1 x_2$ - гарм.

$\nabla u = (x_2, x_1) = 0$ в т. $(0,0) \Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(0,0)} = 0 \ \forall l$

$v(x) = \ln \frac{|x|}{R_0}$

$v\big|_{|x| = R_0} = 0$, $v\big|_{|x| = \frac{R_0}{2}} = -\ln 2$

$w(x) = u(x) + \varepsilon v(x)$

$w\big|_{|x| = R_0} = u\big|_{|x| = R_0} \geq 0$

$\inf\limits_{|x| = \frac{R_0}{2}} u = m$ (сфера компактна)

$w\big|_{|x| = \frac{R_0}{2}} \geq m - \varepsilon \ln 2 > 0$ ← напр. при $\varepsilon = \frac{m}{2 \ln 2}$

$\Delta w = 0$ при $\frac{R_0}{2} < |x| < R_0$

$\left.\frac{\partial w}{\partial l}\right|_P = \lim\limits_{t \to 0+} \frac{\overbrace{w(P + tl)}^{\geq 0} - \overbrace{w(P)}^{= 0}}{\underbrace{t}_{\geq 0}} \geq 0$

$\left.\frac{\partial w}{\partial l}\right|_P = \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P + \varepsilon \frac{\partial \ln}{\partial l}\left(\frac{|x|}{R_0}\right)\Big|_P = \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P + \frac{\varepsilon}{R^2} \underbrace{(x, l)}_{> 0}\Big|_P$

$\frac{\partial \ln |x|}{\partial l} = (\nabla \ln |x|, l) = \frac{1}{2} (\nabla \ln |x|^2, l) = \frac{(x, l)}{|x|^2}$

(19) $\left.\frac{\partial u}{\partial e}\right|_p = \underbrace{\left.\frac{\partial w}{\partial e}\right|_p}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{\varepsilon}{R_0^2}(x,e)\Big|_p}_{<0} > 0$

2) $n=3$

$$v(x) = \frac{1}{R_0^{n-2}} - \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

$$v\Big|_{|x|=R_0} = 0, \quad v\Big|_{|x|=\frac{R_0}{2}} = -\frac{2^{n-2}-1}{R_0^{n-2}}$$

$$w\Big|_{|x|=\frac{R_0}{2}} \geq m - \varepsilon\,\frac{2^{n-2}-1}{R_0^{n-2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial e} = -(\nabla|x|^{2-n}, e) = (n-2)\,\frac{\overset{<0}{(x,e)}}{|x|^n}$$

Всё остальное аналогично. ■

(20) Сильный принцип максимума.

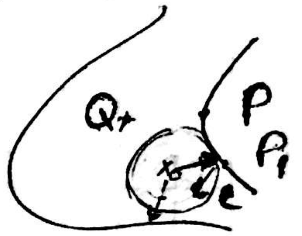
Теор (Сильный принцип макс.)
Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$, $\Delta u = 0$ в Q, $M = \sup\limits_{Q} u(x)$. Пусть $\exists$ т. $P \in Q$ т.ч. $u(P) = M$. Тогда $u \equiv M$ в Q.

▲ Пусть $u \not\equiv M$, $v = M - u \geq 0$ в Q
$\Delta v = 0$ в Q

Пусть $Q_+ = \{x : v(x) > 0\} \subset Q$ $\quad \partial Q_+ \setminus \partial Q \neq \varnothing$ $(P \notin Q_+)$

такие $\exists$ $x_0 \in Q$: $\operatorname{dist}(x_0, \partial Q_+ \setminus \partial Q) < \operatorname{dist}(x_0, \partial Q)$

Пусть это неверно. Тогда $\forall x_0 \in Q_+$
$\operatorname{dist}(x_0, \partial Q_+ \setminus \partial Q) \geq \operatorname{dist}(x_0, \partial Q)$
$\forall \tilde{x} \in \partial Q_+ \setminus \partial Q$ $\quad \forall \{x_j\} \subset Q_+ : x_j \to \tilde{x}$
$\exists \{\tilde{\tilde{x}}_j\} \subset \partial Q$ $\quad |\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}_j| \leq |\tilde{x} - x_j| \to 0$



Рассм. шар $B_{\operatorname{dist}(x_0, \partial Q_+)}(x_0)$

Для этого шара вып. лемма о внутр. произв $\Rightarrow$

$\left.\frac{\partial v}{\partial e}\right|_{P_1} > 0$, $(e, P_{1x_0}) > 0$

$\Downarrow$

$|\nabla v|_{P_1} \neq 0$, $v(P_1) = 0$

Но $\left.\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_{P} = 0$, т.к. $v(P_1)$ – минимум, v – дифф-ма
Противор. ■

㉑ Постановка основных краевых задач для гармон. ф-ций (Дирихле, Неймана).

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ - огр. обл.

• Задача Дирихле:
Найти $u \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$: $\Delta u = 0$ в Q
$u\big|_{\partial Q} = \varphi$

• Задача Неймана:
$u \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$: $\Delta u = 0$ в Q
$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial Q} = \varphi$

• Третья краевая задача:
$u \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$ $\Delta u = 0$ в Q
$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + g(x)\, u\right)\Big|_{\partial Q} = \varphi$

Утв. класс реш. з. Дирихле в огр. обл ≤ 1.
▲ Пусть 2: u_1, u_2. $v = u_1 - u_2$, $\Delta v = 0$ в Q
$v\big|_{\partial Q} = 0$
Тогда $|v| = 0$ по принц. макс.
$\Rightarrow u_1(x) \equiv u_2(x)$ на Q. ■

(22) Необх. условие разрешимости З. Неймана

<u>Теор</u> (Необх. усл.)

Задача Неймана: $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } Q \subset \mathbb{R}^n \text{ - огр. обл} \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial Q} = \varphi \end{cases}$

Есть класс. реш $\Rightarrow$ $0 = \int\limits_{\partial Q} \varphi \, dS$

▲ Ф-ла FO: $\int\limits_Q \underbrace{\operatorname{div}(\vec{b}(x))}_{b'_{x_1} + \ldots + b'_{x_n}} dx = \int\limits_{\partial Q} (\vec{b}, \vec{\nu}) \, dS$

Ф-ла Грина: $\int\limits_Q (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int\limits_{\partial Q} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS$

Подставим $v = 1$:

$$\underbrace{\int\limits_Q \Delta u \, dx}_{= 0} = \int\limits_{\partial Q} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}}_{\varphi} dS \Rightarrow \int\limits_{\partial Q} \varphi \, dS$$

■

$$\cancel{\int\limits_Q u \Delta v \, dx = -\int\limits_Q (\nabla u, \nabla v) dx + \int\limits_{\partial Q} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS}$$

$b = v \nabla u$ $\qquad \operatorname{div} b = v \Delta u + (\nabla u, \nabla v)$

$(b, \nu) = v (\nabla u, \nu) = v \frac{\partial u}{\partial e}$

23) Ф-ция Грина зад. Дирихле для опер. Лапласа. Симметрия ф-ции Грина.

$$\Delta u = 0, \quad Q \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q}), \quad \Gamma = \partial Q \in C^1$$

ν – нормаль наружу

$x_0 = 0 \in Q$

$B_\varepsilon(0) \subset Q$

$Q \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}$ - откр. $\quad b = v\nabla u - u\nabla v$

$\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ в $Q \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}$ $\quad$ Ф-ла Грина $\int\limits_Q \operatorname{div} b\, dx = \int\limits_{\partial Q} (b, \nu)\, dx$

$$0 = \int\limits_{Q\setminus\overline{B_\varepsilon(0)}} (\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v)\, dx = \int\limits_{\partial Q \cup S_\varepsilon(0)} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} u\right) ds =$$

$$= \int\limits_{\partial Q} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) ds + \underbrace{\int\limits_{S_\varepsilon(0)} c \ln\varepsilon \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{S_\varepsilon(0)} \frac{c}{\varepsilon} u\, ds}_{I_2} = 0$$

$v = c \ln r$

$\nu = \frac{-x}{|x|} \qquad \frac{\partial v}{\partial \nu} = -\left(\nabla v, \frac{x}{|x|}\right) = -c\frac{1}{|x|}$

$v = \frac{c}{2} \ln |x|^2, \quad \nabla v = \frac{c}{2} \frac{2x}{|x|^2}$

$$|I_1| = \left| c \ln\varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon(0)} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \right| \le |\ln\varepsilon| \cdot \max_{S_\varepsilon(0)} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| \int\limits_{S_\varepsilon(0)} ds =$$

$$= \underbrace{2\pi\varepsilon |\ln\varepsilon|}_{\downarrow\, \varepsilon\to 0 \atop 0} \underbrace{\max_{S_\varepsilon(0)} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|}_{\le \max\limits_{S_\varepsilon(0)} |\nabla u|} \to 0, \quad \varepsilon \to 0$$

$\le \max\limits_{S_\varepsilon(0)} |\nabla u|$ – не зависит от ε

$$I_2 = \frac{c}{\varepsilon} \int\limits_{S_\varepsilon(0)} u\, ds = \frac{c}{\varepsilon} \cdot 2\pi\varepsilon\, \underbrace{u(x_\varepsilon)}_{\text{точке на окр.}} \to c \cdot 2\pi u(x_0), \quad \varepsilon \to 0$$

$$-2\pi c u(0) = \int\limits_{\partial Q} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) ds \qquad v = -\frac{\ln r}{2\pi}$$

$$c = -\frac{1}{2\pi} \Rightarrow \quad u(0) = \int\limits_{\partial Q} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) ds,$$

Если $x_0 \neq 0$, делаем замену $x' = x - x_0$

$$u(x_0) = \int\limits_{\partial Q} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) ds, \quad v = -\frac{1}{2\pi} \ln|x - x_0|$$

(23) Если $u = C r^{2-n}, n>2$. то $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_\varepsilon(0)} = C(n-2)\varepsilon^{1-n}$

$$I_1 = C\varepsilon^{2-n}\int\limits_{S_\varepsilon(0)}\frac{\partial u}{\partial \nu}ds - C(n-2)\varepsilon^{1-n}\int\limits_{S_\varepsilon(0)} u\, ds$$

$$|I_1| \le |C|\varepsilon^{2-n}\max_{S_\varepsilon(0)}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| \Big| \int\limits_{S_\varepsilon(0)} ds \Big| \to 0, \ \varepsilon \to 0$$

$$\int\limits_{S_\varepsilon(0)} ds = C_2\varepsilon^{n-1}$$

$$I_2 \to C(n-2)\underbrace{\omega_{n-1}}_{\text{площадь пов-ти сферы}}u(0)$$

$$u(0) = \int\limits_{\partial Q}\left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)ds, \ v = \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}r^{2-n} \ \left(v = \frac{1}{4\pi r}, \ n=3\right)$$

$$u(x_0) = \int\limits_{\partial Q}\left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)ds, \ v = \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}|x-x_0|^{2-n}$$

$$E_n(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}|x|^{2-n}, \ n \ge 3$$

$$E_2(x) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x|, \ n=2$$

<u>Опр</u>. Ф-цией Грина зад. Дир. для ур-я Лапласа наз. ф-ция $G(x,y) = E_n(x-y) + g(x,y)$:

1) $\Delta_x g(x,y) = 0$, $x\in Q, y \in Q$
 $g \in C^2(Q\times Q) \cap C(\overline{Q}\times\overline{Q})$

2) $G(x,y) = 0$, $x \in \partial Q, y\in Q$ $\qquad \frac{\partial G}{\partial \nu_x} = \frac{\partial E_n}{\partial \nu_x} + \frac{\partial g}{\partial \nu_x}$

$$u(x_0) = \int\limits_{\partial Q}\Big(\underbrace{G(x,x_0)}_{\left.E_n + g\right|_{\partial Q} = 0}\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} - u(x)\frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x,x_0)\Big)dS_x =$$

$$= -\int\limits_{\partial Q} u(x)\frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x,x_0)\,dS_x$$

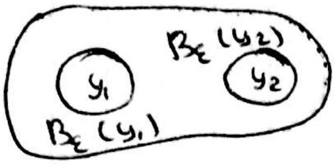
<u>Лемма 1</u>. $\exists \le 1$ ф-ции Грина.

▲ $G_1 - G_2 = H = g_1 - g_2$

$H \in C^2(Q\times Q)\cap C(\overline{Q}\times\overline{Q})$ $\qquad \Delta_x H = 0$
$\qquad H = 0, \ x\in\partial Q, y \in Q$ ■

(23) Лемма 2. $G(x,y) = G(y,x)$

▲



$$B_\varepsilon(y_1) \cap B_\varepsilon(y) = \varnothing$$
$$B_\varepsilon(y_1) \cap \partial Q = \varnothing$$
$$B_\varepsilon(y_2) \cap \partial Q = \varnothing$$

$$0 = \int\limits_{Q \setminus (\overline{B_\varepsilon(y_1)} \cup \overline{B_\varepsilon(y_2)})} \Big(G(x,y_1) \underbrace{\Delta_x G(x,y_2)}_{=0} - G(x,y_2) \overbrace{\Delta_x G(x,y_1)}^{=0} \Big)\, dx =$$

G гарм. по x, если $x \neq y$

$$= \int\limits_{S_\varepsilon(y_1) \cup S_\varepsilon(y_2)} \Big(G(x,y_1) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x,y_2) - G(x,y_2) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x,y_1) \Big)\, dS =$$

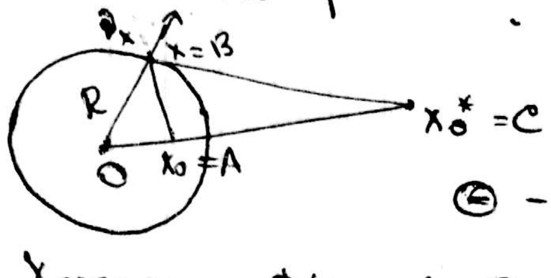
$$= \int\limits_{S_\varepsilon(y_1)} \underbrace{G(x,y_1) \frac{\partial G(x,y_2)}{\partial \nu_x}}_{\substack{\| \\ E_n(x-y_1) + g(x,y_1) \big|_{S_\varepsilon(y_1)}}} - \overbrace{G(x,y_2) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x,y_1)}^{\text{имеет} \to G(y_1,y_2)} \Big) + \int\limits_{S_\varepsilon(y_2)} \ldots$$

$=0$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} G(y_2,y_1) - G(y_1,y_2) = 0 \qquad \blacksquare$$

(24) Решение зад. Дирихле для шара. Ф-ла Пуассона.

Хотим построить $G(x,x_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x-x_0| + g(x,x_0) \ominus$



$|x_0|\cdot|x_0^*| = R^2$

не зав. от v, зав от x_0

$\ominus -\frac{1}{2\pi}\ln|x-x_0| + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\ln(|x-x_0^*|\cdot C)}_{\text{гарм в обл.}}$

Хотим: $G(x,x_0)=0$, $x\in\partial Q$, $|x|=R$

$G(x,x_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\left|\frac{x-x_0}{x-x_0^*}\right|\cdot\frac{1}{C}\right)=0$

$\triangle OAB \sim \triangle OBC$: общий угол, $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OB|}{|OC|}\left(=\frac{|AB|}{|BC|}\right)$

$\frac{|x_0|}{R} = \frac{R}{|x_0^*|} = \frac{|x-x_0|}{|x-x_0^*|}$.

$\frac{|x-x_0|}{|x-x_0^*|}\cdot\frac{|x_0^*|}{R} = \frac{|x-x_0|}{|x-x_0^*|}\cdot\frac{R}{|x_0|} = 1 \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{|x_0^*|}{R} \Rightarrow C = \frac{R}{|x_0^*|}$

$$u(x_0) = -\int_{\partial Q} u(x)\frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x,x_0)\,dS_x$$

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial Q} u(x)\left(\frac{\partial}{\partial\nu_x}\ln|x-x_0| - \frac{\partial}{\partial\nu_x}\ln|x-x_0^*|\right)dS_x \ominus$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu_x}\ln|x-x_0| = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\nu_x}\ln|x-x_0|^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}(\nu_x, x-x_0)}{|x-x_0|^2}$$

$$\ominus \frac{1}{2\pi}\int_{\partial Q} u(x)\left(\frac{(\nu_x, x-x_0)}{|x-x_0|^2} - \frac{(\nu_x, x-x_0^*)}{|x-x_0^*|^2}\right)dS_x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial Q} u(x)\left(\frac{1}{|x-x_0|}\cdot\cos\angle OBA - \frac{1}{|x-x_0^*|}\cos\angle OBC\right)dS_x \ominus$$

$|OA|^2 = |OB|^2 + |AB|^2 - 2|OB|\cdot|AB|\cdot\cos\angle OBA$

$|x_0|^2 = R^2 + |x-x_0|^2 - 2R(x)\cos\angle OBA$

$$\cos\angle OBA = \frac{R^2+|x-x_0|^2-|x_0|^2}{2R|x-x_0|}$$

$$\cos\angle OBC = \frac{R^2+|x-x_0^*|^2-|x_0^*|^2}{2R|x-x_0^*|}$$

$$\textcircled{24} \ (=) \ \frac{1}{2\pi}\int_{\partial Q} u(x)\left(\frac{R^2+|x-x_0|^2-|x_0|^2}{2R\,|x-x_0|^2}-\frac{R^2+|x-x_0^*|^2-|x_0^*|^2}{2R\,|x-x_0^*|^2}\right)dS_x=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial Q} u(x)\left(\frac{R^2+|x-x_0|^2-|x_0|^2}{2R\,|x-x_0|^2}-\frac{R^2+\frac{|x-x_0|^2R^2}{|x_0|^2}-\frac{R^4}{|x_0|^2}}{2R\,\frac{|x-x_0|^2R^2}{|x_0|^2}}\right)dS_x=$$

$$=\frac{1}{4\pi R}\int_{\partial Q} u(x)\left(\frac{R^2+|x-x_0|^2-|x_0|^2}{|x-x_0|^2}-\frac{|x_0|^2+|x-x_0|^2-R^2}{|x-x_0|^2}\right)dS_x=$$

$$=\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial Q}\frac{R^2-|x_0|^2}{|x-x_0|^2}u(x)\,dS_x$$ – ф-ла Пуассона для $n=2$

$n\geq 3$

$$G(x,x_0)=\frac{1}{\omega_{n-1}(n-2)}\left(\frac{1}{|x-x_0|^{n-2}}-\frac{C}{|x-x_0^*|^{n-2}}\right),\quad C=\frac{|x_0|^{2-n}}{R^{2-n}}$$

$$u(x_0)=\frac{1}{\omega_{n-1}R}\int_{\partial Q}\frac{R^2-|x_0|^2}{|x-x_0|^n}u(x)\,dS_x$$ – ф-ла Пуассона

25 Теорема о среднем для гарм. ф-ций. Теорема о среднем по сфере. Теорема о среднем по шару.

Теор (по сфере)
Пусть $n \geq 2$, $u \in C^2(B_R(0)) \cap (\overline{B_R(0)})$, $\Delta u = 0$ в $B_R(0)$
Тогда $u(0) = \frac{1}{\underbrace{\omega_{n-1}}_{} R^{n-1}} \int\limits_{S_R(0)} u(x) dS_x$

площадь пов-ти $(n-1)$-мерной единичной сферы

▲ $u(x_0) = \frac{1}{\omega_{n-1} R} \int\limits_{S_R(0)} \frac{R^2 - |x_0|^2}{|x - x_0|^n} u(x) dS_x$ – ф-ла Пуассона

$u(0) = \frac{1}{\omega_{n-1} R^{n-1}} \int\limits_{S_R(0)} u(x) dS_x$ ↓ подставили

■

Теор (по шару)
Пусть $n \geq 2$, $u \in C^2(B_R(0)) \cap C(\overline{B_R(0)})$, $\Delta u = 0$ в $B_R(0)$
Тогда $u(0) = \frac{1}{|B_R(0)|} \int\limits_{B_R(0)} u(x) dx$

объем шара → $|B_R(0)|$

▲ $u(0) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{S_r(0)} u(x) dS_x \qquad 0 < r \leq R$

$r^{n-1} u(0) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{S_r(0)} u(x) dS$ ↓ интегрируем по

$\int\limits_0^R r^{n-1} u(0) dr = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_0^R \int\limits_{S_r(0)} u(x) ds dr$

$\frac{1}{n} R^n u(0) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_0^R \int\limits_{S_r(0)} u(x) ds dr$

$u(0) = \frac{n}{\omega_{n-1} R^n} \int\limits_0^R \int\limits_{S_r(0)} u(x) ds dr = \frac{1}{|B_R(0)|} \cdot \int\limits_{B_R(0)} u(x) dx$

■

Scanned by CamScanner

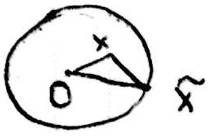
(26) Нер-во Харнака. Теор. об устр. особ. гарм. ф-ций. Теор. Лиувилля.

<u>Теор</u> (Нер-во Харнака)

Пусть $u \in C^2(B_R(0)) \cap C(\overline{B_R(0)})$, $u \ge 0$ в $B_R(0)$, $\Delta u = 0$ в $B_R(0)$

Тогда $$\frac{R^{n-2}(R^2-|x|^2)}{(R+|x|)^n}u(0) \le u(x) \le \frac{R^{n-2}(R^2-|x|^2)}{(R-|x|)^n}u(0)$$

▲ $$u(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}R}\int\limits_{S_R(0)} \frac{R^2-|x|^2}{|\tilde{x}-x|^n}u(\tilde{x})\,dS_{\tilde{x}}$$



$R-|x| \le |x-\tilde{x}| \le R+|x|$ (нер-во треуг.)

$$u(x) \le \frac{1}{\omega_{n-1}R}\int\limits_{S_R(0)} \frac{R^2-|x|^2}{(R-|x|)^n}u(\tilde{x})\,dS_{\tilde{x}} \le$$

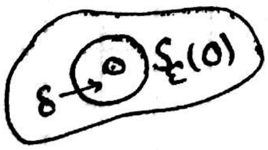
$$\le \frac{1}{\omega_{n-1}R}\frac{R^2-|x|^2}{(R-|x|)^n}\underbrace{\int\limits_{S_R(0)} u(\tilde{x})\,dS_{\tilde{x}}}_{u(0)R^{n-1}} = \frac{R^{n-2}(R^2-|x|^2)}{(R-|x|)^n}u(0)$$

Другое нер-во — аналогично. ■

<u>Теор</u> (об устр. особ.)

Пусть $u(x) \in C^2(Q\setminus\{0\})$, $\Delta u = 0$ в $Q\setminus\{0\}$, $\exists M>0$: $|u(x)| \le M$. Тогда $\exists v \in C^2(Q)$, $\Delta v = 0$ в Q, $v = u$ в $Q\setminus\{0\}$.

▲ 1) $n = 2$



$\Delta V = 0$ в $B_\varepsilon(0)$

$V = u$ на $S_\varepsilon(0)$

$W = u - V$ в $B_\varepsilon(0)\setminus\{0\}$

$W_{\varepsilon_1} = W + \varepsilon_1 \ln\frac{1}{|x|}$, $\varepsilon_1 > 0$

$W_{\varepsilon_1}\big|_{S_\varepsilon} = \varepsilon_1 \ln\frac{1}{\varepsilon} > 0$

$W_{\varepsilon_1}\big|_{S_\varepsilon} = W\big|_{S_\delta(0)} + \varepsilon_1 \ln\frac{1}{\delta} \ge -2M + \varepsilon_1\ln\frac{1}{\delta} > 0$

$W_{\varepsilon_1} \ge 0$ в $B_\varepsilon(0)\setminus B_\delta(0)$

26

$\varepsilon_{1j} \to 0,\ j \to \infty$

$w \geq 0$ в $B_\varepsilon(0)$

Аналогично $w \leq 0$ (заменим w на $-w$)

2) $n \geq 3$

$$w_{\varepsilon_1} = w + \varepsilon_1 \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

Остальное аналогично. ■

Теор (Лиувилля)

Пусть $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\Delta u = 0$, $u \geq M$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда $u \equiv const$

▲ $$\frac{R^{n-2}(R^2 - |x|^2)}{(R+|x|)^n} u(0) \leq \underset{\substack{\uparrow \\ u \neq 0}}{u(x)} \leq \frac{R^{n-2}(R^2 - |x|^2)}{(R-|x|)^n} u(0)$$

Устремляем $R \to \infty$

$v = u - M \geq 0$. Для v получаем $v \equiv const$ ■

27 Беск. дифф-ть гарм. ф-ций. Нер-ва Бернштейна для производных гарм. ф-ций. Аналитичность гарм. ф-ций.

<u>Теор</u>

$u \in C^2(Q)$, $Q \subset \mathbb{R}^n$, $\Delta u = 0$. Тогда $u \in C^\infty(Q)$

$$u(x) = \frac{1}{\omega_{n-1} R} \int\limits_{S_R(x)} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - x'|^n} u(x') \, dS_{x'} = \int\limits_{S_R(x_0)} k(x, x') u(x') dS_{x'}$$

$$k(x, x') = \frac{R^2 - x^2}{\omega_{n-1} R |x - x'|^n} \text{ — ядро}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u(x) = \int\limits_{S_R(x_0)} \frac{\partial k}{\partial x_i}(x, x') u(x') dS_{x'}$$

если $x_0 \neq 0$, то замена $z = x - x_0$

тогда $\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial z_i}$

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{R^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (z_i - z_i')^2\right)^{n/2}}$$ — можно снова дифф-ть ■

<u>Теор</u>. Пусть $u \in C^2(Q)$, $Q \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\Delta u = 0$ в Q. Тогда u аналитична в Q.

<u>Нер-во Бернштейна</u>

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ - огр обл, $u \in C^2(Q)$, $|u| \leq M$. Тогда $\forall \alpha$ (мультииндекс), $|\alpha| = 0, 1, 2, ..$, $\delta = dist(x, \partial Q)$

$$|D^\alpha u| \leq M \left(\frac{n}{\delta}\right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|}$$

(28) Теоремы Харнака о посл-ти гарм. ф-ций.

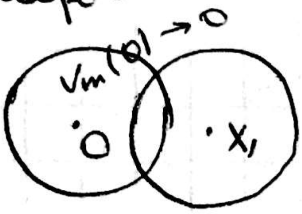
<u>Теор 1</u> (Харнака)

Пусть $u_m(x) \le u_{m+1}(x)$ $\forall x \in Q$, $0 \in Q$, $u_m \in C^2(Q)$, $\Delta u_m = 0$,
$\exists \lim\limits_{m\to\infty} u_m(0)$. Тогда $\forall\, Q' \underset{\text{комп. влож.}}{\Subset} Q$ $\quad u_m \overset{Q'}{\rightrightarrows} u$, $m \to \infty$

▲ $u_{m+1} - u_m = v_m \ge 0$ в Q $\Rightarrow$ для v_m можно написать нер-во Харнака:

$$R^{n-2} \frac{R^2 - |x|^2}{(R+|x|)^n} v_m(0) \le v_m(x) \le R^{n-2} \frac{R^2-|x|^2}{(R+|x|)^n} v_m(0)$$

$\Rightarrow$ в $\forall$ шаре с центром в 0 есть равн. сх-ть
$\forall$ комп. вложенную обл. можно покрыть кон. набором шаров



$$R_1^{n-2} \frac{R_1^2 - |x|^2}{(R_1+|x|)^n} v_m(x_1) \le v_m(x)$$

$$v_m(0) \to 0 \Rightarrow v_m(x_1) \to 0$$

■

<u>Теор 2</u> (Харнака)

Пусть $u_m(x) \in C^2(Q)$, $\Delta u_m = 0$, $u_m \rightrightarrows u$ в Q' $\forall\, Q' \Subset Q$. Тогда $\Delta u = 0$ в Q.

▲ $\forall\, Q'' \Subset Q'$ $\quad \sup\limits_{Q''} |D^\alpha(u_k - u_j)| \le c \sup\limits_{Q'} |u_k - u_j|$

(нер-во Бернштейна)

■

29. Внешние краевые задачи для ур-я Лапласа (Дирихле, Неймана). Сведение внешней задачи к внутр. Единственность реш. краевых задач.

$Q \subset \mathbb{R}^n$ — обл: $\mathbb{R}^n \setminus Q$ — огр $\quad$ неогр. обл. $\to Q$

• Внешняя задача Дирихле: $\Delta u = 0$ в Q

$n=2$ $\quad u|_\Gamma = g \quad \Gamma = \partial(\mathbb{R}^2\setminus Q)$?

без этого реш. м.б. не единств $\to$ $\begin{cases} \sup\limits_Q |u| < \infty & (n=2) \\ u(P) \xrightarrow[P\to\infty]{} 0 & (n\geq 3)\end{cases}$

• Внешняя задача Неймана: $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } Q \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = g \\ \sup\limits_Q |u| < \infty \quad (n=2)\end{cases}$

$n=2$

<u>Утв 1</u>. $n=2$, $\mathbb{R}^2\setminus Q$ — огр, $u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$, $\Delta u = 0$ в Q, $|u| \leq M$ в Q, $u|_\Gamma = 0 \Rightarrow u \equiv 0$. (Дирихле)

▲ Замена коорд — переход от внешней зад к внутр.

$\begin{cases} r' = \dfrac{R^2}{r} \\ \varphi' = \varphi \end{cases}$ — инверсия $\quad \left\{ \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} \right.$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = \left(u_{r'r'}\cdot\left(-\frac{R^2}{r^2}\right)^2 + u_{r'}\frac{2R^2}{r^3}\right) + $$
$$+ \left(u_{r'}\cdot r'_r\right) + \frac{1}{r^2}u_{\varphi'\varphi'} = u_{r'r'}\frac{(r')^4}{R^4} + u_{r'}\frac{(r')^3}{R^4} + $$
$$+ \frac{(r')^2}{R^4}u_{\varphi'\varphi'} = 0$$

Отсюда $u_{r'r'} + \frac{1}{r'}u_{r'} + \frac{1}{(r')^2}u_{\varphi'\varphi'} = 0$

$Q' \not\ni \{0\}$ $\quad \begin{cases} \Delta_{r'\varphi'} u = 0 \\ u|_\Gamma = 0 \\ |u| \leq M \text{ в } Q' \end{cases}$ $\quad$ По теор об устр. о $\exists\, u_0 : \tilde{u} = \begin{cases} u, & x \neq 0 \\ u_0, & x = 0 \end{cases}$

По принц. max $\tilde{u} = 0$ ■

Scanned by CamScanner

(29) Утв 2 $\mathbb{R}^n \setminus Q$ – огр, $n \geq 3$, $u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$, $\Delta u = 0$ в Q

$u = \overline{\overline{o}}(1)$ в Q при $|x| \to \infty$, $u|_\Gamma = 0 \Rightarrow u \equiv 0$

▲ $u \neq 0$, рассм. $\sup\limits_{x \in Q} u(x) = N < \infty$

$\exists\ x_0 \in \overline{Q \cap B_R(0)}$: $u(x_0) = N$ (на комп. достигается)

1) $x_0 \in \Gamma \Rightarrow u(x_0) = N = 0$

2) $x_0 \in Q \cap \overline{B_R(0)} \Rightarrow$ по усил. принц. макс.

$u \equiv u(x_0)$, но $u|_\Gamma = 0 \Rightarrow u \equiv u(x_0) = 0 \Rightarrow N = 0$.

Аналогично, $\inf\limits_{x \in Q} u = 0$ ■

След. Из утв. 1, утв 2. следует единств. реш. нар. задачи

. Нейман: $(r, \varphi) \to (r', \varphi')$ сводим к внутр. задаче

Утв3. $\mathbb{R}^2 \setminus Q$ огр, $u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$, $\Delta u = 0$ в Q, $|u| \leq M$ в Q, $|u| \leq M$ в Q, $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = 0 \Rightarrow u \equiv const$ $(n=2)$

▲ $\begin{cases} \Delta_{r'\varphi'} u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu'}\Big|_{\Gamma'} = 0 \\ |u| \leq M \text{ в } Q' \end{cases}$ Углы сохр-сь, есть особ. в нуле
Устраняем особ. по теор об устр. особ:

$\tilde{u}$: $\begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu'}\Big|_{\Gamma'} = 0 \end{cases}$ $\tilde{u} \in C^1(\overline{Q'})$, $\sup\limits_{x \in Q'} \tilde{u} = N = \tilde{u}(x_0)$

1) $x_0 \in Q' \Rightarrow \tilde{u} = N$ по усил. принц. макс.

2) $x_0 \in \Gamma'$, $v(x) = N - \tilde{u}(x) > 0$ и гармон. в Q'

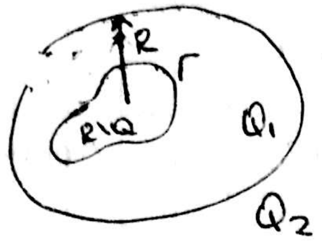
$v(x_0) = 0$, $v(x) > 0$ в $x \in Q'$.

По лемме о внутр. произв. $\frac{\partial v}{\partial \nu'}\Big|_{x_0} > 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu'}\Big|_{x_0} < 0$,

но по условию $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu'}\Big|_{x_0} = 0$, противор $\Rightarrow \tilde{u} \equiv const$ ■

29

Утв 4. $\mathbb{R}^n \setminus Q$, $n \geq 3$, $u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$, $\Delta u = 0$ в Q,
$u(x) = \bar{\bar{o}}(1)$ при $|x| \to \infty$; $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0 \Rightarrow u \equiv 0$.



$\sup\limits_{Q} u = \sup\limits_{Q_1 \cup Q_2} u = N > 0$

sup достиг-ся в $\overline{Q_1}$ (при нек. R в Q_2 убыв. по усл.)

$\exists\, x_0 \in \overline{Q_1}: \ u(x_0) = N$

1) $x_0 \in \overline{Q_1} \setminus \Gamma \Rightarrow$ по усил. принц. макс. $u \equiv const = N$,
но $u(x) = \bar{\bar{o}}(1)$ при $|x| \to \infty \Rightarrow u(x) \equiv 0$.

2) $x_0 \in \Gamma$, пусть $v(x) = N - u(x)$

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v > 0 \quad \text{в } Q_1 \\ v(x_0) = 0 \end{cases}$$

По лемме о внутр. произв. $\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{x_0} > 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x_0} < 0$,
но по усл. $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x_0} = 0$, против. $\Rightarrow u \equiv 0$ ■

След.: Из утв 3, утв 4. следует единств. реш. кр. задачи.

30 Пр-ва ф-ций с обобщ. производными $H^1(Q)$, $H^k(Q)$

 $Q \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 1$
огр.

$u \in L_2(Q)$

<u>Опр</u>. Ф-ция $v \in L_2(Q)$ наз. обобщённой производной порядка $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n)$: $v = D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, если $\forall \varphi \in \mathring{C}^\infty(Q)$ $\quad \int_Q v\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q u D^\alpha \varphi\, dx$

$\mathring{C}^\infty(Q) = \mathcal{D}(Q)$ $\{u \in C^\infty(Q),\ \operatorname{supp} u \subset Q\}$

<u>Опр</u>. $f \in \mathcal{D}'(Q)$, если f – лин. ф-л на $\mathcal{D}(Q)$:

$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(Q)} \varphi \Rightarrow (f, \varphi_j) \xrightarrow[j \to \infty]{} (f, \varphi)$

Сх-ть в $\mathcal{D}(Q)$: 1) $\exists K \subset Q$: $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$ – компакт?

2) $\forall \alpha$ $D^\alpha \varphi_j \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ ($\Leftrightarrow \sup_Q |D^\alpha(\varphi_j - \varphi)| \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$)

$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi)$.

<u>Опр</u>. Пр-во $H^k(Q)$ – мн-во всех ф-ций $u \in L_2(Q)$, т.ч. обобщ. произв. $D^\alpha u \in L_2(Q)$ $\forall \alpha: |\alpha| \le k$ со скалярным произвед. $(u,v)_{H^k(Q)} = \int_Q \sum_{|\alpha| \le k} D^\alpha u D^\alpha v\, dx$

и нормой $\|u\|^2_{H^k(Q)} = \int_Q \sum_{|\alpha| \le k} |D^\alpha u|^2 dx$

$H^1(Q)$: $\|u\|_{H^1(Q)} = \int_Q (|\nabla u|^2 + u^2)\, dx$

$(u, v)_{H^1(Q)} = \int_Q ((\nabla u, \nabla v)^2 + uv)\, dx$

(31) Полнота пр-ва H^1.

Теор. $H^1(Q)$ полно. ($H^k(Q)$ на самом деле тоже)

▲ Известно: $L_2(Q)$ полно.

Пусть $\{u_j\}$ - фунд. в $H^1(Q)$, т.е. $\|u_j - u_m\|_{L_2(Q)} \xrightarrow[j,m\to\infty]{} 0$,

$$\|u_{j x_i} - u_{m x_i}\|_{L_2(Q)} \to 0$$
$$i = 1, \dots, n$$

$$\|u\|^2_{H^1(Q)} = \|u\|^2_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}$$

$\Rightarrow$ u_j сх-ся к v, $u_{j x_i}$ сх-ся к v_i:

$$\|u_j - v\|_{L_2(Q)} \to 0, \quad \|u_{j x_i} - v_i\|_{L_2(Q)} \to 0, \; j \to \infty$$

Хотим показать, что $v_{x_i} = v_i$

$$\int_Q u_{j x_i} \varphi \, dx = -\int_Q u_j \varphi_{x_i} \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q)$$

$\downarrow j\to\infty$ по опр. обобщ. производной

$$\int_Q v_i \varphi \, dx \quad -\int_Q v \varphi_{x_i} \, dx$$

$$\left| \int_Q u_{j x_i} \varphi \, dx - \int_Q v_i \varphi \, dx \right| \le \int_Q |(u_{j x_i} - v_i)| \cdot |\varphi| \, dx \le \|u_{j x_i} - v_i\|_{L_2(Q)} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\|\varphi\|_{L_2(Q)}}_{\text{конечно}} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

■

32) Пр-во $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$. Нер-во Фридрихса.

Опр. Пр-во $\overset{\circ}{H}{}^k(Q)$ — пополнение $\mathcal{D}(Q)$ по норме $H^k(Q)$.

Утв. $\overset{\circ}{H}{}^k(Q) \subset H^k(Q)$.

▲ $\mathcal{D}(Q) \subset H^k(Q)$, а $H^k(Q)$ — полное $\Rightarrow$ замыкание $\mathcal{D}(Q)$ лежит в замыкании $H^k(Q)$ ■

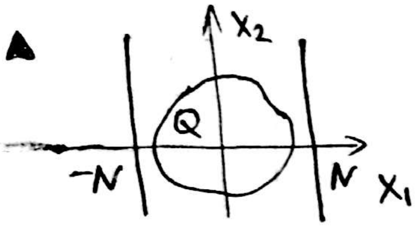
$$\overset{\circ}{H}{}^k(\mathbb{R}^n) = H^k(\mathbb{R}^n)$$

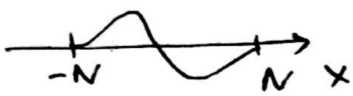
Нер-во Фридрихса. важно, нельзя заменить на H^k обобщ. произв.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — огр. обл. Тогда $\exists M>0\ \forall u \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$

$$\|u\|_{L_2(Q)} \le M \, \| |\nabla u| \|_{L_2(Q)} \quad \left(\text{или } \int_Q u^2 dx \le M^2 \int_Q |\nabla u|^2 dx\right)$$

▲





$\forall u(x) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(-N,N)\ \forall x \in (-N,N)\quad u(x) - \cancel{u(-N)} = \int_{-N}^{x} u'(z)\,dz$

$$\Rightarrow (u(x))^2 = \left(\int_{-N}^{x} u'(z)\,dz\right)^2 \le \int_{-N}^{x} dz \int_{-N}^{x} (u'(z))^2 dz \le$$

$$\le 2N \int_{-N}^{N} (u'(z))^2 dz = \text{const}$$

Интегрируем: $u^2(x) \le 2N \int_{-N}^{N} (u'(z))^2 dz$

$$\int_{-N}^{N} u^2(x)\,dx \le 4N^2 \int_{-N}^{N} (u'(x))^2 dx$$

Пусть теперь $u(x_1, \ldots, x_n) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(Q) = \mathcal{D}(Q)$

$u(\cdot, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}(-N,N)$

$$\int_{-N}^{N} u^2(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \le 4N^2 \int_{-N}^{N} u_{x_1}^2(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1$$

Интегр. нер-во по всем остальным переменным

$$\int_Q u^2 dx \le 4N^2 \int_Q u_{x_1}^2 dx \le 4N^2 \int_Q |\nabla u|^2 dx$$

Доказали для гладких ф-ций.

(32) Для $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ $\exists u_j \in \mathcal{D}(Q)$:

$$\|u-u_j\|_{H^1(Q)} \to 0, \; j \to \infty$$

$$\int_Q u_j^2 dx \le M^2 \int_Q |\nabla u_j|^2 dx$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_Q u^2 dx \qquad\qquad \int_Q |\nabla u|^2 dx$$

(33) Нер-во Пуанкаре для куба

$\Delta = \{ x, y, z \mid 0 \le x, y, z \le a \}$ $\quad |\Delta| = a^3$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in \Delta$ — произвольные точки в кубе

$\forall u \in C^1$: $u(M_2) - u(M_1) = \int_{x_1}^{x_2} D_x u(x, y_2, z_2)\,dx +$

$+ \int_{y_1}^{y_2} D_y u(x_1, y, z_2)\,dy + \int_{z_1}^{z_2} D_z u(x_1, y_1, z)\,dz$

$(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$:

$(u(M_2) - u(M_1))^2 \le 3\left(\int_{x_1}^{x_2} D_x u(x, y_2, z_2)\,dx\right)^2 + 3\left(\int\right)^2 + 3\left(\int\right)^2 \le$

нер-во (К-Б)

$\le 3\left(a\left(\int_0^a (D_x u(x, y_2, z_2))^2\,dx + \int_0^a (\ )^2 dy + \int_0^a (\ )^2 dz\right)\right.$

Проинтегрируем по $dM_1\,dM_2$ $\quad (dM_i = dx_i\,dy_i\,dz_i,\ i=1,2)$

$$\int_\Delta \int_\Delta (u(M_2) - u(M_1))^2\,dM_1\,dM_2 \le 3a^5 \int_\Delta |\nabla u|^2\,dM$$

$\quad \|$

$$\underbrace{2a^3}_{=2|\Delta|} \int_\Delta u^2(M)\,dM - 2\left(\int_\Delta u(M)\,dM\right)^2$$

Нер-во Пуанкаре

$$\boxed{\int_\Delta u^2\,dx \le \frac{3}{2} a^2 \int_\Delta |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{a^3}\left(\int_\Delta u\,dx\right)^2}$$

Для m-мерного куба ($|\Delta|$ — его объём):

$$\int_\Delta u^2\,dx \le \frac{m}{2} |\Delta|^{\frac{2}{m}} \int_\Delta |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{|\Delta|}\left(\int_\Delta u\,dx\right)^2$$

34) Осреднение ф-ций. Беск. дифф-ть средних ф-ций.

Пусть $k(x) \in \mathcal{E}^{\infty}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $k(x) \geq 0$, $\int\limits_Q k(x)\,dx = 1$, $\operatorname{supp} k(x) \subset B_1(0)$

$k_h(x) = \frac{1}{h^n} k\left(\frac{x}{h}\right)$, $h > 0$ наз. ядром усреднения

Пример: $k(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1 \\ c_1 e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1 \end{cases}$

$$c_1 = \frac{1}{\int\limits_{|x|<1} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}\,dx}$$

Опр. $u \in L_{1,loc}(Q)$, $u_h(x) = \int\limits_Q k_h(x-y)u(y)\,dy = \int\limits_{B_h(x)} k_h(x-y)u(y)\,dy$ — осреднение u, u_h — средняя ф-ция

Теор. Пусть $u \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $u_h \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

35 Теор. о приближении средними ф-циями в пр-ве $L_2(Q)$.

$$u_h(x) = \int_Q k_h(x-y)u(y)\,dy, \quad k_h(x) = \frac{1}{h^n} k\left(\frac{x}{h}\right), \; h>0$$

<u>Теор.</u> Если $f(x) \in L_2(Q)$, то $f_h(x) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$ в $L_2(Q)$.

▲ Пусть $f(x)$ продолжена 0 вне Q.

$$|f(x) - f_h(x)|^2 \overset{?}{=} \Big|\int_Q (f(x)-f(y))\underbrace{k_h(x-y)}_{\le \frac{C}{h^n}}\,dy\Big|^2 \le$$

$$\le \int_Q |f(x)-f(y)|^2\,dy \cdot \frac{C}{h^n} \;=\; \qquad \int_Q f(x) k_h(x-y)\,dy = f(x)$$

$$= \frac{C}{h^n} \int_Q |f(x)-f(x+z)|^2\,dz$$

Тогда $\|f-f_h\|_{L_2(Q)} \le \frac{C}{h^n} \int_Q dz \overbrace{\int_Q |f(x)-f(x+z)|^2\,dx}^{=:A}$

$\exists\, h_0 > 0 : \; A \le \varepsilon$ из непр-ти $f(x)$ в метрике $L_2(Q)$

$\Rightarrow \|f-f_h\|_{L_2(Q)} \le \tilde{C}\cdot\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

■

(36) Теор. о связи операции усреднения и обобщ. произв.

Теор. $\exists$ обобщ. произв. $D^\alpha f$ ф-ции $f \in L_2(Q) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall Q' \subset Q \ \exists C(Q')$ и $h(Q')$: $\|D^\alpha f_h\|_{L_2(Q')} \le C(Q')$

$\forall h < h_0$

■ $\forall \alpha \quad |D^\alpha K_h(x)| \le \frac{C_\alpha}{h^{n+|\alpha|}}$

($\Rightarrow$) В качестве φ возьмем $K_h(x)$:

$$|D^\alpha f_h - D^\alpha f|^2 \le (-1)^{|\alpha|} \int_Q (f(x) - f_h(x))^2 D K_h(x-y)\,dx$$

$$\|D^\alpha f_h - D^\alpha f\|^2_{L_2(Q)} \le C \, \|f(x) - f_h(x)\|^2_{L_2(Q)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

($\Leftarrow$) Возьмем сист. $Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q$: $\forall x \in Q_i \Rightarrow x \in Q_j$, $j > i$

Т.к. $\|D^\alpha f_h\|_{L_2(Q)} \le C(Q_1) \quad \forall h < h_0$, то

$\exists \{h_{1,i}\} \downarrow 0$: $\{D^\alpha f_{h_{1,i}}\}$ сх-ся в $L_2(Q_1)$. Аналогично,

$\exists \{h_{2,i}\} \downarrow 0$: $\{D^\alpha f_{h_{2,i}}\}$ сх-ся в $L_2(Q_2)$

(подпосл $h_{1,i}$?)

Диагон. посл. $\{D^\alpha f_{h_{k,k}}\}$ сх-ся к $k(x) \in L_{2\,loc}(Q)$

в пр-ве $L_2(Q_i) \quad \forall i$

Возьмем произвольную $g \in C^{|\alpha|}(\bar{Q})$, и пусть $Q' \subset Q$:

вне Q' $g(x) = 0$. Тогда

$$\int_Q D^\alpha f_{h_{k,k}} g\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q f_{h_{k,k}} D^\alpha g\,dx$$

$$\downarrow$$

$$\int_Q k g\,dx \qquad (-1)^{|\alpha|} \int_Q f D^\alpha g\,dx$$

$\Rightarrow f$ имеет обобщ. производную ■

(37) След функций из $H^1(Q)$ на гладкой пов-ти.

Теор. $\forall f(x) \in H^1(Q)$ на любой гл. пов-ти S $\exists$ след $f|_S \in L_2(S)$, причём $\int\limits_S |f(x)|^2 dS = \|f\|^2_{L_2(S)} \le C\|f\|^2_{H^1(Q)}$

▲ $S = \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$: $\forall S_i$ однозн. проецир. на $(n-1)$-мерную обл. $D_1 : \{x_n = 0\}$, $x_n = \varphi(x')$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D_1$

Возьмём произвол. $f(x) \in C^1(\overline{Q})$, по ф-ле Н-Л

$$f(x', \varphi(x')) = \int\limits_0^{\varphi(x')} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n \Rightarrow$$

$$|f(x', \varphi(x')|^2 \le \varphi(x') \int\limits_0^{\varphi(x')} \left| \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right|^2 d\xi_n$$

Проинтегр. по D_1:

$$\int |f(x)|^2 dS \le \int\limits_{D_1} \varphi(x') \sqrt{1 + |\nabla\varphi(x')|^2} \int\limits_0^{\varphi(x')} \left| \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right|^2 d\xi_n dx'$$

$$\le C\|f\|^2_{H^1(Q_1)} \le C_1 \|f\|^2_{H^1(Q)} \quad (*)$$

Доказали для $f \in C^1(\overline{Q})$. Возьмём теперь $f(x) \in H^1(Q)$. В силу плотности $C^1(\overline{Q})$ в $H^1(Q)$ $\exists f_1(x), \dots, f_k(x), \dots$ сх-ся к $f(x)$ по норме $H^1(Q)$, т.е

$$\|f_p - f_q\|^2_{L_2(S)} \le C_2 \underbrace{\|f_p - f_q\|^2_{H^1(Q)}}_{\to 0}$$

Значит, ф-ции $f_p(x)$ на пов-ти S сх-ся к нек ф-ции $f|_S \in L_2(S)$ по норме $L_2(S)$.

Покажем, что $f|_S$ не зависит от посл-ти $\{f_i\}$:
$\exists \{f'_i(x)\}$ из $C^1(\overline{Q})$: $\|f'_p - f\|_{H^1(Q)} \to 0$, а $f'|_S$ - предел в норме $L_2(S)$, тогда:

$$\|f|_S - f'|_S\|_{L_2(S)} \le \|f|_S - f_p\|_{L_2(S)} + \|f_p - f'_p\|_{L_2(S)} + \|f'_p - f'|_S\|_{L_2(S)} \to 0.$$

В силу плотности $C^1(\overline{Q})$ в $H^1(Q)$ нер-во $(*)$ справедливо $\forall f \in H^1(Q)$ ■

(38) Обобщённое решение задачи Дирихле для ур-я Пуассона. Сущ-ние и единст-ть.

$\Delta u = f$ в $Q \subset \mathbb{R}^n$ - ур-е Пуассона
$u = \varphi$ на ∂Q, $\varphi \in H^1(Q)$, $f \in L_2(Q)$, Q - огр. обл.

$\int\limits_Q \Delta u \cdot v \, dx = \int\limits_Q f \cdot v \, dx$? ф-ла Грина

$-\int\limits_Q (\nabla u, \nabla v) \, dx + \int\limits_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, dS = \int\limits_Q f v \, dx$?

положим $v = 0$ на ∂Q.

<u>Опр</u>. Ф-ция $u \in H^1(Q)$ наз слабым (обобщ.) решением задачи Дирихле, если $\forall v \in \mathring{H}^1(Q)$
$\int\limits_Q (\nabla u, \nabla v) dx = -\int\limits_Q f v \, dx$ и $u - \varphi \in \mathring{H}^1(Q)$

<u>Утв 1</u>. Задача Дирихле имеет ≤ 1 слабого решения.

▲ Пусть есть 2: u_1, u_2
$w = u_1 - u_2 = (u_1 - \varphi) - (u_2 - \varphi) \in \mathring{H}^1(Q)$
$\Downarrow$
можно подставить w вместо v

$\int\limits_Q (\nabla w, \nabla v) \, dx = 0$

$\int\limits_Q |\nabla w|^2 dx = 0 \Rightarrow w = 0$. ■

<u>Утв 2</u>. Слабое решение задачи Дирихле $\exists$.

▲ $w = u - \varphi \in \mathring{H}^1(Q)$.

$u = w + \varphi$

$\int\limits_Q (\nabla(w+\varphi), \nabla v) dx = -\int\limits_Q f v \, dx$

$\int\limits_Q (\nabla w, \nabla v) \, dx = -\int\limits_Q (\nabla \varphi, \nabla v) dx - \int\limits_Q f v dx$

$l(v) = -\int\limits_Q (\nabla v, \nabla \varphi) dx - \int\limits_Q f v dx$ - лин. огр. ф-л.:

38

$$|\ell(v)| \leq \|\nabla v\|_{L_2(\overset{\bullet}{Q})} \|\nabla \varphi\|_{L_2(Q)} + \|v\|_{L_2(\overset{\bullet}{Q})} \|f\|_{L_2(Q)} \leq$$

$$\leq C\left(\|\nabla v\|_{L_2} + \|v\|_{L_2} \right) \leq M \|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^1}$$

$\Rightarrow$ по теор. Рисса об огр. опер. $\exists\, w \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q):\ \ell(v) = (v, w)_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}$ ■

(39) Вариационный метод решения зад. Дирихле для ур-я Пуассона.

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{в } Q \qquad f \in L_2(Q),\ \varphi \in H^1(Q) \\ u|_\Gamma = \varphi \end{cases}$$

$$\min_{u-\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)} I(u) = \int_Q |\nabla u|^2 dx + 2\int_Q fu\, dx$$

<u>Утв 1</u>. $\inf I(u)\ \exists$

▲ $u=0 \Rightarrow$ мн-во $\{u\}$ не пусто

<u>Утв 2</u>. Мн-во $\{u\}$ огр. снизу.

▲ по нер-ву Юнга $ab \leq \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}$

? $\inf |I| \geq \int_Q fu\,dx \geq -\left(\frac{\varepsilon}{2}\int_Q u^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_Q f^2 dx\right)$

$$I(u) = \int_Q |\nabla(w+\varphi)|^2 dx + 2\int_Q f(w+\varphi)\,dx =$$

$$= \int_Q |\nabla w|^2 dx + 2\int_Q (\nabla w, \nabla\varphi)\,dx + \int_Q |\nabla\varphi|^2 dx + 2\int_Q fw\,dx +$$

$$+ 2\int_Q f\varphi\,dx \geq \int_Q |\nabla w|^2 dx - \varepsilon\int_Q |\nabla w|^2 dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_Q |\nabla\varphi|^2 dx -$$

$$-\varepsilon\int_Q w^2 dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_Q f^2 dx + \int_\varphi |\nabla\varphi|^2 dx + 2\int_Q f\varphi\,dx \geq$$

$$\geq (1-\varepsilon(c+1))\int_Q |\nabla w|^2 dx + M(\varepsilon) \geq M(\varepsilon) \qquad \blacksquare$$

<u>Утв 3</u>. $\exists \inf\limits_{u-\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)} I(u) = M_0$

▲ мн-во $\{u\}$ огр. снизу и непусто $\Rightarrow \exists \inf$.

$\exists \{u_k\} \in H^1(Q)$, $u_k - \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$: $I(u_k) \to M_0$

Докажем, что $\|u_k - u_m\| \to 0$

$$\int_Q \left|\frac{\nabla(u_k-u_m)}{2}\right|^2 dx + \int_Q \left|\frac{\nabla(u_k+u_m)}{2}\right|^2 dx = \frac{1}{2}\int_Q |\nabla u_k|^2 dx +$$

Scanned by CamScanner

(39) $+\frac{1}{2}\int_Q |\nabla u_m|^2 dx$

$I(u)=\int_Q |\nabla u|^2 dx + 2\int_Q fu\,dx \Rightarrow$

$\int_Q \left| \frac{\nabla(u_k-u_m)}{2}\right|^2 dx + \underbrace{I\left(\frac{u_k+u_m}{2}\right)}_{\geq M_0} = \frac{1}{2}\int_Q |\nabla u_k|^2 dx +$

$+\frac{1}{2}\int_Q |\nabla u_m|^2 dx + 2\int_Q f\left(\frac{u_k+u_m}{2}\right) dx$

Т.е. $\frac{1}{4}\int_Q |\nabla (u_k-u_m)|^2 dx + M_0 = \underbrace{\frac{1}{2}\left(I(u_k)+I(u_m)\right)}_{\to M_0}$

Значит, $\int_Q |\nabla(u_k-u_m)|^2 dx \to 0 \Rightarrow \|u_k-u_m\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} \to 0$

В силу эквив. норм $\|u_k-u_m\|_{H^1(Q)} \to 0$

В силу полноты $H^1(Q)$ $\exists \lim\limits_{k\to\infty} u_k = u \in H^1(Q)$

$u-\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ и $|I(u_k)-I(u)| \to 0$ Нашли inf ■

Утв. Такой $u = \arg\inf I$ подходит в реш. задачи

▲ $I(u+tv) = \int_Q |\nabla(u+tv)|^2 dx + 2\int_Q f(u+tv)\,dx =$
$v \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$

$=\int_Q |\nabla u|^2 dx + 2t\int_Q (\nabla u, \nabla v)\,dx + t^2\int_Q |\nabla v|^2 dx +$

$+2\int_Q fu\,dx + 2t\int_Q fv\,dx$

Дифф-ем по t и кладём $t=0$

$2\int_Q (\nabla u, \nabla v)\,dx + 2\int_Q fv\,dx = 0$ (усл экстр.)

$\Rightarrow \int_Q (\nabla u, \nabla v)\,dx = -\int_Q fv\,dx \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$,

$u-\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q) \Rightarrow u$ - реш. задачи ■