Кафедра теории вероятностей

Теория случайных процессов. Лектор – профессор А.В.Булинский
(весенний семестр 2017 года)

ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Пусть $S = \{S_n, n \geq 0\}$ – простое случайное блуждание в $\mathbb{Z}$, имеющее начальной точкой нуль. Доказать, что для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ таких, что $a < 0 < b$, с вероятностью единица блуждание не останется в полосе, ограниченной прямыми $y = a$ и $y = b$.

2. Пусть $S = \{S_n, n \geq 0\}$ и $S' = \{S'_n, n \geq 0\}$– независимые простые случайные блуждания в $\mathbb{Z}^d$, имеющие начальной точкой нуль, т.е. образованные независимыми последовательностями $(X_n)_{n\geq 1}$ и $(X'_n)_{n\geq 1}$, состоящими из независимых векторов таких, что

$$\mathsf{P}(X_1 = e_k) = \mathsf{P}(X_1 = -e_k) = \mathsf{P}(X'_1 = e_k) = \mathsf{P}(X'_1 = -e_k) = \frac{1}{2d}.$$

Здесь e_k – вектор в $\mathbb{R}^d$, у которого k-я координата равна единице, а остальные равны нулю, $k = 1, \dots, d$. Введем (вообще говоря, расширенную) случайную величину

$$N := \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbb{I}\{S_n = S'_m\},$$

где $\mathbb{I}\{A\}$ – индикатор события A. Найти все $d \in \mathbb{N}$, для которых $\mathsf{E}N < \infty$.

3. Пусть в модели Гальтона – Ватсона $\mathsf{P}(\xi = 0) = 1/4$, $\mathsf{P}(\xi = 2) = 1/2$ и $\mathsf{P}(\xi = 6) = 1/4$. Определить, будет ли вероятность вырождения процесса больше или меньше $1/2$.

4. Пусть $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ – процесс восстановления, построенный по последовательности неотрицательных, независимых, одинаково распределенных величин $X_1, X_2, \dots$ таких, что $\mathsf{E}X_1 = \mu \in (0, \infty)$ и $var X_1 = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Доказать, что

$$\frac{Z(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \stackrel{law}{\to} N(0,1), \quad t \to \infty.$$

5. Можно ли утверждать, что не только пуассоновский процесс, но и любой процесс восстановления является процессом с независимыми приращениями?

6. Найти ковариационную функцию процесса $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ (называемого телеграфной волной), где $Z(t) = \xi_0(-1)^{N(t)}$, $N = \{N(t), t \geq 0\}$ – пуассоновский процесс интенсивности λ, случайная величина ξ_0 принимает значения 1 и -1 с вероятностью $1/2$, причем ξ_0 не зависит от процесса N.

7. Пусть $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ – пространственный точечный пуассоновский процесс с мерой интенсивности $\lambda\,\mu(\cdot)$, где λ – положительная константа, а μ – мера Лебега в $\mathbb{R}^d$. Пусть $\{x_i\}$ – ансамбль случайных точек в $\mathbb{R}^d$, образующих этот процесс. Для $z \in \mathbb{R}^d$ введем случайную величину $Y(z) := \inf_{i\in\mathbb{N}} \|z - x_i\|$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^d$ (иначе говоря, рассматривается расстояние от точки z до ближайшей точки пуассоновского ансамбля). Найти функцию распределения величины $Y(z)$ и ее математическое ожидание.

8. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ – пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$, т.е. процесс восстановления, образованный последовательностью независимых одинаково распределенных величин $X, X_1, X_2, \ldots$ таких, что $X \sim Exp(\lambda)$. Положим $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найти функционал Лапласа процесса $Y = \{Y(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_B(S_n),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$.

9. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ – пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$, $Y_1, Y_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные, неотрицательные величины, причем семейства $\{N(t), t \geq 0\}$ и $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ независимы. Определим процесс Крамера - Лундберга, описывающий капитал страховой компании в момент $t \geq 0$, формулой

$$Z(t) := C_0 + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_j, \quad t \geq 0,$$

где C_0 и c – положительные константы, а сумма по пустому множеству индексов считается равной нулю. Доказать, что процесс $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ имеет независимые приращения.

10. Для пуассоновского процесса $N = \{N(t), t \geq 0\}$ интенсивности $\lambda > 0$ (вводимого как процесс с независимыми приращениями, $N(0) = 0$ п.н., $N(t) - N(s) \sim Pois(\lambda(t-s))$, $0 \leq s \leq t < \infty$) доказать, что не существует модификации, непрерывной п.н.

11. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ – пуассоновский процесс интенсивности λ (как процесс восстановления). Доказать, что $\tau := \gamma\, S_1$, где константа $\gamma \in (0, 1)$, не является марковским моментом относительно естественной фильтрации процесса N (S_1 – длина промежутка до первого скачка процесса N).

12. Доказать, что для каждого $a > 0$ величина $\tau_a(\omega) := \inf\{t \geq 0 : W(t, \omega) = a\}$ является п.н. конечным марковским моментом относительно естественной фильтрации винеровского процесса $W = \{W(t), t \geq 0\}$.

13. Доказать, что если $0 \leq a < b \leq c < d$, то с вероятностью единица

$$\sup_{t \in [a,b]} W(t) \neq \sup_{t \in [c,d]} W(t).$$

Вывести отсюда, что для любого отрезка $[u, v] \subset \mathbb{R}$ с точностью до множества вероятности нуль однозначно определена величина $T^* = T^*(\omega)$ такая, что

$$\sup_{t \in [u,v]} W(t) = W(T^*).$$

14. Пусть $T := \arg\max_{t \in [0,1]} W(t)$, т.е. $T(\omega)$ – та точка отрезка $[0, 1]$, в которой непрерывная траектория $W(t, \omega), t \in [0, 1]$, достигает максимума (величина T определена однозначно с точностью до эквивалентности в силу задачи 13). Доказать, что

$$\mathsf{P}(T \leq t) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}, \quad t \in [0, 1].$$

15. Пусть $W = \{W(t), t \geq 0\}$ – винеровский процесс. Найти все действительные параметры α, β и γ, для которых процесс $Y = \{Y(t) := \exp\{\alpha W(t) + \beta t + \gamma\}, t \geq 0\}$ является субмартингалом относительно естественной фильтрации процесса W.

16. Привести пример мартингала $X = \{X_n, n \geq 0\}$ и момента остановки τ (относительно естественной фильтрации процесса X), для которых $\mathsf{E}X_\tau \neq \mathsf{E}X_0$.

17. Пусть $X = \{X_n, n \geq 0\}$ – цепь Маркова. Будет ли $Y := \{X_{[t]}, t \geq 0\}$ марковским процессом (относительно своей естественной фильтрации)? Можно ли утверждать, что процесс $Z := \{Z(t), t \geq 0\}$ является марковским, если $Z(t)$ для $t \in [n, n+1]$ получается линейной интерполяцией значений X_n и X_{n+1}?

18. Доказать, что процесс $N = \{N(t), t \geq 0\}$ является пуассоновским процессом интенсивности λ (т.е. N – процесс с независимыми приращениями такой, что $N(0) = 0$ п.н. и $N(t) - N(s) \sim Pois(\lambda(t-s))$ для $0 \leq s \leq t < \infty$) тогда и только тогда, когда N - марковская цепь со значениями в пространстве $\mathbb{Z}_+$ и начальным распределением, сосредоточенным в точке 0, а переходные вероятности для $0 \leq s \leq t < \infty$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$ определяются формулой

$$p_{i,j}(s,t) = \begin{cases} \frac{(\lambda(t-s))^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t-s)}, & i \leq j, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

19. Пусть $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – однородная цепь Маркова с конечным числом состояний S. Для $i \in S$ положим

$$c_i = gcd\{n \geq 1 : p_{i,i}(n) > 0\},$$

где gcd обозначает наибольший общий делитель. Состояние i называется периодическим с периодом d ($d > 1$), когда $c_i = d$. Если $c_i = 1$, то i – непериодическое состояние. Доказать, что если цепь X неразложима (т.е. для любых $i, j \in S$ ($i \neq j$) найдутся $k, m \in \mathbb{N}$ такие, что $p_{i,j}(k) > 0$ и $p_{j,i}(m) > 0$), то все состояния одновременно непериодические или периодические, причем в последнем случае все периоды совпадают. Доказать, что если цепь X неразложима и непериодична, то найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $p_{i,j}(n) > 0$ при всех i, j и $n \geq m$.

20. Пусть матрица $Q = (q_{i,j})$, где $i, j \in \{0, \dots, n\}$, имеет вид $q_{i,i+1} = \lambda$ при $i = 0, \dots, n-1$, $q_{i,i-1} = i\mu$ при $i = 1, \dots, n$, $q_{i,i} = -\lambda - i\mu$, $i = 0, \dots, n-1$, $q_{n,n} = -n\mu$, а остальные $q_{i,j}$ равны нулю (λ и μ – положительные параметры). Объяснить, почему существует однородная марковская цепь с пространством состояний $S = \{0, \dots, n\}$ и инфинитезимальной матрицей Q. Доказать, что имеется единственное стационарное распределение. Найти это распределение (предварительно показать, что для стандартной марковской цепи с конечным числом состояний при $t \geq 0$ справедливы обе системы уравнений Колмогорова: $P'(t) = QP(t)$ и $P'(t) = P(t)Q$, где $P(t) = (p_{i,j}(t))$ и Q – инфинитезимальная матрица; вывести отсюда, что $pQ = 0$, где вектор-строка p задает стационарное распределение).

21. (*Модель Эренфестов*) Пусть имеются две урны, содержащие в начальный момент времени соответственно k_1 и k_2 шаров, причем $k_1 + k_2 = k$. В каждый момент времени n ($n \in \mathbb{N}$) с вероятностью $1/k$ выбирается любой из этих k шаров и перекладывается из той урны, где он лежал, в другую. Пусть X_n обозначает число шаров в первой урне в момент времени n. Доказать, что $X_0, X_1, \dots$ образуют однородную цепь Маркова с пространством состояний $\{0, 1, \dots, k\}$. Проверить, что эта цепь обратима. Найти ее стационарное распределение.

22. Построить пример необратимой марковской цепи $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ с конечным пространством состояний.

23. Пусть $X = \{X(t), t \geq 0\}$ – гауссовский процесс со стационарными независимыми приращениями такой, что п.н. его траектории непрерывны на $\mathbb{R}_+$ и $X(0) = 0$ п.н. Доказать, что найдутся винеровский процесс $W = \{W(t), t \geq 0\}$, константы $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}_+$ такие, что $X(t) = at + bW(t)$ п.н. для всех $t \geq 0$.

24. Выяснить, являются ли ковариационными функциями некоторых процессов следующие функции:

а) $r(s,t) = 2\cos(s-t)\exp\{-\alpha|s-t|\}$, $s,t \in \mathbb{R}_+$, $\alpha > 0$;

б) $r(s,t) = (1-(s-t)^2)\mathbb{I}\{|s-t| \leq 1\}$ $s,t \in \mathbb{R}$;

в) $r(s,t) = \exp\left\{ia(s-t) - \frac{(s-t)^2\sigma^2}{2}\right\} + C$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $C \in \{-1,1\}$, $s,t \in \mathbb{R}$.

25. Пусть $X = \{X(t) = e^{-\alpha t}W(e^{2\alpha t}), t \geq 0\}$, где $W(\cdot)$ – винеровский процесс и параметр $\alpha > 0$. Является ли процесс X стационарным в узком и/или широком смысле?

26. Доказать, что для центрированной стационарной в широком смысле последовательности $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ выполнен закон больших чисел в смысле сходимости в среднем квадратическом, а именно,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} Z(0) \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

где $Z(\cdot)$ – спектральная мера упомянутой последовательности.

27. Рассмотрим разбиение отрезка $[0,T]$ точками $0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \ldots < t_{n,N_n} = T$, где $n \in \mathbb{N}$. Фиксируем $\lambda \in [0,1]$ и выберем промежуточные точки $\tau_{n,k} := (1-\lambda)t_{n,k-1} + \lambda t_{n,k}$, $k = 1,\ldots,N_n$. Предположим, что $\max_{1\leq k\leq N_n}(t_{n,k} - t_{n,k-1}) \to 0$ при $n \to \infty$. Найти предел в среднем квадратическом при $n \to \infty$ интегральных сумм вида

$$\sum_{k=1}^{N_n} W(\tau_{n,k})(W(t_{n,k}) - W(t_{n,k-1})),$$

где W – винеровский процесс.

28. С помощью формулы Ито найти

$$\int_{[0,T]} W(t)dW(t),$$

где W – винеровский процесс.