Лекция 1

Понятие случайного процесса и его конечномерные распределения

Теория случайных процессов является частью теории вероятностей. Специфика теории случайных процессов состоит в том, что в ней рассматриваются случайные явления, развивающиеся во времени и для описания которых необходимо использовать временную переменную. Постепенно произошло обособление этой области теории вероятностей.

Напомним, что в теории вероятностей основным является понятие *вероятностного пространства* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, включающее в себя:

Ω – пространство элементарных исходов (произвольное множество, элементы которого называются элементарными исходами и обозначаются ω);

$\mathcal{F}$ – это σ-алгебра случайных событий (класс подмножеств Ω, замкнутый относительно взятия дополнения, счетных объединений или пересечений и содержащий Ω);

$\mathbf{P}$ – вероятностная мера на $\mathcal{F}$ (неотрицательная σ-аддитивная функция на $\mathcal{F}$, причем $\mathbf{P}(\Omega) = 1$).

Напомним также, что пара $(E, \mathcal{E})$, где E – произвольное множество, а $\mathcal{E}$ – заданная на нем σ-алгебра, называется *измеримым пространством*. Следовательно, $(\Omega, \mathcal{F})$ является измеримым пространством.

Важным примером измеримых пространств является множество действительных чисел $\mathbb{R}$ со *стандартной метрикой* ρ ($\rho(x, y) = |x - y|$ при $x, y \in \mathbb{R}$) и заданная на нем борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества числовой прямой относительно метрики ρ).

Аналогично на пространстве $\mathbb{R}^n$ действительных числовых векторов размерности $n \in \mathbb{N}$ можно задать борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (минимальную σ-алгебру, содержащую все открытые множества относительно стандартной метрики) и тем самым получить измеримое пространство $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Утверждение 1. *Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с минимальной σ-алгеброй, заданной на $\mathbb{R}^n$ и содержащей все множества вида $A_1 \times \ldots \times A_n$, где $A_1, \ldots, A_n$ – произвольные одномерные борелевские множества (здесь $A_1 \times \ldots \times A_n$ означает декартово произведение множеств $A_1, \ldots, A_n$).*

Основными объектами изучения теории вероятностей являются случайные величины и векторы. Под *случайной величиной* $\xi = \xi(\omega)$ понимается произвольное отображение Ω в $\mathbb{R}$, являющееся измеримым относительно σ-алгебр $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Это означает, что для любого множества A, принадлежащего σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, его прообраз $\xi^{-1}(A)$ относительно отображения ξ является случайным событием, т.е. принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}$.

Под *случайным вектором* $(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ понимается произвольное отображение Ω в $\mathbb{R}^n$, являющееся измеримым относительно σ-алгебр $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1. Пусть заданы измеримые пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$. *Случайным элементом* X называется произвольное отображение Ω в E, измеримое относительно σ-алгебр $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$ (это означает, что для каждого множества $A \in \mathcal{E}$ множество $X^{-1}(A)$ принадлежит $\mathcal{F}$). При этом говорят, что X – случайный элемент на $(\Omega, \mathcal{F})$ со значениями в $(E, \mathcal{E})$.

Таким образом, и случайная величина, и случайный вектор являются случайными элементами. Для проверки измеримости отображения полезен следующий простой факт.

Утверждение 2. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$ – измеримые пространства. Пусть $\widetilde{\mathcal{E}}$ – класс подмножеств множества E, причем $\mathcal{E} = \sigma\left(\widetilde{\mathcal{E}}\right)$ (здесь $\sigma\left(\widetilde{\mathcal{E}}\right)$ – минимальная σ-алгебра, заданная на E и содержащая элементы $\widetilde{\mathcal{E}}$). Для измеримости отображения $X : \Omega \to E$ относительно σ-алгебр $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$ достаточно, чтобы для каждого множества $A \in \widetilde{\mathcal{E}}$ множество $X^{-1}(A)$ принадлежало $\mathcal{F}$.*

Из утверждений 1 и 2 вытекает, что отображение $(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ пространства Ω в $\mathbb{R}^n$ является случайным вектором на $(\Omega, \mathcal{F})$, если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – случайные величины на $(\Omega, \mathcal{F})$. Действительно, достаточно показать, что множество $\{\omega \in \Omega : (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)) \in A_1 \times \ldots \times A_n\}$, где $A_1, \ldots, A_n$ – произвольные одномерные борелевские множества, является случайным событием. Но указанное множество совпадает с пересечением случайных событий $\{\omega \in \Omega : \xi_i(\omega) \in A_i\}$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$, и, следовательно, само является случайным событием.

Обозначим $\mathbb{R}^\infty$ множество бесконечных числовых последовательностей $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Зададим σ-алгебру на $\mathbb{R}^\infty$. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и еще m натуральных чисел $n_1, \ldots, n_m$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_m)$, а также множество $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Назовем *цилиндрическим множеством* пространства $\mathbb{R}^\infty$ множество таких последовательностей $x \in \mathbb{R}^\infty$, что $(x_{n_1}, \ldots, x_{n_m}) \in A$. Обозначим его $C_{n_1,\ldots,n_m}(A)$. Минимальную σ-алгебру, содержащую цилиндрические множества $C_{n_1,\ldots,n_m}(A)$ при всевозможных m, $n_1, \ldots, n_m$ и A, назовем *цилиндрической σ-алгеброй* и обозначим $\mathcal{G}$.

Определение 2. *Случайной последовательностью* называется случайный элемент на $(\Omega, \mathcal{F})$ со значениями в $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{G})$.

Таким образом, каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ сопоставляется бесконечная числовая последовательность. Обозначим ее $\{\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots\}$. Обычно символ ω опускается и для случайной последовательности используются следующие обозначения: $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$, или $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, или $\{\xi_n\}$.

Из определения случайной последовательности и утверждения 2 вытекает, что отображение $\{\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots\}$ пространства Ω в $\mathbb{R}^\infty$ является случайной последовательностью на $(\Omega, \mathcal{F})$, если $\left(\xi_{n_1}, \ldots, \xi_{n_m}\right)$ является случайным вектором на $(\Omega, \mathcal{F})$ для произвольного $m \in \mathbb{N}$ и произвольных натуральных $n_1, \ldots, n_m$. Действительно, для произвольного $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

$$\{\omega \in \Omega : \{\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots\} \in C_{n_1,\ldots,n_m}(A)\} =$$
$$= \left\{\omega \in \Omega : \left(\xi_{n_1}(\omega), \ldots, \xi_{n_m}\omega\right) \in A\right\},$$

а последнее множество является случайным событием. В свою очередь, $\left(\xi_{n_1}, \ldots, \xi_{n_m}\right)$ является случайным вектором на $(\Omega, \mathcal{F})$ для произвольного

$m \in \mathbb{N}$ и произвольных натуральных $n_1, \ldots, n_m$, если ξ_n является случайной величиной на $(\Omega, \mathcal{F})$ для произвольного $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, приходим к эквивалентному определению.

Определение 2′. *Случайной последовательностью* называется последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, заданных на одном вероятностном пространстве.

Обозначим $R[0, +\infty)$ множество всех числовых функций $x = x(t)$, $t \in [0, +\infty)$. Зададим σ-алгебру на $R[0, +\infty)$. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, действительные числа $t_1, \ldots, t_m$ $(0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$ и множество $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Назовем *цилиндрическим множеством* пространства $\mathbb{R}[0, +\infty)$ множество таких функций $x \in \mathbb{R}[0, +\infty)$, что $(x(t_1), \ldots, x(t_m)) \in A$. Обозначим его $C_{t_1, \ldots, t_m}(A)$. Минимальную σ-алгебру, содержащую цилиндрические множества $C_{t_1, \ldots, t_m}(A)$ при всевозможных m, $t_1, \ldots, t_m$ и A, назовем *цилиндрической σ-алгеброй* и обозначим $\mathcal{G}$.

Определение 3. *Случайным процессом* называется случайный элемент на $(\Omega, \mathcal{F})$ со значениями в $(R[0, +\infty), \mathcal{G})$.

Таким образом, каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ сопоставляется числовая функция, заданная на полуоси $[0, +\infty)$. Обозначим ее $X(t, \omega)$, $t \in [0, +\infty)$. Переменная t трактуется как время. Обычно символ ω опускается и для случайного процесса используются следующие обозначения: $\{X(t),\ t \geq 0\}$, или $\{X(t)\}$, или X.

Функция $X(t, \omega)$, $t \in [0, +\infty)$ (при фиксированном ω), называется *траекторией* случайного процесса X, соответствующей элементарному исходу ω. Если же фиксируется переменная t, то отображение $X(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, называется *сечением* случайного процесса X, соответствующим моменту времени t.

Из определения случайного процесса и утверждения 1 вытекает, что $\{X(t),\ t \geq 0\}$ – случайный процесс на $(\Omega, \mathcal{F})$, если $(X(t_1), \ldots, X(t_m))$ является случайным вектором на $(\Omega, \mathcal{F})$ для произвольного $m \in \mathbb{N}$ и произвольных действительных чисел $t_1, \ldots, t_m$. Последнее выполняется, если $X(t)$ является случайной величиной на $(\Omega, \mathcal{F})$ для произвольного $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, приходим к эквивалентному определению.

Определение 3′. *Случайным процессом* называется совокупность случайных величин $X(t)$, $t \in [0, +\infty)$, заданных на одном вероятностном пространстве.

При исследовании случайных величин и векторов основным инструментом являются их распределения. Напомним, что распределением случайной величины ξ, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется вероятностная мера $\mathbf{P}^{(\xi)}$, заданная на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ по правилу: $\mathbf{P}^{(\xi)}(A) = \mathbf{P}(\xi \in A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (событие $\{\xi \in A\}$ есть краткая запись события $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A\}$). Аналогично определяется распределение случайного вектора.

Определение 4. *Конечномерным распределением* случайного процесса X, отвечающим моментам времени $t_1, \ldots, t_m$ $(0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$, $m \in \mathbb{N}$, называется распределение случайного вектора $(X(t_1), \ldots, X(t_m))$, т.е. следующая вероятностная мера на измеримом пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$:

$$\mathbf{P}^{(X)}_{t_1, \ldots, t_m}(A) = \mathbf{P}((X(t_1), \ldots, X(t_m)) \in A), \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

Рассмотрим *примеры* случайных последовательностей и процессов.

Случайное блуждание. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Положим

$$S_0 = 0,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ называется *случайным блужданием* (символ $\mathbb{N}_0$ означает множество $\{0, 1, \ldots\}$). Поскольку S_n является случайной величиной при каждом $n \in \mathbb{N}_0$, то указанная последовательность является случайной. Отметим, что при $n, m \in \mathbb{N}$ случайные величины $S_{n+m} - S_n$ и S_n являются независимыми, причем $S_{n+m} - S_n \overset{d}{=} S_m$.

Эта вероятностная модель является одной из старейших в теории вероятностей, поскольку случайные блуждания возникают уже в *схеме испытаний Бернулли.* Напомним, что наибольший интерес в этой схеме представляет случайная величина μ_n, равная числу успехов в n испытаниях Бернулли. Если положить X_i равным 1 в случае успеха в i-м испытании и 0 в случае неудачи, то

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \in \mathbb{N},$$

причем случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены. Таким образом, последовательность $\{\mu_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ является случайным блужданием. Напомним, что если вероятности успеха и неудачи в одном испытании равны p и q соответственно, то

$$\mathbf{P}\left(\mu_n = k\right) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Тем самым найдены *одномерные* распределения случайной последовательности $\{\mu_n, n \in \mathbb{N}\}$. Далее, поскольку при $n, m \in \mathbb{N}$ случайные величины μ_n и $\mu_{n+m} - \mu_n$ являются независимыми и $\mu_{n+m} - \mu_n \overset{d}{=} \mu_m$, то при $k, l \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{P}\left(\mu_n = k,\ \mu_{n+m} = k + l\right) = \mathbf{P}\left(\mu_n = k,\ \mu_{n+m} - \mu_n = l\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\mu_n = k\right)\mathbf{P}\left(\mu_{n+m} - \mu_n = l\right) = \mathbf{P}\left(\mu_n = k\right)\mathbf{P}\left(\mu_m = l\right) =$$

$$= C_n^k p^k q^{n-k} C_m^l p^l q^{m-l} = C_n^k C_m^l p^{k+l} q^{n+m-(k+l)}$$

(предпоследнее равенство справедливо при $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и $l \in \{0, 1, \ldots, m\}$). Тем самым найдены двумерные распределения. Аналогично находятся остальные многомерные распределения.

Процесс восстановления. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных *положительных* случайных величин и $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Положим при

$$\nu(0) = 0,\ \nu(t) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n \le t\},\ t > 0.$$

Величина $\nu(t)$ при фиксированном $t > 0$ принимает целые неотрицательные значения. Событие $\{\nu(t) = k\}$ при $k \in \mathbb{N}_0$ совпадает с событием $\{S_k \le t\} \cap \{S_{k+1} > t\}$. Следовательно, событие $\{\nu(t) = k\}$ является случайным. Таким образом, величина $\nu(t)$ при фиксированном $t > 0$ является случайной. А это означает, что $\{\nu(t),\ t \geq 0\}$ образует случайный процесс, который называется *процессом восстановления.*

Наглядно его можно представить следующим образом. В момент времени 0 начинает функционировать некоторый прибор, срок службы которого равен X_1, в момент (равный X_1) выхода из строя этого прибора он мгновенно заменяется на следующий прибор, срок службы которого равен X_2. В момент (равный $X_1+X_2 = S_2$) выхода из строя второго прибора он мгновенно заменяется на следующий прибор, срок службы которого равен X_3 и т.д. Величина $\nu(t)$ при этом равну числу приборов, задействованных до момента t включительно.

Определение 5. *Процессом Пуассона* называется частный случай процесса восстановления $\{\nu(t),\ t \geq 0\}$, когда случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ имеют показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, т.е.

$$\mathbf{P}(X_1 > t) = e^{-\lambda t},\ t \geq 0.$$

Найдем конечномерные распределения процесса Пуассона.

Лемма 1. *Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ имеют показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, то при $n \in \mathbb{N}$ распределение случайной величины S_n является абсолютно непрерывным с плотностью вероятностей*

$$f_n(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \tag{1}$$

При этом функция распределения случайной величины S_n равна

$$F_n(t) = 1 - \left(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right) e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \tag{2}$$

Доказательство. Соотношение (1) устанавливается по индукции. При $n = 1$ оно справедливо, поскольку X_1 имеет показательное распределение с параметром λ. Предположим, что (1) справедливо при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$f_{n+1}(t) = (f_n * f_1)(t) = \int_0^t f_n(t-x) f_1(x)\, dx =$$

$$= \int_0^t \lambda \frac{\lambda^{n-1}(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda(t-x)} \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \int_0^t (t-x)^{n-1}\, dx = \lambda \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

т.е. соотношение (1) справедливо и при $n+1$. Итак, соотношение (1) установлено. Для доказательства (2) достаточно заметить, что $F_n'(t) = f_n(t)$ и $\lim_{t\to\infty} F_n(t) = 1$. Лемма доказана.

Лемма 1 позволяет найти одномерные распределения процесса Пуассона. Действительно, поскольку при $t > 0$ и $n \in \mathbb{N}_0$

$$\{\nu(t) = n\} = \{S_n \le t,\ S_{n+1} > t\} = \{S_{n+1} > t\} \setminus \{S_n > t\},$$

то

$$\mathbf{P}(\nu(t) = n) = \mathbf{P}(S_{n+1} > t) - \mathbf{P}(S_n > t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \qquad (3)$$

Напомним, что случайная величина η имеет *распределение Пуассона* с параметром a (короткая запись: $\eta \sim \Pi_a$), если η принимает значения из $\mathbb{N}_0$ и

$$\mathbf{P}(\eta = n) = \frac{a^n}{n!} e^{-a}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Соотношение (3) означает, что $\nu(t) \sim \Pi_{\lambda t}$ при $t > 0$.

Замечание 1. Если $\eta \sim \Pi_a$, то $\mathbf{E}\eta = a$. Следовательно, $\mathbf{E}\nu(1) = \lambda$. Итак, λ – среднее число восстановлений за единицу времени. Это объясняет, почему параметр λ называется *интенсивностью* процесса Пуассона.

Лемма 2. *При* $n, m \in \mathbb{N}$, $t > 0$ *и произвольном* s

$$\mathbf{P}(S_{n+m} > t + s \mid \nu(t) = n) = \mathbf{P}(S_m > s). \qquad (4)$$

Доказательство. Сначала установим (4) при $m = 1$. При $s \le 0$ обе части (4) равны 1. Заметим, что при $s > 0$

$$\mathbf{P}(S_{n+1} > t + s,\ \nu(t) = n) = \mathbf{P}(S_{n+1} > t + s,\ S_n \le t,\ S_{n+1} > t) =$$

$$= \mathbf{P}(S_{n+1} > t + s,\ S_n \le t) = \int\limits_0^t f_n(u)\,du \int\limits_{t+s-u}^{+\infty} f_1(v)\,dv =$$

$$= \int\limits_0^t f_n(u)\,du \int\limits_{t+s-u}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda v} dv \overset{(w=v-s)}{=} e^{-\lambda s} \int\limits_0^t f_n(u)\,du \int\limits_{t-u}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda w} dw =$$

$$= e^{-\lambda s}\mathbf{P}(S_{n+1} > t,\ S_n \le t) = e^{-\lambda s}\mathbf{P}(\nu(t) = n).$$

Откуда после деления на $\mathbf{P}(\nu(t) = n)$ получаем (4) при $m = 1$.

Пусть $m > 1$. Очевидно,

$$\mathbf{P}(S_{n+m} > t + s \mid \nu(t) = n) = \mathbf{P}(S_{n+1} > t + s - \xi \mid \nu(t) = n),$$

где $\xi = S_{n+m} - S_{n+1}$. Случайная величина ξ не зависит от величины S_{n+1} и события $\{\nu(t) = n\}$, поэтому по свойству условного математического ожидания

$$\mathbf{P}(S_{n+1} > t + s - \xi \mid \nu(t) = n) = \mathbf{E}\Big(\mathbf{P}(S_{n+1} > t + s - c \mid \nu(t) = n)|_{c=\xi}\Big),$$

а по-доказанному

$$\mathbf{P}(S_{n+1} > t + s - c \mid \nu(t) = n) = \mathbf{P}(S_1 > s - c).$$

Итак,

$$\mathbf{P}\left(S_{n+m} > t+s \mid \nu(t) = n\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{P}\left(S_1 > s-c\right)\big|_{c=\xi}\right). \tag{5}$$

Аналогично показывается, что

$$\mathbf{P}\left(S_m > s\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{P}\left(S_1 > s-c\right)\big|_{c=\eta}\right), \tag{6}$$

где $\eta = S_m - S_1$. Сравнивая (5) и (6), получаем (4). Лемма доказана.

Из леммы 2 следует, что при $n, m \in \mathbb{N}_0$ и $t, s > 0$

$$\mathbf{P}\left(\nu(t+s) = n+m \mid \nu(t) = n\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(S_{n+m} \le t+s,\ S_{n+m+1} > t+s \mid \nu(t) = n\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\ S_{n+m+1} > t+s \mid \nu(t) = n\right) - \mathbf{P}\left(S_{n+m} > t+s \mid \nu(t) = n\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(S_{m+1} > s\right) - \mathbf{P}\left(S_m > s\right) = \mathbf{P}\left(S_m \le s,\ S_{m+1} > s\right) = \mathbf{P}\left(\nu(s) = m\right).$$

Значит,

$$\mathbf{P}\left(\nu(t) = n,\ \nu(t+s) = n+m\right) = \mathbf{P}\left(\nu(t) = n\right)\mathbf{P}\left(\nu(s) = m\right).$$

Откуда, вспоминая найденные одномерные распределения, получаем, что

$$\mathbf{P}\left(\nu(t) = n,\ \nu(t+s) = n+m\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda s)^m}{m!}e^{-\lambda s}. \tag{7}$$

Итак, двумерные распределения процесса Пуассона найдены. Формулу (7) можно переписать:

$$\mathbf{P}\left(\nu(t) = n,\ \nu(t+s) - \nu(t) = m\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda s)^m}{m!}e^{-\lambda s}. \tag{8}$$

Правая часть распадается в произведение множителей, один из которых зависит от n, а второй – от m, следовательно, случайные величины $\nu(t)$ и $\nu(t+s) - \nu(t)$ независимы, причем $\nu(t+s) - \nu(t) \overset{d}{=} \nu(s)$. Вспомним, что аналогичное утверждение справедливо и для случайных блужданий. Можно показать, что формула, аналогичная (8), справедлива для трех и более моментов времени.

Лекция 2

Распределение случайного процесса.

Теорема Колмогорова о существовании процесса.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и пусть X – случайный элемент на $(\Omega, \mathcal{F})$ со значениями в в измеримом пространстве $(E, \mathcal{E})$.

Определение 1. *Распределением* случайного элемента X называется вероятностная мера $\mathbf{P}^{(X)}$, индуцированная элементом X на пространстве $(E, \mathcal{E})$:

$$\mathbf{P}^{(X)}(A) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}) = \mathbf{P}(X \in A), \qquad A \in \mathcal{E}.$$

Напомним, что случайным процессом называется случайный элемент на $(\Omega, \mathcal{F})$ со значениями в измеримом пространстве $(R[0,+\infty), \mathcal{G})$, где $R[0,+\infty)$ – множество числовых функций, определенных наполуоси $[0,+\infty)$, и $\mathcal{G}$ – цилиндрическая σ-алгебра, заданная на $R[0,+\infty)$.

Определение 2. *Распределением* случайного процесса X называется вероятностная мера $\mathbf{P}^{(X)}$, индуцированная процессом X на пространстве $(R[0,+\infty), \mathcal{G})$:

$$\mathbf{P}^{(X)}(A) = \mathbf{P}(X \in A), \qquad A \in \mathcal{G}.$$

В духе теории вероятностей вместо случайных величин или векторов задавать их распределения. Отметим общий факт, касающийся случайных элементов: если на измеримом пространстве $(E, \mathcal{E})$ задана вероятностная мера P, то существует вероятностное пространство и случайный элемент на нем со значениями в $(E, \mathcal{E})$, распределение которого совпадает с P (достаточно рассмотреть вероятностное пространство $(E, \mathcal{E}, P)$ и случайный элемент на нем, совпадающий с тождественным отображением E в E).

Что касается распределений случайных величин или векторов, то они задаются при помощи *функций распределения*. Хорошо известно, что в качестве функции распределения случайной величины можно рассматривать произвольную неубывающую непрерывную справа числовую функцию, заданную на $(-\infty, +\infty)$ и имеющую пределы 0 и 1 на $-\infty$ и $+\infty$ соответственно.

Для задания распределения случайного процесса используются введенные на прошлой лекции конечномерные распределения. Напомним, что конечномерным распределением случайного процесса X, отвечающим моментам времени $t_1, \ldots, t_m$ $(0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$, $m \in \mathbb{N}$, называется следующая вероятностная мера на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$:

$$\mathbf{P}^{(X)}_{t_1,\ldots,t_m}(A) = \mathbf{P}((X(t_1), \ldots, X(t_m)) \in A), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

Кроме того, напомним важную в теории меры теорему Каратеодори: *неотрицательную конечную σ-аддитивную функцию, заданную на алгебре, можно единственным образом продолжить на минимальную σ-алгебру, содержащую эту алгебру.*

Установим, что по конечномерным распределениям случайного процесса однозначно восстанавливается его распределение. Действительно, при $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

$$\mathbf{P}^{(X)}_{t_1,\ldots,t_m}(A) = \mathbf{P}(X \in C_{t_1,\ldots,t_m}(A)) = \mathbf{P}^{(X)}(C_{t_1,\ldots,t_m}(A)),$$

где, напомним, $C_{t_1,\ldots,t_m}(A)$ –цилиндрическое множество. Таким образом, *конечномерное распределение* случайного процесса X, отвечающее моментам времени $t_1, \ldots, t_m$, является сужением распределения этого процесса на цилиндрические множества $C_{t_1,\ldots,t_m}(A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Легко видеть, что совокупность $\mathcal{G}_0$ всех цилиндрических множеств образуют алгебру на множестве $R[0, +\infty)$, а вероятность $\mathbf{P}^{(X)}(C_{t_1,\ldots,t_m}(A))$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, является неотрицательной конечной σ-аддитивной функцией на $\mathcal{G}_0$. По теореме Каратеодори эту функцию можно единственным образом продолжить на минимальную σ-алгебру, содержащую $\mathcal{G}_0$. А это означает однозначное восстановление вероятности $\mathbf{P}^{(X)}(A)$ для произвольного множества $A \in \mathcal{G}$.

Каким условиям должны удовлетворять вероятностные меры, заданные для каждого $m \in \mathbb{N}$ и для каждого набора моментов времени $t_1, \ldots, t_m$ на измеримом пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$, чтобы существовал случайный процесс, конечномерные распределения которого совпадали бы с этими мерами?

Определение 3. Пусть каждому конечному набору чисел $t_1, \ldots, t_m$ $(0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$, $m \in \mathbb{N}$, соответствует вероятностная мера $\mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_m}$ на измеримом пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Говорят, что эти меры *согласованы,* если для каждой такой меры (при $m \ge 2$) и произвольного $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$\mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_m}(A_1 \times \ldots \times A_{j-1} \times A_{j+1} \times \ldots \times A_m) =$$
$$= \mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_m}(A_1 \times \ldots \times A_{j-1} \times \mathbb{R} \times A_{j+1} \times \ldots \times A_m) \tag{1}$$

для произвольных $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Заметим, что для конечномерных распределений случайного процесса условие согласованности выполняется:

$$\mathbf{P}^{(X)}_{t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_m}(A_1 \times \ldots \times A_{j-1} \times A_{j+1} \times \ldots \times A_m) =$$
$$= \mathbf{P}(X(t_i) \in A_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}) =$$
$$= \mathbf{P}(X(t_i) \in A_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}\,;\ X(t_j) \in \mathbb{R}) =$$
$$= \mathbf{P}^{(X)}_{t_1,\ldots,t_m}(A_1 \times \ldots \times A_{j-1} \times \mathbb{R} \times A_{j+1} \times \ldots \times A_m).$$

Оказывается, справедливо и обратное утверждение.

Теорема 1 (Колмогоров). *Пусть каждому конечному набору чисел* $t_1, \ldots, t_m$ $(0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$, $m \in \mathbb{N}$, *соответствует вероятностная мера* $\mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_m}$ *на измеримом пространстве* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. *И пусть эти* *меры согласованы. Тогда существует вероятностное пространство и заданный на нем случайный процесс, конечномерными распределениями которого являются меры* $\mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_m}$.

Для проверки условия согласованности удобно сформулировать его в терминах случайных векторов. Рассмотрим случайный вектор $(\xi_1,\ldots,\xi_m)$, распределение которого совпадает с $\mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_m}$ (как мы уже знаем, такой случайный вектор существует). Тогда правая часть соотношения (1) является сужением распределения подвектора $\left(\xi_1,\ldots,\xi_{j-1},\xi_{j+1},\ldots,\xi_m\right)$ на декартовы произведения одномерных борелевских множеств, а само соотношение (1) говорит о том, что этот подвектор имеет распределение $\mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_m}$.

В лекции 1 приведены примеры процессов, задаваемых конструктивно. Рассмотрим пример процесса, задаваемого с помощью конечномерных распределений.

Броуновское движение. Этот процесс описывает движение маленькой частицы, взвешенной в воде и совершающей движение в результате столкновений с молекулами воды.

Определение 4. *Броуновским движением* называется случайный процесс $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$, удовлетворяющий следующим аксиомам:

1) $W(0) = 0$;

2) W является *процессом с независимыми приращениями*, т.е. для каждого набора чисел $t_1,\ldots,t_m$ $(0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$, $m \in \mathbb{N}$, случайные величины $W(t_1), W(t_2)-W(t_1),\ldots,W(t_m)-W(t_{m-1})$ независимы;

3) приращения процесса W распределены нормально: $W(t_2)-W(t_1) \sim N(0, t_2-t_1)$ для произвольных чисел t_1,t_2 $(0 \leq t_1 < t_2)$.

Условимся, что $t_0 = 0$. Положим $\Delta_k = W(t_k) - W(t_{k-1})$, $k \in \{1,\ldots,m\}$. Заметим, что по определению броуновского движения случайные величины $\Delta_1,\ldots,\Delta_m$ независимы, $\Delta_k \sim N(0, t_k - t_{k-1})$ и $W(t_k) = \sum_{l=1}^{k}\Delta_l$, $k \in \{1,\ldots,m\}$.

Найдем характеристическую функцию $\varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in \mathbb{R}$, случайного вектора $(W(t_1),\ldots,W(t_m))$. Сначала заметим, что

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \mathbf{E}\exp\left(i\sum_{k=1}^{m}\lambda_k W(t_k)\right) =$$

$$= \mathbf{E}\exp\left(i\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\sum_{l=1}^{k}\Delta_l\right) = \mathbf{E}\exp\left(i\sum_{k=1}^{m}\lambda_{k,m}\Delta_k\right). \qquad (2)$$

где $\lambda_{k,m} = \sum_{l=k}^{m}\lambda_l$, $k \in \{1,\ldots,m\}$. Воспользуемся независимостью случайных величин $\Delta_1,\ldots,\Delta_m$:

$$\mathbf{E}\exp\left(i\sum_{k=1}^{m}\lambda_{k,m}\Delta_k\right) = \prod_{k=1}^{m}\mathbf{E}\exp(i\lambda_{k,m}\Delta_k). \qquad (3)$$

Теперь используем тот факт, что если случайная величина ξ нормально распределена, $\xi \sim N(0,\sigma^2)$, то $\mathbf{E}\exp(i\lambda\xi) = \exp\left(-\lambda^2\sigma^2/2\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\prod_{k=1}^{m}\mathbf{E}\exp(i\lambda_{k,m}\Delta_k) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{m}\lambda_{k,m}^2\frac{t_k - t_{k-1}}{2}\right). \qquad (4)$$

Из соотношений (2)-(4) следует, что

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{m}\lambda_{k,m}^2\frac{t_k-t_{k-1}}{2}\right). \tag{5}$$

Покажем, что если для каждого набора чисел $t_1,\ldots,t_m$ $(0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$, $m \in \mathbb{N}$, выполнено соотношение (5), то справедливы аксиомы 2)-3). Из соотношений (2) и (5) находим, что

$$\mathbf{E}\exp\left(i\sum_{k=1}^{m}\lambda_{k,m}\Delta_k\right) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{m}\lambda_{k,m}^2\frac{t_k-t_{k-1}}{2}\right),$$

при этом правая часть является характеристической функцией (с аргументами $\lambda_{1,m},\ldots,\lambda_{k,m}$) случайного вектора с независимыми координатами, распределенными по нормальному закону. Поскольку распределение случайного вектора восстанавливается однозначно по его характеристической функции, то координаты случайного вектора $(\Delta_1,\ldots,\Delta_m)$ независимы и $\Delta_k \sim N(0, t_k - t_{k-1})$, $k \in \{1,\ldots,m\}$. Следовательно, справедливы аксиомы 2) и 3).

Оказывается, случайный вектор $(W(t_1),\ldots,W(t_m))$ имеет многомерное нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $A = \{a_{k,l}\}$ размера $m \times m$, где $a_{k,l} = \min(t_k, t_l)$, $k,l \in \{1,\ldots,m\}$ (объясните, почему матрица A является положительно определенной). В самом деле, из курса теории вероятностей известно, что характеристическая функция такого нормального распределения имеет вид $\exp\left(-\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\lambda_k a_{k,l}\lambda_l/2\right)$, поэтому указанное утверждение следует из цепочки равенств:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\lambda_k a_{k,l}\lambda_l = 2\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=k}^{m}\lambda_k t_k\lambda_l - \sum_{k=1}^{m}\lambda_k^2 t_k = 2\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\lambda_{k,m}t_k - \sum_{k=1}^{m}\lambda_k^2 t_k =$$

$$= -\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k - \lambda_{k,m})^2 t_k + \sum_{k=1}^{m}\lambda_{k,m}^2 t_k = -\sum_{k=1}^{m-1}\lambda_{k+1,m}^2 t_k + \sum_{k=1}^{m}\lambda_{k,m}^2 t_k =$$

$$= -\sum_{k=1}^{m}\lambda_{k,m}^2 t_{k-1} + \sum_{k=1}^{m}\lambda_{k,m}^2 t_k = \sum_{k=1}^{m}\lambda_{k,m}^2(t_k - t_{k-1}).$$

Из этой цепочки равенств следует и обратное утверждение: если случайный вектор $(W(t_1),\ldots,W(t_m))$ имеет многомерное нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей A, то его характеристическая функция имеет вид (5) и, следовательно, выполнены аксиомы 2) и 3). Таким образом, приходим к эквивалентному определению.

Определение 4$'$. *Броуновским движением* называется случайный процесс $W = \{W(t),\ t \ge 0\}$, удовлетворяющий следующим аксиомам:

1) $W(0) = 0$;

2) конечномерные распределения являются нормальными;

3) $\mathbf{E}W(t) = 0$ при $t \ge 0$ и $\mathbf{cov}(W(t), W(s)) = \mathbf{E}W(t)W(s) = \min(t,s)$ при $t,s \ge 0$.

Установим существование такого процесса. Для этого надо проверить условие согласованности. Существует случайный вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$, имеющий нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $A = \{a_{k,l}\}$, где $a_{k,l} = \min(t_k, t_l)$, $k, l \in \{1, \ldots, m\}$. Условие согласованности сводится к тому, что для произвольного $j \in \{1, \ldots, m\}$ подвектор $\left(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_m\right)$ имеет нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $\widetilde{A}$ размера $(m-1) \times (m-1)$, элементами которой являются числа $a_{k,l} = \min(t_k, t_l)$ при $k, l \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}$. Характеристическая функция этого подвектора равна

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)\big|_{\lambda_j=0} = \exp\left(-\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\lambda_k a_{k,l}\lambda_l/2\right)\Bigg|_{\lambda_j=0} =$$

$$= \exp\left(-\sum_{k,l\in\{1,\ldots,m\}}\lambda_k a_{k,l}\lambda_l/2\right)\Bigg|_{\lambda_j=0} = \exp\left(-\sum_{k,l\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{j\}}\lambda_k a_{k,l}\lambda_l/2\right),$$

но последнее выражение совпадает с характеристической функцией случайного вектора, имеющего нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $\widetilde{A}$. Итак, существование броуновского движения установлено.

Лекция 3

Свойства траекторий. Теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации.

До сих пор мы ничего не говорили о свойствах траекторий случайного процесса как функций времени. Из физических соображений можно, например, сделать вывод, что траектории броуновского движения непрерывны. Но можно ли, зная конечномерные распределения процесса, утверждать, что его траектории непрерывны? Оказывается, нет.

Пример. Пусть $\{X(t),\ t \in [0,1]\}$ – случайный процесс с непрерывными траекториями. Рассмотрим на том же вероятностном пространстве случайную величину τ, имеющую равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Положим

$$\widetilde{X}(t) = \begin{cases} X(t), & t \in [0,\tau) \cup (\tau, 1]; \\ X(t) + 1, & t = \tau. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что $\left\{\widetilde{X}(t),\ t \in [0,1]\right\}$ также является случайным процессом. Очевидно, что траектории этого процесса разрывны. С другой стороны, про фиксированном $t \in [0,1]$

$$\mathbf{P}\left(X(t) = \widetilde{X}(t)\right) = \mathbf{P}(\tau \neq t) = 1.$$

Откуда следует, что совпадают конечномерные распределения процессов $\{X(t),\ t \in [0,1]\}$ и $\left\{\widetilde{X}(t),\ t \in [0,1]\right\}$.

Этот пример также показывает, что подмножества $R[0,1]$ вида

$$A = \left\{x : \sup_{t \in [0,1]} x(t) \le a\right\}, \qquad B = \{x : x \in C[0,1]\}$$

не принадлежат цилиндрической алгебре $\mathcal{G}$ (здесь $C[0,1]$ – пространство непрерывных функций, заданных на $[0,1]$). Действительно, если $A \in \mathcal{G}$, то вероятности $\mathbf{P}(X \in A)$ и $\mathbf{P}\left(\widetilde{X} \in A\right)$ совпадают, поскольку совпадают конечномерные распределения процессов X и $\widetilde{X}$ и, значит, совпадают распределения этих процессов. Пусть $X \equiv 0$ и $a \in (0,1)$, тогда $\mathbf{P}(X \in A) = 1$, а $\mathbf{P}\left(\widetilde{X} \in A\right) = 0$. Противоречие.

Отсутствие множеств вида A и B в цилиндрической σ-алгебре является серьезным препятствием в исследовании случайных процессов с вероятностной точки зрения. Одним из возможных выходов из указанной ситуации является рассмотрение процессов с непрерывными траекториями или процессов с траекториями без разрывов второго рода. Действительно, если траектории случайного процесса X непрерывны, то вместо пространства

$R[0,1]$ можно рассматривать пространство $C[0,1]$ с заданной на нем цилиндрической σ-алгеброй. В этом случае множество A принадлежит этой σ-алгебре. Действительно,

$$A = \left\{ x : \sup_{t\in[0,1]} x(t) \le a \right\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left\{ x : \sup_{k\in\{0,1,\ldots,m\}} x\left(\frac{k}{m}\right) \le a \right\},$$

причем правая часть является пересечением счетного числа цилиндрических множеств и, следовательно, сама принадлежит цилиндрической σ-алгебре.

В связи со сказанным возникает вопрос о существовании процесса с заданными конечномерными распределениями и, например, с непрерывными траекториями.

Определение 1. Говорят, что случайные процессы $\{X_1(t),\ t \ge 0\}$ и $\{X_2(t),\ t \ge 0\}$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве, *эквивалентны*, если при каждом $t \ge 0$ выполняется п.н. (почти наверное) равенство $X_1(t) = X_2(t)$. При этом каждый из этих процессов называется *модификацией* другого.

Очевидно, что если процессы эквивалентны, то совпадают их конечномерные распределения и, следовательно, совпадают распределения этих процессов.

Следующая теорема, принадлежащая Колмогорову, дает ответ на поставленный вопрос.

Теорема 1. *Пусть случайный процесс* $\{X(t),\ t \in [0,1]\}$ *удовлетворяет условию: при всех* $t, s \in [0,1]$

$$\mathbf{E}\left|X(t) - X(s)\right|^a \le C\left|t-s\right|^{1+b}, \tag{1}$$

где a, b, C *– положительные постоянные. Тогда у процесса* X *существует модификация, траектории которой непрерывны.*

Доказательство. 1) Для произвольной функции $x \in R[0,1]$ построим ее кусочно-линейное приближение $x^{(\delta)}$ при $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$:

$$x^{(\delta)}(t) = x(\delta k) + \frac{t-\delta k}{\delta}\left[x(\delta(k+1)) - x(\delta k)\right],$$

если $t \in [\delta k, \delta(k+1)]$, $k \in \{0,1,\ldots,m-1\}$. Заметим, что $x^{(\delta)} \in C[0,1]$. Разберемся, что произойдет в случае перехода от $x^{(\delta)}$ к $x^{(\delta/2)}$. Каждый из m одинаковых по длине отрезков разбиения $[0,1]$ делится пополам. График прямой на каждом из этих m отрезков заменяется на график одной прямой до середины этого отрезка и график другой прямой после этой середины, причем все эти три графика образуют треугольник. Из сказанного следует, что при всех $k \in \{0,\ldots,m-1\}$

$$\sup_{t\in[k/m,(k+1)/m]} \left|x^{(\delta)}(t) - x^{(\delta/2)}(t)\right| \le$$

$$\le \left|x\left(\frac{k}{m}\right) - x\left(\frac{2k+1}{2m}\right)\right| + \left|x\left(\frac{2k+1}{2m}\right) - x\left(\frac{k+1}{m}\right)\right|. \tag{2}$$

Положим при $\varepsilon > 0$ и $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$

$$B_k = \left\{ \sup_{t \in [k/m, (k+1)/m]} \left| X^{(\delta)}(t) - X^{(\delta/2)}(t) \right| \geq \varepsilon \right\}.$$

Ввиду соотношения (2)

$$\mathbf{P}(B_k) \leq \mathbf{P}\left(\left| X\left(\frac{k}{m}\right) - X\left(\frac{2k+1}{2m}\right) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) +$$

$$+\mathbf{P}\left(\left| X\left(\frac{2k+1}{2m}\right) - X\left(\frac{k+1}{m}\right) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

По неравенству Чебышева, используя условие (1), находим, что при всех $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$

$$\mathbf{P}\left(\left| X\left(\frac{k}{m}\right) - X\left(\frac{2k+1}{2m}\right) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(\varepsilon/2)^a} \mathbf{E} \left| X\left(\frac{k}{m}\right) - X\left(\frac{2k+1}{2m}\right) \right|^a \leq \frac{C}{(2m)^{1+b}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-a}.$$

Аналогично

$$\mathbf{P}\left(\left| X\left(\frac{2k+1}{2m}\right) - X\left(\frac{k+1}{m}\right) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \frac{C}{(2m)^{1+b}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-a}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(B_k) \leq \frac{2C}{(2m)^{1+b}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-a}.$$

Введем на пространстве $C[0,1]$ *метрику равномерной сходимости*: при $x, y \in C[0,1]$

$$\rho_{\text{равн}}(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)|.$$

Замечая, что

$$\left\{ \sup_{t \in [0,1]} \left| X^{(\delta)}(t) - X^{(\delta/2)}(t) \right| \geq \varepsilon \right\} \subset \bigcup_{k=0}^{m-1} B_k,$$

получаем, что

$$\mathbf{P}\left(\rho_{\text{равн}}\left(X^{(\delta)}, X^{(\delta/2)} \right) \geq \varepsilon \right) \leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{m-1} B_k \right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{P}(B_k) \leq \frac{C}{(2m)^b} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-a}. \tag{3}$$

2) Для процесса X и каждого $n \in \mathbb{N}_0$ рассмотрим кусочно-линейное приближение этого процесса $X^{(2^{-n})}$. Покажем, что последовательность процессов $\left\{ X^{(2^{-n})},\ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ сходится п.н. при $n \to \infty$ в метрике равномерной

сходимости к некоторому процессу $\widetilde{X}$ с непрерывными траекториями. Положим при $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \left\{ \rho_{\text{равн}} \left(X^{\left(2^{-n+1}\right)}, X^{\left(2^{-n}\right)} \right) \geq \frac{\varepsilon}{2^{bn/(2a)}} \right\}.$$

Ввиду соотношения (3)

$$\mathbf{P}\left(A_n\right) \leq \frac{C}{2^{bn}} \left(\frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^{bn/(2a)}} \right)^{-a} = \frac{C}{2^{bn/2}} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{-a}$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(A_n\right)$ сходится. По лемме Бореля-Кантелли это означает, что п.н. происходит лишь конечное число событий из совокупности $A_0, A_1, \ldots$.

Это, в свою очередь, означает наличие такого случайного события A, вероятность которого равна 1, что для каждого $\omega \in A$ существует такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что при всех $n \geq N(\varepsilon)$

$$\rho_{\text{равн}} \left(X^{\left(2^{-n+1}\right)}, X^{\left(2^{-n}\right)} \right) < \frac{\varepsilon}{2^{bn/(2a)}}. \tag{4}$$

Соотношение (4) означает, что при $\omega \in A$ последовательность функций $X^{\left(2^{-n}\right)}(t)$, $t \in [0,1]$, является фундаментальной в смысле равномерной сходимости и, следовательно, по критерию Коши сходится при $n \to \infty$ в равномерной метрике к некоторой непрерывной функции $\widetilde{X}(t)$, $t \in [0,1]$. При $\omega \notin A$ положим $\widetilde{X}(t) = 0$, $t \in [0,1]$. Ясно, что $\widetilde{X} = \left\{ \widetilde{X}(t),\ t \in [0,1] \right\}$ – случайный процесс, причем с непрерывными траекториями. Заметим, что если $\omega \in A$, то по построению $\widetilde{X}(k/2^m) = X(k/2^m)$ при всех $m \in \mathbb{N}_0$ и $k \in \{0, 1, \ldots, 2^m\}$.

3) Покажем, что процесс $\widetilde{X}$ является модификацией процесса X. Зафиксируем $t \in [0,1]$. Из условия (1), применяя неравенство Чебышева, находим, что при $\varepsilon > 0$ и $t, s \in [0,1]$

$$\mathbf{P}\left(\left|X(s) - X(t)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{C}{\varepsilon^a} \left|t - s\right|^{1+b}$$

и, следовательно,

$$\lim_{s \to t} \mathbf{P}\left(\left|X(s) - X(t)\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

(в этом случае говорят, что процесс X *стохастически непрерывен* в точке t). Значит, если $\{r_m\}$ – последовательность точек вида $r_m = k/2^m$ (при некотором $k \in \{0, 1, \ldots, 2^m\}$), сходящаяся к t при $m \to \infty$, то

$$\lim_{m \to \infty} \mathbf{P}\left(\left|X(r_m) - X(t)\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Последнее соотношение означает, что при $m \to \infty$ имеет место *сходимость по вероятности*:

$$X(r_m) \xrightarrow{P} X(t). \tag{5}$$

С другой стороны, в виду непрерывности процесса $\widetilde{X}$ находим, что $\widetilde{X}(r_m) \to \widetilde{X}(t)$ при $m \to \infty$. Откуда, учитывая, что п.н. $\widetilde{X}(r_m) = X(r_m)$ при всех $m \in \mathbb{N}$, получаем, что при $m \to \infty$ имеет место *сходимость почти наверное*:

$$X(r_m) \xrightarrow{\text{п.н.}} \widetilde{X}(t). \tag{6}$$

Из соотношений (5) и (6) следует, что $X(t) = \widetilde{X}(t)$ п.н. (поскольку из сходимости случайной последовательности по вероятности следует сходимость п.н. некоторой ее подпоследовательности). Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть случайный процесс $\{X(t),\ t \geq 0\}$ удовлетворяет условию (1) при $s, t \in [0, +\infty)$. Практически дословно повторяя доказательство, можно установить существование непрерывной модификации процесса X на каждом отрезке $[l-1, l]$, $l \in \mathbb{N}$. Обозначим эти модификации $\left\{X^{(l)}(t),\ t \in [l-1, l]\right\}$. Из доказательства теоремы ясно, что п.н.

$$X^{(l)}(l-1) = X(l-1), \qquad X^{(l)}(l) = X(l). \tag{7}$$

Введем случайный процесс $\left\{\widetilde{X}(t),\ t \geq 0\right\}$: $\widetilde{X}(t) = X^{(l)}(t)$ при $t \in [l-1, l]$, $l \in \mathbb{N}$. Ввиду (7) этот процесс является непрерывным на полуоси $[0, +\infty)$ при всех ω за исключением множества нулевой вероятности, на котором полагаем $\widetilde{X}(t) = 0$, $t \geq 0$. Очевидно, что процесс $\widetilde{X}$ является непрерывной модификацией процесса X на всей полуоси $[0, +\infty)$.

Применим теорему 1 к броуновскому движению $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$.

Теорема 2. *У броуновского движения существует модификация, траектории которой п.н. непрерывны.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что если $\xi \sim N\left(0, \sigma^2\right)$, то $\mathbf{E}\xi^4 = 3\sigma^4$. Поэтому при всех $t, s \in [0, +\infty)$

$$\mathbf{E}\left|W(t) - W(s)\right|^4 \leq 3\left|t - s\right|^2,$$

т.е. условие (1) выполняется на полуоси $[0, +\infty)$. Теорема доказана.

В дальнейшем, рассматривая броуновское движение W, будем предполагать, что наряду с указанными ранее тремя аксиомами выполняется еще одна:

4) траектории процесса W непрерывны.

Лекция 4

Сходимость по распределению

В теории вероятностей основное содержание составляют предельные теоремы. Вспомним закон больших чисел, теорему Пуассона, центральную предельную теорему. Для последовательности случайных величин вводится много разных видов сходимости. Так, в законе больших чисел фигурируют сходимость по вероятности и сходимость почти наверное, в теореме Пуассона и центральной предельной – сходимость по распределению.

Пусть заданы два измеримых пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$. Напомним, что случайным элементом X называется произвольное отображение Ω в E, измеримое относительно σ-алгебр $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$ (это означает, что для каждого множества $A \in \mathcal{E}$ множество $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$). Известно, что случайные величины, векторы и процессы являются случайными элементами. Введем общее для всех случайных элементов понятие сходимости по распределению. Однако следует сказать, что наиболее содержательная теория возникает в случае, когда случайные элементы принимают значения в некотором метрическом пространстве S с заданной на нем σ-алгеброй борелевсих множеств $\mathcal{B}(S)$ (это минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые подмножества S). Именно этот случай рассматривается в дальнейшем.

Определение 1. Пусть $P, P_1, P_2, \ldots$ – вероятностные меры, заданные на измеримом пространстве $(S, \mathcal{B}(S))$. Говорят, что последовательность вероятностных мер $\{P_n\}$ *слабо сходится* к вероятностной мере P при $n \to \infty$, если для любой непрерывной ограниченной числовой функции f, заданной на S,

$$\int\limits_S f dP_n \to \int\limits_S f dP \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема 1 (Александров А.Д.). *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *последовательность $\{P_n\}$ слабо сходится к P при $n \to \infty$;*

2) *для любого множества $A \in \mathcal{B}(S)$ такого, что $P(\partial A) = 0$ (∂A - граница множества A),*

$$P_n(A) \to P(A) \text{ при } n \to \infty;$$

3) *для любого замкнутого множества $F \in \mathcal{B}(S)$*

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \le P(F);$$

4) *для любого открытого множества $G \in \mathcal{B}(S)$*

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \ge P(G).$$

Пусть X – *случайный элемент*, отображающий некоторое вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ в измеримое пространство $(S,\mathcal{B}(S))$. Случайный элемент индуцирует меру $\mathbf{P}^{(X)}$ на $(S,\mathcal{B}(S))$:

$$\mathbf{P}^{(X)}(A) := \mathbf{P}(X \in A), \qquad A \in \mathcal{B}(S).$$

Это соотношение обобщается: для произвольной измеримой и ограниченной числовой функции f, заданной на S,

$$\int\limits_{\Omega} f\left(X\right) d\mathbf{P} = \int\limits_{S} f d\mathbf{P}^{(X)}.$$

Вспомним, что интеграл в левой части совпадает с $\mathbf{E}f\left(X\right)$, где символ $\mathbf{E}$ означает математическое ожидание по мере $\mathbf{P}$. Таким образом,

$$\mathbf{E}f\left(X\right) = \int\limits_{S} f d\mathbf{P}^{(X)}. \tag{1}$$

Справедливость соотношения (1) для случайных величин и векторов известна из курса теории вероятностей.

Рассмотрим последовательность случайных элементов X_n, $n \in \mathbb{N}$, отображающих, вообще говоря, разные вероятностные пространства $(\Omega_n,\mathcal{F}_n,\mathbf{P}_n)$ в пространство $(S,\mathcal{B}(S))$ (при этом $\mathbf{E}_n$ означает математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_n$). Пусть при этом случайный элемент X_n индуцирует меру $\mathbf{P}^{(X_n)}$ на $(S,\mathcal{B}(S))$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 2. Говорят, что последовательность случайных элементов $\{X_n\}$ *сходится по распределению* при $n \to \infty$ к случайному элементу X, если $\left\{\mathbf{P}^{(X_n)}\right\}$ слабо сходится к $\mathbf{P}^{(X)}$ при $n \to \infty$. Эта сходимость обозначается так: $X_n \overset{D}{\to} X$.

Из теоремы 1, применяя соотношение (1), нетрудно получить различные критерии сходимости по распределению.

Теорема 1′. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) $X_n \overset{D}{\to} X$ *при* $n \to \infty$;

2) *для любой непрерывной ограниченной числовой функции* f, *заданной на* S,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_n f\left(X_n\right) = \mathbf{E}f\left(X\right);$$

3) *для любого множества* $A \in \mathcal{B}(S)$ *такого, что* $\mathbf{P}\left(X \in \partial A\right) = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n\left(X_n \in A\right) = \mathbf{P}\left(X \in A\right);$$

4) *для любого замкнутого множества* $F \in \mathcal{B}(S)$

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n\left(X_n \in F\right) \le \mathbf{P}\left(X \in F\right);$$

5) *для любого открытого множества* $G \in \mathcal{B}(S)$

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}_n\left(X_n \in G\right) \ge \mathbf{P}\left(X \in G\right).$$

Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность случайных величин, т.е. случайных элементов со значениями в $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Из курса теории вероятностей известно, что для сходимости $\xi_n \stackrel{D}{\to} \xi$ при $n \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы их *функции распределения сходились в основном*: $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ во всех точках непрерывности F, где $F_n(x) = \mathbf{P}_n(\xi_n \le x)$, $F(x) = \mathbf{P}(\xi \le x)$. Заметим, что необходимость следует из критерия 3) последней теоремы: 1) $F_n(x) = \mathbf{P}_n(\xi_n \in (-\infty, x])$, 2) границей множества $(-\infty, x]$ является множество $\{x\}$, 3) $\mathbf{P}(\xi \in \{x\}) = F(x) - F(x-0)$, 4) последняя разность равна 0, если x – точка непрерывности функции F.

Пусть $\varphi_n(t) = \mathbf{E}_n \exp(it\xi_n)$ – характеристическая функция случайной величины ξ_n, $\varphi(t) = \mathbf{E}\exp(it\xi)$ – характеристическая функция случайной величины ξ. Известная из курса теории вероятностей *теорема непрерывности* утверждает следующее: для сходимости $\xi_n \stackrel{D}{\to} \xi$ при $n \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что необходимость следует из критерия 2) теоремы $1'$ при $f(x) = \exp(itx)$, $x \in \mathbb{R}$.

Аналогичные утверждения справедливы для последовательности случайных векторов, т.е. случайных элементов со значениями в $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$, $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. *Пусть g – непрерывное отображение метрического пространства S в другое метрическое пространство S'. Если $X, X_1, X_2, \ldots$ – случайные элементы со значениями в $(S, \mathcal{B}(S))$ и $X_n \stackrel{D}{\to} X$ при $n \to \infty$, то $g(X), g(X_1), g(X_2), \ldots$ – случайные элементы со значениями в $(S', \mathcal{B}(S'))$ и $g(X_n) \stackrel{D}{\to} g(X)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Пусть f – непрерывная ограниченная числовая функция, заданная на S'. Тогда $f \circ g$ – непрерывная ограниченная числовая функция, заданная на S, и поэтому на основании критерия 2) теоремы $1'$ при $n \to \infty$

$$\mathbf{E}_n f(g(X_n)) = \mathbf{E}_n f \circ g(X_n) \to \mathbf{E} f \circ g(X) = \mathbf{E} f(g(X)).$$

Снова применяя критерий 2) теоремы $1'$, получаем требуемое утверждение.

Следующая теорема усиливает теорему 2 и является важной для приложений.

Теорема 3. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – случайные элементы со значениями в $(S, \mathcal{B}(S))$ и при $n \to \infty$*

$$X_n \stackrel{D}{\to} X.$$

Пусть g – измеримое отображение S в метрическое пространство S' (это *означает, что прообраз борелевского множества в S' является борелевским множеством в S*) *и C_g – множество тех элементов S, в которых отображение g непрерывно. Если $\mathbf{P}(X \in C_g) = 1$, то при $n \to \infty$*

$$g(X_n) \stackrel{D}{\to} g(X).$$

Доказательство. Пусть F – замкнутое множество, принадлежащее S'. Покажем, что

$$\mathbf{P}\left(X \in \left[g^{-1}(F)\right]\right) = \mathbf{P}\left(X \in g^{-1}(F)\right), \tag{2}$$

где $[A]$ означает замыкание множества A, т.е. объединение A и всех его предельных точек. Пусть D_g – множество элементов S, в которых отображение g разрывно (множества C_g и D_g являются борелевскими). Тогда $S = C_g + D_g$ и

$$\left[g^{-1}(F)\right] = \left[g^{-1}(F)\right] D_g + \left[g^{-1}(F)\right] C_g \subset D_g + \left[g^{-1}(F)\right] C_g. \tag{3}$$

Оказывается,

$$\left[g^{-1}(F)\right] C_g \subset g^{-1}(F). \tag{4}$$

Действительно, пусть x принадлежит $\left[g^{-1}(F)\right] C_g$. Из того, что $x \in \left[g^{-1}(F)\right]$, следует, что существует такая последовательность элементов $\{x_n\}$, что $x_n \in g^{-1}(F)$ и $x_n \to x$. Кроме того, $x \in C_g$ и, следовательно, отображение g непрерывно в x и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$. Но $g(x_n) \in F$ и поэтому $g(x) \in F$, т.к. F – замкнутое множество. Следовательно, $x \in g^{-1}(F)$. Итак, (4) доказано. Учитывая (3) и (4), находим, что

$$g^{-1}(F) \subset \left[g^{-1}(F)\right] \subset D_g + g^{-1}(F).$$

Откуда получаем, что

$$\mathbf{P}\left(X \in g^{-1}(F)\right) \le \mathbf{P}\left(X \in \left[g^{-1}(F)\right]\right) \le$$

$$\le \mathbf{P}(X \in D_g) + \mathbf{P}\left(X \in g^{-1}(F)\right) = \mathbf{P}\left(X \in g^{-1}(F)\right),$$

поскольку $\mathbf{P}(X \in D_g) = 0$. Итак, соотношение (2) установлено.

Применяя критерий 4) теоремы $1'$ для замкнутого множества $\left[g^{-1}(F)\right]$ и используя соотношение (2), получаем, что

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(g(X_n) \in F) = \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n\left(X_n \in g^{-1}(F)\right) \le$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n\left(X_n \in \left[g^{-1}(F)\right]\right) \le \mathbf{P}\left(X \in \left[g^{-1}(F)\right]\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(X \in g^{-1}(F)\right) = \mathbf{P}(g(X) \in F).$$

Откуда по критерию 4) теоремы $1'$ приходим к утверждению доказываемой теоремы.

Центральную роль в дальнейшем играет *теорема о двупараметрической случайной последовательности.* Предположим, что случайные элементы $X_n, Y_{1,n}, Y_{2,n}, \ldots$ со значениями в $(S, \mathcal{B}(S))$ определены на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Предположим также, что Y_m – случайный элемент, отображающий вероятностное пространство $\left(\widetilde{\Omega}_m, \widetilde{\mathcal{F}}_m, \widetilde{\mathbf{P}}_m\right)$ в $(S, \mathcal{B}(S))$, $m \in \mathbb{N}$. Наконец, X – случайный элемент, отображающий вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ в $(S, \mathcal{B}(S))$.

Теорема 4. *Предположим, что метрическое пространство* S (с метрикой ρ) *сепарабельно. Пусть* $Y_{m,n} \xrightarrow{D} Y_m$ *при* $n \to \infty$, $Y_m \xrightarrow{D} X$ *при* $m \to \infty$ *и для произвольного фиксированного* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(\rho(X_n; Y_{m,n}) \ge \varepsilon) = 0.$$

Тогда при $n \to \infty$

$$X_n \xrightarrow{D} X.$$

Замечание 1. Сепарабельность пространства S обеспечивает измеримость числовой функции $\rho(X_n; Y_{m,n})$, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega_n,\mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)$.

Доказательство теоремы 4. Пусть F– замкнутое множество пространства S. Заметим, что и множество $F_\varepsilon := \{x \in S : \rho(x, F) \leq \varepsilon\}$, где $\rho(x, F)$ – расстояние от точки x до множества F, является замкнутым. Очевидно, что

$$\{X_n \in F\} = \{X_n \in F,\ \rho(X_n; Y_{m,n}) < \varepsilon\} \cup \{X_n \in F,\ \rho(X_n; Y_{m,n}) \geq \varepsilon\}\,.$$

Но первое событие в правой части влечет событие $\{Y_{m,n} \in F_\varepsilon\}$, а второе – влечет событие $\{\rho(X_n; Y_{m,n}) \geq \varepsilon\}$. Поэтому

$$\mathbf{P}_n\left(X_n \in F\right) \leq \mathbf{P}_n\left(Y_{m,n} \in F_\varepsilon\right) + \mathbf{P}_n\left(\rho(X_n; Y_{m,n}) \geq \varepsilon\right).$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$, учитывая критерий 4) теоремы $1'$:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n\left(X_n \in F\right) \leq \widetilde{\mathbf{P}}_m\left(Y_m \in F_\varepsilon\right) + \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n\left(\rho(X_n; Y_{m,n}) \geq \varepsilon\right).$$

В этом соотношении перейдем к пределу при $m \to \infty$:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n\left(X_n \in F\right) \leq \mathbf{P}\left(X \in F_\varepsilon\right) + \limsup_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n\left(\rho(X_n; Y_{m,n}) \geq \varepsilon\right).$$

Но второе слагаемое в правой части равно нулю, поэтому

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n\left(X_n \in F\right) \leq \mathbf{P}\left(X \in F_\varepsilon\right).$$

А теперь в этом соотношении перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$, учитывая аксиому непрерывности и то, что множества F_ε убывают с уменьшением ε и $\bigcap\limits_\varepsilon F_\varepsilon = F$:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}_n\left(X_n \in F\right) \leq \mathbf{P}\left(X \in F\right).$$

Откуда, вспоминая критерий 4) теоремы $1'$, получаем требуемое утверждение.

Лекция 5

Сходимость случайных процессов по распределению. Теорема Прохорова.

Применим изложенную в предыдущей лекции теорию к случайным процессам. Как известно, случайный процесс – это случайный элемент, отображающий вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ в измеримое простраество $(R\,[0,+\infty)\,, \mathcal{G})$. Вместо временной полуоси $[0,+\infty)$ будем для простоты изложения рассматривать отрезок $[0,1]$. Предположим, что траектории случайного процесса X непрерывны на $[0,1]$, тогда X является случайным элементом со значениями в измеримом пространсте $C\,[0,1]$ с заданной на нем цилиндрической σ-алгеброй. В пространстве $C\,[0,1]$ можно задать *метрику равномерной сходимости*: для $x, y \in C\,[0,1]$

$$\rho_{\text{равн}}\,(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} |x\,(t) - y\,(t)|\,,$$

причем с этой метрикой пространство $C\,[0,1]$ является сепарабельным метрическим пространством. Обозначим $\mathcal{B}\,(C\,[0,1])$ борелевскую σ-алгебру относительно введенной метрики. Нетрудно доказать, что $\mathcal{B}\,(C\,[0,1])$ совпадает с цилиндрической σ-алгеброй пространства $C\,[0,1]$. Таким образом, случайный процесс с непрерывными траекториями является случайным элементом со значениями в пространстве $(C\,[0,1]\,, \mathcal{B}\,(C\,[0,1]))$ и, значит, мы имеем право использовать теорию сходимости по распределению.

Введем *модуль непрерывности* для $x \in C\,[0,1]$:

$$w_x\,(\delta) = \sup_{t,s:\ |t-s|\le\delta} |x\,(t) - x\,(s)|\,,$$

где δ – положительное число $(t, s \in [0,1])$.

Лемма 1. *Если* $x \in C\,[0,1]$, *то* $\lim_{\delta\to0} w_x\,(\delta) = 0$.

Доказательство следует из того, что функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\delta = 1/m$ и $x \in C\,[0,1]$. Положим $s_k = k\delta$, $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Введем *кусочно-линейное приближение* $x^{(\delta)}$ для x:

$$x^{(\delta)}\,(t) = x\,(s_k) + \frac{t - s_k}{\delta}\,[x\,(s_{k+1}) - x\,(s_k)]\,,$$

если $t \in [s_k, s_{k+1}]$, $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

Лемма 2. *Если* $x \in C\,[0,1]$, *то при* $\delta > 0$ *справедливо неравенство*

$$\rho_{\text{равн}}\left(x, x^{(\delta)}\right) \le 2w_x\,(\delta)\,,$$

поэтому

$$\lim_{\delta\to0} \rho_{\text{равн}}\left(x, x^{(\delta)}\right) = 0.$$

Доказательство. Пусть $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Заметим, что $x(s_k) = x^{(\delta)}(s_k)$, поэтому при $t \in [s_k, s_{k+1}]$

$$\left| x(t) - x^{(\delta)}(t) \right| \le |x(t) - x(s_k)| + \left| x^{(\delta)}(s_k) - x^{(\delta)}(t) \right| \le$$

$$\le |x(t) - x(s_k)| + \left| x^{(\delta)}(s_k) - x^{(\delta)}(s_{k+1}) \right| =$$

$$= |x(t) - x(s_k)| + |x(s_k) - x(s_{k+1})| \le 2w_x(\delta).$$

Следовательно, при всех $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$

$$\sup_{t \in [s_k, s_{k+1}]} \left| x(t) - x^{(\delta)}(t) \right| \le 2w_x(\delta)$$

и, значит,

$$\sup_{t \in [0,1]} \left| x(t) - x^{(\delta)}(t) \right| \le 2w_x(\delta).$$

Лемма доказана.

Зададим отображение $g^{(m)} : \mathbb{R}^{m+1} \to C[0,1]$. Произвольному вектору $\overline{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ сопоставим функцию $g^{(m)}(\overline{x}) \in C[0,1]$:

$$\left(g^{(m)}(\overline{x}) \right)(t) = x_k + \frac{t - s_k}{\delta}(x_{k+1} - x_k),$$

если $t \in [s_k, s_{k+1}]$, $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Очевидно, что отображение $g^{(m)}$ является непрерывным и

$$x^{(\delta)} = g^{(m)}(x(s_0), x(s_1), \ldots, x(s_m)). \tag{1}$$

Определение 1. Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – произвольные случайные процессы. Говорят, что последовательность процессов $\{X_n\}$ сходится при $n \to \infty$ *в смысле конечномерных распределений* к процессу X, если для произвольного $m \in \mathbb{N}$ и произвольных моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$ ($t_1 < t_2 < \ldots < t_m$) при $n \to \infty$

$$(X_n(t_1), X_n(t_2), \ldots, X_n(t_m)) \xrightarrow{D} (X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_m)).$$

Теорема 1 (Прохоров). *Пусть* $X, X_1, X_2, \ldots$ *– случайные процессы* (*с временной переменной, принадлежащей* $[0,1]$) *с непрерывными траекториями. Если последовательность процессов* $\{X_n\}$ *сходится при* $n \to \infty$ *в смысле конечномерных распределений к процессу* X *и для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathbf{P}(w_{X_n}(\delta) \ge \varepsilon) = 0, \tag{2}$$

то $X_n \xrightarrow{D} X$ *при* $n \to \infty$ (*по распределению в пространстве* $C[0,1]$). *Наоборот, из сходимости по распределению в* $C[0,1]$ *последовательности процессов с непрерывными траекториями следуют сходимость в смысле конечномерных распределений и условие* (2).

Доказательство. Начнем с первого утверждения. Пусть $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$. Положим

$$Y_{m,n} = X_n^{(\delta)},\ Y_m = X^{(\delta)}.$$

По лемме 2

$$\rho_{\text{равн}}\left(Y_{m,n}; X_n\right) \leq 2w_{X_n}\left(\delta\right).$$

Поэтому ввиду (2)

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\rho_{\text{равн}}\left(Y_{m,n}; X_n\right) \geq \varepsilon\right) = 0. \tag{3}$$

В силу соотношения (1)

$$X_n^{(\delta)} = g^{(m)}\left(X_n\left(s_0\right), X_n\left(s_1\right), \ldots, X_n\left(s_m\right)\right),$$

$$X^{(\delta)} = g^{(m)}\left(X\left(s_0\right), X\left(s_1\right), \ldots, X\left(s_m\right)\right),$$

где $g^{(m)}$ является непрерывным отображением $\mathbb{R}^{m+1}$ в $C\left[0,1\right]$, а $s_k = k\delta$, $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$. По условию теоремы при $n \to \infty$

$$\left(X_n\left(s_0\right), X_n\left(s_1\right), \ldots, X_n\left(s_m\right)\right) \xrightarrow{D} \left(X\left(s_0\right), X\left(s_1\right), \ldots, X\left(s_m\right)\right).$$

Поэтому на основании теоремы 2 лекции 4 при $n \to \infty$

$$X_n^{(\delta)} = g^{(m)}\left(X_n\left(s_0\right), X_n\left(s_1\right), \ldots, X_n\left(s_m\right)\right) \xrightarrow{D}$$

$$g^{(m)}\left(X\left(s_0\right), X\left(s_1\right), \ldots, X\left(s_m\right)\right) = X^{(\delta)}.$$

Итак, при $n \to \infty$

$$Y_{m,n} \xrightarrow{D} Y_m. \tag{4}$$

По лемме 2

$$\lim_{m\to\infty}\rho_{\text{равн}}\left(Y_m, X\right) = 0,$$

но из сходимости случайных элементов п.н. следует их сходимость по распределению (докажите), поэтому при $m \to \infty$

$$Y_m \xrightarrow{D} X\ . \tag{5}$$

Из соотношений (3)-(5) по теореме 4 лекции 4 получаем, что при $n \to \infty$

$$X_n \xrightarrow{D} X.$$

Докажем обратное утверждение. Отображения

$$x \to w_x\left(\delta\right), \tag{6}$$

$$x \to \left(x\left(t_1\right), x\left(t_2\right), \ldots, x\left(t_m\right)\right) \tag{7}$$

являются непрерывными на $C\left[0,1\right]$ (здесь m – произвольное натуральное число, а $t_1, t_2, \ldots, t_m$ – произвольные числа из отрезка $[0,1]$).

Из непрерывности отображения (6) по теореме 2 лекции 4 получаем сходимость по распределению случайных величин: при $n \to \infty$

$$w_{X_n}\left(\delta\right) \xrightarrow{D} w_X\left(\delta\right).$$

Учитывая критерий сходимости по распределению случайных величин в терминах функций распределения, находим что для всех $\varepsilon > 0$ (за исключением, быть может, некоторого счетного множества)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(w_{X_n}(\delta) \geq \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(w_X(\delta) \geq \varepsilon\right).$$

Траектории процесса X непрерывны и, значит, по лемме 1

$$\lim_{\delta\to 0} \mathbf{P}\left(w_X(\delta) \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Таким образом, для всех $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(w_{X_n}(\delta) \geq \varepsilon\right) = 0,$$

т.е. условие (2) выполнено.

Из непрерывности отображения (7) получаем, что при $n \to \infty$

$$\left(X_n(t_1), \ldots, X_n(t_m)\right) \xrightarrow{D} \left(X(t_1), \ldots, X(t_m)\right), \tag{8}$$

т.е. имеет место сходимость конечномерных распределений. Теорема доказана.

Задача 1. показать, что соотношение (8) равносильно тому, что для произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_m$ при $n \to \infty$

$$C_1 X_n(t_1) + \ldots + C_m X_n(t_m) \xrightarrow{D} C_1 X(t_1) + \ldots + C_m X(t_m).$$

Если случайные процессы с непрерывными траекториями X_n сходятся при $n \to \infty$ по распределению в пространстве $C[0,1]$ к процессу с непрерывными траекториями X, то по теореме 2 лекции 4 выполняется сходимость по распределению $f(X_n) \xrightarrow{D} f(X)$ для любой непрерывной числовой функции f, заданной на $C[0,1]$. Во многом вся ценность теоремы Прохорова объясняется именно этим обстоятельством. Как показывает вторая часть доказательства теоремы 1 и утверждение задачи 1, указанная сходимость выполняется, если она выполняется для функций вида $f(x) = w_x(\delta)$ и $f(x) = C_1 x(t_1) + \ldots + {}_m x(t_m)$.

Следствие 1. *Пусть процессы с непрерывными траекториями X_n сходятся при $n \to \infty$ по распределению в пространстве $C[0,1]$ к процессу с непрерывными траекториями X, тогда при $n \to \infty$*

$$\sup_{t\in[0,1]} X_n(t) \xrightarrow{D} \sup_{t\in[0,1]} X(t).$$

Доказательство. Рассмотрим следующее отображение f пространства $C[0,1]$ в $\mathbb{R}$: $f(x) = \sup_{t\in[0,1]} x(t)$, $x \in C[0,1]$. Оно является непрерывным при всех $x \in C[0,1]$, поскольку

$$\left|\sup_{t\in[0,1]} x(t) - \sup_{t\in[0,1]} y(t)\right| \leq \sup_{t\in[0,1]} \left|x(t) - y(t)\right|, \ x, y \in C[0,1].$$

По теореме Прохорова, учитывая непрерывность отображения f, получаем требуемое утверждение.

Пример. Рассмотрим случайные процессы (не зависящие от ω) с непрерывными траекториями: $X(t) \equiv 0$ и при $n \in \mathbb{N}$

$$X_n(t) = \begin{cases} nt,\ 0 \le t \le 1/n; \\ 2 - nt,\ 1/n \le t \le 2/n; \\ 0,\ 2/n \le t \le 1. \end{cases}$$

Ясно, что конечномерные распределения процесса X_n сходятся при $n \to \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса X, но условие (2) не выполняется. Таким образом, из сходимости в смысле конечномерных распределений не следует сходимость по распределению в пространстве $C[0,1]$.

Лекция 6

Принцип инвариантности Прохорова-Донскера

Применим рассмотренную ранее теорию сходимости по распределению к исследованию случайного блуждания. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathbf{E}X_1 = 0$ и $\mathbf{D}X_1 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Рассмотрим случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Такое случайное блуждание подробно рассматривается в теории вероятностей. Для него справедливы 1) *усиленный закон больших чисел*: при $n \to \infty$

$$\frac{S_n}{n} \overset{\text{п.н.}}{\to} 0;$$

2) *центральная предельная теорема*: при $n \to \infty$

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \overset{D}{\to} N,$$

где символ $\overset{D}{\to}$ означает сходимость по распределению, а N означает случайную величину со стандартным нормальным распределением: $N \sim N(0,1)$.

По случайному блужданию $\{S_n\}$ определим случайный процесс $S = \{S(t),\ t \geq 0\}$, используя линейную интерполяцию: при $t \geq 0$

$$S(t) = S_{\lfloor t \rfloor} + (t - \lfloor t \rfloor)\left(S_{\lfloor t \rfloor + 1} - S_{\lfloor t \rfloor}\right) = S_{\lfloor t \rfloor} + (t - \lfloor t \rfloor) X_{\lfloor t \rfloor + 1}.$$

Заметим, что процесс $\{S(t),\ t \in [0,n]\}$ сохраняет информацию об отрезке случайного блуждания $S_0, S_1, \ldots, S_n$. Осуществляя сжатие в n раз вдоль временной оси, приходим от $\{S(t),\ t \in [0,n]\}$ к процессу $\{S(nt),\ t \in [0,1]\}$, определенному на временном промежутке $[0,1]$. К сожалению, $\mathbf{D}S(nt) \sim \sigma^2 nt$ при $n \to \infty$, что означает большой разброс вдоль оси ординат. Поэтому следующий шаг состоит в переходе к процессу $Y_n = \{Y_n(t),\ t \in [0,1]\}$ путем сжатия вдоль оси ординат:

$$Y_n(t) = \frac{S(nt)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{(nt - \lfloor nt \rfloor) X_{\lfloor nt \rfloor + 1}}{\sigma\sqrt{n}},\ t \in [0,1]. \tag{1}$$

Заметим, что Y_n является случайным процессом с траекториями из $C[0,1]$, сохраняющим информацию об отрезке случайного блуждания $S_0, S_1, \ldots, S_n$.

В силу центральной предельной теоремы при $n \to \infty$

$$Y_n(1) \overset{D}{\to} N \overset{d}{=} W(1),$$

где W – броуновское движение. Этот результат можно обобщить, также используя центральную предельную теорему (сделайте это самостоятельно): при фиксированном $t \in (0,1]$ и $n \to \infty$

$$Y_n(t) \overset{D}{\to} \sqrt{t}N \overset{d}{=} W(t).$$

Все это наводит на мысль о том, что распределение процесса Y_n при больших n мало отличается от распределения процесса W. Следующий результат получил название *принципа инвариантности Прохорова-Донскера.*

Теорема 1. *Если* $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, *то при* $n \to \infty$

$$Y_n \xrightarrow{D} W,$$

где $W = \{W(t), \ t \in [0,1]\}$ *– броуновское движение, знак* $\xrightarrow{D}$ *означает сходимость по распределению в пространстве* $C[0,1]$ *с борелевской* σ*-алгеброй относительно топологии равномерной сходимости.*

Доказательство. Сначала установим сходимость конечномерных распределений. Рассмотрим произвольные моменты времени $t_1, \ldots, t_m$ ($0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m \le 1$), $m \in \mathbb{N}$ (условимся, что $t_0 = 0$). Требуется показать, что при $n \to \infty$

$$\left(Y_n(t_1), \ldots, Y_n(t_m)\right) \xrightarrow{D} \left(W(t_1), \ldots, W(t_m)\right). \tag{2}$$

Положим при $t \in [0,1]$

$$\widetilde{Y}_n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}}, \qquad \delta_n(t) = \frac{(nt - \lfloor nt \rfloor) X_{\lfloor nt \rfloor + 1}}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Ввиду соотношения (1)

$$Y_n(t) = \widetilde{Y}_n(t) + \delta_n(t). \tag{3}$$

Заметим, что для произвольного $t \in (0,1]$ при $n \to \infty$

$$\delta_n(t) \xrightarrow{P} 0, \tag{4}$$

где символ $\xrightarrow{P}$ означает сходимость по вероятности. Действительно, по неравенству Чебышева при $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(|\delta_n(t)| \ge \varepsilon\right) \le \mathbf{P}\left(\frac{\left|X_{\lfloor nt \rfloor+1}\right|}{\sigma\sqrt{n}} \ge \varepsilon\right) \le \frac{\mathbf{D}X_{\lfloor nt \rfloor+1}}{\varepsilon^2\sigma^2 n} = \frac{1}{\varepsilon^2 n} \to 0, \ n \to \infty. \tag{5}$$

Из соотношений (3) и (4) следует, что для справедливости (2) достаточно показать, что при $n \to \infty$

$$\left(\widetilde{Y}_n(t_1), \ldots, \widetilde{Y}_n(t_m)\right) \xrightarrow{D} \left(W(t_1), \ldots, W(t_m)\right),$$

а для этого, в свою очередь, достаточно установить, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \exp\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \widetilde{Y}_n(t_k)\right) = \varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m), \tag{6}$$

где $\varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ – характеристическая функция случайного вектора $(W(t_1), \ldots, W(t_m))$. В лекции 2 показано, что

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m}^2 (t_k - t_{k-1})\right).$$

При $k \in \{1, \ldots, m\}$ положим $\Delta_{k,n} = \widetilde{Y}_n(t_k) - \widetilde{Y}_n(t_{k-1})$ и заметим, что $\widetilde{Y}_n(t_k) = \sum_{l=1}^{k} \Delta_{l,n}$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \widetilde{Y}_n(t_k) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sum_{l=1}^{k} \Delta_{l,n} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m} \Delta_{k,n}.$$

Легко видеть, что процесс $\left\{S_{\lfloor nt \rfloor},\ t \geq 0\right\}$ имеет независимые приращения, поэтому независимы случайные величины $\Delta_{1,n}, \ldots, \Delta_{m,n}$ и, следовательно,

$$\mathbf{E}\exp\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \widetilde{Y}_n(t_k)\right) = \mathbf{E}\exp\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m} \Delta_{k,n}\right) = \prod_{k=1}^{m} \mathbf{E}\exp\left(i \lambda_{k,m} \Delta_{k,n}\right). \tag{7}$$

В силу центральной предельной теоремы при $k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\Delta_{k,n} = \frac{S_{\lfloor nt_k \rfloor} - S_{\lfloor nt_{k-1} \rfloor}}{\sigma \sqrt{n}} \overset{d}{=} \frac{S_{\lfloor nt_k \rfloor - \lfloor nt_{k-1} \rfloor}}{\sigma \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{S_{\lfloor nt_k \rfloor - \lfloor nt_{k-1} \rfloor}}{\sigma \sqrt{\lfloor nt_k \rfloor - \lfloor nt_{k-1} \rfloor}} \sqrt{\frac{\lfloor nt_k \rfloor - \lfloor nt_{k-1} \rfloor}{n}} \overset{D}{\to} \sqrt{t_k - t_{k-1}} N$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}\exp\left(i \lambda_{k,m} \Delta_{k,n}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda_{k,m}^2 \left(t_k - t_{k-1}\right)\right). \tag{8}$$

Из соотношений (7) и (8) следует (6). Сходимость конечномерных распределений установлена.

Теперь проверим, что выполнено условие на модуль непрерывности: при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta) \geq \varepsilon\right) = 0. \tag{9}$$

При этом для упрощения доказательства предположим, что $\mathbf{E}X_1^4 := \theta^4 < +\infty$. Сначала установим вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\delta = 1/m$, где m - натуральное число, и $t_k = \delta k$, $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, тогда для любого $x \in C[0,1]$ справедливо неравенство*

$$w_x(\delta) \leq 3 \max_k \sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \left|x(t) - x(t_k)\right|.$$

Доказательство. Пусть s, t таковы, что $0 \leq s \leq t \leq 1$ и $|s - t| \leq \delta$. Тогда либо $s, t \in [t_k, t_{k+1}]$ для некоторого $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ и, следовательно,

$$|x(t) - x(s)| \leq |x(t) - x(t_k)| + |x(t_k) - x(s)| \leq$$

$$\leq 2 \max_k \sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |x(t) - x(t_k)|;$$

либо $s \in [t_k, t_{k+1}]$, $t \in [t_{k+1}, t_{k+2}]$ для некоторого $k \in \{0, 1, \ldots, m-2\}$ и, следовательно,

$$|x(t) - x(s)| \leq |x(t) - x(t_{k+1})| + |x(t_{k+1}) - x(t_k)| + |x(t_k) - x(s)| \leq$$

$$\leq 3 \max_k \sup_{s \in [t_k, t_{k+1}]} |x(t) - x(t_k)|.$$

Таким образом, если $|s - t| \leq \delta$, то

$$|x(t) - x(s)| \leq 3 \max_k \sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |x(t) - x(t_i)|.$$

Следовательно,

$$w_x(\delta) \leq 3 \max_k \sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |x(t) - x(t_k)|.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *При* $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{E} S_n^4 = n\theta^4 + 3n(n-1)\sigma^4.$$

Доказательство. Ввиду независимости случайных величин X_i, X_j, X_k, X_l при различных i, j, k, l получаем, что $\mathbf{E}\left(X_i X_j^3\right) = \mathbf{E} X_i \mathbf{E} X_j^3 = 0$, а также $\mathbf{E}\left(X_i X_j X_k^2\right) = 0$, $\mathbf{E}\left(X_i X_j X_k X_l\right) = 0$. Следовательно,

$$\mathbf{E} S_n^4 = \mathbf{E}\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right)^4 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E} X_i^4 + C_4^2 \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{E} X_i^2 \mathbf{E} X_j^2 = n\theta^4 + 3n(n-1)\sigma^4.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *При* $n \in \mathbb{N}$ *и* $x > 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{0 \leq i \leq n} |S_i| \geq x\right) \leq L \frac{n^2}{x^4},$$

где постоянная $L > 0$ *зависит только от* σ^2 *и* θ^4.

Доказательство. При $a \in (1, +\infty)$ по неравенству Колмогорова для произвольного $x > 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{0 \leq i \leq n} |S_i| \geq x\right) \leq \frac{\mathbf{E}|S_n|^a}{x^4}.$$

Учитывая лемму 2, находим при $a = 4$, что

$$\mathbf{P}\left(\max_{0 \leq i \leq n} |S_i| \geq x\right) \leq \frac{n\theta^4 + 3n(n-1)\sigma^4}{x^4} \leq 3\left(\sigma^2 + \theta^4\right) \frac{n^2}{x^4}.$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. В силу леммы 1

$$\mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta) \geq \varepsilon\right) \leq \mathbf{P}\left(\max_k \sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |Y_n(t) - Y_n(t_k)| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]} |Y_n(t) - Y_n(t_k)| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right). \tag{10}$$

В силу соотношения (3) при $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]} |Y_n(t) - Y_n(t_k)| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \left|Y_n(t) - \widetilde{Y}_n(t_k)\right| \geq \frac{\varepsilon}{6} \right) + \mathbf{P}\left(|\delta_n(t_k)| \geq \frac{\varepsilon}{6} \right). \tag{11}$$

Поскольку график функции $S(t)$, $t \geq 0$, является ломаной, то

$$\sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \left|Y_n(t) - \widetilde{Y}_n(t_k)\right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \left|S(nt) - S_{\lfloor nt_k \rfloor}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sup_{t\in[t_k n, t_{k+1} n]} \left|S(t) - S_{\lfloor nt_k \rfloor}\right| \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{\lfloor nt_k \rfloor \leq i \leq \lfloor nt_{k+1} \rfloor + 1} \left|S_i - S_{\lfloor nt_k \rfloor}\right|.$$

Следовательно, учитывая лемму 3, получаем, что при $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \left|Y_n(t) - \widetilde{Y}_n(t_k)\right| \geq \frac{\varepsilon}{6} \right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\left(\max_{\lfloor nt_k \rfloor \leq i \leq \lfloor nt_{k+1} \rfloor + 1} \left|S_i - S_{\lfloor nt_k \rfloor}\right| \geq \frac{\varepsilon\sigma\sqrt{n}}{6} \right) =$$

$$\leq \mathbf{P}\left(\max_{0 \leq i \leq \lfloor nt_{k+1} \rfloor + 1 - \lfloor nt_k \rfloor} |S_i| \geq \frac{\varepsilon\sigma\sqrt{n}}{6} \right) \leq \frac{\widetilde{L}}{n^2} \left(\lfloor nt_{k+1} \rfloor + 1 - \lfloor nt_k \rfloor \right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{\widetilde{L}}{n^2} \left(nt_{k+1} - nt_k + 2 \right)^2 \leq \widetilde{L} \left(\delta + \frac{2}{n} \right)^2, \tag{12}$$

где $\widetilde{L} = (\varepsilon\sigma/6)^{-4} L$. Из соотношений (11), (12) и (5) получаем, что при $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]} |Y_n(t) - Y_n(t_k)| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right) \leq \widetilde{L} \left(\delta + \frac{2}{n} \right)^2 + \frac{36}{\varepsilon^2 n}. \tag{13}$$

Применяя (13) к соотношению (10) и учитывая, что $m = 1/\delta$, получаем, что

$$\mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta) \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\delta} \left[\widetilde{L} \left(\delta + \frac{2}{n} \right)^2 + \frac{36}{\varepsilon^2 n} \right].$$

Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta) \geq \varepsilon \right) \leq \widetilde{L}\delta,$$

откуда, переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем соотношение (9). Итак, все условия теоремы Прохорова (см. теорему 1 лекции 5) выполнены. Теорема доказана.

Лекция 7

Предельные теоремы для случайного блуждания

Рассмотрим случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, где $X_1, X_2, \ldots$ - независимые одинаково распределенные случайные величины (называемые шагами), причем $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$.

По случайному блужданию $\{S_n\}$ определим "непрерывное" случайное блуждание $S(t) = S_{\lfloor t \rfloor} + (t - \lfloor t \rfloor)\left(S_{\lfloor t \rfloor + 1} - S_{\lfloor t \rfloor}\right)$ при $t \geq 0$. Теперь введем нормированный случайный процесс

$$Y_n(t) = \frac{S(nt)}{\sigma\sqrt{n}}, \ t \in [0,1].$$

Принцип инвариантности Прохорова-Донскера состоит в том, что при $n \to \infty$

$$Y_n \overset{D}{\to} W,$$

где W – броуновское движение, символ $\overset{D}{\to}$ означает сходимость по распределению в метрическом пространстве $C[0,1]$ с борелевской σ-алгеброй относительно метрики равномерной сходимости.

Если f – непрерывное отображение $C[0,1]$ в $\mathbb{R}$, то ввиду теоремы 2 лекции 4 при $n \to \infty$

$$f(Y_n) \overset{D}{\to} f(W), \tag{1}$$

где символ $\overset{D}{\to}$ означает сходимость по распределению в пространстве $\mathbb{R}$ с борелевской σ-алгеброй.

Именно соотношение (1) получило первоначально название *принципа инвариантности* (в термин *инвариантность* здесь вкладывается следующий смысл: неизменность распределения правой части (1) относительно распределения шага случайного блуждания).

Рассмотрим примеры применения утверждения (1). Положим при $n \in \mathbb{N}$

$$M_n = \max_{0 \leq i \leq n} S_i$$

и

$$M = \sup_{t \in [0,1]} W(t).$$

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. *Тогда при всех* $x \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \mathbf{P}(M \leq x) = 2\Phi(x) - 1.$$

Доказательство. Рассмотрим следующее отображение f пространства $C[0,1]$ в $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \sup_{t \in [0,1]} x(t), \quad x \in C[0,1].$$

Оно является непрерывным при всех $x \in C[0,1]$, поскольку

$$\left| \sup_{t \in [0,1]} x(t) - \sup_{t \in [0,1]} y(t) \right| \leq \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)|, \ x, y \in C[0,1].$$

По принципу инвариантности Прохорова-Донскера, учитывая непрерывность отображения f, находим, что при $n \to \infty$

$$\sup_{t \in [0,1]} Y_n(t) \xrightarrow{D} M.$$

Заметим, что

$$\sup_{t \in [0,1]} Y_n(t) = \frac{\sup_{t \in [0,1]} S(nt)}{\sigma \sqrt{n}} = \frac{\sup_{t \in [0,n]} S(t)}{\sigma \sqrt{n}} = \frac{M_n}{\sigma \sqrt{n}}.$$

Следовательно, при $n \to \infty$

$$\frac{M_n}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{D} M.$$

В терминах функций распределения получаем, что при всех $x \geq 0$ (за исключением, быть может, некоторого счетного множества)

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma \sqrt{n}} \leq x \right) = \mathbf{P}(M \leq x), \tag{2}$$

причем правая часть не зависит от распределения шага случайного блуждания. Чтобы найти правую часть соотношения (2) и тем самым завершить доказательство теоремы, воспользуемся следующим результатом.

Лемма 1. *Пусть случайная величина X_1 принимает значение 1 с вероятностью $1/2$ и значение -1 с той же вероятностью. Тогда при $x \geq 0$*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma \sqrt{n}} \leq x \right) = 2\Phi(x) - 1.$$

Доказательство. Очевидно, что при $x \geq 0$

$$\mathbf{P}(M_n \geq x) = \mathbf{P}(S_n = x) + \mathbf{P}(S_n > x, \ M_n \geq x) + \mathbf{P}(S_n < x, \ M_n \geq x). \tag{3}$$

Заметим, что при $x \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}(S_n > x, \ M_n \geq x) = \mathbf{P}(S_n < x, \ M_n \geq x). \tag{4}$$

Действительно, чтобы найти вероятность, например, первого из этих событий, требуется найти число траекторий в интервале времени от 0 до n, удовлетворяющих неравенствам $S_n > x$ и $M_n \geq x$, и затем умножить это число на вероятность одной траектории, т.е. 2^{-n}. Но число траекторий, удовлетворяющих неравенствам $S_n > x$ и $M_n \geq x$, совпадает с числом траекторий, удовлетворяющих неравенствам $S_n < x$ и $M_n \geq x$. В самом деле (см. рис. 1), если $M_n \geq x$, то момент τ_x первого достижения траекторией уровня x не превосходит n; число траекторий, ведущих за время $n - \tau_x$ из точки x

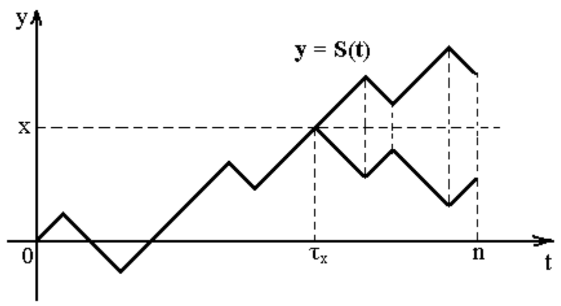

Рис. 1: Принцип отражения

в точки, лежащие не ниже x, совпадает с числом траекторий, ведущих в точки, лежащие не выше x.

Далее, при $x \geq 0$

$$\mathbf{P}\left(S_n > x,\ M_n \geq x\right) = \mathbf{P}\left(S_n > x\right). \tag{5}$$

Из соотношений (3)-(5) получаем, что при $x \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}\left(M_n \geq x\right) = 2\mathbf{P}\left(S_n > x\right) + \mathbf{P}\left(S_n = x\right) = 2\mathbf{P}\left(S_n \geq x\right) - \mathbf{P}\left(S_n = x\right). \tag{6}$$

Поскольку случайные величины M_n и S_n целочисленны, то учитывая (6), находим, что при $x \geq 0$

$$\mathbf{P}\left(M_n > \sigma\sqrt{n}x\right) = \mathbf{P}\left(M_n \geq \left\lfloor \sigma\sqrt{n}x \right\rfloor + 1\right) =$$
$$= 2\mathbf{P}\left(S_n \geq \left\lfloor \sigma\sqrt{n}x \right\rfloor + 1\right) - \mathbf{P}\left(S_n = \left\lfloor \sigma\sqrt{n}x \right\rfloor + 1\right) =$$
$$= 2\mathbf{P}\left(S_n > \sigma\sqrt{n}x\right) - \mathbf{P}\left(S_n = \left\lfloor \sigma\sqrt{n}x \right\rfloor + 1\right). \tag{7}$$

По центральной предельной теореме

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(S_n > \sigma\sqrt{n}x\right) = 1 - \Phi\left(x\right), \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(S_n = \left\lfloor \sigma\sqrt{n}x \right\rfloor + 1\right) = 0 \tag{8}$$

(второе равенство докажите сами). Из (7) и (8) следует, что при $x \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) = 2\left(1 - \Phi\left(x\right)\right),$$

что равносильно утверждению леммы 1.

Перейдем ко второму примеру. Пусть $\lambda\left(A\right)$ – мера Лебега борелевского множества A на числовой прямой. Рассмотрим время пребывания выше нуля для непрерывного случайного блуждания:

$$\mu_n = \lambda\left(\left\{t : S\left(t\right) > 0,\ 0 \leq t \leq n\right\}\right).$$

Введем и для броуновского движения время пребывания выше нуля:

$$\mu = \lambda(\{t : t \in [0,1]\,,\ W\left(t\right) > 0\}).$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. *Тогда при всех* $u \in [0,1]$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\mu_n}{n} \le u\right) = \mathbf{P}(\mu \le u) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{u}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующее отображение f пространства $C[0,1]$ в $\mathbb{R}$:
$$g(x) = \lambda(\{t : t \in [0,1],\ x(t) > 0\}), \qquad x \in C[0,1].$$

Задача. Показать, что отображение g является измеримым и почти наверное непрерывным на броуновских траекториях.

По принципу инвариантности Прохорова-Донскера, учитывая сформулированное в задаче утверждение и теорему 3 лекции 4, находим, что при $n \to \infty$
$$g(Y_n) \xrightarrow{D} \mu.$$
Заметим, что
$$g(Y_n) = \lambda(\{t : t \in [0,1],\ Y_n(t) > 0\}) =$$
$$= \lambda(\{t : t \in [0,1],\ S(nt) > 0\}) = \frac{\mu(n)}{n}.$$
Следовательно, при $n \to \infty$
$$\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{D} \mu.$$

В терминах функций распределения получаем, что при всех $u \in [0,1]$ (за исключением, быть может, некоторого счетного множества)
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\mu_n}{n} \le u\right) = \mathbf{P}(\mu \le u), \tag{9}$$
причем правая часть не зависит от распределения шага случайного блуждания. Чтобы найти правую часть соотношения (9) и тем самым завершить доказательство теоремы, воспользуемся следующим результатом.

Лемма 2. *Пусть случайная величина* X_1 *принимает значение* 1 *с вероятностью* $1/2$ *и значение* -1 *с той же вероятностью. Тогда при* $0 < x_1 < x_2 < 1$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(x_1 < \frac{\mu_{2n}}{2n} < x_2\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Доказательство. Положим $u_{2n} = \mathbf{P}(S_{2n} = 0)$ при $n \in \mathbb{N}_0$ и $b_{2k,2n} = \mathbf{P}(\mu(2n) = 2k)$ при $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Покажем, что при $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$
$$b_{2k,2n} = u_{2k} u_{2n-2k}. \tag{10}$$
Предположим, что траектория в интервале времени от 0 до $2n$ находилась

выше нуля $2k$ единиц времени. Если момент τ_0 повторного достижения траекторией уровня 0 равен $2r$ и траектория до этого момента находилась выше нуля, то в оставшееся время $2(n-r)$ она находилась выше нуля $2(k-r)$ единиц времени; если же до момента τ_0 она находилась ниже нуля, то в оставшееся время $2(n-r)$ она находилась выше нуля $2k$ единиц времени. Положим $f_{2r} = \mathbf{P}(\tau_0 = 2r)$ при $r \in \mathbb{N}$. Из сказанного, учитывая формулу полной вероятности, находим, что

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r} b_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} b_{2k,2n-2r}. \tag{11}$$

Воспользуемся теперь методом математической индукции по n. При $n = 1$ соотношение (10) выполняется. Предположим, что

$$b_{2k,2m} = u_{2k} u_{2m-2k} \tag{12}$$

для каждого $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ при всех $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$. В силу соотношений (11) и (12)

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r} u_{2k-2r} u_{2n-2k} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} u_{2k} u_{2n-2r-2k} =$$

$$= \frac{1}{2} u_{2n-2k}\left(\sum_{r=1}^{k} f_{2r} u_{2k-2r}\right) + \frac{1}{2} u_{2k}\left(\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} u_{2n-2r-2k}\right). \tag{13}$$

Снова применяя формулу полной вероятности, можно показать, что при $l \in \mathbb{N}$

$$u_{2l} = \sum_{r=1}^{l} f_{2r} u_{2l-2r}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2} u_{2k} u_{2n-2k} + \frac{1}{2} u_{2k} u_{2n-2k} = u_{2k} u_{2n-2k}.$$

Это означает справедливость соотношения (12) при $m = n$. Итак соотношение (10) доказано.

Ввиду (10)

$$\mathbf{P}\left(x_1 < \frac{\mu_{2n}}{2n} < x_2\right) = \sum_{x_1 < k/n < x_2} \mathbf{P}(\mu_{2n} = 2k) = \sum_{x_1 < k/n < x_2} u_{2k} u_{2n-2k}. \tag{15}$$

Поскольку $u_{2n} = C_{2n}^{n} 2^{-2n}$ при $n \in \mathbb{N}_0$, то по формуле Стирлинга ($n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ при $n \to \infty$) находим, что

$$u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}. \tag{16}$$

Из соотношения (16) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших (в зависимости от ε) n

$$\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\pi k}} \le u_{2k} \le \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\pi k}}, \qquad \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\pi (n-k)}} \le u_{2n-2k} \le \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\pi (n-k)}},$$

если $x_1 < k/n < x_2$. Поэтому

$$\sum_{x_1<\frac{k}{n}<x_2} \frac{(1-\varepsilon)^2}{\pi\sqrt{k\,(n-k)}} \le \sum_{x_1<\frac{k}{n}<x_2} u_{2k}u_{2n-2k} \le \sum_{x_1<\frac{k}{n}<x_2} \frac{(1+\varepsilon)^2}{\pi\sqrt{k\,(n-k)}}. \tag{17}$$

Но

$$\sum_{x_1<k/n<x_2} \frac{1}{\sqrt{k\,(n-k)}} = \sum_{x_1<k/n<x_2} \frac{1}{\sqrt{(k/n)\,(1-(k/n))}}\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)}} \tag{18}$$

(мы воспользовались тем, что вторая сумма является интегральной суммой для последнего интеграла). Нетрудно понять, что

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)}} = 2\arcsin\sqrt{x}|_{x_1}^{x_2}. \tag{19}$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ в соотношении (17) и учитывая (18) и (19), видим, что

$$(1-\varepsilon)^2\,\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}|_{x_1}^{x_2} \le \liminf_{n\to\infty} \sum_{x_1<\frac{k}{n}<x_2} u_{2k}u_{2n-2k} \le$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} \sum_{x_1<\frac{k}{n}<x_2} u_{2k}u_{2n-2k} \le (1+\varepsilon)^2\,\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}|_{x_1}^{x_2}.$$

Откуда, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{x_1<\frac{k}{n}<x_2} u_{2k}u_{2n-2k} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}|_{x_1}^{x_2}. \tag{20}$$

Из соотношений (15) и (20) получаем утверждение леммы.

Лекция 8

Броуновское движение

Напомним, что так называется случайный процесс $W = \{W(t), \ t \geq 0\}$ с непрерывными траекториями, стартующий из точки 0, имеющий независимые приращения, распределенные по нормальному закону:

$$W(t_2) - W(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1), \quad 0 \leq t_1 < t_2.$$

Равносильное определение состоит в том, что траектории процесса непрерывны, а конечномерные распределения нормальны, причем

$$\mathbf{E}W(t) = 0, \ \ t \geq 0; \quad \mathbf{cov}(W(t), W(s)) = \min(t, s), \ \ t, s \geq 0.$$

Сказанное о конечномерных распределениях равносильно тому, что характеристическая функция случайного вектора $(W(t_1), \ldots, W(t_m))$ для произвольных $m \in \mathbb{N}$ и моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$ $(0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$ имеет вид

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\lambda_k \min(t_k, t_l)\lambda_l\right),$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Для броуновского движения справедливо *свойство автомодельности*: при любом фиксированном $a > 0$ процесс $\{W(at)/\sqrt{a}, \ t \geq 0\}$ является броуновским движением. Действительно, траектории этого процесса непрерывны и характеристическая функция вектора $(W(at_1), \ldots, W(at_m))/\sqrt{a}$ равна

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\lambda_k}{\sqrt{a}}\min(at_k, at_l)\frac{\lambda_l}{\sqrt{a}}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\lambda_k \min(t_k, t_l)\lambda_l\right),$$

т.е. совпадает с $\varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, что и требовалось доказать.

Аналогично показывается, что для броуновского движения справедливо *свойство симметрии*: процесс $\{-W(t), \ t \geq 0\}$ является броуновским движением.

Наконец, для броуновского движения справедливо *свойство инверсии*: процесс $\{tW(1/t)/, \ t \geq 0\}$ (считаем, что он равен 0 при $t = 0$) является броуновским движением. Траектории этого процесса непрерывны (докажите сами непрерывность в точке $t = 0$). Характеристическая функция вектора $(t_1 W(1/t_1), \ldots, t_m W(1/t_m))$ при $t_1 > 0$ равна

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\lambda_k t_k \min\left(\frac{1}{t_k}, \frac{1}{t_l}\right)\lambda_l t_l\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\lambda_k \min\left(\frac{t_k t_l}{t_k} \wedge \frac{t_k t_l}{t_l}\right)\lambda_l\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\lambda_k \min\left(t_k, t_l\right)\lambda_l\right),$$

т.е. совпадает с $\varphi_{t_1,\ldots,t_m}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right)$, что и требовалось доказать.

В предыдущей лекции был изложен метод нахождения распределений произвольных функционалов от траекторий броуновского движения, основанный на принципе инвариантности Прохорова-Донскера. В частности было доказано, что при $u \in [0,1]$

$$\mathbf{P}\left(\mu \le u\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{u},$$

где $\mu = \lambda\left(\left\{t : t \in [0,1],\ W(t) = 0\right\}\right)$ – время пребывания выше 0 для траектории броуновского движения. Кроме того, при $x \ge 0$

$$\mathbf{P}\left(M \le x\right) = 2\Phi\left(x\right) - 1, \tag{1}$$

где $M = \sup_{t\in[0,1]} W(t)$. Обобщим соотношение (1). Положим при $t > 0$

$$M(t) = \sup_{s\in[0,t]} W(s).$$

Лемма 1. *При* $x \ge 0$ *и* $t > 0$

$$\mathbf{P}\left(M(t) > x\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right).$$

Доказательство. Поскольку $M(1) = M$, то ввиду (1)

$$\mathbf{P}\left(M(1) > x\right) = 2\left(1 - \Phi(x)\right). \tag{2}$$

По свойству автомодельности случайный процесс $\left\{W(at)/\sqrt{a},\ t \ge 0\right\}$ при $a > 0$ является броуновским движением. Следовательно,

$$\sup_{t\in[0,1]}\frac{W(at)}{\sqrt{a}} \stackrel{d}{=} \sup_{t\in[0,1]} W(t)$$

и, значит,

$$\frac{M(a)}{\sqrt{a}} \stackrel{d}{=} M(1).$$

Откуда, полагая $a = t$, находим, что

$$M(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{t}M(1). \tag{3}$$

Из соотношений (2) и (3) получаем утверждение леммы.

Обсудим свойства траекторий броуновского движения. Известно, что они являются непрерывными. Напомним, что *разбиением* отрезка $[0,1]$ называется совокупность точек $t_0, t_1, \ldots, t_m$ таких, что $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$, $m \in \mathbb{N}$. *Вариацией* функции $x \in R[0,1]$ называется выражение $Var(x) := \sup\sum_{k=0}^{m-1}\left|x\left(t_{k+1}\right) - x\left(t_k\right)\right|$, где супремум берется по всем разбиениям отрезка $[0,1]$. Очевидно, что если x является непрерывно дифференцируемой функцией, то $Var(x) < +\infty$. Следующее утверждение означает, что п.н. траектории броуновского движения не являются непрерывно дифференцируемыми.

Теорема 1. *С вероятностью* 1

$$Var\,(W) = +\infty.$$

Доказательство. Пусть $t_k = k\delta$, где $k \in \{0, \ldots, m\}$, $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$. Положим

$$\zeta_m = \sum_{k=0}^{m-1} \left(W\,(t_{k+1}) - W\,(t_k)\right)^2. \tag{4}$$

Покажем, что при $m \to \infty$

$$\zeta_m \xrightarrow{P} 1. \tag{5}$$

Заметим, что если $\xi \sim N\left(0, \sigma^2\right)$, то $\mathbf{E}\xi^2 = \sigma^2$, $\mathbf{D}\left(\xi^2\right) = \mathbf{E}\xi^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4$, поэтому, учитывая независимость слагаемых в правой части (4), находим, что

$$\mathbf{E}\zeta_m = \sum_{k=0}^{m-1} (t_{k+1} - t_k) = 1,\ \mathbf{D}\zeta_m = 2\sum_{k=0}^{m-1} (t_{k+1} - t_k)^2 = 2m\delta^2 = \frac{2}{m}.$$

Следовательно, по неравенству Чебышева при $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(|\zeta_m - 1| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbf{D}\zeta_m}{\varepsilon^2} \leq \frac{2}{\varepsilon^2 m} \to 0, \qquad m \to \infty.$$

Соотношение (5) доказано.

Теперь заметим, что

$$\zeta_m \leq Var\,(W) \max_k \left|W\,(t_{k+1}) - W\,(t_k)\right|.$$

Из соотношения (5) следует, что п.н. $\zeta_{m_l} \to 1$ для некоторой подпоследовательности $\{m_l\}$, а $\max_k |W\,(t_{k+1}) - W\,(t_k)| \to 0$ при $m \to \infty$ (в силу непрерывности траекторий броуновского движения). Откуда следует утверждение теоремы.

Перейдем к рассмотрению *закона повторного логарифма*, установленного Хинчиным.

Теорема 2. *Если* $\varepsilon \in (0, 1)$, *то* 1) *п.н. для всех достаточно больших* t

$$W\,(t) \leq (1 + \varepsilon)\sqrt{2t \ln\ln t}; \tag{6}$$

2) *п.н. существуют сколь угодно большие* t, *для которых*

$$W\,(t) \geq (1 - \varepsilon)\sqrt{2t \ln\ln t}. \tag{7}$$

Другими словами,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{W\,(t)}{\sqrt{2t \ln\ln t}} = 1. \tag{8}$$

Замечание 1. Из соотношения (8), используя свойство симметрии броуновского движения, легко получить, что

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{W(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=-1.$$

Доказательство. Положим $f(t)=\sqrt{2t\ln\ln t}$ при $t\geq e$. Сначала установим соотношение (6). Зафиксируем $a>1$. При $k\in\mathbb{N}$ положим

$$x_k=f\left(a^k\right)=\sqrt{2a^k\left(\ln k+\ln\ln a\right)}$$

и введем при $k\geq 2$ случайные события

$$A_k=\left\{M\left(a^k\right)>(1+\varepsilon)\,x_{k-1}\right\},\qquad B_k=\left\{M\left(a^{k-1},a^k\right)>(1+\varepsilon)\,x_{k-1}\right\},$$

где $M(t_1,t_2)=\sup_{t\in[t_1,t_2]}W(t)$. Ввиду леммы 1

$$\mathbf{P}(A_k)=2\left(1-\Phi\left(\frac{(1+\varepsilon)\,x_{k-1}}{\sqrt{a^k}}\right)\right).$$

По правилу Лопиталя при $x\to+\infty$

$$1-\Phi(x)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \tag{9}$$

Следовательно, при $k\to\infty$

$$\mathbf{P}(A_k)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{a^k}}{(1+\varepsilon)\,x_{k-1}}\exp\left(-\frac{(1+\varepsilon)^2\,x_{k-1}^2}{2a^k}\right)=$$

$$=\frac{1}{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{a}{\pi\left(\ln(k-1)+\ln\ln a\right)}}\frac{1}{(\ln a)^{(1+\varepsilon)^2/a}\,(k-1)^{(1+\varepsilon)^2/a}}.$$

Полагая теперь $a=1+\varepsilon$, получаем, что сходится ряд $\sum_{k=2}^{\infty}\mathbf{P}(A_k)$ и, поскольку $B_k\subset A_k$, сходится ряд $\sum_{k=2}^{\infty}\mathbf{P}(B_k)$. Но это по лемме Бореля-Кантелли означает, что для почти всех ω осуществляются все события $\overline{B_k}$, начиная с некоторого $k(\varepsilon)$, т.е. выполняется требуемое соотношение (6).

Теперь установим соотношение (7). Зафиксируем $a>1$. Рассмотрим при $k\in\mathbb{N}$ независимые события

$$C_k=\left\{W\left(a^k\right)-W\left(a^{k-1}\right)>\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)x_k\right\}.$$

Поскольку $W\left(a^k\right)-W\left(a^{k-1}\right)\sim N\left(0,a^k-a^{k-1}\right)$, то

$$\mathbf{P}(C_k)=1-\Phi\left(\frac{(1-\varepsilon/2)\,x_k}{\sqrt{a^k-a^{k-1}}}\right).$$

В силу (9) при $k\to\infty$

$$\mathbf{P}(C_k)\sim\frac{\sqrt{a^k-a^{k-1}}}{\sqrt{2\pi}\,(1-\varepsilon/2)\,x_k}\exp\left(-\frac{(1-\varepsilon/2)^2\,x_k^2}{2\left(a^k-a^{k-1}\right)}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{1-a^{-1}}}{2\sqrt{\pi}\left(1-\varepsilon/2\right)\sqrt{\ln k+\ln\ln a}}\frac{1}{(\ln a)^{(1-\varepsilon/2)^2/(1-a^{-1})}\,k^{(1-\varepsilon/2)^2/(1-a^{-1})}}.$$

При $a \geq 2/\varepsilon$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(C_k\right)$ расходится. По лемме Бореля-Кантелли это означает, что п.н. происходит бесконечное число событий C_k, т.е. существуют сколь угодно большие k, для которых

$$W\left(a^k\right)-W\left(a^{k-1}\right)>\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)x_k. \tag{10}$$

Из свойства симметрии броуновского движения и соотношения (6) следует, что п.н. при всех достаточно больших t

$$W\left(t\right)\geq-\left(1+\varepsilon\right)f\left(t\right).$$

Следовательно, п.н. при всех достаточно больших натуральных k

$$W\left(a^k\right)\geq-\left(1+\varepsilon\right)x_k. \tag{11}$$

В силу (10) и (11) п.н. существуют сколь угодно большие k, для которых выполняется неравенство

$$W\left(a^k\right)=W\left(a^{k-1}\right)+\left(W\left(a^k\right)-W\left(a^{k-1}\right)\right)\geq-\left(1+\varepsilon\right)x_{k-1}+\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)x_k.$$

Поскольку $x_k\geq\sqrt{a}x_{k-1}$ при $k\geq2$, то при достаточно больших a

$$-\left(1+\varepsilon\right)x_{k-1}+\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)x_k\geq\left(1-\varepsilon\right)x_k.$$

Таким образом, п.н. существуют сколь угодно большие k, для которых выполняется неравенство

$$W\left(a^k\right)\geq\left(1-\varepsilon\right)x_k,$$

т.е. выполняется требуемое соотношение (7). Теорема доказана.

Теорема 3 (локальный закон повторного логарифма). *П.н.*

$$\limsup_{t\to0}\frac{W\left(t\right)}{\sqrt{2t\ln\ln\left(1/t\right)}}=1,\qquad\liminf_{t\to0}\frac{W\left(t\right)}{\sqrt{2t\ln\ln\left(1/t\right)}}=-1.$$

Доказательство. По свойству инверсии процесс $\{tW\left(1/t\right),\ t\geq0\}$ является броуновским движением и, следовательно, по теореме 2

$$1=\limsup_{t\to\infty}\frac{tW\left(1/t\right)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=\limsup_{u\to0}\frac{W\left(u\right)}{\sqrt{2u\ln\ln\left(1/u\right)}}.$$

Аналогично доказывается второе утверждение. Теорема доказана.

Следствие 1. *При каждом фиксированном $t_0\geq0$ п.н. не существует производной $W'\left(t_0\right)$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим $t_0=0$. Тогда по теореме 3 для произвольного $\varepsilon\in(0,1)$ п.н. существуют сколь угодно малые $t>0$, для которых

$$\frac{W\left(t\right)}{\sqrt{2t\ln\ln\left(1/t\right)}}\geq1-\varepsilon$$

и, следовательно,

$$\frac{W(t) - W(0)}{t} \geq (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2}{t}\ln\ln\left(\frac{1}{t}\right)}.$$

Предел правой части при $t \to 0$ равен $+\infty$. Следовательно, п.н. не существует производной $W'(0)$. Пусть $t_0 > 0$. Нетрудно понять, что процесс $\left\{\widetilde{W}(t),\ t \geq 0\right\}$, где $\widetilde{W}(t) = W(t_0 + t) - W(t_0)$ при $t \geq 0$, является броуновским движением. В силу доказанного п.н. не существует производной функции $\widetilde{W}(t)$, $t \geq 0$, в нуле. Следовательно, п.н. не существует производной $W'(t_0)$. Следствие доказано.

Замечание 2. Справедлив более сильный результат: п.н. траектории броуновского движения не имеют производной ни в одной точке.

Известно, что модель броуновского движения близка к модели случайного блуждания. Оказывается, закон повторного логарифма имеет место и для случайного блуждания.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. *Тогда п.н.*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sigma\sqrt{2n\ln\ln n}} = 1, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sigma\sqrt{2n\ln\ln n}} = -1.$$

Лекция 9

Цепи Маркова

Как известно, в основе модели случайного блуждания лежит последовательность $X_1, X_2, \ldots$ независимых одинаково распределенных случайных величин. В начале двадцатого века русский математик А.А. Марков рассмотрел простое обобщение этой модели. В новой модели исходные случайные элементы $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ являются зависимыми, но степень этой зависимости является наиболее слабой из возможных.

Пусть S – некоторое конечное или счетное множество. Введем σ-алгебру $\mathcal{S}$, состоящую из всех подмножеств множества S. Рассмотрим последовательность случайных элементов $\xi_0, \xi_1, \ldots$, отображающих вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ в измеримое пространство $(S, \mathcal{S})$. По теореме произведения вероятностей при $n \in \mathbb{N}$ и $i_0, \ldots, i_n \in S$

$$\mathbf{P}\left(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_n = i_n\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\xi_0 = i_0\right) \prod_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}\left(\xi_{k+1} = i_{k+1} \mid \xi_0 = i_0, \ldots, \xi_k = i_k\right) \tag{1}$$

(считаем, что все вероятности в правой части определены). В ситуации, когда случайные величины $\xi_0, \xi_1, \ldots$ независимы,

$$\mathbf{P}\left(\xi_{k+1} = i_{k+1} \mid \xi_0 = i_0, \ldots, \xi_k = i_k\right) = \mathbf{P}\left(\xi_{k+1} = i_{k+1}\right)$$

и формула (1) принимает вид

$$\mathbf{P}\left(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_n = i_n\right) = \prod_{k=0}^{n} \mathbf{P}\left(\xi_k = i_k\right).$$

Предположим теперь, что случайный элемент ξ_{k+1} зависит от последовательности $\{\xi_0, \ldots, \xi_k\}$, но при этом

$$\mathbf{P}\left(\xi_{k+1} = i_{k+1} \mid \xi_0 = i_0, \ldots, \xi_k = i_k\right) = \mathbf{P}\left(\xi_{k+1} = i_{k+1} \mid \xi_k = i_k\right) \tag{2}$$

при произвольном $k \in \mathbb{N}_0$ и произвольных $i_0, \ldots, i_k \in S$. Если трактовать момент k как "настоящее", моменты, предшествующие k как "прошлое", а моменты, следующие за k, как "будущее", то соотношение (2) говорит о том, что при фиксированном прошлом и настоящем будущее марковской цепи зависит только от настоящего.

Определение 1. *Цепью Маркова* называется последовательность случайных элементов $\xi_0, \xi_1, \ldots$ со значениями в $(S, \mathcal{S})$, удовлетворяющая соотношению (2).

Множество S называется *множеством состояний* марковской цепи, а его элементы – *состояниями.* Марковская цепь называется *конечной* (или *счетной*), если конечно (или счетно) множество S. При $k \in \mathbb{N}$ и $i, j \in S$ положим

$$p_{ij}^{(k)} := \mathbf{P}\left(\xi_k = j \mid \xi_{k-1} = i\right).$$

(предполагается, что $\mathbf{P}\left(\xi_{k-1} = i\right) > 0$). Говорят, что $p_{ij}^{(k)}$ – *переходная вероятность* из состояния i в состояние j на k-ом шаге марковской цепи. Положим $p_i := \mathbf{P}(\xi_0 = i)$, $i \in S$. Совокупность $\{p_i,\ i \in S\}$ называется *начальным распределением* цепи Маркова.

Запишем формулу для конечномерных распределений марковской цепи через переходные вероятности и начальное распределение, используя соотношение (1): при $n \in \mathbb{N}$ и $i_0, \ldots, i_n \in S$

$$\mathbf{P}(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_n = i_n) = p_{i_0} \prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1} i_k}^{(k)}.$$

В дальнейшем рассматриваются *однородные* цепи Маркова, в которых переходные вероятности $p_{ij}^{(k)}$ не зависят от k. Для однородных марковских цепей последняя формула принимает следующий простой вид:

$$\mathbf{P}(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_n = i_n) = p_{i_0} \prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1} i_k} \tag{3}$$

при произвольном $n \in \mathbb{N}$ и произвольных $i_0, \ldots, i_n \in S$. Заметим, что

$$p_i, p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i \in S} p_i = 1,\ \sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \quad i, j \in S. \tag{4}$$

Соотношения (3) и (4) являются основой для всех последующих рассуждений. Кстати, однородная цепь Маркова может быть определена как последовательность случайных элементов $\xi_0, \xi_1, \ldots$ со значениями в $(S, \mathcal{S})$, удовлетворяющая соотношению (3) для некоторых чисел $p_i, p_{ij},\ i, j \in S$, удовлетворяющих соотношению (4).

Формула (3) хорошо объясняет, почему именно слово "цепь" использовано в определении: "сцепление" элементов $i_0, \ldots, i_n$ осуществляется через пары $(i_0, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_{n-1}, i_n)$, которые являются "звеньями" цепи.

Лемма 1. *Если $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – марковская цепь и $\mathbf{P}(\xi_l = i_0) > 0$ при некоторых $l \in \mathbb{N}_0$ и $i_0 \in S$, то для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $i_1, \ldots, i_n \in S$*

$$\mathbf{P}\left(\xi_{l+1} = i_1, \ldots, \xi_{l+n} = i_n \mid \xi_l = i_0\right) = \prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1} i_k}, \tag{5}$$

т.е. указанная вероятность не зависит от l.

Доказательство. При $l = 0$ соотношение (5) следует из (3) в результате деления на $\mathbf{P}(\xi_l = i_0)$. Пусть $l \geq 1$, тогда

$$\mathbf{P}\left(\xi_l = i_0, \xi_{l+1} = i_1, \ldots, \xi_{l+n} = i_n\right) =$$

$$= \sum_{j_0 \in S} \cdots \sum_{j_{l-1} \in S} \mathbf{P}\left(\xi_0 = j_0, \ldots, \xi_{l-1} = j_{l-1}, \xi_l = i_0, \xi_{l+1} = i_1, \ldots, \xi_{l+n} = i_n\right) =$$

$$= \sum_{j_0 \in S} \cdots \sum_{j_{l-1} \in S} p_{j_0} \left(\prod_{k=1}^{l-1} p_{j_{k-1} j_k} \right) p_{j_{l-1} i_0} \left(\prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1} i_k} \right) =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1} i_k} \right) \sum_{j_0 \in S} \cdots \sum_{j_{l-1} \in S} p_{j_0} \left(\prod_{k=1}^{l-1} p_{j_{k-1} j_k} \right) p_{j_{l-1} i_0} =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1} i_k} \right) \mathbf{P} \left(\xi_l = i_0 \right),$$

откуда делением на $\mathbf{P}(\xi_l = i_0)$ получаем (5). Лемма доказана.

Важное свойство марковской цепи состоит в том, что *при фиксированном настоящем будущее марковской цепи не зависит от прошлого.*

Утверждение 1. *Если* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *– марковская цепь и* $\mathbf{P}(\xi_l = i) > 0$ *при некоторых* $l \in \mathbb{N}_0$ *и* $i \in S$, *то для произвольных* $n \in \mathbb{N}$ *и* $A \subset S^l$, $B \subset S^n$

$$\mathbf{P} \left((\xi_0, \ldots, \xi_{l-1}) \in A, \ \ (\xi_{l+1}, \ldots, \xi_{l+n}) \in B \ \middle| \ \xi_l = i \right) =$$

$$= \mathbf{P} \left((\xi_0, \ldots, \xi_{l-1}) \in A \ \middle| \ \xi_l = i \right) \mathbf{P} \left((\xi_{l+1}, \ldots, \xi_{l+n}) \in B \ \middle| \ \xi_l = i \ \right).$$

Доказательство. В силу соотношения (3) и леммы 1 при $i_0, \ldots, i_{l+n} \in S$

$$\mathbf{P} \left(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_{l+n} = i_{l+n} \right) = p_{i_0} \prod_{k=1}^{l+n} p_{i_{k-1} i_k} = p_{i_0} \prod_{k=1}^{l} p_{i_{k-1} i_k} \prod_{k=l+1}^{l+n} p_{i_{k-1} i_k} =$$

$$= \mathbf{P} \left(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_l = i_l \right) \mathbf{P} \left(\xi_{l+1} = i_{l+1}, \ldots, \xi_{l+n} = i_{l+n} \ \middle| \ \xi_l = i_l \right).$$

Полагая $i_l = i$ и суммируя это равенство по всем $(i_0, \ldots, i_{l-1}) \in A$ и всем $(i_{l+1}, \ldots, i_{l+n}) \in B$, находим, что

$$\mathbf{P} \left((\xi_0, \ldots, \xi_{l-1}) \in A, \ \xi_l = i, \ \ (\xi_{l+1}, \ldots, \xi_{l+n}) \in B \right) =$$

$$= \mathbf{P} \left((\xi_0, \ldots, \xi_{l-1}) \in A, \ \xi_l = i \right) \mathbf{P} \left((\xi_{l+1}, \ldots, \xi_{l+n}) \in B \ \middle| \ \xi_l = i \ \right). \qquad (6)$$

Разделив последнее равенство на $\mathbf{P}(\xi_l = i)$, получаем требуемое утверждение.

Следующее утверждение, развивающее соотношение (2), означает, что *при фиксированном прошлом и настоящем будущее зависит только от настоящего.*

Утверждение 2. *Если* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *– марковская цепь, то для произвольных натуральных чисел* l и n, *произвольных множеств* $A \subset S^l$ и $B \subset S^n$, *произвольного состояния* i, *таких что* $\mathbf{P} \left((\xi_0, \ldots, \xi_{l-1}) \in A, \ \xi_l = i \right) \neq 0$,

$$\mathbf{P} \left((\xi_{l+1}, \ldots, \xi_{l+n}) \in B \ \middle| \ \ (\xi_0, \ldots, \xi_{l-1}) \in A, \ \xi_l = i \right) =$$

$$= \mathbf{P} \left((\xi_{l+1}, \ldots, \xi_{l+n}) \in B \ \middle| \ \xi_l = i \ \right).$$

Доказательство. Разделив (6) на $\mathbf{P}\left((\xi_0, \ldots, \xi_{l-1}) \in A,\ \xi_l = i\right)$, получаем требуемое утверждение.

Наряду с переходными вероятностями за один шаг рассмотрим *вероятность перехода за n шагов* из состояния $i \in S$ в состояние $j \in S$

$$p_{ij}(n) := \mathbf{P}\left(\xi_n = j \mid \xi_0 = i\right), \qquad n \in \mathbb{N}$$

(предполагается, что $\mathbf{P}(\xi_0 = i) > 0$). Отметим, что при каждом $l \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{P}\left(\xi_{l+n} = j \bigm| \xi_l = i\right) = \mathbf{P}\left(\xi_n = j \mid \xi_0 = i\right)$$

и, следовательно,

$$p_{ij}(n) = \mathbf{P}\left(\xi_{l+n} = j \bigm| \xi_l = i\right) \tag{7}$$

(предполагается, что $\mathbf{P}(\xi_l = i) > 0$). Действительно, в силу леммы 1

$$\mathbf{P}\left(\xi_{l+n} = j \bigm| \xi_l = i\right) =$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1} \in S} \mathbf{P}\left(\xi_{l+1} = i_1, \ldots, \xi_{l+n-1} = i_{n-1}, \xi_{l+n} = j \bigm| \xi_l = i\right) =$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1} \in S} \mathbf{P}\left(\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = j \bigm| \xi_0 = i\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\xi_n = j \mid \xi_0 = i\right).$$

Следующее утверждение указывает, как находить конечномерные распределения марковской цепи.

Утверждение 3. *Если $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ – марковская цепь, то для произвольных $r \in \mathbb{N}_0$, состояний $i_0, i_1, \ldots, i_r \in S$ и моментов времени $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ $(0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_r)$*

$$\mathbf{P}\left(\xi_{n_0} = i_0, \xi_{n_1} = i_1, \ldots, \xi_{n_r} = i_r\right) = p_{i_0} \prod_{k=1}^{r} p_{i_{k-1} i_k}\left(n_k - n_{k-1}\right). \tag{8}$$

Доказательство. По теореме умножения вероятностей

$$\mathbf{P}\left(\xi_{n_0} = i_0, \xi_{n_1} = i_1, \ldots, \xi_{n_r} = i_r\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{r} \mathbf{P}\left(\xi_{n_k} = i_k \bigm| \xi_{n_0} = i_0, \xi_{n_1} = i_1, \ldots, \xi_{n_{k-1}} = i_{k-1}\right).$$

Осталось заметить, что в силу утверждения 2 и соотношения (7)

$$\mathbf{P}\left(\xi_{n_k} = i_k \bigm| \xi_{n_0} = i_0, \xi_{n_1} = i_1, \ldots, \xi_{n_{k-1}} = i_{k-1}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\xi_{n_k} = i_k \bigm| \xi_{n_{k-1}} = i_{k-1}\right) = p_{i_{k-1} i_k}\left(n_k - n_{k-1}\right).$$

Утверждение доказано.

Положим 1) $p_{ii}(0) = 1$ при $i \in S$ и 2) $p_{ij}(0) = 0$ при разных $i, j \in S$.

Следствие 1. *Пусть $i, j \in S$ и $n \in \mathbb{N}$. Для каждого целого l, такого что $0 \leq l \leq n$, справедливо равенство*

$$p_{ij}(n) = \sum_{k \in S} p_{ik}(l)\, p_{kj}(n-l). \tag{9}$$

Доказательство. События $\{\xi_l = k\}$ при разных $k \in S$ попарно несовместны, поэтому

$$\mathbf{P}(\xi_n = j \mid \xi_0 = i) = \sum_{k \in S} \mathbf{P}(\xi_l = k,\ \xi_n = j \mid \xi_0 = i).$$

Осталось учесть, что ввиду соотношения (8) при $r = 2$

$$\mathbf{P}(\xi_l = k,\ \xi_n = j \mid \xi_0 = i) = p_{ik}(l)\, p_{kj}(n-l).$$

Утверждение доказано.

Замечание 1. Соотношение (9) называется *уравнением Колмогорова-Чепмена*. Оно позволяет вычислять переходные вероятности за n шагов, зная переходные вероятности за меньшее число шагов.

Переходные вероятности удобно представлять в матричном виде. С этой целью пронумеруем все элементы множества состояний и будем считать, что либо $S = \{1, \ldots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$, в случае конечной марковской цепи, либо $S = \mathbb{N}$ в случае счетной марковской цепи.

Пусть марковская цепь $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ является конечной и $S = \{1, \ldots, m\}$, где $m \in \mathbb{N}$. Назовем *матрицей переходных вероятностей* матрицу P размера $m \times m$ с элементами p_{ij}, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, т.е.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}.$$

Элементы этой матрицы неотрицательны и сумма элементов каждой строки равна 1. Такие матрицы называются *стохастическими*.

В случае, когда $S = \mathbb{N}$, матрица переходных вероятностей определяется аналогично (она в этом случае будет бесконечной).

Аналогично матрице переходных вероятностей введем для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ матрицу переходных вероятностей за n шагов $P(n)$ (в случае, когда $S = \{1, \ldots, m\}$, это матрица размера $m \times m$ элементами которой являтся числа $p_{ij}(n)$, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$). Заметим, что эта матрица также является стохастической. В силу уравнения Колмогорова-Чепмена при $n \in \mathbb{N}$

$$P(n) = P(n-1)\, P = P(n-2)\, P^2 = P^n.$$

Примеры. а) *Случайное блуждание.* Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих два значения: $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_1 = -1) = q$, $p + q = 1$. Положим $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ называется *простым* случайным блужданием. Частный случай такого блуждания, когда $p = q = 1/2$, рассматривался ранее (см. лекцию 7). Множеством состояний является $\mathbb{Z}$. Покажем, что $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ образует марковскую цепь. Действительно, пусть $i_0 = 0, i_1, \ldots, i_n$ – возможный вариант траектории случайного блуждания $S_0, S_1, \ldots, S_n$, тогда

$$\mathbf{P}\left(S_0 = i_0, S_1 = i_1, \ldots, S_n = i_n\right) = \mathbf{P}\left(X_k = i_k - i_{k-1},\ k \in \{1, \ldots, n\}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(X_1 = i_k - i_{k-1}\right).$$

Это означает, что $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ образует цепь Маркова с начальным распределением $p_0 = 1$, $p_1 = p_2 \ldots = 0$ и переходными вероятностями $p_{ij} = \mathbf{P}\left(X_1 = j - i\right)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, т.е.

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & j = i + 1; \\ q, & j = i - 1; \\ 0, & j \notin \{i - 1, i + 1\}. \end{cases} \tag{10}$$

Таким образом, марковская цепь (иногда говорят "движущаяся частица") совершает переходы только в соседние состояния, причем переход направо совершается с вероятностью p, а налево – с вероятностью q.

б) *Случайное блуждание с отражением* в точке 0. В отличие от прошлого примера предположим, что частица стартует из точки $l \in \mathbb{N}$. Переходные вероятности p_{ij} при $i \in \mathbb{N}$ имеют вид (10). Но попав в состояние 0, частица в следующий целый момент времени либо переходит в состояние 1 с вероятностью p, либо остается в состоянии 0 с вероятностью q. Следовательно,

$$p_{0j} = \begin{cases} p, & j = 1; \\ q, & j = 0; \\ 0, & j \notin \{0, 1\}. \end{cases}$$

Множеством возможных состояний является $\mathbb{N}_0$. Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{pmatrix}$$

(первым состоянием в $\mathbb{N}_0$ является нуль, вторым – единица и т.д.).

в) *Случайное блуждание с поглощением* в точке 0. В отличие от прошлого примера частица, попав в состояние 0, остается там навсегда. Итак, переходные вероятности p_{ij} при $i \in \mathbb{N}$ имеют вид (10), но $p_{00} = 1$ и $p_{0j} = 0$ при $j \neq 0$. Множеством возможных состояний является $\mathbb{N}_0$. Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{pmatrix}.$$

г) *Случайное блуждание с двумя экранами.* В отличие от двух предыдущих примеров предположим, что блуждание, помимо нуля, имеет еще один экран в точке $m \in \mathbb{N}$, причем $m > l$. Предположим, например, что оба экрана являются отражающими. Это означает, что блуждающая частица до момента попадания в состояния 0 или m, движется так же, как в случае простого случайного блуждания. При попадании в состояние 0 частица в следующий целый момент времени либо остается в этом состоянии с вероятностью q, либо переходит в состояние 1 с вероятностью p. При попадании в состояние m в следующий целый момент времени частица либо остается на месте с вероятностью p, либо переходит в состояние $(m-1)$ с вероятностью q. Множеством состояний является $\{0, \dots, m\}$. Переходная матрица размером $(m+1) \times (m+1)$ имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q & p \end{pmatrix}.$$

д) *Стохастически рекурсивная последовательность.* Пусть $X_1, X_2, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Пусть S – конечное или счетное множество состояний. Пусть f – измеримое отображение $S \times \mathbb{R}$ в S. Положим при $n \in \mathbb{N}$

$$\xi_n = f\left(\xi_{n-1}, X_n\right),$$

при этом будем считать, что ξ_0 является случайным элементом со значениями в $(S, \mathcal{S})$ и не зависит от последовательности $\{X_n\}$.

Оказывается, посследовательность $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ является марковской цепью. Действительно, при $i_0, \dots, i_k \in S$, $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}\left(\xi_k = i_k \mid \xi_0 = i_0, \dots, \xi_{k-1} = i_{k-1}\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(f\left(\xi_{k-1}, X_k\right) \mid \xi_0 = i_0, \dots, \xi_{k-1} = i_{k-1}\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(f\left(i_{k-1}, X_k\right) \mid \xi_0 = i_0, \dots, \xi_{k-1} = i_{k-1}\right).$$

Произошло или нет событие $\left\{\xi_0 = i_0, \dots, \xi_{k-1} = i_{k-1}\right\}$, целиком и полностью определяется значениями случайных элементов $\xi_0, X_1, \dots, X_{k-1}$, поэтому это событие не зависит от случайной величины X_k. Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(f\left(i_{k-1}, X_k\right) = i_k \mid \xi_0 = i_0, \dots, \xi_{k-1} = i_{k-1}\right) = \mathbf{P}\left(f\left(i_{k-1}, X_k\right) = i_k\ \right).$$

Итак,

$$\mathbf{P}\left(\xi_k = i_k \mid \xi_0 = i_0, \dots, \xi_{k-1} = i_{k-1}\right) = \mathbf{P}\left(f\left(i_{k-1}, X_k\right) = i_k\ \right). \tag{11}$$

Аналогично

$$\mathbf{P}\left(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}\right) = \mathbf{P}\left(f\left(\xi_{k-1}, X_k\right) \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(f\left(i_{k-1}, X_k\right) \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}\right) = \mathbf{P}\left(f\left(i_{k-1}, X_k\right) = i_k\ \right). \tag{12}$$

Из соотношений (11), (12) следует, что

$$\mathbf{P}\left(\xi_k = i_k \mid \xi_0 = i_0, \ldots, \xi_{k-1} = i_{k-1}\right) = \mathbf{P}\left(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}\right),$$

что и требовалось доказать.

Лекция 10

Классификация состояний марковской цепи

Рассмотрим марковскую цепь $\{\xi_n\}$ с множеством состояний S. Познакомимся с классификацией состояний марковской цепи, предложенной Колмогоровым. Эта классификация зависит только от переходных вероятностей и не зависит от начального распределения марковской цепи, поэтому будем считать для одной и той же марковской цепи возможны различные начальные распределения. В случае, когда требуется подчеркнуть, что *исходное* состояние марковской цепи есть $i \in S$ (это означает, что $\xi_0 = i$) используются символы $\mathbf{P}^{(i)}$ и $\mathbf{E}^{(i)}$ вместо обычных $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$.

Будем трактовать марковскую цепь как движение некоторой частицы, совершающей переходы из одного состояния в другое в целые моменты времени.

Сначала рассмотрим "грубую" классификацию, основанную только на знании того, какие переходные вероятности положительны, а какие – нет.

Определение 1. Говорят, что состояние i *предшествует* состоянию j (или j *следует* за i), если $p_{ij}(n) > 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}_0$. Обозначается это так: $i \to j$. Если $i \to j$ и $j \to i$, то состояния i и j называют *сообщающимися.* Обозначается это так: $i \leftrightarrow j$.

Итак, $i \to j$ означает, что частица, выходя из состояния i, имеет шанс попасть в состояние j за конечное число переходов (шагов). Ясно, что отношение $\leftrightarrow$ является отношением эквивалентности (в частности, $i \leftrightarrow i$, поскольку считается, что $p_{ii}(0) = 1$ и $p_{ij}(0) = 0$ при $j \neq i$, $i, j \in S$). В соответствии с этим отношением множество состояний марковской цепи разбивается на непересекающие классы сообщающихся между собой состояний. Если у частицы есть шанс попасть из какого-либо состояния одного класса в какое-либо состояние другого класса, то у нее нет никакого шанса возвратиться в прежний класс (в противном случае в новом классе найдется состояние, сообщающееся с состояниями старого класса). Таким образом, движение частицы разбивается на последовательные участки движения в различных классах, причем без повторного возвращения в предыдущие классы.

Определение 2. В случае, когда множество состояний состоит из одного класса сообщающихся состояний, марковская цепь называется *неприводимой.*

Другими словами, марковская цепь является неприводимой, если все ее состояния являются сообщающимися.

Определение 3. Класс сообщающихся состояний называется *замкнутым*, если ни одно состояние, не входящее в этот класс, не следует ни за одним состоянием из этого класса. Класс сообщающихся состояний, не являющийся замкнутым, называется *открытым.*

Определение 4. Состояние i называется *несущественным*, если существует такое состояние j, что i предшествует j, но i не следует за j. Состояние является *существенным*, если оно не является несущественным.

Очевидно, что если состояние принадлежит одному из замкнутых классов, оно является существенным. Если же состояние принадлежит одному из открытых классов, оно является несущественным.

Определение 5. В случае, когда замкнутый класс состоит из одного состояния, оно называется *поглощающим*.

***Утверждение* 1.** *Если исходное состояние марковской цепи принадлежит замкнутому классу, то она с вероятностью* 1 *не покинет этот класс никогда, и на множестве состояний, суженном до этого класса, она является неприводимой.*

***Утверждение* 2.** *Если исходное состояние марковской цепи принадлежит конечному открытому классу, то она с вероятностью* 1 *покинет его навсегда.*

Утверждение 3. *Если марковская цепь конечна, то имеется хотя бы один замкнутый класс и с вероятностью* 1 *цепь рано или поздно оказывается в одном из замкнутых классов.*

Утверждение 1 очевидно. Поскольку в открытом классе все состояния несущественные, а число посещений марковской цепью каждого несущественного состояния конечно (см. замечание 1), то в случае, когда этот класс конечен, время пребывания в нем конечно, что доказывает утверждение 2. Утверждение 3 следует из того, что в случае конечной марковской цепи число различных классов конечно и все они конечны, поэтому, если они открыты, то по утверждению 2 цепь покинет все эти классы навсегда, что невозможно.

Примеры. а) Пусть переходная матрица имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,2 & 0,45 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Указанная цепь состоит из трех классов: $\{1,2\}$, $\{3\}$ и $\{4\}$. Классы $\{1,2\}$ и $\{4\}$ являются открытыми, класс $\{3\}$ – замкнутым. Состояния 1, 2, 4 являются несущественными, состояние 3 является поглощающим.

б) Пусть случайное блуждание с поглощением в точке 0 стартует из точки $l \in \mathbb{N}$ и при этом $p > q$. Все положительные состояния образуют открытый класс и являются несущественными. Тем не менее, с положительной вероятностью частица никогда не попадет в замкнутый класс, т.е. состояние 0, и, тем самым, все время будет находиться в несущественных состояниях.

Более тонкая *классификация состояний* марковской цепи требует более точного представления о переходных вероятностях.

Определение 6. Состояние $i \in S$ называется *возвратным*, если

$$\mathbf{P}^{(i)}\left(\exists n \in \mathbb{N} : \xi_n = i\right) = 1.$$

Если же указанная вероятность меньше 1, состояние i называется *невозвратным*.

Теорема 1 (критерий возвратности). *Состояние $i \in S$ марковской цепи $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ является возвратным тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)$ расходится.*

Сначала установим вспомогательное утверждение. Пусть цепь стартует из состояния i. Рассмотрим моменты $T_1, T_2, \ldots$ первого, второго и т.д. возвращения марковской цепи в состояние i, т.е.

$$T_1 = \min\{n > 0 : \xi_n = i\}, \; T_2 = \min\{n > T_1 : \xi_n = i\}, \; \ldots .$$

(если при некотором $k \in \mathbb{N}$ случайная величина T_k бесконечна, то бесконечны и случайные величины $T_{k+1}, T_{k+2}, \ldots$). Если i – возвратное состояние, то случайная величина T_1 п.н. конечна, а если i – невозвратное состояние, то случайная величина T_1 с положительной вероятностью бесконечна. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\tau_1, \tau_2, \ldots$, распределенных, как T_1.

Лемма 1. *Справедливо равенство по распределению*

$$(T_1, T_2, T_3, \ldots) \stackrel{d}{=} (\tau_1, \tau_1 + \tau_2, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \ldots). \tag{1}$$

Доказательство. Распределения случайных последовательностей совпадают, если совпадают их конечномерные распределения. Поэтому соотношение (1) эквивалентно совокупности соотношений

$$(T_1, T_2, \ldots, T_k) \stackrel{d}{=} (\tau_1, \tau_1 + \tau_2, \ldots, \tau_1 + \ldots + \tau_k), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Покажем справедливость соотношения (2) при $k = 2$. При $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}^{(i)}(T_1 = l_1, T_2 = l_1 + l_2) =$$

$$= \mathbf{P}^{(i)}\left(\xi_1 \neq i, \ldots, \xi_{l_1 - 1} \neq i; \xi_{l_1} = i; \xi_{l_1+1} \neq i, \ldots, \xi_{l_1 + l_2 - 1} \neq i; \xi_{l_1 + l_2} = i\right) =$$

$$= \mathbf{P}^{(i)}\left(\xi_1 \neq i, \ldots, \xi_{l_1 - 1} \neq i; \xi_{l_1} = i\right) \times$$

$$\times \mathbf{P}^{(i)}\left(\xi_{l_1+1} \neq i, \ldots, \xi_{l_1 + l_2 - 1} \neq i; \xi_{l_1 + l_2} = i \;\middle|\; \xi_1 \neq i, \ldots, \xi_{l_1 - 1} \neq i; \xi_{l_1} = i;\right) =$$

$$= \mathbf{P}^{(i)}\left(\xi_1 \neq i, \ldots, \xi_{l_1 - 1} \neq i; \xi_{l_1} = i\right) \times$$

$$\times \mathbf{P}\left(\xi_{l_1+1} \neq i, \ldots, \xi_{l_1 + l_2 - 1} \neq i; \xi_{l_1 + l_2} = i \;\middle|\; \xi_{l_1} = i\right).$$

(последнее равенство объясняется утверждением 2 лекции 9). Заметим, что предпоследняя вероятность по определению T_1 равна $\mathbf{P}^{(i)}(T_1 = l_1)$, а последняя вероятность в силу леммы 1 лекции 9 равна

$$\mathbf{P}^{(i)}\left(\xi_1 \neq i, \ldots, \xi_{l_2 - 1} \neq i; \xi_{l_2} = i\right) = \mathbf{P}^{(i)}(T_1 = l_2).$$

Итак, при $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}^{(i)}(T_1 = l_1, T_2 = l_1 + l_2) = \mathbf{P}(\tau_1 = l_1)\, \mathbf{P}(\tau_2 = l_2) =$$

$$= \mathbf{P}(\tau_1 = l_1, \tau_2 = l_2) = \mathbf{P}(\tau_1 = l_1, \tau_1 + \tau_2 = l_1 + l_2). \tag{3}$$

Далее, при $l_1 \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}^{(i)}\left(T_1 = l_1, T_2 = +\infty\right) = \mathbf{P}^{(i)}\left(T_1 = l_1\right) - \mathbf{P}^{(i)}\left(T_1 = l_1, T_2 < +\infty\right) =$$

$$= \mathbf{P}^{(i)}\left(T_1 = l_1\right) - \sum_{l_2=1}^{+\infty} \mathbf{P}^{(i)}\left(T_1 = l_1, T_2 = l_1 + l_2\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\tau_1 = l_1\right) - \sum_{l_2=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\tau_1 = l_1, \tau_1 + \tau_2 = l_1 + l_2\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\tau_1 = l_1\right) - \mathbf{P}\left(\tau_1 = l_1, \tau_1 + \tau_2 < +\infty\right) = \mathbf{P}\left(\tau_1 = l_1, \tau_1 + \tau_2 = +\infty\right).$$

Это означает, что соотношение (3) справедливо и при $l_1 \in \mathbb{N}$, $l_2 = +\infty$. Таким образом, соотношение (2) при $k = 2$ доказано. При $k > 2$ соотношение (2) доказывается по индукции.

Доказательство теоремы 1. Положим при $N \in \mathbb{N}$

$$\nu\left(N\right) = \max\left\{k > 0 : T_k \leq N\right\}.$$

Ясно, что случайная величина $\nu\left(N\right)$ равна числу попаданий частицы в состояние i до момента N. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ введем случайную величину I_n, равную 1, если $\xi_n = i$, и равную 0, если $\xi_n \neq i$. Ясно, что случайная величина I_n равна числу попаданий частицы в состояние i в момент n. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{N} I_n = \nu\left(N\right).$$

Но $\mathbf{E}^{(i)} I_n = p_{ii}\left(n\right)$, следовательно,

$$\mathbf{E}^{(i)}\nu\left(N\right) = \mathbf{E}^{(i)} \sum_{n=1}^{N} I_n = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{E}^{(i)} I_n = \sum_{n=1}^{N} p_{ii}\left(n\right).$$

Очевидно, что $\nu\left(N\right)$ не убывает по N, поэтому по теореме о монотонной сходимости

$$\mathbf{E}^{(i)} \lim_{N\to\infty} \nu\left(N\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbf{E}^{(i)}\nu\left(N\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}\left(n\right). \tag{4}$$

Пусть состояние i возвратно. Это означает, что $T_1 < +\infty$ с вероятностью 1. Следовательно, с вероятностью 1 конечны все случайные величины $\tau_1, \tau_2, \ldots$ и, значит (см. (1)), конечны все случайные величины $T_1, T_2, \ldots$. Следовательно, $\lim_{N\to\infty} \nu\left(N\right) = +\infty$ и поэтому (см. (4)) $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}\left(n\right) = +\infty$.

Пусть теперь состояние i невозвратно. Тогда $\mathbf{P}^{(i)}\left(T_1 = +\infty\right) := p > 0$. Пусть случайное событие A_k, $k \in \mathbb{N}$, означает, что случайные величины $T_1, \ldots, T_{k-1}$ конечны, а $T_k = +\infty$. Положим $q = 1 - p$. Очевидно, что

$$\mathbf{P}^{(i)}\left(A_k\right) = \mathbf{P}\left(\tau_1 < +\infty, \ldots, \tau_{k-1} < +\infty, \tau_k = +\infty\right) = q^{k-1}p, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = 1$, то события $A_1, A_2, \ldots$ образуют полную группу событий. Если произошло событие A_k, то $\lim_{N\to\infty} \nu\left(N\right) = k - 1$. Следовательно,

$$\mathbf{E}^{(i)} \lim_{N\to\infty} \nu\left(N\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k-1\right) \mathbf{P}^{(i)}\left(A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k-1\right) q^{k-1}p < +\infty.$$

Откуда следует (см. (4)), что $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) < +\infty$. Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказательства вытекает, что если исходное состояние марковской цепи является возвратным, то частица посетит это состояние бесконечное число раз. Если же исходное состояние является невозвратным, то число посещений будет конечно. Ясно, что всякое несущественное состояние является невозвратным, поэтому частица посетит его конечное число раз.

Рассмотрим возвратное состояние $i \in S$. Введенная случайная величина T_1 позволяет различать *положительно возвратные* состояния, когда $\mathbf{E}^{(i)} T_1 < +\infty$, и *нуль возвратные* состояния, когда $\mathbf{E}^{(i)} T_1 = +\infty$.

Задача. Доказать, что возвратное состояние $i \in S$ является положительно возвратным тогда и только тогда, когда $\limsup_{n\to\infty} p_{ii}(n) > 0$.

Вспомним определения, относящиеся к теории вероятностей. Говорят, что случайная величина является *целочисленной*, если она принимает только значения из $\mathbb{Z}$. Назовем *носителем распределения* целочисленной случайной величины ξ такое множество $D \subset \mathbb{Z}$, что $\mathbf{P}(\xi = n) > 0$ при $n \in D$ и $\mathbf{P}(\xi = n) = 0$ при $n \in \mathbb{Z} \setminus D$. Если носитель D распределения целочисленной случайной величины ξ является подмножеством множества $\{0, \pm d, \pm 2d, \ldots\}$ при некотором $d \in \mathbb{N}$, то распределение случайной величины ξ называется *арифметическим с шагом* d. Ясно, что каждая целочисленная случайная величина имеет арифметическое распределение с шагом 1. Если имеется несколько различных шагов $d_1, d_2, \ldots$, то, как правило, выбирается наибольший из них, который называется *максимальным шагом* распределения. Нетрудно понять, что если d – максимальный шаг распределения с носителем D, то d является наибольшим общим делителем (НОД) всех $n \in D$, т.е. $d =$НОД(D).

Пусть i – возвратное состояние. Ясно, что случайная величина T_1 является целочисленной и, следовательно, имеет арифметическое распределение с некоторым максимальным шагом d. Говорят, что состояние i является *периодическим*, если $d > 1$, при этом число d называется *периодом* состояния i. Если $d = 1$, то состояние i называется *непериодическим*.

Теорема 2. *Возвратное состояние i является периодическим с периодом $d > 1$ тогда и только тогда, когда*

$$\text{НОД}\{n > 0 : p_{ii}(n) > 0\} = d. \tag{5}$$

Доказательство. Покажем, что соотношение (5) справедливо при любом $d \geq 1$ (это и будет означать справедливость теоремы). Пусть цепь $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ стартует из состояния i. Событие $\{\xi_n = i\}$, где $n \in \mathbb{N}$, происходит тогда и только тогда, когда происходит одно из событий $\{T_k = n\}$, $k \in \mathbb{N}$, поэтому

$$\{\xi_n = i\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{T_k = n\}.$$

Следовательно,

$$p_{ii}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}^{(i)}(T_k = n).$$

Таким образом, $p_{ii}(n) > 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}^{(i)}(T_k = n) > 0$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Обозначим D_k – носитель распределения случайной величины T_k. Из сказанного следует, что

$$\{n > 0 : p_{ii}(n) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k. \tag{6}$$

Если случайная величина T_1 имеет арифметическое распределение с максимальным шагом d, то при каждом $k \in \mathbb{N}$ случайная величина T_k также имеет арифметическое распределение с шагом d (докажите это), следовательно, $D_k \subset \{0, \pm d, \pm 2d, \ldots\}$. Таким образом, $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \subset \{0, \pm d, \pm 2d, \ldots\}$ и, значит,

$$\text{НОД}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k\right) \geq d.$$

С другой стороны,

$$\text{НОД}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k\right) \leq \text{НОД}(D_1) = d.$$

Итак,

$$\text{НОД}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k\right) = d. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует соотношение (5). Теорема доказана.

В заключение рассмотрим *свойство солидарности* состояний неприводимой марковской цепи.

Теотема 3. *Если марковская цепь неприводима, то все ее состояния однотипны (либо все возвратные, либо все невозвратные; либо все положительно возвратные, либо все нуль возвратные; либо все периодические с одним периодом, либо все непериодические).*

Доказательство. В самом деле, пусть i, j – сообщающиеся состояния. Тогда существуют такие $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, что $p_{ij}(n_1) > 0$ и $p_{ji}(n_2) > 0$. Ясно (см. утверждение 3 лекции 9 при $r = 3$), что при $n \in \mathbb{N}$

$$p_{ii}(n_1 + n_2 + n) \geq p_{ij}(n_1)\, p_{jj}(n)\, p_{ji}(n_2),$$

Аналогично,

$$p_{jj}(n_1 + n_2 + n) \geq p_{ji}(n_2)\, p_{ii}(n)\, p_{ij}(n_1).$$

Следовательно, при $n > n_1 + n_2$

$$c^{-1} p_{ii}(n_1 + n_2 + n) \geq p_{jj}(n) \geq c p_{ii}(n - n_1 - n_2)$$

где постоянная $c := p_{ij}(n_1)\, p_{ji}(n_2)$ положительна и не зависит от n. Но это означает, что оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)$ сходятся или расходятся одновременно. Значит, состояния i, j возвратны или невозвратны одновременно. Следовательно, все состояния неприводимой марковской цепи возвратны или невозвратны одновременно. Аналогично проверяются остальные утверждения теоремы.

Лекция 11

Предельные теоремы для цепей Маркова

Изучим асимптотические свойства марковских цепей в случае, когда временная переменная стремится к бесконечности.

Теорема 1 (Марков А.А.). *Рассмотрим конечную марковскую цепь с множеством состояний* $S = \{1, \ldots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$. *Пусть при некотором* $n_0 \in \mathbb{N}$ *все переходные вероятности* $p_{ij}(n_0)$, $i, j \in S$, *положительны. Тогда для произвольных фиксированных* $i, j \in S$ *существует положительный предел*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) := \pi_j, \tag{1}$$

не зависящий от i. *Набор чисел* $\pi_1, \ldots \pi_j$ *является единственным решением системы уравнений*

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = 1; \qquad \sum_{k=1}^{m} p_{kj} x_k = x_j, \quad j \in S. \tag{2}$$

Доказательство. Положим при $j \in S$ и $n \in \mathbb{N}$

$$m_j(n) = \min_{i\in S} p_{ij}(n), \qquad M_j(n) = \max_{i\in S} p_{ij}(n).$$

Ввиду уравнения Колмогорова-Чепмена $p_{ij}(n+1) = \sum_{k=1}^{m} p_{ik} p_{kj}(n)$, поэтому

$$\sum_{k=1}^{m} p_{ik} m_j(n) \le p_{ij}(n+1) \le \sum_{k=1}^{m} p_{ik} M_j(n).$$

Откуда, учитывая, что $\sum_{k=1}^{m} p_{ik} = 1$, находим, что

$$m_j(n) \le p_{ij}(n+1) \le M_j(n).$$

Следовательно,

$$m_j(n) \le m_j(n+1) \le M_j(n+1) \le M_j(n).$$

Таким образом, обе последовательности $\{m_j(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ и $\{M_j(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ монотонны и ограничены. Следовательно, существуют пределы этих последовательностей при $n \to \infty$. Покажем, что эти пределы совпадают.

Пусть μ – минимальное по всем $i, j \in S$ значение переходных вероятностей $p_{ij}(n_0)$. По условию теоремы $0 < \mu \le 1$. В силу уравнения Колмогорова-Чепмена при $i, j \in S$

$$p_{ij}(n_0 + n) = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}(n_0) p_{kj}(n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(p_{ik}\left(n_0\right) - \mu p_{jk}\left(n\right)\right) p_{kj}\left(n\right) + \mu \sum_{k=1}^{m} p_{jk}\left(n\right) p_{kj}\left(n\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(p_{ik}\left(n_0\right) - \mu p_{jk}\left(n\right)\right) p_{kj}\left(n\right) + \mu p_{jj}\left(2n\right). \tag{3}$$

Очевидно, что при $i, j, k \in S$

$$p_{ik}\left(n_0\right) - \mu p_{jk}\left(n\right) \geq p_{ik}\left(n_0\right) - \mu \geq 0. \tag{4}$$

Из соотношений (3), (4) следует, что

$$p_{ij}\left(n_0 + n\right) \geq \sum_{k=1}^{m} \left(p_{ik}\left(n_0\right) - \mu p_{jk}\left(n\right)\right) m_j\left(n\right) + \mu p_{jj}\left(2n\right) =$$

$$= \left(1 - \mu\right) m_j\left(n\right) + \mu p_{jj}\left(2n\right).$$

Подбирая соответствующим образом $i \in S$, получаем, что

$$m_j\left(n_0 + n\right) \geq \left(1 - \mu\right) m_j\left(n\right) + \mu p_{jj}\left(2n\right). \tag{5}$$

Аналогично показывается, что

$$M_j\left(n_0 + n\right) \leq \left(1 - \mu\right) M_j\left(n\right) + \mu p_{jj}\left(2n\right). \tag{6}$$

Из соотношений (5)-(6) следует, что

$$M_j\left(n_0 + n\right) - m_j\left(n_0 + n\right) \leq \left(1 - \mu\right) \left(M_j\left(n\right) - m_j\left(n\right)\right). \tag{7}$$

Если положить $n = kn_0$, $k \in \mathbb{N}$, то из (7) получаем, что

$$0 \leq M_j\left(\left(k+1\right) n_0\right) - m_j\left(\left(k+1\right) n_0\right) \leq \left(1 - \mu\right)^k \left(M_j\left(n_0\right) - m_j\left(n_0\right)\right). \tag{8}$$

Поскольку $0 \leq 1 - \mu < 1$, то из (8) следует, что пределы $\lim_{n\to\infty} m_j\left(n\right)$ и $\lim_{n\to\infty} M_j\left(n\right)$ совпадают при каждом $j \in S$. Обозначим их общее значение π_j (поскольку $m_j\left(n_0\right) > 0$ и $m_j\left(n\right) \geq m_j\left(n_0\right)$ при $n > n_0$, то $\pi_j > 0$).

Из сказанного, учитывая, что $m_j\left(n\right) \leq p_{ij}\left(n\right) \leq M_j\left(n\right)$, получаем (1).

Поскольку $\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\left(n\right) = 1$ и $p_{ij}\left(n+1\right) = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\left(n\right) p_{kj}$, $i, j \in S$, то, переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая (1), находим, что

$$\sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1, \qquad \pi_j = \sum_{k=1}^{m} p_{kj} \pi_k, \quad j \in S.$$

Таким образом, набор чисел $\pi_1, \ldots, \pi_m$ является решением системы уравнений (2).

Пусть некоторый набор чисел $x_1, \ldots, x_m$ является решением системы уравнений (2). Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$x_j = \sum_{k=1}^{m} p_{kj}\left(n\right) x_k. \tag{9}$$

Соотношение (9) доказывается по индукции. При $n = 1$ оно справедливо ввиду (2). Осталось показать, что если (9) справедливо при некотором $n \in \mathbb{N}$, то оно справедливо при $(n+1)$. В самом деле,

$$\sum_{k=1}^{m} p_{kj}(n+1)\, x_k = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} p_{kl}(n)\, p_{lj} x_k = \sum_{l=1}^{m} p_{lj} \sum_{k=1}^{m} p_{kl}(n)\, x_k = \sum_{l=1}^{m} p_{lj} x_l = x_j.$$

Переходя в (9) к пределу при $n \to \infty$ и учитывая (1), находим, что

$$x_j = \sum_{k=1}^{m} \pi_j x_k = \pi_j \sum_{k=1}^{m} x_k = \pi_j.$$

Таким образом, единственность решения системы уравнений (2) доказана. Теорема доказана.

Придадим теореме 1 форму предельной теоремы в обычном понимании. Введем случайную величину ξ, принимающую значения из S, причем $\mathbf{P}(\xi = i) = \pi_i$, $i \in S$.

Утверждение 1. *Пусть $\{\xi_n\}$ – марковская цепь, удовлетворяющая условиям теоремы* 1, *тогда независимо от начального распределения этой цепи при $n \to \infty$*

$$\xi_n \xrightarrow{D} \xi.$$

Доказательство. Заметим, что если $\{p_k,\ k \in S\}$ – начальное распределение, то при $i \in S$ и $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(\xi_n = i) = \sum_{k=1}^{m} p_k p_{ki}(n) \to \sum_{k=1}^{m} p_k \pi_i = \pi_i,$$

что требовалось доказать.

Рассмотрим марковскую цепь $\{\xi_n\}$ с множеством состояний $S = \{1, \ldots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$ (условия теоремы 1 при этом могут быть не выполнены). Каждый набор чисел $\pi_1, \ldots, \pi_m$ (с неотрицательными $\pi_1, \ldots, \pi_m$), являющийся решением системы уравнений (2) задает распределение вероятностей на множестве S. Это распределение называется *стационарным.*

Утверждение 2. *Если начальное распределение марковской цепи $\{\xi_n\}$ является стационарным, то эта цепь является стационарной случайной последовательностью, т.е. для произвольного $n \in \mathbb{N}_0$*

$$(\xi_0, \ldots, \xi_n) \stackrel{D}{=} (\xi_l, \ldots, \xi_{l+n})$$

при каждом $l \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Если $\mathbf{P}(\xi_0 = j) = \pi_j$ при $j \in S$, то

$$\mathbf{P}(\xi_1 = j) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(\xi_0 = k)\, p_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \pi_k p_{kj} = \pi_j.$$

Следовательно, $\xi_0 \overset{D}{=} \xi_1$. Аналогично устанавливается, что $\xi_1 \overset{D}{=} \xi_2$ и т.д. Поэтому, учитывая лемму 1 лекции 9, находим, что при $i_0, \ldots, i_n \in S$

$$\mathbf{P}\left(\xi_l = i_0, \ldots, \xi_{l+n} = i_n\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\xi_l = i_0\right) \mathbf{P}\left(\xi_{l+1} = i_1, \ldots, \xi_{l+n} = i_n \;\middle|\; \xi_l = i_0\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\xi_0 = i_0\right) \prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1} i_k} = \mathbf{P}\left(\xi_0 = i_0, \ldots, \xi_n = i_n\right),$$

что требовалось доказать.

В теореме 1 используется *условие положительности*: при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ все переходные вероятности $p_{ij}(n_0)$, $i, j \in S$, положительны. Заметим, что из существования положительных пределов (1) вытекает условие положительности.

Утверждение 3. *Конечная марковская цепь $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию положительности тогда и только тогда, когда она является неприводимой и все ее состояния являются возвратными и непериодическими.*

Доказательство. Сначала отметим, что в конечной неприводимой марковской цепи все состояния возвратны.

Пусть условие положительности выполнено при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$. Тогда, во первых, марковская цепь неприводима (для частицы есть шанс за n_0 шагов попасть из произвольного состояния в любое из состояний), вовторых, для произвольных $i, j \in S$

$$p_{ij}(n_0 + 1) = \sum_{k=1}^{m} p_{ik} p_{kj}(n_0) \geq \min_{i,j \in S} p_{ij}(n_0) \sum_{k=1}^{m} p_{ik} = \min_{i,j \in S} p_{ij}(n_0) > 0.$$

Это означает, что если условие положительности выполнено при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$, то оно выполнено при всех $n \geq n_0$. А это, в свою очередь, означает, что НОД$\{n > 0 : p_{ii}(n) > 0\} = 1$ при всех $i \in S$. Таким образом, все состояния марковской цепи являются непериодическими.

Докажем обратное утверждение. Рассмотрим произвольное $i \in S$. Поскольку состояние i является возвратным и непериодическим, то носитель распределения случайной величины T_1 (напомним, что $T_1, T_2, \ldots$ – моменты первого, второго и т.д. возвращения в состояние i) содержит такие числа $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$, что НОД$\{n_1, \ldots, n_l\} = 1$.

Задача. Пусть $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$ и НОД$\{n_1, \ldots, n_l\} = 1$. Доказать, что существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что для каждого натурального $n \geq N$ найдутся такие натуральные числа $C_1(n), \ldots, C_l(n)$, что $n = C_1(n) n_1 + \ldots + C_l(n) n_l$.

Положим $P_k(n) = \mathbf{P}(T_k - T_{k-1} = n)$ при $k, n \in \mathbb{N}$ (здесь $T_0 = 0$). Ясно, что $P_k(n_1), \ldots, P_k(n_l)$ положительны для каждого $k \in \mathbb{N}$ и, значит (см. задачу), при $n \geq N$

$$p_{ii}(n) \geq \prod_{k=1}^{C_1(n)} P_k(n_1) \prod_{k=C_1(n)+1}^{C_1(n)+C_2(n)} P_k(n_2) \ldots \prod_{k=\sum_{r=1}^{l-1} C_r(n)+1}^{\sum_{r=1}^{l} C_r(n)} P_k(n_l) > 0.$$

Рассмотрим произвольное $j \in S$, не совпадающее с i. Так как рассматриваемая марковская цепь является неприводимой, то существует число $r \in \mathbb{N}$, что $p_{ji}(r) > 0$. Поэтому $p_{ji}(r+n) \geq p_{ji}(r) p_{ii}(n) > 0$ при $n \geq N$. Итак, для произвольных $i, j \in S$ при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ переходная вероятность $p_{ji}(n)$ положительна, что требовалось доказать. Утверждение доказано.

Примеры. а) *Блуждание с двумя отражающими экранами.* Эта марковская цепь описана в примере г) лекции 9. Очевидно, что эта цепь неприводима и все ее состояния являются непериодическими (поскольку $p_{00} = q > 0$). Таким образом, рассматриваемая цепь удовлетворяет условиям теоремы 1. Найдем стационарное распределение. Система уравнений (2) принимает следующий матричный вид: $\sum_{j=0}^{m} x_j = 1$ и $\overline{x}P = \overline{x}$, где P – переходная матрица, $\overline{x} = (x_0, \ldots, x_m)$. Вспоминая вид переходной матрицы, получаем, что

$$(x_0, \ldots, x_m) \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & q & p \end{pmatrix} = (x_0, \ldots, x_m)$$

или

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_0 = qx_0 + qx_1 & , \\ x_1 = px_0 + qx_2 & , \\ x_2 = px_1 + qx_3 & , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_{m-1} = px_{m-2} + qx_m, & \\ x_m = px_{m-1} + px_m & . \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} px_0 = qx_1 & , \\ p(x_1 - x_0) = q(x_2 - x_1) & , \\ p(x_2 - x_1) = q(x_3 - x_2) & , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ p(x_{m-1} - x_{m-2}) = q(x_m - x_{m-1}) \,, & \\ qx_m = px_{m-1} & . \end{array} \right.$$

Из первого уравнения находим, что $x_1 = \gamma x_0$, где $\gamma = p/q$. Из второго и последующих уравнений, полагая $\Delta_j = x_j - x_{j-1}$ при $j \in \{1, \ldots, m\}$, получаем, что

$$\Delta_j = \gamma \Delta_{j-1} = \gamma^2 \Delta_{j-2} = \ldots = \gamma^{j-1} \Delta_1 = \gamma^{j-1} (\gamma - 1) x_0.$$

Следовательно, при $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$x_j = \sum_{l=1}^{j} \Delta_l + x_0 = \sum_{l=1}^{j} \gamma^{l-1} (\gamma - 1) x_0 + x_0 = \gamma^j x_0.$$

Складывая все эти равенства и равенство $x_0 = x_0$, получаем $1 = \sum_{j=0}^{m} \gamma^j x_0$, т.е.

$$x_0 = \left(\sum_{j=0}^{m} \gamma^j \right)^{-1}, \quad x_j = \gamma^j \left(\sum_{j=0}^{m} \gamma^j \right)^{-1}, \quad j \in \{1, \ldots, m\}.$$

В итоге находим стационарное распределение: при $j \in S$

$$\pi_j = \frac{\gamma^j}{\sum_{j=0}^{m} \gamma^j}.$$

По теореме 1 при $j \in S$

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = \frac{\gamma^j}{\sum_{j=0}^m \gamma^j}.$$

б) *Периодическая марковская цепь.* Рассмотрим марковскую цепь с множеством состояний $S = \{1, \ldots, 6\}$ и с переходной матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,3 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0,4 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта цепь делится на три группы состояний $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{5,6\}$. Из первой группы состояний частица за один шаг переходит во вторую, из второй – в третью, из третьей – в первую. При этом вероятность перехода положительна для любого состояния группы, из которой частица выходит, и любого состояния группы, в которую частица входит. Поэтому рассматриваемая цепь неприводима. Если частица выходит из какого-нибудь состояния первой группы, то она имеет шанс вернуться в это состояние только на третьем, шестом и т.д шагах. Таким образом, данная цепь является периодической с периодом 3.

Нас интересует поведение переходных вероятностей, например, $p_{11}(n)$ при больших n. Ясно, что члены этой последовательности отличны от нуля лишь при $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$. Нетрудно показать, что

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0,238 & 0,762 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,232 & 0,768 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,228 & 0,772 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,222 & 0,778 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,172 & 0,828 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,166 & 0,834 \end{pmatrix}.$$

Пусть частица стартует из группы состояний $\{1,2\}$. Если рассматривать ее положение в моменты времени, кратные трем, то получится марковская цепь с множеством состояний $\{1,2\}$ и матрицей переходных вероятностей

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,238 & 0,762 \\ 0,232 & 0,768 \end{pmatrix}.$$

Стационарное распределение этой цепи находится из системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \qquad\qquad\qquad , \\ 0,238x_1 + 0,232x_2 = x_1, \\ 0,762x_1 + 0,768x_2 = x_1. \end{cases}$$

Легко проверить, что $x_1 = 116/497$, $x_2 = 381/497$. Таким образом,

$$\lim_{k \to \infty} p_{11}(3k) = \frac{116}{497}.$$

Лекция 12

Цепи Маркова с непрерывным временем

Ранее рассматривались цепи Маркова с дискретным временем. Обобщим это понятие на случай непрерывного времени. Пусть S – некоторое конечное или счетное множество, которое называется *множеством состояний*, а его элементы – *состояниями*. Введем σ-алгебру $\mathcal{S}$, состоящую из всех подмножеств множества S. В дальнейшем рассматриваются случайные процессы, сечения которых являются случайными элементами, отображающими вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ в измеримое пространство $(S, \mathcal{S})$.

Определение 1. Случайный процесс $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ называется *цепью Маркова* (*с непрерывным временем*), если для произвольных моментов времени $t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}$ $(0 \leq t_0 < t_1 \ldots < t_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}_0$, и произвольных состояний $i_0, i_1 \ldots, i_{n+1}$

$$\mathbf{P}\left(\xi(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid \xi(t_0) = i_0, \xi(t_1) = i_1, \ldots, \xi(t_n) = i_n\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(\xi(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid \xi(t_n) = i_n\right).$$

Введем при $i, j \in S$ и $0 \leq s < t$ *переходные вероятности*:

$$p_{ij}(s,t) = \mathbf{P}\left(\xi(t) = j \mid \xi(s) = i\right).$$

Цепь Маркова называется *однородной*, если $p_{ij}(s,t)$ при любых $i, j \in S$ зависит только от разности $t - s$, поэтому вместо обозначения $p_{ij}(s,t)$ используется $p_{ij}(t-s)$. Ограничимся рассмотрением однородных марковских цепей.

Многие свойства, справедливые для однородных марковских цепей с дискретным временем, можно переформулировать для однородных марковских цепей с непрерывным временем. Так, в силу теоремы произведения вероятностей

$$\mathbf{P}\left(\xi(t_1) = i_1, \ldots, \xi(t_n) = i_n \mid \xi(t_0) = i_0\right) = \prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1} i_k}(t_k - t_{k-1}).$$

Из этой формулы следует *уравнение Колмогорова-Чепмена*: при $t, s > 0$ и $i, j \in S$

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t)\, p_{kj}(s).$$

Действительно,

$$p_{ij}(t+s) = \mathbf{P}\left(\xi(t+s) = j \mid \xi(0) = i\right) =$$
$$= \sum_{k \in S} \mathbf{P}\left(\xi(t+s) = j,\ \xi(t) = k \mid \xi(0) = i\right) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t)\, p_{kj}(s).$$

Ясно, что если $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ – однородная марковская цепь с непрерывным временем, то случайная последовательность $\{\xi(t_n),\ n \in \mathbb{N}_0\}$, где $t_n = a + bn$, $n \in \mathbb{N}_0$ ($a \geq 0$, $b > 0$) является однородной марковской цепью с дискретным временем. Оказывается, что верно в некотором смысле обратное утверждение: на основе однородных марковских цепей с дискретным временем можно сконструировать широкий класс однородных марковских цепей с непрерывным временем.

За основу возьмем некоторую однородную марковскую цепь с дискретным временем $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ с множеством состояний S и переходными вероятностями p_{ij}, $i, j \in S$. В марковской цепи с дискретным временем частица совершает переходы из одного состояние в другое (или остается на месте) в целые моменты времени. Это можно трактовать следующим образом: частица находится в каждом состоянии ровно одну единицу времени, а затем совершает мгновенный скачок в другое состояние (или остается на месте). Чтобы получить марковскую цепь с непрерывным временем предположим, что время нахождения частицы в произвольном состоянии i является случайной величиной, распределенной по показательному закону с параметром $\lambda_i > 0$. При этом время пребывания частицы в каждом состоянии не должно зависеть от марковской цепи $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ и от того, сколько времени частица находилась в предыдущих состояниях.

Чтобы уточнить сказанное, рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\tau_0, \tau_1, \ldots$, распределенных по показательному закону с параметром 1 (ясно, что случайная величина τ_0/λ, где $\lambda > 0$, распределена по показательному закону с параметром λ). Предположим, что эта последовательность не зависит от марковской цепи с дискретным временем $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$. Кроме того, рассмотрим множество чисел $\lambda_i > 0$, $i \in S$.

На основе этих данных сконструируем марковскую цепь с непрерывным временем. Если $\xi_0 = i_0 \in S$, то полагаем, что частица находится в состоянии i_0 в течение времени τ_0/λ_{i_0}. Затем частица совершает мгновенный скачок в состояние $i_1 \in S$, если $\xi_1 = i_1$, и находится там в течение времени τ_1/λ_{i_1}. Затем частица совершает мгновенный скачок в состояние $i_2 \in S$, если $\xi_2 = i_2$, и находится там в течение времени τ_2/λ_{i_2} и т.д.

Положим

$$T_0 = 0 \text{ и } T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tau_k}{\lambda_{\xi_k}},\ n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Зададим случайный процесс $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ формулой

$$\xi(t) = \xi_n,\ \text{если } t \in [T_n, T_{n+1}),\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Введенный случайный процесс $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ называется *конструктивной марковской цепью*. Вспомогательная марковская цепь $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ называется *вложенной марковской цепью*; число λ_i, $i \in S$, называется *интенсивностью выхода* из состояния i. Обратим внимание на то , что $\xi(0) = \xi_0$.

Конструктивная марковская цепь называется *регулярный*, если она определена на всей числовой прямой. Покажем, что если

$$\Lambda := \sup_{i \in S} \lambda_i < +\infty, \tag{3}$$

то конструктивная марковская цепь $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ является регулярной. Действительно,

$$T_n \geq \frac{1}{\Lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\tau_k = \frac{n}{\Lambda}\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\tau_k}{n}. \tag{4}$$

По усиленному закону больших чисел при $n \to \infty$ п.н.

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\tau_k}{n} \to 1$$

и, следовательно, правая часть соотношения (4) стремится к $+\infty$. Таким образом, конструктивная марковская цепь $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ является регулярной.

Заметим, что выбор показательного распределения в указанной конструкции связан со следующим его важным свойством, получившим название *отсутствия памяти* или *отсутствия последействия*: если случайная величина τ имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, то для произвольных $t_0, t \geq 0$

$$\mathbf{P}(\tau > t_0 + t \mid \tau > t_0) = \mathbf{P}(\tau > t).$$

Действительно,

$$\mathbf{P}(\tau > t_0 + t \mid \tau > t_0) = \frac{\mathbf{P}(\tau > t_0 + t,\ \tau > t_0)}{\mathbf{P}(\tau > t_0)} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}(\tau > t_0 + t)}{\mathbf{P}(\tau > t_0)} = \frac{\exp(-\lambda(t_0+t))}{\exp(-\lambda t_0)} = \exp(-\lambda t) = \mathbf{P}(\tau > t).$$

Теорема 1. *Конструктивная марковская цепь* $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$, *удовлетворяющая условию* (3), *действительно является однородной марковской цепью с непрерывным временем.*

Доказательство. Рассмотрим для простоты всего три момента времени $0 < t_1 < t_2 < t_3$ и положим при $i_1, i_2, i_3 \in S$

$$P_{t_1,t_2,t_3}(i_1,i_2,i_3) = \mathbf{P}(\xi(t_1) = i_1, \xi(t_2) = i_2, \xi(t_3) = i_3).$$

Положим $\nu(t) = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}$ при $t > 0$. Введем при $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_0$ случайное событие

$$C_{n_1,n_2,n_3} = \{\nu(t_1) = n_1, \nu(t_2) = n_2, \nu(t_3) = n_3\}.$$

Если событие C_{n_1,n_2,n_3} произошло, то $\xi(t_1) = \xi_{n_1}$, $\xi(t_2) = \xi_{n_2}$, $\xi(t_3) = \xi_{n_3}$ и, значит,

$$P_{t_1,t_2,t_3}(i_1,i_2,i_3) =$$

$$= \sum_{0 \leq n_1 < n_2 < n_3} \mathbf{P}(\xi(t_1) = i_1, \xi(t_2) = i_2, \xi(t_3) = i_3, C_{n_1,n_2,n_3}) =$$

$$= \sum_{0 \leq n_1 < n_2 < n_3} \mathbf{P}\left(\xi_{n_1} = i_1, \xi_{n_2} = i_2, \xi_{n_3} = i_3, C_{n_1,n_2,n_3}\right) \tag{5}$$

(суммирование ведется по таким целым n_1, n_2, n_3, что $0 \leq n_1 < n_2 < n_3$).

Положим при $r_0, r_1, \ldots, r_n \in S$

$$D_n\left(r_0, r_1, \ldots, r_n\right) = \left\{\xi_0 = r_0, \xi_1 = r_1, \ldots, \xi_n = r_n\ \right\}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\left(\xi_{n_1} = i_1, \xi_{n_2} = i_2, \xi_{n_3} = i_3, C_{n_1,n_2,n_3}\right) =$$
$$= \sum_{\left(r_0,r_1,\ldots,r_{n_3}\right)} \mathbf{P}\left(D_{n_3}\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_3}\right), C_{n_1,n_2,n_3}\right), \tag{6}$$

где суммирование ведется по всем наборам $\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_3}\right)$ с ограничением $r_{n_1} = i_1, r_{n_2} = i_2, r_{n_3} = i_3$.

Если событие $D_{n_3}\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_3}\right)$ произошло, то (см. формулу (1))

$$T_n = \frac{\tau_0}{\lambda_{r_0}} + \frac{\tau_1}{\lambda_{r_1}} + \ldots + \frac{\tau_{n-1}}{\lambda_{r_{n-1}}}, \qquad n \in \{1, 2, \ldots, n_3 + 1\}, \tag{7}$$

и событие C_{n_1,n_2,n_3} совпадает с событием

$$C_{n_1,n_2,n_3}\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_3}\right) = \left\{\widetilde{\nu}\left(t_1\right) = n_1, \widetilde{\nu}\left(t_2\right) = n_2, \widetilde{\nu}\left(t_3\right) = n_3\right\},$$

где $\widetilde{\nu}\left(t\right) = \max\left\{n \geq 0 : T_n \leq t\right\}$ при $t > 0$ (здесь при нахождении T_n используется формула (7), а не (1)). Случайные события $D_{n_3}\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_3}\right)$ и $C_{n_1,n_2,n_3}\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_3}\right)$ являются независимыми, поскольку первое из них определяется вложенной марковской цепью $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, а второе – случайной последовательностью $\tau_0, \tau_1, \ldots$, а эти две последовательности независимы. Итак,

$$\mathbf{P}\left(D_{n_3}\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_3}\right), C_{n_1,n_2,n_3}\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(D_{n_3}\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_3}\right), C_{n_1,n_2,n_3}\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_3}\right)\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(D_{n_3}\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_3}\right)\right) \mathbf{P}\left(C_{n_1,n_2,n_3}\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_3}\right)\right). \tag{8}$$

Из соотношений (6) и (8) находим, что

$$\mathbf{P}\left(\xi_{n_1} = i_1, \xi_{n_2} = i_2, \xi_{n_3} = i_3, C_{n_1,n_2,n_3}\right) =$$
$$= \sum_{\left(r_0,r_1,\ldots,r_{n_3}\right)} \mathbf{P}\left(D_{n_3}\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_3}\right)\right) \mathbf{P}\left(C_{n_1,n_2,n_3}\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_3}\right)\right). \tag{9}$$

Моменты $T_1, T_2, \ldots, T_{n_3+1}$ в (7) можно рассматривать как моменты восстановления, тогда величина $\widetilde{\nu}\left(t\right)$ при $t \in [0, t_3]$ равна числу восстановлений на отрезке $[0, t]$. При этом периоды восстановления распределены показательно с известными, но, вообще говоря, разными параметрами. Точно так же, как в лекции 1 (см. лемму 2 и текст после нее), можно показать, что случайные величины $\widetilde{\nu}\left(t_1\right), \widetilde{\nu}\left(t_2\right) - \widetilde{\nu}\left(t_1\right), \widetilde{\nu}\left(t_3\right) - \widetilde{\nu}\left(t_2\right)$ независимы. Более того, если моменты восстановления имеют вид

$$T_0' = 0, \quad T_n' = \frac{\tau_{n_2}}{\lambda_{r_{n_2}}} + \frac{\tau_{n_2+1}}{\lambda_{r_{n_2}+1}} + \ldots + \frac{\tau_{n_2+n-1}}{\lambda_{r_{n_2}+n-1}}, \qquad n \in \{1, 2, \ldots, n_3 - n_2 + 1\},$$

и $\nu'\left(t\right)$ – число восстановлений на отрезке $[0, t]$, где $t \in [0, t_3 - t_2]$, то $\widetilde{\nu}\left(t_3\right) - \widetilde{\nu}\left(t_2\right) \stackrel{d}{=} \nu'\left(t_3 - t_2\right)$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(C_{n_1,n_2,n_3}\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_3}\right)\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\widetilde{\nu}\left(t_1\right) = n_1, \widetilde{\nu}\left(t_2\right) = n_2\right) \mathbf{P}\left(\widetilde{\nu}\left(t_3\right) - \widetilde{\nu}\left(t_2\right) = n_3 - n_2\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(C_{n_1,n_2}\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_2}\right)\right) \mathbf{P}\left(\nu'\left(t_3 - t_2\right) = n_3 - n_2\right), \qquad (10)$$

где $C_{n_1,n_2}\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_2}\right) = \{\widetilde{\nu}\left(t_1\right) = n_1, \widetilde{\nu}\left(t_2\right) = n_2\}$. Первый множитель в правой части (10) зависит от n_1, n_2 и $r_0, r_1, \ldots, r_{n_2}$, а второй множитель – зависит от $n_3 - n_2$ и $r_{n_2}, r_{n_2+1}, \ldots, r_{n_3}$.

Поскольку последовательность $\{\xi_n, \ n \in \mathbb{N}_0\}$ является марковской цепью, то

$$\mathbf{P}\left(D_{n_3}\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_3}\right)\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(D_{n_2}\left(r_0, r_1, \ldots, r_{n_2}\right)\right) \mathbf{P}^{\left(r_{n_2}\right)}\left(\xi_{n_2+1} = r_{n_2+1}, \ldots, \xi_{n_3} = r_{n_3}\right). \qquad (11)$$

Первый множитель в правой части (11) зависит от n_2 и $r_0, r_1, \ldots, r_{n_2}$, а второй множитель – зависит от $n_3 - n_2$ и $r_{n_2}, r_{n_2+1}, \ldots, r_{n_3}$.

Перемножая соотношения (10)-(11) и суммируя полученные выражения сначала по $r_0, r_1, \ldots, r_{n_2-1}$, а затем по $r_{n_2+1}, r_{n_2+2}, \ldots, r_{n_3}$ (вспомним, что $r_{n_1} = i_1, r_{n_2} = i_2, r_{n_3} = i_3$), получаем с учетом (9), что

$$\mathbf{P}\left(\xi_{n_1} = i_1, \xi_{n_2} = i_2, \xi_{n_3} = i_3, C_{n_1,n_2,n_3}\right) = f\left(n_1, n_2, i_1, i_2\right) g\left(n_3 - n_2, i_2, i_3\right), \qquad (12)$$

где f и g – некоторые функции. Суммируя соотношение (12) по n_1, n_2, n_3 и учитывая (5), находим, что

$$P_{t_1,t_2,t_3}\left(i_1, i_2, i_3\right) = F_{t_1,t_2}\left(i_1, i_2\right) G_{t_3-t_2}\left(i_2, i_3\right), \qquad (13)$$

где $F_{t_1,t_2}\left(i_1, i_2\right) = \sum_{n_1,n_2} f\left(n_1, n_2, i_1, i_2\right)$, $G_t\left(i_2, i_3\right) = \sum_j g\left(j, i_2, i_3\right)$. Из соотношения (13) вытекает (проведите соответствующее рассуждение), что

$$\mathbf{P}\left(\xi\left(t_3\right) = i_3 \mid \xi\left(t_1\right) = i_1, \xi\left(t_2\right) = i_2\right) = \mathbf{P}\left(\xi\left(t_3\right) = i_3 \mid \xi\left(t_2\right) = i_2\right).$$

Теорема доказана.

Для конструктивных марковских цепей справедлива предельная теорема, аналогичная предельной теореме Маркова для марковских цепей с дискретным временем.

Теорема 2. *Пусть* $\{\xi\left(t\right), \ t \geq 0\}$ *– конструктивная марковская цепь с конечным множеством состояний* S *и пусть ее вложенная марковская цепь* $\{\xi_n, \ n \in \mathbb{N}_0\}$ *неприводима. Тогда для произвольных фиксированных* $i, j \in S$ *существует положительный предел*

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}\left(t\right) := \pi_j,$$

не зависящий от i.

Доказательство. Сначала покажем, что $p_{ij}\left(t\right) > 0$ при всех $i, j \in S$ и $t > 0$. Поскольку цепь $\{\xi_n, \ n \in \mathbb{N}_0\}$ неприводима, существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\mathbf{P}^{(i)}\left(\xi_n = j\right) > 0$. Нетрудно понять, что существует и цепочка состояний $i_1, \ldots, i_{n-1}$ такая, что

$$\mathbf{P}^{(i)}\left(\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = j\right) > 0. \qquad (14)$$

Заметим, что

$$p_{ij}\left(t\right) = \mathbf{P}^{(i)}\left(\xi\left(t\right) = j\right) \geq \mathbf{P}^{(i)}\left(\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = j; \ t \in [T_n, T_{n+1})\right),$$

где $T_n = \tau_0/\lambda_i + \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k/\lambda_{i_k}$ и $T_{n+1} = T_n + \tau_n/\lambda_j$. Ввиду независимости вложенной марковской цепи $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ от последовательности $\tau_0, \tau_1, \ldots$

$$\mathbf{P}^{(i)}\left(\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = j;\ t \in [T_n, T_{n+1})\right) =$$

$$= \mathbf{P}^{(i)}\left(\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = j\right) \mathbf{P}\left(t \in [T_n, T_{n+1})\right). \qquad (15)$$

Положим $F_n(t) = \mathbf{P}(T_n \le t)$, $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $F_{n+1}(t) < F_n(t)$ при $t > 0$, поэтому

$$\mathbf{P}\left(t \in [T_n, T_{n+1})\right) = \mathbf{P}\left(T_n \le t,\ T_{n+1} > t\right) =$$

$$= \mathbf{P}(T_n \le t) - \mathbf{P}(T_{n+1} \le t) = F_n(t) - F_{n+1}(t) > 0. \qquad (16)$$

Итак, оба множителя в правой части соотношения (15) положительны (см. (14), (16)), что доказывает требуемое утверждение.

Теперь рассмотрим конечную марковскую цепь с дискретным временем $\{\xi(n),\ n \in \mathbb{N}_0\}$. Ее переходные вероятности за n шагов равны $p_{ij}(n)$, $i, j \in S$, $n \in \mathbb{N}$. Они положительны в силу только что доказанного утверждения. По предельной теореме для конечных цепей Маркова с дискретным временем (см. теорему 1 лекции 11) существуют положительные пределы

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) := \pi_j, \qquad (17)$$

не зависящие от i.

Ввиду уравнения Колмогорова-Чепмена при $t > 0$

$$p_{ij}(t) = \sum_{k\in S} p_{ik}(t - \lfloor t \rfloor)\, p_{kj}(\lfloor t \rfloor). \qquad (18)$$

Из соотношения (17) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $i, j \in S$ и всех $n \ge N$

$$\pi_j - \varepsilon \le p_{ij}(n) \le \pi_j + \varepsilon.$$

Следовательно, при всех $i, j \in S$ и всех $t \ge N$

$$\sum_{k\in S} p_{ik}(t - \lfloor t \rfloor)\, p_{kj}(\lfloor t \rfloor) \le (\pi_j + \varepsilon) \sum_{k\in S} p_{ik}(t - \lfloor t \rfloor) = \pi_j + \varepsilon$$

и

$$\sum_{k\in S} p_{ik}(t - \lfloor t \rfloor)\, p_{kj}(\lfloor t \rfloor) \ge (\pi_j - \varepsilon) \sum_{k\in S} p_{ik}(t - \lfloor t \rfloor) = \pi_j - \varepsilon.$$

Значит, предел при $t \to \infty$ правой части соотношения (18) равен π_j. Теорема доказана.

Лекция 13

Уравнения Колмогорова. Процесс Пуассона.

Рассмотрим конструктивную марковскую цепь $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ с множеством состояний S. Пусть известны переходные вероятности p_{ij} вложенной марковской цепи $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ и интенсивности выхода λ_i (здесь $i, j \in S$). Найдем, используя эти данные, переходные вероятности $p_{ij}(t)$, $t > 0$, марковской цепи $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$. Полагаем для определенности, что $p_{ii}(0) = 1$ и $p_{ij}(0) = 0$ при $i \neq j$. Для простоты изложения будем считать, что $p_{ii} = 0$ для всех $i \in S$.

Лемма 1. *Пусть конструктивная марковская цепь $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ удовлетворяет условию регулярности* (*см. соотношение* (3) *лекции* 12). *Тогда для произвольного $i \in S$*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = \lambda_i \tag{1}$$

и для произвольных несовпадающих $i, j \in S$

$$\lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \lambda_i p_{ij}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\xi(0) = i \in S$. Обозначим $\tau(i)$ время пребывания конструктивной марковская цепи $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ в состоянии i (до первого выхода из него). По определению этой цепи случайная величина $\tau(i)$ имеет показательное распределение с параметром λ_i и, следовательно, ее функция распределения имеет вид

$$F_i(t) = 1 - \exp(-\lambda_i t),\ t \geq 0.$$

По формуле полной вероятности (по значению u, которое принимает случайная величина $\tau(i)$, и по значению j, которое принимает случайная величина $\xi(u)$)

$$p_{ii}(t) = 1 - F_i(t) + \int_0^t \sum_{j \in S \setminus \{i\}} p_{ij} p_{ji}(t - u)\, dF_i(u). \tag{3}$$

Поскольку $p_{ji}(t) \leq F_j(t) = 1 - \exp(-\lambda_j t) \leq \lambda_j t$ при $t \geq 0$, то

$$\int_0^t \sum_{j \in S \setminus i} p_{ij} p_{ji}(t - u)\, dF_i(u) \leq \sum_{j \in S \setminus \{i\}} p_{ij} \int_0^t \lambda_j (t - u)\, \lambda_i e^{-\lambda_i u} du \leq$$

$$\leq \sum_{j \in S} p_{ij} \lambda_i \lambda_j \int_0^t (t - u)\, du = \frac{t^2}{2} \sum_{j \in S} p_{ij} \lambda_i \lambda_j \leq \frac{(t\Lambda)^2}{2}, \tag{4}$$

где, напомним, $\Lambda = \sup_{i \in S} \lambda_i < +\infty$. Из соотношений (3)-(4) находим, что

$$F_i(t) - (t\Lambda)^2/2 \leq 1 - p_{ii}(t) \leq F_i(t).$$

Откуда, учитывая, что $\lim_{t \to 0} F_i(t)/t = \lambda_i$, получаем соотношение (1).

Докажем соотношение (2). По формуле полной вероятности при $j \in S \setminus \{i\}$

$$p_{ij}(t) = \int_0^t \sum_{k \in S \setminus \{i\}} p_{ik} p_{kj}(t-u)\, dF_i(u) \geq \int_0^t p_{ij} p_{jj}(t-u)\, dF_i(u). \tag{5}$$

Из (5), замечая, что $p_{jj}(t) \geq 1 - F_j(t) = \exp(-\lambda_j t)$ при $t \geq 0$, видим, что

$$p_{ij}(t) \geq p_{ij} \int_0^t e^{-\lambda_j (t-u)} \lambda_i e^{-\lambda_i u} du = \lambda_i p_{ij} \int_0^t e^{-\lambda_j (t-u) - \lambda_i u} du. \tag{6}$$

Из соотношения (6), учитывая, что последний интеграл есть $t(1 + o(t))$ при $t \to 0$, находим, что

$$\liminf_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} \geq \lambda_i p_{ij}. \tag{7}$$

Покажем, что для $j \in S \setminus \{i\}$

$$\limsup_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} \leq \lambda_i p_{ij}. \tag{8}$$

Пусть существует такое состояние $j_0 \in S \setminus \{i\}$, что

$$\limsup_{t \to 0} \frac{p_{ij_0}(t)}{t} > \lambda_i p_{ij_0}.$$

Заметим, что $1 = \sum_{j \in S} p_{ij} = \sum_{j \in S \setminus \{i\}} p_{ij}$ и $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$ (последнее равенство объясняется регулярностью цепи $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$), поэтому (см. (7))

$$\limsup_{t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = \limsup_{t \to 0} \frac{\sum_{j \in S \setminus \{i\}} p_{ij}(t)}{t} \geq$$

$$\geq \limsup_{t \to 0} \frac{p_{ij_0}(t)}{t} + \liminf_{t \to 0} \frac{\sum_{j \in S \setminus \{i, j_0\}} p_{ij}(t)}{t} >$$

$$> \lambda_i p_{ij_0} + \sum_{j \in S \setminus \{i, j_0\}} \liminf_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} \geq \sum_{j \in S \setminus \{i\}} \lambda_i p_{ij} = \lambda_i,$$

что противоречит доказанному соотношению (1). Итак, соотношение (8) доказано. Из соотношений (7)-(8) следует (2). Лемма доказана.

В случае, когда $S = \{1, \ldots, m\}$, где $m \in \mathbb{N}$, или $S = \mathbb{N}$, для каждого момента времени $t \geq 0$ рассматривается *матрица переходных вероятностей* $P(t)$ с элементами $p_{ij}(t)$, $i, j \in S$ (i – номер строки, j – номер столбца). В силу уравнения Колмогорова-Чепмена при $t, s \geq 0$

$$P(t+s) = P(t) P(s). \tag{9}$$

Отметим, что лемму 1 можно записать в матричном виде:

$$\lim_{t \to 0} \frac{P(t) - P(0)}{t} = Q, \tag{10}$$

где $P(0)$, в силу сделанных предположений о значениях $p_{ij}(0)$ при $i, j \in S$, совпадает с единичной матрицей (которую обозначим E); Q – матрица с элементами q_{ij}, которые являются значениями пределов, найденных в лемме 1; более точно, $q_{ii} = -\lambda_i$ при $i \in S$ и $q_{ij} = \lambda_i p_{ij}$ при несовпадающих $i, j \in S$. Матрица Q называется *матрицей интенсивностей переходов* марковской цепи $\{\xi(t), \ t \geq 0\}$. Сумма элементов каждой строки матрицы Q равна нулю.

Теорема 1. *Пусть конструктивная марковская цепь $\{\xi(t), \ t \geq 0\}$ удовлетворяет условию регулярности. Пусть $P(t)$ – матрица переходных вероятностей, $t \geq 0$, а Q – матрица интенсивностей переходов этой марковской цепи. Тогда функция $P(t)$ при $t \geq 0$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям*

$$P'(t) = P(t)\, Q, \tag{11}$$

$$P'(t) = QP(t) \tag{12}$$

и начальному условию $P(0) = E$. Поэтому при $t \geq 0$

$$P(t) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q^k t^k}{k!}. \tag{13}$$

Доказательство. Ввиду соотношения (9) при $s, t \geq 0$

$$P(s+t) - P(s) = P(s)\left(P(t) - P(0)\right).$$

Откуда, применяя соотношение (10), находим, что при $s \geq 0$

$$P'(s) = \lim_{t \to 0} \frac{P(s+t) - P(s)}{t} = P(s) \lim_{t \to 0} \frac{P(t) - P(0)}{t} = P(s)\, Q$$

(это верно для правой производной; докажите сами, что это верно и для левой производной). Итак, соотношение (11) доказано.

Соотношение (12) доказывается аналогично:

$$P'(t) = \lim_{s \to 0} \frac{P(s+t) - P(t)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{P(s)\, P(t) - P(t)}{s} =$$

$$= \left(\lim_{s \to 0} \frac{P(s) - P(0)}{s} \right) P(t) = QP(t).$$

Из (11) следует, что функция $P(t)$ при $t \geq 0$ бесконечно дифференцируема, причем $P^{(k)}(t) = P(t)\, Q^k$, следовательно, справедливо разложение функции $P(t)$ при $t \geq 0$ в ряд Тейлора в точке 0, т.е. соотношение (13).

Замечание 1. Формулу (13) можно переписать, используя матричную экспоненту:

$$P(t) = \exp(Qt), \qquad t \geq 0.$$

Уравнения (11) и (12) называются соответственно *прямым и обратным уравнениями Колмогорова* (отличие в названиях объясняется тем, что переходную вероятность $p_{ij}(t-s) = p_{ij}(s,t)$, $0 \le s < t$, в первом случае дифференцируют по t, а во втором – по s).

В заключительной части лекции рассмотрим процесс Пуассона. Напомним, что случайная величина η имеет *распределение Пуассона с параметром* $a > 0$ (короткая запись: $\eta \sim \Pi_a$), если η принимает значения в $\mathbb{N}_0$ и

$$\mathbf{P}(\eta = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}.$$

Определение 1. Случайный процесс $\{\xi(t),\ t \ge 0\}$, сечения которого принимают значения в $\mathbb{N}_0$, называется процессом Пуассона с интенсивностью $\lambda > 0$, если выполнены следующие аксиомы:

1) $\xi(0) = 0$;

2) $\{\xi(t),\ t \ge 0\}$ является процессом с независимыми приращениями;

3) приращения процесса имеют распределение Пуассона: $\xi(t_2) - \xi(t_1) \sim \Pi_{\lambda(t_2 - t_1)}$ для произвольных чисел t_1, t_2 $(0 \le t_1 < t_2)$.

Как и в случае броуновского движения, можно показать, используя теорему Колмогорова, существование вероятностного пространства и случайного процесса на нем, удовлетворяющего указанным аксиомам.

Отметим, что процесс Пуассона выступает в роли предельного в различных теоремах теории вероятностей и играет особую роль в теории массового обслуживания и теории страхования.

Заметим, что в силу определения 1 при $t > 0$

$$\xi(t) \sim \Pi_{\lambda t}. \tag{14}$$

Теорема 2. *Случайный процесс $\{\xi(t),\ t \ge 0\}$, сечения которого принимают значения в $\mathbb{N}_0$, является процессом Пуассона с интенсивностью $\lambda > 0$ тогда и только тогда, когда он является марковской цепью с множеством состояний $\mathbb{N}_0$, начальным состоянием 0 и переходными вероятностями*

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, & j \ge i; \\ 0, & j < i, \end{cases} \tag{15}$$

где $i, j \in \mathbb{N}_0$, $t > 0$.

Доказательство. Пусть $\{\xi(t),\ t \ge 0\}$ – процесс Пуассона. Рассмотрим произвольные моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}$ $(0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}_0$, и произвольные числа $i_0, i_1, \ldots, i_{n+1} \in \mathbb{N}_0$. Положим $\Delta_k = \xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$ при $k \in \{1, \ldots, n+1\}$. Заметим, что

$$\mathbf{P}(\xi(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid \xi(t_0) = i_0, \xi(t_1) = i_1, \ldots, \xi(t_n) = i_n) =$$

$$= \mathbf{P}(\Delta_{n+1} = i_{n+1} - i_n \mid \xi(t_0) = i_0;\ \Delta_k = i_k - i_{k-1},\ k \in \{1, \ldots, n\}) =$$

$$= \mathbf{P}(\Delta_{n+1} = i_{n+1} - i_n)$$

(последнее равенство объясняется аксиомой 2). Аналогично

$$\mathbf{P}\left(\xi\left(t_{n+1}\right)=i_{n+1} \mid \xi\left(t_n\right)=i_n\right)=$$

$$\mathbf{P}\left(\Delta_{n+1}=i_{n+1}-i_n \mid \xi\left(t_n\right)=i_n\right)=\mathbf{P}\left(\Delta_{n+1}=i_{n+1}-i_n\right).$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\left(\xi\left(t_{n+1}\right)=i_{n+1} \mid \xi\left(t_0\right)=i_0, \xi\left(t_1\right)=i_1, \ldots, \xi\left(t_n\right)=i_n\right)=$$

$$=\mathbf{P}\left(\xi\left(t_{n+1}\right)=i_{n+1} \mid \xi\left(t_n\right)=i_n\right)$$

и, значит, $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ – марковская цепь с переходными вероятностями

$$p_{ij}\left(t_1, t_2\right)=\mathbf{P}\left(\xi\left(t_2\right)=j \mid \xi\left(t_1\right)=i\right)=$$

$$=\mathbf{P}\left(\xi\left(t_2\right)-\xi\left(t_1\right)=j-i \mid \xi\left(t_1\right)=i\right)=$$

$$=\mathbf{P}\left(\xi\left(t_2\right)-\xi\left(t_1\right)=j-i\right)=\mathbf{P}\left(\xi\left(t_2-t_1\right)=j-i\right),$$

где $i, j \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq t_1<t_2$. Полагая $t_2-t_1=t$ и вспоминая (14), получаем формулу (15).

Пусть $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ – марковская цепь с начальным состоянием 0 и переходными вероятностями (15). Требуется показать, что для произвольных моментов времени $t_1, \ldots, t_m$ $(0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_m)$, $m \in \mathbb{N}$, случайные величины $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ независимы и $\Delta_k \sim \Pi_{\lambda(t_k-t_{k-1})}$ при $k \in\{1, \ldots, m\}$. Воспользуемся методом математической индукции по m. При $m=1$ утверждение выполнено, поскольку при $j \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{P}\left(\Delta_1=j\right)=\mathbf{P}\left(\xi\left(t_1\right)=j\right)=p_{0j}\left(t_1\right)=\frac{\left(\lambda t_1\right)^j}{j!} e^{-\lambda t_1}.$$

Предположим, что утверждение теоремы выполнено при некотором $m \in \mathbb{N}$. Добавим еще один момент времени t_{m+1}, такой что $t_m<t_{m+1}$. Заметим, что по определению марковской цепи при $l_1, \ldots, l_{m+1} \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{P}\left(\Delta_{m+1}=l_{m+1} \mid \Delta_1=l_1, \ldots, \Delta_m=l_m\right)=$$

$$=\mathbf{P}\left(\xi\left(t_{m+1}\right)=\sum_{k=1}^{m+1} l_k \;\middle|\; \xi\left(t_1\right)=l_1, \xi\left(t_2\right)=l_1+l_2, \ldots, \xi\left(t_m\right)=\sum_{k=1}^m l_k\right)=$$

$$=\mathbf{P}\left(\xi\left(t_{m+1}\right)=\sum_{k=1}^{m+1} l_k \;\middle|\; \xi\left(t_m\right)=\sum_{k=1}^m l_k\right)=$$

$$=\frac{\left(\lambda\left(t_{m+1}-t_m\right)\right)^{l_{m+1}}}{l_{m+1}!} e^{-\lambda\left(t_{m+1}-t_m\right)}, \tag{16}$$

причем последнее равенство объясняется соотношением (15). Поскольку правая часть (16) не зависит от $l_1, \ldots, l_m$ случайная величина Δ_{m+1} не зависит от совокупности величин $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$, которые, в свою очередь, независимы по предположению индукции. Следовательно, все случайные величины $\Delta_1, \ldots, \Delta_{m+1}$ независимы. Далее, из соотношения (16) следует, что $\Delta_{m+1} \sim \Pi_{\lambda(t_{m+1}-t_m)}$. Итак, утверждение теоремы справедливо при $(m+1)$. Теорема доказана.

Построим конструктивную марковскую цепь, являющуюся процессом Пуассона. Пусть $\tau_0, \tau_1, \ldots$ – независимые случайные величины, каждая из которых имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$. Положим $T_0 = 0$, $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k$. Введем случайный процесс $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$:

$$\xi(0) = 0,\ \xi(t) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : T_n \leq t\},\ t > 0.$$

Этот процесс является одним из процессов восстановления, рассмотренных в лекции 1, и именно этот процесс был там назван процессом Пуассона.

Лемма 2. *Введенный процесс $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ является конструктивной марковской цепью.*

Доказательство. По определению $\xi(t) = 0$ при $t < T_1$, $\xi(t) = 1$ при $T_1 \leq t < T_2$, $\xi(t) = 2$ при $T_2 \leq t < T_3$ и т.д. Положим $\xi_n = n$ для произвольного $n \in \mathbb{N}_0$. Последовательность $\{\xi_n\}$ является марковской цепью с множеством состояний $\mathbb{N}_0$ и переходными вероятностями $p_{i,i+1} = 1$ и $p_{ij} = 0$ при $j \neq i+1$, $i, j \in \mathbb{N}_0$. Ясно, что

$$\xi(t) = \xi_n,\ \text{если } t \in [T_n, T_{n+1}),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Далее, положим $\widetilde{\tau}_k = \lambda \tau_k$ при $k \in \mathbb{N}_0$ и положим $\lambda_i = \lambda$ при $i \in \mathbb{N}_0$. Тогда

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\widetilde{\tau}_k}{\lambda_{\xi_k}},\ n \in \mathbb{N},$$

причем случайные величины $\widetilde{\tau}_0, \widetilde{\tau}_1, \ldots$ являются независимыми и распределенными по показательному закону с параметром 1. Следовательно, процесс $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ – конструктивная марковская цепь с вложенной марковской цепью $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$; интенсивности выхода равны λ_i, $i \in \mathbb{N}_0$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Введенная конструктивная марковская цепь $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ является процессом Пуассона с интенсивностью λ.*

Доказательство. По теореме 1 переходная матрица $P(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяет дифференциальному уравнению $P'(t) = P(t)Q$, $t \geq 0$, с начальным условием $P(0) = E$. Матрица Q является матрицей интенсивностей переходов и по определению имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Следовательно, при $i \in \mathbb{N}_0$

$$p'_{i,0}(t) = -\lambda p_{i,0}(t)$$

и при $j \in \mathbb{N}$

$$p'_{ij}(t) = -\lambda p_{ij}(t) + \lambda p_{i,j-1}(t).$$

Положим $u_{ij}(t) = e^{\lambda t} p_{ij}(t)$, тогда

$$u'_{i,0}(t) = 0 \tag{17}$$

и при $j \in \mathbb{N}$

$$u'_{ij}(t) = \lambda u_{i,j-1}(t), \tag{18}$$

поскольку

$$u'_{ij}(t) = e^{\lambda t}\left(\lambda p_{ij}(t) + p'_{ij}(t)\right) = \lambda e^{\lambda t} p_{i,j-1}(t) = \lambda u_{i,j-1}(t).$$

Кроме того, $u_{i,i}(0) = 1$ и $u_{ij}(0) = 0$ при $j \neq i$. Решая (17), (18), получаем, что

$$u_{i,0}(t) = u_{i,1}(t) = \ldots = u_{i,i-1}(t) = 0,$$

$$u_{i,i}(t) = 1,\ u_{i,i+1}(t) = \lambda t,\ u_{i,i+2}(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!},\ u_{i,i+3}(t) = \frac{(\lambda t)^3}{3!},\ \ldots.$$

Следовательно, справедливо соотношение (15). Теорема доказана.

Процесс Пуассона из теоремы 3 можно назвать *конструктивным*. Ввиду теоремы 2 он является процессом с независимыми приращениями (этот факт другим способом был установлен в конце лекции 1). Траектории этого процесса являются ступенчатыми. Оказывается, для произвольного процесса Пуассона существует модификация, являющаяся конструктивным процессом Пуассона. Доказательство этого факта можно разбить на следующие задачи.

Задача 1. Показать, что процесс Пуассона непрерывен по вероятности. Доказать существование модификации этого процесса с непрерывными справа траекториями. Показать, что траектории такой модификации не убывают.

Рассмотрим процесс Пуассона $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ интенсивности $\lambda > 0$, имеющий непрерывные справа траектории. Положим $T_0 = 0$ и при $n \in \mathbb{N}$

$$T_n = \min\{t \geq 0 :\ \xi(t) = n\}, \qquad \tau_{n-1} = T_k - T_{k-1}.$$

Задача 2. Доказать, что случайные величины $T_1, T_2, \ldots$ конечны п.н., а случайные величины $\tau_1, \tau_2, \ldots$ независимы и имеют показательное распределение с параметром λ.

Ясно, что $\xi(t) = n$ при $t \in [T_n, T_{n+1})$ для произвольного $n \in \mathbb{N}_0$. Таким образом, процесс $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ является конструктивным процессом Пуассона.

Лекция 14

Стационарные последовательности

Рассмотрим еще один важный класс случайных последовательностей, обобщающих последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

Определение 1. Случайная последовательность $\xi_0, \xi_1, \ldots$ называется *стационарной*, если распределение вектора $(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ при произвольном $n \in \mathbb{N}_0$ не меняется при произвольном временном сдвиге $m \in \mathbb{N}$, т.е.

$$(\xi_0, \ldots, \xi_n) \stackrel{D}{=} \left(\xi_m, \ldots, \xi_{m+n}\right).$$

Напомним, что конечная марковская цепь является стационарной, если ее начальное распределение является стационарным.

Упомянутая последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X_0, X_1, \ldots$ позволяет конструировать различные стационарные последовательности. Пусть, например, зафиксированы числа $k \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha_0, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, тогда последовательность

$$\xi_n = \alpha_0 X_n + \alpha_1 X_{n+1} + \ldots + \alpha_k X_{n+k},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

является стационарной (при этом $\xi_0, \xi_1, \ldots$ – зависимые случайные величины, если $k \geq 1$).

Положим

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Исследовать последовательность $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ в случае, когда слагаемые $\xi_0, \xi_1, \ldots$ образуют стационарную случайную последовательность, сложнее, чем случайные блуждания. Тем не менее, для таких последовательностей создана стройная теория, включающая закон больших чисел, центральную предельную теорему, принцип инвариантности, схожий с принципом инвариантности Прохорова-Донскера и т.п. Ограничимся рассмотрением закона больших чисел.

Определение 2. Случайное событие $A \in \sigma(\xi_0, \xi_1, \ldots)$ (так обозначается минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы случайные величины $\xi_0, \xi_1, \ldots$) называется *инвариантным*, если для произвольного $n \in \mathbb{N}_0$ и произвольной измеримой неотрицательной числовой функции $f(x_0, \ldots, x_n)$ такой, что $\mathbf{E} f(\xi_0, \ldots, \xi_n) < +\infty$, выполняется равенство

$$\mathbf{E}\left(f(\xi_0, \ldots, \xi_n);\ A\right) = \mathbf{E}\left(f\left(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}\right);\ A\right).$$

Следующее неравенство выполняет роль, аналогичную той, которую играет неравенство Колмогорова при доказательстве закона больших чисел для случайного блуждания. Рассмотрим для произвольных чисел $p \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}_0$ случайное событие

$$B_n = \left\{ \max_{0 \le i \le n} \frac{S_i}{i+1} > p \right\}.$$

Лемма 1 (Хопф). *Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – стационарная последовательность, причем $\mathbf{E}\,|\xi_0| < +\infty$, и пусть A – произвольное инвариантное множество. Тогда для произвольных $p \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}_0$*

$$\mathbf{E}\left(\xi_0;\ AB_n\right) \ge p\mathbf{P}\left(AB_n\right).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $p = 0$. Тогда $B_n = \{\max_{0 \le i \le n} S_i > 0\}$. Положим $S_n' = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что

$$\max_{0 \le i \le n} S_i = \xi_0 + \max\left\{0, S_1', \ldots, S_n'\right\} = \xi_0 + \left(\max_{1 \le i \le n} S_i'\right) \vee 0.$$

Если событие B_n произошло, то

$$\max_{0 \le i \le n} S_i = \left(\max_{0 \le i \le n} S_i\right) \vee 0,$$

поэтому

$$\xi_0 = \left(\max_{0 \le i \le n} S_i\right) \vee 0 - \left(\max_{1 \le i \le n} S_i'\right) \vee 0 \ge \left(\max_{0 \le i \le n} S_i\right) \vee 0 - \left(\max_{1 \le i \le n+1} S_i'\right) \vee 0. \quad (1)$$

Случайная величина $(\max_{0 \le i \le n} S_i) \vee 0$ может быть представлена в виде $f\left(\xi_0, \ldots, \xi_n\right)$, где f – измеримая неотрицательная числовая функция, причем

$$\mathbf{E} f\left(\xi_0, \ldots, \xi_n\right) \le \mathbf{E}\left(\max_{0 \le i \le n} |S_i| \vee 0\right) \le \mathbf{E} \max_{0 \le i \le n} |S_i| \le$$

$$\le \mathbf{E} \sum_{i=0}^{n} |S_i| \le \sum_{i=0}^{n} (i+1)\,\mathbf{E}\,|\xi_0| < +\infty,$$

поскольку $\mathbf{E}\,|S_i| \le (i+1)\,\mathbf{E}\,|\xi_0|$ при $i \in \mathbb{N}_0$. Ясно, что

$$\left(\max_{1 \le i \le n+1} S_i'\right) \vee 0 = f\left(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}\right).$$

Откуда, учитывая, что A – инвариантное множество, запишем, что

$$\mathbf{E}\left(\left(\max_{0 \le i \le n} S_i\right) \vee 0;\ A\right) = \mathbf{E}\left(\left(\max_{1 \le i \le n+1} S_i'\right) \vee 0;\ A\right). \quad (2)$$

Из соотношения (1) следует, что

$$\mathbf{E}\left(\xi_0;\ AB_n\right) \ge \mathbf{E}\left(\left(\max_{0 \le i \le n} S_i\right) \vee 0;\ AB_n\right) - \mathbf{E}\left(\left(\max_{1 \le i \le n+1} S_i'\right) \vee 0;\ AB_n\right). \quad (3)$$

Но первое математическое ожидание в правой части соотношения (3) равно $\mathbf{E}\left((\max_{0\le i\le n} S_i)\vee 0;\ A\right)$, а второе – не больше, чем $\mathbf{E}\left((\max_{1\le i\le n+1} S'_i)\vee 0;\ A\right)$. Поэтому

$$\mathbf{E}\left(\xi_0;\ AB_n\right)\ge \mathbf{E}\left(\left(\max_{0\le i\le n} S_i\right)\vee 0;\ A\right)-\mathbf{E}\left(\left(\max_{1\le i\le n+1} S'_i\right)\vee 0;\ A\right). \qquad (4)$$

Осталось заметить, что, ввиду (2), правая часть (4) равна 0. Итак, лемма доказана при $p=0$.

В случае, когда $p\in\mathbb{R}$, вместо последовательности $\xi_0,\xi_1,\ldots$ надо рассмотреть стационарную последовательность $\xi_0-p,\xi_1-p,\ldots$ и применить к ней уже доказанный результат. Лемма доказана.

Задача. Используя лемму 1, доказать, что п.н.

$$-\infty<\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1}<+\infty.$$

Лемма 2. *Для произвольных одномерных борелевских множеств B,C случайные события*

$$\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1}\in B\right\},\ \ \left\{\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1}\in C\right\}$$

инвариантны. Инвариантно также пересечение этих событий.

Доказательство. Установим, например, инвариантность первого события. Рассмотрим произвольную измеримую неотрицательную числовую функцию $f\left(x_0,\ldots,x_n\right)$ такую, что $\mathbf{E}f\left(\xi_0,\ldots,\xi_n\right)<+\infty$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{E}f\left(\xi_0,\ldots,\xi_n\right)>0$. В силу стационарности кажется вполне очевидным, что при любом одномерном борелевском множестве B

$$\mathbf{E}\left(f\left(\xi_0,\ldots,\xi_n\right);\ \limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1}\in B\right)=$$

$$=\mathbf{E}\left(f\left(\xi_1,\ldots,\xi_{n+1}\right);\ \limsup_{n\to\infty}\frac{S'_{n+1}}{n+1}\in B\right). \qquad (5)$$

Замечая теперь, что

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1}=\limsup_{n\to\infty}\frac{S'_n}{n+1}=\limsup_{n\to\infty}\frac{S'_n}{n}=\limsup_{n\to\infty}\frac{S'_{n+1}}{n+1},$$

получаем требуемое утверждение.

Докажем соотношение (5) строго. Левая и правая части (5) после деления на $\mathbf{E}f\left(\xi_0,\ldots,\xi_n\right)$ являются вероятностными мерами на борелевских множествах B числовой прямой. Соотношение (5) означает совпадение этих мер. По теореме Александрова для этого достаточно, чтобы совпадали интегралы от непрерывных ограниченных числовых функций g по этим мерам, т.е.

$$\mathbf{E}f\left(\xi_0,\ldots,\xi_n\right)g\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1}\right)=\mathbf{E}f\left(\xi_1,\ldots,\xi_{n+1}\right)\ g\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S'_{n+1}}{n+1}\right). \qquad (6)$$

Сначала заметим, что в силу стационарности при $k, l \in \mathbb{N}_0$ $(k \le l)$

$$\mathbf{E} f(\xi_0, \ldots, \xi_n)\, g\left(\max_{k \le n \le l} \frac{S_n}{n+1}\right) = \mathbf{E} f\left(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}\right)\; g\left(\max_{k \le n \le l} \frac{S'_{n+1}}{n+1}\right). \quad (7)$$

Поскольку

$$\sup_{n \ge k} \frac{S_n}{n+1} = \lim_{l \to \infty} \max_{k \le n \le l} \frac{S_n}{n+1},$$

то по теореме о мажорируемой сходимости из (7) получаем, что

$$\mathbf{E} f(\xi_0, \ldots, \xi_n)\, g\left(\sup_{n \ge k} \frac{S_n}{n+1}\right) = \mathbf{E} f\left(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}\right)\; g\left(\sup_{n \ge k} \frac{S'_n}{n+1}\right). \quad (8)$$

Поскольку

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{S_n}{n+1} = \lim_{k \to \infty} \sup_{n \ge k} \frac{S_n}{n+1},$$

то по теореме о мажорируемой сходимости из (8) получаем требуемое соотношение (5). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть случайные величины ξ и η таковы, что если $p > q$ $(p, q \in \mathbb{R})$, то*

$$\mathbf{P}(\xi < q,\ p < \eta) = 0.$$

Тогда $\xi \ge \eta$ п.н.

Доказательство. Ясно, что $\{\xi < \eta\} = \cup_{p,q} \{\xi < q,\ p < \eta\}$, где $p, q \in \mathbb{Q}$ $(p \ge q)$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(\xi < \eta) \le \sum_{p,q \in \mathbb{Q}} \mathbf{P}(\xi < q,\ p < \eta) = 0.$$

Лемма доказана.

Теорема 1 (Биркгоф-Хинчин). *Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – стационарная последовательность, причем $\mathbf{E}|\xi_0| < +\infty$. Тогда п.н. существует конечный предел $S_n/(n+1)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные $p, q \in \mathbb{R}$, причем $p > q$. Положим

$$C_p = \left\{\limsup_{n \to \infty} \frac{S_n}{n+1} > p\right\},\ D_q = \left\{\liminf_{n \to \infty} \frac{S_n}{n+1} < q\right\}.$$

Применим лемму 1 к инвариантному множеству $A = C_q D_p$ (см. лемму 2):

$$\mathbf{E}(\xi_0;\ C_p D_q B_n) \ge p \mathbf{P}(C_p D_q B_n).$$

Откуда, замечая, что события B_n не убывают и

$$B := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \left\{\sup_{0 \le n < \infty} \frac{S_n}{n+1} > p\right\},$$

получаем, что

$$\mathbf{E}(\xi_0;\ C_p D_q B) \ge p \mathbf{P}(C_p D_q B).$$

Далее, $C_pB = C_p$, поэтому

$$\mathbf{E}\left(\xi_0;\ C_pD_q\right) \geq p\mathbf{P}\left(C_pD_q\right),$$

т.е.

$$\mathbf{E}\left(\xi_0;\ \liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1} < q,\ p < \limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1}\right) \geq$$

$$\geq p\mathbf{P}\left(\ \liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1} < q,\ p < \limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1}\right). \qquad (9)$$

Аналогично, рассматривая стационарную последовательность $\{-\xi_n,\ n\in\mathbb{N}_0\}$ и числа $(-q)\,,(-p)$, находим, что

$$\mathbf{E}\left(-\xi_0;\ \liminf_{n\to\infty}\frac{-S_n}{n+1} < -p,\ \ -q < \limsup_{n\to\infty}\frac{-S_n}{n+1}\right) \geq$$

$$\geq -q\mathbf{P}\left(\ \liminf_{n\to\infty}\frac{-S_n}{n+1} < -p,\ \ -q < \limsup_{n\to\infty}\frac{-S_n}{n+1}\right),$$

т.е.

$$\mathbf{E}\left(\xi_0;\ \limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1} > p,\ q > \liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1}\right) \leq$$

$$\leq q\mathbf{P}\left(\ \limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1} > p,\ q > \liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1}\right). \qquad (10)$$

Сравнивая (9) и (10), видим, что при $p > q$ такое возможно, если только

$$\mathbf{P}\left(\ \liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1} < q,\ p < \limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1}\right) = 0.$$

Откуда, применяя лемму 3, получаем утверждение теоремы.

Определение 3. Стационарная последовательность $\xi_0, \xi_1, \ldots$ называется *эргодической*, если любое инвариантное множество имеет вероятность нуль или единица.

Теорема 2. *Пусть $\{\xi_n,\ n\in\mathbb{N}_0\}$ – эргодическая стационарная последовательность, причем $\mathbf{E}\,|\xi_0| < +\infty$. Тогда п.н.*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1} = \mathbf{E}\xi_0.$$

Доказательство. По теореме 1 п.н.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1} := \zeta,$$

где ζ – некоторая случайная величина. Случайное событие $\{\zeta \leq x\}$, $x \in \mathbb{R}$, по лемме 2 является инвариантным. Ввиду эргодичности вероятность $\mathbf{P}\left(\zeta \leq x\right)$ равна 0 или 1. Отсюда следует, что п.н. $\zeta = C$, где C – некоторая постоянная. Итак, п.н.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1} = C. \qquad (11)$$

Покажем, что имеет место сходимость в смысле L^1, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n+1} - C\right| = 0. \tag{12}$$

Положим при $n \in \mathbb{N}_0$ и $M > 0$

$$\xi_n^{(M)} = \begin{cases} \xi_n, \text{ если } \xi_n \in [-M, M]; \\ M, \text{ если } \xi_n > M; \\ -M, \text{ если } \xi_n < -M. \end{cases}$$

Последовательность $\left\{\xi_n^{(M)},\ n \in \mathbb{N}_0\right\}$ также является стационарной, поэтому п.н.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(M)}}{n+1} := \zeta_M, \tag{13}$$

где $S_n^{(M)} = \sum_{i=0}^n \xi_i^{(M)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, а ζ_M – некоторая случайная величина. Каждый член случайной последовательности $\left\{S_n^{(M)}/\,(n+1)\,,\ n \in \mathbb{N}_0\right\}$ ограничен по модулю постоянной M, поэтому случайная величина ζ_M ограничена по модулю постоянной M. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left|\frac{S_n^{(M)}}{n+1} - \zeta_M\right| = 0. \tag{14}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем M так, чтобы $\mathbf{E}\left|\xi_0 - \xi_0^{(M)}\right| \le \varepsilon$, тогда, ввиду стационарности, при всех $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n+1} - \frac{S_n^{(M)}}{n+1}\right| \le \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n \mathbf{E}\left|\xi_i - \xi_i^{(M)}\right| \le \varepsilon. \tag{15}$$

По лемме Фату из (11), (13) и (15) получаем, что

$$\mathbf{E}\left|\zeta_M - C\right| = \mathbf{E}\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{S_n^{(M)}}{n+1} - \frac{S_n}{n+1}\right| \le \liminf_{n\to\infty}\mathbf{E}\left|\frac{S_n^{(M)}}{n+1} - \frac{S_n}{n+1}\right| \le \varepsilon. \tag{16}$$

Из соотношений (15)-(16) находим, что

$$\mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n+1} - C\right| \le \mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n+1} - \frac{S_n^{(M)}}{n+1}\right| + \mathbf{E}\left|\frac{S_n^{(M)}}{n+1} - \zeta_M\right| + \mathbf{E}\left|\zeta_M - C\right| \le$$

$$\le 2\varepsilon + \mathbf{E}\left|\frac{S_n^{(M)}}{n+1} - \zeta_M\right|.$$

Откуда, учитывая (14), получаем, что

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n+1} - C\right| \le 2\varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, последнее неравенство означает справедливость соотношения (12).

Из соотношения (12) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\frac{S_n}{n+1} = C.$$

Откуда, замечая, что $\mathbf{E}S_n/(n+1) = \mathbf{E}\xi_0$, находим, что $C = \mathbf{E}\xi_0$, а это вместе с (11) дает утверждение теоремы.

Лекция 15

Стационарные в широком смысле последовательности

Рассмотрим класс случайных последовательностей $\{\xi_n\}$, обобщающих стационарные последовательности, при этом предполагается, что временная переменная n принимает значения из $\mathbb{Z}$ (множество целых чисел) и что случайные величины ξ_n принимают значения из $\mathbb{C}$ (множество комплексных чисел).

Определение 1. Случайная последовательность ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$, называется *стационарной в широком смысле*, если $\mathbf{E}\left|\xi_n\right|^2 < +\infty$ при каждом $n \in \mathbb{Z}$ и для произвольных $n, k, l \in \mathbb{Z}$ величины $\mathbf{E}\xi_n$ и $\mathbf{E}\xi_k\overline{\xi_l}$ не меняются при произвольном временном сдвиге $m \in \mathbb{Z}$, т.е. $\mathbf{E}\xi_n = \mathbf{E}\xi_{m+n}$, $\mathbf{E}\xi_k\overline{\xi_l} = \mathbf{E}\xi_{m+k}\overline{\xi_{m+l}}$.

Очевидно, что если $\{\xi_n\}$ – стационарная последовательность и при этом $\mathbf{E}\left|\xi_n\right|^2 < +\infty$ при любом $n \in \mathbb{N}_0$, то она является стационарной в широком смысле.

Ковариационной функцией стационарной в широком смысле последовательности $\{\xi_n\}$ называется комплекснозначная функция

$$R(n) = \mathbf{E}\left(\xi_n - \mathbf{E}\xi_n\right)\left(\overline{\xi_0 - \mathbf{E}\xi_0}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Стационарная в широком смысле последовательность $\{\xi_n\}$ называется *центрированной*, если $\mathbf{E}\xi_0 = 0$. Ясно, что для этих последовательностей при всех $n, m \in \mathbb{Z}$

$$R(n) = \mathbf{E}\xi_n\overline{\xi_0} = \mathbf{E}\xi_{m+n}\overline{\xi_m}.$$

Наоборот, если при всех $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{E}\xi_0 = 0, \qquad \mathbf{E}\xi_{m+n}\overline{\xi_m} = \mathbf{E}\xi_n\overline{\xi_0} \in (-\infty, +\infty),$$

то $\{\xi_n\}$ является центрированной стационарной в широком смысле последовательностью. В дальнейшем рассматриваются только центрированные стационарные в широком смысле последовательности.

Ковариационная функция стационарной в широком смысле последовательности является *неотрицательно определенной*, т.е. для произвольного $m \in \mathbb{N}$, произвольных моментов времени $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{Z}$ и произвольных чисел $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k,l=1}^{m} z_k\overline{z_l}R(n_k - n_l) \geq 0. \qquad (1)$$

Действительно,

$$\sum_{k,l=1}^{m} z_k\overline{z_l}R(n_k - n_l) = \sum_{k,l=1}^{m} z_k\overline{z_l}\mathbf{E}\xi_{n_k}\overline{\xi_{n_l}} = \mathbf{E}\sum_{k,l=1}^{m} z_k\overline{z_l}\xi_{n_k}\overline{\xi_{n_l}} =$$

$$= \mathbf{E}\sum_{k,l=1}^{m} z_k\xi_{n_k}\overline{z_l\xi_{n_l}} = \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{m} z_k\xi_{n_k}\right)\left(\sum_{l=1}^{m}\overline{z_l\xi_{n_l}}\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{m} z_k \xi_{n_k}\right)\overline{\left(\sum_{l=1}^{m} z_l \xi_{n_l}\right)} = \mathbf{E}\left|\sum_{k=1}^{m} z_k \xi_{n_k}\right|^2 \geq 0.$$

Легко проверяется, что $R(0) \geq 0$, причем равенство возможно лишь в случае, когда $\xi_0 = 0$ п.н., который исключается из рассмотрения. Кроме того, $R(-n) = \overline{R(n)}$, $|R(n)| \leq R(0)$ при $n \in \mathbb{Z}$. Отметим, что последние три свойства можно вывести из (1).

Примеры. а) Пусть η – произвольная комплекснозначная случайная величина такая, что $\mathbf{E}\eta = 0$ и $\mathbf{E}|\eta|^2 = \sigma^2$. Положим при фиксированном $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\xi_n = e^{i\lambda n}\eta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Случайная последовательность $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ является центрированной стационарной в широком смысле с ковариационной функцией

$$R(n) = \sigma^2 e^{i\lambda n}.$$

Действительно, $\mathbf{E}\xi_n = 0$ и

$$\mathbf{E}\xi_{m+n}\overline{\xi_m} = \mathbf{E}e^{i\lambda(m+n)}\eta\overline{e^{i\lambda m}\eta} = e^{i\lambda n}\mathbf{E}|\eta|^2 = \sigma^2 e^{i\lambda n},$$

где $n, m \in \mathbb{Z}$.

б) Рассмотренный пример можно обобщить. Пусть $N \in \mathbb{N}$ и $\eta_1, \ldots, \eta_N$ – попарно некоррелированные случайные величины (это означает, что $\mathbf{E}\eta_k\overline{\eta_l} = 0$ при $k \neq l,\ k, l \in \{1, \ldots, N\}$), причем $\mathbf{E}\eta_k = 0$ и $\mathbf{E}|\eta_k|^2 = \sigma_k^2 > 0$ при $k \in \{1, \ldots, N\}$. Положим при фиксированных действительных числах $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{N} e^{i\lambda_k n}\eta_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Случайная последовательность $\{\xi_n\}$ является (докажите сами) центрированной стационарной в широком смысле с ковариационной функцией

$$R(n) = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 e^{i\lambda_k n}.$$

Заметим, что в силу 2π-периодичности по λ функции $\exp(i\lambda n)$ можно считать, что все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ принадлежат промежутку $(-\pi, \pi]$.

Интересно отметить, что в общем случае ковариационная функция стационарной в широком смысле последовательности имеет вид, аналогичный полученному в примере б).

Теорема 1 (Герглотц). *Пусть комплекснозначная функция $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, является неотрицательно определенной. Тогда существует такая вероятностная мера μ на измеримом пространстве $([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]))$, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$*

$$R(n) = R(0) \int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda n}\mu(d\lambda).$$

Доказательство. Положим при $N \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in [-\pi, \pi]$

$$f_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{k,l=1}^{N} \frac{R(k-l)}{R(0)} e^{-i\lambda(k-l)}.$$

Поскольку функция $R(n)$, $n \in \mathbb{N}$, является неотрицательно определенной, то $f_N(\lambda) \geq 0$ при $N \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Число слагаемых в этой двойной сумме, у которых $k - l = m$, равно $N - |m|$, поэтому

$$f_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \frac{R(m)}{R(0)} e^{-i\lambda m}.$$

Для каждого $N \in \mathbb{N}$ введем на измеримом пространстве $([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]))$ меру μ_N по формуле

$$\mu_N(A) = \int_A f_N(\lambda)\, d\lambda, \ A \in \mathcal{B}([-\pi, \pi]).$$

Известно, что при $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(n-m)} d\lambda = \begin{cases} 0, \ m \neq n; \\ 2\pi, \ m = n. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda n} \mu_N(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f_N(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \frac{R(n)}{R(0)}, & |n| < N; \\ 0, & |n| \geq N. \end{cases} \tag{2}$$

Из (2) при $n = 0$ видно, все меры μ_N, $N \in \mathbb{N}$, являются вероятностными.

Положим

$$F_N(x) = \int_{-\pi}^{x} f_N(\lambda)\, d\lambda, \ x \in [-\pi, \pi],$$

т.е. F_N является функцией распределения, задаваемой мерой μ_N. По первой теореме Хелли из всякой последовательности функций распределения можно извлечь подпоследовательность сходящуюся в основном. Следовательно, существует подпоследовательность $\{N_k\}$ последовательности натуральных чисел и функция распределения $F(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, такая, что

$$\lim_{k \to \infty} F_{N_k}(x) = F(x) \tag{3}$$

для всех $x \in [-\pi, \pi]$, являющихся точками непрерывности функции F.

Функция распределения F задает меру μ на измеримом пространстве $([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]))$ по формуле

$$\mu(A) = \int_A dF(x), \ A \in \mathcal{B}([-\pi, \pi]).$$

Ввиду (3) последовательность мер $\{\mu_{N_k}\}$ слабо сходится при $k \to \infty$ к вероятностной мере μ и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda n}\mu_{N_k}(d\lambda) = \int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda n}\mu(d\lambda). \tag{4}$$

В силу соотношения (2)

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda n}\mu_{N_k}(d\lambda) = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{|n|}{N_k}\right)\frac{R(n)}{R(0)} = \frac{R(n)}{R(0)}. \tag{5}$$

Из соотношений (4) и (5) следует утверждение теоремы.

Замечание 1. Поскольку $\exp(-i\lambda\pi) = \exp(i\lambda\pi)$, можно считать, что мера μ сосредоточена на промежутке $(-\pi, \pi]$. Поэтому интегрировать можно по этому промежутку, а не по отрезку $[-\pi, \pi]$.

Теорема 2 (Хинчин)**.** *Комплекснозначная функция $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, является ковариационной функцией некоторой центрированной стационарной в широком смысле последовательности тогда и только тогда, когда существует такая вероятностная мера μ на измеримом пространстве $([-\pi,\pi], \mathcal{B}([-\pi,\pi]))$, что справедливо представление*

$$R(n) = R(0)\int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda n}\mu(d\lambda). \tag{6}$$

Доказательство. Если функция $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, является ковариационной функцией некоторой стационарной в широком смысле последовательности, то она является неотрицательно определенной и представление (6) справедливо в силу теоремы 1.

Пусть справедливо представление (6). Мера μ задает функцию распределения

$$F(x) = \mu([-\pi, x]),\ x \in [-\pi,\pi].$$

Пусть ξ – случайная величина со значениями в промежутке $[-\pi,\pi]$ и функцией распределения F, а η – случайная величина, равномерно распределенная на $[-\pi,\pi]$, причем ξ и η независимы. Рассмотрим случайную последовательность

$$\xi_n = \sqrt{R(0)}e^{i(n\xi+\eta)},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что при $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{E}\xi_n = \frac{\sqrt{R(0)}}{2\pi}\iint\limits_{[-\pi,\pi]^2} e^{i(nx+y)}dF(x)\,dy =$$

$$= \frac{\sqrt{R(0)}}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{inx}dF(x)\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{iy}dy = 0,$$

поскольку последний интеграл равен 0. Далее, при $k, n \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{E}\xi_{m+n}\overline{\xi_m} = \frac{R(0)}{2\pi} \iint\limits_{[-\pi,\pi]^2} e^{i((m+n)x+y)} e^{-i(mx+y)} dF(x)\, dy =$$

$$= \frac{R(0)}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{inx} dF(x) \int\limits_{-\pi}^{\pi} dy = R(0) \int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{inx} dF(x) = R(n).$$

Таким образом, $\{\xi_n\}$ – центрированная стационарная в широком смысле последовательность с ковариационной функцией $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Теорема доказана.

Замечание 2. Вместо меры μ часто рассматривают *спектральную меру* $\mu^* = R(0)\,\mu$, поэтому вместо (6) запишем: при $n \in \mathbb{Z}$

$$R(n) = \int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda n} \mu^*(d\lambda). \tag{7}$$

Функцию распределения спектральной меры, т.е. функцию

$$F^*(x) = \mu^*([-\pi, x]), \ x \in [-\pi, \pi],$$

называют *спектральной функцией.*

Задача. Доказать, что спектральная мера однозначно определяется по ковариационной функции.

Пример. *Белый шум.* Так называется случайная последовательность $\{\xi_n, \ n \in \mathbb{Z}\}$, состоящая из попарно некоррелированных случайных величин, причем $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $\mathbf{E}\,|\xi_n|^2 = 1$ при $n \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что $\{\xi_n\}$ является центрированной стационарной в широком смысле последовательностью с ковариационной функцией

$$R(0) = 1, \ R(n) = 0, \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Эту функцию можно представить в виде

$$R(n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \frac{1}{2\pi} d\lambda.$$

Таким образом (см. (7)), спектральная мера является равномерной на промежутке $[-\pi, \pi]$, что и объясняет название последовательности $\{\xi_n\}$.

Установим закон больших чисел для стационарной в широком смысле последовательности $\{\xi_n\}$. Пусть $\{\eta_n, \ n \in \mathbb{N}_0\}$ – случайная последовательность и ее элементы принадлежат пространству L^2 (оно содержит все такие случайные величины ξ, что $\mathbf{E}\,|\xi|^2 < +\infty$). Говорят, что последовательность $\{\eta_n, \ n \in \mathbb{N}_0\}$ *сходится в среднем квадратическом* при $n \to \infty$ к случайной величине η, если $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,|\eta_n - \eta|^2 = 0$. Коротко такая сходимость обозначается так: $\eta_n \xrightarrow{L^2} \eta$. Положим

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k.$$

Теорема 3 (Хинчин). Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ – *центрированная стационарная в широком смысле последовательность. Тогда при* $n \to \infty$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^2} \eta, \tag{8}$$

где η – *некоторая случайная величина, такая что* $\mathbf{E}\,|\eta|^2 < +\infty$ *и* $\mathbf{E}\eta = 0$.

Доказательство. Покажем, что

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n} - \frac{S_m}{m}\right|^2 = 0 \tag{9}$$

(это означает, что выполнен критерий Коши для сходимости в среднем квадратическом). Поскольку

$$\mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n} - \frac{S_m}{m}\right|^2 = \mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n}\right|^2 - 2\mathbf{E}\frac{S_n}{n}\frac{\overline{S_m}}{m} + \mathbf{E}\left|\frac{S_m}{m}\right|^2,$$

для справедливости (9) достаточно показать, что существует

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{E}\frac{S_n}{n}\frac{\overline{S_m}}{m} := c, \tag{10}$$

где c – некоторе число. Заметим, что (см.(7))

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{E}\frac{S_n}{n}\frac{\overline{S_m}}{m} = \frac{1}{nm}\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\right)\left(\sum_{l=0}^{m-1}\overline{\xi_l}\right) = \frac{1}{nm}\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}\xi_k\overline{\xi_l}\right) =$$

$$= \frac{1}{nm}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}\mathbf{E}\xi_k\overline{\xi_l} = \frac{1}{nm}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}R\,(k-l) =$$

$$= \frac{1}{nm}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}\int\limits_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda(k-l)}\mu^*\,(d\lambda) = \frac{1}{nm}\int\limits_{[-\pi,\pi]}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}e^{i\lambda(k-l)}\right)\mu^*\,(d\lambda) =$$

$$= \int\limits_{\{0\}} \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}e^{i\lambda(k-l)}}{nm}\mu^*\,(d\lambda) + \int\limits_{[-\pi,0)\cup(0,\pi]} \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}e^{i\lambda(k-l)}}{nm}\mu^*\,(d\lambda) =$$

$$= \mu^*\,(\{0\}) + \int\limits_{[-\pi,0)\cup(0,\pi]} \frac{e^{i\lambda n}-1}{n\,(e^{i\lambda}-1)}\frac{e^{-i\lambda m}-1}{m\,(e^{i\lambda}-1)}\mu^*\,(d\lambda)\,.$$

Подынтегральная функция ограничена и стремится к 0 при $n,m \to \infty$. Следовательно, по теореме о мажорируемой сходимости предел этого интеграла при $n,m\to\infty$ равен 0. Итак, соотношение (10) справедливо при $c = \mu^*\,(\{0\})$. Значит, справедливо соотношение (9). Откуда, учитывая полноту пространства L^2, получаем (8), причем $\mathbf{E}\,|\eta|^2 < +\infty$. Наконец, учитывая, что из сходимости в L^2 следует сходимость в L^1, т.е. $\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\,|S_n - \eta| = 0$, находим, что $\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}S_n = \mathbf{E}\eta$. Далее,

$$\mathbf{E}S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\xi_k = 0.$$

Следовательно, $\mathbf{E}\eta = 0$. Теорема доказана.