

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

А. В. Булинский

**СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ.
ПРИМЕРЫ, ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ**

*Допущено
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению «Прикладные математика и физика»*

МОСКВА
МФТИ
2010

УДК 519.216.2(075)

ББК 22.171я73

Б90

Рецензенты:

Кафедра теории вероятностей и математической статистики
Российского университета дружбы народов
(зав. каф. доктор физико-математических наук, профессор Ю. С. Хохлов)
Доктор физико-математических наук, профессор Л. Г. Афанасьева

Булинский А. В.

Б90 Случайные процессы. Примеры, задачи и упражнения: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2010. – 216 с.
ISBN 978-5-7417-0266-6

Кратко изложен теоретический материал, включая необходимые сведения по теории вероятностей. Разобраны примеры и задачи по основным разделам курса «Стохастические процессы», читаемого автором студентам МФТИ. Также предлагаются упражнения для самостоятельной работы, приведена программа курса и два контрольных задания.

Предназначено для студентов, изучающих теорию случайных процессов.

УДК 519.216.2(075)

ББК 22.171я73

ISBN 978-5-7417-0266-6

© Булинский А. В., 2010

© ГОУ ВПО «Московский физико-технический институт
(государственный университет)», 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	9
1.1. Системы множеств. Мера.	
Вероятностное пространство	9
1.2. Измеримые отображения. Распределение случайной величины	14
1.3. Интеграл Лебега	20
1.4. Случайные векторы	29
1.5. Семейства независимых случайных величин .	32
1.6. Сходимость случайных величин. Предельные теоремы	36
Глава 2. ПРИМЕРЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	42
2.1. Случайные функции и их свойства	42
2.2. Построение последовательности независимых случайных величин с заданными распределениями	51
2.3. Случайные блуждания. Задача о разорении игрока	59
2.4. Процессы восстановления	65
2.5. Модель Крамера–Лундberга в теории страхования	71
Глава 3. ГАУССОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ПРОЦЕССЫ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ	77
3.1. Согласованные вероятностные меры	77
3.2. Гауссовские системы	78
3.3. Процессы с независимыми приращениями .	86
3.4. Пуассоновский процесс и порождаемые им стохастические модели	92
3.5. Процесс Леви	102

Глава 4. ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС	105
4.1. Эквивалентные определения винеровского	
процесса	105
4.2. Непрерывная модификация броуновского	
движения	108
4.3. Явная конструкция винеровского процесса	
на $[0, 1]$	112
4.4. Свойства винеровского процесса	116
4.5. Процесс Орнштейна–Уленбека. Броуновский	
мост	123
Глава 5. МАРТИНГАЛЫ	126
5.1. Условное математическое ожидание и его	
свойства	126
5.2. Фильтрация. Марковские моменты	133
5.3. Примеры мартингалов, субмартингалов,	
супермартингалов	138
5.4. Свойства мартингалов	143
Глава 6. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ	148
6.1. Определение марковского процесса. Примеры	148
6.2. Марковские цепи	153
6.3. Эргодическая теорема	159
6.4. Дифференцируемость переходных	
вероятностей	161
6.5. Уравнения Колмогорова	167
Глава 7. СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ	173
7.1. Ортогональные случайные меры и их свойства	173
7.2. Интеграл по ортогональной случайной мере .	176
7.3. Стационарные в широком смысле процессы,	
их спектральное представление	179
7.4. Процессы, стационарные в узком смысле . .	186
Глава 8. СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ	191
8.1. Построение и свойства интеграла Ито . . .	191
8.2. Формула Ито	196
8.3. Стохастические дифференциальные уравнения	
200	

8.4. Некоторые задачи стохастической финансовой математики	205
Программа курса “Стохастические процессы”	208
Задание 1	209
Задание 2	212
Литература	215

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга является учебным пособием по вводному курсу "Случайные процессы", читаемому автором для студентов МФТИ. Основное внимание уделяется решению задач, но в то же время каждый раздел снабжен кратким изложением основных теоретических сведений и примерами, их поясняющими. Наряду с детально разобранными примерами и задачами предлагаются упражнения для самостоятельной работы (наиболее трудные отмечены *). Приводится также программа лекций и два контрольных задания.

Для успешного изучения теории случайных процессов читатель должен владеть материалом предшествующего курса теории вероятностей. Поэтому было бы желательно по мере необходимости обращаться к соответствующим учебникам, и в этой связи рекомендуются книги [1], [8]–[12].

Пособие состоит из 8 глав, деление материала на разделы в основном соответствует учебнику [2]. Первая глава содержит краткие сведения из курса теории вероятностей. Точнее говоря, напоминаются важнейшие конструкции, связанные с аксиоматикой Колмогорова, а также основные понятия, относящиеся к случайным величинам и векторам (независимость, интегрируемость и другие). Для активизации данных сведений, с которыми студенты младших курсов обычно недостаточно знакомы, предложен ряд упражнений.

В главе 2 вводятся главные объекты теории действительных случайных процессов, а также показывается, как многие интересные для приложений модели задаются с помощью последовательностей независимых случайных величин. Разбирается элементарное построение таких последовательностей, не опирающееся на фундаментальную теорему Колмогорова о согласованных распределениях. Среди предложенных примеров отметим случайные блуждания и классическую задачу о разорении игрока, процессы восстановления и модель Крамера–Лундберга, применяемую в страховании. Затрагивается и существенный вопрос о выборе модификации процесса.

В главе 3 рассматриваются гауссовские процессы и процессы с независимыми приращениями, в частности, пуассонский процесс, а также процессы Леви. Вначале напоминается теорема Колмогорова о согласованных распределениях и дается ее эквивалентная формулировка в терминах характеристических функций мер на евклидовых пространствах. Последняя позволяет легко установить существование важных классов зависимых случайных величин. Подробно прослеживается явная конструкция пуассоновского процесса по последовательности независимых экспоненциальных величин (как процесса восстановления) и проверяется независимость его приращений.

Глава 4 посвящена широко используемому в различных приложениях винеровскому процессу (или процессу броуновского движения). Показано, что этот процесс эквивалентным образом описывается как гауссовский процесс с нулевым средним и определенной ковариационной функцией, а также как процесс с независимыми гауссовскими приращениями определенного вида, начинающийся из нуля в нулевой момент времени. Излагается построение винеровского процесса по функциям Шаудера и последовательности независимых стандартных нормальных величин, приводящее к процессу с непрерывными траекториями. Здесь же дается и теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации процесса. Обсуждаются задачи, связанные с выходом винеровского процесса на заданный уровень.

В главу 5 отнесено знакомство с мартингалами, являющимися важным примером систем зависимых случайных величин. В этой связи подробно рассматривается аппарат условных математических ожиданий. Большое внимание уделяется фильтрации и марковским моментам (моментам остановки). Формулируется теорема Дуба об остановке и рассматриваются некоторые ее применения. Мартингальными методами решаются задачи о разорении игрока, а также оценивается вероятность разорения страховой компании в модели Крамера–Лундberга.

В главе 6 фигурируют марковские процессы как с непрерывным, так и дискретным временем. Главным образом исследуются цепи Маркова с конечным или счетным пространством состояний. Эти процессы находят применения в самых разнообразных областях. Из затронутых тем следует отметить варианты построения марковских цепей как по переходной матрице и начальному распределению, так и по инфинитезимальной матрице (конструкция Дуба), а кроме того, эргодическую теорему и дифференциальные уравнения Колмогорова.

Глава 7 содержит материал, относящийся к теории стационарных процессов. Здесь вводится нетривиальное понятие спектрального представления случайного процесса в виде интеграла по ортогональной случайной мере. Для этого используются теоремы Карунена, Герглотца и Бohnера–Хинчина. Изучается и класс процессов, стационарных в узком смысле, даются примеры таких процессов и отмечается их связь с преобразованиями, сохраняющими меру.

Наконец, заключительная глава 8 предлагает начальные сведения о стохастическом анализе и сильном решении стохастических дифференциальных уравнений. Акцент сделан на построении интеграла Ито, а также на формуле Ито, являющейся краеугольным камнем стохастического исчисления. Анализируется известное уравнение Ланжевена, приводящее к процессу Орнштейна–Уленбека. Очень сжато дается представление о возможных применениях в стохастической финансовой математике, например, в рамках модели финансового рынка Блэка–Шоулса–Мертона.

Автор признателен своим друзьям и коллегам за обсуждение рассматриваемого круга вопросов. Особая благодарность брату и сестре — Александру и Екатерине Булинским, профессорам кафедры теории вероятностей мехмата МГУ, без поддержки которых проект книги не был бы осуществлен.

*Андрей Булинский,
доцент кафедры высшей математики МФТИ*

Глава 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Системы множеств. Мера.

Вероятностное пространство

Напомним ряд важнейших определений. Пусть (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство, т.е. в (непустом) множестве S выделена некоторая система \mathcal{B} его подмножеств, образующих σ -алгебру. Это означает, что $\emptyset \in \mathcal{B}$, а если $A \in \mathcal{B}$, то дополнение $\overline{A} := S \setminus A \in \mathcal{B}$, и для последовательности $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$ имеем $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$ (тогда автоматически система \mathcal{B} будет замкнута и относительно конечных объединений ее элементов, а также относительно конечных и счетных пересечений¹).

Для произвольной системы \mathcal{M} подмножеств S существует порожденная ею σ -алгебра, обозначаемая $\sigma\{\mathcal{M}\}$. Это наименьшая σ -алгебра, которая содержит данную систему ($\sigma\{\mathcal{M}\}$ есть пересечение всех σ -алгебр подмножеств S , которые содержат \mathcal{M}). В частности, наименьшая σ -алгебра подмножеств \mathbb{R} , содержащая все открытые интервалы (a, b) , называется борелевской σ -алгеброй подмножеств прямой и обозначается $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Известно, что $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ порождается и другими системами, например, совокупностью всех полупрямых вида $(-\infty, x]$, где $x \in \mathbb{R}$. Если S — метрическое (или, более общим образом, топологическое) пространство, то σ -алгебру, порожденную системой открытых подмножеств, обозначают $\mathcal{B}(S)$, а её элементы носят название борелевских подмножеств S .

Система \mathcal{K} подмножеств S называется полукольцом, если выполнены следующие условия: 1) если $A, B \in \mathcal{K}$, то $A \cap B \in \mathcal{K}$; 2) если $A, B \in \mathcal{K}$ и $A \subset B$ (всюду пишем \subset вместо \subseteq), то $B \setminus A$ можно представить в виде конечного объединения попарно непересекающихся элементов \mathcal{K} . В главе 7 будут использованы такие системы. Совокупность полуинтервалов вида $(a, b]$, где $-\infty < a \leq b < \infty$, дает важный пример полукольца подмножеств \mathbb{R} .

¹Замкнутость системы подмножеств пространства S , содержащей \emptyset , относительно взятия дополнения и конечных объединений и пересечений означала бы, что данная система образует алгебру.

Упражнение 1. Пусть A_1, A_2, \dots — последовательность подмножеств S . Как с помощью операций пересечения и объединения задается совокупность A всех точек x из S , которые принадлежат бесконечному числу указанных подмножеств, т.е. $x \in A_{k_1}, x \in A_{k_2}, \dots$, где $k_1 < k_2 < \dots$, причем $k_i = k_i(x)$, $i \in \mathbb{N}$.

Упражнение 2. Опишите σ -алгебру, порожденную разбиением множества S на счетное число подмножеств A_n , иначе говоря, $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, причем $A_i \cap A_j = \emptyset$ для $i \neq j$.

Упражнение 3. Пусть (S, \mathcal{B}) — измеримое пространство и множество $C \in \mathcal{B}$. Докажите, что σ -алгеброй является система множеств $\mathcal{B}_C := C \cap \mathcal{B} (= \{C \cap B, B \in \mathcal{B}\})$. В частности, σ -алгебра борелевских подмножеств борелевского множества C из \mathbb{R} вводится как $\mathcal{B}(C) := C \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Произведение измеримых пространств $(S_1, \mathcal{B}_1), \dots, (S_n, \mathcal{B}_n)$ — это пространство (S, \mathcal{B}) такое, что

$$S = S_1 \times \dots \times S_n, \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_n.$$

Иначе говоря, декартово произведение S состоит из точек вида $x = (x_1, \dots, x_n)$, а \mathcal{B} — наименьшая σ -алгебра подмножеств S , содержащая все *прямоугольники* $B = B_1 \times \dots \times B_n$, здесь $x_k \in S_k$, $B_k \in \mathcal{B}_k$, $k = 1, \dots, n$.

Определение 1. *Мерой* на измеримом пространстве (S, \mathcal{B}) называется функция $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$ такая, что $\mu(\emptyset) = 0$ и если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Последнее свойство называется *счетной аддитивностью* μ . Из него следует *конечная аддитивность*, т.е. мера от конечного объединения попарно непересекающихся множеств из \mathcal{B} равна сумме их мер.

Мера Лебега μ на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, где $n \in \mathbb{N}$, задается вначале на прямоугольниках вида $C = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]$, причем $a_k \leq b_k$, $k = 1, \dots, n$, следующим образом:

$$\mu(C) := \prod_{k=1}^n (b_k - a_k).$$

Затем она однозначно продолжается (см., напр., [5, с. 317]) на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. При этом $\mu(\mathbb{R}^n) = \infty$, но получается *σ -конечная мера*, т.е. \mathbb{R}^n можно разбить на счетное число борелевских множеств (например, кубов с ребрами единичной длины), имеющих конечную меру Лебега. Мера Лебега на $\mathcal{B}(C)$, где C — борелевское подмножество \mathbb{R}^n , является ее сужением с $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ на $\mathcal{B}(C)$ (см. упр. 3).

Определение 2. *Вероятностью* называется мера μ , для которой $\mu(S) = 1$.

Тогда по традиции вместо μ пишут P (от английского *probability*). Доказывается, что для *конечной меры* μ (т.е. при $\mu(S) < \infty$) счетная аддитивность равносильна одновременному выполнению двух свойств — *конечной аддитивности и непрерывности*. Последнее означает, что для $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$ таких, что $A_{n+1} \subset A_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$,

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n). \quad (1)$$

Вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) вводится как измеримое пространство (Ω, \mathcal{F}) , на котором задана вероятность P . Здесь Ω — *пространство элементарных исходов* (некоторого случайного эксперимента), элементы которого (исходы) обозначаются ω . Подмножества Ω , входящие в \mathcal{F} , называются *событиями*. Описание случайных экспериментов с помощью вероятностных пространств было предложено А.Н. Колмогоровым. Перечисленные выше требования к событиям и вероятности носят название аксиоматики Колмогорова.

Если Ω состоит из конечного или счетного числа элементарных исходов, а \mathcal{F} содержит все подмножества Ω , то

(Ω, \mathcal{F}, P) называется *дискретным вероятностным пространством*. При этом, обозначив $p_k = P(\{\omega_k\})$, имеем

$$P(A) = \sum_{k: \omega_k \in A} p_k. \quad (2)$$

Упражнение 4. Убедитесь, что располагая неотрицательными числами p_k ($k = 1, 2, \dots$), в сумме дающими единицу, можно построить дискретное вероятностное пространство с помощью формулы (2).

В частном случае, когда $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ и каждому исходу приписана вероятность $\frac{1}{N}$ (т.е. $p_k = \frac{1}{N}$ для $k = 1, \dots, N$), имеем $P(A) = \frac{N(A)}{N}$, где $N(A)$ — число элементарных исходов, составляющих событие A . Эта формула носит название *классического определения вероятности*.

Вероятность обладает рядом простых свойств. Например, $P(A) \leq P(B)$, если $A \subset B$ (A и B — события). *Субаддитивность* вероятности означает, что для любого конечного или счетного набора событий A_1, A_2, \dots верно неравенство (убедитесь в качестве упражнения)

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n P(A_n). \quad (3)$$

При подсчете вероятности некоторого события A часто используется введение вспомогательного *разбиения* пространства Ω на события B_1, B_2, \dots , т.е. $\Omega = \bigcup_n B_n$, причем $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$, а затем в силу счетной (а значит, и конечной) аддитивности вероятности применяется равенство

$$P(A) = \sum_n P(A \cap B_n), \quad (4)$$

часто мы пишем AB вместо $A \cap B$, а иногда и $P(A, B, C)$ вместо $P(A \cap B \cap C)$.

Без ограничения общности будем далее предполагать, что вероятностное пространство *полно*, т.е. любое подмножество

события нулевой вероятности входит в σ -алгебру \mathcal{F} и, следовательно, также имеет вероятность нуль. При этом говорят, что вероятностная мера P полна.

Упражнение 5. Показать, что, добавив в \mathcal{F} все подмножества событий нулевой вероятности, образующие класс \mathcal{N} нулевых множеств, мы получим σ -алгебру $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \mathcal{N}$. Прoverить, что если положить $\bar{P}(C) := P(A)$ для $C = A \cup B$, где $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{N}$, мы получим корректно заданное² продолжение исходной вероятности P с \mathcal{F} на $\bar{\mathcal{F}}$, которое окажется полной вероятностной мерой.

Условная вероятность A при условии B определяется формулой

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{где } A, B \in \mathcal{F} \text{ и } P(B) \neq 0. \quad (5)$$

Если дано разбиение Ω на события B_1, B_2, \dots , имеющие положительную вероятность, то из (4) и (5) мы сразу же получаем *формулу полной вероятности*:

$$P(A) = \sum_n P(A|B_n)P(B_n). \quad (6)$$

Говорят, что событие A не зависит от события B , если $P(A|B) = P(A)$. Однако более удобное *определение независимости* A и B (оно симметрично и не предполагает, что вероятности рассматриваемых событий не равны нулю) таково:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Определение 3. Семейство $\{A_t, t \in T\}$ состоит из *независимых* (в совокупности) событий, если для любого конечного множества индексов $J \subset T$ имеем

$$P\left(\bigcap_{t \in J} A_t\right) = \prod_{t \in J} P(A_t).$$

²т.е. $C = A_1 \cup B_1 = A_2 \cup B_2$, где $A_i \in \mathcal{F}$ и $B_i \in \mathcal{N}$ ($i = 1, 2$), влечет $P(A_1) = P(A_2)$.

Часто независимые события возникают при рассмотрении произведений вероятностных пространств (см. далее теорему Фубини в пункте 1.5).

Нам потребуется также

Лемма 1 (Борель–Кантелли).

1. Пусть события A_1, A_2, \dots таковы, что $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$.

Тогда $P(A) = 0$ для

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m. \quad (7)$$

2. Если A_1, A_2, \dots — независимые события и $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, то $P(A) = 1$, где A фигурирует в (7).

Если какое-то свойство выполнено для элементарных исходов, образующих событие вероятности единица, то говорят, что это свойство имеет место *почти наверное* (п.н.). Первое утверждение леммы Бореля–Кантелли означает (см. упр. 1), что бесконечное число событий из последовательности A_1, A_2, \dots происходит с нулевой вероятностью, а второе — что почти наверное.

1.2. Измеримые отображения. Распределение случайной величины

Понятие случайной величины было введено для того, чтобы количественно описывать результаты случайных экспериментов. Простейшие примеры таких величин — это количество выпавших “гербов” при подбрасывании монеты n раз или размер выигрыша в лотерею какого-то определенного её участника. Для развития теории важную роль играет

Определение 4. Случайная величина X — это действительная функция, заданная на Ω и обладающая свойством измеримости, т.е. прообраз любого борелевского множества прямой является событием (пишут $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Другими словами, для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ его прообраз

$$X^{-1}(B) := \{X \in B\} = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}. \quad (8)$$

Легко видеть, что на дискретном вероятностном пространстве любая действительная функция будет случайной величиной.

Распределением случайной величины X называется мера P_X на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, определяемая формулой

$$\mathsf{P}_X(B) := \mathsf{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \quad (9)$$

Часто вместо P_X пишут *Law*(X), при этом говорят о *законе распределения* величины X .

Упражнение 6. Проверить, что формула (9) задает вероятность на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Случайная величина X называется *бернуlliевской* (с параметром $p \in (0, 1)$), если

$$\mathsf{P}(X = 1) = p, \quad \mathsf{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Говорят, что Y имеет *биномиальное распределение* с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0, 1)$ (пишут $Y \sim B(n, p)$), если

$$\mathsf{P}(Y = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n,$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (как обычно, $0! := 1$).

Запись $Z \sim \text{Pois}(\lambda)$ означает, что случайная величина Z имеет *распределение Пуассона* с параметром $\lambda > 0$, т.е.

$$\mathsf{P}(Z = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Упражнение 7. Доказать, что справедливость (8) для каждого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ равносильна тому, что $X^{-1}(C) \in \mathcal{F}$ для любого C из системы \mathcal{M} , порождающей $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Последнее упражнение показывает естественность данного определения измеримости. Действительно, на практике мы сталкиваемся с необходимостью ответить на вопрос, лежит ли *измеряемое* значение случайной величины в некотором интервале (a, b) . Например, можно ли утверждать, что с вероятностью, близкой к 0,99, время исправной работы электрической лампочки будет больше, чем s часов (в данном случае интересующий нас интервал — это (s, ∞))?

Отметим также, что в ряде случаев можно говорить и о вероятности попадания значений случайной величины в множества, не входящие в борелевскую σ -алгебру. Простейший пример такого рода представляет (*вырожденная*) случайная величина $X = c$, где c — некоторая константа. Тогда для любого $D \subset \mathbb{R}$, очевидно, $P(X \in D)$ есть единица или нуль в зависимости от того, принадлежит или нет константа c этому множеству.

Упражнение 8. Постройте пример невырожденных случайных величин X и Y , определенных на одном и том же вероятностном пространстве и таких, что для некоторого множества $C \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ имеем $X^{-1}(C) \in \mathcal{F}$, но $Y^{-1}(C) \notin \mathcal{F}$.

Пример 1. Пусть Q — вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Покажем, что на некотором вероятностном пространстве находится случайная величина X , для которой $P_X = Q$.

Выберем $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P = Q$, а $X = I$ — тождественное отображение \mathbb{R} в себя. Легко видеть, что это — искомая случайная величина.

Заметим, что сказанное допускает обобщения на случайные векторы.

Случайные величины образуют линейное пространство (сумма случайных величин и произведение случайной величины на константу являются случайными величинами).

Функция распределения случайной величины X определяется формулой

$$F_X(x) := P_X((-\infty, x]) = P(\omega : X(\omega) \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

- 1) не убывает на \mathbb{R} ;
- 2) непрерывна справа в каждой точке $x \in \mathbb{R}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$.

Более того, любая функция с такими свойствами может служить функцией распределения некоторой случайной величины.

чины. Заметим, что

$$P_X((a, b]) = F_X(b) - F_X(a) \quad \text{для } -\infty < a \leq b < \infty,$$

поэтому по F_X мера P_X однозначно восстанавливается на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Здесь применяется теорема Каратеодори об однозначном продолжении вероятностной меры с полукольца множеств на порожденную им σ -алгебру (см., напр., [1, с. 419]).

Плотность (распределения) случайной величины X — это такая неотрицательная функция $p = p_X$ на \mathbb{R} , что при всех $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \int_{(-\infty, x]} p(u) du. \quad (10)$$

Разумеется, плотность существует не у каждой случайной величины. Интеграл в (10) понимается как интеграл по мере Лебега на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ от функции $p\mathbb{I}_{(-\infty, x]}$, где \mathbb{I}_B — индикатор множества B , т.е. $\mathbb{I}_B(u) = 1$ для $u \in B$ и $\mathbb{I}_B(u) = 0$ в противном случае. Чтобы сейчас не отвлекаться на детали, можем ограничиться рассмотрением кусочно-непрерывных функций p , для которых интеграл Лебега в (10) совпадает с (несобственным) интегралом Римана.

Плотность p является неотрицательной интегрируемой функцией такой, что

$$\int_{\mathbb{R}} p(u) du = 1 \quad (11)$$

(где по-прежнему берется интеграл по мере Лебега, построение которого дано в следующем пункте). Обратно, любая неотрицательная функция со свойством (11) может служить плотностью распределения некоторой случайной величины.

Случайная величина X называется *равномерно распределенной на отрезке* $[a, b]$ (где $a < b$), если ее плотность дается формулой

$$p_X(u) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{для } u \in [a, b], \\ 0 & \text{для } u \notin [a, b]. \end{cases} \quad (12)$$

Случайная величина Y имеет *показательное* (экспоненциальное) распределение с параметром $\lambda > 0$ (тогда пишут

$Y \sim \text{Exp}(\lambda)$), если

$$p_Y(u) = \begin{cases} 0 & \text{для } u < 0, \\ \lambda e^{-\lambda u} & \text{для } u \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$

Напомним также, что величина Z называется *гауссовской* (или *нормальной*) с параметрами a и σ^2 , где $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$, если

$$p_Z(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad u \in \mathbb{R} \quad (14)$$

Используется обозначение $Z \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Обычно в семейство гауссовых включают и величину $\mathcal{N}(a, 0)$, полагая, что в этом случае (т.е. при $\sigma^2 = 0$) имеем $Z = a$ п.н.

Величина V имеет распределение *Коши* с параметром $\alpha > 0$ (*стандартное* при $\alpha = 1$), если ее плотность

$$p_V(u) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + u^2)}, \quad u \in \mathbb{R} \quad (15)$$

Пишут $S \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ и говорят, что случайная величина S имеет *гамма-распределение* с параметрами $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$, если

$$p_S(u) = \frac{\lambda^\alpha u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda u} \mathbb{I}_{[0, \infty)}(u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

где гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du.$$

В частности, при $\alpha = r$ (r — натуральное число) и $\lambda = \frac{1}{2}$ получается часто используемое в математической статистике *распределение хи-квадрат* с r степенями свободы, т.е. распределение суммы квадратов r независимых нормальных величин с параметрами 0 и 1.

Упражнение 9. Проверьте, что функция, задаваемая формулой (14), удовлетворяет соотношению (11).

Определение 5. Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется борелевской, если для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ его прообраз $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Это определение переносится на функцию f , отображающую метрическое пространство S_1 в метрическое простран-

ство S_2 (оба пространства снабжаются σ -алгебрами борелевских множеств). А именно, требуется, чтобы прообраз каждого борелевского множества из S_2 был борелевским множеством в S_1 . В частности, в определении 5 мы рассматривали в качестве S_1 и S_2 числовую прямую \mathbb{R} с ее борелевскими подмножествами $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (см. также упр. 3).

Упражнение 10. Пусть X — случайная величина со значениями в борелевском множестве C и $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ — борелевская функция. Проверить, что $f(X)$ — случайная величина.

Замечание 1. Результат этого упражнения легко обобщается на суперпозиции n измеримых отображений произвольных измеримых пространств. Например, пусть даны измеримые пространства (S_k, \mathcal{B}_k) , где $k = 1, 2, 3$, а $f_1 : S_1 \rightarrow S_2$ и $f_2 : S_2 \rightarrow S_3$, причем f_1, f_2 являются соответственно $\mathcal{B}_1|\mathcal{B}_2$ - и $\mathcal{B}_2|\mathcal{B}_3$ -измеримыми. Тогда отображение $f_2 \circ f_1 : S_1 \rightarrow S_3$ будет $\mathcal{B}_1|\mathcal{B}_3$ -измеримо (т.е. $\{x \in S_1 : f_2(f_1(x)) \in D\} \in \mathcal{B}_1$ для любого $D \in \mathcal{B}_3$).

Пример 2. Пусть $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ — неубывающая функция. Докажем, что она борелевская.

В силу упр. 7 достаточно проверить, что прообраз множества $(-\infty, x]$ входит в $\mathcal{B}(C)$ для каждого $x \in \mathbb{R}$. Множество $A = \{u \in C : f(u) \leq x\}$ имеет вид $C \cap (-\infty, a]$ или $C \cap (-\infty, a]$, поскольку функция f не убывает, здесь $a = a(x) \in \mathbb{R}$. Следовательно, $A \in \mathcal{B}(C)$ согласно упр. 3.

Упражнение 11. Пусть S_1, S_2 — метрические пространства и $f : S_1 \rightarrow S_2$ — непрерывное отображение. Проверить, что f — борелевская функция.

Упражнение 12. Пусть случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$. Найти распределение случайных величин $Y = X^2$ и $Z = \sin X$.

Полезно ввести следующее понятие. *Расширенной случайной величиной* называется функция $Z : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ такая, что $\{Z \in B\} \in \mathcal{F}$ для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, а также $\{Z = -\infty\} \in \mathcal{F}$ и $\{Z = \infty\} \in \mathcal{F}$.

1.3. Интеграл Лебега

Математическое ожидание случайной величины X задается формулой

$$EX = \int_{\Omega} X dP,$$

т.е. представляет собой *интеграл Лебега* от (измеримой!) функции $X = X(\omega)$ по мере P . Этот интеграл (пишут также $\int_{\Omega} X(\omega)P(d\omega)$) определяется в три этапа.

Вначале для *простой случайной величины* вида

$$X = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{I}_{A_k},$$

где события A_1, \dots, A_n образуют разбиение Ω , $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, полагаем

$$EX = \sum_{k=1}^n a_k P(A_k). \quad (17)$$

Далее для любой неотрицательной случайной величины X определяем

$$EX = \sup\{EY : Y \in \mathcal{P}, 0 \leq Y \leq X\} \leq \infty,$$

где \mathcal{P} – класс простых случайных величин. Наконец, знакопеременную величину X записываем в виде $X = X^+ - X^-$, где $X^+ := X\mathbb{I}_{\{X \geq 0\}}$ и $X^- := -X\mathbb{I}_{\{X < 0\}}$. Теперь вводим

$$EX := EX^+ - EX^-,$$

если не возникает ситуация $\infty - \infty$. В последнем случае говорят, что EX не существует (считается, что $\infty - c := \infty$, а $c - \infty := -\infty$ для любого числа $c \in \mathbb{R}$).

Упражнение 13. Объясните, почему определение (17) не зависит от представления X в виде линейной комбинации индикаторов событий, образующих разбиение, т.е. если $X = \sum_{i=1}^m b_i \mathbb{I}_{B_i}$, где B_1, \dots, B_m — разбиение Ω и $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}_+$, то $EX = \sum_{i=1}^m b_i P(B_i)$ совпадает с (17).

Упражнение 14. Покажите, что определение (17) будет действовать и для знакопеременной простой случайной величины X , т.е. когда $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Упражнение 15. Постройте неубывающую последовательность неотрицательных простых величин X_n , сходящихся на Ω к данной случайной величине $X \geq 0$, т.е. $0 \leq X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$ и $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ при всех $\omega \in \Omega$ (пишем $0 \leq X_n \nearrow X$ при такой монотонной сходимости).

Упражнение 16. Докажите, что для произвольной последовательности простых величин $0 \leq X_n \nearrow X$ верно соотношение $\mathbf{E}X = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}X_n$.

В связи с механической интерпретацией формулы (17) (как центра тяжести системы материальных точек a_1, \dots, a_n , в которых соответственно сосредоточены веса $P(A_1), \dots, P(A_n)$) математическое ожидание называют *средним значением* случайной величины, или просто *средним*.

Полезной является теорема о *монотонной сходимости*, где $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность случайных величин (не обязательно простых в отличие от упр. 16):

Теорема 1. Пусть $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots \nearrow X$ на Ω . Тогда существует

$$\mathbf{E}X = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}X_n. \quad (18)$$

Широко используется и теорема Лебега о *мажорируемой сходимости*:

Теорема 2. Пусть случайные величины X, Y и X_n , где $n \in \mathbb{N}$, таковы, что $X_n \rightarrow X$ на Ω при $n \rightarrow \infty$, причем $|X_n| \leq Y$ и $\mathbf{E}Y < \infty$. Тогда X — интегрируемая величина и выполнено (18).

Совокупность случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве и для которых конечно математическое ожидание, обозначается $L^1 = L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Величины из L^1 называются *интегрируемыми*. Точнее говоря, мы не различаем при этом случайные величины X и Y , которые являются

эквивалентными, т.е. для которых $P(\omega : X(\omega) \neq Y(\omega)) = 0$ (значит, X и Y совпадают п.н.). Итак, L^1 состоит из классов эквивалентных функций, а операции сложения и умножения на константу для классов производятся как указанные операции над представителями этих классов (и результат определен по-прежнему с точностью до эквивалентности, см. далее (22)). Заметим, что $X \in L^1$ тогда и только тогда, когда $|X| \in L^1$.

Математическое ожидание обладает *свойством линейности*: если X, Y — интегрируемые случайные величины, то для любых констант $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ величина $\alpha X + \beta Y$ является интегрируемой и

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E X + \beta E Y.$$

Таким образом, L^1 — линейное (вещественное) пространство.

Приведем несколько очень важных результатов.

Пусть X — случайная величина, $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, причем f — неубывающая функция. Тогда для любого $t > 0$

$$E f(|X|) \geq f(t)P(|X| \geq t),$$

откуда при $f(t) > 0$ имеем *неравенство Маркова*:

$$P(|X| \geq t) \leq \frac{E f(|X|)}{f(t)}. \quad (19)$$

Оценка (19) нетривиальна, когда $E \frac{f(|X|)}{f(t)} < 1$. Кроме того, отметим, что $|X|$ и $f(|X|)$ — случайные величины в силу замечания 1 (f и $|\cdot|$ — борелевские функции согласно примеру 2 и упр. 11).

В частности, из (19) вытекает *неравенство Чебышева*:

$$P(|X - EX| \geq t) \leq \frac{DX}{t^2}, \quad t > 0, \quad (20)$$

где *дисперсия*³ определяется для квадратично интегрируемой случайной величины формулой

$$DX = E(X - EX)^2,$$

³Используется и ее обозначение *var X* от английского термина *variance*.

следовательно, $\text{DX} \in [0, \infty]$. Обычно говорят, что дисперсия существует, если она конечна. Механическая интерпретация введенной характеристики такова: дисперсия — это момент инерции некоторой системы материальных точек (относительно центра тяжести). Заметим, что $\text{DX} = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$.

Пример 3. Найдем дисперсию бернуlliевской величины X .

Имеем $\mathbb{E}X = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$. Величина X^2 принимает соответственно значения $1^2 = 1$ с вероятностью p и $0^2 = 0$ с вероятностью $1 - p$. Поэтому $\text{DX} = p - p^2 = p(1 - p)$.

Пусть $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклой функцией, т.е.

$$h(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha h(x) + (1 - \alpha)h(y)$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in [0, 1]$. Тогда, если $\mathbb{E}X$ конечно, то верно неравенство Йенсена:

$$h(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}(h(X)). \quad (21)$$

Напомним еще несколько важных свойств математического ожидания:

1) если величина X интегрируема и $\mathbb{P}(C) = 0$, то

$$\int_C X d\mathbb{P} := \mathbb{E}X \mathbb{I}_C = 0; \quad (22)$$

2) если $\mathbb{E}|X| = 0$, то $X = 0$ п.н.;

3) если величины X и Y таковы, что X интегрируема, а также $Y = X$ п.н., то Y интегрируема и $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X$;

4) если величины X и Y интегрируемы и $X \leq Y$ п.н., то $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$;

5) если X_1, X_2, \dots — неотрицательные случайные величины, то

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}X_n. \quad (23)$$

При этом допускается случай $\infty = \infty$.

Если правая часть (23) конечна, то $\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$ п.н. Мы пользуемся тем, что для неотрицательной расширенной случайной

величины Z точно так же можно ввести математическое ожидание (если оно конечно, то $Z < \infty$ п.н.). Как правило, все рассматриваемые далее расширенные случайные величины оказываются конечными п.н. (иначе говоря, Z совпадает с некоторой действительной случайной величиной X на событии, имеющим вероятность единица).

Для знакопеременных случайных величин соотношение (23) верно, когда $\sum_{n=1}^{\infty} E|X_n| < \infty$.

Аналогично L^1 вводится пространство $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $p > 0$, состоящее из (классов эквивалентных) случайных величин таких, что $E|X|^p < \infty$. Пространство L^p при $p \geq 1$ будет *банаховым*, если ввести (на классах эквивалентности!) норму $\|X\|_p := (E|X|^p)^{1/p}$. Пространство L^2 со скалярным произведением $(X, Y) := EXY$ является *гильбертовым*.

Отметим, что из (21) следует неравенство Ляпунова: $\|X\|_p \leq \|X\|_q$ при $1 \leq p \leq q$.

Если $S = X + iY$, где X, Y — интегрируемые действительные случайные величины, а $i^2 = -1$, то полагают

$$ES := EX + iEY. \quad (24)$$

Интеграл по конечной, но необязательно вероятностной, мере ν на (S, \mathcal{B}) ($0 < \nu(S) < \infty$) задается формулой

$$\int_S f(x)\nu(dx) := \nu(S) \int_S f(x)P(dx),$$

где $P(B) := \frac{\nu(B)}{\nu(S)}$, $B \in \mathcal{B}$ (или эквивалентным образом все три этапа построения математического ожидания можно повторить и для ν). Разумеется, не каждая измеримая функция f будет интегрируемой по заданной мере.

Для борелевской⁴ функции $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ справедлива формула

$$Eh(X) = \int_{\mathbb{R}} h(x)P_X(dx), \quad (25)$$

⁴В частности, кусочно-непрерывная функция h — борелевская.

где оба интеграла существуют или не существуют одновременно (и если существуют, то равны). Учитывая, что распределение P_X однозначно связано с функцией распределения $F_X(\cdot)$ случайной величины X , вместо интеграла в правой части (25) пишут $\int_{\mathbb{R}} h(x)dF_X(x)$.

Если у величины X существует плотность p , то

$$Eh(X) = \int_{\mathbb{R}} h(x)p(x)dx. \quad (26)$$

Эта формула — частный случай общей формулы перехода к интегрированию по новой мере, относительно которой *абсолютно непрерывна*⁵ исходная мера. В (26) (и далее в (32)) фигурируют интегралы, берущиеся по мере Лебега. Они определяются для σ -конечной меры μ на (S, \mathcal{B}) аналогично интегралу по конечной мере, а именно, рассматривается разбиение пространства S на счетное число попарно непересекающихся множеств $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$, для которых $\mu(B_k) < \infty$ при всех $k \in \mathbb{N}$, а затем для измеримой $f \geq 0$ вводится

$$\int_S f(x)\mu(dx) := \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} f|_{B_k} \mu_k(dx),$$

где $f|_{B_k}$ — сужение функции f на множество B_k , μ_k — сужение меры μ на $(B_k, \mathcal{B} \cap B_k)$. Доказывается, что результат не зависит от выбора разбиения пространства S . Для знакопеременной функции f интеграл вводится по той же схеме, что и при построении $Eh(X)$, когда X имеет значения разных знаков.

Упражнение 17. Объясните, почему у *дискретной случайной величины* (т.е. принимающей конечное или счетное число различных значений) не существует плотности.

Упражнение 18. Постройте такую измеримую функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, а также меры μ и ν на пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, для которых $\int_{\mathbb{R}} f d\mu$ существует, но $\int_{\mathbb{R}} f d\nu$ не существует.

⁵Это понятие дается в пункте 5.1.

Для дискретной случайной величины X и борелевской h верна формула

$$\mathbb{E}h(X) = \sum_k h(x_k)P(X = x_k), \quad (27)$$

где суммирование ведется по всем возможным значениям этой величины (при счетном множестве значений требуется абсолютная сходимость ряда (27)).

Упражнение 19. Вычислить первые два момента (если они существуют), т.е. $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}X^2$, для каждой из случайных величин, введенных в пункте 1.2.

Приведем еще полезную формулу интегрирования по вероятностной мере P на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, функция распределения которой $F(x) = P((-\infty, x])$, $x \in \mathbb{R}$, такова, что имеет скачки в точках a_1, \dots, a_n , где $-\infty = a_0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} = \infty$, и на интервалах (a_k, a_{k+1}) , $k = 0, \dots, n$, существует производная $F'(x)$. Тогда для измеримой функции $f \geq 0$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dF(x) = \sum_{k=1}^n f(a_k)p_k + \sum_{k=0}^n \int_{(a_k, a_{k+1})} f(x)F'(x)dx,$$

здесь $p_k = F(a_k) - F(a_{k-})$ есть величина скачка функции F в точке a_k (т.е. $F(x-) = \lim_{u \uparrow x} F(u)$ — предел слева). Заметим, что эта формула интегрирования вытекает из общего результата, описывающего разложение меры в сумму дискретной, абсолютно непрерывной и сингулярной компонент.

Упражнение 20. Пусть $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ и константа $c > 0$. Найдите функцию распределения величины $Y := \min\{c, X\}$ и вычислите $\mathbb{E}Y$.

Кроме того, полезна *формула интегрирования по частям*. Пусть F и G — обобщенные функции распределения, т.е. обладающие свойствами 1, 2 и 3 функций распределения, а вместо свойства 4 требуем, чтобы $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) < \infty$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) < \infty$. Тогда для любых $-\infty < a < b < \infty$ верно равенство

$$\int_{(a,b]} F(x)dG(x) = FG|_a^b - \int_{(a,b]} G(x-)dF(x), \quad (28)$$

где

$$FG|_a^b = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

В частности, отсюда можно получить, что для случайной величины X абсолютный момент порядка m ($m \in \mathbb{N}$)

$$\mathbb{E}|X|^m = m \int_{(0, \infty)} x^{m-1} (1 - F_X(x) + F_X(-x)) dx.$$

Для неотрицательной случайной величины X имеем

$$\mathbb{E}X = \int_{(0, \infty)} (1 - F_X(x)) dx, \quad \mathbb{E}X^2 = 2 \int_{(0, \infty)} x(1 - F_X(x)) dx.$$

Если для случайных величин X и Y существуют $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$ и $\mathbb{E}XY$, то ковариацией X и Y называется число

$$\text{cov}(X, Y) := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y. \quad (29)$$

Ковариация представляет собой билинейную функцию. Очевидно, дисперсия X задается формулой $DX := \text{cov}(X, X)$.

Для случайных величин из пространства L^2 ковариация существует и, более того,

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq (DX \cdot DY)^{1/2},$$

поскольку в силу неравенства Коши–Буняковского–Шварца:

$$|(X, Y)| \leq \|X\| \|Y\|$$

(норма и скалярное произведение в L^2 были введены ранее). Если $X \in L^2$ и константа $c \in \mathbb{R}$, то

$$D(cX) = c^2 DX, \quad D(X + c) = DX.$$

Для величин $X_1, \dots, X_n \in L^2$, полагая

$$J = \{i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\},$$

можем записать

$$D \left(\sum_{k=1}^n X_k \right) = \sum_{k=1}^n DX_k + \sum_{i,j \in J} \text{cov}(X_i, X_j). \quad (30)$$

В заключение этого раздела приведем часто используемый результат.

Теорема 3 (Фубини). Пусть Q_1 и Q_2 — вероятностные меры соответственно на измеримых пространствах (S_1, \mathcal{B}_1) и (S_2, \mathcal{B}_2) . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) на пространстве $(S, \mathcal{B}) = (S_1 \times S_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ существует единственная вероятность P , обозначаемая $Q_1 \otimes Q_2$, такая, что

$$P(B_1 \times B_2) = Q_1(B_1)Q_2(B_2)$$

для любых $B_1 \in \mathcal{B}_1$ и $B_2 \in \mathcal{B}_2$;

- 2) если $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по мере P (а значит, и \mathcal{B} -измерима), то отображения

$$x_1 \mapsto \int_{S_2} f(x_1, x_2) Q_2(dx_2) \quad \text{и} \quad x_2 \mapsto \int_{S_1} f(x_1, x_2) Q_1(dx_1)$$

являются соответственно \mathcal{B}_1 - и \mathcal{B}_2 -измеримыми и

$$\begin{aligned} \int_S f(x) P(dx) &= \int_{S_1} \left(\int_{S_2} f(x_1, x_2) Q_2(dx_2) \right) Q_1(dx_1) = \\ &= \int_{S_2} \left(\int_{S_1} f(x_1, x_2) Q_1(dx_1) \right) Q_2(dx_2), \quad x = (x_1, x_2), \end{aligned} \quad (31)$$

причем все интегралы в (31) существуют;

- 3) если для \mathcal{B} -измеримой функции $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ существует интеграл

$$\int_{S_1} \left(\int_{S_2} |f(x_1, x_2)| Q_2(dx_2) \right) Q_1(dx_1) < \infty$$

или существует

$$\int_{S_2} \left(\int_{S_1} |f(x_1, x_2)| Q_1(dx_1) \right) Q_2(dx_2) < \infty,$$

то существует (конечный) $\int_S f(x) P(dx)$ и выполнено равенство (31).

Таким образом, если существует двойной интеграл по мере P , то он может быть сведен к повторному, берущемуся в произвольном порядке. Если же существует повторный интеграл от модуля функции f , то существует и двойной, который совпадает с повторными.

Упражнение 21. Постройте пример, показывающий, что если в условиях пункта 3 теоремы Фубини отказаться от взятия модуля функции f (т.е. рассматривать f вместо $|f|$), то утверждение не обязано выполняться.

Заметим, что если отождествить событие B_1 с множеством $\tilde{B}_1 = B_1 \times S_2$, а B_2 — с множеством $\tilde{B}_2 = S_1 \times B_2$, то в пространстве $(S_1 \times S_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, Q_1 \otimes Q_2)$ они будут независимы, т.е. независимы будут события \tilde{B}_1 и \tilde{B}_2 . Известно, что теорема Фубини обобщается на произведение n вероятностных пространств, а также существуют ее обобщения для σ -конечных мер на измеримых пространствах. В следующих двух главах мы затронем проблематику независимости бесконечных семейств событий, а также семейств случайных величин.

1.4. Случайные векторы

Приведенное в пункте 1.2 определение случайной величины (и ее распределения) легко переносится на отображения в более общие измеримые пространства, чем $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Для любых измеримых пространств (V, \mathcal{A}) и (S, \mathcal{B}) отображение $h : V \rightarrow S$ будет $\mathcal{A}|\mathcal{B}$ -измеримо, если $h^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ при любом $B \in \mathcal{B}$. Если (V, \mathcal{A}) снабжено вероятностью, то h обычно называют *случайным элементом*. Заметим, что *случайный вектор* $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, т.е. вектор-столбец с компонентами X_1, \dots, X_n (тем не менее пишем $X = (X_1, \dots, X_n)$) можно понимать просто как упорядоченный набор n действительных случайных величин.

Упражнение 22. Покажите, что Z — расширенная случайная величина тогда и только тогда, когда $Z \in \mathcal{F}|\mathcal{B}([-\infty, \infty])$, где последняя σ -алгебра состоит из множеств вида B , $B \cup \{-\infty\}$, $B \cup \{\infty\}$, $B \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$, $\{-\infty\}$, $\{\infty\}$ и $\{-\infty\} \cup \{\infty\}$, здесь $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Всюду вместо $+\infty$ пишем ∞ .

Напомним (см. замечание 1), что если $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайный вектор, а $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ — борелевская функция, т.е. $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)|\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, то $f(X)$ — случайный вектор.

Плотность $p_X(x)$ вектора $X = (X_1, \dots, X_n)$ — это такая неотрицательная интегрируемая по мере Лебега в \mathbb{R}^n функ-

ция, что для любого борелевского⁶ множества $B \subset \mathbb{R}^n$ верно равенство

$$P_X(B) = \int_B p_X(x) dx, \quad \text{где } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (32)$$

Заметим, что p_X для вектора также можно определять по (многомерной) функции распределения, используя аналог (10), что означает выбор в (32)

$$B = (-\infty, x] := (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n], \quad (33)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Плотность определена однозначно с точностью до ее изменения на множестве (лебеговской) меры нуль.

При наличии плотности p_X вектора $X = (X_1, \dots, X_n)$ для любого подвектора Y , состоящего из части компонент вектора X , т.е. $Y = (X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$, тоже существует плотность p_Y . Чтобы найти p_Y , надо проинтегрировать p_X по всем переменным u_j , для которых $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$. В частности,

$$p_{X_1}(u_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X_1, X_2)}(u_1, u_2) du_2. \quad (34)$$

Для случайного вектора X со значениями в пространстве \mathbb{R}^n справедливы аналоги формул (25) и (26), в которых теперь $x \in \mathbb{R}^n$, а интегрирование по \mathbb{R} заменяется на взятие интеграла по \mathbb{R}^n .

Упражнение 23. Пусть плотность распределения вектора (Y_1, Y_2) равна

$$p_{(Y_1, Y_2)}(x, y) = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} (1 + g(x, y)),$$

где функция $g(x, y) = 0$ вне квадрата $\{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$, а внутри $g(x, y) = xy(x^2 - y^2)$. Найдите распределение величин Y_1 и Y_2 , а также $\text{cov}(Y_1, Y_2)$.

⁶Из таких множеств состоит σ -алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, порожденная всеми открытыми подмножествами \mathbb{R}^n (порождающая система не единственна!).

На пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, где $n \in \mathbb{N}$, существует взаимно однозначное соответствие между конечными мерами и их функциями распределения (функция распределения F конечной меры Q вводится формулой $F(x) := Q((-\infty, x])$, здесь $x \in \mathbb{R}^n$ и множество $(-\infty, x]$ определено в (33)). Кроме того, существует взаимно однозначное соответствие между конечными мерами и их характеристическими функциями. Для меры Q ее *характеристическая функция* задается формулой

$$\begin{aligned}\varphi_Q(s) &:= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(s, x)} Q(dx), \quad s \in \mathbb{R}^n, \\ (s, x) &= \sum_{k=1}^n s_k x_k, \quad i^2 = -1.\end{aligned}\tag{35}$$

Если X — случайный вектор со значениями в \mathbb{R}^n , то его характеристическая функция $\varphi_X(\cdot)$ вводится как $\varphi_Q(\cdot)$, где $Q = P_X$. Пользуясь многомерным аналогом формулы (25), а также формулой (24), имеем

$$\varphi_X(s) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(s, x)} P_X(dx) = E e^{i(s, X)}, \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad i^2 = -1. \tag{36}$$

Напомним, что матрица C порядка n с действительными элементами $c_{k,r}$ называется *неотрицательно определенной* (пишут $C \geq 0$), если $(Cs, s) \geq 0$ при произвольном векторе $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, где

$$(Cs, s) = \sum_{k,r=1}^n c_{k,r} s_k s_r.$$

Говорят, что случайный вектор X со значениями в \mathbb{R}^n имеет *многомерное нормальное или гауссовское распределение* с параметрами a и C , где $a \in \mathbb{R}^n$, а симметричная матрица $C \geq 0$, если

$$\varphi_X(s) = \exp \left\{ i(s, a) - \frac{1}{2} (Cs, s) \right\}, \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad i^2 = -1. \tag{37}$$

Используется обозначение $X \sim \mathcal{N}(a, C)$.

Можно показать, что упомянутые свойства матрицы C необходимы и достаточны для того, чтобы функция, фигурирующая в правой части равенства (37), являлась характеристической функцией некоторой вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Доказывается, что если C — симметричная матрица, которая *строго положительно определена* (пишем $C > 0$), т.е.

$$(Cs, s) > 0 \text{ при } s \neq 0 \in \mathbb{R}^n$$

(это свойство не следует путать с положительностью всех элементов C), то у вектора X , имеющего характеристическую функцию вида (37), существует плотность

$$p_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|C|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (C^{-1}(x-a), (x-a)) \right\}, \quad (38)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а $|C|$ обозначает определитель матрицы C .

Упражнение 24. Проверьте, что интеграл по пространству \mathbb{R}^n от функции $p_X(\cdot)$, введенной в (38), равен единице (интеграл Лебега будет совпадать с несобственным интегралом Римана, поскольку интегрируется непрерывная функция).

Упражнение 25. Покажите, что функция $\varphi_X(\cdot)$ вида (37), где симметричная матрица $C > 0$, является характеристической функцией случайного вектора X с плотностью p_X , задаваемой формулой (38). Объясните, почему предыдущее упражнение содержится в данном.

Упражнение 26. С помощью многомерного аналога формулы (26) проверьте, что если $X \sim \mathcal{N}(a, C)$, то a — среднее значение вектора X и $C = (c_{k,r})$ — его ковариационная матрица. Другими словами,

$$a_k = \mathbb{E}X_k, \quad c_{k,r} = \text{cov}(X_k, X_r), \quad k, r = 1, \dots, n.$$

1.5. Семейства независимых случайных величин

Говорят, что семейства событий $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{F}$, $t \in T$, (здесь T — непустое параметрическое множество) *независимы*, если при любом выборе $A_t \in \mathcal{A}_t$ мы получим систему $\{A_t, t \in T\}$, состоящую из событий, независимых в смысле определения 3.

Определение 6. Семейство $\{X_t, t \in T\}$ состоит из *независимых* случайных величин, если независимы σ -алгебры, порожденные этими величинами.

Величина X_t порождает σ -алгебру (подалгебру \mathcal{F})

$$\sigma\{X_t\} := \{\{X_t \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\},$$

состоящую из прообразов всех борелевских множеств при отображении $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Поэтому определение 6 означает следующее: для любого конечного множества $J \subset T$ и любых борелевских множеств $B_t \subset \mathbb{R}$, где $t \in J$, верно равенство

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{t \in J} \{X_t \in B_t\}\right) = \prod_{t \in J} \mathsf{P}(\{X_t \in B_t\}). \quad (39)$$

Замечание 2. Для проверки независимости $\{X_t, t \in T\}$ достаточно проверять (39) не для всех борелевских $B_t, t \in J$, а лишь для множеств вида $B_t = (-\infty, x_t]$ (или, например, $B_t = [x_t, \infty)$) при всевозможных значениях $x_t \in \mathbb{R}$ ($t \in J$).

Очевидно, независимость событий из семейства $\{A_t, t \in T\}$ равносильна независимости их индикаторов, т.е. системы случайных величин $\{\mathbb{I}_{A_t}, t \in T\}$.

Случайные величины, не являющиеся независимыми, называются *зависимыми*. Возможность построения последовательности независимых случайных величин с заданными распределениями доказывается в следующей главе.

Упражнение 27. Пусть X_1, \dots, X_n — дискретные случайные величины (каждая из которых принимает конечное или счетное число своих различных значений). Тогда их независимость равносильна выполнению условия

$$\mathsf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^n \mathsf{P}(X_k = x_k), \quad (40)$$

где x_k — произвольное значение величины X_k ($k = 1, \dots, n$). Объясните, почему для недискретных величин независимость не сводится к справедливости (40) при произвольном выборе x_1, \dots, x_n .

Если величины X_1, \dots, X_n независимы и интегрируемы, то $\prod_{k=1}^n X_k \in L^1$, причем

$$\mathbb{E} \prod_{k=1}^n X_k = \prod_{k=1}^n \mathbb{E} X_k. \quad (41)$$

В частности, $\text{cov}(X, Y) = 0$ для независимых случайных величин $X, Y \in L^1$. Если $X_1, \dots, X_n \in L^2$ и независимы, то в силу (30) верна формула

$$\mathbb{D} \left(\sum_{k=1}^n X_k \right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{D} X_k.$$

Упражнение 28. Постройте пример, когда случайные величины интегрируемы, но их произведение неинтегрируемо.

Упражнение 29. Дайте пример зависимых, но некоррелированных величин $X, Y \in L^2$, т.е. таких, что $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Величины X_1, \dots, X_n независимы тогда и только тогда, когда характеристическая функция вектора $X = (X_1, \dots, X_n)$ распадается в произведение характеристических функций компонент, т.е.

$$\varphi_X(s_1, \dots, s_n) = \varphi_{X_1}(s_1) \dots \varphi_{X_n}(s_n), \quad s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}.$$

Если у вектора $X = (X_1, \dots, X_n)$ существует плотность $p_X(u_1, \dots, u_n)$, то независимость его компонент равносильна выполнению почти всюду по мере Лебега в \mathbb{R}^n условия

$$p_X(u_1, \dots, u_n) = p_{X_1}(u_1) \dots p_{X_n}(u_n), \quad (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n,$$

т.е. точки, для которых данное равенство не выполняется, образуют множество лебеговской меры нуль. Иначе говоря, совместная плотность величин X_1, \dots, X_n распадается в произведение их плотностей.

Сверткой функций распределения F и G называется функция

$$(F * G)(x) := \int_{\mathbb{R}} F(x - y) dG(y), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (42)$$

Упражнение 30. Докажите, что $F * G$ в формуле (42) является функцией распределения величины $X + Y$, где независимые X и Y имеют соответственно функции распределения F и G (следовательно, $F * G = G * F$).

Упражнение 31. Покажите, что если хотя бы одна из независимых величин X и Y имеет плотность, то существует плотность у $X + Y$ (и запишите формулу для p_{X+Y}). Убедитесь, что если существуют обе плотности p_X и p_Y , то их свертка

$$(p_X * p_Y)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x-y)p_Y(y)dy = p_{X+Y}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (43)$$

Сказанное позволяет определить $F_1 * \dots * F_n$ как функцию распределения $X_1 + \dots + X_n$, где величины X_1, \dots, X_n независимы и F_k — функция распределения X_k , $k = 1, \dots, n$. Для $F_1 = \dots = F_n = F$ вместо $F_1 * \dots * F_n$ пишут F^{n*} .

Упражнение 32. Найдите F_X^{2*} , где X — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-a, a]$, вычислив свертку $p_X * p_X$, т.е. плотность для F_X^{2*} .

Пусть \mathcal{A}_t , где $t \in T$, — некоторое семейство σ -алгебр (содержащихся в \mathcal{F}). Для $S \subset T$ положим $\mathcal{A}_S := \sigma\{\mathcal{A}_t, t \in S\}$, т.е. рассмотрим наименьшую σ -алгебру, содержащую \mathcal{A}_t для всех $t \in S$. Очень важным является следующее утверждение, называемое *леммой о группировке*.

Лемма 2. Пусть $\{\mathcal{A}_t, t \in T\}$ — семейство независимых σ -алгебр, а Γ — разбиение множества T на подмножества. Тогда и σ -алгебры семейства $\{\mathcal{A}_S, S \in \Gamma\}$ независимы.

Для случайных величин $X_t, t \in T$, заданных на некотором вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) , и множества $S \subset T$ пусть $\sigma\{X_t, t \in S\}$ обозначает σ -алгебру в \mathcal{F} , порожденную всеми $\sigma\{X_t\}$ при $t \in S$. Иначе говоря, рассматривается совокупность событий вида $\{\omega : X_t(\omega) \in B\}$ для всевозможных boreлевских множеств B и любых $t \in S$, а затем вводится наименьшая σ -алгебра, содержащая данную систему событий. Из приведенной леммы вытекает часто применяемое следствие:

борелевские функции, берущиеся от непересекающихся наборов независимых случайных величин, будут независимы. Так, например, для независимых величин X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 независимыми являются $\ln(1 + |X_1 + X_4|)$, $\cos X_2$, $\exp\{X_3 + X_5\}$, поскольку они соответственно измеримы относительно независимых σ -алгебр $\sigma\{X_1, X_4\}$, $\sigma\{X_2\}$ и $\sigma\{X_3, X_5\}$.

1.6. Сходимость случайных величин. Предельные теоремы

Напомним определения четырех видов сходимости последовательности случайных величин.

Последовательность $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится с вероятностью единица (или почти наверное) к случайной величине X , если

$$P(\omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega), n \rightarrow \infty) = 1. \quad (44)$$

Обычно это записывается $X_n \rightarrow X$ п.н. (или a.s. от английского almost sure). Другими словами, имеет место обычная поточечная сходимость функций X_n к функции X на событии C , вероятность которого равна единице.

Упражнение 33. Покажите, что множество, стоящее под знаком вероятности в (44), является событием.

Упражнение 34. Докажите, что (44) равносильно тому, что при каждом $\varepsilon > 0$

$$P(\omega : \sup_{k \geq n} |X_k(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (45)$$

Упражнение 35. Для несчетного семейства случайных величин $\{X_t, t \geq 0\}$ соотношение $X_t \rightarrow X$ п.н. ($t \rightarrow \infty$), аналогичное (44), где X — случайная величина, уже не обязано быть равносильно следующему аналогу (45): при любом $\varepsilon > 0$

$$P(\omega : \sup_{t \geq n} |X_t(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (46)$$

Дело в том, что под знаком вероятности в (46) не обязательно фигурирует событие, поскольку верхняя грань берется по несчетному множеству. Однако если (46) имеет место, то убедитесь, что тогда $X_t \rightarrow X$ на событии вероятности единица при $t \rightarrow \infty$.

Последовательность $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится по вероятности к случайной величине X (обозначается $X_n \xrightarrow{P} X, n \rightarrow \infty$), если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Далее нам понадобится и определение стремления по вероятности неотрицательных величин $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ к бесконечному пределу. Считаем, что $X_n \xrightarrow{P} \infty$, если для любого числа $K > 0$

$$\mathbb{P}(X_n \leq K) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (47)$$

Величины X_n сходятся в среднем квадратичном (или в пространстве $L^2(\Omega)$) к случайной величине X , если

$$\mathbb{E}(X_n - X)^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Это записывается $X_n \xrightarrow{L^2} X$ или $X = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} X_n$ (от английского *limit in mean*).

Последовательность $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ называется сходящейся по распределению к случайной величине X , если

$$F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

в каждой точке непрерывности предельной функции. Часто пишут $X_n \xrightarrow{d} X$ (от английского *distribution*). Имеется следующее эквивалентное определение:

$$\mathbb{E}f(X_n) \rightarrow \mathbb{E}f(X) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (48)$$

для любой непрерывной ограниченной функции f . Говорят также, что меры \mathbb{P}_{X_n} слабо сходятся к мере \mathbb{P}_X при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 4 (Леви). *Пусть характеристические функции $\varphi_n(s)$ случайных величин X_n ($n \in \mathbb{N}$) сходятся для каждого $s \in \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$ к непрерывной в нуле функции $\varphi(s)$. Тогда φ является характеристической функцией некоторой случайной величины X и $X_n \xrightarrow{d} X, n \rightarrow \infty$.*

Таким образом, сходимость по распределению последовательности X_n к X равносильна сходимости в каждой точке соответствующих характеристических функций:

$$\varphi_{X_n}(s) = \mathbb{E}e^{isX_n} \rightarrow \varphi_X(s) = \mathbb{E}e^{isX}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1.$$

Пример 4. Приведем пример последовательности характеристических функций $\varphi_n(s)$ ($n \in \mathbb{N}$) таких, что $\varphi_n(s) \rightarrow \varphi(s)$ на всей прямой при $n \rightarrow \infty$, но $\varphi(s)$ не является характеристической функцией.

Пусть случайная величина V имеет стандартное распределение Коши. Ее характеристическая функция

$$\varphi_V(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{isx} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = e^{-|s|}, \quad s \in \mathbb{R} \quad (49)$$

Этот интеграл легко берется, например, с помощью теории вычетов. Определим $X_n = nV$, тогда $\varphi_{X_n}(s) = e^{-n|s|}$, $s \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\varphi_n(s) \rightarrow \varphi(s)$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $s \in \mathbb{R}$, где $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(s) = 0$ при всех $s \neq 0$. Функция φ не может являться характеристической, так как каждая характеристическая функция (равномерно) непрерывна на \mathbb{R} .

Упражнение 36. Докажите, что из сходимости п.н. следует сходимость по вероятности, влечущая сходимость по распределению; если же последовательность сходится в среднем квадратическом, то она сходится и по вероятности. Прoverьте, что других нетривиальных (тривиальным образом сходимость п.н. влечет сходимость по распределению) соотношений между этими видами сходимости, вообще говоря, нет. Кроме того, у последовательности, сходящейся по вероятности, есть подпоследовательность, сходящаяся п.н., а предел по вероятности единственен (с точностью до эквивалентности).

Упражнение 37. Пусть случайные величины X_n ($n \in \mathbb{N}$) таковы, что $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $\omega \in \Omega$. Тогда X — случайная величина.

У данного упражнения есть более сложный вариант:

Упражнение 38. Пусть $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность случайных величин такая, что с вероятностью единица $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ при $n \rightarrow \infty$. Доказать, что если пространство (Ω, \mathcal{F}, P) полно, то X является случайной величиной.

Последнее упражнение показывает полезность пополнения исходного вероятностного пространства, поскольку в соответ-

ствии с общим подходом теории вероятностей не различают случайные величины, совпадающие почти наверное.

Упражнение 39. Пусть $X_n \rightarrow X$ и $X_n \rightarrow Y$ при $n \rightarrow \infty$, причем сходимость к X и Y берется в одном и том же смысле (т.е. рассматривается один из четырех указанных выше типов сходимости). Можно ли утверждать, что тогда $X = Y$ п.н. или что $\text{Law}(X) = \text{Law}(Y)$?

Упражнение 40. Докажите, что $X_n \xrightarrow{P} c$, где c — константа, в том и только том случае, если $X_n \xrightarrow{d} c$ (в одну сторону утверждение вытекает из упр. 36).

Упражнение 41. Пусть случайные величины X, X_n имеют соответственно функции распределения F и F_n ($n \in \mathbb{N}$), причем функция F непрерывна на \mathbb{R} . Покажите, что если $X_n \xrightarrow{d} X$, то

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} |F_n(u) - F(u)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Упражнение 42 (лемма Слуцкого). Пусть $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{P} a$ ($n \rightarrow \infty$), где X_n, Y_n, X — случайные величины, заданные на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) , и a — некоторая константа. Докажите, что $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + a$ при $n \rightarrow \infty$.

Замечание 3. В теоремах 1 и 2 условие сходимости на всем Ω можно заменить требованием сходимости п.н., а выполнение неравенств также можно предполагать лишь на событии вероятности единица (тем самым понимать эти теоремы действующими для классов эквивалентных величин). Более того, в теореме Лебега достаточно потребовать, чтобы $X_n \xrightarrow{d} X$ при $n \rightarrow \infty$. Имеются и другие обобщения, связанные с понятием *равномерной интегрируемости* семейств случайных величин.

Определение 7. Равномерно интегрируемым называется семейство случайных величин $\{X_t, t \in T\}$, для которого

$$\sup_{t \in T} E|X_t| \mathbb{I}_{\{|X_t| \geq c\}} \rightarrow 0 \quad \text{при } c \rightarrow \infty.$$

Упражнение 43. Покажите, что $\{X_t, t \in T\}$ обладает свойством равномерной интегрируемости, если

$$\sup_{t \in T} E|X_t|^s < \infty \text{ при некотором } s > 1.$$

Доказывается, что если семейство $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ равномерно интегрируемо и $X_n \xrightarrow{d} X$, где X — случайная величина, то она интегрируема и $EY = \lim_{n \rightarrow \infty} EX_n$. Если даны неотрицательные интегрируемые величины $X_n, n \in \mathbb{N}$, такие, что $X_n \xrightarrow{d} X$, где случайная величина X интегрируема и $EY = \lim_{n \rightarrow \infty} EX_n$, то семейство $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ равномерно интегрируемо.

Приведенные выше определения сходимости случайных величин легко переформулировать для случайных векторов. Например, в (48) можно рассматривать случайные векторы X и $X_n (n \in \mathbb{N})$ со значениями в пространстве \mathbb{R}^m и непрерывные ограниченные функции $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Аналогичным образом сохранится описание их сходимости по распределению в терминах характеристических функций.

Упражнение 44 (прием Крамера–Уолда). Докажите, что случайные векторы X_n со значениями в пространстве \mathbb{R}^m сходятся по распределению к случайному вектору X тогда и только тогда, когда скалярные произведения

$$(u, X_n) \xrightarrow{d} (u, X) \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для каждого } u \in \mathbb{R}^m.$$

В заключение этого раздела приведем три классических результата. Первый — усиленный закон больших чисел, второй — центральная предельная теорема, а третий — закон повторного логарифма.

Теорема 5 (Колмогоров). *Пусть X_1, X_2, \dots — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Тогда*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow c \quad \text{п.н. для } c \in \mathbb{R} \quad \iff \quad \exists EX_1 = c \in \mathbb{R}.$$

Теорема 6. Пусть X_1, X_2, \dots — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что $\mathbb{E}X_1 = a \in \mathbb{R}$ и $\mathbb{D}X_1 = \sigma^2 < \infty$. Тогда, полагая $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ($n \in \mathbb{N}$), имеем

$$\frac{S_n - na}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad n \rightarrow \infty. \quad (50)$$

Согласно упр. 41 соотношение (50) можно усилить:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left(\frac{S_n - na}{\sqrt{n}} \leq x \right) - \mathbb{P}(Z \leq x) \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Если $\sigma > 0$ (напомним, что если $Z \sim \mathcal{N}(0, 0)$, то $Z = 0$ п.н.), то обычно рассматривают $\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$, и тогда эти нормированные суммы сходятся по распределению при $n \rightarrow \infty$ к стандартной гауссовской величине $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Теорема 7 (Хартман–Винтнер). Пусть X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные величины такие, что $\mathbb{E}X_1 = a$ и $\mathbb{D}X_1 = \sigma^2 > 0$. Тогда, полагая $S_n = X_1 + \dots + X_n$, где $n \in \mathbb{N}$, имеем с вероятностью единица

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{2n \log \log n}} = 1 \quad \text{и} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{2n \log \log n}} = -1,$$

где $\log n = \ln(\max\{n, e\})$.

О предельных теоремах для сумм разнораспределенных слагаемых см., например, [12, т. 2]. Мы не имеем возможности обсудить известные теоремы для схемы серий, т.е. для массивов случайных величин

$$X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n},$$

где $k_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, а также не можем рассмотреть наличие негауссовских пределов (например, безгранично делимых или устойчивых) и результаты, относящиеся к различным оценкам скорости сходимости последовательностей случайных величин, подчиняющихся указанным предельным закономерностям.

Глава 2. ПРИМЕРЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Случайные функции и их свойства

Приведем главное для всей развивающейся теории

Определение 8. Случайным, или стохастическим, процессом $X = \{X_t, t \in T\}$ с параметрическим множеством T называется семейство случайных величин (или векторов) X_t , заданных на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) при каждом $t \in T$.

Итак, X_t (или $X(t)$) — это функция аргументов t и ω , поэтому правильнее было бы писать $X_t(\omega)$ (или $X(t, \omega)$), для упрощения записи аргумент ω обычно опускается. При фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $X(t, \omega)$, где $t \in T$, называется *траекторией, реализацией или выборочной функцией* случайного процесса.

Множество T часто содержится в \mathbb{R} , и тогда переменная t интерпретируется как время. В частности, если $T = \mathbb{Z}$, $T = \mathbb{N}$ или $T = \mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$, то говорят о случайных процессах с *дискретным временем*. Если же $T = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ или $T = [a, b]$, то речь идет о процессе с *непрерывным временем*. При произвольной структуре множества T часто говорят о *случайной функции* $X = \{X_t, t \in T\}$.

Пример 5. Пусть $X_t = U \sin t$, где $t \in T = [0, \infty)$, а случайная величина U принимает значения -1 и 1 с вероятностью $1/2$. Как выглядят траектории процесса $X = \{X_t, t \in T\}$?

Очевидно, если $U(\omega) = -1$, то $X_t(\omega) = -\sin t$, а если $U(\omega) = 1$, то $X_t(\omega) = \sin t$. Следовательно, все траектории будут совпадать либо с функцией $-\sin t$, либо $\sin t$.

Определение 9. Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ — случайный процесс. Конечномерными распределениями процесса X называются меры P_{t_1, \dots, t_n} , являющиеся распределениями векторов $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, где $t_1, \dots, t_n \in T$ и $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, n -мерные распределения задаются соотношениями

$$P_{t_1, \dots, t_n}(C) = P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in C), \quad C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \quad (51)$$

Пример 6. Найдем функции распределения, отвечающие конечномерным распределениям процесса, введенного в примере 5.

Возьмем $n \in \mathbb{N}$ и $t_1, \dots, t_n \in [0, \infty)$. Рассмотрим совместную функцию распределения величин X_{t_1}, \dots, X_{t_n} , т.е.

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n), \\ x_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Введем $I = \{k \in \{1, \dots, n\} : \sin t_k < 0\}$, $J = \{k \in \{1, \dots, n\} : \sin t_k = 0\}$ и $M = \{k \in \{1, \dots, n\} : \sin t_k > 0\}$. Тогда, если $J \neq \emptyset$, то функция $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ запишется в виде

$$P\left(\bigcap_{k \in I} \left\{U \geq \frac{x_k}{\sin t_k}\right\}, \bigcap_{k \in J} \{0 \leq x_k\}, \bigcap_{k \in M} \left\{U \leq \frac{x_k}{\sin t_k}\right\}\right) = \\ = P\left(\left\{U \geq \max_{k \in I} \frac{x_k}{\sin t_k}\right\}, \{0 \leq x_k, k \in J\}, \left\{U \leq \min_{k \in M} \frac{x_k}{\sin t_k}\right\}\right).$$

Если $J = \emptyset$, то $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ равна

$$P\left(\left\{U \geq \max_{k \in I} \frac{x_k}{\sin t_k}\right\} \cap \left\{U \leq \min_{k \in M} \frac{x_k}{\sin t_k}\right\}\right).$$

Положим $u = \max_{k \in I} \frac{x_k}{\sin t_k}$ и $v = \min_{k \in M} \frac{x_k}{\sin t_k}$. Очевидно,

$$\{U \geq u\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } u > 1, \\ \{U = 1\}, & \text{если } -1 < u \leq 1, \\ \Omega, & \text{если } u \leq -1. \end{cases}$$

Аналогично

$$\{U \leq v\} = \begin{cases} \Omega, & \text{если } v \geq 1, \\ \{U = -1\}, & \text{если } -1 \leq v < 1, \\ \emptyset, & \text{если } v < -1. \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что при $J = \emptyset$

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{для } (u, v) \in D, \\ \frac{1}{2} & \text{для } (u, v) \in G, \\ 1 & \text{для } (u, v) \in H, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} D &= \{u > 1, v \in \mathbb{R}\} \cup \{-1 < u \leq 1, v < 1\} \cup \{u \leq -1, v < -1\}, \\ G &= \{-1 < u \leq 1, v \geq 1\} \cup \{u \leq -1, -1 \leq v < 1\}, \\ H &= \{u \leq -1, v \geq 1\}. \end{aligned}$$

Если $J \neq \emptyset$, то или $\{0 \leq x_k, k \in J\} = \emptyset$, или $\{0 \leq x_k, k \in J\} = \Omega$. Поэтому данный случай сводится к уже рассмотренному.

Заметим, что аналогично определению случайной величины случайный процесс можно рассматривать какенным образом измеримое отображение Ω в пространство (действительных) функций, заданных на множестве T . Точнее говоря, каждому элементарному исходу ω сопоставляется траектория $X(\cdot, \omega)$; точка в записи $X(\cdot, \omega)$ обозначает, что берется функция аргумента t при фиксированном ω . Требуется лишь описать соответствующую σ -алгебру подмножеств этого функционального пространства. Ее можно задать как наименьшую σ -алгебру \mathcal{B}_T , содержащую все элементарные цилиндры, т.е. множества вида $\{x(\cdot) : x(t) \in B_t\}$, где рассматриваются всевозможные точки $t \in T$ и всевозможные борелевские множества $B_t \subset \mathbb{R}$. Поэтому аналогично (9) введем распределение P_X случайного процесса $X = \{X_t, t \in T\}$ как меру

$$\mathsf{P}_X(B) := \mathsf{P}(\omega : X(\cdot, \omega) \in B), \quad B \in \mathcal{B}_T,$$

где для удобства вместо $X_t(\omega)$ мы пишем $X(t, \omega)$.

Упражнение 45. Пусть для задания “амплитуды” процесса X в примере 5 вместо величины U , принимающей два значения, будет использоваться величина, принимающая значения $-1, 0, 1$ соответственно с вероятностями $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$. Найти $\mathsf{P}(X(\pi/2) < 1, X(\pi) \geq 0)$.

Упражнение 46. Пусть $X = \{X(t) = tZ + c, t \geq 0\}$, где случайная величина $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $c = \text{const}$. Найти конечномерные распределения (функции распределения) процесса X .

Упражнение 47. (Сравните с упр. 8). Дать пример процессов $X = \{X(t), t \in T\}$ и $Y = \{Y(t), t \in T\}$, а также множества C в пространстве траекторий, для которых $\{X \in C\} \in \mathcal{F}$, $\{Y \in C\} \notin \mathcal{F}$.

Упражнение 48*. Пусть $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$ — действительный случайный процесс, т.е. все $X(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Объяснить, почему, вообще говоря, не является событием множество $\{\omega : \sup_{t \in [0, 1]} X(t, \omega) \leq c\}$, где c — константа.

Пример 7. Пусть X — процесс, определенный в примере 5. Найти $P(A)$, где $A = \left\{ \sup_{t \in [0, \pi/4]} X(t) > \frac{1}{2} \right\}$.

Пользуясь (4), имеем

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \{U = 1\}) + P(A \cap \{U = -1\}) = \\ &= \frac{1}{2} P\left(\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} P\left(0 > \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Заметим, что множество $B = \left\{ x(\cdot) : \sup_{t \in [0, \pi/4]} x(t) > \frac{1}{2} \right\} \notin \mathcal{B}_T$, но тем не менее $A = \{X \in B\} \in \mathcal{F}$. Вообще говоря, вопрос о том, какие множества входят в \mathcal{B}_T , не является простым; по этому поводу см., напр., [2, с. 32]. В этой связи полезно

Упражнение 49. Пусть процесс $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$ имеет непрерывные траектории. Покажите, что $\sup_{t \in [a, b]} X(t)$ и $\inf_{t \in [a, b]} X(t)$ являются случайными величинами.

Пример 8. Пусть $X = \{X(t) = V + 2t, t \geq 0\}$, где V имеет стандартное распределение Коши. Найдем вероятность того, что $X(t) = 0$ хотя бы для одного $t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Все траектории процесса X непрерывны. Поэтому вероятность того, что процесс имеет хотя бы один корень на отрезке $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, равна вероятности того, что одновременно $\inf_{[1/2, \sqrt{3}/2]} X(t) \leq 0$ и $\sup_{[1/2, \sqrt{3}/2]} X(t) \geq 0$. Следовательно, интересующая нас вероятность равна

$$\begin{aligned} & P\left(V + 2 \inf_{[1/2, \sqrt{3}/2]} t \leq 0, V + 2 \sup_{[1/2, \sqrt{3}/2]} t \geq 0\right) = \\ & = P\left(V + 2 \cdot \frac{1}{2} \leq 0, V + \frac{2\sqrt{3}}{2} \geq 0\right) = P(-\sqrt{3} \leq V \leq -1) = \\ & = \frac{1}{\pi} (\arctg \sqrt{3} - \arctg 1) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{12}, \end{aligned}$$

где учтено (см. (15)), что

$$P(V \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi(1+u^2)} du = \frac{1}{\pi} \arctg x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теперь обсудим, в каком смысле отождествляются случайные процессы.

Определение 10. Случайные процессы $X = \{X_t, t \in T\}$ и $Y = \{Y_t, t \in T\}$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве, называются *эквивалентными*, если

$$P(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall t \in T. \quad (52)$$

При выполнении условия (52) говорят также, что процесс Y является *модификацией* (или *версией*) процесса X (тогда и X будет модификацией Y).

Поскольку мы рассматриваем действительные процессы (иногда процессы со значениями в \mathbb{R}^n), то

$$P(X_t = Y_t) = P(X_t - Y_t = 0).$$

Разность двух случайных величин (или векторов в \mathbb{R}^n) есть случайная величина (вектор), поэтому множество точек $\omega \in \Omega$, для которых $X_t(\omega) - Y_t(\omega)$ принадлежит борелевскому множеству $\{0\}$, является событием. Если T конечно или счетно,

т.е. речь идет о процессе с дискретным временем, то из эквивалентности вытекает *неразличимость* процессов. Иначе говоря, почти все траектории совпадают. Действительно,

$$P(X_t = Y_t \forall t \in T) = P\left(\bigcap_{t \in T} \{\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}\right) = 1. \quad (53)$$

Последнее равенство является следствием счетной аддитивности вероятности, а именно, пересечение счетного числа множеств вероятности единица также имеет вероятность единица (переходим к дополнениям и применяем (3)).

Если же T несчетно, например, $T = [0, 1]$, то $\bigcap_{t \in T} \{X_t = Y_t\}$ не только не обязано иметь вероятность 1, но может вообще не быть событием, т.е. не принадлежать σ -алгебре \mathcal{F} .

Пример 9. Пусть $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$. Определим вероятность P как меру Лебега на $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$. Рассмотрим случайные процессы $X = \{X_t, t \in [0, 1]\}$ и $Y = \{Y_t, t \in [0, 1]\}$. Пусть $X_t(\omega) = 0$ для всех $t \in T = [0, 1]$, $\omega \in \Omega$, а $Y_t(\omega) = 1$ при $t = \omega$ и $Y_t(\omega) = 0$ при $t \neq \omega$. Покажем, что построенные процессы эквивалентны, но не являются неразличимыми.

Очевидно, $P(X_t = Y_t) = P(\omega : \omega \neq t) = 1$ при каждом t , но у процесса X все траектории тождественно равны нулю на отрезке $[0, 1]$, следовательно, непрерывны, в то время как у процесса Y каждая траектория имеет разрыв в одной точке. Заметим также, что $\sup_{t \in T} X_t = 0$, а $\sup_{t \in T} Y_t = 1$ для всех $\omega \in \Omega$.

Задача 1. Проверить, что если процессы $X = \{X_t, t \in T\}$ и $Y = \{Y_t, t \in T\}$ эквивалентны, то у них совпадают конечномерные распределения. Показать, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Начнем с одномерных распределений. Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и $t \in T$. Пользуясь тем, что $P(C) = P(CD) + P(C\bar{D})$ для любых событий C и D , запишем

$$\begin{aligned} P_{X_t}(B) &= P(X_t \in B) = \\ &= P(\{X_t \in B\} \cap \{X_t = Y_t\}) + P(\{X_t \in B\} \cap \{X_t \neq Y_t\}) = \\ &= P(\{Y_t \in B\} \cap \{X_t = Y_t\}) + P(\{X_t \in B\} \cap \{X_t \neq Y_t\}). \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю, будучи вероятностью события, являющегося подмножеством события нулевой меры (учли, что пересечение событий есть событие). Кроме того,

$$\mathbb{P}(\{Y_t \in B\} \cap \{X_t = Y_t\}) = \mathbb{P}(Y_t \in B) - \mathbb{P}(\{Y_t \in B\} \cap \{X_t \neq Y_t\}).$$

По тем же соображениям второй член справа равен нулю. Следовательно, $\mathbb{P}(X_t \in B) = \mathbb{P}(Y_t \in B)$ при каждом $t \in T$.

Для многомерных распределений действуем аналогично. Пусть теперь $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и $t_k \in T$, $k = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n) &= \\ &= \mathbb{P}(\{X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n\} \cap \{X_{t_1} = Y_{t_1}\}) + \\ &\quad + \mathbb{P}(\{X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n\} \cap \{X_{t_1} \neq Y_{t_1}\}), \end{aligned}$$

где второе слагаемое равно нулю, а первое преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \dots, X_{t_n} \in B_n, X_{t_1} = Y_{t_1}) &= \\ &= \mathbb{P}(Y_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \dots, X_{t_n} \in B_n). \end{aligned}$$

Затем ту же процедуру повторяем с X_{t_2} и т.д.

В итоге распределения $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ и $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ совпадают на классе всех *прямоугольников* $B_1 \times \dots \times B_n$ в \mathbb{R}^n . Отсюда вытекает (см., напр., [2, с. 15]), что эти меры совпадают на σ -алгебре, порожденной прямоугольниками в \mathbb{R}^n , т.е. на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Итак, конечномерные распределения процессов X и Y совпадают.

Покажем, что обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места. Известно, что на некотором вероятностном пространстве всегда можно построить систему независимых случайных величин, каждая из которых имеет любое наперед заданное распределение. Это утверждение вытекает из теоремы Ломницкого–Улама, справедливой не только для распределений (вероятностных мер) на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, но и для вероятностей, определенных на произвольных измеримых пространствах.

Возьмем семейство $X = \{X_t, t \in T\}$, состоящее из независимых случайных величин, имеющих симметричное распреде-

ление (т.е. $\text{Law}(X_t) = \text{Law}(-X_t)$), причем $P(X_t \neq 0) = 1$ при каждом $t \in T$. Пусть, например, X_t принимает значения -1 и 1 с вероятностью $1/2$. Введем $Y = \{Y_t, t \in T\}$, где $Y_t = -X_t, t \in T$. Тогда, очевидно, меры $P_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}$ и $P_{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}}$ совпадают на классе прямоугольников в \mathbb{R}^n при всех $t_1, \dots, t_n, n \in \mathbb{N}$, поскольку

$$\begin{aligned} P_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(B_1 \times \dots \times B_n) &= \prod_{k=1}^n P_{X_{t_k}}(B_k) = \prod_{k=1}^n P_{-X_{t_k}}(B_k) = \\ &= P_{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}}(B_1 \times \dots \times B_n). \end{aligned}$$

Следовательно, они совпадают на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Однако по построению при каждом $t \in T$ имеем $P(X_t = Y_t) = P(X_t = 0) = 0 \neq 1$. Таким образом, введенные процессы не являются эквивалентными.

Упражнение 50. Пусть величины X_t независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$, а $Y_t = 1 - X_t$ для всех $t \in [0, 1]$. Покажите, что процессы имеют одинаковые конечномерные распределения, но не являются эквивалентными.

Рассмотрим внимательнее некоторые свойства траекторий случайных процессов.

Определение 11. Говорят, что $X = \{X(t), t \in T\}$ *выборочно непрерывен* (или *дифференцируем*, или *интегрируем*) в точке ω , если это верно для соответствующей траектории, т.е. функции $X(\cdot, \omega)$. Процесс *выборочно непрерывен на множестве $A \in \mathcal{F}$* , если траектории непрерывны для всех $\omega \in A$. В том случае, когда $P(A) = 1$, говорят, что *почти все траектории процесса непрерывны*.

Задача 2. Пусть даны процессы $X = \{X(t), t \in T\}$ и $Y = \{Y(t), t \in T\}$, имеющие (п.н.) непрерывные справа траектории, где T — отрезок или полупрямая, или вся прямая. Показать, что если Y является модификацией X , то эти процессы неразличимы.

Пусть Q — множество рациональных чисел. Для каждого $r \in T \cap Q$ имеем $P(X(r) \neq Y(r)) = 0$. Множество $Q \cap T$ не более

чем счетно. Поэтому в силу субаддитивности вероятности $P(C) = 0$, где

$$C = \bigcup_{r \in Q \cap T} \{X(r) \neq Y(r)\}.$$

Учитывая непрерывность справа траекторий рассматриваемых процессов, получаем, что $\{X(t) \neq Y(t)\} \subset C$ для каждого $t \in T$. Значит, множество $A := \bigcup_{t \in T} \{X(t) \neq Y(t)\} \subset C$. В силу полноты вероятностного пространства A является событием и $P(A) = 0$. Взятие дополнения A дает равенство

$$P(X(t) = Y(t) \quad \forall t \in T) = 1, \quad (54)$$

что и требовалось показать. Точнее говоря, если $T = [a, b]$, то о непрерывности справа в точке b говорить бессмысленно. Однако $P(X(b) \neq Y(b)) = 0$. Поэтому (54) сохранится, так как пересечение двух событий вероятности единица также имеет вероятность единица.

Упражнение 51*. Пусть $X = \{X(t), t \in T\}$ — случайный процесс, определенный на множестве $T \subset \mathbb{R}$, такой, что $P(X(s) \leq X(t)) = 1$, если $s \leq t$ и $s, t \in T$. Доказать, что у X существует модификация, траектории которой не убывают на T с вероятностью единица.

Исходя из определения случайного процесса как кривой в пространстве случайных величин, можно дать следующее

Определение 12. Процесс $X = \{X(t), t \in T\}$ непрерывен п.н. (или в среднем квадратическом, или по вероятности, или по распределению) в точке $s \in T$, являющейся предельной точкой множества T , если $X(t) \rightarrow X(s)$ п.н. (или соответственно в одном из указанных смыслов) при $t \rightarrow s$.

Если указанные соотношения выполнены для любого $s \in T$, говорят, что процесс непрерывен в соответствующем смысле на T . Пользуясь упр. 36, видим, как связаны между собой различные виды непрерывности случайного процесса. Когда

$$P(X_t \rightarrow X_s, \quad t \rightarrow s) \neq 1,$$

то говорят, что s — *фиксированная точка разрыва*. Точка разрыва траекторий $s = s(\omega)$, не являющаяся фиксированной, называется *переменной точкой разрыва*. Например, у пуассонского процесса, вводимого далее в пункте 2.4, отсутствуют фиксированные точки разрыва, но его траектории не являются непрерывными функциями.

Таким образом, непрерывность процесса с вероятностью единица на T означает отсутствие фиксированных точек разрыва, а почти наверное выборочная непрерывность означает, что, за исключением множества траекторий нулевой меры, отсутствуют и переменные точки разрыва.

2.2. Построение последовательности независимых случайных величин с заданными распределениями

Опишем явную конструкцию последовательности независимых действительных случайных величин, имеющих заданные распределения. Идея такова: достаточно научиться строить одну последовательность независимых бернуlliевских величин, принимающих значения 1 и 0 с вероятностью $\frac{1}{2}$. С ее помощью легко построить независимые величины U_1, U_2, \dots , равномерно распределенные на $[0, 1]$. По этим величинам уже несложно построить такие независимые X_1, X_2, \dots , что $P(X_n \leq x) = F_n(x)$ при $x \in \mathbb{R}$, где F_n есть заданная функция распределения, $n \in \mathbb{N}$.

Теперь будем решать задачи, отвечающие каждому этапу построения.

Пусть число $x \in (0, 1)$. Тогда x можно единственным образом записать с помощью двоичного разложения:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}, \quad (55)$$

где x_k принимает значения 0 или 1. Точнее говоря, если x допускает запись с коэффициентами $x_k = 0$ при $k \geq M$ или $x_k = 1$ при $k \geq N$ (M, N — некоторые натуральные числа), то выбираем запись с нулями (начинающимися с некоторого ме-

ста). Таких точек, обладающих двумя видами двоичного разложения, лишь счетное множество. Это множество мы обозначим D . Итак, каждой точке x интервала $(0, 1)$ однозначным образом ставится в соответствие последовательность фигурирующих в (55) коэффициентов $x_k = x_k(x)$, где $k \in \mathbb{N}$.

Задача 3. Показать, что последовательность $(x_k(\cdot))_{k \in \mathbb{N}}$, введенная выше, состоит из независимых бернульиевских величин, принимающих значения 0 и 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Эта последовательность задается на вероятностном пространстве $((0, 1), \mathcal{B}((0, 1)), P)$, точка $x \in (0, 1)$ представляет собой элементарный исход ω , а P — мера Лебега на $\mathcal{B}((0, 1))$.

Нетрудно сообразить, как устроено множество

$$\{x \in (0, 1) : x_k(x) = i\},$$

где $i = 0$ или $i = 1$. Однако, чтобы упростить себе эту задачу и не рассматривать концы двоично рациональных промежутков, заметим, что

$$\begin{aligned}\{x \in (0, 1) \setminus D : x_1(x) = 0\} &= \left(0, \frac{1}{2}\right) \setminus D, \\ \{x \in (0, 1) \setminus D : x_1(x) = 1\} &= \left(\frac{1}{2}, 1\right) \setminus D.\end{aligned}$$

Итак, $P(x \in (0, 1) : x_1(x) = 0) = P(x \in (0, 1) : x_1(x) = 1) = \frac{1}{2}$, где учтено, что счетное множество D имеет нулевую меру Лебега. Далее,

$$\begin{aligned}\{x \in (0, 1) \setminus D : x_2(x) = 0\} &= \\ &= \{x \in (0, 1) \setminus D : x_1(x) = 0, x_2(x) = 0\} \cup \\ &\quad \cup \{x \in (0, 1) \setminus D : x_1(x) = 1, x_2(x) = 0\} = \\ &= \left(\left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)\right) \setminus D.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$P(x \in (0, 1) : x_2(x) = 0) = \frac{1}{2} \text{ и } P(x \in (0, 1) : x_2(x) = 1) = \frac{1}{2}.$$

Совершенно аналогично находим, что при всех $k \geq 3$

$$P(x \in (0, 1) : x_k(x) = 0) = P(x \in (0, 1) : x_k(x) = 1) = \frac{1}{2}.$$

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и любых i_1, \dots, i_n , принимающих значения 0 или 1, рассмотрим интервал $(u, u + 2^{-n})$, где $u = (i_1 \wedge 1)2^{-1} + (i_2 \wedge 1)2^{-2} + \dots + (i_n \wedge 1)2^{-n}$, $a \wedge b := \min\{a, b\}$. Тогда

$$\begin{aligned} P(x \in (0, 1) : x_1(x) = i_1, \dots, x_n(x) = i_n) &= \\ &= P(x \in (0, 1) \setminus D : x_1(x) = i_1, \dots, x_n(x) = i_n) = \\ &= P(x \in (u, u + 2^{-n}) \setminus D) = 2^{-n} = \prod_{k=1}^n P(x \in (0, 1) : x_k(x) = i_k), \end{aligned}$$

откуда в силу упр. 27 вытекает независимость x_1, x_2, \dots

Располагая последовательностью независимых бернуlliевских величин, принимающих значения 0 и 1 с вероятностью $1/2$, легко построить случайную величину, равномерно распределенную на отрезке $[0, 1]$, как показывает

Задача 4. Пусть X_1, X_2, \dots — независимые величины, заданные на некотором вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) , причем $P(X_k = 0) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$ при всех $k = 1, 2, \dots$. Докажите, что

$$U(\omega) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k(\omega)}{2^k}, \quad \omega \in \Omega, \quad (56)$$

будет случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$.

Прежде всего заметим, что ряд (56) сходится при каждом ω , поскольку мажорируется рядом $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}$, причем $0 \leq U(\omega) \leq 1$ при всех $\omega \in \Omega$. Кроме того, U — случайная величина, так как U является пределом сходящейся при всех ω последовательности случайных величин $U_n := \sum_{k=1}^n X_k 2^{-k}$, когда $n \rightarrow \infty$ (конечная сумма случайных величин является случайной величиной). Мы применили результат упр. 37.

Возьмем любое $x \in (0, 1) \setminus D$, где D определяется перед задачей 3. Если число $z \in (0, 1) \setminus D$ и $z = \sum_{k=1}^{\infty} z_k 2^{-k}$, где z_k равны 0 или 1, то соотношение $x < z$ равносильно тому, что $x_1 < z_1$ или $x_1 = z_1, x_2 < z_2$, или $x_1 = z_1, x_2 = z_2, x_3 < z_3$, или $\dots x_1 = z_1, \dots, x_{n-1} = z_{n-1}, x_n < z_n$ и т.д. Для $z \in (0, 1) \setminus D$

$$\begin{aligned} \{U < z\} &= \{\omega : U(\omega) < z, U(\omega) \in D \cup \{0\} \cup \{1\}\} \cup \\ &\quad \cup \{\omega : U(\omega) < z, U(\omega) \in (0, 1) \setminus D\}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} A := \{\omega : U(\omega) \in D \cup \{0\} \cup \{1\}\} &\subset \\ &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = 0, X_{n+1} = 0, \dots\} \cup \{X_1 = 1, X_2 = 1, \dots\}. \end{aligned}$$

Очевидно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любой последовательности i_n, i_{n+1}, \dots , состоящей из нулей и единиц, имеем

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X_n = i_n, X_{n+1} = i_{n+1}, \dots) &= \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathsf{P}(X_n = i_n, \dots, X_{n+m} = i_{n+m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} 2^{-m} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathsf{P}(A) = 0$ и $\mathsf{P}(\{U < z\} \cap A) \leq \mathsf{P}(A) = 0$.

Независимость величин X_1, X_2, \dots позволяет нам записать

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X_1 = z_1, \dots, X_{n-1} = z_{n-1}, X_n < z_n) &= \\ &= \mathsf{P}(X_1 = z_1) \dots \mathsf{P}(X_{n-1} = z_{n-1}) \mathsf{P}(X_n < z_n). \end{aligned}$$

Заметим, что $\mathsf{P}(X_n < z_n) = \frac{z_n}{2}$ для $z_n = 0$ и $z_n = 1$, поскольку $\mathsf{P}(X_n < 0) = 0$ и $\mathsf{P}(X_n < 1) = \mathsf{P}(X_n = 0) = \frac{1}{2}$. Принимая во внимание, что $\mathsf{P}(U \in D) = 0$ (а значит, $\mathsf{P}(U \in (0, 1) \setminus D) = 1$), получаем

$$\mathsf{P}(U < z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{z_n}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n 2^{-n} = z, \quad z \in (0, 1) \setminus D.$$

Поэтому $\mathsf{P}(U < z) = 0$ для $z < 0$ и $\mathsf{P}(U < z) = 1$ для $z > 1$. В качестве простого упражнения, пользуясь непрерывностью

вероятностной меры, убедитесь, что функция $P(U < z)$ непрерывна слева¹ на \mathbb{R} , поэтому для любого числа $u \in (0, 1)$, выбрав последовательность чисел $z_n \notin D$, $z_n \uparrow u$ (при $n \rightarrow \infty$), видим, что

$$P(U < u) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(U < z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = u.$$

Аналогично для произвольного $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$P(U \leq t) = \lim_{u \downarrow t} P(U < u).$$

Таким образом,

$$P(U \leq t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ t, & t \in (0, 1); \\ 1, & t \geq 1, \end{cases}$$

т.е. величина U равномерно распределена на $[0, 1]$.

Упражнение 52. Получите утверждение задачи 4, вычислив предел характеристических функций величин $\sum_{k=1}^m X_k 2^{-k}$ при $m \rightarrow \infty$.

Задача 5. Построить последовательность $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ независимых величин, равномерно распределенных на $[0, 1]$.

Воспользуемся результатами задач 3 и 4. Запишем коэффициенты $x_n = x_n(x)$, где $n \in \mathbb{N}$, двоичного разложения числа $x \in (0, 1)$ в виде таблицы $(x_{i,j})$, $i, j \in \mathbb{N}$. А именно, пусть

$$\begin{aligned} x_{1,1} &= x_1, & x_{2,1} &= x_2, & x_{1,2} &= x_3, \\ x_{3,1} &= x_4, & x_{2,2} &= x_5, & x_{1,3} &= x_6, \dots \end{aligned}$$

Другими словами, мы рассматриваем последовательно индексы (i, j) такие, что $i + j = k$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, и каждый раз выписываем в направлении с “юго-запада” на “северо-восток” соответствующие члены исходной последовательности x_1, x_2, \dots (см. табл. 1), после чего нумеруем все элементы с помощью двух индексов.

¹ Для любой случайной величины Y функция $P(Y < x)$ непрерывна слева на \mathbb{R} .

x_1	x_3	x_6	x_{10}
x_2	x_5	x_9	\dots
x_4	x_8		
x_7	\dots		

Табл. 1.

Пользуясь тем, что непересекающиеся наборы, составленные из семейства независимых случайных величин, будут независимы (лемма о группировке, см. пункт 1.5), видим, что располагаем счетным множеством независимых последовательностей (т.е. строк таблицы), состоящих из независимых бернульиевских величин $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots$ ($n \in \mathbb{N}$), равновероятно принимающих значения 0 и 1. Положим

$$U_n := \sum_{k=1}^{\infty} X_{n,k} 2^{-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Согласно задаче 4 мы получаем последовательность $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ равномерно распределенных на $[0, 1]$ случайных величин. Их независимость можно объяснить, например, следующим образом. При каждом $n \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega$ имеем

$$U_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m X_{n,k} 2^{-k}.$$

Остается заметить, что любая указанная сумма m слагаемых измерима относительно σ -алгебры \mathcal{A}_n , порожденной величинами $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots$, следовательно, этим свойством будет обладать и предельная величина U_n (см. упр. 38). Еще раз применяем лемму о группировке, обеспечивающую независимость $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ и тем самым независимость величин U_1, U_2, \dots

Упражнение 53. Объясните независимость U_1, U_2, \dots , не обращаясь к лемме 2, а пользуясь свойствами характеристических функций.

Пусть теперь F_1, F_2, \dots — заданные функции распределения. Предположим, что они непрерывны и строго монотонны. Тогда существуют обратные функции $F_n^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, где $n \in \mathbb{N}$. Если U_1, U_2, \dots — независимые случайные величины,

равномерно распределенные на $[0, 1]$, то X_1, X_2, \dots , здесь $X_n = F_n^{-1}(U_n)$ ($n \in \mathbb{N}$), будут независимы как борелевские (в нашем случае непрерывные; см. упр. 11) функции от независимых величин, а для $x \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}(X_n \leq x) = \mathsf{P}(F_n^{-1}(U_n) \leq x) = \mathsf{P}(U_n \leq F_n(x)) = F_n(x).$$

Единственный нюанс: что делать, если $U_n(\omega) = 1$, а мы подставляем $U_n(\omega)$ в функцию F_n^{-1} , которая определена, вообще говоря, только на интервале $(0, 1)$?

Проще всего поступить так: положим $F_n^{-1}(0) := -\infty$, а $F_n^{-1}(1) := \infty$. Тогда легко видеть, что X_1, X_2, \dots определены корректно, но являются расширенными случайными величинами. Действительно, множество точек ω , для которых $U_n(\omega)$ принимает значения 0 или 1, имеет вероятность нуль. Поэтому мы всегда можем взять *собственную* (т.е. со значениями из \mathbb{R}) случайную величину, эквивалентную расширенной. Легко видеть, что тогда получим величину с тем же распределением вероятностей. Кроме того, эти эквивалентные величины также будут независимы, как показывает элементарное

Упражнение 54. Пусть независимы (расширенные) величины X_1, \dots, X_n и случайные величины $Y_k = X_k$ п.н. для всех $k = 1, \dots, n$ (если вероятностное пространство полно и X — случайная величина, а $Y = X$ п.н., то Y автоматически будет случайной величиной). Докажите, что Y_1, \dots, Y_n независимы (при этом $\text{Law}(X_n) = \text{Law}(Y_n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$).

Чтобы рассмотреть произвольные функции распределения F_1, F_2, \dots (а не только непрерывные и строго монотонные), нам потребуется новое понятие. Пусть F — функция распределения некоторой случайной величины, т.е. функция, обладающая известными четырьмя свойствами (приведенными перед формулой (10)). *Обобщенная обратная* к функции F функция F^{inv} (от английского *inverse*) задается формулой

$$F^{\text{inv}}(t) := \inf\{u \in \mathbb{R} : F(u) \geq t\}, \quad t \in (0, 1). \quad (57)$$

Когда F — непрерывна и строго возрастает, то F^{inv} совпадает с обычной обратной функцией F^{-1} . Для удобства полагаем $F^{\text{inv}}(0) := -\infty$ и $F^{\text{inv}}(1) := \infty$.

Упражнение 55. Пусть

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq -1, \\ \frac{1}{4}(x+1) & \text{для } x \in (-1, 0), \\ \frac{1}{2} & \text{для } x \in [0, 2), \\ 1 & \text{для } x \geq 2. \end{cases}$$

Построить график F^{inv} .

Задача 6. Пусть U — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$, а F — функция распределения. Доказать, что $Y := F^{\text{inv}}(U)$ — расширенная случайная величина, совпадающая п.н. с собственной случайной величиной, имеющей функцию распределения F .

Прежде всего покажем, что Y — расширенная случайная величина. Функция F^{inv} не убывает на $(0, 1)$, поэтому является борелевской в силу примера 2. Возьмем случайную величину $Z = U\mathbb{I}_{\{U \in (0, 1)\}} + \frac{1}{2}\mathbb{I}_{\{U \notin (0, 1)\}}$. Тогда $F^{\text{inv}}(Z)$ в силу замечания 1 будет собственной случайной величиной, совпадающей с $F^{\text{inv}}(U)$ на множестве $\{U \in (0, 1)\}$, имеющем вероятность единица, а значения ∞ и $-\infty$ функция $F^{\text{inv}}(U)$ принимает соответственно на событиях $\{U = 1\}$ и $\{U = 0\}$ вероятности нуль.

Для $t \in (0, 1)$ и $s \in \mathbb{R}$ неравенство $F^{\text{inv}}(t) \leq s$ влечет $F(F^{\text{inv}}(t)) \leq F(s)$, так как F не убывает. Покажем, что при этом $t \leq F(F^{\text{inv}}(t))$, а тогда $t \leq F(s)$. Возьмем точки $z_n \downarrow F^{\text{inv}}(t)$ при $n \rightarrow \infty$, это дает $F(z_n) \geq t$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Учитывая непрерывность функции F справа, получаем $F(F^{\text{inv}}(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(z_n) \geq t$. Следовательно, верно неравенство $t \leq F(s)$.

С другой стороны, если $t \leq F(s)$ (по-прежнему $t \in (0, 1)$ и $s \in \mathbb{R}$), то $F^{\text{inv}}(t) \leq F^{\text{inv}}(F(s))$. Если $F(s) < 1$, то из (57) вытекает, что $F^{\text{inv}}(F(s)) \leq s$ и, следовательно, $F^{\text{inv}}(t) \leq s$. Если же $F(s) = 1$, то $F(s) > t$, откуда $F^{\text{inv}}(t) \leq s$. Итак,

для $t \in (0, 1)$ и $s \in \mathbb{R}$ неравенства $t \leq F(s)$ и $F^{\text{inv}}(t) \leq s$ равносильны. Поэтому

$$\{\omega : U(\omega) \leq F(s), U(\omega) \in (0, 1)\} = \{\omega : F^{\text{inv}}(U(\omega)) \leq s, U(\omega) \in (0, 1)\}$$

и $P(F^{\text{inv}}(U(\omega)) \leq s) = F(s)$, $s \in \mathbb{R}$, так как $P(U \leq x) = x$ при $x \in [0, 1]$.

Замечание 4. Задача 6 показывает, что случайную величину, имеющую любую наперед заданную функцию распределения F , всегда можно построить, располагая лишь одной случайной величиной, равномерно распределенной на $[0, 1]$.

Упражнение 56. Найдите отображение, которое случайную величину U , равномерно распределенную на отрезке $[0, 1]$, переводит в случайную величину $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Переходим к заключительному этапу.

Задача 7. Пусть F_1, F_2, \dots — любая последовательность функций распределения. Убедиться, что на некотором (Ω, \mathcal{F}, P) найдется последовательность независимых случайных величин X_1, X_2, \dots , для которых $P(X_n \leq x) = F_n(x)$ при $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$.

Согласно задаче 5 построим последовательность U_1, U_2, \dots независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на $[0, 1]$. После этого, применив задачу 6, возьмем в качестве X_n либо $F_n^{\text{inv}}(U_n)$, $n \in \mathbb{N}$, либо эквивалентные им собственные величины (скажем, как при решении задачи 6). Они независимы, будучи борелевскими функциями от независимых величин, и, кроме того, обладают заданными функциями распределения (см. упр. 54).

2.3. Случайные блуждания. Задача о разорении игрока

Пусть X_0, X_1, \dots — последовательность независимых случайных величин. *Случайным блужданием* называется процесс

$$S_n := X_0 + \dots + X_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Этот процесс можно доопределить на всю полупрямую \mathbb{R}_+ , положив, например, $S(t) := S_{[t]}$, где $[\cdot]$ — целая часть числа. Будем предполагать, что X_1, X_2, \dots одинаково распределены.

Случайное блуждание возникает в классической задаче о разорении игрока.

Задача 8. Пусть игроки А и В в начальный момент $t = 0$ располагают соответственно капиталами a и b , где $a, b \in \mathbb{N}$. Предположим, что А в каждой партии игры выигрывает 1 у игрока В с вероятностью $p \in (0, 1)$ и проигрывает 1 с вероятностью $q = 1 - p$. Пусть результаты всех партий независимы. Игра прекращается, когда капитал одного из игроков обращается в нуль. Требуется доказать, что с вероятностью единица игра закончится за конечное число партий.

Прежде всего формализуем задачу, определив последовательность независимых одинаково распределенных величин X_1, X_2, \dots , принимающих значения 1 и -1 соответственно с вероятностями p и $1 - p$. Тогда выигрыш игрока А в момент $n \in \mathbb{N}$ равен величине $S_n = X_1 + \dots + X_n$ (отрицательная величина S_n равна его проигрышу после n партий). В нашей модели $X_0 = S_0 = 0$.

Докажем, что игра закончится за случайное время τ , которое будет конечно п.н. Величина

$$\tau = \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k \in \{-a\} \cup \{b\}\},$$

и мы считаем $\tau = \infty$, если $-a < S_k < b$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Несограниченное продолжение игры означало бы, что траектория случайного блуждания $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, начавшись в точке $(0, 0)$, никогда не выйдет на прямые $y = -a$ или $y = b$. Возьмем $m \in \mathbb{N}$, выбор которого поясним далее. Тогда

$$\{\tau = \infty\} \subset \{-a < S_{mk} < b, k \in \mathbb{N}\} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \{|S_{m(k+1)} - S_{mk}| < a+b\}.$$

По свойству непрерывности вероятности (см. (1)) имеем

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \{|S_{m(k+1)} - S_{mk}| < a+b\}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{M \rightarrow \infty} P \left(\bigcap_{k=1}^M \{|S_{m(k+1)} - S_{mk}| < a + b\} \right) = \\
&\quad = \lim_{M \rightarrow \infty} P(|S_m| < a + b)^M = 0,
\end{aligned}$$

здесь учтено, что (при каждом m) величины $|S_{m(k+1)} - S_{mk}|$, где $k \in \mathbb{N}$, независимы, а также принято во внимание, что $P(|S_m| < a + b) < 1$ для достаточно большого m . Данное неравенство легко обосновать с помощью центральной предельной теоремы (теорема 6). Действительно,

$$\begin{aligned}
P(|S_m| < a + b) &= \\
P \left(\frac{-a - b - m(2p - 1)}{2\sqrt{mp(1-p)}} < \frac{S_m - m(2p - 1)}{2\sqrt{mp(1-p)}} < \frac{a + b - m(2p - 1)}{2\sqrt{mp(1-p)}} \right),
\end{aligned}$$

а с учетом упр. 41 последняя вероятность при больших m будет близка к

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u(m)}^{v(m)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

где $u(m) = \frac{-a - b - m(2p - 1)}{\sqrt{4mp(1-p)}}$ и $v(m) = \frac{a + b - m(2p - 1)}{\sqrt{4mp(1-p)}}$, причем $u(m) \rightarrow -\infty$ и $v(m) \rightarrow \infty$ при $p > \frac{1}{2}$, $u(m) \rightarrow \infty$ и $v(m) \rightarrow \infty$ при $p < \frac{1}{2}$, а при $p = \frac{1}{2}$ имеем $u(m) \rightarrow 0$, $v(m) \rightarrow 0$ (когда $m \rightarrow \infty$). Итак, $P(\tau = \infty) = 0$.

Фактически верно более сильное утверждение (не только для X_n со значениями -1 или 1), которое доказать сложнее.

Упражнение 57*. Пусть X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные величины. Тогда для любого отрезка $[a, b]$ верно соотношение $P(S_n \in [a, b]) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Задача 9. Подсчитать вероятность разорения игрока А.

Для удобства подсчетов рассмотрим сдвинутое случайное блуждание $Z_n = a + S_n$, которое будет происходить в полосе $[0, a+b]$, причем обе границы полосы являются поглощающими

экранами, т.е. при их достижении процессом Z_n игра заканчивается. При этом, если первым достигается нулевой экран, то разоряется игрок А. Введем также на множестве целых чисел $0 \leq x \leq a + b$ функцию

$$p_x = P(\text{игрок } A \text{ разорится, если его капитал равен } x \text{ при } t = 0).$$

Здесь x выступает как параметр нашей стохастической модели. Используя формулу полной вероятности, мы получим следующее разностное уравнение:

$$p_x = pp_{x+1} + qp_{x-1}, \quad 0 < x < a + b - 1, \quad (58)$$

с граничными условиями

$$p_0 = 1, \quad p_{a+b} = 0.$$

Действительно, в первой игре А может выиграть с вероятностью p , тогда его капитал станет равен $x + 1$, а поскольку следующие игры не зависят от первой, то вероятность разорения станет равна p_{x+1} . Точно так же, когда в первой игре наступает проигрыш, то капитал становится равным $x - 1$. Граничные условия показывают, что если у игрока А начальный капитал нулевой, то он уже проиграл, т.е. $p_0 = 1$, а когда у него начальный капитал $a + b$, то он не может проиграть, т.е. $p_{a+b} = 0$.

Решение уравнения (58) будет различным в случаях $p \neq q$ и $p = q = \frac{1}{2}$. А именно, в первом случае легко проверить, что рассматриваемое уравнение допускает два частных решения $p_x = 1$ и $p_x = \left(\frac{q}{p}\right)^x$. Следовательно, решением будет и

$$p_x = c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^x, \quad (59)$$

а константы c_1 и c_2 определяются из граничных условий:

$$c_1 + c_2 = 1, \quad c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} = 0.$$

Окончательно,

$$p_x = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1}, \quad x \in [0, a+b],$$

необходимо только проверить, что выписанное решение разностного уравнения единственно. Предположим, что существует еще какое-то решение с данными граничными условиями, тогда подберем константы c_1 и c_2 так, чтобы (59) совпадало с ним в точках $x = 0$ и $x = 1$. Далее, последовательно подставляя в (58) значения $x = 1, 2, \dots$, мы найдем по известным двум значениям все остальные. Значит, два решения, совпадающие при $x = 0$ и $x = 1$, будут тождественно равны. Иными словами, всякое решение рассматриваемого разностного уравнения имеет вид (59). Таким образом, вероятность разорения игрока А равна

$$p_a = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1}. \quad (60)$$

Предельный случай $b = \infty$ соответствует игре с бесконечно богатым противником. Переходя к пределу (объясните подробнее) в предыдущем выражении, получим вероятность разорения в таком случае:

$$p_a = \begin{cases} 1 & \text{при } p < q, \\ \left(\frac{q}{p}\right)^a & \text{при } p > q. \end{cases}$$

Если $p = q$, оба частных решения 1 и $\left(\frac{q}{p}\right)^x$ совпадают. Однако в этом случае существует второе частное решение $p_x = x$, поэтому общее решение имеет вид $p_x = c_1 + c_2 x$. Используя граничные условия и рассуждая аналогично предыдущему рассмотрению, найдем соответствующее выражение для вероятности разорения игрока А:

$$p_a = \frac{b}{a+b}. \quad (61)$$

Заметим, что такое же выражение получится из (60) предельным переходом при $p \rightarrow \frac{1}{2}$. Из (61) вытекает, что $p_a = p_a(b) \rightarrow 1$ при $b \rightarrow \infty$. Это интерпретируется следующим образом. Вероятность разорения в игре с бесконечно богатым противником равна единице, если выигрыш и проигрыш в каждой партии равновероятны. Однако последнее можно доказать и без предельного перехода непосредственно для $b = \infty$, воспользовавшись законом повторного логарифма (теорема 7).

Далее случай $b = \infty$ мы рассматриваем только как предельный, когда $b \rightarrow \infty$.

Задача 10. Найти среднюю продолжительность игры M_x , если начальный капитал игрока А равен x , а суммарный капитал обоих игроков $a + b$.

Предположим, что интересующее нас математическое ожидание существует. Тогда по тем же соображениям, что и в предыдущей задаче, справедливо следующее неоднородное разностное уравнение:

$$M_x = pM_{x+1} + qM_{x-1} + 1, \quad 0 < x < a + b,$$

с граничными условиями $M_0 = M_{a+b} = 0$. Разность любых двух решений этого уравнения Δ_x удовлетворяет тому же однородному уравнению, как вероятность разорения игрока А. Следовательно, $\Delta_x = c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^x$ при $p \neq q$. Поскольку частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\frac{x}{q-p}$, приходим к выводу, что

$$M_x = \frac{x}{q-p} + c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^x.$$

Для нахождения неизвестных постоянных c_1 и c_2 используем граничные условия

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} = -\frac{a+b}{q-p}.$$

Таким образом, получаем

$$M_x = \frac{x}{q-p} - \frac{a+b}{q-p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}.$$

Отсюда вытекает, что при $q > p$ (и $b \rightarrow \infty$) средняя продолжительность игры с бесконечно богатым противником, если начальный капитал игрока А равен a , оказывается $M_a = \frac{a}{q-p}$, а при $q < p$ она бесконечна, поскольку с вероятностью $\left(\frac{q}{p}\right)^a$ игра может продолжаться неограниченно.

Если $p = q$, то частным решением неоднородного уравнения будет $-x^2$. Поэтому $M_x = -x^2 + c_1 + c_2 x$. Следовательно, решение, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$M_x = x(a + b - x).$$

Очевидно, что в этом случае средняя продолжительность игры с бесконечно богатым противником равна бесконечности, хотя с вероятностью единица она закончится за конечное время.

2.4. Процессы восстановления

Пусть $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — последовательность независимых неотрицательных случайных величин. Предположим, что X_1, X_2, \dots имеют одинаковое распределение. Введем процесс

$$N_t := \sup\{n \in \mathbb{Z}_+ : X_0 + \dots + X_n \leq t\}, \quad t \geq 0, \quad (62)$$

причем, если $X_0 > t$, то полагаем $N_t := 0$.

Поясним, как возникают процессы данного типа. Пусть X_k является временем жизни k -го прибора, который при выходе из строя мгновенно заменяется на однотипный новый (т.е. восстанавливается работоспособность системы). Когда $X_0 = 0$ (в нулевой момент был поставлен новый прибор), то $S_n = X_1 + \dots + X_n$, где $n \in \mathbb{N}$, является моментом n -го восстановления. Тогда N_t представляет собой число восстановлений до момента t включительно, и говорят о чистом или простом

процессе восстановления $N = \{N_t, t \geq 0\}$. Если распределение случайной величины X_0 не совпадает с распределением остальных X_k , то говорят о *процессе восстановления с запаздыванием*. В интерпретации с приборами это означает, что в начальный момент был включен не новый прибор, а уже отработавший какое-то время. Далее будем считать $X_0 = 0$.

Пример 10. Пусть N — простой процесс восстановления, задаваемый формулой (62). Покажем, что $\{N_t, t \geq 0\}$ — случайный процесс в расширенном смысле, т.е. N_t при каждом t является, вообще говоря, расширенной случайной величиной.

Очевидно, величина N_t при любом $t \geq 0$ принимает целые неотрицательные значения или равна бесконечности. Положим $S_0 = 0$ и заметим следующее:

$$\{\omega : N_t(\omega) = k\} = \{\omega : S_k(\omega) \leq t, S_{k+1}(\omega) > t\}, \quad k \geq 0. \quad (63)$$

Поскольку сумма случайных величин является случайной величиной, видим, что в (63) фигурирует событие. Кроме того, $\{N_t = \infty\} = \Omega \setminus \cup_{k=0}^{\infty} \{N_t = k\} \in \mathcal{F}$. Следовательно, N_t — расширенная случайная величина при любом $t \geq 0$.

Поучительно найти распределение величины N_t при $t > 0$ для показательных X_l , $l \in \mathbb{N}$, решив вспомогательные задачи. Обозначим $F(x) = P(X_l \leq x)$, $l \geq 1$, тогда $P(S_k \leq x) = F^{k*}(x)$ (определение свертки дано в пункте 1.5).

Введем $A_k = \{N_t = k\}$ и $B_k = \{S_k \leq t\}$, где $k \geq 0$. Тогда $A_k = B_k \cap \overline{B_{k+1}} = B_k \setminus B_{k+1}$. Кроме того, $B_{k+1} \subset B_k$, поскольку для неотрицательных случайных величин $S_k \leq S_{k+1}$. Из (63) вытекает, что

$$P(N_t = k) = P(B_k) - P(B_{k+1}) = F^{k*}(t) - F^{(k+1)*}(t). \quad (64)$$

Задача 11. Пусть случайные величины X_1, X_2, \dots независимы и $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, $i \in \mathbb{N}$. Найти плотность распределения

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Измеримые функции от независимых случайных величин независимы (см. пункт 1.5), следовательно, X_n и S_{n-1} независимы при любом $n \geq 2$. Если обе величины обладают плот-

ностью, то плотность их суммы задается с помощью свертки согласно (43). Поэтому для $x \geq 0$, учитывая, что плотность величин $X_1 \geq 0$ и $X_2 \geq 0$ обращается в нуль при $y < 0$, имеем

$$\begin{aligned} p_{S_2}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1}(x-y)p_{X_2}(y) dy = \\ &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda(x-y)} \lambda e^{-\lambda y} dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Далее доказательство проводим по индукции. Предположим, что при всех $k \leq n$ плотность S_k равна нулю, когда $x < 0$, а для $x \geq 0$ она дается формулой

$$p_{S_k}(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x}. \quad (65)$$

Найдем плотность величины S_{n+1} . Очевидно, $p_{S_{n+1}}(x) = 0$ при $x < 0$, так как показательные случайные величины неотрицательны. Для $x \geq 0$

$$\begin{aligned} p_{S_{n+1}}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{S_n}(x-y)p_{X_{n+1}}(y) dy = \\ &= \int_0^x \frac{\lambda^n (x-y)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda(x-y)} \lambda e^{-\lambda y} dy = \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \int_0^x (x-y)^{n-1} dy = \frac{\lambda^{n+1} x^n}{n!} e^{-\lambda x}, \quad (66) \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Поскольку $(k-1)! = \Gamma(k)$ при $k \in \mathbb{N}$, то (65) можно переписать в виде

$$p_{S_k}(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Задача 12. Требуется убедиться, что семейство гамма-распределений с одним и тем же λ замкнуто относительно взятия свертки.

Пусть $Z_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$ и $Z_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$ независимы, тогда сумма $Z_1 + Z_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$. В самом деле, для $x > 0$

$$p_{Z_1+Z_2}(x) = \int_0^x p_{Z_1}(x-y)p_{Z_2}(y) dy =$$

$$= \int_0^x \frac{\lambda^{\alpha_1} (x-y)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} e^{-\lambda(x-y)} \frac{\lambda^{\alpha_2} y^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda y} dy.$$

Последний интеграл можно переписать в виде

$$\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda x} \int_0^x (x-y)^{\alpha_1-1} y^{\alpha_2-1} dy,$$

откуда после замены $y = xu$ получим

$$\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2} x^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda x} \int_0^1 (1-u)^{\alpha_1-1} u^{\alpha_2-1} du. \quad (67)$$

Интеграл в выражении (67) — это бета-функция с параметрами α_1 и α_2 , которая равна

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (68)$$

Подставляя (68) в (67), получаем требуемый результат.

Задача 13. Показать, что к результату предыдущей задачи можно прийти с использованием характеристических функций.

Характеристическая функция $\varphi_X(s)$ случайной величины X в силу (26) и (35) равна

$$\varphi_X(s) = Ee^{isX} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isu} p_X(u) du, \quad s \in \mathbb{R} \quad (i^2 = -1),$$

если у X существует плотность $p_X(\cdot)$.

Для введенных в задаче 12 случайных величин Z_l , $l = 1, 2$, имеем

$$\varphi_{Z_l}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} \frac{\lambda^{\alpha_l} x^{\alpha_l-1}}{\Gamma(\alpha_l)} e^{-\lambda x} dx = \left(\frac{\lambda}{\lambda - is} \right)^{\alpha_l}.$$

Поскольку характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций, то

$$\varphi_{Z_1+Z_2}(s) = \varphi_{Z_1}(s)\varphi_{Z_2}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - is} \right)^{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Пользуясь взаимно однозначным соотвествием между распределениями и характеристическими функциями, видим, что $Z_1 + Z_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.

Упражнение 58. Пусть $X = \{X(t), t \geq 0\}$ — простой процесс восстановления, который строится по последовательности независимых величин X_1, X_2, \dots таких, что $X_n \sim \Gamma(k, \lambda)$ при $n \in \mathbb{N}$. Найти одномерные распределения процесса.

Полученные в двух последних задачах результаты позволяют сделать вывод, что гамма-распределение безгранично делимо. Напомним

Определение 13. Случайная величина X называется *безгранично делимой*, если при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Law}(X) = \text{Law}(X_{n1} + \dots + X_{nn}), \quad (69)$$

где величины X_{n1}, \dots, X_{nn} независимы и одинаково распределены.

В терминах характеристических функций это условие можно записать следующим образом:

$$\varphi_X(s) = \varphi_n^n(s), \quad (70)$$

где $\varphi_n(s)$ — это некоторая характеристическая функция. Если выполнено условие (69) (или (70)), то также говорят, что безгранично делимо распределение случайной величины X .

Кроме гамма-распределения, наиболее известными безгранично делимыми распределениями являются пуассоновское и нормальное. Чтобы это проверить, вспомним, как выглядят их характеристические функции. Для пуассоновского распределения с параметром $\lambda > 0$

$$\varphi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{is k} P(X = k) = e^{\lambda(e^{is}-1)}, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (71)$$

Для $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ имеем

$$\varphi_X(s) = \exp \left\{ ias - \frac{\sigma^2 s^2}{2} \right\}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Упражнение 59. Дайте пример распределения, не являющегося безгранично делимым.

К изложенному выше материалу мы вернемся в следующей главе при рассмотрении процессов с независимыми приращениями.

Обратимся к простому процессу восстановления, описанному в примере 10.

Задача 14. Пусть задана последовательность независимых показательно распределенных с параметром λ случайных величин X_k , $k \in \mathbb{N}$, и $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$, а $S_0 = 0$. При каждом $t \geq 0$ требуется найти распределение

$$N_t = \sup\{n \in \mathbb{Z}_+ : S_n \leq t\}.$$

Было показано (пример 10), что N_t является (расширенной) случайной величиной при $t > 0$. Так как $N_t = 0$ п.н. при $t = 0$, то N_t — расширенная случайная величина при всех t . Как следует из формулы (65), справедливо соотношение

$$F^{(k+1)*}(t) = \int_0^t \frac{\lambda^{k+1} x^k}{k!} e^{-\lambda x} dx.$$

Интегрируя по частям, получим, что последнее выражение преобразуется к виду

$$-\frac{\lambda^k t^k}{k!} e^{-\lambda t} + F^{k*}(t).$$

Подставляя найденную формулу для $F^{(k+1)*}(t)$ в (64), приходим к следующему результату:

$$\mathsf{P}(N_t = k) = \frac{\lambda^k t^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k \geq 0. \quad (72)$$

Это означает, что случайная величина N_t имеет распределение Пуассона с параметром λt . Тем самым показано также, что N_t почти наверное совпадает с собственной (т.е. обычной, а не расширенной) случайной величиной, так как

$$\mathsf{P}(N_t = \infty) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(N_t = k) = 0.$$

Далее мы увидим, что так построенное семейство случайных величин $N = \{N_t, t \geq 0\}$ представляет собой *пуассоновский процесс* – один из наиболее важных стохастических процессов.

Упражнение 60. Нарисовать графики траекторий для пуассоновского процесса $N = \{N_t, t \geq 0\}$, конструкция которого дана в задаче 14 (смотрите также разделы 3.3 и 3.4).

2.5. Модель Крамера–Лундберга в теории страхования

С помощью пуассоновского процесса строятся более сложные стохастические модели. Обратимся к одной из них.

Пусть начальный капитал страховой компании равен константе $y > 0$, страховые взносы клиентов (застрахованных) поступают непрерывно со скоростью $c > 0$, а выплаты возмещений осуществляются в случайные моменты S_n ($n \in \mathbb{N}$), представляющие собой точки скачков процесса $N = \{N_t, t \geq 0\}$. Пусть величины выплат ξ_1, ξ_2, \dots (в момент $t = S_n$ производится выплата размера ξ_n) образуют последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных величин, которая не зависит от последовательности $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$, дающей пуассоновский процесс N согласно задаче 14. Тогда капитал компании в момент времени $t > 0$ определяется формулой

$$Y(t) = y + ct - \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k,$$

где сумма по пустому множеству, как обычно, считается равной нулю.

Упражнение 61. Нарисуйте графики траекторий процесса $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$. Какие траектории Вы бы назвали типичными?

Легко видеть, что все траектории Y на $[0, \infty)$ непрерывны справа и имеют предел слева. Процессы с таким свойством называются càdlàg процессами (в названии использованы первые

буквы французских слов “continuer à droite, limiter à gauche”, которые говорят о вышеуказанном свойстве траекторий).

При изучении деятельности страховой компании большой интерес представляет *момент разорения*

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : Y(t) < 0\},$$

т.е. первый момент времени, когда компания окажется не в состоянии удовлетворить поступившие требования застрахованных на выплату возмещений. Если $Y(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$, то полагают $\tau = \infty$.

Задача 15. Оценить вероятность разорения компании при заданном начальном капитале y , т.е. дать верхнюю оценку функции

$$\psi(y) = P(\tau < \infty).$$

Точнее говоря, следовало бы писать $P_y(\tau < \infty)$ или $\tau(y)$, подчеркивая значение параметра y (т.е. начальное значение процесса Y), однако не будем усложнять обозначения. Сделаем дополнительные предположения, касающиеся распределения скачков (размеров отдельных выплат) и скорости поступления взносов. Для этого нам понадобится *производящая функция моментов* случайных величин ξ_n ($n \geq 1$), т.е. функция

$$g(s) := E \exp(s\xi_1) \leq \infty, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что для случайных величин ξ_n , ограниченных по модулю п.н. некоторой константой, производящая функция моментов, очевидно, конечна при всех s . Кроме того, предположим, что выполнено *условие Крамера*, а именно, уравнение

$$\lambda g(s) = \lambda + sc \tag{73}$$

имеет единственное положительное решение $s = R$.

При данных выше условиях справедливо *неравенство Крамера–Лундберга*:

$$\psi(y) \leq \exp\{-Ry\}, \quad y > 0. \tag{74}$$

Как следует из вида траекторий процесса $Y(t)$, $t \geq 0$, разорение может наступить лишь в моменты скачков пуассоновского процесса, когда поступают требования на выплату, поскольку в промежутках между ними капитал растет со скоростью c . Обозначим $\psi_k(y)$ вероятность разорения при поступлении не более k требований. Очевидно, $\psi_k(y) = 1$ при $y < 0$ и $k \in \mathbb{Z}_+$. Положим $\psi_0(y) = 1$ при $y < 0$, и пусть $\psi_0(y) = 0$ для $y \geq 0$ (если капитал неотрицателен, а требований на выплату не поступало, то разориться невозможно). Ясно, что $\psi_0(y) \leq e^{-Ry}$ при всех y . Дальнейшее доказательство проводится по индукции. Предположим, что $\psi_k(y) \leq e^{-Ry}$ при каждом $y \in \mathbb{R}$ и всех $k \leq n$. Установим, что тот же факт справедлив и для $\psi_{n+1}(y)$. Для этого получим рекуррентное соотношение, связывающее $\psi_{n+1}(y)$ и $\psi_n(y)$. Нас теперь интересует вероятность разориться в предположении, что до момента разорения поступило не более $n + 1$ требований. Если первое требование имеет размер x и оно поступило в момент t , капитал в этот момент станет равным $y + ct - x$, а после этого может поступить не более n требований, следовательно,

$$\psi_{n+1}(y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \psi_n(y + ct - x) \lambda e^{-\lambda t} dF(x) dt, \quad (75)$$

где $F(x)$ — функция распределения ξ_1 .

Последнюю формулу можно рассматривать как непрерывный аналог классической формулы полной вероятности, относящейся к разбиению Ω на конечное или счетное число событий. Строгое обоснование соотношения (75) можно дать и с помощью аппарата условных математических ожиданий, который будет введен в главе 5 (см. пример 38).

По предположению индукции правая часть (75) не превосходит

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-R(y+ct-x)} \lambda e^{-\lambda t} dF(x) dt &= \\ &= \int_0^\infty e^{-R(y+ct)} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{Rx} dF(x) dt. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл равен $g(R)$, поэтому правая часть последней формулы равна

$$\lambda e^{-Ry} g(R) \int_0^\infty e^{-t(\lambda+Rc)} dt = e^{-Ry} \frac{\lambda g(R)}{\lambda + Rc}.$$

В силу (73) дробь справа равна 1, т.е. мы получаем $\psi_k(y) \leq e^{-Ry}$ для всех $k \geq 0$ и $y > 0$. Осталось заметить, что последовательность $\psi_k(y)$ не убывает по k и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k(y) = \psi(y).$$

Таким образом, неравенство Крамера–Лундберга доказано. При изучении мартингалов тот же результат будет получен другими методами.

Упражнение 62. Докажите, что если существует $E\xi_1^2 < \infty$ и $c > \lambda a$, где $a = E\xi_1$, то уравнение (73) имеет единственный положительный корень.

Пример 11. Пусть в модели Крамера–Лундберга величина $\xi_1 \sim \text{Exp}(\gamma)$ для некоторого $\gamma > 0$. Рассмотрим решение уравнения (73).

Заметим, что $g(0) = 1$, $g(s) = \infty$ при $s \geq \gamma$, а при $s < \gamma$

$$g(s) = Ee^{s\xi_1} = \int_0^\infty e^{sx} \gamma e^{-\gamma x} dx = \frac{\gamma}{\gamma - s}.$$

Итак, (73) для $s < \gamma$ приобретает вид

$$\frac{\lambda\gamma}{\gamma - s} = \lambda + sc.$$

Корень этого уравнения $R = \gamma - \frac{\lambda}{c} < \gamma$. При получении неравенства Крамера–Лундберга мы использовали только то условие, что найдется $R > 0$, для которого $g(R) < \infty$ (откуда $g(s) < \infty$ при $s \leq R$, так как $\xi_1 \geq 0$) и верно (73). В нашем случае следует позаботиться лишь о том, чтобы $R = \gamma - \frac{\lambda}{c} > 0$, т.е. наложить условие $c > \frac{\lambda}{\gamma}$ (сравните с упр. 62).

Воспользовавшись первым тождеством Вальда (лемма 6), нетрудно получить, что $EU(t) = \lambda at$, где $U(t) = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k$ и $a :=$

$= E\xi_1$. Величина $U(t)$ представляет собой размер требований на возмещение ущерба, поступивших в страховую компанию в промежутке $[0, t]$. Согласно принципу равенства в среднем обязательств страховой компании и застрахованных $p(t) = EU(t)$ носит название чистой премии, которую компания должна получить за время t . Таким образом, $p(1) = \lambda a$ – это чистая премия в единицу времени и условие $c > \lambda a$ означает, что страховой взнос должен быть больше чистой премии. Иными словами, премия должна рассматриваться с нагрузкой безопасности (или страховой нагрузкой). В связи с этим полезно выполнить следующее

Упражнение 63. Пользуясь центральной предельной теоремой (см. теорему 6), оценить вероятность того, что при большом n собранных компанией взносов не хватит на выплату поступивших требований η_i , $i = 1, \dots, n$, являющихся независимыми одинаково распределенными случайными величинами, если застрахованные платят чистую премию $p = E\eta_1$.

Модель изменения капитала страховой компании, когда моменты поступления требований соответствуют скачкам пуассоновского процесса (иначе говоря, промежутки между поступлениями имеют одинаковое показательное распределение с параметром λ) носит название модели Крамера–Лундберга. В 1903 г. Лундберг предложил рассматривать такую модель, и в связи с этим появился пуассоновский процесс. В 30-е годы двадцатого века она была подробно изучена известным шведским специалистом в области теории вероятностей Гаральдом Крамером. Если предположить, что промежутки между поступлениями требований независимы и одинаково распределены, но не показательно, получившаяся модель называется моделью Спарре Андерсена. Для нее также изучено поведение вероятности разорения, но при других условиях на распределения вместо (73).

Интересно отметить, что пуассоновский процесс стал широко использоваться в физических моделях (например, при

описании радиоактивного распада) позднее, чем в моделях страхования.

Задача 16. Показать, что полученная в задаче 15 оценка вероятности разорения не зависит от того, в каких единицах измеряется капитал, т.е. на нее не влияет выбор валюты, в которой производятся все расчеты.

Предположим, что мы перешли к новой денежной единице, тогда вместо капитала y мы будем иметь капитал $y_\delta = \delta y$ для некоторого $\delta > 0$, вместо выплат ξ_n будут фигурировать $\delta \xi_n$, а скорость поступления взносов вместо c будет δc . Чтобы подчеркнуть зависимость функции g от величин ξ_n , будем писать g_ξ . Поскольку $g_{\delta\xi}(s) = g_\xi(\delta s)$, уравнение (73) превратится в

$$\lambda g_\xi(\delta s) = \lambda + s\delta c.$$

Это означает, что новый коэффициент R_δ , являющийся положительным решением данного уравнения, связан со старым R соотношением $R = \delta R_\delta$. Таким образом, при любом выборе $\delta > 0$ получается $R_\delta y_\delta = Ry$, т.е. оценка вероятности разорения не зависит от выбора денежной единицы.

Глава 3. ГАУССОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ПРОЦЕССЫ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

3.1. Согласованные вероятностные меры

Начнем с напоминания теоремы Колмогорова о согласованных распределениях, являющейся фундаментом теории случайных процессов.

Теорема 8. *Пусть T – любое непустое множество, и на измеримых пространствах $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ заданы меры P_{t_1, \dots, t_n} , где $t_1, \dots, t_n \in T$ и $n \in \mathbb{N}$, обладающие следующими свойствами согласованности. Для любых $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} \in T$ и всех прямоугольников $B_1 \times \dots \times B_n$ ($B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $k = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$), верны равенства*

1°. $P_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n) = P_{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}}(B_{i_1} \times \dots \times B_{i_n})$, где (i_1, \dots, i_n) — произвольная перестановка индексов $(1, \dots, n)$;

2°. $P_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(B_1 \times \dots \times B_n \times \mathbb{R}) = P_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n)$.

Тогда на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ существует процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ со значениями в \mathbb{R} (при каждом $t \in T$), для которого меры P_{t_1, \dots, t_n} являются конечномерными распределениями, т.е.

$$P_{t_1, \dots, t_n}(C) = \mathsf{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in C), \quad C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Отметим, что необходимость условий согласованности для существования процесса с заданными конечномерными распределениями очевидна, поскольку всегда

$$\begin{aligned} P_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n) &= \mathsf{P}(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n) = \\ &= \mathsf{P}(X_{t_{i_1}} \in B_{i_1}, \dots, X_{t_{i_n}} \in B_{i_n}) = P_{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}}(B_{i_1} \times \dots \times B_{i_n}). \end{aligned}$$

Действительно, $A_1 \cap \dots \cap A_n = A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}$ для любых событий A_1, \dots, A_n . Кроме того,

$$\begin{aligned} P_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(B_1 \times \dots \times B_n \times \mathbb{R}) &= \\ &= \mathsf{P}(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n, X_{t_{n+1}} \in \mathbb{R}) = \\ &= \mathsf{P}(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n), \end{aligned}$$

так как $P(X_t \in \mathbb{R}) = 1$ при произвольном $t \in \mathbb{R}$.

Упражнение 64. Сформулируйте теорему на языке функций распределения.

Мы же, пользуясь взаимно однозначным соответствием между вероятностными мерами на пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ и их характеристическими функциями, дадим (см. [2, с. 29]) такую эквивалентную формулировку теоремы Колмогорова.

Пусть имеется семейство характеристических функций $\varphi_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n)$ вероятностных мер Q_{t_1, \dots, t_n} на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, где попарно различные $t_1, \dots, t_n \in T$ (T — непустое множество), $n \in \mathbb{N}$. Тогда условия согласованности 1° и 2° равносильны тому, что $\varphi_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n)$ не меняется при одновременной перестановке нижних и верхних аргументов, а подстановка в эту характеристическую функцию $u_n = 0$ при $n \geq 2$ приводит к $\varphi_{t_1, \dots, t_{n-1}}(u_1, \dots, u_{n-1})$.

Упражнение 65. Проверить необходимость условий согласованности в терминах характеристических функций.

Как следствие теоремы Колмогорова получаем важное утверждение: существует семейство независимых (действительных) случайных величин X_t , имеющих заданные распределения Q_t , $t \in T$. Достаточно положить $P_{t_1, \dots, t_n} = Q_{t_1} \otimes \dots \otimes Q_{t_n}$, $t_k \in T$, $k = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, т.е. ввести меры P_{t_1, \dots, t_n} , которые на прямоугольниках имеют вид

$$P_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n) = \prod_{k=1}^n Q_{t_k}(B_k),$$

а дальше однозначно продолжаются на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Возможность такого продолжения вытекает из теоремы Фубини.

3.2. Гауссовские системы

Определение 14. Случайный процесс, принимающий действительные значения, называется *гауссовским*, если все его конечномерные распределения гауссовские.

Напомним, что вектор $X = (X_1, \dots, X_n)$ имеет *гауссовское* (или *нормальное*) распределение, если его характеристи-

ческая функция задается формулой (37). Рассмотрим некоторые свойства гауссовских распределений.

Пример 12. Пусть случайный вектор $X \sim \mathcal{N}(a, C)$ со значениями в \mathbb{R}^n . Найдем распределение на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ вектора $Y = AX + b$, где неслучайная матрица $A = (a_{k,r})$, $a_{k,r} \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$, $r = 1, \dots, n$, а неслучайный вектор $b \in \mathbb{R}^m$.

Характеристическая функция Y равна

$$\begin{aligned}\varphi_Y(v) &= \mathbb{E} \exp\{i(v, Y)\} = \\ &= \exp\{i(v, b)\} \mathbb{E} \exp\{i(A^T v, X)\} = \exp\{i(v, b)\} \varphi_X(A^T v),\end{aligned}$$

где вектор (как всегда, столбец) $v = (v_1, \dots, v_m)$ и A^T — транспонированная матрица. Используя (37) для $u = A^T v$, получаем

$$\begin{aligned}\varphi_Y(v) &= \exp\{i(v, b)\} \exp\left\{i(A^T v, a) - \frac{1}{2} (CA^T v, A^T v)\right\} = \\ &= \exp\left\{i(v, Aa + b) - \frac{1}{2} ((ACA^T)v, v)\right\},\end{aligned}$$

а это есть характеристическая функция m -мерного нормального вектора со средним $Aa + b$ и матрицей ковариаций ACA^T (очевидно, матрица ACA^T симметрична и $ACA^T \geq 0$).

Из установленного результата следует, в частности, что сумма независимых гауссовых величин имеет гауссовское распределение, причем параметры суммы равны сумме параметров слагаемых. Иначе говоря, если X_1, \dots, X_n — независимые величины и $X_k \sim \mathcal{N}(a_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, \dots, n$, то

$$X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{N}(a_1 + \dots + a_n, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2).$$

Задача 17. Показать, что вектор $X = (X_1, \dots, X_n)$ гауссовский тогда и только тогда, когда любая линейная комбинация его компонент имеет (одномерное) гауссовское распределение.

Предположим, что вектор X гауссовский, т.е. его характеристическая функция дается формулой (37). Для неслучай-

ного вектора $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ введем величину $U := (u, X) = \sum_{k=1}^n u_k X_k$. Тогда

$$\varphi_U(s) = \mathbb{E} \exp\{isU\} = \mathbb{E} \exp\left\{i \sum_{k=1}^n s u_k X_k\right\}, \quad s \in \mathbb{R},$$

т.е. $\varphi_U(s) = \varphi_X(v)$, мы имеем характеристическую функцию вектора X при $v_k = su_k$, где $k = 1, \dots, n$. Согласно (37) она принимает вид $\exp\left\{is(u, a) - \frac{s^2}{2}(Cu, u)\right\}$, а это — характеристическая функция нормальной случайной величины со средним (u, a) и дисперсией (Cu, u) .

Пусть теперь каждая линейная комбинация компонент X нормально распределена, т.е. для любых $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ величина $U = \sum_{k=1}^n u_k X_k$ имеет характеристическую функцию $\varphi_U(s) = \exp\left\{i\alpha s - \sigma^2 \frac{s^2}{2}\right\}$, где $s \in \mathbb{R}$ и

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathbb{E}U = \mathbb{E} \sum_{k=1}^n u_k X_k = \sum_{k=1}^n u_k \mathbb{E}X_k = (u, a), \\ \sigma^2 &= \mathbb{D}U = \mathbb{E}(U - \mathbb{E}U)^2 = \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n u_k (X_k - \mathbb{E}X_k) \right)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u_k u_l \mathbb{E}(X_k - \mathbb{E}X_k)(X_l - \mathbb{E}X_l) = (Cu, u). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\varphi_U(s) = \mathbb{E} \exp\left\{i \sum_{k=1}^n s u_k X_k\right\} = \exp\left\{is(u, a) - \frac{s^2}{2}(Cu, u)\right\}.$$

Положив в этом равенстве $s = 1$, мы получим требуемый результат в силу (37).

Задача 18. Пусть $\xi = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$, где $\xi_n \sim \mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, причем $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2$.

Совокупность действительных случайных величин, обладающих конечным вторым моментом, — это пространство $L^2(\Omega)$ со скалярным произведением $(\xi, \eta) = E\xi\eta$. В силу непрерывности скалярного произведения $a_n = E\xi_n = (\xi_n, 1) \rightarrow (\xi, 1) = E\xi = a$, кроме того, $E\xi_n^2 = (\xi_n, \xi_n) \rightarrow (\xi, \xi) = E\xi^2$, поэтому $\sigma_n^2 = E\xi_n^2 - (E\xi_n)^2 \rightarrow E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sigma^2$ при $n \rightarrow \infty$.

Так как из сходимости в среднем квадратичном следует сходимость по вероятности, а значит, и слабая сходимость, то характеристические функции $\varphi_{\xi_n}(s) \rightarrow \varphi_\xi(s)$ для всех $s \in \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$. С другой стороны, из установленной сходимости параметров нормальных распределений вытекает, что

$$\varphi_{\xi_n}(s) = \exp \left\{ is a_n - \frac{1}{2} s^2 \sigma_n^2 \right\} \rightarrow \exp \left\{ is a - \frac{1}{2} s^2 \sigma^2 \right\} = \varphi_\xi(s).$$

А это показывает, что $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

Совокупность $\mathcal{G} = \{X_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$, состоящую из действительных случайных величин, назовем гауссовской системой если для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольных $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ вектор $(X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_n})$ имеет нормальное распределение.

Упражнение 66. Пусть система $\bar{\mathcal{G}}$ представляет собой замыкание \mathcal{G} в пространстве $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Докажите, что $\bar{\mathcal{G}}$ также является гауссовской системой.

Задача 19. Данна последовательность (необязательно независимых) случайных величин $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Показать, что для любого $c > \sqrt{2}$ найдется событие вероятности единицы, на котором $|\xi_n(\omega)| < c\sqrt{\ln n}$ при всех $n \geq n_0(\omega, c)$.

Для $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и любого $x > 0$ имеем

$$\begin{aligned} P(\xi \geq x) &= (2\pi)^{-1/2} \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy = (2\pi)^{-1/2} \int_x^\infty \left(\frac{-1}{y} \right) de^{-y^2/2} = \\ &= (2\pi)^{-1/2} \left(x^{-1} e^{-x^2/2} - \int_x^\infty y^{-2} e^{-y^2/2} dy \right) \leq (2\pi)^{-1/2} x^{-1} e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

(таким образом, $\sqrt{2\pi} e^{x^2/2} P(\xi \geq x) \leq x^{-1}$), а

$$P(|\xi| \geq x) \leq \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} x^{-1} e^{-x^2/2}.$$

Поэтому для $c > \sqrt{2}$

$$\sum_{n \geq 2} P(|\xi_n| \geq c(\ln n)^{1/2}) \leq c^{-1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sum_{n \geq 2} n^{-c^2/2} (\ln n)^{-1/2} < \infty.$$

Отсюда требуемый результат следует по лемме Бореля–Кантелли (пункт 1.1).

Кстати, для $x > 0$ отношение Миллса (интеграла и $e^{-\frac{x^2}{2}}$)

$$R(x) := e^{-\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \in [2(x + \sqrt{x^2 + 4})^{-1}, 2(x + \sqrt{x^2 + 2})^{-1}].$$

Упражнение 67. Пусть дан вектор $X \sim \mathcal{N}(a, C)$, принимающий значения в \mathbb{R}^n , причем ранг матрицы C равен $r < n$. Докажите, что тогда существует некоторое линейное многообразие $L = a + H$ ($a \in \mathbb{R}^n$ и H — линейное подпространство \mathbb{R}^n), которому с вероятностью единица принадлежат значения вектора Y . Какова размерность H ?

Отсюда, в частности, вытекает, что у n -мерного нормального вектора не существует n -мерной плотности распределения, если ранг его матрицы ковариаций меньше n .

Упражнение 68. Пусть случайный вектор $X \sim \mathcal{N}(a, C)$. Убедитесь, что его компоненты независимы тогда и только тогда, когда матрица C диагональна.

Пример 13. Покажем, что существует вектор, компоненты которого имеют нормальное распределение, матрица ковариаций диагональна, но сам вектор негауссовский.

Достаточно построить двумерный вектор с такими свойствами (сравните с упр. 23). Пусть $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, а $Y = X\mathbb{I}_{\{X \in [-a, a]\}} - X\mathbb{I}_{\{X \notin [-a, a]\}}$, где значение $a > 0$ выберем позднее. Заметим, что для каждого $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{itY} &= \mathbb{E}e^{itX}\mathbb{I}_{\{X \in [-a, a]\}} + \mathbb{E}e^{-itX}\mathbb{I}_{\{X \notin [-a, a]\}} = \\ &= \int_{[-a, a]} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{\mathbb{R} \setminus [-a, a]} e^{-itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Очевидно, X и Y зависимы: при любом выборе $a > 0$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X \in [-a, a], Y \in [-a, a]) &= \mathsf{P}(X \in [-a, a]) \neq \\ &\neq \mathsf{P}(X \in [-a, a])\mathsf{P}(Y \in [-a, a]) = \mathsf{P}(X \in [-a, a])^2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\mathsf{E}X^2 = 1$, можно записать

$$\text{cov}(X, Y) = \mathsf{E}X^2\mathbb{I}_{\{X \in [-a, a]\}} - \mathsf{E}X^2\mathbb{I}_{\{X \notin [-a, a]\}} = 2h(a) - 1,$$

где непрерывная функция $h(a) = \mathsf{E}X^2\mathbb{I}_{\{X \in [-a, a]\}}$, определенная для $a \in [0, \infty)$, является возрастающей, причем $h(0) = 0$ и $h(a) \rightarrow 1$ при $a \rightarrow \infty$ согласно теореме 2. Поэтому существует (единственное) a_0 , для которого $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Действительная функция $R(s, t)$, где $s, t \in T$, называется *неотрицательно определенной*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольного набора точек $t_1, \dots, t_n \in T$ и всех $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$\sum_{k, l=1}^n c_k c_l R(t_k, t_l) \geq 0, \quad (76)$$

т.е. неотрицательно определены матрицы $(R(t_k, t_l))_{k, l=1}^n$. Функция R называется *симметричной*, если $R(s, t) = R(t, s)$ при всех $s, t \in T$.

Пример 14. Пусть функция $R(s, t) := \min\{s, t\}$ задана при $s, t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Требуется проверить, что она является неотрицательно определенной.

Заметим, что для любых $s, t \geq 0$ верно равенство

$$\min\{s, t\} = \int_0^\infty \mathbb{I}_{[0, \min\{s, t\}]}(u) du = \int_0^\infty \mathbb{I}_{[0, s]}(u) \mathbb{I}_{[0, t]}(u) du.$$

Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$, всех $t_1, \dots, t_n \in [0, \infty)$ и произвольных $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{k, l=1}^n c_k c_l R(t_k, t_l) &= \int_0^\infty \sum_{k, l=1}^n c_k \mathbb{I}_{[0, t_k]}(u) c_l \mathbb{I}_{[0, t_l]}(u) du = \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^n c_k \mathbb{I}_{[0, t_k]}(u) \right)^2 du \geq 0, \end{aligned}$$

поскольку интегрируется неотрицательная функция. При этом мы воспользовались для любых $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ очевидным равенством

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2.$$

Упражнение 69. Доказать, что существует гауссовский процесс (поле Винера–Ченцова) $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}_+^n\}$ с нулевым средним и ковариационной функцией $R(s, t) = \prod_{k=1}^n \min\{s_k, t_k\}$, где $s = (s_1, \dots, s_n)$ и $t = (t_1, \dots, t_n)$.

Напомним теорему Пойа. Если φ — четная непрерывная функция такая, что φ выпукла на $[0, \infty)$ и $\varphi(0) = 1$, $\varphi(v) \rightarrow 0$ при $v \rightarrow \infty$, то φ — характеристическая функция некоторой вероятностной меры.

В частности, характеристической является функция

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1 - |v| & \text{при } |v| \leq 1; \\ 0 & \text{при } |v| > 1. \end{cases}$$

Упражнение 70. Приведите пример характеристической функции, которая не удовлетворяет условиям теоремы Пойа (т.е. условия этой теоремы лишь достаточны, но не необходимы).

Справедлива (см., напр., [2, с. 52]) следующая

Теорема 9. Для действительной функции $a(t)$, $t \in T$, и симметричной неотрицательно определенной (в смысле (76)) функции $R(s, t)$, $s, t \in T$, существует гауссовский процесс $Y = \{Y(t), t \in T\}$, для которого $EY(t) = a(t)$ и $\text{cov}(Y(s), Y(t)) = R(s, t)$ при $s, t \in T$.

В силу наложенных на $R(s, t)$ условий можно ввести характеристические функции вида

$$\varphi_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) = \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n u_k a(t_k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u_k u_l R(t_k, t_l) \right\}.$$

В качестве простого упражнения проверьте, что указанные характеристические функции удовлетворяют условиям согласованности (см. пункт 3.1). Поэтому на пространствах $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \in \mathbb{N}$, возникает семейство согласованных гауссовых мер с указанными характеристическими функциями. В силу фундаментальной теоремы Колмогорова, сформулированной в терминах характеристических функций, существует гауссовский случайный процесс $Y = \{Y(t), t \in T\}$ с заданным семейством конечномерных распределений.

Задача 20. Можно ли построить гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $R(s, t) = \sigma^2 \delta(s, t)$, где $\delta(s, t) = 1$ при $s = t$, а в остальных случаях она равна 0?

Чтобы применить сформулированную теорему 9, достаточно проверить неотрицательную определенность $\delta(s, t)$, так как она очевидным образом симметрична. Для произвольного набора $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_k c_l \delta(t_k, t_l) = \sum_{k=1}^n c_k^2 \geq 0.$$

Значит, существует гауссовский процесс с заданными параметрами.

Согласно упр. 68 мы построили гауссовский процесс с независимыми значениями, поскольку $R(s, t) = 0$ при $s \neq t$.

Часто бывает удобно обобщить рассмотренное выше понятие неотрицательно определенной функции на комплексно-значные функции. Для этого вместо (76) требуют выполнения условия

$$\sum_{k,m=1}^n z_k \bar{z}_m R(t_k, t_m) \geq 0, \quad (77)$$

при каждом $n \in \mathbb{N}$, всех $t_1, \dots, t_n \in T$ и любых $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, где $\bar{z} = a - ib$ для $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Именно это обобщение используется в следующих четырех упражнениях.

Упражнение 71. Пусть $\varphi(v)$, где $v \in \mathbb{R}$, — характеристическая функция некоторой вероятностной меры. Положим

$R(s, t) = \varphi(s - t)$, $s, t \in \mathbb{R}$. Докажите, что функция R является неотрицательно определенной.

Упражнение 72. Пусть $R(s, t)$, где $s, t \in T$, — неотрицательно определенная функция, а $T = (-a, a)$ — симметричный интервал (или вся прямая). Может ли быть несимметричной функция R ?

Упражнение 73. Пусть $R_k(s, t)$ — неотрицательно определенные функции, $k = 1, \dots, n$ и $s, t \in T$. Покажите, что функция $R(s, t) := \sum_{k=1}^n c_k R_k(s, t)$ является неотрицательно определенной ($s, t \in T$), если константы $c_1, \dots, c_n \geq 0$.

Упражнение 74. Пусть R_1, \dots, R_n — ковариационные функции, заданные на \mathbb{R} , H — полином от n переменных, имеющий положительные коэффициенты. Доказать, что $R = H(R_1, \dots, R_n)$ — ковариационная функция.

Отметим, что справедлив аналог теоремы 9 для функций $R(s, t)$, неотрицательно определенных в смысле (77), позволяющий задавать комплекснозначные гауссовские процессы.

3.3. Процессы с независимыми приращениями

Определение 15. Говорят, что процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ имеет *независимые приращения*, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любых $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ независимы случайные величины $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$.

Аналогичное определение дается для процесса $X = \{X_n, n \in T = \mathbb{Z}_+\}$, следует лишь добавить, что $t_k \in T$, $k = 0, \dots, n$.

Пример 15. Пусть $S = \{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — случайное блуждание, введенное в разделе 2.3. Учитывая, что (измеримые) функции, берущиеся от непересекающихся наборов независимых случайных величин, независимы, заключаем, что процесс S имеет независимые приращения.

Упражнение 75. Обладает ли независимыми приращениями процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$, для которого $X_t = S_{[t]}$, $t \geq 0$,

S_n — те же, что в предыдущем примере, а $[\cdot]$ — целая часть числа?

Пример 16. Построим пример процесса, не являющегося процессом с независимыми приращениями.

Пусть $S = \{S_n = (n+1)Y, n \in \mathbb{Z}_+\}$, где Y — невырожденная случайная величина. Тогда для любых множеств B_0 и B_1 из $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ имеем $P(S_0 \in B_0, S_1 - S_0 \in B_1) = P(Y \in B_0, Y \in B_1) = P(Y \in B_0 \cap B_1)$. Последнее выражение не совпадает с произведением $P(S_0 \in B_0)P(S_1 - S_0 \in B_1)$, если взять, например, B_0 такое, что $P(Y \in B_0) \in (0, 1)$, а $B_1 = \mathbb{R} \setminus B_0$.

Упражнение 76. Пусть $X = \{X(t), t \geq 0\}$ — процесс с независимыми приращениями, $h = h(t)$, $t \geq 0$, — детерминированная функция. Верно ли, что процессы $\{X(t) + h(t), t \geq 0\}$ и $\{h(t)X(t), t \geq 0\}$ имеют независимые приращения?

Пример 17. Покажем, что процесс $N = \{N_t, t \geq 0\}$, определенный как процесс восстановления (задача 14), имеет независимые приращения.

Доказательство разобьем на несколько задач. Для удобства обозначений пишем далее $N(t)$ вместо N_t . Напомним, что по построению $N(0) := 0$.

Задача 21. Мы видели, решая задачу 14, что при любом $t > 0$ верно равенство $P(N(t) = \infty) = 0$. Теперь требуется показать, что множество $A = \{N(t) < \infty \text{ при всех } t \geq 0\}$ является событием и имеет вероятность единицу.

По построению все траектории процесса N (начинаясь в нулевой момент времени в начале координат) не убывают на $[0, \infty)$. Поэтому

$$A = \{N(n) < \infty \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{N(n) < \infty\}.$$

Остается заметить, что пересечение счетного числа событий вероятности единица имеет вероятность единица.

Далее рассматриваем траектории, для которых $\omega \in A$.

Задача 22. При $t > 0$ введем вспомогательные случайные величины X_n^t , $n \in \mathbb{N}$ (не следует путать обозначение X_n^t со степенью порядка t величины X_n). Положим

$$X_1^t := S_{N(t)+1} - t, \quad X_k^t = X_{N(t)+k} \quad \text{при } k \geq 2,$$

здесь $S_0 = X_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, а X_1, X_2, \dots — независимые величины, показательно распределенные с параметром $\lambda > 0$. Доказать, что при каждом $t > 0$ независимы величины $N(t)$, X_1^t, X_2^t, \dots , причем $X_n^t \sim \text{Exp}(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$.

Для проверки независимости достаточно убедиться (объясните, пользуясь замечанием 2), что для каждого $k \geq 1$, любых $s_1, \dots, s_k \geq 0$ и произвольного $n \in \mathbb{Z}_+$ верно равенство

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X_1^t \geq s_1, \dots, X_k^t \geq s_k, N(t) = n) &= \\ &= \mathsf{P}(X_1^t \geq s_1) \dots \mathsf{P}(X_k^t \geq s_k) \mathsf{P}(N(t) = n). \end{aligned} \quad (78)$$

При всех $t > 0, s \geq 0$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X_1^t \geq s; N(t) = n) &= \mathsf{P}(S_{n+1} - t \geq s, S_n \leq t, S_{n+1} > t) = \\ &= \mathsf{P}(S_n \leq t, S_n + X_{n+1} \geq t + s). \end{aligned} \quad (79)$$

Случайные величины S_n и X_{n+1} независимы (как измеримые функции от непересекающихся наборов независимых величин) и имеют плотности распределения соответственно

$$\begin{aligned} p_{S_n}(x) &= \lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x), \\ p_{X_{n+1}}(y) &= \lambda e^{-\lambda y} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Поэтому их совместная плотность

$$p_{S_n, X_{n+1}}(x, y) = p_{S_n}(x)p_{X_{n+1}}(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, полагая $C = \{(x, y) : 0 \leq x \leq t, y + x \geq t + s\}$ и применяя теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X_1^t \geq s, N(t) = n) &= \int_C p_{S_n, X_{n+1}}(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^t p_{S_n}(x) \left(\int_{t+s-x}^{\infty} p_{X_{n+1}}(y) dy \right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t x^{n-1} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t+s-x)} dx = \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t e^{-\lambda(t+s)} x^{n-1} dx = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda(t+s)}.
\end{aligned}$$

Суммируя по $n = 0, 1, \dots$ обе части полученного равенства, приходим к формуле

$$\mathbb{P}(X_1^t \geq s) = e^{-\lambda s}, \quad s \geq 0.$$

Поэтому $X_1^t \sim \text{Exp}(\lambda)$. Вспоминая (задача 14), что

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

при $n \in \mathbb{Z}_+$ и $t > 0$, видим, что формула (78) верна для $k = 1$.

Учитывая (79), независимость величин X_1, X_2, \dots , а также неотрицательность s_1 , левую часть равенства (78) при $k \geq 2$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_n \leq t, S_n + X_{n+1} \geq t + s_1) \mathbb{P}(X_{n+2} \geq s_2, \dots, X_{n+k} \geq s_k) = \\
&= \mathbb{P}(X_1^t \geq s_1) \mathbb{P}(N(t) = n) \prod_{j=2}^k e^{-\lambda s_j} = \mathbb{P}(N(t) = n) \prod_{j=1}^k e^{-\lambda s_j}. \quad (80)
\end{aligned}$$

Использовано было и то, что при $k = 1$, как установлено выше, $\mathbb{P}(X_1^t \geq s_1, N(t) = n) = \mathbb{P}(X_1^t \geq s_1) \mathbb{P}(N(t) = n)$. Просуммировав по всем целым неотрицательным n исходную левую часть (78) и ее выражение (80), приравниваем полученные суммы:

$$\mathbb{P}(X_1^t \geq s_1, \dots, X_k^t \geq s_k) = \prod_{j=1}^k e^{-\lambda s_j}.$$

Подставляя в эту формулу $s_m = 0$ при $m \neq j$, где $j = 2, \dots, k$, видим, что $\mathbb{P}(X_j^t \geq s_j) = e^{-\lambda s_j}$, т.е. $X_j^t \sim \text{Exp}(\lambda)$. Тем самым с учетом (80) получаем, что в формуле (78) левая часть равна правой.

Задача 23. Доказать независимость приращений процесса N , т.е. независимость случайных величин $N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ при всех $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ и $n \geq 2$.

По последовательности X_1^t, X_2^t, \dots определим простой процесс восстановления $N^t = \{N^t(s), s \geq 0\}$. Согласно задаче 14 величина $N^t(s)$ имеет распределение Пуассона с параметром λs . При этом легко видеть, что

$$N^t(s) = N(t+s) - N(t), \quad s \geq 0.$$

Проверим, что $N(t)$ и $N(t+s) - N(t)$ независимы при $s, t \geq 0$. В силу задачи 22 величина $N(t)$ не зависит от последовательности X_1^t, X_2^t, \dots . Поэтому $\sigma\{N(t)\}$ не зависит от $\sigma\{X_1^t, \dots, X_m^t\}$ при $m \geq 1$. Положим $S_n^t := X_1^t + \dots + X_n^t$, $n \geq 1$. Для произвольных $s \geq 0$ и $j \geq 0$ заключаем, что событие $\{N^t(s) = j\} = \{S_j^t \leq s, S_{j+1}^t > s\} \in \sigma\{X_1^t, \dots, X_{j+1}^t\}$. Следовательно, как утверждалось, $N^t(s)$ не зависит от $N(t)$.

Воспользуемся индукцией. Случай $n = 2$ уже рассмотрен. Пусть наше утверждение верно для любых $n - 1$ приращений процесса N . Введем процесс $N^{t_1}(s) = N(t_1 + s) - N(t_1)$, где $s \geq 0$. Величины $N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ образуют $(n - 1)$ -мерный вектор приращений процесса N^{t_1} :

$$N^{t_1}(s_1), N^{t_1}(s_2) - N^{t_1}(s_1), \dots, N^{t_1}(s_{n-1}) - N^{t_1}(s_{n-2}),$$

здесь $s_1 = t_2 - t_1, \dots, s_{n-2} = t_{n-1} - t_1, s_{n-1} = t_n - t_1$. Такие приращения независимы (пользуемся индукцией и тем, что процессы N и N^{t_1} имеют совпадающие соответствующие конечномерные распределения, поскольку задаются одинаковым образом по последовательностям независимых показательно распределенных величин). Вектор, составленный из этих приращений, измерим относительно σ -алгебры, порожденной величинами $X_1^{t_1}, X_2^{t_1}, \dots$, и потому не зависит от $N(t_1)$ согласно задаче 22. В итоге совместная характеристическая функция $N(t_1), N^{t_1}(s_1), N^{t_1}(s_2) - N^{t_1}(s_1), \dots, N^{t_1}(s_{n-1}) - N^{t_1}(s_{n-2})$ распадается в произведение характеристических функций компонент. Требуемое утверждение доказано. Этим завершается и рассмотрение примера 17.

Результат задачи 22 заслуживает отдельного обсуждения. Мы убедились, что величина перескока процесса N за уровень $t > 0$, т.е. величина $X_1^t := S_{N(t)+1} - t$, имеет показательное рас-

пределение с параметром λ . На первый взгляд, это вызывает удивление. Действительно, получается, что длина случайногопромежутка, который содержится в одном из данных промежутков, образованных точками $S_0 = 0 \leq S_1 \leq \dots$, имеет то же самое распределение, как и эти промежутки. Сказанное частоинтерпретируют как парадокс времени ожидания. Предположим, что автобусы приходят на остановку через промежутки времени, представляющие собой независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ . Спрашивается, какое время придется ждать автобус, если оказаться на остановке в момент t ? Согласно разобранной задаче время ожидания будет распределено по одному и тому же экспоненциальному закону, в какой бы момент t ни начать отсчет этого времени. Объяснение парадокса состоит в том, что мы имеем дело не с “частью” некоторого фиксированного интервала, длина которого распределена по закону $\text{Exp}(\lambda)$, а с интервалом, накрывающим точку t и имеющим случайный номер (т.е. при разных ω перескок будет осуществляться за счет промежутка, имеющего случайные концы S_k и S_{k+1} , где $k = k(\omega)$; в наших обозначениях $k(\omega) = N_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$)!

В заключение этого раздела приведем важную теорему (см. [2, с. 46]), позволяющую вводить процессы с независимыми приращениями, когда известны распределения этих приращений.

Теорема 10. Пусть $\{\varphi(s, t, \cdot)\}$ — семейство характеристических функций, отвечающих некоторому семейству вероятностных мер $Q_{s,t}$ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, где $0 \leq s < t < \infty$. Для существования процесса $X = \{X_t, t \geq 0\}$ с независимыми приращениями такого, что характеристическая функция $X_t - X_s$ есть $\varphi(s, t, \cdot)$ при всех $0 \leq s < t < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi(s, t, \nu) = \varphi(s, u, \nu)\varphi(u, t, \nu),$$

где также фигурируют произвольные $0 \leq s < u < t < \infty$ и $\nu \in \mathbb{R}$. При этом распределение X_0 может быть выбрано любым наперед заданным.

3.4. Пуассоновский процесс и порождаемые им стохастические модели

Определение 16. Процесс $N = \{N(t), t \geq 0\}$, обладающий свойствами:

- 1) $N(0) = 0$ п.н.;
- 2) N имеет независимые приращения;
- 3) $N(t+s) - N(t) \sim \text{Pois}(\lambda s)$ при всех $s, t \geq 0$, называется *пуассоновским интенсивности* $\lambda > 0$.

Итак (см. пример 17), введенный конструктивно процесс N – пуассоновский. Существование следует и из теоремы 10.

Задача 24. Сумма $N = \{N(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t), t \geq 0\}$ независимых¹ пуассоновских процессов $N_i = \{N_i(t), t \geq 0\}$, чьи интенсивности соответственно $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, является пуассоновским процессом. Проверить и найти интенсивность N .

Очевидно, что $N(0) = \sum_{i=1}^n N_i(0) = 0$. Далее, в силу того, что функции от независимых случайных величин независимы, набор $\{N(t_l) - N(t_{l-1}) = \sum_{i=1}^n (N_i(t_l) - N_i(t_{l-1}))\}_{l=1}^k$ состоит из k независимых случайных величин для $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$, т.е. приращения процесса $N(t)$ независимы.

Наконец, согласно (71) сумма независимых пуассоновских величин снова является пуассоновской, а ее параметр равен сумме параметров. Таким образом, выполнены все требования определения 16, а интенсивность суммарного процесса равна сумме интенсивностей слагаемых.

Задача 25. Найти ковариационную функцию пуассоновского процесса N интенсивности $\lambda > 0$.

Прежде всего заметим, что $E N(t)^2 = \lambda t (\lambda t + 1) < \infty$ для любого $t \geq 0$ (если $\xi \sim \text{Pois}(a)$, то $E\xi = a, D\xi = a$). Поэтому $N(t) \in L^2$ (даже входит в L^p при любом $p > 2$), следовательно,

¹Т.е. независимы σ -алгебры $\sigma(N_i)$, порожденные этими семействами случайных величин.

определенна ковариационная функция процесса. Пользуясь билинейностью скалярного произведения, для $0 \leq s \leq t$ имеем

$$\begin{aligned}\text{cov}(N(s), N(t)) &= \text{cov}(N(s), N(t) - N(s) + N(s)) = \\ &= \text{cov}(N(s), N(t) - N(s)) + \text{cov}(N(s), N(s)) = D N(s) = \lambda s,\end{aligned}$$

поскольку $N(s)$ и $N(t) - N(s)$ независимы (ковариация независимых интегрируемых величин существует и равна нулю). Таким образом,

$$\text{cov}(N(s), N(t)) = \lambda \min\{s, t\} \quad \text{при } s, t \geq 0.$$

Интересно отметить, что винеровский и пуассоновский процессы имеют ковариационные функции, отличающиеся лишь постоянным множителем λ . При этом траектории пуассоновского процесса с вероятностью единица имеют разрывы, а винеровский процесс допускает п.н. непрерывную модификацию.

Пример 18. Объясним, почему у пуассоновского процесса интенсивности $\lambda > 0$ не существует непрерывной модификации.

Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс (существующий, например, согласно теореме 10). Допустим, что у него имеется модификация $X = \{X(t), t \geq 0\}$ с траекториями, непрерывными п.н. Рассмотрим $\Omega_* \subset \Omega$ такое, что $P(\Omega_*) = 1$ и для всех $\omega \in \Omega_*$ траектории $X(\cdot, \omega)$ непрерывны на $[0, \infty)$. Тогда для любого $T > 0$ и $\omega \in \Omega_*$ траектория $X(\cdot, \omega)$ будет равномерно непрерывна на $[0, T]$, т.е. при произвольном выборе $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, T, \omega) > 0$ такое, что

$$|X(s, \omega) - X(t, \omega)| < \varepsilon, \quad \text{при } |s - t| < \delta.$$

Возьмем счетное всюду плотное множество $S \subset [0, T]$, на эту роль годится множество рациональных точек отрезка $[0, T]$.

Для каждого $t \in [0, T]$, а значит, и для любого $t \in S$ справедливо равенство $X(t) = N(t)$ п.н. Пересечение счетного числа множеств меры единица имеет меру единица. Поэтому найдется $\Omega^* \subset \Omega$ такое, что $P(\Omega^*) = 1$, и

$$X(t, \omega) = N(t, \omega) \quad \text{для } t \in S, \quad \omega \in \Omega^*.$$

Рассмотрим $\omega \in \Omega_0 = \Omega_* \cap \Omega^*$ (очевидно, $P(\Omega_0) = 1$). Тогда для $s, t \in S$ и $\omega \in \Omega_0$

$$|N(s, \omega) - N(t, \omega)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |s - t| < \delta(\varepsilon, T, \omega). \quad (81)$$

Однако $N(0) = 0$ п.н., поэтому из (81) получаем, выбирая достаточно мелкое разбиение отрезка $[0, T]$ точками из S , что на событии A вероятности единица ($A = \{N(0) = 0\} \cap \Omega_0$) для всех $t \in S$ справедливо равенство $N(t, \omega) = 0$. Мы учили, что $N(t)$ принимает целые неотрицательные значения, а $\varepsilon \in (0, 1)$. Итак, $N(t) = 0$ п.н. для каждого $t \in S$. В то же время $N(t) \sim \sim \text{Pois}(\lambda t)$. Следовательно, $P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Справедливость следующего результата можно рассматривать как некий аналог требования непрерывности траекторий.

Упражнение 77. Покажите, что пуассоновский процесс имеет модификацию с неубывающими почти наверное траекториями.

Задача 26. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ , полученный как процесс восстановления. Установить, что $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \lambda$ п.н. при $t \rightarrow \infty$.

Пусть t пробегает вначале лишь натуральные значения. Положим $X_k := N(k) - N(k - 1)$, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность независимых одинаково распределенных величин со средним $\mathbb{E}X_1 = \lambda$, поскольку $N(t + s) - N(s) \sim \sim \text{Pois}(\lambda t)$ для $s, t \geq 0$. Следовательно, по теореме 5 (усиленный закон больших чисел Колмогорова) для $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ имеем:

$$\frac{N(n)}{n} = \frac{S_n}{n} \rightarrow \lambda \quad \text{п.н. при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (82)$$

При любом $t > 1$ запишем $N(t) = (N(t) - N([t])) + N([t])$, где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Тогда

$$\frac{N(t)}{t} = \frac{[t]}{t} \frac{N([t])}{[t]} + \frac{N(t) - N([t])}{t}.$$

Поскольку $\frac{[t]}{t} \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, то в силу (82) достаточно лишь доказать, что $\frac{N(t) - N([t])}{t} \rightarrow 0$ п.н. при $t \rightarrow \infty$. Воспользуемся результатом упр. 34. Для любых $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ и $t > 1$ приходим к неравенству

$$\mathsf{P} \left(\sup_{t \geq m} \frac{|N(t) - N([t])|}{t} > \varepsilon \right) \leq \mathsf{P} \left(\sup_{n \geq m} \frac{N(n+1) - N(n)}{n} > \varepsilon \right),$$

ввиду того, что у процесса N п.н. неубывающие траектории. Таким образом (согласно упр. 34), остается показать, что $\frac{X_n}{n} \rightarrow 0$ п.н. при $n \rightarrow \infty$, где независимые величины $X_n \sim \sim \text{Pois}(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$. Снова по теореме Колмогорова имеем

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{S_{n-1}}{n-1} \rightarrow \lambda - \lambda \quad \text{п.н.} \quad (n \rightarrow \infty),$$

что и требовалось.

Тем самым получаем, что для рассмотренного процесса восстановления сильно состоятельной (статистической) оценкой его интенсивности является $\frac{N(t)}{t}$.

Пример 19. Найдем распределение $N(s)$ при условии, что $N(t) = k$, $0 \leq s \leq t$ (значит, п.н. $0 \leq N(s) \leq k$).

Для $l, k \in \mathbb{Z}_+$ условные вероятности (см. (5)) в силу независимости приращений пуассоновского процесса имеют вид

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(N(s) = l | N(t) = k) &= \frac{\mathsf{P}(N(s) = l, N(t) = k)}{\mathsf{P}(N(t) = k)} = \\ &= \frac{\mathsf{P}(N(s) = l) \mathsf{P}(N(t) - N(s) = k - l)}{\mathsf{P}(N(t) = k)}. \end{aligned}$$

Так как $N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda(t-s))$, а $N(0) = 0$, интересующая нас условная вероятность равна

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda s)^l}{l!} e^{-\lambda s} \frac{\lambda^{k-l} (t-s)^{k-l}}{(k-l)!} e^{-\lambda(t-s)} \left[\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \right]^{-1} &= \\ &= C_k^l \left(\frac{s}{t} \right)^l \left(1 - \frac{s}{t} \right)^{k-l}, \quad 0 \leq l \leq k. \end{aligned}$$

Следовательно, искомое распределение — биномиальное (как у числа успехов при k испытаниях в схеме Бернулли с вероятностью успеха $\frac{s}{t}$).

Пример 20. Пусть N — пуассоновский процесс интенсивности λ и

$$\tau_1 = \inf\{t \geq 0, N(t) \geq 1\}.$$

Покажем, что τ_1 имеет показательное распределение с параметром λ .

Действительно, $P(\tau_1 > u) = P(N(u) = 0) = e^{-\lambda u}$ при $u \geq 0$, а это и означает, что случайная величина $\tau_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Упражнение 78. Введем $\tau_n = \inf\{t \geq 0, N(t) \geq n\}$, $n \geq 2$. Доказать, что случайные величины $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_n - \tau_{n-1}$ независимы и показательно распределены с параметром λ .

Пример 21. Выясним, каково распределение τ_1 при условии $N(t) = 1$.

Очевидно, что при рассматриваемом условии величина τ_1 не может быть больше, чем t , т.е. $P(\tau_1 > u | N(t) = 1) = 0$ при $u > t$. Пусть теперь $0 \leq u \leq t$, тогда с учетом примеров 20 и 19 имеем

$$P(\tau_1 > u | N(t) = 1) = P(N(u) = 0 | N(t) = 1) = 1 - \frac{u}{t}.$$

Иначе говоря, условное распределение первого скачка пуассоновского процесса при условии, что на отрезке $[0, t]$ произошел ровно один скачок, является равномерным на $[0, t]$.

Более общее утверждение заключается в следующем.

Упражнение 79. Докажите, что при условии $N(t) = k$ моменты скачков пуассоновского процесса на отрезке $[0, t]$ ведут себя так же, как координаты k точек, брошенных независимо друг от друга на этот отрезок. Точнее говоря, они образуют вариационный ряд для k независимых равномерно распределенных на $[0, t]$ случайных величин.

При рассмотрении моделей теории массового обслуживания точки скачков пуассоновского процесса соответствуют

наступлению некоторых событий, например, появления клиентов (заявок, требований на обслуживание). В таком случае говорят, что в систему поступает пуассоновский поток требований. Обратимся к определению этого *простейшего потока*, данному А.Я. Хинчина.

Определение 17. Поток случайных событий называется *пуассоновским* (или *простейшим*), если выполнены следующие три свойства.

- 1°. *Стационарность* — вероятность $P_n(t)$ появления n событий на интервале длины t зависит только от n и t , но не от положения интервала на временной оси.
- 2°. *Отсутствие последействия* — числа событий, появляющихся на непересекающихся интервалах, представляют собой независимые случайные величины.
- 3°. *Ординарность* — вероятность появления более одного события в промежутке длины t есть величина более высокого порядка малости, чем t , т.е. $1 - P_0(t) - P_1(t) = o(t)$, $t \rightarrow 0+$.

Ординарность потока означает, что события появляются “по одному”. Заметим также, что данное определение позволяет рассматривать наступление событий не только на полуоси $[0, \infty)$, но и на всей прямой.

Задача 27. Для $t \geq 0$ обозначим $N(t)$ число событий в промежутке $(0, t]$ (говорят и о числе случайных точек, попавших в $(0, t]$, имея в виду моменты наступления событий). Проверить, что $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс.

По определению процесса $N(0) = 0$, так как $(0, 0] = \emptyset$. В силу отсутствия последействия приращения рассматриваемого процесса будут независимы. Далее, из стационарности и отсутствия последействия вытекает, что

$$P_0(t+s) = P_0(t)P_0(s). \quad (83)$$

Докажем сначала, что единственное нетривиальное решение уравнения (83), удовлетворяющее условиям определения 17, имеет вид $P_0(t) = e^{-\lambda t}$, где $0 < \lambda < \infty$.

Положим $\theta = P_0(1)$, тогда $0 \leq \theta \leq 1$. Нетрудно понять, что случай $\theta = 1$ соответствует тривиальному потоку, когда $P_0(t) = 1$ при любом t , т.е. события вообще не происходят. Его исключаем из рассмотрения. Если же $\theta = 0$, то $P_0(t) = 0$ при любом t , т.е. события наступают с достоверностью в любом как угодно малом промежутке времени, что противоречит ординарности. Таким образом, $0 < \theta < 1$. Следовательно, $\theta = e^{-\lambda}$, где $0 < \lambda < \infty$.

Многократное применение соотношения (83) дает равенство $P_0(nt) = [P_0(t)]^n$, откуда вытекает, что $P_0\left(\frac{1}{n}\right) = \theta^{1/n}$, а $P_0\left(\frac{m}{n}\right) = \theta^{m/n}$ для любых целых $m, n \geq 1$. Учитывая монотонность $P_0(t)$, а именно,

$$P_0\left(\frac{k-1}{n}\right) \geq P_0(t) \geq P_0\left(\frac{k}{n}\right)$$

для $\frac{k-1}{n} < t \leq \frac{k}{n}$, несложно получить, что $P_0(t) = \theta^t = e^{-\lambda t}$ при любом $t > 0$, как и требовалось доказать.

При малых t имеем $P_0(t) = 1 - \lambda t + o(t)$. С учетом ординарности $P_1(t) = 1 - P_0(t) + o(t) = \lambda t + o(t)$.

При любом $n \in \mathbb{N}$ формула полной вероятности и три условия в определении Хинчина для каждого $t > 0$ дают

$$P_n(t+h) = (1 - \lambda h)P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h), \quad h \rightarrow 0+.$$

Разделив разность $P_n(t+h) - P_n(t)$ на $h > 0$ и устремив h к нулю, получаем систему дифференциальных уравнений

$$P'_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (84)$$

Эту систему удобно решить, сделав замену $P_n(t) = e^{-\lambda t} v_n(t)$. Тогда приходим к системе ($v_0(t) = 1$)

$$v'_n(t) = \lambda v_{n-1}(t), \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ее единственное решение с начальными условиями $v_n(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, имеет вид $v_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}$. В результате при начальных

условиях $P_n(0) = 0, n \in \mathbb{N}$, взяв соответствующее решение системы (84) с $P_0(t) = e^{-\lambda t}$, получаем

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Итак, мы получили распределение Пуассона с параметром λt . Учитывая независимость приращений N , а также то, что $N(0) = 0$ п.и. и $P(N(t) = n) = P_n(t)$ для $t > 0$ и $n \in \mathbb{Z}_+$, видим, что N — это пуассоновский процесс интенсивности λ .

Как будет показано в главе 6, процесс Пуассона является цепью Маркова с непрерывным временем, поэтому справедливы уравнения (84), представляющие собой частный случай *прямых уравнений* Колмогорова.

Упражнение 80. Проверить, что моменты скачков пуассоновского процесса образуют пуассоновский поток в смысле определения 17.

Упражнение 81. Введем *операцию прореживания* пуассоновского потока, т.е. каждое событие независимо от остальных исключается из потока с вероятностью γ . Показать, что снова получается пуассоновский поток интенсивности $(1-\gamma)\lambda$.

Задача 28. Доказать, что процесс Y , описывающий капитал страховой компании в модели Крамера–Лундберга (см. пункт 2.5), имеет независимые приращения.

Легко видеть, что если процесс $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ имеет независимые приращения, а f — детерминированная функция, заданная на $[0, \infty)$, то процесс $\{Z(t) + f(t), t \geq 0\}$ также имеет независимые приращения (достаточно написать совместную характеристическую функцию приращений этого процесса). Поэтому далее будем доказывать независимость приращений процесса

$$U = \{U(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k, t \geq 0\}, \quad (85)$$

где $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность независимых одинаково распределенных величин (как обычно, сумма по пустому множеству равна нулю).

жеству индексов считается равной нулю). Для $v \in \mathbb{R}$ обозначим $\varphi(v) := \mathbf{E} \exp\{iv\xi_1\}$, где $i^2 = -1$. Пусть

$$M = \{m = (m_1, \dots, m_n) : m_k \in \mathbb{Z}_+, k = 1, \dots, n\}.$$

Для $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ и $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$), учитывая независимость $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и процесса N , а также то, что все ξ_n имеют одинаковую характеристическую функцию φ , получаем

$$\begin{aligned} \Psi &:= \mathbf{E} \exp\{i(v_1 U(t_1) + v_2(U(t_2) - U(t_1)) + \dots + \\ &\quad + v_n(U(t_n) - U(t_{n-1})))\} = \\ &= \sum_{m \in M} \mathbf{E} \exp\{i(v_1 U(t_1) + v_2(U(t_2) - U(t_1)) + \dots + \\ &\quad + v_n(U(t_n) - U(t_{n-1})))\} \mathbb{I}_{A_m} = \\ &= \sum_{m \in M} \mathbf{E} \exp\{i(v_1 \sum_{n=1}^{m_1} \xi_n + v_2 \sum_{n=m_1+1}^{m_1+m_2} \xi_n + \dots + \\ &\quad + v_n \sum_{n=m_1+\dots+m_{n-1}+1}^{m_1+\dots+m_n} \xi_n)\} \mathbb{I}_{A_m} = \\ &= \sum_{m \in M} \varphi(v_1)^{m_1} \varphi(v_2)^{m_2} \dots \varphi(v_n)^{m_n} \mathbf{P}(A_m). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_m &= \{N(t_1) = m_1, N(t_2) - N(t_1) = m_2, \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = m_n\}, \\ \mathbf{P}(A_m) &= \mathbf{P}(N(t_1) = m_1) \mathbf{P}(N(t_2) - N(t_1) = m_2) \dots \\ &\quad \dots \mathbf{P}(N(t_n) - N(t_{n-1}) = m_n) = \\ &= \frac{(\lambda t_1)^{m_1}}{m_1!} e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{m_2}}{m_2!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \dots \\ &\quad \dots \frac{(\lambda(t_n - t_{n-1}))^{m_n}}{m_n!} e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!} b^j = e^{ab}$ ($a, b \in \mathbb{R}$), приходим к формуле

$$\Psi = e^{\lambda t_1(\varphi(v_1)-1)} e^{\lambda(t_2-t_1)(\varphi(v_2)-1)} \dots e^{\lambda(t_n-t_{n-1})(\varphi(v_n)-1)}. \quad (86)$$

Из (86) находим характеристическую функцию величины $U(t_k) - U(t_{k-1})$, полагая $v_j = 0$, если $j \neq k$. При этом выясняется, что совместная характеристическая функция вектора, составленного из приращений процесса U , распадается в произведение характеристических функций компонент этого вектора. Независимость приращений процесса U установлена.

Задача 29. Введем процесс $X = \{X(t), t \geq 0\}$, именуемый *телеграфной волной*. Пусть X_0 – случайная величина, принимающая значения 1 и -1 с равными вероятностями, $N = \{N(t), t \geq 0\}$ – пуассоновский процесс интенсивности λ . Предположим, что X_0 не зависит от N (т.е. независимы две σ -алгебры, порожденные соответственно величиной X_0 и семейством величин $\{N(t), t \geq 0\}$). Положим $X(t) = X_0(-1)^{N(t)}$, $t \geq 0$. Требуется найти ковариационную функцию этого процесса.

Заметим, что каждая траектория процесса X меняет свое значение на противоположное в точках скачков процесса N , откуда и взялось название “волна” (а определение “телеграфная” связано лишь с двумя значениями “точка” и “тире”). Очевидно, $X(t) = X_0$, если $N(t)$ четно, и $X(t) = -X_0$ в противоположном случае. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X(t) &= \mathbb{E}X_0 \mathbb{I}_{\{N(t)\text{ четно}\}} - \mathbb{E}X_0 \mathbb{I}_{\{N(t)\text{ нечетно}\}} = \\ &= \mathbb{E}X_0 P(N(t) \text{ четно}) - \mathbb{E}X_0 P(N(t) \text{ нечетно}) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Далее при $0 \leq s < t$ имеем

$$\begin{aligned} \text{cov}(X(s), X(t)) &= \mathbb{E}X(s)X(t) = \\ &= \mathbb{P}(X(s)X(t) = 1) - \mathbb{P}(X(s)X(t) = -1) = \\ &= \mathbb{P}(N(t) - N(s) \text{ четно}) - \mathbb{P}(N(t) - N(s) \text{ нечетно}) = e^{-2\lambda(t-s)}, \end{aligned}$$

где учтено, что $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k!} e^{-a} = e^{-a}e^{-a}$, $a \in \mathbb{R}$. Таким образом,

$$\text{cov}(X(s), X(t)) = e^{-2\lambda|t-s|}, \quad s, t \geq 0.$$

Упражнение 82. Пусть последовательность $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ независимых случайных величин со средним 0 и дисперсией σ^2

не зависит от пуассоновского процесса $N = \{N(t), t \geq 0\}$, имеющего интенсивность $\lambda > 0$. Определим процесс $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$, полагая $Y(t) = X_n$ для $t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$, $n \in \mathbb{Z}_+$ (τ_n – моменты скачков процесса N). Найти ковариационную функцию процесса Y .

Определение 18. Процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ называется *однородным по времени*, если распределение его приращений $X_t - X_s$, $0 \leq s < t$, зависит лишь от разности $t - s$.

Заметим, что введенный нами пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$ является однородным, так как

$$P(N_t - N_s = k) = \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} \exp\{-\lambda(t-s)\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Пример 22. Покажем, что одномерные распределения однородного процесса с независимыми приращениями, стартующего из нуля, безгранично делимы.

Если $X = \{X_t, t \geq 0\}$, а $X_0 = 0$, то для любых t и n имеем

$$X_t = X_t - X_{t(n-1)/n} + X_{t(n-1)/n} - X_{t(n-2)/n} + \dots + X_{t/n} - X_0.$$

В силу однородности X все $X_{k,n} := X_{tk/n} - X_{t(k-1)/n}$, где $k = 1, \dots, n$, одинаково распределены, а в силу независимости приращений процесса эти величины независимы, т.е. выполнено определение безграничной делимости.

3.5. Процесс Леви

Важную роль в финансовой математике и других приложениях играют процессы Леви.

Определение 19. Случайный процесс $X = \{X(t), t \geq 0\}$ называется *процессом Леви*, если выполнены следующие условия:

- 1°. $X(0) = 0$ п.н.;
- 2°. X имеет независимые приращения;
- 3°. X — однородный процесс;
- 4°. X непрерывен по вероятности в каждой точке $t \geq 0$;
- 5°. X является càdlàg процессом.

Отметим, что если в данном определении требовать выполнения только условий 1°–4°, то можно доказать, что у процесса X существует модификация $\tilde{X} = \{\tilde{X}(t), t \geq 0\}$, для которой имеют место все свойства 1°–5°.

Кроме пуассоновского и винеровского процесса, которому посвящена следующая глава, можно ввести еще один процесс с независимыми приращениями, а именно, *гамма-процесс* $X = \{X(t), t \geq 0\}$ такой, что $X(0) = 0$ и приращение $X(t) - X(s)$, $0 \leq s < t$, имеет распределение $\Gamma(\alpha(t-s), \lambda)$. В силу задачи 13 характеристическая функция

$$\varphi_{X(t)-X(s)}(u) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - iu} \right)^{\alpha(t-s)}.$$

Нетрудно показать, что указанный процесс существует, поскольку выполнены условия теоремы 10, и (его модификация) удовлетворяет определению процесса Леви.

Пример 23. Проверим, что процесс U , определенный формулой (85), является процессом Леви.

Свойства 1° и 5°, очевидно, выполняются в силу определения процесса U , а свойства 2° и 3° справедливы согласно задаче 28. Убедимся, что имеет место и 4°. Характеристическая функция величины $U(t) - U(s)$ совпадает с характеристической функцией $\varphi_{U(t-s)}$ величины $U(t-s)$, $0 \leq s \leq t$. Пользуясь (86), видим, что

$$\varphi_{U(t-s)}(u) = \exp\{\lambda(t-s)(\varphi_{\xi_1}(u) - 1)\}, \quad u \in \mathbb{R},$$

где φ_{ξ_1} — характеристическая функция ξ_1 .

Итак, если $t \rightarrow s$, то для каждого $u \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{U(t-s)}(u) \rightarrow \exp\{0\} = 1,$$

т.е. имеет место сходимость к характеристической функции случайной величины, равной нулю. Поэтому $U(t) - U(s)$ сходятся к нулю по распределению. Применяя результат упражнения 40, заключаем, что $U(t) - U(s) \xrightarrow{P} 0$, когда $t \rightarrow s$. Это равносильно тому, что $U(t) \xrightarrow{P} U(s)$ при $t \rightarrow s$. Заметим,

что мы воспользовались результатами о сходимости последовательности случайных величин, но их аналоги верны и для величин, индексированных точками отрезка прямой.

Характеристическая функция величины $X(t)$, где $X = \{X(t), t \geq 0\}$ — процесс Леви, допускает (см., напр., [13, с. 246]) каноническое представление, а именно верна *формула Леви–Хинчина*: $\varphi_{X(t)}(u) = \exp\{t\psi(u)\}$, где *кумулянта*

$$\psi(u) = iub - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux \mathbb{I}_{\{|x| \leq 1\}}) \nu(dx), \quad (87)$$

здесь $b \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$, а (вообще говоря, бесконечная) мера ν на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ такова, что $\nu(\{0\}) = 0$ и

$$\int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty.$$

Формула (87) показывает, что распределение $X(t)$ является безгранично делимым. Отметим, что наряду с (87) имеются и другие представления кумулянты.

Упражнение 83. Найдите триплет параметров (b, σ^2, ν) , отвечающий заданному формулой (85) составному процессу Пуассона.

Глава 4. ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС

4.1. Эквивалентные определения винеровского процесса

Винеровский процесс (одномерный) можно рассматривать как модель хаотического движения по оси \mathbb{R} частицы, имеющей координату $W(t)$ в момент $t \geq 0$. Этот процесс принадлежит сразу нескольким важнейшим классам случайных процессов, что, в частности, показывают следующие два его равносильных (есть и другие, эквивалентные им) определения соответственно как гауссовского процесса и как процесса с независимыми приращениями.

Определение 20. Случайный процесс $W = \{W(t), t \geq 0\}$ называется винеровским, если

- 1) W является гауссовским,
- 2) $EW(t) = 0, t \geq 0$,
- 3) $\text{cov}(W(s), W(t)) = \min\{s, t\}, s, t \geq 0$,
- 4) траектории непрерывны п.н.

Определение 21. Случайный процесс $W = \{W(t), t \geq 0\}$ называется винеровским, если

- 1) $W(0) = 0$ п.н.;
- 2) процесс W имеет независимые приращения;
- 3) $W(t + s) - W(t) \sim \mathcal{N}(0, s)$, для любых $s, t \geq 0$;
- 4) траектории непрерывны п.н.

Проверим эквивалентность первых трех требований этих определений (к вопросу о непрерывности траекторий мы обратимся далее в пункте 4.2).

Пусть W удовлетворяет условиям 1–3 определения 20. Такой процесс существует согласно теореме 9 (и примеру 14). Заметим, что $W(0) = 0$ п.н., поскольку у этой величины нулевые среднее и дисперсия. Убедимся, что W обладает независимыми приращениями. Возьмем любые точки $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ и рассмотрим $(W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1}))$. Очевидно, что этот вектор получен линейным преобразованием гауссовского вектора $(W(t_1), \dots, W(t_n))$, поэтому

сам является гауссовским, как было показано в примере 12. Значит, если мы проверим, что ковариационная матрица рассматриваемого вектора диагональна, то отсюда, в силу упр. 68, будет вытекать независимость его компонент. Так как $E(W(t_k) - W(t_{k-1})) = EW(t_k) - EW(t_{k-1}) = 0$, $k = 1, \dots, n$, то при $k \neq l$

$$\begin{aligned} \text{cov}(W(t_k) - W(t_{k-1}), W(t_l) - W(t_{l-1})) &= \\ &= E(W(t_k) - W(t_{k-1}))(W(t_l) - W(t_{l-1})) = \\ &= \min\{t_k, t_l\} - \min\{t_k, t_{l-1}\} - \min\{t_{k-1}, t_l\} + \min\{t_{k-1}, t_{l-1}\} = 0. \end{aligned}$$

Если же $k = l$, то

$$\begin{aligned} \text{cov}(W(t_k) - W(t_{k-1}), W(t_l) - W(t_{l-1})) &= \\ &= D(W(t_k) - W(t_{k-1})) = t_k - t_{k-1}. \end{aligned}$$

Каждая компонента гауссовского вектора является гауссской случайной величиной (это легко следует из того, как характеристическая функция компоненты находится по характеристической функции вектора), следовательно, W имеет независимые гауссовые приращения и $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ для $s < t$.

Докажем обратное утверждение. Возможность построения процесса W , удовлетворяющего пунктам 1–3 определения 21, обеспечивает теорема 10. Для любых $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ вектор $Y = (W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_n))$ получается линейным преобразованием вектора (*всюду подразумеваются столбцы*)

$$Z = (W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})).$$

В силу независимости приращений процесса W и их гауссности вектор Z является гауссовским (следует из вида его характеристической функции). Снова применяя пример 12, устанавливаем гауссовость вектора Y . Таким образом, все конечномерные распределения W будут гауссовскими, т.е. W — гауссовский процесс. Найдем его среднее и ковариационную функцию.

Так как $W(0) = 0$ п.н., при $t \geq 0$ имеем $W(t) = W(t) - W(0)$ п.н., Принимая во внимание, что $W(t) - W(0) \sim \mathcal{N}(0, t)$,

получаем $EW(t) = 0$ для $t \geq 0$. Далее, пусть $0 \leq s < t$, тогда независимость приращений влечет равенство

$$\begin{aligned} EW(t)W(s) &= E(W(t) - W(s) + W(s))W(s) = \\ &= EW^2(s) = D(W(s) - W(0)) = s, \end{aligned}$$

что завершает проверку эквивалентности двух определений процесса W .

Интересно отметить, что винеровский процесс является (в определенном смысле) предельным процессом в схеме случайного блуждания. Рассмотрим для простоты последовательность независимых случайных величин X_1, X_2, \dots , принимающих значения 1 и -1 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Построим на отрезке $[0, 1]$ следующим образом случайную ломаную $S_n(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$. Положим $S_0 = 0$ и $S_k = X_1 + \dots + X_k$ для $k \in \mathbb{N}$. Пусть вершины имеют абсциссы $t = k/n$ и ординаты

$$S_n\left(\frac{k}{n}, \omega\right) = \frac{S_k(\omega)}{\sqrt{n}}, \quad k = 0, \dots, n,$$

а между точками $\frac{k}{n}$ и $\frac{k+1}{n}$ значения $S_n(t, \omega)$ получаются с помощью линейной интерполяции значений $\frac{S_k(\omega)}{\sqrt{n}}$ и $\frac{S_{k+1}(\omega)}{\sqrt{n}}$. Явное выражение (аргумент ω не пишем) имеет вид

$$\begin{aligned} S_n(t) &:= \frac{1}{\sqrt{n}} (S_k + (nt - k) X_{k+1}), \\ t &\in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \quad k = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ возникает случайный процесс с непрерывными траекториями на $[0, 1]$.

Упражнение 84. Покажите, что $S_n(\cdot)$ при каждом $n \in \mathbb{N}$ представляет собой случайный элемент со значениями в метрическом пространстве $C[0, 1]$, снабженном равномерной метрикой $\rho(x, y) = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|$ (и σ -алгеброй $\mathcal{B}(C[0, 1])$ boreлевских множеств в этом метрическом пространстве), т.е. что прообраз любого множества $B \in \mathcal{B}(C[0, 1])$ при отображении $S_n(\cdot)$ входит в \mathcal{F} .

Таким образом, возникают меры P_n — распределения $S_n(\cdot)$ в пространстве $(C[0, 1], \mathcal{B}(C[0, 1]))$. Доказывается, что эти меры слабо сходятся при $n \rightarrow \infty$ к распределению винеровского процесса $\{W(t), t \in [0, 1]\}$. В этом смысле случайные ломаные при большом n похожи на винеровский процесс. Мы не затрагиваем интересные результаты, относящиеся к исследованию близости самих траекторий предельного и аппроксимирующего процессов.

4.2. Непрерывная модификация броуновского движения

Итак, установлено существование процесса W , удовлетворяющего первым трем требованиям, содержащимся в определениях 20 и 21. Однако проведенное рассмотрение не позволяет сделать вывод, что при этом найдется вариант процесса W с непрерывными траекториями. Мы увидим, что упомянутый вариант можно построить, но при этом траектории окажутся недифференцируемыми функциями. Неудивительно, что этот процесс послужил моделью для описания хаотического движения частиц цветочной пыльцы в жидкости, обнаруженного в 1827 году шотландским ботаником Броуном¹ и вскоре получившего название *броуновского движения*. Математическая и физическая теория процессов такого рода была создана лишь в 20-м веке.

Множество непрерывных функций не входит в цилиндрическую σ -алгебру событий (в пространстве всевозможных функций $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$), на которой определена вероятностная мера, соответствующая заданным конечномерным распределениям. Именно поэтому обычно ставится вопрос не о том, обладает ли данный процесс тем или иным свойством, а существует ли его модификация с желаемыми свойствами. Оказывается, для процесса W со свойствами 1–3 опр. 20 (а значит, и 1–3 опр. 21) найдется модификация с п.н. непрерывными траекториями. Очевидно, что модификация будет также обладать и первыми тремя свойствами.

¹Так раньше было принято переводить его фамилию Brown.

Мы ограничимся лишь эффективным достаточным условием, обеспечивающим наличие непрерывной модификации процесса, которое дает следующая теорема Колмогорова.

Теорема 11. Пусть процесс $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$ таков, что для некоторых постоянных $\alpha > 0$, $C > 0$ и $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{E}|X(t+h) - X(t)|^\alpha \leq C|h|^{1+\varepsilon} \text{ при любых } t, t+h \in [a, b]. \quad (88)$$

Тогда у него существует модификация с непрерывными траекториями.

Отметим, что приведенная теорема налагает ограничения на двумерные распределения процесса. Условие (88) не является необходимым, однако оно, в определенном смысле, оптимально, как показывает

Пример 24. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ . Покажем, что (88) имеет место при $\alpha = 2$ и $\varepsilon = 0$. В силу примера 18 у процесса N нет непрерывной модификации (поэтому условие $\varepsilon > 0$ в теореме 11 существенно).

Действительно, $N(t+h) - N(t) \sim \text{Pois}(\lambda h)$ при $h \geq 0$, а следовательно, $\mathbb{E}|N(t+h) - N(t)|^2 = \lambda h + (\lambda h)^2 \leq 2 \max\{\lambda, \lambda^2\}h$ при $0 \leq h \leq 1$.

Пример 25. Пусть дан процесс $X = \{X(t), t \geq 0\}$. Объясним, почему наличие непрерывной модификации процесса $\{X(t), t \in [a, b]\}$ на каждом отрезке $[a, b]$, где $b > a$, обеспечивает существование непрерывной модификации процесса X на полупрямой $[0, \infty)$.

Будем обозначать $\{Y_k(t), t \in [k-1, k]\}$ непрерывную модификацию данного процесса X на отрезке $[k-1, k]$, $k \in \mathbb{N}$. Вводим процесс $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$, полагая $Y(t) = Y_k(t)$ при $t \in (k-1, k)$, $k \in \mathbb{N}$, и $Y(k) = X(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку внутри множества $A_k = \{\omega : Y_k(k, \omega) = Y_{k+1}(k, \omega)\}$ содержится событие $\{Y_k(k) = X(k), Y_{k+1}(k) = X(k)\}$ вероятности единица, то (в силу нашего постоянного предположения о полноте вероятностного пространства) A_k — событие при каждом k . Поэтому $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ имеет $\mathbb{P}(A) = 1$.

При $\omega \in A$ траектории процесса Y непрерывны на полу-прямой. По построению $P(Y(t) = X(t)) = 1$ для всех $t \geq 0$.

Для гауссовских процессов условия теоремы 11 можно видоизменить, как показывает

Пример 26. Пусть $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$ — гауссовский процесс, приращения которого обладают нулевым средним, а

$$D(X(t+h) - X(t)) \leq K|h|^\gamma \quad \text{для некоторых } K > 0, \gamma > 0. \quad (89)$$

Тогда у него существует модификация с непрерывными (п.н.) траекториями.

Проверим выполнение условий теоремы Колмогорова. Вычислим абсолютный момент порядка $\alpha > 0$ случайной величины $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

$$E|\eta|^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} x^\alpha e^{-x^2/2\sigma^2} dx.$$

Сделав замену переменных $x = \sigma u$, получим

$$E|\eta|^\alpha = \sigma^\alpha k_\alpha, \quad \text{где } k_\alpha = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u^\alpha e^{-u^2/2} du. \quad (90)$$

Величину k_α можно найти, совершив в интеграле замену переменных $\frac{u^2}{2} = v$ и учитывая, что

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0.$$

Имеем (принимая во внимание, что $\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$)

$$k_\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (\sqrt{2v})^{\alpha-1} e^{-v} dv = \frac{2^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

В частности, при $\alpha = 2n$ получаем $E|\eta|^{2n} = (2n-1)!!\sigma^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Пользуясь соотношением (90) и условием (89), запишем

$$E|X(t+h) - X(t)|^\alpha = k_\alpha (D(X(t+h) - X(t)))^{\alpha/2} \leq k_\alpha K^{\alpha/2} |h|^{\alpha\gamma/2}.$$

Разумеется, мы всегда можем выбрать $\alpha > 0$ так, чтобы $\frac{\alpha\gamma}{2} = 1 + \epsilon$, где $\epsilon > 0$. Это означает выполнение условий теоремы Колмогорова о существовании непрерывной модификации.

Например, для гауссовского процесса с нулевым средним и ковариационной функцией $\min\{t, s\}$ имеем

$$D(X(t+h) - X(t)) = |h|, \quad h, t \geq 0.$$

Следовательно, существует непрерывная модификация винеровского процесса на каждом отрезке $[a, b] \in \mathbb{R}_+$.

Впрочем, для винеровского процесса мы также могли бы прямо сослаться на теорему 11, поскольку легко видеть, что (88) выполнено при $\alpha = 4$ и $\varepsilon = 1$.

Пример 27. Покажем, как можно явно задать винеровский процесс на $[0, \infty)$, если мы умеем строить этот процесс на отрезке $[0, 1]$.

На некотором вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) согласно теореме Ломницкого–Улама, упомянутой при решении задачи 1, можно задать последовательность независимых винеровских процессов $W_n = \{W_n(t), t \in [0, 1]\}$, $n \in \mathbb{N}$. Определим процесс W на $[0, \infty)$ следующим образом:

$$W(t) = \begin{cases} W_1(t), & t \in [0, 1], \\ \sum_{k=1}^n W_k(1) + W_{n+1}(t-n), & t \in [n, n+1], \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Траектории построенного процесса будут очевидным образом непрерывны, а $W(0) = W_1(0) = 0$. Нетрудно проверить, что $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, $0 \leq s \leq t$. В самом деле, если для некоторого $k \in \mathbb{Z}_+$ точки $s, t \in [k, k+1]$, то $W(t) - W(s) = W_{k+1}(t) - W_{k+1}(s)$, т.е. требуемое утверждение выполнено. Предположим теперь, что $s \in [m, m+1]$, $t \in [k, k+1]$, $m < k$, тогда

$$\begin{aligned} W(t) - W(s) &= \\ &= W(t) - W(k) + \sum_{l=m+1}^{k-1} [W(l+1) - W(l)] + W(m+1) - W(s) = \\ &= W_{k+1}(t-k) + \sum_{l=m+1}^{k-1} W_{l+1}(1) + [W_{m+1}(1) - W_{m+1}(s-m)]. \end{aligned}$$

Слагаемые с разными индексами независимы. Они нормально распределены, будучи приращениями (все $W_n(0) = 0$) винеровских процессов. Значит, сумма также имеет нормальное распределение со средним нуль и дисперсией, равной сумме дисперсий, т.е. $t - s$.

Аналогичным образом проверяется независимость приращений W , при этом используется то, что измеримые функции (в данном случае суммы) от непересекающихся наборов независимых случайных величин независимы.

Разумеется, можно доказать существование непрерывной модификации винеровского процесса на $[0, \infty)$ с помощью теоремы 11 и примера 25 (учитывая теорему 9 и пример 14).

4.3. Явная конструкция винеровского процесса на $[0, 1]$

Как и для пуассоновского процесса, существуют явные конструкции винеровского процесса. Если первый строился по последовательности независимых одинаково распределенных экспоненциальных величин, то второй можно определить с помощью последовательности независимых $\mathcal{N}(0, 1)$ случайных величин. Например, винеровский процесс на отрезке $[0, 1]$ задается в виде суммы ряда

$$W(t, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t) \xi_k(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (91)$$

где независимые величины $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$, а S_k — функции Шандера, $k \in \mathbb{N}$.

Предварительно на $[0, 1]$ введем функции Хаара (нарисуйте их графики!): $H_1(t) \equiv 1$, $H_2(t) = \mathbf{1}_{[0, 1/2]}(t) - \mathbf{1}_{(1/2, 1]}(t)$, а затем серии, “подобные” H_2 :

$$H_k(t) = 2^{n/2} (\mathbf{1}_{I_{n,k}}(t) - \mathbf{1}_{J_{n,k}}(t)), \quad 2^n < k \leq 2^{n+1},$$

где

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= [a_{n,k}, a_{n,k} + 2^{-n-1}], & J_{n,k} &= (a_{n,k} + 2^{-n-1}, a_{n,k} + 2^{-n}], \\ a_{n,k} &= 2^{-n}(k - 2^n - 1), & n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Теперь по функциям Хаара определим функции Шаудера (нарисуйте графики):

$$S_k(t) = \int_0^t H_k(y) dy \equiv \langle \mathbf{1}_{[0,t]}, H_k \rangle, \quad t \in [0,1], \quad k \geq 1.$$

Подчеркнем, что система функций $\{H_k(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$ является полной и ортонормированной в пространстве $L^2[0,1]$ с мерой Лебега и скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt, \quad f, g \in L^2[0,1].$$

Следовательно, любую функцию $f \in L^2[0,1]$ можно представить в виде ряда Фурье:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, H_k \rangle H_k,$$

где ряд сходится в $L^2[0,1]$. Кроме того, согласно равенству Парсеваля

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, H_k \rangle \langle g, H_k \rangle.$$

Поучительно подробно разобрать следующее утверждение.

Теорема 12. Пусть $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение и заданных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Тогда формула (91) определяет винеровский процесс на отрезке $[0,1]$.

Будем следовать схеме доказательства, приведенной в [2, гл. II, §10]. Равномерная на $[0,1]$ сходимость п.н. ряда в (91), а значит, и непрерывность п.н. его траекторий вытекает из задачи 19 и следующей леммы.

Лемма 3. Пусть числовая последовательность $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такова, что $a_k = O(k^\varepsilon)$ при $k \rightarrow \infty$ для некоторого $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t)$ сходится равномерно на отрезке $[0,1]$ и, следовательно, задает непрерывную функцию.

Доказательство леммы опирается на тот факт, что при $2^n < k \leq 2^{n+1}$ носители $S_k(t)$ (то есть промежутки, на которых эти функции отличны от 0) не пересекаются, а $0 \leq S_k(t) \leq 2^{-(n/2)-1}$. Поскольку $|a_k| \leq Ck^\varepsilon$ для некоторого $C > 0$ и всех $k \in \mathbb{N}$, то для каждого $t \in [0, 1]$ имеем

$$\sum_{2^n < k \leq 2^{n+1}} |a_k| |S_k(t)| \leq C 2^{(n+1)\varepsilon} 2^{-\frac{n}{2}-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Суммируя полученные оценки по $n \geq m$ и устремляя m к бесконечности, устанавливаем равномерную сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t)$, составленного из непрерывных функций.

Обоснование дальнейших шагов в конструкции винеровского процесса мы разобьем на ряд задач.

Задача 30. Требуется показать, что ряд в (91) сходится не только п.н., но и в среднем квадратичном.

Обозначим $Z_n(t) = \sum_{k=1}^n \xi_k S_k(t)$. Тогда для $t \in [0, 1]$ и натуральных чисел m, n имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|Z_{n+m}(t) - Z_n(t)|^2 &= \mathbb{E} \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} \xi_k S_k(t) \right|^2 = \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+m} \sum_{l=n+1}^{n+m} S_k(t) S_l(t) \mathbb{E} \xi_k \xi_l = \sum_{k=n+1}^{n+m} S_k^2(t). \end{aligned}$$

Поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} S_k^2(t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-(k/2)-1})^2 < \infty$, полнота пространства $L^2(\Omega)$ обеспечивает существование при каждом $t \in [0, 1]$ предела в среднем квадратичном $Z(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(t)$. Этот факт запишем иначе: $\mathbb{E}|Z_n(t) - Z(t)|^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Так как сходимость с вероятностью единица и сходимость в среднем квадратичном влечут сходимость по вероятности, а предел по вероятности единственен с точностью до эквивалентности (упр. 36), то $Z(t) = W(t)$ п.н. при каждом $t \in [0, 1]$.

Задача 31. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $W = \{W(t), t \in [0, 1]\}$.

Поскольку $EZ_n(t) = 0$ для всех $n \geq 1$ и $t \in [0, 1]$, то, воспользовавшись неравенством Коши–Буняковского–Шварца, согласно задаче 30 имеем

$$|EW(t)| = |EW(t) - EZ_n(t)| \leq (E|W(t) - Z_n(t)|^2)^{1/2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что $EW(t) = 0$ при всех $t \in [0, 1]$.

Для вычисления ковариации воспользуемся непрерывностью скалярного произведения в $L^2(\Omega)$. А именно,

$$\text{cov}(W(s), W(t)) = EW(s)W(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} EZ_n(s)Z_n(t).$$

Учитывая независимость величин ξ_k , а также то, что $E\xi_k^2 = 1$ ($k \in \mathbb{N}$), получаем

$$\text{cov}(W(s), W(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k(s)S_k(t)E\xi_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(s)S_k(t).$$

Пользуясь определением функций Шаудера и свойствами функций Хаара, последнюю сумму можно переписать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle H_k, \mathbf{1}_{[0, s]} \rangle \langle H_k, \mathbf{1}_{[0, t]} \rangle = \langle \mathbf{1}_{[0, s]}, \mathbf{1}_{[0, t]} \rangle = \min\{s, t\}, \quad s, t \in [0, 1].$$

Задача 32. Проверить, что вектор $(W(t_1), \dots, W(t_n))$ является гауссовским для любых $0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Согласно задаче 17 достаточно установить, что произвольная линейная комбинация $Y = \sum_{m=1}^n c_m W(t_m)$ (где константы $c_m \in \mathbb{R}$, $m = 1, \dots, n$) будет гауссовой случайной величиной. Ясно, что

$$Y = \sum_{m=1}^n c_m \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t_m) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \xi_k, \quad (92)$$

где $d_k = d_k(c_1, \dots, c_n; t_1, \dots, t_n) = \sum_{m=1}^n c_m S_k(t_m)$, а ряд в правой части (92) сходится почти наверное и в среднем квадратичном (как конечная сумма рядов с такими свойствами). Его

частичные суммы $Y_N = \sum_{k=1}^N d_k \xi_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, где $\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^N d_k^2$. Пользуясь задачей 17, видим, что величина Y является гауссовой. Таким образом, и построенный процесс W — гауссовский.

Пример 27 позволяет считать, что винеровский процесс, удовлетворяющий определению 20 для $t \in [0, 1]$, можно доопределить на $[0, \infty)$.

Упражнение 85. Проверьте, что процесс, заданный формулой (91), удовлетворяет на $[0, 1]$ определению 21 (а потому и определению 20).

4.4. Свойства винеровского процесса

Начнем с так называемого свойства *автомодельности*.

Задача 33. Показать, что $Z = \{Z(t) = \frac{1}{\sqrt{c}} W(ct), t \geq 0\}$ также будет винеровским процессом для любого $c > 0$.

Траектории рассматриваемого процесса непрерывны (п.н.). Конечномерные распределения процесса Z гауссовые, поскольку вектор

$$\left(\frac{1}{\sqrt{c}} W(ct_1), \dots, \frac{1}{\sqrt{c}} W(ct_n) \right)$$

является при любых $t_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n$ (согласно примеру 12) гауссовским, как линейное преобразование гауссовского вектора $(W(ct_1), \dots, W(ct_n))$. Очевидно, $E \frac{1}{\sqrt{c}} W(ct) = 0$ для $t \geq 0$, а

$$EZ(s)Z(t) = \frac{1}{c} \min\{cs, ct\} = \min\{s, t\},$$

т.е. выполнено определение 20.

Упражнение 86. Пусть $W = \{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Покажите, что $V = \{V(0) = 0, V(t) = tW(t^{-1}), t > 0\}$ окажется винеровским процессом.

Теперь мы установим *марковское свойство* винеровского процесса.

Пример 28. Пусть $\{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс, тогда процесс $Y = \{Y(t) = W(t+a) - W(a), t \geq 0\}$ при любой константе $a \geq 0$ также винеровский. Более того, Y не зависит от σ -алгебры $\mathcal{F}_{\leq a} = \sigma\{W(u), u \leq a\}$.

Проверим определение 21. Имеем $Y(0) = W(a) - W(a) = 0$. Легко видеть, что приращения процесса Y независимы, так как для любых точек $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ верно равенство

$$\begin{aligned} Y(t_0) &= W(t_0 + a) - W(a), Y(t_k) - Y(t_{k-1}) = \\ &= W(t_k + a) - W(t_{k-1} + a), \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

а приращения винеровского процесса независимы. Очевидно, $Y(s+t) - Y(s) = W(s+t+a) - W(s+a) \sim \mathcal{N}(0, t)$ при $t, s \geq 0$. Наконец, траектории Y получаются сдвигом траекторий W , а значит, являются непрерывными функциями.

Для доказательства независимости Y и $\mathcal{F}_{\leq a}$ достаточно проверить независимость алгебр, порождающих соответствующие σ -алгебры (см. [2, с. 20]). Поэтому достаточно убедиться в независимости векторов $\xi := (W(u_1), \dots, W(u_n))$ и $\eta := (Y(t_1), \dots, Y(t_m))$, где $0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq a$ и $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$. Однако легко видеть, что ξ и η являются линейными преобразованиями независимых векторов, а следовательно, сами независимы.

Отметим, что для винеровского процесса справедливо и так называемое *строго марковское свойство*, когда вместо константы a берется случайная величина τ с определенными свойствами, которая называется марковским моментом.

Задача 34. Показать, что почти наверное у траекторий винеровского процесса на любом отрезке $[0, T]$ неограничена вариация $V = \sup_{\tau} V(\tau)$, где τ обозначает произвольное разбиение отрезка, $\tau : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N(\tau) = T$, а

$$V(\tau) := \sum_{k=1}^{N(\tau)} |W(t_k) - W(t_{k-1})|.$$

Сначала установим, что для последовательности разбиений τ_n на n частей, мелкости которых $\delta_n := \max_{k=1, \dots, n} |t_k - t_{k-1}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, соответствующие $V(\tau_n) \equiv V_n \xrightarrow{\text{P}} \infty$. Отметим, что $t_k = t_k(n)$, но мы не усложняем записи.

Прежде всего вычислим $\mathbb{E}V_n$ и DV_n . Имеем

$$\mathbb{E}V_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|W(t_k) - W(t_{k-1})|.$$

Учтем, что $W(t_k) - W(t_{k-1}) \sim \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1})$, а для величины $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\xi| &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = -\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty de^{-x^2/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma, \\ \mathbb{D}|\xi| &= \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}|\xi|)^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\sigma^2. \end{aligned}$$

В результате

$$\mathbb{E}V_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^n \sqrt{t_k - t_{k-1}}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sqrt{t_k - t_{k-1}} &= \sum_{k=1}^n \frac{t_k - t_{k-1}}{\sqrt{t_k - t_{k-1}}} \geqslant \\ &\geqslant \frac{\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})}{\sqrt{\delta_n}} = \frac{T}{\sqrt{\delta_n}} \rightarrow \infty, \quad \delta_n \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Поэтому $\mathbb{E}V_n \rightarrow \infty$ при $\delta_n \rightarrow 0$. В силу независимости приращений винеровского процесса

$$\begin{aligned} DV_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{D}|W(t_k) - W(t_{k-1})| = \\ &= \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) T < \infty. \end{aligned}$$

Свойство $V_n \xrightarrow{P} \infty$ при $\delta_n \rightarrow 0+$ означает (см. (47)), что $P(V_n \leq K) \rightarrow 0$ для любого $K > 0$. Покажем, что это имеет место.

$P(V_n \leq K) = P(V_n - EV_n \leq K - EV_n)$, (93)
и поскольку $EV_n \rightarrow \infty$ при $\delta_n \rightarrow 0+$, то $K - EV_n < 0$ для всех достаточно больших n . Следовательно, правую часть (93) можно оценить сверху с помощью неравенства Чебышева, но $DV_n = (1 - \frac{2}{\pi})T$ и $EV_n \rightarrow \infty$ при $\delta_n \rightarrow 0+$, поэтому

$$P(|V_n - EV_n| > |K - EV_n|) \leq \frac{DV_n}{(EV_n - K)^2} \rightarrow 0.$$

Проверьте, что так как $V_n \xrightarrow{P} \infty$, то найдется подпоследовательность $V_{n_k} \rightarrow \infty$ п.н., а это завершит доказательство.

Результат задачи 34 можно получить иначе, найдя сперва конечную п.н. квадратичную вариацию процесса W на $[0, T]$. Попросту для величин U_n из задачи 35 имеем $U_n \rightarrow T$ в L^2 , $U_n \leq V_n \max_{k=1, \dots, n} |W(t_k) - W(t_{k-1})|$, но найдется подпоследовательность $U_{n_k} \rightarrow T$ п.н., а траектории W непрерывны.

Задача 35. Найти $\lim_{\delta_n \rightarrow 0+} U_n$, где

$$U_n := \sum_{k=1}^n (W(t_k) - W(t_{k-1}))^2,$$

а t_0, \dots, t_n и δ_n — те же, что в предыдущей задаче.

Подсчитаем математическое ожидание и дисперсию U_n :

$$\begin{aligned} EU_n &= \sum_{k=1}^n E(W(t_k) - W(t_{k-1}))^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n D(W(t_k) - W(t_{k-1})) = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = T, \end{aligned}$$

а так как приращения винеровского процесса независимы, то

$$DU_n = \sum_{k=1}^n D(W(t_k) - W(t_{k-1}))^2.$$

Как показано в примере 26, момент четвертого порядка случайной величины $\xi \sim N(0, \sigma^2)$ равен $3\sigma^4$, поэтому

$$\begin{aligned} D(W(t_k) - W(t_{k-1}))^2 &= \\ &= E(W(t_k) - W(t_{k-1}))^4 - (E(W(t_k) - W(t_{k-1}))^2)^2 = \\ &= 2(t_k - t_{k-1})^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$DU_n = 2 \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})^2 \leq 2\delta_n \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = 2\delta_n T \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0+.$$

Осталось заметить, что $DU_n = E(U_n - T)^2$, а стремление к нулю этого выражения означает сходимость U_n к T в среднем квадратическом.

Пример 29. Полученный в задаче 35 результат позволяет легко вычислить

$$\text{l.i.m.}_{\delta_n \rightarrow 0+} \sum_{k=1}^n W(t_{k-1})(W(t_k) - W(t_{k-1})),$$

что будет применено в разделе, касающемся интеграла Ито.

Обозначим $\Delta_k W = W(t_k) - W(t_{k-1})$ приращение винеровского процесса на k -м промежутке разбиения отрезка $[0, T]$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n W(t_{k-1})(W(t_k) - W(t_{k-1})) &= \sum_{k=1}^n \Delta_k W \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_l W = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{k=1}^n \Delta_k W \right)^2 - \sum_{k=1}^n (\Delta_k W)^2 \right]. \end{aligned}$$

Иначе это можно переписать как $\left(\frac{1}{2}\right)[W(T)^2 - U_n]$, следовательно, искомый предел в пространстве L^2 равняется $\left(\frac{1}{2}\right)[W^2(T) - T]$.

Упражнение 87. Найти

$$\text{l.i.m.}_{\delta_n \rightarrow 0+} \sum_{k=1}^n W(t_k) \Delta_k W.$$

Заметим, что если в рассматриваемых (интегральных) суммах брать не значения функции $W(\cdot)$ или в левом, или правом конце промежутков разбиения, а их полусумму, то

$$\text{l.i.m.}_{\delta_n \rightarrow 0+} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \right) (W(t_k) + W(t_{k-1})) \Delta_k W = \frac{W^2(T)}{2}.$$

Нетрудно также найти, что для константы $p \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \text{l.i.m.}_{\delta_n \rightarrow 0+} \sum_{k=1}^n (pW(t_k) + (1-p)W(t_{k-1})) \Delta_k W &= \\ &= \frac{W^2(T)}{2} + T \left(p - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Задача 36. Покажем, что тот же самый предел имеет $\sum_{k=1}^n W(s_k) \Delta_k W$ при $s_k = pt_k + (1-p)t_{k-1}, k = 1, \dots, n$ ($n \rightarrow \infty$).

Воспользуемся тем, что $\Delta_k W$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Delta_k W &= [W(t_k) - W(pt_k + (1-p)t_{k-1})] + \\ &\quad + [W(pt_k + (1-p)t_{k-1}) - W(t_{k-1})], \end{aligned}$$

а также применим тождество

$$a(b-a) = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) - \frac{1}{2} (b-a)^2, \quad b(b-a) = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) + \frac{1}{2} (b-a)^2.$$

Обозначим $a = W(t_{k-1}), b = W(t_k), c = W(pt_k + (1-p)t_{k-1}) = W(s_k)$. Тогда k -е слагаемое в интересующей нас сумме примет вид

$$\begin{aligned} c(b-c) + c(c-a) &= \frac{1}{2} (b^2 - c^2) - \frac{1}{2} (b-c)^2 + \frac{1}{2} (c^2 - a^2) + \frac{1}{2} (c-a)^2 = \\ &= \frac{1}{2} (b^2 - a^2) - \frac{1}{2} (b-c)^2 + \frac{1}{2} (c-a)^2, \end{aligned}$$

а сама сумма может быть записана как $\frac{1}{2} (S_n - R_n + L_n)$, где

$$S_n = \sum_{k=1}^n (W^2(t_k) - W^2(t_{k-1})) = W^2(T),$$

$$R_n = \sum_{k=1}^n (W(t_k) - W(s_k))^2, \quad L_n = \sum_{k=1}^n (W(s_k) - W(t_{k-1}))^2.$$

Поскольку для последовательности случайных величин $X_n \in L^2$ с $\mathbb{E}X_n = c = \text{const}$, $n \in \mathbb{N}$, сходимость к c в среднем квадратичном означала бы, что $\mathbb{E}(X_n - c)^2 = \mathbb{D}X_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, а согласно определению

$$\begin{aligned}\mathbb{E}R_n &= \sum_{k=1}^n (t_k - s_k) = (1-p) \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = (1-p)T, \\ \mathbb{E}L_n &= \sum_{k=1}^n (s_k - t_{k-1}) = p \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = pT,\end{aligned}$$

и при этом

$$\begin{aligned}\mathbb{D}R_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{D}(W(t_k) - W(s_k))^2 = 2 \sum_{k=1}^n (t_k - s_k)^2 \leq 2T\delta_n \rightarrow 0, \\ \mathbb{D}L_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{D}(W(s_k) - W(t_{k-1}))^2 = 2 \sum_{k=1}^n (s_k - t_{k-1})^2 \leq 2T\delta_n \rightarrow 0,\end{aligned}$$

то получаем требуемый результат:

$$\text{l.i.m.}_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n W(pt_k + (1-p)t_{k-1}) \Delta_k W = \frac{W^2(T)}{2} + T \left(p - \frac{1}{2} \right).$$

Результаты последних двух задач будут полезны при рассмотрении стохастических интегралов. Если в определенных интегральных суммах значение интегranda (подынтегральной функции) берется в левом конце отрезков разбиения, то при надлежащем предельном переходе получается интеграл Ито, если в середине — интеграл Стратоновича, а когда промежуточные точки делят каждый отрезок разбиения в фиксированной пропорции $p : (1-p)$, получается p -интеграл.

Задача 37. Пусть векторный процесс $X = \{X(t), t \geq 0\}$, где $X(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t))$, составлен из независимых винеровских процессов. Доказать, что с вероятностью единица процесс X выйдет из шара произвольного радиуса $R > 0$.

Достаточно убедиться, что с вероятностью единица процесс W_1 выйдет из отрезка $[-R, R]$, поскольку $\|X(t)\| \geq |W_1(t)|$ при каждом $t \geq 0$ ($\|\cdot\|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^n). Пусть A

обозначает событие, состоящее в том, что происходит бесконечное число событий $A_n = \{|W_1(n) - W_1(n-1)| > 2R\}$, где $n \in \mathbb{N}$. В силу независимости приращений винеровского процесса независимы события A_n , $n \in \mathbb{N}$. По второй части леммы Бореля–Кантелли (лемма 1), если $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, то $P(A) = 1$. Последний ряд, очевидно, расходится, так как при каждом натуральном n

$$P(A_n) = P(|Z| > 2R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>2R} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > 0.$$

Утверждение установлено, поскольку A влечет интересующее нас событие.

Отметим, что задача 37 допускает тривиальное решение с помощью замечательного закона повторного логарифма (в его формулировке $\log t := \ln(\max\{e, t\})$).

Теорема 13 (Хинчин). *С вероятностью единица*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \log \log t}} = -1.$$

Из удивительно красивых свойств броуновского движения отметим также следующий результат.

Теорема 14 (Пэли–Винер–Зигмунд). *С вероятностью единица траектории винеровского процесса не дифференцируемы ни в одной точке $t \in [0, \infty)$.*

Доказательства этих двух теорем можно прочитать, напр., в [2, с. 76 и 91].

4.5. Процесс Орнштейна–Уленбека. Броуновский мост

Введем еще одно преобразование винеровского процесса, а именно *процесс Орнштейна–Уленбека*, который определяется формулой

$$Y(t) = \sigma e^{-\alpha t} W(e^{2\alpha t}), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \sigma > 0, \quad \alpha > 0.$$

Пример 30. Требуется убедиться в том, что Y — гауссовский процесс и найти его ковариационную функцию.

Преобразованный процесс снова является гауссовским с нулевым средним (учитываем, что линейное преобразование гауссовского вектора дает гауссовский вектор). Его ковариационная функция

$$\text{cov}(Y(t), Y(s)) = \sigma^2 e^{-\alpha(t+s)} \min\{e^{2\alpha t}, e^{2\alpha s}\} = \sigma^2 e^{-\alpha|t-s|}, \quad s, t \geq 0.$$

Подробнее этот процесс будет рассмотрен в дальнейшем как марковский и стационарный процесс.

Заслуживает внимания и так называемый *броуновский мост*, который полезен в математической статистике для вывода критерия согласия Колмогорова. Такой процесс можно задать формулой

$$W_0(t) = W(t) - tW(1), \quad t \in [0, 1].$$

Очевидно, $W_0(0) = W_0(1) = 0$. Этим свойством траекторий и объясняется название процесса. Данный процесс является гауссовским, поскольку $(W_0(t_1), \dots, W_0(t_n))$ получается из гауссовского вектора $(W(t_1), \dots, W(t_n), W(1))$ линейным преобразованием, здесь $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1$. Процесс W_0 имеет нулевое среднее, а его ковариационная функция

$$\begin{aligned} \text{cov}(W_0(s), W_0(t)) &= \\ &= E(W(s) - sW(1))(W(t) - tW(1)) = \min\{s, t\} - st. \end{aligned}$$

Пример 31. Докажем, что процесс $W_0 = \{W_0(t), t \in [0, 1]\}$ не зависит от $W(1)$.

Действительно, $EW_0(t)W(1) = E(W(t) - tW(1))W(1) = EW(t)W(1) - tEW^2(1) = t - t = 0$. Так как система, состоящая из процесса W_0 и величины $W(1)$, гауссовская, то из некоррелированности следует независимость.

Броуновский мост можно также рассматривать как условный винеровский процесс, равный нулю в точке $t = 1$. Определим меру Q_ε на борелевской σ -алгебре пространства $S = C[0, 1]$, положив

$$Q_\varepsilon(B) = P(W \in B | W(1) \in [-\varepsilon, \varepsilon]), \quad \varepsilon > 0,$$

здесь W обозначает сужение винеровского процесса на $[0, 1]$, а $B \in \mathcal{B}(C[0, 1])$. Тогда Q_ε слабо сходятся к распределению Q броуновского моста при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Последнее означает, что

$$\int_S f(x)Q_\varepsilon(dx) \rightarrow \int_S f(x)Q(dx), \quad \varepsilon \rightarrow 0+,$$

для любой непрерывной и ограниченной функции $f : S \rightarrow \mathbb{R}$.

Пример 32. Покажем, что, наоборот, по броуновскому мосту $W_0 = \{W_0(t), 0 \leq t \leq 1\}$ (т.е. непрерывному с вероятностью единица гауссовскому процессу, имеющему нулевое среднее и ковариационную функцию $\min\{s, t\} - st$) можно построить винеровский процесс на \mathbb{R}_+ следующим образом: $W(t) = (1+t)W_0\left(\frac{t}{1+t}\right)$, $t \geq 0$.

Вектор $(W(t_1), \dots, W(t_n))$ является гауссовским, так как его можно получить линейным преобразованием гауссовского вектора $\left(W_0\left(\frac{t_1}{1+t_1}\right), \dots, W_0\left(\frac{t_n}{1+t_n}\right)\right)$. Его среднее очевидным образом равно нулю: $EW(t) = (1+t)EW_0\left(\frac{t}{1+t}\right) = 0$. Осталось подсчитать ковариационную функцию:

$$\begin{aligned} \text{cov}(W(s), W(t)) &= EW(s)W(t) = \\ &= (1+s)(1+t)EW_0\left(\frac{s}{1+s}\right)W_0\left(\frac{t}{1+t}\right) = \\ &= (1+s)(1+t)\left[\min\left\{\frac{s}{1+s}, \frac{t}{1+t}\right\} - \frac{st}{(1+s)(1+t)}\right]. \end{aligned}$$

Предположим для определенности, что $0 \leq s < t$, тогда

$$\text{cov}(W(s), W(t)) = s(1+t) - st = s = \min\{s, t\}.$$

Таким образом, выполнено определение 20, так как при введенном преобразовании непрерывность траекторий сохраняется.

Глава 5. МАРТИНГАЛЫ

5.1. Условное математическое ожидание и его свойства

Нам понадобится понятие условного математического ожидания, играющее важнейшую роль в современной теории вероятностей. Пусть даны вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) и σ -алгебра $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$.

Определение 22. Для интегрируемой случайной величины X *условным математическим ожиданием* относительно σ -алгебры \mathcal{A} называется функция $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, обладающая следующими двумя свойствами:

- 1) Y является \mathcal{A} -измеримой (т.е. $Y \in \mathcal{A}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$);
- 2) для любого $C \in \mathcal{A}$ выполнено равенство

$$E X \mathbb{I}_C = E Y \mathbb{I}_C. \quad (94)$$

Стандартное обозначение: $Y = E(X|\mathcal{A})$.

Очевидно, $E(X|\mathcal{A})$ — случайная величина, так как $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Разумеется, если $Y = X$, то свойство 2 выполнено, однако не любая случайная величина (т.е. \mathcal{F} -измеримая функция) будет измерима относительно σ -алгебры \mathcal{A} , содержащейся в \mathcal{F} . Сложность нахождения Y заключается в необходимости удовлетворить обоим условиям 1 и 2.

Прежде всего рассмотрим вопрос существования условного математического ожидания, а также выясним, сколь однозначно оно определено. Для этого потребуются следующие важные сведения.

Определение 23. Говорят, что мера ν *абсолютно непрерывна* относительно меры μ (μ и ν заданы на некотором измеримом пространстве (S, \mathcal{B})), если соотношение $\mu(C) = 0$ влечет равенство $\nu(C) = 0$. Пишут $\nu \ll \mu$.

Свойство абсолютной непрерывности конечных мер характеризует

Теорема 15 (Радон–Никодим). *На (S, \mathcal{B}) мера $\nu \ll \mu$, если и только если найдется интегрируемая по мере μ функция*

ции f , именуемая плотностью ν по мере μ , такая, что

$$\nu(C) = \int_C f d\mu, \quad C \in \mathcal{B}. \quad (95)$$

Функцию f называют еще производной Радона–Никодима и обозначают $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Заметим, что этот глубокий результат обобщается и на σ -конечные меры.

Упражнение 88. Докажите, что если справедливо (95), то $f \geq 0$ μ -почти всюду, т.е. $\mu(\{x \in S : f(x) < 0\}) = 0$.

Вернемся к вопросу существования условного математического ожидания $E(X|\mathcal{A})$ для интегрируемой величины X и произвольной σ -алгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Согласно (23)

$$Q(B) := \int_B X^+ dP = EX^+ \mathbb{I}_B, \quad B \in \mathcal{F},$$

является конечной мерой на (Ω, \mathcal{F}) , так как из представимости B в виде $B = \cup_i B_i$ для последовательности попарно непересекающихся $B_1, B_2 \dots \in \mathcal{F}$ следует $\mathbb{I}_{\cup_i B_i} = \sum_i \mathbb{I}_{B_i}$.

В силу (22), если $P(B) = 0$, то $Q(B) = 0$. Возьмем $Q|_{\mathcal{A}}$, т.е. сужение Q на $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Тогда $Q|_{\mathcal{A}} \ll P|_{\mathcal{A}}$. Поэтому по теореме Радона–Никодима найдется \mathcal{A} -измеримая функция Z такая, что

$$\int_C X^+ dP = \int_C Z dP, \quad C \in \mathcal{A}.$$

Аналогично существует \mathcal{A} -измеримая функция U , для которой

$$\int_C X^- dP = \int_C U dP, \quad C \in \mathcal{A}.$$

Таким образом, в качестве $E(X|\mathcal{A})$ можно выбрать $Z - U$.

Пример 33. Проверим, что условное математическое ожидание определено однозначно с точностью до совпадения почти наверное.

Если Y удовлетворяет двум требованиям, налагаемым на условное математическое ожидание X относительно \mathcal{A} , то любая \mathcal{A} -измеримая случайная величина Z , п.н. совпадающая с Y ,

может играть роль $E(X|\mathcal{A})$ (ведь тогда $Z\mathbb{I}_C = X\mathbb{I}_C$ п.н., а значит, верно (94)). Отметим, что если вероятностное пространство полно (что мы всегда предполагаем), то любая случайная величина, равная п.н. величине Y , будет являться вариантом условного математического ожидания.

С другой стороны, допустим, что Y_1 и Y_2 обладают свойствами $E(X|\mathcal{A})$. Покажем, что тогда $Y_1 = Y_2$ п.н. Введем множество $C := \{Y_1 \geq Y_2\} = \{Y_1 - Y_2 \geq 0\}$. Оно входит в \mathcal{A} , поскольку $(Y_1 - Y_2)$ является \mathcal{A} -измеримой величиной. В силу определения $E(X|\mathcal{A})$ имеем $EY_1\mathbb{I}_C = EY_2\mathbb{I}_C$, иначе говоря, $E(Y_1 - Y_2)\mathbb{I}_C = 0$. Отсюда (см. свойства интеграла Лебега в главе 1) вытекает, что $Y_1 - Y_2 = 0$ п.н. на множестве C . Аналогичным образом убеждаемся, что $Y_1 - Y_2 = 0$ п.н. на \bar{C} .

Пример 34. Если величина X является \mathcal{A} -измеримой и $E|X| < \infty$, то $E(X|\mathcal{A}) = X$. Если X не зависит от \mathcal{A} (т.е. независимы σ -алгебры $\sigma\{X\}$ и \mathcal{A}) и $E|X| < \infty$, то $E(X|\mathcal{A}) = EX$.

Первое утверждение вытекает из определения условного математического ожидания, докажем второе. Возьмем любое $C \in \mathcal{A}$. Тогда (интегрируемые величины) X и \mathbb{I}_C независимы. Действительно, $\sigma\{X\}$ состоит из событий вида $\{X \in B\}$, а \mathbb{I}_C является \mathcal{A} -измеримой величиной, откуда $\{\mathbb{I}_C \in D\} \in \mathcal{A}$ для произвольных борелевских подмножеств $B, D \subset \mathbb{R}$. Следовательно, имеем

$$P(X \in B, \mathbb{I}_C \in D) = P(X \in B)P(\mathbb{I}_C \in D).$$

Итак, согласно (41) (для двух величин)

$$E(X\mathbb{I}_C) = EXE\mathbb{I}_C.$$

Очевидным образом константа EX является \mathcal{A} -измеримой, и остается заметить, что

$$E((EX)\mathbb{I}_C) = EXE\mathbb{I}_C.$$

Далее нам потребуется результат простого упражнения:

Упражнение 89. Пусть \mathcal{A} порождается разбиением Ω на события A_1, A_2, \dots . Любая \mathcal{A} -измеримая функция должна принимать постоянные значения на событиях $A_n, n = 1, 2, \dots$

Пример 35. Пусть \mathcal{A} порождается разбиением Ω на события A_1, A_2, \dots . Тогда для интегрируемой величины X на каждом множестве A_n имеем

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{A})(\omega) = \frac{\mathbb{E}X\mathbb{I}_{A_n}}{\mathbb{P}(A_n)}, \quad \omega \in A_n, \quad (96)$$

где полагаем $\frac{0}{0} := 0$.

Если $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{A})$ и $Y = y_n$ на событии A_n , то $\mathbb{E}X\mathbb{I}_{A_n} = \mathbb{E}Y\mathbb{I}_{A_n} = y_n\mathbb{P}(A_n)$. Поэтому $\mathbb{E}(X|\mathcal{A})$ может задаваться только формулой (96) на событии A_n положительной вероятности (а на событии нулевой вероятности условное математическое ожидание можно определить как угодно). Выполнив упр. 2, убеждаемся, что \mathcal{A} состоит из конечных или счетных объединений множеств A_n . Теперь нетрудно проверить, что если $C = \cup_{n \in J} A_n$, где $J \subset \mathbb{N}$, то для $\mathbb{E}(X|\mathcal{A})$, определенного согласно (96), будет выполнено (94), так как равенство $\mathbb{E}Y\mathbb{I}_{A_n} = \mathbb{E}X\mathbb{I}_{A_n}$ при всех n обеспечивает для любого $J \subset \mathbb{N}$ справедливость соотношения

$$\sum_{n \in J} \mathbb{E}Y\mathbb{I}_{A_n} = \sum_{n \in J} \mathbb{E}X\mathbb{I}_{A_n}$$

(поскольку $\sum_n |\mathbb{E}X\mathbb{I}_{A_n}| \leq \sum_n \mathbb{E}|X|\mathbb{I}_{A_n} = \mathbb{E}|X| < \infty$, ряды сходятся абсолютно).

Пример 36. Пусть $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Тогда $\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = Pr_H X$, где $H := L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и Pr_H — ортогональный проектор на подпространство H в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ со скалярным произведением $(U, V) = \mathbb{E}UV$.

Рассмотрим $Y := Pr_H X$. Тогда $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, а следовательно, является \mathcal{A} -измеримой величиной. Известно, что в гильбертовом пространстве проекция $Pr_H X$ вектора X на подпространство H однозначно определяется соотношением

$$(X - Pr_H X, Z) = 0 \quad \text{при всех } Z \in H.$$

Таким образом, $E((X - Y)Z) = 0$ для любого $Z \in H$. В частности, это верно при $Z = \mathbb{I}_C$, $C \in \mathcal{A}$, что означает выполнение для Y условия (94).

Напомним (см., напр., [12]) ряд свойств условного математического ожидания.

Теорема 16. Пусть случайные величины X, Y интегрируемые, а σ -алгебры \mathcal{A}, \mathcal{B} содержатся в \mathcal{F} . Следующие соотношения выполняются почти наверное.

1. Если $X \leq Y$, то $E(X|\mathcal{A}) \leq E(Y|\mathcal{A})$, в частности, $E(X|\mathcal{A}) \geq 0$ для $X \geq 0$, а также $|E(X|\mathcal{A})| \leq E(|X||\mathcal{A})$.
2. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$

$$E(aX + bY|\mathcal{A}) = aE(X|\mathcal{A}) + bE(Y|\mathcal{A}).$$

3. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Тогда (цепное, или телескопическое, свойство)

$$E(E(X|\mathcal{A})|\mathcal{B}) = E(E(X|\mathcal{B})|\mathcal{A}) = E(X|\mathcal{A}).$$

4. Если $XY, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, а величина X измерима относительно σ -алгебры \mathcal{A} , то $E(XY|\mathcal{A}) = XE(Y|\mathcal{A})$.

Замечание 5. Условное математическое ожидание можно ввести и для неинтегрируемых случайных величин (см., напр., [12]), но нам не понадобится это обобщение.

Если $D \in \mathcal{F}$, то полагают

$$P(D|\mathcal{A}) := E(\mathbb{I}_D|\mathcal{A}).$$

Для случайной величины (или случайного вектора) Z и интегрируемой случайной величины X по определению

$$E(X|Z) := E(X|\sigma\{Z\}).$$

Пример 37. Пусть W — винеровский процесс, и даны точки $0 \leq t_1 < t_2$. Найдем $E(W(t_2)|W(t_1))$.

Запишем $W(t_2) = W(t_1) + (W(t_2) - W(t_1))$. Пользуясь независимостью приращений W , примером 34 и теоремой 16, а также центрированностью W , имеем

$$\begin{aligned} E(W(t_2)|W(t_1)) &= E(W(t_2) - W(t_1)|W(t_1)) + E(W(t_1)|W(t_1)) = \\ &= E(W(t_2) - W(t_1)) + W(t_1) = W(t_1). \end{aligned}$$

Доказывается, что если X, Y — случайные величины (или случайные векторы), то $E(X|Y) = \varphi(Y)$, где φ — борелевская функция. Поэтому принято считать: запись $E(X|Y = y)$ означает, что берется число $\varphi(y)$.

Пусть случайные величины X и Y имеют совместную плотность $p_{XY}(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Определим *условную плотность* $p_{X|Y}(x, y) := \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}$, $x, y \in \mathbb{R}$, если $p_Y(y) > 0$, где p_Y находится по p_{XY} согласно формуле (34). Оказывается,

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{X|Y}(x, y) dx.$$

Пример 38. Используя свойства условного математического ожидания, можно установить интегральный вариант формулы полной вероятности.

В самом деле, для любого события $A \in \mathcal{F}$ можно записать

$$P(A) = E\mathbb{I}_A = E(E(\mathbb{I}_A|\mathcal{A})). \quad (97)$$

Предположим далее, что $\mathcal{A} = \sigma\{Y\}$, т.е. сигма-алгебра, относительно которой берется условное математическое ожидание, порождена вектором $Y \in \mathbb{R}^n$. Тогда $E(\mathbb{I}_A|\mathcal{A}) = \psi(Y)$, где ψ — борелевская функция, и правая часть (97) запишется согласно многомерному аналогу (25) в виде

$$\int_{\Omega} \psi(Y(\omega)) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) P_Y(dy) = \int_{\mathbb{R}^n} P(A|Y = y) P_Y(dy).$$

В дальнейшем будет также полезен следующий результат (в [2, с. 186] сказано, что его нетрудно получить).

Лемма 4. Пусть ξ и η — независимые случайные векторы соответственно со значениями в \mathbb{R}^k и \mathbb{R}^l , $g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ есть ограниченная борелевская функция (достаточно лишь потребовать, чтобы $E|g(\xi, \eta)| < \infty$). Положим $h(y) = Eg(\xi, y)$, где $y \in \mathbb{R}^l$, тогда

$$E(g(\xi, \eta)|\eta = y) = h(y). \quad (98)$$

Установим (98). По теореме Фубини (теорема 3) функция h определена на \mathbb{R} и $E|h(\eta)| < \infty$. Мы должны проверить, что для любого $A \in \sigma\{\eta\}$

$$Eg(\xi, \eta)\mathbb{I}_A = Eh(\eta)\mathbb{I}_A. \quad (99)$$

События A из $\sigma\{\eta\}$ имеют вид $A = \{\eta \in B\}$, где $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$. Поэтому снова применим теорему Фубини, убедимся, что левая часть (99) равна

$$\begin{aligned} Eg(\xi, \eta)\mathbb{I}_{\{\eta \in B\}} &= \int_{\mathbb{R}^l} \int_{\mathbb{R}^k} g(x, y)\mathbb{I}_B(y)P_\xi(dx)P_\eta(dy) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^l} h(y)\mathbb{I}_B(y)P_\eta(dy) = Eh(\eta)\mathbb{I}_A. \end{aligned}$$

Здесь был использован многомерный аналог формулы (25) и учтено, что

$$\mathbb{I}_B(\eta(\omega)) = \mathbb{I}_{\{\omega: \eta(\omega) \in B\}} = \mathbb{I}_A(\omega).$$

Утверждение доказано.

Задача 38. Пусть (X, Z_1, \dots, Z_n) — гауссовский вектор. Покажите, что

$$E(X|Z_1, \dots, Z_n) = c_0 + c_1 Z_1 + \dots + c_n Z_n, \quad (100)$$

где c_0, \dots, c_n — некоторые константы. Найдите значения констант при дополнительном условии, что Z_1, \dots, Z_n — независимые центрированные величины.

По аналогии с примером 36 можно найти линейную комбинацию $\hat{X} = c_0 + c_1 Z_1 + \dots + c_n Z_n$, приближающую X в среднем квадратичном наилучшим образом, т.е. такую, что

$$(X - \hat{X}, Z_j) = 0, \quad j = 0, \dots, n, \quad (101)$$

при этом мы полагаем $Z_0 = 1$. Взяв $j = 0$ в (101), получим $E(X - \hat{X}) = 0$. Тогда остальные соотношения можно переписать в виде

$$\text{cov}(X - \hat{X}, Z_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Поскольку вектор (X, Z_1, \dots, Z_n) гауссовский, это означает, что $X - \hat{X}$ не зависит от (Z_1, \dots, Z_n) . Далее имеем

$$\mathbb{E}(X|Z_1, \dots, Z_n) = \mathbb{E}(X - \hat{X} + \hat{X}|Z_1, \dots, Z_n).$$

Правая часть этого равенства перепишется в виде суммы

$$\mathbb{E}(X - \hat{X}|Z_1, \dots, Z_n) + \mathbb{E}(\hat{X}|Z_1, \dots, Z_n),$$

где первое слагаемое равно нулю, поскольку в силу независимости $X - \hat{X}$ и (Z_1, \dots, Z_n) условное математическое ожидание совпадает с безусловным. А так как величина \hat{X} измерима относительно σ -алгебры, порожденной (Z_1, \dots, Z_n) , то второе слагаемое равно \hat{X} . Тем самым справедливость (100) доказана.

Теперь найдем явный вид констант в предположении, что величины Z_1, \dots, Z_n независимы и центрированы, иначе говоря, $\mathbb{E}Z_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, $\text{cov}(Z_k, Z_j) = \delta_{kj}\text{D}Z_k$, а δ_{kj} — символ Кронекера. Тогда соотношения (101) примут вид

$$\mathbb{E}X = c_0, \quad \text{cov}(X, Z_k) = \sum_{i=1}^n c_i \text{cov}(Z_i, Z_k) = c_k \text{D}Z_k.$$

Таким образом,

$$c_0 = \mathbb{E}X, \quad c_k = \frac{\text{cov}(x, Z_k)}{\text{D}Z_k}.$$

Упражнение 90. Пусть W — винеровский процесс, и даны точки $0 \leq t_1 < t_2$. Найти $\mathbb{E}(W(t_1)|W(t_2))$ как с помощью условной плотности, так и применив задачу 38.

5.2. Фильтрация. Марковские моменты

Определение 24. Семейство σ -алгебр $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, где $T \subset \mathbb{R}$, называется *фильтрацией*, если $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ при всех $s \leq t$, $s, t \in T$ (другое название — поток σ -алгебр).

Отметим следующий пример: *естественной фильтрацией* случайного процесса $X = \{X_t, t \in T \subset \mathbb{R}\}$ называется семейство σ -алгебр $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \leq t, s \in T\}$, $t \in T$. Чаще всего в качестве T используется \mathbb{R}_+ , \mathbb{Z}_+ или \mathbb{N} .

Пример 39. Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ и $Y = \{Y_t, t \in T\}$ такие процессы, что $Y_t = h_t(X_t)$, где отображение $h_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ взаимно однозначно при каждом $t \in T$. Тогда естественная фильтрация X совпадает с естественной фильтрацией Y .

Действительно, для каждого $t \in T$ и борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$

$$\{Y_t \in B\} = \{X_t \in h_t^{-1}(B)\}, \quad \{X_t \in B\} = \{Y_t \in h_t(B)\}.$$

Иначе говоря, совпадают совокупности элементарных цилиндров — событий, составляющих $\sigma(X_t)$ и $\sigma(Y_t)$, откуда следует искомое утверждение.

Определение 25. *Марковским моментом* (относительно заданной фильтрации \mathbb{F}) называется величина $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \infty$ такая, что $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ при любом $t \in T$. Момент остановки — это марковский момент, конечный с вероятностью единица.

Учитывая, что $\{\tau > t\} = \Omega \setminus \{\tau \leq t\}$, в приведенном выше определении вместо множеств $\{\tau \leq t\}$ можно рассматривать $\{\tau > t\}, t \in T$.

Пример 40. Пусть $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — некоторая счетная фильтрация. Покажем, что τ — марковский момент относительно \mathbb{F} тогда и только тогда, когда при каждом $n \in \mathbb{N}$ событие $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Если τ — марковский момент, то $\{\tau = 0\} = \{\tau \leq 0\} \in \mathcal{F}_0$ в силу определения 25, а для $n \geq 1$ получаем $\{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} \setminus \{\tau \leq n-1\} \in \mathcal{F}_n$, так как $\{\tau \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$.

Обратно, $\{\tau \leq n\} = \bigcup_{m=0}^n \{\tau = m\} \in \mathcal{F}_n$, так как $\{\tau = m\} \in \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$ при $m = 0, \dots, n$. Отметим, что константа $m \in \mathbb{N}$ — момент остановки.

Задача 39. Пусть X_0, X_1, \dots — последовательность случайных векторов со значениями в \mathbb{R}^m , $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Показать, что $\tau = \inf\{n : X_n \in B\}$ является марковским моментом относительно естественной фильтрации этой последовательности. Найти распределение величины X_τ в том случае, когда $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ состоит из независимых одинаковых распределенных векторов и $P(X_0 \in B) \neq 0$.

Заметим, что $\{\tau = 0\} = \{X_0 \in B\} \in \mathcal{F}_0$. При каждом $n \in \mathbb{N}$

$$\{\tau = n\} = \{X_0 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n, \quad (102)$$

поскольку $\{X_m \in C\} \in \mathcal{F}_m$ для любого борелевского множества C и любого $m \in \mathbb{N}$ ($\{X_m \notin B\} = \{X_m \in \bar{B}\}$), а $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$ при $0 \leq m \leq n$.

Если векторы X_0, X_1, \dots независимы и одинаково распределены, то из формулы (102) вытекает, что

$$P(\tau = n) = P(X_0 \notin B)^n (1 - P(X_0 \notin B)).$$

Поэтому для любого $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} P(X_\tau \in C) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_\tau \in C, \tau = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_0 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B, X_n \in C) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_0 \notin B)^n P(X_0 \in B \cap C) = \\ &= \frac{P(X_0 \in B \cap C)}{1 - P(X_0 \notin B)} = \frac{P(X_0 \in B \cap C)}{P(X_0 \in B)} = P(X_0 \in C | X_0 \in B). \end{aligned}$$

Пример 41. Пусть τ_1, τ_2, \dots — марковские моменты относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$. Покажем, что величины

$$\max_{k=1, \dots, n} \tau_k, \quad \min_{k=1, \dots, n} \tau_k, \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \tau_k, \quad \inf_{k \in \mathbb{N}} \tau_k$$

также являются марковскими моментами.

Возьмем произвольное $t \in T$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\{ \max_{k=1, \dots, n} \tau_k \leq t \right\} &= \bigcap_{k=1}^n \{\tau_k \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \\ \left\{ \min_{k=1, \dots, n} \tau_k > t \right\} &= \bigcap_{k=1}^n \{\tau_k > t\} \in \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

Аналогично рассматриваются счетные наборы марковских моментов.

Пример 42. Пусть W — винеровский процесс, введем $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : W(t) = a\}$, где a — константа. Покажем,

что τ_a — момент остановки (т.е. конечный п.н. марковский момент) относительно естественной фильтрации W .

Для $t \geq 0$ в силу непрерывности траекторий W имеем

$$\{\tau_a \leq t\} = \{\sup_{s \in [0,t]} W(s) \geq a\} = \bigcup_{s \in Q \cap [0,t]} \{W(s) \geq a\} \in \mathcal{F}_t,$$

где Q — множество рациональных чисел. Из закона повторного логарифма (теорема 13 главы 4) немедленно вытекает соотношение $\tau_a < \infty$ п.н. Доказательство, не использующее закон повторного логарифма, можно прочитать в [2, с. 87]. Заметим, что верно более общее утверждение следующего упражнения.

Упражнение 91*. Пусть $X = \{X(t), t \geq 0\}$ — процесс с непрерывными траекториями, принимающий значения в некотором метрическом пространстве S . Для замкнутого подмножества $B \subset S$ (в частности, одноточечного) обозначим $\tau := \inf\{t \geq 0 : X(t) \in B\}$. Доказать, что τ — марковский момент относительно естественной фильтрации X .

Упражнение 92*. Пусть процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ имеет п.н. непрерывные справа траектории. Доказать, что если C — открытое множество, то $\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t \in C\}$ — опциональный момент, т.е. $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ при каждом $t \geq 0$ (считаем $\tau = \infty$, если $X_t \notin C$ при всех $t \geq 0$).

Упражнение 93*. Пусть τ — момент остановки относительно естественной фильтрации винеровского процесса. Проверить, что процесс

$$Y = \{Y(t) = W(t + \tau) - W(\tau), t \geq 0\},$$

где W — винеровский процесс, является винеровским (на события, имеющем вероятность нуль, где $\tau = \infty$, полагаем $Y(t) = 0$ при всех $t \geq 0$).

Упражнение 94. Пусть τ и σ — марковские моменты относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$. Определим

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Аналогично вводится \mathcal{F}_σ . Доказать, что \mathcal{F}_τ является σ -алгеброй, причем $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$, если $\tau \leq \sigma$.

Пример 43. Пусть τ — момент остановки относительно естественной фильтрации процесса $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$. Покажем, что функция $X_\tau : \omega \rightarrow X_{\tau(\omega)}(\omega)$ является \mathcal{F}_τ -измеримой случайной величиной.

Для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ имеем

$$\{X_\tau \in B\} = \bigcup_{k \geq 0} \{X_\tau \in B, \tau = k\} = \bigcup_{k \geq 0} \{X_k \in B, \tau = k\}.$$

Кроме того, для любых целых $k, n \geq 0$ верно соотношение

$$\begin{aligned} \{X_k \in B, \tau = k\} \cap \{\tau \leq n\} &= \\ &= \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F}_n, & n < k, \\ \{X_k \in B, \tau = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n, & n \geq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, $\{X_\tau \in B\} \in \mathcal{F}_\tau$, что и требовалось показать.

Пример 44. Пусть $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — фильтрация, а τ — марковский момент (относительно \mathbb{F}). Докажем, что $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_n$ на событии $\{\tau = n\}$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$, т.е.

$$\mathcal{F}_\tau \cap \{\tau = n\} = \mathcal{F}_n \cap \{\tau = n\}.$$

Если $A \in \mathcal{F}_n \cap \{\tau = n\}$, то $A = C \cap \{\tau = n\}$, где $C \in \mathcal{F}_n$. Поскольку $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ при $n \in \mathbb{Z}_+$, то для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$A \cap \{\tau = m\} = \begin{cases} A \cap \{\tau = n\} = C \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, & m = n, \\ \emptyset \in \mathcal{F}_n, & m \neq n. \end{cases}$$

Значит, $A \in \mathcal{F}_\tau$. Если же $A \in \mathcal{F}_\tau \cap \{\tau = n\}$, то $A = D \cap \{\tau = n\}$, где $D \in \mathcal{F}_\tau$. Учитывая, что τ — марковский момент, получаем $D \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$, и этим завершается доказательство.

Упражнение 95. Привести пример фильтрации и такой случайной величины, которая не будет марковским моментом относительно этой фильтрации.

5.3. Примеры мартингалов, субмартингалов, супермартингалов

Определение 26. Случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}$, где $T \subset \mathbb{R}$, называется *мартингалом относительно фильтрации* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, если

- 1) $X_t \in \mathcal{F}_t | \mathcal{B}(\mathbb{R})$ при всех $t \in T$;
- 2) $E|X_t| < \infty$ при каждом $t \in T$;
- 3) $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ для любых $s \leq t$, $s, t \in T$.

Если выполнено условие 1 данного определения, то говорят, что процесс X *согласован* с фильтрацией \mathbb{F} (тогда часто пишут $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$). Такой процесс при $T \subset \mathbb{Z}$ именуют *стохастической последовательностью*. Если сказано просто, что процесс X — мартингал, то имеется в виду его естественная фильтрация.

Когда процесс X удовлетворяет условиям 1 и 2, а вместо 3 справедливо неравенство $E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$ для любых $s \leq t$, где $s, t \in T$, то X называется *субмартингалом*. Если же $E(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$, то X — *супермартингал*. Очевидно, X является супермартингалом тогда и только тогда, когда процесс $-X = \{-X_t, t \in T\}$ — субмартингал.

Пример 45. Пусть U — интегрируемая случайная величина, $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ — некоторая фильтрация. Тогда $(E(U | \mathcal{F}_t), \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ — мартингал, называемый *мартингалом Леви*.

Действительно, выполнены все три условия, содержащиеся в определении мартингала (первое требование, очевидно, справедливо), поскольку $E|E(U | \mathcal{F}_t)| \leq E|U| | \mathcal{F}_t) = E|U| < \infty$ для $t \in T$, а при $s \leq t$ ($s, t \in T$) имеем

$$E(E(U | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_s) = E(U | \mathcal{F}_s).$$

Пример 46. Пусть X_1, X_2, \dots — последовательность независимых случайных величин с нулевым средним, $S_0 = 0$ и $S_n = X_1 + \dots + X_n$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — мартингал относительно естественной фильтрации этой последовательности.

Поскольку $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, то $E(S_1 | \mathcal{F}_0) = ES_1 = 0 = S_0$. Для $n \in \mathbb{N}$ имеем $\mathcal{F}_n = \sigma\{S_0, \dots, S_n\} = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$ и
 $E(S_n | \mathcal{F}_m) = E(S_n - S_m + S_m | \mathcal{F}_m) = E(S_n - S_m) + S_m = S_m$.

Упражнение 96. Проверить, что винеровский процесс $W = \{W(t), t \geq 0\}$ — мартингал. Будет ли мартингалом пуассоновский процесс интенсивности λ ?

Задача 40. Найти все $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что процесс

$$X = \{X(t) := \exp\{aW(t) + bt\}, t \geq 0\}$$

является мартингалом относительно естественной фильтрации винеровского процесса W .

Для $0 \leq s \leq t$ запишем $E(\exp\{aW(t) + bt\} | \mathcal{F}_s)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} E(\exp\{a(W(t) - W(s)) + aW(s) + bt\} | \mathcal{F}_s) &= \\ &= \exp\{aW(s) + bs\} \exp\{b(t-s)\} E(\exp\{a(W(t) - W(s))\}) = \\ &= X(s) \exp\{b(t-s)\} E(\exp\{a(W(t) - W(s))\}). \end{aligned}$$

Поскольку $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$,

$$\begin{aligned} E(\exp\{a(W(t) - W(s))\}) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{ax} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(t-s)}\right\} dx = \\ &= \exp\left\{\frac{a^2(t-s)}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что процесс X согласован с фильтрацией и все X_t интегрируемы. Следовательно, X является мартингалом тогда и только тогда, когда $b = -\frac{a^2}{2}$.

Пример 47. Покажем, что $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — мартингал в том и только том случае, когда $E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ для $n = 2, 3, \dots$

Необходимость условия очевидна. Проверим достаточность. Для любых $1 \leq m \leq n$ имеем

$$E(X_n | \mathcal{F}_m) = E(E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) | \mathcal{F}_m) = E(X_{n-1} | \mathcal{F}_m) = \dots =$$

$$= \mathbb{E}(X_{m+1} | \mathcal{F}_m) = X_m.$$

Пример 48. Пусть X_1, X_2, \dots — независимые случайные величины, принимающие значения 1 и -1 соответственно с вероятностями p и $q = 1 - p$. Положим $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Введем $Y_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — мартингал.

Действительно, пользуясь измеримостью величины $(q/p)^{S_{n-1}}$ относительно σ -алгебры \mathcal{F}_{n-1} и независимостью X_n от той же σ -алгебры, получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \left(\frac{q}{p}\right)^{X_n} | \mathcal{F}_{n-1}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}\right) = \\ &= Y_{n-1} \left(\left(\frac{q}{p}\right) \cdot p + \left(\frac{q}{p}\right)^{-1} \cdot q \right) = Y_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Пример 49. Пусть $X = \{X(t), t \geq 0\}$ — процесс с независимыми приращениями такой, что для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$ и всех $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E} \exp\{\alpha X(t)\} < \infty, \quad \mathbb{E} \exp\{\alpha(X(t) - X(s))\} < \infty.$$

Тогда процесс $Z = \{Z(t) := \exp\{\alpha X(t) + \beta t + \gamma\}, t \geq 0\}$ является мартингалом в том и только том случае, если для всех $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E} \exp\{\alpha(X(t) - X(s))\} = \exp\{-\beta(t-s)\}. \quad (103)$$

Случай $\alpha = 0$ тривиален (Z не является мартингалом, если $\beta \neq 0$). Поэтому далее $\alpha \neq 0$, тогда естественная фильтрация процесса Z совпадает с естественной фильтрацией процесса X в силу примера 39. Аналогично задаче 40 находим

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z(t) | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(\exp\{\alpha X(t) + \beta t + \gamma\} | \mathcal{F}_s) = \\ &= Z(s) \mathbb{E}(\exp\{\alpha(X(t) - X(s)) + \beta(t-s)\}), \end{aligned}$$

откуда вытекает требуемый результат.

Пример 50. Пусть U — процесс, задаваемый формулой (85) в задаче 28. Убедимся, что процесс $Z = \{Z(t) = \exp\{vU(t) - h(v)t, t \geq 0\}$ является мартингалом при подходящем выборе функции $h = h(v)$.

Согласно задаче 28 процесс U имеет независимые приращения. Пользуясь счетной аддитивностью интеграла Лебега, независимостью приращений процесса N , а также независимостью N и $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$, получаем для $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp\{v(U(t) - U(s))\} &= \\ &= \sum_{k,m=1}^{\infty} \mathbb{E} \exp\{v(U(t) - U(s))\} \mathbb{I}_{\{N(s)=k, N(t)-N(s)=m\}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda(t-s))^m}{m!} e^{-\lambda(t-s)} \mathbb{E} \exp \left\{ v \sum_{j=k+1}^{k+m} \xi_j \right\} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda(t-s))^m}{m!} e^{-\lambda(t-s)} (\mathbb{E} \exp\{v\xi_1\})^m = \\ &= e^{-\lambda(t-s)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda(t-s) \mathbb{E} \exp\{v\xi_1\})^m}{m!} = \\ &= e^{-\lambda(t-s)} \exp\{\lambda(t-s) \mathbb{E} \exp\{v\xi_1\}\} = \\ &= \exp\{(t-s)\lambda(\mathbb{E} \exp\{v\xi_1\} - 1)\}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\alpha = v$ и $\beta = -\lambda(\mathbb{E} \exp\{v\xi_1\} - 1)$ выполнено (103).

Итак, при любом $v \neq 0$ процесс

$$Z(t) := \exp\{vU(t) - t\lambda(\mathbb{E} \exp\{v\xi_1\} - 1)\}, \quad t \geq 0,$$

является мартингалом (относительно своей естественной фильтрации, совпадающей с фильтрацией процесса U согласно примеру 39).

Упражнение 97. Пусть $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ — мартингал, а σ -алгебры \mathcal{G}_t образуют фильтрацию и $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ при $t \in T$. Является ли мартингалом $(X_t, \mathcal{G}_t)_{t \in T}$? Верно ли, что если процесс

X — мартингал относительно некоторой фильтрации, то и относительно своей естественной фильтрации X — мартингал?

Упражнение 98. Пусть $X = \{X(t), t \in T \subset \mathbb{R}\}$ — мартингал относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, $t_0 < t_1 < \dots$ — возрастающая последовательность точек из T . Показать, что тогда $(X(t_n))_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — мартингал относительно фильтрации $(\mathcal{F}_{t_n})_{n \in \mathbb{Z}_+}$.

Очень полезный механизм получения субмартингалов описывает

Лемма 5. Пусть $X = \{X(t), t \geq 0\}$ — мартингал относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, h — выпуклая функция на \mathbb{R} . Тогда процесс $Y = \{Y(t) = h(X(t)), t \geq 0\}$ — субмартингал относительно той же фильтрации.

В частности, если S_n — суммы, рассматривавшиеся в примере 46, то $|S_n|$ — субмартингал относительно той же самой фильтрации $\sigma\{X_1, \dots, X_n\}, n \in \mathbb{N}$.

Справедливость леммы немедленно следует из справедливости неравенства Йенсена и для условного математического ожидания. В самом деле, при $t \geq s$

$$Y(s) := h(X(s)) = h(\mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_s)) \leq \mathbb{E}(h(X(t))|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(Y(t)|\mathcal{F}_s).$$

Упражнение 99*. Доказать, что мартингал $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ равномерно интегрируем (см. определение 7) в том и только том случае, когда он является мартингалом Леви, т.е. $X_n = \mathbb{E}(Y|\mathcal{A}_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, Y — интегрируемая случайная величина, $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — некоторая фильтрация.

Упражнение 100 (сравн. с упр. 99). Пусть η_1, η_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $P(\eta_1 = 0) = P(\eta_2 = 2) = 1/2$. Определим

$$X_n = \prod_{k=1}^n \eta_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Проверить, что последовательность $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — мартингал, который не обладает свойством равномерной интегрируемости.

5.4. Свойства мартингалов

Напомним важную теорему Дуба об остановке (см., напр., [2, с. 116]).

Теорема 17. Пусть $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — стохастическая последовательность, причем $\mathbf{E}|X_n| < \infty$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда эквивалентны условия (знак (\geq) для субмартингалов):

- 1) X — мартингал (субмартингал);
- 2) $\mathbf{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = (\geq) X_{\tau \wedge \sigma}$ для ограниченного марковского момента τ и произвольного марковского момента σ ;
- 3) $\mathbf{E}X_\tau = (\geq) \mathbf{E}X_\sigma$ для любых ограниченных марковских моментов τ и σ (т.е. $\tau \leq k$ и $\sigma \leq k$ для некоторого числа $k \in \mathbb{N}$) таких, что $\tau \geq \sigma$ п.н.

Пример 51. Пусть $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — мартингал. Если τ — момент остановки и $|X_{\tau \wedge n}| \leq c$ п.н. для некоторой константы c и всех $n \in \mathbb{Z}_+$, то существует $\mathbf{E}X_\tau$ и $\mathbf{E}X_\tau = \mathbf{E}X_0$.

Полагаем, $X_\tau = 0$ на событии $\{\tau = \infty\}$, имеющем вероятность нуль. Имеем $X_{\tau \wedge n} \rightarrow X_\tau$ п.н. при $n \rightarrow \infty$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости (см. теорему 2 и замечание 3) получаем, что величина X_τ интегрируема и $\mathbf{E}X_\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}X_{\tau \wedge n}$. Однако $\tau \wedge n$ — марковский момент в силу примера 41, причем $\tau \wedge n \leq n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\mathbf{E}X_{\tau \wedge n} = \mathbf{E}X_0$. Поэтому $\mathbf{E}X_\tau = \mathbf{E}X_0$.

Задача 41. Показать, как с помощью теоремы Дуба вычисляется вероятность разорения игрока (в отличие от задачи 8 блуждание рассматривается в полосе от a до b).

Пусть $p \neq q$. Согласно примеру 48 последовательность $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, где $Y_n = (q/p)^{S_n}$, является мартингалом. Обозначим τ момент первого выхода случайного блуждания S_n ($n \in \mathbb{Z}_+$, $S_0 = x \in \mathbb{Z}$, $x \in (a, b)$) из полосы, ограниченной на плоскости (t, y) прямыми $y = a$ и $y = b$, т.е. $\tau = \inf\{n \geq 0 : S_n \notin (a, b)\}$. Мы видели, что τ — марковский момент (задача 39), причем $|S_{\tau \wedge n}| \leq c_0 := (|a| \vee |b|)$. Таким образом, и $|Y_{\tau \wedge n}| \leq c := (q/p)^{c_0} \vee (q/p)^{-c_0}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\mathbf{E}Y_\tau = \mathbf{E}Y_0 = (q/p)^x.$$

При этом

$$\mathbb{E}Y_\tau = (q/p)^a \mathbb{P}(S_\tau = a) + (q/p)^b \mathbb{P}(S_\tau = b).$$

Учитывая, что $\mathbb{P}(S_\tau = a) + \mathbb{P}(S_\tau = b) = 1$, приходим к ответу

$$\mathbb{P}(S_\tau = a) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^b}{(q/p)^a - (q/p)^b}.$$

Случай, когда $p = q = 1/2$ мы рассмотрим далее после установления следующего результата.

Лемма 6 (первое тождество Вальда). *Пусть Y_1, Y_2, \dots — последовательность независимых одинаково распределенных интегрируемых величин ($\mathbb{E}|Y_i| < \infty$), τ — интегрируемый марковский момент относительно естественной фильтрации $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Положим $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}\tau \mathbb{E}Y_1.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|S_\tau| &= \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} |S_\tau| \mathbb{I}_{\{\tau=n\}} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|S_n| \mathbb{I}_{\{\tau=n\}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}|Y_j| \mathbb{I}_{\{\tau=n\}} = \\ &= \mathbb{E}|Y_1| \mathbb{I}_{\{\tau=1\}} + \mathbb{E}|Y_1| \mathbb{I}_{\{\tau=2\}} + \mathbb{E}|Y_2| \mathbb{I}_{\{\tau=2\}} + \\ &\quad + \mathbb{E}|Y_1| \mathbb{I}_{\{\tau=3\}} + \mathbb{E}|Y_2| \mathbb{I}_{\{\tau=3\}} + \mathbb{E}|Y_3| \mathbb{I}_{\{\tau=3\}} + \dots \end{aligned}$$

Учитывая, что неотрицательные числа можно суммировать в любом порядке, и переходя от суммирования по строкам к суммированию по столбцам, получаем

$$\mathbb{E}|S_\tau| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|Y_n| \mathbb{I}_{\{\tau \geq n\}} = \mathbb{E}|Y_1| \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau \geq n) = \mathbb{E}|Y_1| \mathbb{E}\tau < \infty,$$

где мы воспользовались тем, что событие $\{\tau \geq n\} = \Omega \setminus \{\tau \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$, а Y_n (следовательно, и $|Y_n|$) не зависит от \mathcal{F}_{n-1} . Поэтому

$$\mathbb{E}|Y_n| \mathbb{I}_{\{\tau \geq n\}} = \mathbb{E}|Y_n| \mathbb{E}\mathbb{I}_{\{\tau \geq n\}} = \mathbb{E}|Y_n| \mathbb{P}(\tau \geq n) = \mathbb{E}|Y_1| \mathbb{P}(\tau \geq n).$$

Кроме того, для величины τ со значениями в \mathbb{N} легко показать (меняя порядок суммирования, как было сделано выше), что

$$\mathbf{E}\tau = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau \geq n).$$

Из доказанного следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n Y_j \mathbb{I}_{\{\tau=n\}}$$

сходится абсолютно с вероятностью единица. Почленно интегрируя этот ряд и действуя по аналогии с процедурой оценивания $\mathbf{E}|S_\tau|$, устанавливаем требуемый результат для $\mathbf{E}S_\tau$.

Обратимся вновь к задаче 41, когда $p = q = 1/2$. Без потери общности можем считать начальный капитал x равным нулю, а вместо границ a и b рассматривать соответственно $a - x$ и $b - x$. Применив первое тождество Вальда в случае, когда $\tau = \inf\{n \geq 1 : S_n \notin (a - x, b - x)\}$, получаем

$$\mathbf{E}S_\tau = \mathbf{E}X_1 \mathbf{E}\tau = 0.$$

Отсюда

$$(a - x)P(S_\tau = a - x) + (b - x)P(S_\tau = b - x) = 0.$$

Учитывая равенство $P(S_\tau = a - x) + P(S_\tau = b - x) = 1$, находим

$$P(S_\tau = a - x) = \frac{b - x}{b - a}.$$

Упражнение 101. Продемонстрируйте, что условия теоремы Дуба существенны в том смысле, что не всегда для маргингала $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ и моментов остановки τ, σ справедливо равенство $\mathbf{E}X_\tau = \mathbf{E}X_\sigma$.

Пример 52. Покажем, что требование ограниченности марковских моментов τ и σ в пункте 3 теоремы Дуба не является необходимым.

Рассмотрим независимые одинаково распределенные центрированные величины $X_n, n \in \mathbb{N}$. Согласно задаче 39 марковским моментом относительно естественной фильтрации

$(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ последовательности $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ является величина $\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \in B\}$, где $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, причем

$$\mathbb{P}(\tau = n) = (1 - \mathbb{P}(X_0 \in B))^n \mathbb{P}(X_0 \in B), n \in \mathbb{Z}_+.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = n) = 1.$$

Таким образом, $\tau < \infty$ п.н., более того, $\mathbb{E}\tau < \infty$, однако нет константы, ограничивающей τ п.н..

Взяв теперь величины X_1, X_2, \dots , принимающие значения 1 и -1 с вероятностью 1/2, обозначим $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ для $n \in \mathbb{N}$. В силу тождества Вальда при $\mathbb{E}X_1 = 0$ получаем $\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}\tau \mathbb{E}X_1 = 0 = \mathbb{E}S_0$, хотя (интегрируемый) марковский момент τ не ограничен какой-либо положительной константой.

Пример 53. Получим мартингальными методами результат задачи 15. Мы сразу будем предполагать, что $c > \lambda a$, где $a = \mathbb{E}\xi_1 > 0$, поскольку это обеспечит единственность корня R соответствующего уравнения (73).

Определим функцию $h(v) = \lambda(g(v) - 1) - cv$, где $g(v) = \mathbb{E}\exp\{v\xi_1\}$, $v \in \mathbb{R}$. Примеры 49 и 50 показывают, что мартингалом является процесс

$$Z(t) = \exp\{-vY(t) - th(v)\}, \quad t \geq 0,$$

здесь $v > 0$, $Y(t) = y + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} \xi_j$, а N — пуассоновский процесс, не зависящий от $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

В силу упр. 92 величина τ (момент разорения) есть опциональный момент, поскольку это есть момент первого попадания càdlàg-процесса Y в открытое множество $(-\infty, 0)$. Легко видеть, что таковым является и $t \wedge \tau$ для каждого $t \geq 0$. Заметим, что $\sigma = 0$ — тоже опциональный момент, причем $0 \leq t \wedge \tau \leq t$. Приближенные опциональные моменты марковскими и принимая во внимание п.н. непрерывность справа траекторий процесса Z , нетрудно показать, что

$$\mathbb{E}Z(0) = \mathbb{E}Z(t \wedge \tau), \quad t \geq 0. \tag{104}$$

Точнее говоря, мы воспользовались следующим утверждением (см. [2, с. 129]).

Лемма 7. *Пусть $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ — мартингал, имеющий п.н. непрерывные справа траектории. Пусть σ и τ — опционные моменты относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ такие, что $\sigma \leq \tau \leq C$ п.н., где C — положительная константа. Тогда $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_\sigma$ (на множествах $\{\sigma = \infty\}$ и $\{\tau = \infty\}$, имеющих вероятность нуль, полагаем $X_\sigma = X_\tau = 0$).*

Теперь дальнейшее доказательство завершается очень быстро. А именно, учитывая, что траектории Y непрерывны справа, имеем $Y(\tau) \leq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \exp\{-vy\} &= \mathbb{E}Z(0) = \mathbb{E}Z(t \wedge \tau) \geq \\ &\geq \mathbb{E}\exp\{-vY(t \wedge \tau) - (t \wedge \tau)h(v)\}\mathbb{I}_{\{\tau \leq t\}} \geq \\ &\geq \mathbb{E}\exp\{-vY(\tau) - \tau h(v)\}\mathbb{I}_{\{\tau \leq t\}} \geq \mathbb{E}\exp\{-\tau h(v)\}\mathbb{I}_{\{\tau \leq t\}} \geq \\ &\geq \inf_{s \in [0, t]} \exp\{-sh(v)\}\mathbb{P}(\tau \leq t). \end{aligned}$$

Следовательно, для $v \geq 0$ и $t \geq 0$ имеем

$$\mathbb{P}(\tau \leq t) \leq \exp\{-vy\} \sup_{s \in [0, t]} \exp\{sh(v)\}.$$

Убедимся, что можно выбрать $v = R$ таким образом, что $h(R) = 0$. Тогда при каждом $t \geq 0$ будет верно неравенство $\mathbb{P}(\tau \leq t) \leq \exp\{-Ry\}$. Переходя в нем к пределу при $t \rightarrow \infty$, мы выведем (74).

Покажем, что искомое R существует и единственno. Очевидно, $h'(v) = \lambda g'(v) - c$. Значит, $h'(0) = \lambda a - c < 0$, так как $c > \lambda a$. Кроме того, $h''(v) = \lambda g''(v) \geq \lambda \mathbb{E}\xi_1^2 > 0$ для всех $v \geq 0$, поскольку $g''(v) = \mathbb{E}\xi_1^2 \exp\{v\xi_1\}$ и $0 < a^2 = (\mathbb{E}\xi_1)^2 \leq \mathbb{E}(\xi_1)^2$ по неравенству Коши–Буняковского–Шварца. Принимая во внимание условия $h(0) = 0$, $h'(0) < 0$ и учитывая неравенство $h''(v) \geq \lambda a^2$ при всех $v \geq 0$, видим, что решение уравнения $h(R) = 0$ находится однозначно.

Глава 6. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

6.1. Определение марковского процесса. Примеры

Определение 27. Процесс $X = \{X_t, t \in T\}$ (со значениями в \mathbb{R}), где $T \subset \mathbb{R}$, называется марковским, если для каждого $n \in \mathbb{N}$, любых $t_1 < \dots < t_n < s < t$ (все точки берутся из T) и произвольного борелевского множества B верно равенство

$$\mathsf{P}(X_t \in B | X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, X_s) = \mathsf{P}(X_t \in B | X_s). \quad (105)$$

Это определение показывает, что при фиксированном “настоящем” (берется значение процесса в момент s) будущее поведение процесса, т.е. значение в момент $t > s$, не зависит от “прошлого”, а именно, от того, какие значения процесс принимал до момента s .

Упражнение 102. Докажите, что данное выше определение равносильно следующему: для каждого $n \in \mathbb{N}$, любых $t_1 < \dots < t_n < s < t$ (все точки берутся из T) и произвольной ограниченной борелевской функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathsf{E}(f(X_t) | X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, X_s) = \mathsf{E}(f(X_t) | X_s). \quad (106)$$

Широкий класс примеров марковских процессов дает (см. [2, с. 186])

Теорема 18. Пусть $X = \{X_t, t \in T \subset \mathbb{R}\}$ — процесс с независимыми приращениями. Тогда X — марковский процесс.

В частности, марковскими являются винеровский процесс и пуассоновский процесс (интенсивности λ). Кроме того, марковским является процесс случайного блуждания $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ($n \in \mathbb{N}$), где X_1, X_2, \dots — независимые случайные величины.

Упражнение 103*. Пусть $\tau_x = \inf\{t \geq 0 : W(t) = x\}$ для $x > 0$ и $\tau_0 = 0$. Требуется показать, что процесс $\{\tau_x, x \geq 0\}$ имеет независимые приращения, а следовательно, марковский.

Пример 54. Пусть $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — взаимно однозначное отображение. Если $X = \{X_t, t \in T\}$ — марковский процесс, то $Y = \{Y_t = h(X_t), t \in T\}$ — также марковский процесс.

Проверим (106). В силу взаимной однозначности отображения h имеем

$$\begin{aligned}\sigma\{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}, Y_s\} &= \sigma\{h(X_{t_1}), \dots, h(X_{t_n}), h(X_s)\} = \\ &= \sigma\{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, X_s\},\end{aligned}\quad (107)$$

поскольку для любых множеств $B_1, \dots, B_{n+1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\{(h(X_{t_1}) \in B_1, \dots, h(X_{t_n}) \in B_n, h(X_s) \in B_{n+1}) &= \\ &= \{X_{t_1} \in h^{-1}(B_1), \dots, X_{t_n} \in h^{-1}(B_n), X_s \in h^{-1}(B_{n+1})\}.\end{aligned}$$

Кроме того, $f \circ h$ — борелевская функция как суперпозиция двух борелевских функций, причем $f \circ h$ ограничена, так как ограничена f . Следовательно, в силу (107)

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(f(Y_t)|Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}, Y_s) &= \mathsf{E}(f(h(X_t))|X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, X_s) = \\ &= \mathsf{E}(f(h(X_t))|X_s) = \mathsf{E}(f(Y_t)|Y_s).\end{aligned}$$

Убедимся, что условие взаимной однозначности h в примере 54 существенно. При этом мы построим пример немарковского процесса.

Пример 55. Пусть X_0, X_1, \dots — независимые одинаково распределенные величины, причем

$$\mathsf{P}(X_0 = 1) = p > 0, \quad \mathsf{P}(X_0 = -1) = q > 0, \quad p + q = 1.$$

Положим $S_n = X_0 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Возьмем $h(x) = x^+ = \max\{x, 0\}$, $x \in \mathbb{R}$. Очевидно, $h(x_1) = h(x_2) = 0$ для любых $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$. Определим $Y_n = h(S_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Покажем, что $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ не образует марковский процесс.

Имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(Y_2 = 0|Y_0 = 0, Y_1 = 0) &= \\ &= \frac{\mathsf{P}(X_0^+ = 0, (X_0 + X_1)^+ = 0, (X_0 + X_1 + X_2)^+ = 0)}{\mathsf{P}(X_0^+ = 0, (X_0 + X_1)^+ = 0)}.\end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X_0^+ = 0, (X_0 + X_1)^+ = 0) &= \mathsf{P}(X_0 \leq 0, X_0 + X_1 \leq 0) = \\ &= \mathsf{P}(X_0 = -1, X_1 \leq 1) = \mathsf{P}(X_0 = -1) = q.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(X_0^+ = 0, (X_0 + X_1)^+ = 0, (X_0 + X_1 + X_2)^+ = 0) = \\
 & = \mathbb{P}(X_0 \leq 0, X_0 + X_1 \leq 0, X_0 + X_1 + X_2 \leq 0) = \\
 & = \mathbb{P}(X_0 = -1, X_1 \leq 1, X_1 + X_2 \leq 1) = \\
 & = \mathbb{P}(X_0 = -1, X_1 + X_2 \leq 1) = q\mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq 1) = \\
 & = q(\mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 \leq 2) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 \leq 0)) = \\
 & = q(q + pq) = q^2(1 + p).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}(Y_2 = 0 | Y_0 = 0, Y_1 = 0) = q(1 + p).$$

Теперь рассмотрим

$$\mathbb{P}(Y_2 = 0 | Y_1 = 0) = \frac{\mathbb{P}(X_0 + X_1 \leq 0, X_0 + X_1 + X_2 \leq 0)}{\mathbb{P}(X_0 + X_1 \leq 0)}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_0 + X_1 \leq 0) &= \mathbb{P}(X_0 = -1, X_1 \leq 1) + \mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 \leq -1) = \\
 &= \mathbb{P}(X_0 = -1) + \mathbb{P}(X_0 = 1)\mathbb{P}(X_1 = -1) = q + pq = q(1 + p).
 \end{aligned}$$

Нетрудно вычислить вероятность

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(X_0 + X_1 \leq 0, X_0 + X_1 + X_2 \leq 0) = \\
 & = \mathbb{P}(X_0 = -1, X_1 \leq 1, X_1 + X_2 \leq 1) + \\
 & \quad + \mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 \leq -1, X_1 + X_2 \leq -1) = \\
 & = \mathbb{P}(X_0 = -1)\mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq 1) + \mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = -1, X_2 \leq 0) = \\
 & = q^2(1 + p) + pq^2 = q^2(1 + 2p).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbb{P}(Y_2 = 0 | Y_1 = 0) = \frac{q(1 + 2p)}{(1 + p)}.$$

Поэтому соотношение

$$\mathbb{P}(Y_2 = 0 | Y_0 = 0, Y_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_2 = 0 | Y_1 = 0)$$

равносильно тому, что $(1 + p)^2 = 1 + 2p$, т.е. $p = 0$.

Вспоминая (см. пример 35), как выглядит условное математическое ожидание относительно σ -алгебры, порожденной разбиением, приходим к заключению, что

$$\mathbb{P}(Y_2 \in B | Y_0, Y_1) \neq \mathbb{P}(Y_2 \in B | Y_1),$$

где $B = \{0\}$. Итак, при любом $p \in (0, 1)$ процесс Y не является марковским.

Упражнение 104. Пусть X_0, X_1, \dots — случайная последовательность ($T = \mathbb{Z}_+$). Покажите, что свойство марковости равносильно тому, что при всех $n \in \mathbb{N}$ и любой ограниченной борелевской функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1}) | X_0, \dots, X_n) = \mathbb{E}(f(X_{n+1}) | X_n).$$

Иначе говоря, в (106) достаточно рассматривать лишь один набор подряд идущих точек t_1, \dots, t_n и s .

Упражнение 105. Пусть X_0, X_1, \dots — последовательность независимых случайных величин. Для $n = 0, 1, \dots$ положим $M_0 = 0$ и $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} S_k$, где $S_k = X_0 + \dots + X_k$, $k \in \mathbb{N}$. Верно ли, что $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — марковский процесс?

Пример 56. Пусть $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность независимых случайных величин, $h_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — детерминированные борелевские функции ($n \in \mathbb{N}$) и X_0 — случайная величина, не зависящая от $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Зададим $X_n = h_n(X_{n-1}, \xi_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — марковский процесс.

Воспользуемся упражнением 104. В силу леммы 4 имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X_{n+1}) | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= \\ &= \mathbb{E}(f(h_{n+1}(X_n, \xi_{n+1})) | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \\ &= \mathbb{E}(f(h_{n+1}(x_n, \xi_{n+1}))). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1}) | X_n = x_n) = \mathbb{E}(f(h_{n+1}(x_n, \xi_{n+1}))).$$

Мы учили, что ξ_{n+1} не зависит от вектора X_0, \dots, X_n .

Если $X = \{X_t, t \in T\}$ — марковский процесс, то, очевидно, его сужение на множество $S \subset T$ также представляет собой

марковский процесс. Более тонким является вопрос о возможности продолжения марковского процесса с множества S на объемлющее множество T с сохранением свойства марковости. Ограничимся следующим примером, когда ответ положительный.

Пример 57. Пусть $X = \{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ — марковский процесс. Будет ли $Y = \{Y(t) = X_{[t]}, t \geq 0\}$, где $[\cdot]$ — целая часть числа, марковским процессом?

Проверим справедливость (106). Пусть множество $\{[t_1], [t_2], \dots, [t_n], [s], [t]\}$ содержит следующие различные целые числа: k_1, \dots, k_m , где $k_1 < \dots < k_m$. Рассмотрим отдельно два случая: 1) $[s] = [t]$, 2) $[s] < [t]$.

В первом случае $\sigma\{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}, Y_s\} = \sigma\{X_{k_1}, \dots, X_{k_m}\}$ (учли, что в порождающем σ -алгебру наборе случайных величин можно оставить только различные величины). Следовательно,

$E(f(Y_t)|Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}, Y_s) = E(f(X_{k_m})|X_{k_1}, \dots, X_{k_m}) = f(X_{k_m})$, так как величина $f(X_{k_m})$ измерима относительно рассматриваемой σ -алгебры. Аналогично

$$E(f(Y_t)|Y_s) = E(f(X_{k_m})|X_{k_m}) = f(X_{k_m}).$$

Во втором случае $\sigma\{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}, Y_s\} = \sigma\{X_{k_1}, \dots, X_{k_{m-1}}\}$. Поэтому в силу марковости процесса X

$$\begin{aligned} E(f(Y_t)|Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}, Y_s) &= E(f(X_{k_m})|X_{k_1}, \dots, X_{k_{m-1}}) = \\ &= E(f(X_{k_m})|X_{k_{m-1}}). \end{aligned}$$

При этом

$$E(f(Y_t)|Y_s) = E(f(X_{k_m})|X_{k_{m-1}}).$$

Таким образом, Y — марковский процесс.

Упражнение 106. Пусть $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — марковский процесс. Можно ли утверждать, что процесс $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$, где для $t \in (n, n+1)$ значение $Y(t)$ получается линейной интерполяцией значений X_n и X_{n+1} ($n \in \mathbb{Z}_+$) марковский?

Пример 58. Приведем примеры марковских процессов, которые являются мартингалами и которые мартингалами не являются.

Пусть $S_n = X_0 + \dots + X_n$, где X_0, X_1, \dots — независимые интегрируемые случайные величины. Процесс $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ является марковским в силу теоремы 18. Если $\mathbb{E}X_n = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$, то $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — мартингал (относительно естественной фильтрации) в силу примера 46. Если же $\mathbb{E}X_n \neq 0$, для некоторого $n \in \mathbb{Z}_+$, то $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ не образует мартингала.

Упражнение 107. Дать пример мартингала, не являющегося марковским процессом.

6.2. Марковские цепи

Важный подкласс марковских процессов составляют процессы с дискретным пространством значений (состояний), называемые *цепями Маркова*, или марковскими цепями. Мы будем считать, что эти состояния перенумерованы с помощью чисел $0, 1, \dots$. Таким образом, пространство S состояний (фазовое пространство) конечно или счетно. Обычно рассматривают *цепи Маркова* с *дискретным временем*, когда $T \subset \mathbb{Z}_+$ (как правило, $T = \mathbb{Z}_+$, реже $T = \{0, 1, \dots, m\}$), или с *непрерывным временем*, когда $T = [0, \infty)$ или $T = [a, b]$.

Пользуясь свойствами условного математического ожидания, определение марковской цепи $X = \{X(t), t \in T \subset \mathbb{R}\}$ можно записать следующим образом: для каждого $n \in \mathbb{N}$, произвольных $t_1 < \dots < t_n < s < t$ (все точки из T) и любых $i_1, \dots, i_n, i, j \in S$ верно равенство

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(t) = j | X(s) = i, X(t_n) = i_n, \dots, X(t_1) = i_1) &= \\ &= \mathbb{P}(X(t) = j | X(s) = i), \end{aligned} \quad (108)$$

если $\mathbb{P}(X(s) = i, X(t_n) = i_n, \dots, X(t_1) = i_1) \neq 0$. Последнее ограничение влечет неравенство $\mathbb{P}(X(s) = i) \neq 0$, поэтому левая и правая части (108) понимаются в самом элементарном смысле условных вероятностей (см. (5)).

Определение 28. Переходными вероятностями цепи Маркова $X = \{X(t), t \in T\}$ называются функции

$$p_{i,j}(s, t) := P(X(t) = j | X(s) = i), \quad (109)$$

заданные для $i, j \in S$, $s \leq t$ ($s, t \in T$), а ее начальным распределением — набор вероятностей

$$p_i(0) := P(X(0) = i), \quad i \in S. \quad (110)$$

Считаем $P(X(s) = i) \neq 0$ в (109), что не снижает общности (см. [2, с. 189]).

Пример 59. Найдем переходные вероятности пуассоновского процесса интенсивности $\lambda > 0$.

Напомним, что пуассоновский процесс $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — это, согласно определению 16, процесс с независимыми приращениями, а следовательно, марковский по теореме 18. Каждое из приращений имеет распределение Пуассона:

$$P(N(s+t) - N(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad s \geq 0, t > 0, k = 0, 1, \dots,$$

а $N(0) = 0$ с вероятностью 1.

Тогда при $t_1 < t_2 < \dots < t_n < s < t$ имеем

$$\begin{aligned} P(N(t) = j | N(t_1) = i_1, N(t_2) = i_2, \dots, N(s) = i) &= \\ &= \frac{P(N(t) = j, N(t_1) = i_1, N(t_2) = i_2, \dots, N(s) = i)}{P(N(t_1) = i_1, N(t_2) = i_2, \dots, N(s) = i)} = \\ &= \frac{P(A, N(t) - N(s) = j - i)}{P(A)}, \end{aligned}$$

где

$$A = \{N(t_1) = i_1, N(t_2) - N(t_1) = i_2 - i_1, \dots, N(s) - N(t_n) = i - i_n\}.$$

Поскольку приращения N независимы, интересующая нас условная вероятность равна $P(N(t) - N(s) = j - i)$. Итак,

$$p_{i,j}(s, t) = \begin{cases} \frac{(\lambda(t-s))^{j-i} e^{-\lambda(t-s)}}{(j-i)!}, & \text{если } j \geq i, \\ 0, & \text{если } j < i, \end{cases} \quad (111)$$

здесь $i, j \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq s < t$. Заметим, что аналогичные вычисления приводят к равенству

$$\mathsf{P}(N(t) = j | N(s) = i) = \mathsf{P}(N(t) - N(s) = j - i).$$

Поэтому марковость процесса N легко установить и без помощи теоремы 18.

Упражнение 108. Пусть величины X_1, \dots, X_N образуют цепь Маркова. Показать, что $(Y_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ — цепь Маркова, где $Y_k = X_{N-k}$, $k = 0, \dots, N-1$. Найти переходные вероятности этой цепи.

Определение 29. Марковская цепь $X = \{X(t), t \geq 0\}$ называется однородной, если для всех $i, j \in S$, $0 \leq s < t$ и $h \geq 0$

$$p_{i,j}(s, t) = p_{i,j}(s + h, t + h).$$

В силу (111) пуассоновский процесс интенсивности λ является однородной марковской цепью (с пространством состояний $S = \mathbb{Z}_+$). Очевидно, начальное распределение этого процесса сосредоточено в точке $\{0\}$, т.е. $p_i(0) = \delta_{i,0}$, где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Аналогично вводится однородная марковская цепь с дискретным временем, скажем, на $T = \mathbb{Z}_+$, только следует тогда указать, что в данном выше определении s, t и h берутся из \mathbb{Z}_+ . Далее мы рассматриваем цепи Маркова, являющиеся однородными, и вместо $p_{i,j}(s, t)$ пишем $p_{i,j}(t - s)$, когда $T = \mathbb{R}_+$ или $T = \mathbb{Z}_+$.

Пример 60. Выясним, какими свойствами обладают начальное распределение и набор переходных вероятностей однородной цепи с непрерывным временем.

Поскольку $p_i = p_i(0)$ — это вероятности, они неотрицательны, а так как события $A_i = \{\omega : X(0, \omega) = i\}$, для которых $\mathsf{P}(A_i) = p_i$, $i \in S$, образуют разбиение пространства Ω , то $\sum_{i \in S} p_i = 1$.

В силу аналогичных соображений для вероятностей перехода выполняются следующие соотношения:

- 1) $p_{i,j}(t) \geq 0, i, j \in S, t \geq 0;$
- 2) $\sum_{j \in S} p_{i,j}(t) = 1, i \in S, t \geq 0;$
- 3) $p_{i,j}(0) = \delta_{i,j}, i, j \in S;$
- 4) уравнение Колмогорова–Чепмена:

$$p_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{i,k}(s)p_{k,j}(t) \quad (112)$$

для любых $i, j \in S, s, t \geq 0$.

Это уравнение легко вывести из счетной аддитивности вероятности, формулы полной вероятности и определения цепи Маркова:

$$\begin{aligned} p_{i,j}(s+t) &= \sum_{k \in S} \frac{\mathbb{P}(X(s+t) = j, X(s) = k, X(0) = i)}{\mathbb{P}(X(0) = i)} = \\ &= \sum_{k \in S} \frac{\mathbb{P}(X(s+t) = j | X(s) = k, X(0) = i))\mathbb{P}(X(s) = k, X(0) = i)}{\mathbb{P}(X(0) = i)} = \\ &= \sum_{k \in S} p_{i,k}(s)p_{k,j}(t). \end{aligned}$$

Условие 4 показывает, что матрицы $P(t) = (p_{i,j}(t))_{i,j \in S}$ образуют однопараметрическую полугруппу, т.е.

$$P(s+t) = P(s)P(t) \quad s, t \geq 0,$$

причем $P(0) = I$ (единичная матрица).

Упражнение 109. Пусть марковская цепь $X_n, n \in \mathbb{Z}_+$, имеет переходную матрицу вероятностей за один шаг

$$P = P(1) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad (113)$$

здесь $0 < \alpha < 1$. Найти матрицу переходных вероятностей за n шагов, т.е. $P(n)$, где $n \in \mathbb{N}$.

Пример 61. Покажем, что конечномерные распределения цепи Маркова однозначно определяются начальным распределением и переходными вероятностями.

Действительно, для любых $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ и произвольных борелевских множеств $B_k \subset \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} P_{t_1, \dots, t_n}(B_1, \dots, B_n) &= P(X(t_1) \in B_1, \dots, X(t_n) \in B_n) = \\ &= \sum_{i_1 \in B_1} \dots \sum_{i_n \in B_n} P(X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n). \end{aligned} \quad (114)$$

В свою очередь, используя определение условной вероятности, а также определение марковской цепи, имеем

$$\begin{aligned} P(X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n) &= \\ &= P(X(t_n) = i_n | X(t_1) = i_1, \dots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}) \times \\ &\quad \times P(X(t_1) = i_1, \dots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}) = \\ &= P(X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}) \times \\ &\quad \times P(X(t_1) = i_1, \dots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}) = \\ &= P(X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}) \dots P(X(t_2) = i_2 | X(t_1) = i_1) \times \\ &\quad \times P(X(t_1) = i_1). \end{aligned} \quad (115)$$

Последнюю строку нагляднее прочитать справа налево:

$$P(X(t_1) = i_1) p_{i_1, i_2}(t_2 - t_1) \dots p_{i_{n-1}, i_n}(t_n - t_{n-1}), \quad (116)$$

что означает следующее. Система стартует из состояния i_1 в момент t_1 и совершает переходы по маршруту из i_1 в i_2 , затем из i_2 в i_3 и т.д., наконец, из i_{n-1} в i_n . При этом в момент t_k , $k = 2, \dots, n$, система находится в состоянии i_k . Так с учетом однородности цепи приходим к соотношению (116).

В силу формулы полной вероятности

$$P(X(t_1) = i_1) = \sum_{k \in S} p_k(0) p_{k, i_1}(t_1). \quad (117)$$

Подставляя (117) в (116), а затем получившееся выражение в (114), устанавливаем требуемый результат. Мы также учли, что вероятности вида

$$P((X(t_1), \dots, X(t_n)) \in C), \quad C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

однозначно определяются по $P_{t_1, \dots, t_n}(B_1, \dots, B_n)$, где $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $k = 1, \dots, n$.

С помощью теоремы Колмогорова о согласованных распределениях нетрудно выполнить

Упражнение 110. Пусть S — конечное или счетное множество и дан набор чисел $p_i(0) \geq 0$, $i \in S$, причем $\sum_{i \in S} p_i(0) = 1$.

Пусть также семейство функций $p_{i,j}(t)$, где $i, j \in S$ и $t \in T$ ($T = \mathbb{R}_+$ или $T = \mathbb{Z}_+$) удовлетворяет условиям 1–4, данным в примере 60. Тогда на некотором вероятностном пространстве можно построить марковскую цепь $X = \{X(t), t \in T\}$, для которой имеют место равенства (109) и (110).

Чтобы убедить читателя в легкости предложенного упражнения, заметим, что если бы искомый процесс X нашелся, то он обязан был бы иметь конечномерные распределения, описываемые функциями $P_{t_1, \dots, t_n}(B_1, \dots, B_n)$, заданными согласно (114)–(117). А согласованность этих функций проверяется непосредственно.

Упражнение 110 дает возможность определить пуассоновский процесс $N = \{N(t), t \geq 0\}$ интенсивности $\lambda > 0$ как марковскую цепь с пространством состояний $S = \mathbb{Z}_+$, начальным распределением, сосредоточенным в точке $\{0\}$, и переходными вероятностями вида (111).

Пример 62. Покажем, что так введенная марковская цепь N задает пуассоновский процесс в смысле определения 16.

Очевидно, $N(0) = 0$ п.н. Найдем распределение $N(t) - N(s)$ при $0 \leq s < t$. По формуле (4), учитывая (115), получаем

$$\begin{aligned} P(N(t) - N(s) = j) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(N(t) - N(s) = j, N(s) = i) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P(N(t) = i + j, N(s) = i, N(0) = 0) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{0,i}(s) p_{i,i+j}(t-s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^i}{i!} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda(t-s))^j}{j!} e^{-\lambda(t-s)} = \\ &= \frac{(\lambda(t-s))^j}{j!} e^{-\lambda(t-s)}. \quad (118) \end{aligned}$$

Проверим независимость приращений. Возьмем

$$n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n, \quad i_0, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}.$$

В силу (115) и (118) имеем

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(N(t_0) = i_0, N(t_1) - N(t_0) = i_1, \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = i_n) &= \\ &= \mathsf{P}(N(0) = 0, N(t_0) = i_0, N(t_1) = i_0 + i_1, \dots \\ &\quad \dots, N(t_n) = i_0 + \dots + i_n) = \\ &= p_{0, i_0}(t_0) p_{i_0, i_0+i_1}(t_1 - t_0) \dots p_{i_0+\dots+i_{n-1}, i_0+\dots+i_n}(t_n - t_{n-1}) = \\ &= \mathsf{P}(N(t_0) = i_0) \mathsf{P}(N(t_1) - N(t_0) = i_1) \times \dots \\ &\quad \dots \times \mathsf{P}(N(t_n) - N(t_{n-1}) = i_n), \end{aligned}$$

что и требовалось показать, принимая во внимание упражнение 27.

6.3. Эргодическая теорема

Очень важное свойство цепи Маркова $X = \{X(t), t \in T\}$, где $T = \mathbb{R}_+$ или $T = \mathbb{Z}_+$, заключается в следующем. За большой промежуток времени система (при весьма широких условиях) как бы “забывает”, из какого состояния она стартовала, что показывает (см., напр., [2, с. 196])

Теорема 19 (эргодическая). *Предположим, что найдется состояние $j_0 \in S$ такое, что $p_{i, j_0}(h) > \delta$ для некоторых $h > 0$, $\delta \in (0, 1)$ и любых $i \in S$. Тогда при всех $i, j \in S$ существуют*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,j}(t) =: \tilde{p}_j, \tag{119}$$

причем

$$|p_{i,j}(t) - \tilde{p}_j| \leq (1 - \delta)^{\lceil t/h \rceil}, \quad t > 0.$$

Упражнение 111. Проверьте, что если верны условия этой теоремы, то при всех $j \in S$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathsf{P}(X(t) = j) = \tilde{p}_j,$$

а также

$$|\mathsf{P}(X(t) = j) - \tilde{p}_j| \leq (1 - \delta)^{\lceil t/h \rceil}, \quad t > 0.$$

Упражнение 112. Докажите, что если выполнено (119), то при каждом $t > 0$ вектор-столбец $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots)$ является собственным вектором матрицы $P^T(t)$, отвечающим единичному собственному значению (T обозначает транспонирование). Другими словами, $P^T(t)\tilde{p} = \tilde{p}$ при каждом $t \geq 0$.

Упражнение 113. Убедитесь, что если имеет место (119), то либо $\sum_{j \in S} \tilde{p}_j = 1$, либо $\tilde{p}_j = 0$ при всех $j \in S$.

Когда $\sum_{j \in S} \tilde{p}_j = 1$, набор вероятностей \tilde{p}_j ($j \in S$) называется *стационарным распределением*. Смысл этого определения проясняет рассматриваемый в главе 7 пример 47. Здесь лишь заметим, что если в качестве начального распределения марковской цепи взять стационарное распределение, то оно не будет меняться во времени, т.е. $P(X(t) = j) = \tilde{p}_j$ при всех $t > 0$. Действительно, согласно упр. 112 имеем

$$P(X(t) = j) = \sum_{i \in S} p_i(0)p_{i,j}(t) = \sum_{i \in S} \tilde{p}_i p_{i,j}(t) = \tilde{p}_j. \quad (120)$$

Упражнение 114. Найти стационарное распределение для марковской цепи $X = \{X(n), n \in \mathbb{Z}_+\}$, имеющей матрицу переходных вероятностей $P(1)$, задаваемую формулой (113).

Упражнение 115. Рассмотрим модель, в рамках которой каждый член некоторой популяции может находиться в одном из трех состояний (например, принадлежать высшему, среднему или низшему слою общества в зависимости от годового дохода). Допустим, что каждый индивидуум через время Δt , равное календарному году, может случайно совершать переходы из состояния в состояние, а матрица вероятностей переходов за один такой шаг имеет вид

$$P = (p_{i,j})_{i,j=1}^3 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,15 & 0,05 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,15 & 0,8 \end{pmatrix}. \quad (121)$$

Пусть поведение каждого члена популяции не зависит от других и описывается цепью Маркова с дискретным временем

$(T = \mathbb{Z}_+)$. Если в момент времени $t = 0$ в состоянии i , где $i = 1, 2, 3$, находилось соответственно k_i членов популяции, то что можно сказать о распределении индивидуумов по состояниям через большой промежуток времени?

6.4. Дифференцируемость переходных вероятностей

Марковский характер развития процесса $X = \{X(t), t \geq 0\}$ (однородной цепи с непрерывным временем) приводит к тому, что его поведение фактически определяется начальным распределением и вероятностями переходов из состояния в состояние “за малое время”. Точнее говоря, как мы увидим в следующем пункте главы, при весьма широких условиях существуют правые производные в точке нуль у всех функций $p_{i,j}(t)$. Фактически всю эволюцию во времени процесса X определяют именно эти производные (и начальное распределение).

Определение 30. Однородная цепь Маркова $X = \{X(t), t \geq 0\}$ (а также ее матрица переходных вероятностей $P(t), t \geq 0$) называется *стандартной*, если $p_{i,j}(t) \rightarrow \delta_{i,j}$ при $t \rightarrow 0+$.

Очевидно, пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$ дает пример стандартной цепи.

Упражнение 116*. Построить пример нестандартной марковской цепи.

Наша дальнейшая цель — исследовать дифференцируемость переходных вероятностей.

Пример 63. Проверим, что для стандартной матрицы $P(t)$ при любом i существует

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - p_{i,i}(h)}{h} = - \frac{d^+}{dt} p_{i,i}(t)|_{t=0} \in [0, \infty].$$

Фиксируем произвольное $i \in S$ и вначале покажем, что $p_{i,i}(t) > 0$ при всех $t > 0$. В силу стандартности переходной матрицы существует такое $\varepsilon > 0$, что $p_{i,i}(t) > 0$ при $0 \leq t \leq \varepsilon$.

Многократное применение уравнения Колмогорова–Чепмена дает соотношение

$$p_{i,j}(t_1 + t_2 + \dots + t_n) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} p_{i,k_1}(t_1) p_{k_1, k_2}(t_2) \dots p_{k_n, j}(t_n).$$

Полагая $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{t}{n}$, $j = i$ и оставляя в правой части лишь члены, соответствующие $k_1 = k_2 = \dots = k_n = i$, приходим к неравенству

$$p_{i,i}(t) \geq \left[p_{i,i} \left(\frac{t}{n} \right) \right]^n.$$

При достаточно большом n имеем $\frac{t}{n} \leq \varepsilon$. Следовательно, $p_{i,i} \left(\frac{t}{n} \right) > 0$, а тем самым и $p_{i,i}(t) > 0$.

Для $t \geq 0$ введем $\varphi(t) = -\ln p_{i,i}(t)$. Это определение корректно, так как $p_{i,i}(t) > 0$. Из уравнения Колмогорова–Чепмена немедленно вытекает, что

$$p_{i,i}(t+s) \geq p_{i,i}(t)p_{i,i}(s), \quad s, t \geq 0.$$

Взяв логарифм от обеих частей, получим

$$\varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s), \quad s, t \geq 0.$$

Поскольку $0 < p_{i,i}(t) \leq 1$, то $\varphi(t) \geq 0$ при $t > 0$. Положим

$$q_i = \sup_{t>0} \frac{\varphi(t)}{t},$$

тогда $0 \leq q_i \leq \infty$. Если $q_i < \infty$, то существует такое $t_0 > 0$, для которого $q_i - \varepsilon \leq \frac{\varphi(t_0)}{t_0}$. Для любого $h > 0$ величину t_0 представим в виде $t_0 = nh + \delta$, где целое $n \geq 0$, $0 \leq \delta < h$. Величина $\varphi(t_0)$ допускает верхнюю оценку

$$\varphi(nh) + \varphi(\delta) \leq \varphi((n-1)h) + \varphi(h) + \varphi(\delta) \leq \dots \leq n\varphi(h) + \varphi(\delta).$$

Следовательно,

$$q_i - \varepsilon \leq \frac{\varphi(t_0)}{t_0} \leq \frac{n\varphi(h) + \varphi(\delta)}{t_0} = \frac{nh}{t_0} \cdot \frac{\varphi(h)}{h} + \frac{\varphi(\delta)}{t_0}.$$

Таким образом,

$$q_i - \varepsilon \leq \liminf_{h \rightarrow 0+} \left[\frac{nh}{t_0} \cdot \frac{\varphi(h)}{h} + \frac{\varphi(\delta)}{t_0} \right].$$

Но при $h \rightarrow 0+$ имеем $\left(\frac{nh}{t_0}\right) \rightarrow 1$, а $\varphi(\delta) \rightarrow 0$, поскольку $p_{i,i}(\delta) \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow 0+$. Отсюда

$$\liminf_{h \rightarrow 0+} \left[\frac{nh}{t_0} \cdot \frac{\varphi(h)}{h} + \frac{\varphi(\delta)}{t_0} \right] = \liminf_{h \rightarrow 0+} \frac{\varphi(h)}{h}.$$

Непосредственно из определения q_i вытекает, что

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{\varphi(h)}{h} \leq q_i.$$

В результате можно записать

$$q_i - \varepsilon \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} \leq \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} \leq q_i.$$

В силу произвольности ε имеем

$$\liminf_{h \rightarrow 0+} \frac{\varphi(h)}{h} = \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{\varphi(h)}{h} = q_i.$$

Если $q_i = \infty$, то вместо $q_i - \varepsilon$ можно взять достаточно большое M и получить, что $M \leq \liminf_{h \rightarrow 0+} \frac{\varphi(h)}{h}$. Таким образом,

$\liminf_{h \rightarrow 0+} \frac{\varphi(h)}{h} = \infty$. Значит, в любом случае существует

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\varphi(h)}{h} = q_i \in [0, \infty].$$

Тогда

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1 - p_{i,i}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1 - e^{\varphi(h)}}{\varphi(h)} \cdot \frac{\varphi(h)}{h} = q_i,$$

что и требовалось доказать.

Упражнение 117*. Показать, что при $j \neq i$ существует конечный предел

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{p_{i,j}(h)}{h} = \frac{d^+}{dt} p_{i,j}(t)|_{t=0}.$$

Далее будем обозначать

$$p'_{i,j}(0+) = q_{i,j}, \quad j \neq i, \quad p'_{i,i}(0+) = q_{i,i} = -q_i.$$

Из упражнения 117 вытекает, что при $h \rightarrow 0+$

$$p_{i,j}(h) = q_{i,j}h + o(h), \quad i \neq j.$$

Согласно примеру 63 в случае $q_i < \infty$ при каждом $i \in S$ имеем

$$p_{i,i}(h) = 1 - q_i h + o(h), \quad h \rightarrow 0+. \quad (122)$$

Говорят, что $q_{i,j}$ представляет собой *интенсивность перехода* из состояния i в состояние j . Постоянная q_i носит название *плотности или интенсивности выхода* из состояния i .

Определение 31. Инфинитезимальной матрицей марковской цепи X (или полугруппы $(P(t))_{t \geq 0}$) называется матрица Q с элементами

$$q_{i,j} := \frac{d^+}{dt} p_{i,j}(t)|_{t=0}, \quad i, j \in S.$$

Определение инфинитезимальной матрицы $Q = (q_{i,j})$ однородной марковской цепи мы можем переписать следующим образом:

$$Q = \frac{d^+}{dt} P(t)|_{t=0}, \quad (123)$$

т.е. берется правая производная в нуле переходной матрицы.

Задача 42. Пусть число состояний цепи Маркова конечно и равно m . Проверить, что тогда

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{i,j}. \quad (124)$$

В самом деле, $\sum_{1 \leq j \leq m} p_{i,j}(h) = 1$, откуда $1 - p_{i,i}(h) = \sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} p_{i,j}(h)$. Разделим обе части равенства на $h > 0$ и перейдем к пределу при $h \rightarrow 0+$. Так как сумма содержит конечное число слагаемых, имеющих предел, то существует ее предел, равный сумме пределов слагаемых. Поэтому соотношение (124) справедливо.

Задача 43. В общем случае, когда число состояний счетно, равенство (124) может нарушаться. Теперь требуется показать, что для любого i будет справедливо неравенство

$$\sum_{j \neq i} q_{i,j} \leq q_i. \quad (125)$$

Действительно, так как $\sum_{j \neq i} p_{i,j}(h) = 1 - p_{i,i}(h)$, то для любого натурального M

$$\sum_{j \neq i, 1 \leq j \leq M} p_{i,j}(h) \leq 1 - p_{i,i}(h).$$

Делим обе части на $h > 0$ и устремляем h к нулю. Используя произвольность $M \in \mathbb{N}$ и неотрицательность $p_{i,j}$, приходим к неравенству (125).

Определение 32. Процессы, для которых верно равенство (124) и $q_i < \infty$ при всех i , называются *консервативными*. Соответствующая матрица Q также называется консервативной.

Пример 64. Покажем, что пуссоновский процесс является консервативной цепью Маркова.

Согласно (111) для $i, j \in \mathbb{Z}_+$ и $t > 0$

$$p_{i,j}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i} e^{-\lambda t}}{(j-i)!}, & \text{если } j \geq i, \\ 0, & \text{если } j < i. \end{cases} \quad (126)$$

Поэтому при $h \rightarrow 0^+$

$$p_{i,i}(h) = 1 - \lambda h + o(h), \quad p_{i,i+1}(h) = \lambda h + o(h),$$

а также

$$p_{i,j}(h) = o(h), \quad j > i + 1, \quad p_{i,j}(h) = 0, \quad j < i.$$

Следовательно, инфинитезимальная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (127)$$

Таким образом, процесс консервативен.

Задача 44. Пусть дана квадратная матрица $Q = (q_{i,j})$ порядка $m \in \mathbb{N}$, элементы которой $q_{i,j} \geq 0$ при $i \neq j$, а также для них справедливо (124). Тогда существует марковская цепь (или, что то же самое, матрица переходных вероятностей $P(t), t \geq 0$) с инфинитезимальной матрицей Q , см. (123).

Надо вспомнить, что для конечной матрицы B и любого $t \in \mathbb{R}$

$$e^{tB} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n B^n}{n!}, \quad (128)$$

а также $e^{B+C} = e^B e^C$, когда матрицы B и C коммутируют (т.е. $BC = CB$). Кроме того, нетрудно убедиться, что

$$\frac{d^+}{dt} e^{tB}|_{t=0} = B.$$

Определим матрицу

$$P(t) := e^{tQ}, \quad t \geq 0. \quad (129)$$

Проверим, что ее элементы $p_{i,j}(t)$, где $i, j \in S$ и $t \geq 0$, обладают свойствами 1 – 4 переходных вероятностей (см. пункт 6.2).

Докажем, что все элементы матрицы $P(t)$ неотрицательны (верно условие 1). Положим $\gamma := \min_{1 \leq i \leq m} q_{i,i} \leq 0$. Введем матрицу $\tilde{Q} = (\tilde{q}_{i,j}) := Q - \gamma I$, где I — единичная матрица порядка m . Тогда $\tilde{q}_{i,j} \geq 0$ при всех $i, j \in S$. Рассмотрим матрицу

$$\tilde{P}(t) = (\tilde{p}_{i,j}(t)) := e^{t\tilde{Q}}, \quad t \geq 0.$$

В силу (128)

$$\tilde{p}_{i,j}(t) \geq 0 \quad \text{при всех } i, j \in S, \quad t \geq 0.$$

Кроме того, для любого $t \geq 0$

$$\tilde{P}(t) = e^{t(Q-\gamma I)} = e^{tQ} e^{-t\gamma I} = P(t) e^{-t\gamma I},$$

поскольку матрицы tQ и tI коммутируют. Следовательно,

$$P(t) = \tilde{P}(t) e^{t\gamma I},$$

откуда все элементы матрицы $P(t)$ неотрицательны, так как перемножаются матрицы с неотрицательными элементами. Мы учли, что согласно (128) матрица $e^{t\gamma I}$ является диагональной, а элементы диагонали равны $e^{t\gamma}$.

Проверим теперь условие 2. Обозначим α вектор в \mathbb{R}^m , имеющий все компоненты, равные единице (m — порядок матрицы Q). Тогда свойство 2 означает, что при каждом $t \geq 0$

справедливо равенство $P(t)\alpha = \alpha$. По условию $Q\alpha = 0$. В силу (128) получаем $e^{tQ}\alpha = I\alpha = \alpha$, что и требовалось.

Очевидно, $P(0) = I$ (единичная матрица), т.е. выполнено свойство 3.

Наконец, при $s, t \geq 0$ имеем

$$P(s+t) = e^{(s+t)Q} = e^{sQ}e^{tQ} = P(s)P(t),$$

поскольку sQ и tQ коммутируют. Поэтому справедливо и 4.

Итак, однородные марковские цепи с конечным числом состояний можно строить с помощью инфинитезимальной матрицы Q , задающей интенсивности вероятностей перехода из одного состояния фазового пространства в другое. Для цепей со счетным числом состояний ситуация существенно сложнее, поскольку, вообще говоря, нельзя аналогично (129) брать экспоненту от бесконечной матрицы.

6.5. Уравнения Колмогорова

Вначале выведем системы дифференциальных уравнений Колмогорова в предположении, что пространство S состояний цепи Маркова конечно. Пусть мощность S равна m .

Начнем с обратных уравнений. При любых $i, j \in S$ и $t, h \geq 0$ применим уравнение Колмогорова–Чепмена:

$$p_{i,j}(t+h) = \sum_{k=1}^m p_{i,k}(h)p_{k,j}(t). \quad (130)$$

Тогда

$$p_{i,j}(t+h) - p_{i,j}(t) = [p_{i,i}(h) - 1]p_{i,j}(t) + \sum_{k \neq i, 1 \leq k \leq m} p_{i,k}(h)p_{k,j}(t). \quad (131)$$

Предположим, что существует инфинитезимальная матрица Q (это так, если матрица $P(t)$ стандартна). Поделим обе части равенства (131) на h и перейдем к пределу при $h \rightarrow 0+$. Поскольку число слагаемых конечно, получим

$$p'_{i,j}(t) = -q_{ii}p_{i,j}(t) + \sum_{k \neq i, 1 \leq k \leq m} q_{i,k}p_{k,j}(t).$$

Это соотношение удобно записать в виде

$$\frac{d^+}{dt} P(t) = QP(t), \quad t \geq 0. \quad (132)$$

Упражнение 118. Покажите, что поскольку в правой части (132) стоит функция, непрерывная на $[0, \infty)$ (т.е. непрерывны все элементы матрицы), то существует $\frac{d}{dt} P(t)$ при каждом $t > 0$, и для таких t имеем $P'(t) = QP(t)$.

Аналогично для получения *прямой системы* используем уравнение Колмогорова–Чепмена (130), где h и t меняются местами:

$$p_{i,j}(t+h) = \sum_{k=1}^m p_{i,k}(t)p_{k,j}(h).$$

Используя это соотношение в правой части равенства (131), получим после деления на h и перехода к пределу при $h \rightarrow 0+$ уравнения для матричных элементов:

$$p'_{i,j}(t) = -q_j p_{i,j}(t) + \sum_{k \neq j, 1 \leq k \leq m} p_{i,k}(t)q_{k,j}.$$

Иначе говоря, получаем матричное уравнение

$$\frac{d^+}{dt} P(t) = P(t)Q, \quad t \geq 0. \quad (133)$$

Согласно упр. 118 для $t > 0$ можно считать, что в (133) фигурирует $\frac{d}{dt}$ вместо правой производной $\frac{d^+}{dt}$. Названия *обратная* и *прямая* системы объясняются положением матрицы Q в правых частях уравнений (132) и (133) (соответственно *позади* и *впереди* матрицы $P(t)$).

В случае счетного числа состояний приходится делать дополнительные предположения об инфинитезимальной матрице или же о поведении переходных вероятностей в окрестности нуля. Справедливо (см., напр., [2, с. 205]) следующее утверждение.

Теорема 20. *Если $\{X(t), t \geq 0\}$ — консервативная цепь Маркова, то ее переходные вероятности дифференцируемы и удовлетворяют системе обратных уравнений Колмогорова,*

которые можно записать в матричной форме следующим образом:

$$P'(t) = QP(t), \quad t > 0. \quad (134)$$

При $t = 0$ имеем $\frac{d^+}{dt} P(t)|_{t=0} = Q$, поэтому (134) в нуле тоже справедливо, но для правой производной.

Для вывода системы прямых уравнений Колмогорова консервативность инфинитезимальной матрицы не требуется, а вместо этого налагаются условия на поведение вероятностей перехода, как показывает следующая

Теорема 21. Пусть $\{X(t), t \geq 0\}$ — цепь Маркова такая, что для $j \neq i$ имеет место соотношение

$$p_{i,j}(h) = q_{i,j}h + \alpha_{i,j}(h),$$

где $\frac{\alpha_{i,j}(h)}{h} \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0+$) при каждом j равномерно по i .

Кроме того, пусть существуют такие постоянные A_j , что $q_{i,j} < A_j$ при любом i . Тогда справедлива система прямых уравнений Колмогорова:

$$P'(t) = P(t)Q, \quad t > 0.$$

При $t = 0$ это матричное уравнение также верно, но $P'(0)$ понимается как $P'(0+)$.

Рассмотрим теперь конструкцию Дуба, которая позволяет описывать траектории консервативной марковской цепи, имеющей инфинитезимальную матрицу Q . Пусть Z_1 — некоторая случайная величина, принимающая значения в $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Ее распределение есть начальное распределение исходной цепи Маркова. Пусть τ_1 — положительная (вообще говоря, расширенная) случайная величина, для которой

$$P(\tau_1(\omega) > t | Z_1(\omega) = i) = e^{-q_i t}, \quad t > 0,$$

(если $q_i = 0$, то считаем, что $\tau_1(\omega) = \infty$).

Если уже определены случайные величины Z_1, \dots, Z_n и τ_1, \dots, τ_n , то случайная величина Z_{n+1} будет принимать зна-

чения в S , причем для $x_1, \dots, x_n \geq 0$ и $i_1, \dots, i_{n-1}, i \in S$ верно равенство

$$P(Z_{n+1}(\omega) = j | \vec{\tau} = \vec{x}, Z_1 = i_1, \dots, Z_{n-1} = i_{n-1}, Z_n = i) = \frac{q_{i,j}}{q_i},$$

где $\vec{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ и $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Величина τ_{n+1} определяется как неотрицательная случайная величина такая, что

$$P(\tau_{n+1}(\omega) - \tau_n(\omega) > t | \vec{\tau} = \vec{x}, Z_1 = i_1, \dots, Z_n = i_n, Z_{n+1} = j)$$

равна $e^{-q_j t}$ при $t > 0$. В двух последних равенствах предполагалось, что $q_i > 0$, $q_j > 0$. Необходимо дополнить эти определения, положив соответственно при $q_i = 0$ и $q_j = 0$

$$P(Z_{n+1}(\omega) = i | \vec{\tau} = \vec{x}, Z_1 = i_1, \dots, Z_{n-1} = i_{n-1}, Z_n = i) = 1,$$

$$P(\tau_{n+1} = \infty | \vec{\tau} = \vec{x}, Z_1 = i_1, \dots, Z_n = i_n, Z_{n+1} = j) = 1.$$

Считая $\tau_0 = 0$, определяем процесс $X(t)$ при $0 \leq t < \infty$ следующим образом:

$$X(t, \omega) = Z_n(\omega), \quad \tau_{n-1}(\omega) \leq t < \tau_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Разумеется, прежде всего следует доказать, что на некотором вероятностном пространстве возможно построить введенные выше случайные величины с требуемыми свойствами. Далее можно проверить, что построенный процесс будет цепью Маркова, обладающей инфинитезимальной матрицей Q и теми же переходными вероятностями, что были у исходной цепи.

Сказанное дает наглядное представление о том, как устроен “хороший” марковский процесс. Фактически явно указано, какое экспоненциальное время процесс (“система”) проводит в одном состоянии до того момента, когда он в соответствии с заданными интенсивностями осуществит переход в новое состояние. Заметим, что именно такое поведение, в частности, присуще пуассоновскому процессу с параметром $\lambda > 0$. Действительно, для $0 \leq s < t$ имеем

$$P(N(s+t) = i | N(s) = i) = p_{i,i}(t) = e^{-\lambda t}, \quad i \in \mathbb{Z}_+,$$

т.е. в каждом состоянии i процесс N пребывает экспоненциальное время (с параметром λ), а интенсивности вероятно-

стей перехода описываются матрицей (127). Таким образом, за “малое время” h процесс N может совершить лишь скачок из состояния i в состояние $i + 1$ с вероятностью $\lambda h + o(h)$.

В заключение этой главы обратимся к процессам размножения и гибели. Эти процессы задаются с помощью инфинитезимальной матрицы специального вида. А именно, $q_{i,i+1} = \lambda_i$, $q_{i,i-1} = \mu_i$, а $q_{i,i} = -(\lambda_i + \mu_i)$, здесь $i \in \mathbb{Z}_+$, причем $\mu_0 = 0$. Иначе говоря, возможны переходы только в соседние состояния. Переход из i в $i + 1$ соответствует рождению новой частицы, а из i в $i - 1$ — гибели одной из частиц.

Упражнение 119*. Написать уравнения Колмогорова (прямые и обратные) для процесса рождения и гибели. Существует ли $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,j}(t)$?

Далее мы предполагаем наличие конечных производных в нуле у всех переходных вероятностей.

Доказывается (см., напр., [2, с. 207]), что при широких условиях вектор \tilde{p} , задающий стационарное распределение, является решением уравнения

$$Q^T \tilde{p} = 0. \quad (135)$$

Пусть дана марковская цепь с пространством состояний $S = \{0, 1, \dots, m\}$ и инфинитезимальной матрицей вида

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k\mu & -(k\mu + \lambda) & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & t\mu & -t\mu \end{pmatrix}, \quad (136)$$

где λ и μ — положительные параметры. Существование такой цепи следует из рассмотренного ранее примера 44. Эта матрица (и марковская цепь) естественно возникает в модели (см., напр., [2, с. 208]), описывающей функционирование телефонной станции, имеющей m “обслуживающих приборов”,

куда в случайные моменты времени поступают вызовы, образующие пуассоновский поток интенсивности λ , а время обслуживания каждого вызова случайно и распределено по экспоненциальному закону с параметром μ . Предполагается, что поток поступления вызовов (т.е. семейство порождающих его независимых экспоненциально распределенных величин с параметром λ) не зависит от семейства независимых случайных величин, задающих длительности обслуживания (разговоров абонентов).

Как было доказано Эрлангом, в рамках данной модели существует стационарное распределение, которое легко находится в результате решения системы линейных уравнений (135):

$$\tilde{p}_j = \frac{\rho^j}{\sum_{k=0}^m \frac{\rho^k}{k!}}, \quad j = 0, 1, \dots, m,$$

здесь $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ называется *коэффициентом загрузки системы*.

Упражнение 120*: Пусть $X = \{X(t), t \geq 0\}$ — процесс чистого размножения, т.е.

$$p_{i,i+1}(t) = \lambda_i t + o(t), \quad p_{i,i}(t) = 1 - \lambda_i t + o(t) \text{ при } t \rightarrow 0+.$$

Доказать, что $\sum_{n=0}^{\infty} P(X(t) = n) = 1$ для каждого t тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1} = \infty$.

Глава 7. СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

7.1. Ортогональные случайные меры и их свойства

Пусть \mathcal{K} — полукольцо подмножеств (см. п. 1.1) некоторого множества Λ .

Определение 33. Ортогональной случайной мерой Z , определенной на \mathcal{K} , называется отображение $Z : \mathcal{K} \rightarrow L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, обладающее следующими свойствами:

1. $Z(B) \perp Z(C)$ для $B, C \in \mathcal{K}$, $B \cap C = \emptyset$.
2. Если $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{K}$, $B_n \cap B_m = \emptyset$ ($n \neq m$) и $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{K}$, то

$$Z\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(B_n) \text{ п.н.,} \quad (137)$$

где ряд сходится в пространстве L^2 (комплекснозначных случайных величин), снабженном скалярным произведением $(U, V) := \mathbb{E}U\bar{V}$ ($U, V \in L^2$), величина \bar{V} комплексно сопряжена V , а запись $U \perp V$ означает, что $(U, V) = 0$.

Пример 65. Проверим, что Z обладает конечной аддитивностью.

Убедимся, что $Z(\emptyset) = 0$ п.н. Очевидно, $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$ и $\emptyset \in \mathcal{K}$. Поэтому $Z(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(\emptyset)$ п.н. Таким образом, $\|Z(\emptyset) - \sum_{n=1}^N Z(\emptyset)\|_{L^2} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, т.е. $(N-1)\|Z(\emptyset)\|_{L^2} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Следовательно, $\|Z(\emptyset)\|_{L^2} = 0$, откуда $Z(\emptyset) = 0$ п.н.

Доказанное свойство и условие 2 определения 33 влекут конечную аддитивность Z . Действительно, если $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{K}$ и $\cup_{i=1}^n B_i \in \mathcal{K}$, причем $B_i B_j = \emptyset$ для $i \neq j$, то $Z(\cup_{i=1}^n B_i) = Z(B_1 \cup \dots \cup B_n \cup \emptyset \cup \emptyset \dots) = Z(B_1) + \dots + Z(B_n) + Z(\emptyset) + Z(\emptyset) + \dots = Z(B_1) + \dots + Z(B_n)$, где все равенства случайных величин обозначают совпадение почти наверное.

Задача 45. Показать, что функция $\mu(B) := \mathbb{E}|Z(B)|^2$ является мерой (называемой *структурной*), принимающей конечные значения на \mathcal{K} .

Ясно, что μ — неотрицательная функция, а $\mu(B) < \infty$ для всех $B \in \mathcal{K}$, так как $Z(B) \in L^2$ на \mathcal{K} . Пусть $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{K}$ и $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{K}$, причем $B_m \cap B_n = \emptyset$ для $m \neq n$. В силу непрерывности скалярного произведения имеем

$$\begin{aligned}\mu(B) = (Z(B), Z(B)) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=1}^N Z(B_m), \sum_{n=1}^N Z(B_n) \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (Z(B_n), Z(B_n)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mu(B_n).\end{aligned}$$

Мы учили, что $Z(B_n) \perp Z(B_m)$ при $n \neq m$. Итак,

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n),$$

что и требовалось показать.

Пример 66. Убедимся, что в определении 33 требования 1 и 2 эквивалентны выполнению следующего условия:

$$(Z(B), Z(C)) = \mu(B \cap C) \quad \text{для любых } B, C \in \mathcal{K}, \quad (138)$$

где μ — (неслучайная) мера на \mathcal{K} , принимающая лишь конечные значения на этом полукольце.

Пусть выполнено определение 33. Согласно примеру 65 ортогональная мера Z обладает и конечной аддитивностью. Кроме того, для любых $B, C \in \mathcal{K}$ имеем $B = BC \cup (\bigcup_{i=1}^m B_i)$ и $C = BC \cup (\bigcup_{j=1}^r C_j)$, где (в силу определения полукольца) множества $B_i \in \mathcal{K}$ и $C_j \in \mathcal{K}$ образуют разбиения соответственно $B \setminus BC$ и $C \setminus BC$. Поэтому, пользуясь ортогональностью и конечной аддитивностью Z , имеем

$$\begin{aligned}(Z(B), Z(C)) &= (Z(BC \cup (\bigcup_{i=1}^m B_i)), Z(BC \cup (\bigcup_{j=1}^r C_j))) = \\ &= (Z(BC), Z(BC)) = \mu(B \cap C),\end{aligned}$$

причем μ — мера на \mathcal{K} , принимающая конечные значения на данном полукольце, согласно задаче 45.

Пусть теперь верно (138). Тогда, очевидно, $Z(B) \in L^2$ при всех $B \in \mathcal{K}$, и $Z(B) \perp Z(C)$ для $B, C \in \mathcal{K}$ таких, что $BC = \emptyset$ (поскольку $\mu(\emptyset) = 0$). Если $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{K}$ и $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{K}$, причем $B_m B_n = \emptyset$ для $m \neq n$, то требуется проверить, что $\sum_{n=1}^N Z(B_n) \rightarrow Z(\cup_{n=1}^{\infty} B_n)$ в $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ при $N \rightarrow \infty$. Свойства скалярного произведения и условие (138) влекут равенства

$$\begin{aligned} (Z\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) - \sum_{n=1}^N Z(B_n), Z\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) - \sum_{n=1}^N Z(B_n)) &= \\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) - \sum_{n=1}^N \mu(B_n) - \sum_{n=1}^N \mu(B_n) + \sum_{n=1}^N \mu(B_n). \end{aligned}$$

Остается учесть, что $\sum_{n=1}^N \mu(B_n) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$ при $N \rightarrow \infty$, поскольку μ — мера. Следовательно, выполнено (137).

Упражнение 121. Пусть $\Lambda = [0, \infty)$ и $\mathcal{K} = \{[a, b], 0 \leq a \leq b < \infty\}$. Положим $Z([a, b]) := W(b) - W(a)$, здесь $[a, b] \in \mathcal{K}$, W — винеровский процесс. Убедитесь, что Z — ортогональная случайная мера на \mathcal{K} и найдите ее структурную меру.

Ортогональная случайная мера Z называется *центрированной*, если

$$EZ(B) = 0 \quad \text{для всех } B \in \mathcal{K}.$$

Упражнение 122. Докажите, что всегда можно построить центрированную ортогональную случайную меру Z , отвечающую заданной σ -конечной мере μ , определенной на полукильце \mathcal{K} (т.е. μ окажется структурной мерой Z).

Если $\Lambda \in \mathcal{K}$ (другими словами, $\mu(\Lambda) < \infty$), то рассмотрим алгебру \mathcal{E} , состоящую из конечных объединений попарно непересекающихся множеств из \mathcal{K} . Для $C = \cup_{i=1}^n B_i$, где $B_i \in \mathcal{K}$

и $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$, положим

$$Z(C) := \sum_{i=1}^n Z(B_i). \quad (139)$$

Упражнение 123. Покажите, что определение (139) корректно, т.е. если $C = \cup_{j=1}^m D_j$, где $D_j \in \mathcal{K}$ и $D_j \cap D_r = \emptyset$ при $j \neq r$, то $\sum_{j=1}^m Z(D_j) = \sum_{i=1}^n Z(B_i)$. Убедитесь, что $(Z(C), Z(D)) = \mu(C \cap D)$ для любых $C, D \in \mathcal{E}$.

Вопрос о продолжении ортогональной случайной меры с алгебры, порожденной полукольцом \mathcal{K} , на более широкую систему множеств будет рассмотрен в следующем пункте, поскольку для этого потребуются новые понятия.

7.2. Интеграл по ортогональной случайной мере

Предположим, что ортогональная случайная мера Z задана на алгебре \mathcal{E} подмножеств Λ и имеет структурную меру μ (тогда μ — конечная мера, поскольку $\mu(\Lambda) = E|Z(\Lambda)|^2 < \infty$). Без потери общности будем считать, что μ продолжена (однозначно по теореме Каратеодори) на σ -алгебру $\mathcal{A} := \sigma\{\mathcal{E}\}$. В пространстве $L^2(\Lambda) = L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ (комплекснозначных функций) введем скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Lambda} f \bar{g} d\mu, \quad f, g \in L^2(\Lambda).$$

Как обычно, любой интеграл определяется вначале на некоторой системе “простых функций”, а затем распространяется на более широкий класс. Функция $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ называется простой, если

$$f = \sum_{i=1}^n b_i \mathbb{I}_{B_i}, \quad (140)$$

где $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$, а множества $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{E}$, образуют разбиение Λ .

Определение 34. Интеграл по ортогональной случайной мере Z от простой функции f вида (140) задается формулой

$$J(f) := \sum_{i=1}^n b_i Z(B_i).$$

Обычно используется обозначение

$$J(f) = \int_{\Lambda} f(\lambda) Z(d\lambda).$$

Пусть $g = \sum_{j=1}^m d_j \mathbb{I}_{D_j}$, где $D_1, \dots, D_m \in \mathcal{E}$ образуют разбиение Λ . Тогда

$$\begin{aligned} (J(f), J(g)) &= \left(\sum_{i=1}^n b_i Z(B_i), \sum_{j=1}^m d_j Z(D_j) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_i \bar{d}_j \mu(B_i \cap D_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_i \bar{d}_j \int_{\Lambda} \mathbb{I}_{B_i \cap D_j} \mu(d\lambda) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_i \bar{d}_j \int_{\Lambda} \mathbb{I}_{B_i} \mathbb{I}_{D_j} \mu(d\lambda) = \\ &= \int_{\Lambda} \sum_{i=1}^n b_i \mathbb{I}_{B_i} \overline{\sum_{j=1}^m d_j \mathbb{I}_{D_j}} \mu(d\lambda) = \int_{\Lambda} f(\lambda) \overline{g(\lambda)} \mu(d\lambda) = \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, если f и g — простые функции, то

$$(J(f), J(g)) = \langle f, g \rangle. \quad (141)$$

Из (141) вытекает, что для простых функций f и g верна цепочка равенств

$$\begin{aligned} \|J(f) - J(g)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (J(f) - J(g), J(f) - J(g)) = \\ &= (J(f), J(f)) - (J(g), J(f)) - (J(f), J(g)) + (J(g), J(g)) = \\ &= \langle f, f \rangle - \langle g, f \rangle - \langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle = \langle f - g, f - g \rangle = \\ &= \|f - g\|_{L^2(\Lambda)}^2. \quad (142) \end{aligned}$$

В результате проверено, что определение интеграла для простых функций корректно (не зависит от вида записи инте-

грируемой функции в виде линейной комбинации индикаторов множеств, образующих разбиение Λ).

Простые функции плотны в пространстве $L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$. Во-первых, для $f \in L^2$ по теореме о мажорируемой сходимости $f_N = f\mathbb{I}\{|f| \leq N\}$, $N \in \mathbb{N}$, сходятся к f в L^2 . Затем ограниченную функцию f_N можем сколь угодно точно аппроксимировать в пространстве $L^1(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ простыми функциями (по модулю не превосходящими N). Остается учесть, что $E|g|^2 \leq cE|g|$, если $|g| \leq c$, и это же верно для интегралов по μ .

Итак, если $f \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$, то находим простые $f_n \rightarrow f$ в $L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$, а затем полагаем

$$J(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) \quad \text{в } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P). \quad (143)$$

Предел существует, поскольку пространство $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ полно, а фундаментальность последовательности $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в $L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ влечет в силу (142) фундаментальность $(J(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Упражнение 124. Покажите, что $J(f)$ в (143) не зависит от вида аппроксимирующей последовательности $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и (141) сохраняется для любых $f, g \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$.

Заметим, что для любого $B \in \mathcal{A}$ имеем $\mathbb{I}_B \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$. Поэтому можно распространить Z на все такие множества, полагая

$$Z(B) = J(\mathbb{I}_B), \quad B \in \mathcal{A}. \quad (144)$$

Упражнение 125. Убедитесь, что функция Z , определенная формулой (144), является ортогональной случайной мерой на \mathcal{A} .

Пусть теперь μ является σ -конечной мерой на измеримом пространстве (Λ, \mathcal{A}) . Тогда $\Lambda = \cup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$, где $\Lambda_n \in \mathcal{A}$ образуют разбиение и $\mu(\Lambda_n) < \infty$. Предположим, что дана ортогональная случайная мера Z , определенная на системе

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \infty\}, \quad (145)$$

которая, как легко видеть, является полукольцом подмножеств Λ . Тогда $J(f)$ строится для $f \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ следующим образом. Положим $f_n := f|_{\Lambda_n}$. Очевидно, $f_n \in L^2(\Lambda_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$,

где $\mathcal{A}_n = \mathcal{A} \cap \Lambda_n$ и μ_n — сужение меры μ на \mathcal{A}_n . Описанное выше построение интеграла по ортогональной случайной мере (имеющей конечную структурную меру) позволяет ввести $J_n(f_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Теперь определим $J(f)$ формулой

$$J(f) = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(f_n), \quad (146)$$

где ряд сходится в пространстве $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Упражнение 126. Докажите, что ряд в правой части (146) сходится в $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Кроме того, проверьте, что $J(f)$ не зависит от выбора разбиения Λ на подмножества, имеющие конечную меру μ , а также покажите, что (141) справедливо для любых $f, g \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$.

Следовательно, мы можем по описанной схеме продолжить ортогональную случайную меру Z , которая задана на полукоакси \mathcal{K} подмножеств Λ и имеет σ -конечную структурную меру μ , на систему \mathcal{M} , фигурирующую в (145), согласно формуле $Z(A) := J(\mathbb{I}_A)$.

7.3. Стационарные в широком смысле процессы, их спектральное представление

Понятие стационарности отражает в определенном смысле устоявшееся течение случайного процесса. Разумеется, “самым устоявшимся” был бы процесс $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, для которого $X(t) = \text{const}$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Однако такой тривиальный случай мало интересен. Из гармонического анализа детерминированных функций известно, сколь важная роль отводится комплексным экспонентам. Поэтому естественной является идея представления широкого класса случайных процессов в виде взвешенных (со случайными коэффициентами) сумм элементарных гармоник, а также в виде некоторых интегралов. Мы обсудим далее и понятие стационарности в узком смысле, связанное с изучением преобразований, сохраняющих меру. Такие преобразования — основной объект теории динамических систем. Для точных формулировок потребуется ряд новых понятий и вспомогательных утверждений.

Назовем L^2 -процессом такую (вообще говоря, комплекснозначную) случайную функцию $X = \{X(t), t \in T\}$, что $E|X(t)|^2 < \infty$ при каждом $t \in T$. Если дано вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) то прямое произведение

$$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}) = (\Omega, \mathcal{F}, P) \times (\Omega', \mathcal{F}', P'),$$

где $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ — некоторое вероятностное пространство, называется расширением исходного вероятностного пространства. Каждую случайную величину Y , заданную на (Ω, \mathcal{F}, P) , можно продолжить на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$, положив

$$Y(\omega, \omega') := Y(\omega), \quad \text{где } \omega \in \Omega, \quad \omega' \in \Omega'.$$

Нам потребуется следующий глубокий результат (см., например, [2, с. 235]).

Теорема 22 (Карунен). *Пусть на некотором вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) задан центрированный L^2 -процесс $X = \{X(t), t \in T\}$ с ковариационной функцией, допускающей факторизацию, т.е.*

$$\text{cov}(X(s), X(t)) = \int_{\Lambda} f(s, \lambda) \overline{f(t, \lambda)} \mu(d\lambda), \quad (147)$$

где μ является σ -конечной мерой на измеримом пространстве (Λ, \mathcal{A}) и при каждом $t \in T$ функция (класс эквивалентных функций) $f(t, \cdot) \in L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$. Тогда, возможно, на расширении исходного вероятностного пространства и системе \mathcal{M} , фигурирующей в (145), найдется центрированная ортогональная случайная мера Z со структурной мерой μ такая, что

$$X(t) = \int_{\Lambda} f(t, \lambda) Z(d\lambda), \quad t \in T. \quad (148)$$

Замечание 6. Расширять исходное вероятностное пространство не потребуется, если система функций $\{f(t, \cdot), t \in T\}$ полна в $L^2(\Lambda) = L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$, т.е. справедливость соотношений $h \perp f(t, \cdot)$ в $L^2(\Lambda)$ при каждом $t \in T$ влечет $h = 0$ (μ почти всюду). Кроме того, если верно представление (148), где Z — ортогональная случайная мера с σ -конечной мерой μ , то в силу (141) для $f, g \in L^2(\Lambda)$ выполняется условие (147).

Покажем, что $r(s, t) = \text{cov}(X(s), X(t))$ — ковариационная функция L^2 -процесса $X = \{X(t), t \in T\}$ — является *неотрицательно определенной*, т.е. при любых $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$ и всех $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k,r=1}^n z_k \overline{z_r} r(t_k, t_r) \geq 0.$$

Действительно, обозначив $Y(t) = X(t) - \mathbb{E}X(t)$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k,r=1}^n z_k \overline{z_r} \mathbb{E}Y(t_k) \overline{Y(t_r)} &= \\ &= \mathbb{E} \sum_{k=1}^n z_k Y(t_k) \overline{\sum_{r=1}^n z_r Y(t_r)} = \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n z_k Y(t_k) \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Определение 35. Функция $R = R(t)$, заданная на $T = \mathbb{Z}$ или $T = \mathbb{R}$, называется *неотрицательно определенной*, если таковой является функция $r(s, t) = R(s - t)$, где $s, t \in T$.

Пусть Y — (действительная) случайная величина и φ — ее характеристическая функция. Тогда согласно упр.71 функция φ неотрицательно определена на $T = \mathbb{R}$.

Отсюда, в частности, получаем, что следующие функции (одного аргумента $t \in \mathbb{R}$) неотрицательно определены:

$$\begin{aligned} R(t) &= \left(1 - \frac{|t|}{a}\right) \mathbb{I}\{|t| \leq a\}, \quad \text{где } a > 0; \\ R(t) &= \cos t; \\ R(t) &= \exp \left\{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}, \quad \text{здесь } a \in \mathbb{R}, \quad \sigma^2 \geq 0; \\ R(t) &= \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\} \quad \text{при } \lambda > 0. \end{aligned}$$

Заметим, что если функция $R = R(t)$, где $t \in \mathbb{R}$, неотрицательно определенная, то ее сужение на множество $T = \mathbb{Z}$ будет также неотрицательно определено. Полное описание функций, неотрицательно определенных на $T = \mathbb{Z}$, дает

Теорема 23 (Герглотц). *Функция R , заданная на \mathbb{Z} , будет неотрицательно определенной в том и только том случае, если*

чая, когда находитя конечная мера μ на $([-\pi, \pi], \mathcal{B}([- \pi, \pi]))$, для которой

$$R(t) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{it\lambda} \mu(d\lambda), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Определение 36. Комплекснозначный случайный процесс $X = \{X(t), t \in T\}$, где T снабжено сложением элементов, называется *стационарным в широком смысле*, если $\mathbb{E}X(t) = a = \text{const}$ при всех $t \in T$, а ковариационная функция не меняется при сдвиге, а именно, для любых $t \in T$, $s \in T$ и h таких, что $t + h \in T$, $s + h \in T$, выполнено соотношение

$$\mathbb{E}X_{t+h}\overline{X_{s+h}} = \mathbb{E}X_t\overline{X_s}. \quad (149)$$

Пример 67. Пусть процесс $X = \{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$ таков, что величины $X(n)$ являются центрированными и ортонормированными в (комплексном) $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Убедимся, что этот процесс стационарен в широком смысле.

В самом деле, $\text{cov}(X(n), X(m)) = \mathbb{E}X(n)\overline{X(m)} = \delta_{n,m} = R(n - m)$, где $R(t) = 1$ при $t = 0$ и $R(t) = 0$ для $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Ограничимся применением теоремы Карунена главным образом к действительным процессам с дискретным временем.

Пользуясь теоремой Герглotta, мы видим, что ковариационная функция стационарного в широком смысле процесса $X = \{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$ допускает следующую факторизацию:

$$\begin{aligned} \text{cov}(X(n), X(m)) &= R(n - m) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{i(n-m)\lambda} \mu(d\lambda) = \\ &= \int_{[-\pi, \pi]} e^{in\lambda} \overline{e^{im\lambda}} \mu(d\lambda), \quad n, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Таким образом, по теореме Карунена для центрированного стационарного в широком смысле процесса $X = \{X(n), n \in \mathbb{Z}\}$ справедливо *спектральное представление*:

$$X(n) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{in\lambda} Z(d\lambda), \quad n \in \mathbb{N}.$$

При этом согласно замечанию 6 расширять исходное вероятностное пространство, на котором задан процесс X , не требуется.

Упражнение 127. Пусть $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ — стационарная в широком смысле центрированная последовательность. Докажите, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k \rightarrow Z(\{0\})$$

в среднем квадратичном, где Z — ортогональная случайная мера, фигурирующая в спектральном представлении X .

Упражнение 128. Пусть $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ — стационарная в широком смысле последовательность со средним a и ковариационной функцией $R = R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Доказать, что тогда и только тогда $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow a$ в среднем квадратичном, когда

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R(n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Определение 37. Говорят, что стационарный в широком смысле процесс $X = \{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$ имеет *спектральную плотность* $f = f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, если

$$R(t) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{it\lambda} f(\lambda) d\lambda, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (150)$$

где R — ковариационная функция. Другими словами, структурная мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега (на $[-\pi, \pi]$).

Упражнение 129. Пусть $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ — последовательность, состоящая из некоррелированных случайных величин со средним 0 и дисперсией σ^2 . Найти спектральную плотность этой последовательности (называемой *белым шумом*).

Для спектрального представления стационарных процессов, заданных на \mathbb{R} , ключевую роль играет следующий результат.

Теорема 24 (Бохнер–Хинчин). *Непрерывная в нуле функция $R = R(t)$, где $t \in \mathbb{R}$, является неотрицательно определенной в том и только том случае, когда найдется конечная мера μ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ такая, что*

$$R(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} \mu(d\lambda), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Упражнение 130. Докажите, что стационарный в широком смысле процесс $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ непрерывен в среднем квадратическом на \mathbb{R} в том и только том случае, когда он непрерывен в точке $t = 0$.

Спектральная плотность для стационарного в широком смысле процесса X , заданного на \mathbb{R} , вводится аналогично (150), только вместо интеграла по $[-\pi, \pi]$ берется интеграл по \mathbb{R} (сравните с преобразованием Фурье).

Задача 46. Пусть $X = \{X(t) = e^{-\alpha t} W(e^{2\alpha t}), t \in \mathbb{R}\}$, где W — винеровский процесс, а константа $\alpha > 0$. Доказать, что X — стационарный в широком смысле гауссовский процесс и найти его спектральную плотность.

Очевидно, $\mathbf{E}X(t) = e^{-\alpha t} \mathbf{E}W(e^{2\alpha t}) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Далее при $s \leq t$

$$\begin{aligned} r(s, t) &= \mathbf{E}X(s)X(t) = \\ &= e^{-\alpha s} e^{-\alpha t} \mathbf{E}W(e^{2\alpha s})W(e^{2\alpha t}) = e^{-\alpha(s+t)} \min\{e^{2\alpha s}, e^{2\alpha t}\} = \\ &= e^{-\alpha(s+t)} e^{2\alpha s} = e^{-\alpha(t-s)} = e^{-\alpha|s-t}|. \end{aligned}$$

Тот же ответ будет при $s > t$.

Вспоминая, что функция $\varphi(t) = \exp\{-\alpha|t|\}$, где $t \in \mathbb{R}$ и $\alpha > 0$, является характеристической функцией случайной величины Y , имеющей распределение Коши с параметром α (см. пункт 1.2), заключаем, что

$$r(s, t) = \varphi(s - t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(s-t)\lambda} \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)} d\lambda = e^{-\alpha|s-t|}. \quad (151)$$

Следовательно, спектральная плотность X есть

$$f(\lambda) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Характеристическая функция закона Коши с параметром α легко находится с помощью замены переменных по характеристической функции стандартного закона Коши (см. (49)).

Упражнение 131*. Пусть $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ — стационарный гауссовский процесс. Доказать, что X будет марковским в том и только том случае, когда его ковариационная функция имеет вид $R(t) = ce^{-\alpha|t|}$ ($t \in \mathbb{R}$), c и α — неотрицательные константы.

Упражнение 132. Убедиться, что процесс Орнштейна–Уленбека, рассмотренный в примере 30, является марковским.

Определение 38. Центрированный случайный процесс $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ называется *процессом скользящего среднего*, если найдутся белый шум $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ и последовательность констант $(c_n) \in l^2$, т.е. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$, такие, что

$$X_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{n-k} \varepsilon_k, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (152)$$

В приложениях к радиотехнике принята иная терминология. Говорят, что процесс, имеющий представление (152), получен с помощью фильтра, на вход которого поступает белый шум. Фильтр называется физически реализуемым, если коэффициенты $c_k = 0$ при $k < 0$. Тогда в соответствии с принципом причинности значения процесса X_n на выходе фильтра в момент n определяются только величинами ε_n с $k \leq n$.

Доказывается (см., например, [2, с. 244]), что стационарный в широком смысле процесс $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ имеет спектральную плотность тогда и только тогда, когда он является процессом скользящего среднего (возможно, белый шум ε , фигурирующий в (152), будет задан на расширении исходного вероятностного пространства).

Упражнение 133. Пусть $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — белый шум. Найти спектральную плотность $X = \{X_n = \frac{1}{2} \varepsilon_{n-1} + \frac{1}{4} \varepsilon_{n-4}, n \in \mathbb{Z}\}$.

7.4. Процессы, стационарные в узком смысле

Определение 39. Случайный процесс $X = \{X(t), t \in T\}$, где T снабжено сложением элементов, — *стационарный в узком смысле* (или *строго стационарный*), если

$$\text{Law}(X(t_1 + h), \dots, X(t_n + h)) = \text{Law}(X(t_1), \dots, X(t_n))$$

для любых $n \in \mathbb{N}$, t_1, \dots, t_n и h таких, что $t_i \in T$, $t_i + h \in T$, $i = 1, \dots, n$. Иначе говоря, все конечномерные распределения X не меняются при сдвигах, не выводящих из множества T :

$$P_{t_1+h, \dots, t_n+h}(B) = P_{t_1, \dots, t_n}(B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \quad (153)$$

Пример 68. Легко видеть, что семейства независимых одинаково распределенных случайных величин $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$ или $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ дают простейшие примеры стационарных случайных процессов, заданных на $T = \mathbb{Z}$ или $T = \mathbb{R}$.

В самом деле, для $T = \mathbb{R}$ (аналогично для $T = \mathbb{Z}$) имеем

$$\begin{aligned} P_{t_1+h, \dots, t_n+h}(B_1 \times \dots \times B_n) &= \\ &= P(X(t_1 + h) \in B_1, \dots, X(t_n + h) \in B_n) = \\ &= \prod_{i=1}^n P(X(t_i + h) \in B_i) = \prod_{i=1}^n P(X(t_i) \in B_i) = \\ &= P(X(t_1) \in B_1, \dots, X(t_n) \in B_n) = P_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n) \end{aligned}$$

для любых $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$, откуда стандартным образом вытекает соотношение (153), поскольку вероятностные меры, совпадающие на “прямоугольниках”, будут совпадать и на порожденных ими (борелевских) σ -алгебрах.

Задача 47. Пусть однородная марковская цепь $X = \{X(t), t \geq 0\}$ имеет стационарное распределение μ , определяемое набором $\{\tilde{p}_j, j \in S\}$ (т.е. для переходных вероятностей $p_{i,j}(t)$ цепи X выполняется (119), причем $\sum_{j \in S} \tilde{p}_j = 1$). Пусть $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ — однородная марковская цепь, имеющая те же переходные вероятности, что X , и начальное распределение μ . Доказать, что процесс Y будет строго стационарным.

Заметим, что существование такого процесса Y следует из упр. 110. Записывая Y вместо X в формуле (115), для любого $n \in \mathbb{N}$, произвольных $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ и любых $B_k \subset S$ ($k = 1, \dots, n$) получаем

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(Y(t_1) \in B_1, \dots, Y(t_n) \in B_n) &= \\ &= \sum_{j_1 \in B_1} \mathsf{P}(Y(t_1) = j_1) \sum_{j_2 \in B_2} p_{j_1, j_2}(t_2 - t_1) \dots \\ &\quad \dots \sum_{j_n \in B_n} p_{j_{n-1}, j_n}(t_n - t_{n-1}). \end{aligned} \quad (154)$$

Остается учесть, что $\mathsf{P}(Y(t) = j) = \tilde{p}_j$ при всех $j \in S$, $t \geq 0$, см. (120). Поэтому конечномерные распределения процесса Y не меняются при сдвигах наборов точек t_1, \dots, t_n вдоль временной оси.

Упражнение 134. Является ли стационарным в узком смысле процесс $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, если $X(t) = A \cos(t + \varphi)$, а независимые случайные величины A и φ таковы, что φ распределена равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$?

Задача 48. Выяснить, как связаны между собой введенные понятия стационарности в узком и широком смыслах.

Поставим вопрос, всегда ли из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле. Разумеется, не всегда. Действительно, не имеет смысла говорить о выполнении условий (149) для независимых одинаково распределенных случайных величин $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, каждая из которых не имеет математического ожидания (например, все они распределены по стандартному закону Коши).

Однако если предположить, что стационарный в узком смысле процесс есть L^2 -процесс, то он будет стационарен в широком смысле. Для простоты ограничимся действительнозначными процессами (для комплекснозначных процессов определение стационарности в узком смысле такое же, как для процессов со значениями в \mathbb{R}^2 , когда рассматривается вектор

$X(t) = (\operatorname{Re} X(t), \operatorname{Im} X(t))$. Имеем

$$\mathbb{E}X(t) = \int_{\mathbb{R}} x \mathbb{P}_{X(t)}(dx) = \int_{\mathbb{R}} x \mathbb{P}_{X(s)}(dx) = \mathbb{E}X(s)$$

при всех $s, t \in T$.

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X(s+h)X(t+h) &= \int_{\mathbb{R}^2} xy \mathbb{P}_{X(s+h), X(t+h)}(dx, dy) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} xy \mathbb{P}_{X(s), X(t)}(dx, dy) = \mathbb{E}X(s)X(t). \end{aligned}$$

Из стационарности в широком смысле также не следует стационарность в узком смысле. Возьмем, например, последовательность $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ независимых разнораспределенных случайных величин, у которых одинаковые первые и вторые моменты. Пусть величины с нечетными номерами будут принимать значения 1 и -1 с равными вероятностями, а с четными номерами — иметь нормальное распределение со средним 0 и дисперсией 1 ($X_{2k} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$). Тогда очевидно, что процесс стационарен в широком смысле (см. пример 67). Но он не будет стационарен в узком смысле, так как уже одномерные распределения будут меняться при сдвиге на единицу.

Следует подчеркнуть, что имеется класс процессов, для которых оба понятия стационарности совпадают — это *гауссовские процессы*, очевидно, являющиеся L^2 -процессами. Как мы видели, все их конечномерные распределения задаются с помощью функций среднего и ковариационной, а так как эти функции не меняются при сдвиге, если процесс стационарен в широком смысле, то не меняются и конечномерные распределения.

Определение 40. Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Отображение $T : \Omega \rightarrow \Omega$ называется сохраняющим (вероятностную) меру, если $\mathbb{P}(T^{-1}A) = \mathbb{P}(A)$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

Упражнение 135. Пусть T — сохраняющее меру преобразование, а X — некоторая случайная величина. Введем

$X_n(\omega) := X(T^n(\omega))$, $\omega \in \Omega$ (здесь T^n есть n -я степень T ; $T^0 = I$ — тождественное отображение). Доказать, что $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — стационарный в узком смысле процесс.

Сопоставим T класс инвариантных множеств

$$\mathcal{J} = \{A \in \mathcal{F} : T^{-1}A = A\}.$$

Упражнение 136. Убедитесь, что \mathcal{J} является σ -алгеброй.

Приведем (см., напр., [12, с. 604]) следующий классический результат.

Теорема 25 (Биркгоф–Хинчин). *Пусть T — сохраняющее меру преобразование и Y — случайная величина с $E|Y| < \infty$. Тогда с вероятностью единица существует*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} Y(T^k \omega)}{n} = E(Y|\mathcal{J}).$$

Теория стационарных в узком смысле процессов, по сути дела, представляет собой изучение преобразований вероятностного пространства, сохраняющих меру. Точнее говоря, если на (Ω, \mathcal{F}, P) дан стационарный в узком смысле процесс $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, то необязательно на этом вероятностном пространстве найдется сохраняющее меру преобразование такое, что X имеет вид, описанный в упражнении 135. Однако можно доказать, что существуют вероятностное пространство $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$, определенная на нем случайная величина \tilde{X} и сохраняющее меру преобразование \tilde{T} такие, что $\text{Law}(X) = \text{Law}(\tilde{X})$, где

$$\tilde{X} = \{\tilde{X}_n(\tilde{\omega}) = \tilde{X}(\tilde{T}^{-n}(\tilde{\omega})), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}\}.$$

Это замечание позволяет переформулировать (см., напр., [12, с. 608]) теорему Биркгофа–Хинчина для стационарных в узком смысле последовательностей, непосредственно не рассматривая преобразований, сохраняющих меру.

Событие $A \in \mathcal{F}$ называется *инвариантным* по отношению к последовательности $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, если при любом $n \in \mathbb{Z}_+$ найдется множество $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ такое, что

$$A = \{\omega : (X_n(\omega), X_{n+1}(\omega), \dots) \in B\}.$$

В пространстве \mathbb{R}^∞ , состоящем из последовательностей $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, где $x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, введена метрика:

$$\rho(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

для $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, а $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ – это соответствующая борелевская σ -алгебра. Совокупность всех инвариантных относительно X множеств обозначим \mathcal{A} . Нетрудно убедиться, что \mathcal{A} является σ -подалгеброй \mathcal{F} .

Теорема 26. Пусть $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – стационарный в узком смысле процесс с $E|X_0| < \infty$. Тогда с вероятностью единица существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} X_k}{n} = E(X_0 | \mathcal{A}).$$

Упражнение 137*. Покажите, что усиленный закон больших чисел, установленный Колмогоровым (теорема 5), можно вывести из данного варианта теоремы Биркгофа–Хинчина.

Глава 8. СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

8.1. Построение и свойства интеграла Ито

Напомним конструкцию стохастического интеграла Ито по броуновскому движению (винеровскому процессу) $W = \{W(t), t \geq 0\}$. В отличие от интеграла по ортогональной случайной мере, использованного в главе 7, теперь будут интегрироваться не только детерминированные, но и случайные функции $f(t, \omega)$.

Пусть на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ задано броуновское движение W и фильтрация $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Проще всего предположить, что \mathbb{F} — естественная фильтрация W , т.е. $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$, $t \geq 0$. Однако бывает удобнее считать, что W — *винеровский процесс относительно \mathbb{F}* , значит, $W(t)$ является \mathcal{F}_t -измеримой (т.е. $\mathcal{F}_t|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримой) величиной при каждом $t \geq 0$, а для любых $0 \leq s < t$ приращение $W(t) - W(s)$ не зависит от \mathcal{F}_s . Для естественной фильтрации эти свойства выполнены.

Если последовательность точек $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k \uparrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$), а действительные случайные величины Y_0, Y_1, \dots (заданные на том же $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$) таковы, что $\sigma(Y_k) \subset \mathcal{F}_{t_k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, назовем *простой* случайную функцию вида

$$f(s, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\omega) \mathbb{I}_{[t_k, t_{k+1})}(s), \quad s \geq 0. \quad (155)$$

Отметим, что при каждом $s > 0$ не более конечного числа точек t_k лежит левее s . Для $t = 0$ положим $I_t(f) = 0$, а для $0 < t < \infty$ определим интеграл Ито от f формулой

$$I_t(f)(\omega) := \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\omega) (W(t_{k+1} \wedge t) - W(t_k \wedge t)).$$

Разумеется, здесь число ненулевых слагаемых не будет бесконечным. Этот интеграл обозначают также

$$\int_{[0, t)} f(s, \omega) dW(s),$$

еще для него используется запись $\int_0^t f(s, \omega) dW(s)$.

Согласно формуле (155), если $0 < t \leq t_1$, то

$$I_t(f)(\omega) = Y_0(W(t) - W(0)) = Y_0W(t),$$

а для $t_m < t \leq t_{m+1}$, где $m \in \mathbb{N}$, имеем

$$I_t(f) := \sum_{k=0}^{m-1} Y_k(W(t_{k+1}) - W(t_k)) + Y_m(W(t) - W(t_m)). \quad (156)$$

Всюду далее мы будем рассматривать (не оговаривая специально) лишь простые функции, порожденные квадратично интегрируемыми величинами, т.е. $EY_k^2 < \infty$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Упражнение 138. Проверить, что для произвольных $s, t > 0$ и любых простых функций f и g верны равенства

$$\begin{aligned} EI_t(f) &= 0, \\ EI_s(f)I_t(g) &= E \int_{[0, s \wedge t)} f(u, \omega)g(u, \omega)du. \end{aligned} \quad (157)$$

Задача 49. Показать, что для простой функции f процесс $\{I_t(f), t \geq 0\}$ образует мартингал относительно фильтрации \mathbb{F} .

Имеем $E|I_t(f)| < \infty$, поскольку $I_t(f)$ представляет собой сумму интегрируемых функций. В самом деле, приращения винеровского процесса нормально распределены, а все Y_k квадратично интегрируемы по условию (приняли также во внимание, что если случайные величины $U, V \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, то $UV \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$).

Из формулы (156) видно, что \mathcal{F}_t -измеримы все слагаемые в ней, поэтому этим свойством обладает их сумма $I_t(f)$.

Убедимся, что для $0 \leq s < t$ верно равенство $E(I_t(f)|\mathcal{F}_s) = I_s(f)$. Действительно, при $t_k \leq s < t_{k+1}$, учитывая, что $s < t$ (откуда $s < t_{k+1} \wedge t$ и $t_k \wedge t = t_k$), получаем

$$\begin{aligned} E(Y_k(W(t_{k+1} \wedge t) - W(t_k \wedge t))|\mathcal{F}_s) &= \\ &= Y_k(E(W(t_{k+1} \wedge t \wedge s)|\mathcal{F}_s) - W(t_k)) = Y_k(W(t_{k+1} \wedge s) - W(t_k \wedge s)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(I_t(f)|\mathcal{F}_s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}(Y_k(W(t_{k+1} \wedge t) - W(t_k \wedge t))|\mathcal{F}_s) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(W(t_{k+1} \wedge s) - W(t_k \wedge s)) = I_s(f).\end{aligned}$$

Пользуясь (157), можно распространить интеграл Ито на более богатый класс функций, нежели простые. А именно, говорят, что f принадлежит классу J_2 , если она *неупреждающая*, т.е. $f(t, \cdot)$ является \mathcal{F}_t -измеримой и при всех $t > 0$

$$\mathsf{E} \int_0^t f^2(s, \omega) ds < \infty. \quad (158)$$

Если $f \in J_2$, то можно построить (см., например, [6, гл. 4]) такую последовательность простых функций $f_n \in J_2$, что для каждого $t > 0$

$$\mathsf{E} \int_0^t (f(s, \omega) - f_n(s, \omega))^2 ds \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда (поскольку последовательность, сходящаяся в полном пространстве $\mathbf{L}_t^2 := L^2(\Omega \times [0, t], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P} \otimes \mu_t)$, где μ_t — мера Лебега на $[0, t]$, является последовательностью Коши) также

$$\mathsf{E} \int_0^t (f_n(s, \omega) - f_m(s, \omega))^2 ds \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Из (157) вытекает, что при каждом $t > 0$

$$\mathsf{E}(I_t(f_n) - I_t(f_m))^2 = \mathsf{E} \int_0^t (f_n(s, \omega) - f_m(s, \omega))^2 ds.$$

Пространство $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ полно, и это влечет существование (в данном пространстве) предела последовательности $I_t(f_n)$ при $n \rightarrow \infty$. Этот предел обозначается $I_t(f)$.

Упражнение 139. Объясните, почему определение $I_t(f)$ для $f \in J_2$ не зависит от выбора аппроксимирующих функций $f_n \in J_2$, сходящихся при каждом $t > 0$ к f в пространстве \mathbf{L}_t^2 (берутся сужения всех функций на $[0, t] \times \Omega$).

Можно расширить (см., напр., [6]) класс простых функций до класса J_1 , состоящего из неупреждающих функций f таких, что при каждом $t > 0$

$$\mathbb{P} \left(\int_0^t f^2(s, \omega) ds < \infty \right) = 1.$$

Нетрудно показать, что при каждом $t > 0$ для всех случайных функций $f, g \in J_2$ (или для $f, g \in J_1$), а также произвольных чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ почти наверное

$$I_t(\alpha f + \beta g) = \alpha I_t(f) + \beta I_t(g),$$

т.е. интеграл Ито обладает свойством линейности.

При изучении интеграла Ито возникает ряд нетривиальных вопросов, связанных с различными понятиями измеримости интегрируемых функций (см., напр., [2, гл. VIII]).

Отметим, что ряд авторов предпочитает для интеграла Ито по винеровскому процессу использовать иное определение простой функции (а далее можно воспроизвести ту же схему аппроксимации простыми функциями), см., напр., [13]. Кроме того, можно вначале строить интеграл Ито на конечном промежутке $[0, T]$ (или же на всей полуоси $[0, \infty)$), а затем определять интеграл с переменным верхним пределом, интегрируя по фиксированному промежутку подынтегральную функцию, домноженную на $\mathbb{I}_{[0, t]}$.

Мы лишь отметим, что для неупреждающей “хорошей” (непрерывной в среднем квадратическом) функции f на $[0, t]$ оказывается

$$I_t(f) = \text{l.i.m.}_{\delta_n \rightarrow 0+} \sum_{k=0}^{m_n-1} f(t_k^{(n)})(W(t_{k+1}^{(n)}) - W(t_k^{(n)})), \quad (159)$$

где l.i.m. — предел в $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, берущийся при измельчении разбиений вида $0 = t_0^{(n)} < \dots < t_{m_n}^{(n)} = t$, т.е. когда

$$\delta_n := \max_{0 \leq k \leq m_n-1} (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \rightarrow 0+, \quad n \rightarrow \infty.$$

Пример 69. Вычислим

$$\int_0^t W(s)dW(s), \quad t > 0.$$

Пользуясь сделанным выше замечанием и результатом примера 29, получаем

$$\int_0^t W(s)dW(s) = \frac{W(t)^2}{2} - \frac{t}{2}.$$

Для интегрируемой по Ито на $[0, \infty)$ функции f и момента остановки τ введем

$$\int_0^\tau f(s)dW(s) := \int_0^\infty f(s)\mathbb{I}_{\{s<\tau\}}dW(s).$$

Упражнение 140. Пусть функция f интегрируема по Ито на $[0, \infty)$ и τ — момент остановки. Докажите, что если

$$\mathbb{E} \int_0^\tau f(s)^2 ds < \infty,$$

то

$$\mathbb{E} \left(\int_0^\tau f(s)dW(s) \right)^2 = \mathbb{E} \int_0^\tau f(s)^2 ds, \quad \mathbb{E} \int_0^\tau f(s)dW(s) = 0.$$

Задача 50. Пусть $f(t)$ — непрерывная детерминированная функция на $[0, \infty)$. Показать, что процесс $X = \{X(t) = \int_0^t f(s)dW(s), t \geq 0\}$ — гауссовский (поскольку таковым является винеровский процесс W).

Прежде всего заметим, что для каждого фиксированного $t > 0$ в силу (159) величина $I_t(f)$ является пределом в среднем квадратическом суммы независимых гауссовых величин вида $f(t_k^{(n)})(W(t_{k+1}^{(n)}) - W(t_k^{(n)}))$. Поэтому согласно задаче 18 получаем, что $I_t(f)$ — гауссовская величина. Далее убеждаемся, что для любых $0 < s < t$ величины $I_s(f)$ и $I_t(f) - I_s(f)$ — независимые гауссовые (в суммы, аппроксимирующие $I_t(f)$ в (159), можно включить суммы, приближающие $I_s(f)$). Аналогично показывается, что процесс $\{I_t(f), t \geq 0\}$ имеет независимые гауссовые приращения. Следовательно, этот процесс гауссовский. В самом деле, взяв $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leq t_1 < \dots < t_n$,

видим, что вектор $Z = (I_{t_1}(f), \dots, I_{t_n}(f))$ получается линейным преобразованием вектора приращений, который является гауссовским в силу того, что приращения независимые и гауссовые. Значит, (см. пример 12) вектор Z гауссовский.

Важная формула, позволяющая вычислять стохастические интегралы, устанавливается в следующем разделе.

8.2. Формула Ито

Пусть задано фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, т.е. вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) , снабженное некоторой фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Предполагается, что \mathbb{F} удовлетворяет *обычным условиям*, т.е. каждая σ -алгебра \mathcal{F}_t пополнена по мере P и $\cap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon} = \mathcal{F}_t$. Пусть на этом пространстве существуют винеровский процесс $W = \{W(t), t \geq 0\}$ (относительно фильтрации \mathbb{F} , см. пункт 8.1) и неупреждающие процессы $a = \{a(t), t \geq 0\}$ и $b = \{b(t), t \geq 0\}$ такие, что

$$\begin{aligned} P \left(\int_0^t |a(s, \omega)| ds < \infty \right) &= 1, \quad t > 0, \\ P \left(\int_0^t |b^2(s, \omega)| ds < \infty \right) &= 1, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Определение 41. Говорят, что случайный процесс $X = \{X(t), t \geq 0\}$, заданный на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) и согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, является *процессом Ито*, если

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, \omega) ds + \int_0^t b(s, \omega) dW(s), \quad (160)$$

где W — винеровский процесс, а X_0 — \mathcal{F}_0 -измеримая случайная величина. Интеграл от функции a понимается как интеграл Лебега, берущийся от траекторий, а интеграл от функции b — как интеграл Ито.

Вместо (160) используется формальная запись

$$dX(t) = a(t, \omega) dt + b(t, \omega) dW(t), \quad (161)$$

при этом говорят, что процесс X имеет *стохастический дифференциал*, задаваемый правой частью последней формулы. Подчеркнем, что в отличие от классического математического анализа стохастический дифференциал — это лишь удобная сокращенная форма записи интегрального соотношения (160).

Основой стохастического исчисления является следующий фундаментальный результат (см., напр., [6, гл. 4, §3]). Обратите внимание на отличие от выражения для дифференциала сложной функции в классическом анализе.

Теорема 27 (формула Ито). *Пусть $F(t, x)$ — функция класса $C^{1,2}$, заданная на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ (т.е. имеющая непрерывные производные $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$). Пусть процесс $X = \{X(t), t \geq 0\}$ имеет стохастический дифференциал (161). Тогда процесс $\{F(t, X(t)), t \geq 0\}$ также имеет стохастический дифференциал:*

$$dF(t, X(t)) = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(t, \omega) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(t, \omega) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt + \\ + \frac{\partial F}{\partial x} b(t, \omega) dW(t). \quad (162)$$

Иначе говоря, справедлива формула замены переменных в интегrale Ито:

$$F(t, X(t)) = F(0, X(0)) + \\ + \int_0^t \left[\frac{\partial F}{\partial s} + a(s, \omega) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(s, \omega) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] ds + \\ + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x} b(s, \omega) dW(s). \quad (163)$$

Аргументами частных производных функции F в (162) и (163) являются соответственно $(t, X(t))$ и $(s, X(s))$; аргумент ω , как у W , часто не пишут.

Формуле (162) можно придать более компактную форму записи:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dX(t))^2, \quad (164)$$

если всюду F понимать как $F(t, X(t))$ и принять соглашение о следующем формальном перемножении дифференциалов:

$$(dW(t))^2 = dt, \quad dW(t)dt = dt dW(t) = 0, \quad dt dt = 0.$$

Пример 70. Пусть $X(t) = W(t)$, $t \geq 0$, и $F(t, x) = x^2$ для $t \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}$. Найдем $dF(t, W(t))$.

Очевидно, $F \in C^{1,2}$ и $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2$. По формуле Ито (164)

$$dF(t, W(t)) = 2W(t)dW(t) + \frac{1}{2} \cdot 2(dW(t))^2,$$

т.е. $dW(t)^2 = 2W(t)dW(t) + dt$. Следовательно, для каждого $t > 0$ имеем

$$W(t)^2 = W(0)^2 + 2 \int_0^t W(s)dW(s) + \int_0^t ds.$$

В итоге

$$\int_0^t W(s)dW(s) = \frac{1}{2} W(t)^2 - \frac{t}{2}.$$

Таким образом, получили очень простой способ вычисления интеграла, фигурирующего в примере 69.

Пример 71. Пусть $F(t, x) = \exp\{x - \frac{t}{2}\}$, где $t \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}$. Найдем $dY(t)$ для процесса $Y(t) = F(t, W(t))$.

Очевидно, $F \in C^{1,2}$ и

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{1}{2} \exp\left\{x - \frac{t}{2}\right\}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \exp\left\{x - \frac{t}{2}\right\}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \exp\left\{x - \frac{t}{2}\right\}.$$

Согласно формуле Ито имеем

$$\begin{aligned} dF(t, W(t)) &= \\ &= -\frac{1}{2} F(t, W(t))dt + F(t, W(t))dW(t) + \frac{1}{2} F(t, W(t))(dW(t))^2, \end{aligned}$$

то есть

$$dF(t, W(t)) = F(t, W(t))dW(t).$$

Итак, для $Y(t) = F(t, X(t))$ получаем

$$dY(t) = Y(t)dW(t), \quad t > 0. \tag{165}$$

Следовательно, процесс $Y(t) = \exp\{W(t) - \frac{t}{2}\}$ удовлетворяет дифференциальному соотношению (165) (другими словами, соответствующему интегральному соотношению с начальным условием $Y(0) = 1$).

Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$ — данные числа. Введем процесс *геометрического (или экономического) броуновского движения*

$$S(t) = S(0)e^{\sigma W(t)+at-\frac{\sigma^2 t}{2}}, \quad t \geq 0.$$

Упражнение 141. Покажите, что стохастический дифференциал геометрического броуновского движения имеет вид

$$dS(t) = aS(t)dt + \sigma S(t)dW(t). \quad (166)$$

Задача 51. Пусть $\tau = \inf\{t > 0 : |W(t)| = a\}$, следовательно, τ — момент первого выхода винеровского процесса из полосы на плоскости (t, y) с границами $y = -a$ и $y = a$, где $a > 0$. Найти $E\tau$.

В силу упр. 91 можем утверждать, что τ — момент остановки. Возьмем функцию $u(x) = a^2 - x^2$, где $x \in \mathbb{R}$. По формуле Ито

$$u(W(t)) = -t - \int_0^t 2W(s)dW(s) + a^2.$$

Для $t > 0$ введем ограниченный момент остановки $t \wedge \tau$. Поскольку $|W(s)| \leq a$ при $s \leq \tau$, то

$$E \int_0^{t \wedge \tau} |W(s)|^2 ds \leq a^2 t.$$

Следовательно, сославшись на результат упр. 140, имеем

$$\begin{aligned} E \int_0^{t \wedge \tau} W(s)dW(s) &= 0, \\ Eu(W(t \wedge \tau)) &= -E(t \wedge \tau) + a^2, \end{aligned}$$

так как

$$E \int_0^{t \wedge \tau} W(s)dW(s) = 0.$$

Таким образом, $\mathbb{E}(t \wedge \tau) = a^2 - \mathbb{E}u(W(t \wedge \tau))$. Заметим, что при $t \rightarrow \infty$ на событии $\{\tau < \infty\}$, имеющем вероятность единицы, получаем $u(W(t \wedge \tau)) \rightarrow u(W(\tau)) = 0$ (учли непрерывность функции u и винеровского процесса W). Принимая во внимание, что $0 \leq u(W(t \wedge \tau)) \leq a^2$ для $t \geq 0$, а также применяя теоремы 1 и 2 (о монотонной и о мажорируемой сходимости), имеем

$$\mathbb{E}\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(t \wedge \tau) = a^2 - \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}u(W(t \wedge \tau)) = a^2.$$

Упражнение 142. Для $a, \sigma > 0$ положим $X(t) = \int_0^t e^{-as} dW(s)$, $t \geq 0$. Найдите $dY(t)$, где $Y(t) = F(t, X(t))$, а функция $F(t, x) = \sigma e^{at}x$, $t \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}$.

Упражнение 143. Докажите, что

$$dW(t)^n = \frac{n(n-1)}{2} W(t)^{n-2} dt + nW(t)^{n-1} dW(t),$$

где W — винеровский процесс.

8.3. Стохастические дифференциальные уравнения

Стochasticеское дифференциальное уравнение Ито

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t) \quad (167)$$

с коэффициентами a, b и начальным условием X_0 понимается как удобная запись интегрального уравнения (первый интеграл — потраекторный, второй — интеграл Ито)

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dW(s), t \geq 0. \quad (168)$$

Точнее говоря, предполагается \mathcal{F}_0 -измеримость величины $X(0) = X_0$ и рассматривается *сильное решение* $X = \{X(t), t \geq 0\}$. Это процесс с п.и. непрерывными траекториями, согласованный с фильтрацией (т.е. при каждом $t > 0$ величина $X(t)$ будет \mathcal{F}_t -измерима), кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\int_0^t |a(s, X(s))| ds < \infty \right) &= 1, \\ \mathbb{P} \left(\int_0^t b^2(s, X(s)) ds < \infty \right) &= 1, \end{aligned}$$

а при подстановке X в левую и правую части (168) при каждом $t > 0$ получатся равные п.н. случайные величины. Разумеется, можно рассматривать уравнение (168) лишь на отрезке $[0, T]$, а не на $[0, \infty)$.

Хорошо известно, что даже для детерминированных обыкновенных дифференциальных уравнений приходится налагать условия на коэффициенты, чтобы обеспечить существование и единственность решения задачи Коши. Поэтому ничего удивительного в том, что та же ситуация возникает и при решении стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Говорят, что измеримая функция $f = f(t, x)$, определенная на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, удовлетворяет по переменной x *локальному условию Липшица*, если для каждого $n \in \mathbb{N}$, всех $t \geq 0$ и произвольных $x, y \in [-n, n]$ верно неравенство

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq C(n)|x - y|,$$

где множитель $C(n) > 0$ зависит лишь от n .

Функция $f = f(t, x)$ называется удовлетворяющей *условию линейного роста* по переменной x , если для всех $t \geq 0$, любых $x \in \mathbb{R}$ и некоторой константы $c > 0$

$$|f(t, x)| \leq c|x|.$$

Теорема 28. Пусть коэффициенты $a = a(t, x)$ и $b = b(t, x)$ уравнения (167) удовлетворяют локальному условию Липшица и условию линейного роста (оба условия — по переменной x). Тогда для любой \mathcal{F}_0 -измеримой величины X_0 указанное уравнение имеет единственное сильное решение X , являющееся марковским процессом.

Единственность решения понимается в том смысле, что если процесс $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ также является сильным решением (167), то для каждого $t > 0$

$$\mathsf{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X(s) - Y(s)| > 0 \right) = 0.$$

Другими словами, траектории X и Y являются *неотличимыми*.

Рассмотрим классическое уравнение Ланжевена, описывающее движение частицы в жидкости. Оно имеет вид

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -\beta v(t) + \gamma \frac{dW(t)}{dt}, \quad t \geq 0, \quad (169)$$

здесь $v = v(t)$ — скорость частицы, m — ее масса, β — положительная константа, характеризующая вязкость жидкости, а $W = \{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. В правой части (169) формально фигурирует производная винеровского процесса, которая не существует ни в одной точке (см. теорему 14). Это “нерегулярное” слагаемое в правой части уравнения (не существующее в смысле обычного дифференциального исчисления) должно описывать “хаотические” соударения движущейся частицы с молекулами жидкости.

Уравнению (169) легко придать строгий смысл, переписав его в дифференциальной форме как уравнение Ито:

$$dV(t) = aV(t)dt + \sigma dW(t), \quad t \geq 0, \quad (170)$$

здесь $a = -\frac{\beta}{m} < 0$ и $\sigma = \frac{1}{m} > 0$, а $V(0) = V_0$.

Задача 52. Показать, что сильное решение уравнения Ланжевена задается формулой

$$V(t) = V_0 e^{at} + \sigma \int_0^t e^{a(t-s)} dW(s), \quad t \geq 0.$$

Воспользуемся формулой Ито. Положим

$$X(t) = \int_0^t e^{-as} dW(s), \quad t \geq 0.$$

Пусть $F(t, x) = \sigma e^{at} x$, где $t \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}$. Найдем $dF(t, X(t))$. Заметим, что $dX(t) = e^{-at} dW(t)$ и по определению интеграла Ито $X(0) = 0$. Очевидно, $F \in C^{1,2}$ и

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sigma a e^{at} x, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \sigma e^{at}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} dF(t, X(t)) &= \sigma a e^{at} X(t) dt + \sigma e^{at} dX(t) = \sigma a e^{at} X(t) dt + \sigma dW(t) = \\ &= aF(t, X(t)) dt + \sigma dW(t). \end{aligned} \quad (171)$$

Сопоставляя (170) и (171), приходим к выводу (учитывая единственность сильного решения уравнения Ланжевена, поскольку выполнены условия теоремы 28), что

$$F(t, W(t)) = \sigma e^{at} \int_0^t e^{-as} W(s) ds, \quad t \geq 0,$$

является (сильным) решением (170). Однако для этого решения $F(0, W(0)) = 0$, а нам требуется обеспечить условие $V(0) = V_0$. Рассмотрим $Z(t) = V_0 e^{at}$, $t \geq 0$. Ясно, что $Z(0) = V_0$. Покажем, что $dZ(t) = ae^{at} V_0 dt$. Действительно,

$$V_0 + \int_0^t ae^{as} V_0 ds = V_0 + V_0 e^{as}|_0^t = V_0 e^{at} = Z(t).$$

Определим

$$V(t) = Z(t) + F(t, W(t)), \quad t \geq 0.$$

Тогда $V(0) = V_0$ и

$$\begin{aligned} dV(t) &= dZ(t) + dF(t, W(t)) = aZ(t)dt + aF(t, X(t)) + \sigma dW(t) = \\ &= aV(t) + \sigma dW(t). \end{aligned}$$

Итак, искомое решение найдено:

$$V(t) = V_0 e^{at} + \sigma \int_0^t e^{a(t-s)} dW(s), \quad t \geq 0, \quad V(0) = V_0. \quad (172)$$

Задача 53. Пусть V_0 — гауссовская величина. Убедиться, что решение уравнения Ланжевена (172) является гауссовским процессом.

Согласно задаче 50 процесс

$$Z(t) = \int_0^t e^{-as} dW(s), \quad s \geq 0,$$

будет гауссовским, а значит, будет гауссовским и процесс

$$Y = \left\{ Y(t) = \sigma \int_0^t e^{a(t-s)} dW(s), t \geq 0 \right\},$$

получающийся умножением гауссовского процесса на детерминированную функцию.

Покажем теперь, что процесс Y и случайная величина V_0 являются независимыми. Достаточно проверить, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ и любых $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ вектор $(Y(t_1), \dots, Y(t_n))$ не зависит от V_0 . Для этого надо учесть, что векторы, аппроксимирующие $(Y(t_1), \dots, Y(t_n))$ в соответствии с задачей 50, не зависят от V_0 , поскольку в этих приближающих векторах фигурируют приращения винеровского процесса, а они не зависят от σ -алгебры \mathcal{F}_0 , относительно которой V_0 измерима. Теперь очевидно, что все конечномерные распределения процесса Y являются гауссовскими.

Упражнение 144. Пусть $V_0 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$, где $\alpha = -a > 0$ (параметр a тот же, что в уравнении (170)). Докажите, что решение уравнения Ланжевена с таким начальным условием есть процесс Орнштейна–Уленбека, т.е. гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$\text{cov}(V(s), V(t)) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|s-t|}, \quad s, t \geq 0.$$

Упражнение 145. Решить стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = aX(t) + bX(t)dW_t,$$

где $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс, a, b — константы, а $X(0) = X_0$.

Упражнение 146* (см. [13, т. 1, с. 323]). Докажите, что уравнение

$$dX(t) = \sigma(X(t))dW(t), \quad X(0) = 0,$$

где

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

на некотором вероятностном пространстве может иметь два различных сильных решения, а на некотором — ни одного.

Интересно отметить, что единственное сильное решение может существовать и у стохастического дифференциального

уравнения с “плохими” коэффициентами (не требуется выполнение локального условия Липшица).

8.4. Некоторые задачи стохастической финансовой математики

Для описания эволюции стоимости акций Л. Башелье в 1900 году предложил следующую линейную модель:

$$S(t) = S_0 + \mu t + \sigma W(t), \quad t \geq 0, \quad (173)$$

где $W = \{W(t), t \geq 0\}$ — броуновское движение, μ и σ — положительные параметры. Точнее говоря, процесс броуновского движения возникал как предельный процесс в схеме, аналогичной той, которая описана в пункте 4.1.

Эта первая стохастическая модель, примененная для анализа финансового рынка, имеет тот недостаток, что стоимость акций не может быть отрицательной, а процесс $S = \{S(t), t \geq 0\}$, введенный в (173), может принимать и отрицательные значения.

В этом смысле более привлекательной является модель, предложенная П. Самуэльсоном в 1965 году. В рамках этой модели флуктуации стоимости акций описываются геометрическим броуновским движением

$$S(t) = S_0 e^{\mu t} e^{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}}, \quad t \geq 0. \quad (174)$$

Иначе говоря, не величины $S(t)$, а их логарифмы подчиняются линейной модели типа (173):

$$\ln \frac{S(t)}{S(0)} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t), \quad t \geq 0.$$

Формально в дифференциальной форме формулу (174) можно переписать (см. упр. 141) так:

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)). \quad (175)$$

Если к (175) добавляется стохастическое дифференциальное уравнение

$$dB(t) = rB(t)dt$$

для банковского счета $B = \{B(t), t \geq 0\}$ с (постоянной) процентной ставкой $r > 0$, то говорят, что задана стандартная диффузионная (B, S) -модель Блэка–Шоулса–Мертона (предполагается, что $B(0) = 1$ и $S(0) = S_0 > 0$).

Имеется множество усложнений этой модели (см., напр., [13, т. 1, гл. 3]). Так, очевидно напрашивающееся усовершенствование состоит в замене постоянных r, μ и σ на случайные функции $r(t), \mu(t)$ и $\sigma(t)$.

Для того чтобы дать читателю лишь начальное представление о сложных современных стохастических проблемах, рассмотрим классическую задачу о цене опциона. Не вдаваясь в детали (см., напр., [13, т. 2, гл. 8]; [7, гл. 12]), скажем, что на бирже в момент $t_0 = 0$ может быть заключена сделка, гарантирующая, что сумма $F(\omega)$ будет выплачена в момент времени $T > 0$ (говорят, что F есть T -иск). Нетривиальная задача — понять, какова должна быть “справедливая” плата за такую гарантию (которая устроила бы как покупателя, так и продавца).

Исследование этого вопроса должно начинаться с формулировки определенной экстремальной задачи (и требует целого ряда новых понятий, таких, как допустимый портфель ценных бумаг, хеджирование и т.д.). Поэтому ограничимся лишь формулировкой классического результата.

Рассмотрим европейский опцион-колл (call), определяемый формулой

$$F(\omega) = (S(T, \omega) - K)^+ = \begin{cases} S(T, \omega) - K, & \text{если } S(T, \omega) \geq K, \\ 0, & \text{если } S(T, \omega) < K, \end{cases}$$

где $K > 0$ — заданная константа (*цена исполнения опциона*).

Заметим, что опцион-колл дает право на покупку акции через время T по заранее назначенней цене K , а опцион-пут (put) дает аналогичное право на продажу акции. Кроме того, существуют так называемые американские опционы, которые позволяют производить сделки, не дожидаясь истечения времени T .

Формула Блэка–Шоулса расчета опциона-колл, т.е. той цены, которая назначается за сделку, приобретает вид (см., напр., [13, с. 913])

$$C = S_0 \Phi \left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{T}} \right) - K e^{-rT} \Phi \left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{T}} \right),$$

где Φ — функция распределения стандартной гауссовой величины.

Отметим также, что сложности современных финансовых задач связаны еще с тем, что имеется целое множество *рисковых активов*, т.е. изучается векторный процесс $S = \{S(t), t \geq 0\}$, а кроме того, необходимо уметь описывать состояние самого рынка (например, его *полноту*). Для этого применяются весьма изощренные методы стохастического анализа (в частности, используется теория локальных мартингалов, семимартингалов и т.д.).

ПРОГРАММА

курса “Стохастические процессы” (семестр — 7),
лекции — 34 часа, семинарские занятия — 17 часов

1. Примеры случайных процессов, основанные на последовательностях независимых случайных величин (случайные блуждания, процессы восстановления, модель страхования Крамера–Лундберга).
2. Случайные процессы как семейства измеримых отображений. Траектории (реализации, выборочные функции). Процессы с дискретным и непрерывным временем. Конечномерные распределения. Понятие эквивалентности случайных процессов.
3. Теорема Колмогорова о построении случайного процесса по заданному семейству согласованных вероятностных мер. Формулировка этой теоремы на языке характеристических функций.
4. Многомерное нормальное распределение, его свойства. Гауссовские процессы. Построение согласованных распределений по функции среднего и ковариационной функции.
5. Процессы с независимыми приращениями. Существование таких процессов в терминах характеристических функций приращений.
6. Броуновское движение (винеровский процесс), его свойства. Доказательство эквивалентности двух определений (как гауссовского процесса и процесса с независимыми приращениями).
7. Построение броуновского движения по функциям Шaudera.
8. Теорема Пэли–Винера–Зигмунда о недифференцируемости траекторий броуновского движения.
9. Пуассоновский процесс, его свойства. Явная конструкция по последовательности независимых экспоненциальных случайных величин.

10. Аппарат условных математических ожиданий. Наилучший прогноз в среднем квадратическом.
11. Марковские процессы, эквивалентные определения. Цепи Маркова с непрерывным временем.
12. Марковость процесса с независимыми приращениями.
13. Эквивалентность двух определений пуассоновского процесса (как процесса с независимыми приращениями и марковской цепи).
14. Эргодическая теорема.
15. Понятие о системах массового обслуживания. Формулы Эрланга.
16. Мартингалы (субмартингалы), примеры. Моменты остановки.
17. Задача о разорении игрока.
18. Неравенство Крамера–Лундберга.
19. Процессы, стационарные в широком и узком смыслах.
Понятие о спектральном представлении случайных процессов.
20. Построение интеграла Ито.
21. Свойства интеграла Ито. Формула Ито.
22. Понятие о стохастическом дифференциальном уравнении и его решениях.

ЗАДАНИЕ 1

ПРИМЕРЫ ПРОЦЕССОВ, КОНЕЧНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ТРАЕКТОРИЙ

1. Случайная величина ξ принимает значения -1 и 1 с равными вероятностями. Как выглядят траектории процесса $X = \{X(t) = e^{\xi t}, t \in [0, 1]\}$? Найти двумерные распределения процесса и его ковариационную функцию.
2. Пусть $X = \{X(t) = \xi \cdot t + c, t \geq 0\}$, где $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $c = \text{const}$. Найти конечномерные распределения процесса X .

3. Привести пример процессов $X = \{X(t), t \in T\}$, $Y = \{Y(t), t \in T\}$ и такого множества C в пространстве траекторий, что $\{X \in C\} \in \mathcal{F}$, а $\{Y \in C\} \notin \mathcal{F}$

4. Верно ли, что если у процессов $X = \{X(t), t \in T\}$ и $Y = \{Y(t), t \in T\}$ совпадают конечномерные распределения, то процесс Y является модификацией процесса X ?

5. Пусть $X = \{X(t) = V + t, t \geq 0\}$, где V имеет экспоненциальное распределение с параметром λ . Найти вероятность того, что $X(t) = 0$ хотя бы для одного $t \in [-1, 1]$.

6. Введем процесс $X = \{X(t) = (\xi_1 + \dots + \xi_k)t, t \geq 0\}$, где ξ_1, \dots, ξ_k — независимые $\mathcal{N}(0, 1)$ величины. Найти конечномерные распределения процесса X и его ковариационную функцию.

ПРОЦЕССЫ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ, ГАУССОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

7. Пусть $X = \{X(t), t \geq 0\}$ — процесс с независимыми приращениями, $h = h(t)$ ($t \geq 0$) — детерминированная функция. Верно ли, что процессы $\{X(t) + h(t), t \geq 0\}$ и $\{h(t)X(t), t \geq 0\}$ имеют независимые приращения?

8. Пусть $X(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t))$, где $t \geq 0$, — векторный процесс, составленный из независимых винеровских процессов. Доказать, что с вероятностью единица процесс X выйдет из шара произвольного радиуса $R > 0$.

9. Доказать, что $\sum_{k=1}^n \left| W\left(\frac{k}{n}\right) - W\left(\frac{k-1}{n}\right) \right| \rightarrow \infty$ по вероятности, когда $n \rightarrow \infty$, здесь W — винеровский процесс.

10. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ . Доказать, что $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \lambda$ по вероятности при $t \rightarrow \infty$.

11. Пусть N_1, \dots, N_n — независимые пуассоновские процессы соответственно интенсивностей $\lambda_k = k^{-4}$, где $k = 1, \dots, n$. Найти ковариационную функцию процесса $X_n(t) = \sum_{k=1}^n kN_k(t)$, $t \geq 0$. Чему эквивалентна ковариация $X_n(s)$ и $X_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$?

12. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ , заданный как процесс восстановления. Пусть $t_1(\omega) < t_2(\omega) < \dots$ — точки скачков N . Положим $X(t, \omega) = Y_k$ для $t \in [t_k, t_{k+1})$, где $k = 0, 1, \dots$, а $(Y_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ — последовательность независимых величин, не зависящих от процесса N . Найти ковариационную функцию X , если $EY_k = -1$, $EY_k^2 = 2$.

13. Пусть $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность независимых случайных величин, не зависящая от пуассоновского процесса N интенсивности λ . Доказать, что процесс $Y(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$ является процессом с независимыми приращениями.

14. Доказать, что процесс $X = \{\frac{1}{\sqrt{c}} W(ct), t \geq 0\}$, где W — винеровский процесс и константа $c > 0$, также является винеровским.

15. Показать, что процесс $X = \{X(t) = W(t+a) - W(a), t \geq 0\}$, где W — винеровский процесс и константа $a > 0$, является винеровским.

16. Найти ковариационную функцию броуновского моста, т.е. процесса $W_0 = \{W_0(t) := W(t) - tW(1), t \in [0, 1]\}$, где W — винеровский процесс.

МАРКОВСКИЕ МОМЕНТЫ, МАРТИНГАЛЫ

17. Пусть τ_1, τ_2, \dots — марковские моменты. Доказать, что $\min_{k=1, \dots, n} \tau_k, \max_{k=1, \dots, n} \tau_k, \min_{k \in \mathbb{N}} \tau_k, \max_{k \in \mathbb{N}} \tau_k$ — марковские моменты.

18. Пусть X_1, X_2, \dots — последовательность случайных векторов со значениями в \mathbb{R}^m , B — борелевское множество в \mathbb{R}^m . Показать, что $\tau = \inf\{n : X_n \in B\}$ является марковским моментом относительно естественной фильтрации этой последовательности. Найти распределение величины X_τ , когда $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ состоит из независимых одинаково распределенных векторов.

19*. Пусть W — винеровский процесс, a — константа и $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : W(t) = a\}$. Доказать, что τ_a — момент остановки (т.е. конечный п.н. марковский момент) относительно естественной фильтрации W .

20. Показать, что винеровский процесс $W = \{W(t), t \geq 0\}$ является мартингалом относительно своей естественной фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Кроме того, процесс $(W(t)^2 - t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ также мартингал.

21. Пусть $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — мартингал. Привести примеры марковских моментов τ и σ таких, что $\mathbf{E}X_\tau = \mathbf{E}X_0$, а $\mathbf{E}X_\sigma \neq \mathbf{E}X_0$.

ЗАДАНИЕ 2

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

22. Привести примеры марковского и немарковского процессов.

23. Пусть $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность, состоящая из независимых случайных векторов со значениями в \mathbb{R}^m , функции $h_n : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ — детерминированные борелевские ($n \in \mathbb{N}$) и X_0 — случайный вектор со значениями в \mathbb{R}^k , не зависящий от последовательности $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Положим $X_n = h_n(X_{n-1}, \xi_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Показать, что $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ — цепь Маркова.

24. Пусть величины X_1, \dots, X_N образуют цепь Маркова. Показать, что $(Y_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ — цепь Маркова, где $Y_k = X_{N-k}$, $k = 0, \dots, N-1$. Найти переходные вероятности.

25. Пусть $N = \{N(t), t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс. Будет ли марковским процесс $X = \{X(t) = N^2(t), t \geq 0\}$?

26. Пусть $Y = \{Y(n), n = 0, 1, \dots\}$ — марковский процесс. Будет ли марковским процесс $X = \{X(t) = Y([t]), t \geq 0\}$, где $[\cdot]$ — целая часть числа?

27. Пусть дана марковская цепь $X_n, n \in \mathbb{Z}_+$, имеющая переходную матрицу вероятностей за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix},$$

где $0 < \alpha < 1$. Найти стационарное распределение.

28. Привести пример мартингала, не являющегося марковским процессом. Привести пример марковского процесса,

не являющегося мартингалом. Привести пример марковского процесса, являющегося мартингалом.

29*. Докажите, что процесс с независимыми приращениями является марковским.

30. Найти ковариационную функцию пуассоновского процесса, отправляясь от его определения как однородной марковской цепи.

СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

31. Привести пример процесса, стационарного в широком смысле, но нестационарного в узком смысле. Привести пример процесса, стационарного в узком смысле, но нестационарного в широком смысле.

32. Объяснить, почему для гауссовских процессов понятия стационарности в узком и широком смыслах совпадают.

33. Показать, что стационарный в широком смысле процесс $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ непрерывен в среднем квадратическом на \mathbb{R} тогда и только тогда, когда его ковариационная функция непрерывна в нуле.

34. Пусть $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ — последовательность, состоящая из независимых случайных величин со средним 0 и дисперсией σ^2 . Найти спектральное представление этой последовательности.

35. Пусть $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ — стационарный в широком смысле процесс со средним a и ковариационной функцией $R = R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Доказать, что $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow a$ в среднем квадратическом при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда в среднем квадратическом $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

36. Пусть $X = \{X(t) = e^{-\alpha t} W(e^{2\alpha t}), t \in \mathbb{R}\}$, где W — винеровский процесс, константа $\alpha > 0$. Доказать, что X — стационарный гауссовский процесс и найти его спектральную плотность.

ЭЛЕМЕНТЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

37. Пусть $f(t)$ — непрерывная детерминированная функция на $[0, \infty)$. Доказать, что $X = \{X(t) = \int_0^t f(u)dW_u, t \geq 0\}$ — гауссовский процесс (W — винеровский процесс).

38. Вычислить интеграл Ито $\int_0^T W_t dW_t$, где W — винеровский процесс.

39. Пользуясь формулой Ито, найти стохастический дифференциал процесса $Y(t) = \exp\{2W^2(t) - t\}$, $t \geq 0$, где W — винеровский процесс.

40. Решить стохастическое дифференциальное уравнение $dX_t = aX(t) + bX(t)dW_t$, где $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс, a, b — константы, а $X(0) = X_0$.

Литература

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. – 3-е изд. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 472 с.
2. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 408 с.
3. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. – 2-е изд. – М.: Наука, 1996. – 400 с.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1991. – 296 с.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 624 с.
6. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
7. Оксендалль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения: Пер с англ. М.: Мир, 2003. – 408 с.
8. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. – 2-е изд. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
9. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. – 2-е изд. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 272 с.
10. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей и случайных процессов. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 400 с.
11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2 т. Пер. с англ. Т. 1. – М.: Мир, 1984. – 528 с. Т. 2. – М.: Мир, 1984. – 738 с.
12. Ширяев А.Н. Вероятность: В 2-х кн. – 4-е изд. – М.: МЦНМО, 2007. Кн. 1. – 552 с. Кн. 2. – 416 с.
13. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. В 2 т. М.: Фазис, 1998. Т. 1. Факты. Модели. – 512 с. Т. 2. Теория. – 544 с.

Учебное издание

БУЛИНСКИЙ Андрей Вадимович

**СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ.
ПРИМЕРЫ, ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ**

Редактор *И.А. Волкова*
Корректор *О.П. Котова*

Подписано в печать 04.06.2010. Формат 60 × 84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,5. Уч.-изд. л. 12,7. Тираж 600 экз.
Заказ № ф-112

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Отдел автоматизированных издательских систем «ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9