Приближенное решение дифференциального уравнения

Михайлин Д.А.

20 ноября 2018 г.

Постановка задачи

Требуется найти приближенное обобщенное решение задачи

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = f(x), \quad x \in [0, 10], \text{ где}$$

$$f(x) = \sin x$$
$$k(x) = \begin{cases} 1, x \in [0, 3] \cup [7, 10] \\ 3, x \in (3, 7) \end{cases}$$
$$q(x) = \begin{cases} 1, x \in [0, 3] \cup [7, 10] \\ 3, x \in (3, 7) \end{cases}$$

с краевыми условиями

$$(k(x)\frac{du}{dx} - 0.1u)\Big|_{x=0} = 0$$
$$u(x)\Big|_{x=10} = 1$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

Решением данной задачи является такая функция u, что функции u и ku' непрерывны на $[0, 10]$. Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что при кусочно гладких коэффициентах $k(x), q(x)$ и $f(x)$ данная задача имеет единственное решение.

Построение разностной схемы для уравнения и краевых условий

Так как существуют точки разрыва функции $k(x)$ на отрезке [010] будем рассматривать интегральное соотношение:

$$\int_{x1}^{x2} (q(x)u(x) + f(x))dx = k(x)y'\Big|_{x1}^{x2} \tag{1}$$

Это соотношение должно выполняться для любых x_1, x_2 из отрезка $[0, 10]$. Будем искать решение $u(x)$, удовлетворяющее условиям:

1. $u(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 10]$
2. $u(x)$ удовлетворяет исходному уравнению всюду, за исключением точек 3 и 7.
3. Поток $w(x) = k(x)u'(x)$ непрерывен на $[0, 10]$

Пусть $N \in \mathbb{N}$ – количество отрезков, на которые разбивается исходный отрезок $[a, b]$. Возьмем шаг $h = \frac{b-a}{N}$, узлы сетки $x_n = a + nh$, y_n – приближение к значениям $u_n = u(x_n)$. Представим функцию $u(x)$, как $u(x) = u_i + O(h)$, $x - x_i = O(h)$ на отрезке $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, где $x_{i+1/2} = x_i + h/2$. Подставим это в выражение выше и проинтегрируем по отрезку $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_i i+1/2} (q(x)u(x) + f(x))dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_i i+1/2} (q(x)(u_i + O(h)) + f(x))dx =$$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_i i+1/2} q(x)u_i dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_i i+1/2} f(x)dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_i i+1/2} q(x)O(h)dx = h(\tilde{q}_i u_i + \tilde{f}_i) + O(h^2)$$

$$\tilde{q}_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_i i+1/2} q(x)dx \tag{2}$$

$$\tilde{f}_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_i i+1/2} f(x)dx \tag{3}$$

Таким образом получаем следующее выражение:

$$w(x_{i+1/2}) - w(x_{i-1/2}) = h(\tilde{q}_i u_i + \tilde{f}_i) + O(h^2)$$
$$w(x_{i+1/2}) - w(x_{i-1/2})/h - \tilde{q}_i u_i = \tilde{f}_i + O(h)$$

$$u'(x) = \frac{w(x)}{k(x)}$$

и $w(x) = w(x_{i+1/2}) + O(h)$ $h = x - x_{i+1/2}$. Проинтегрируем по отрезку $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x)dx = u_{i+1} - u_i = w(x_{i+1/2})\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)} + O(h^2)$$

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h) = w(x_{i+1/2})$$

где

$$\tilde{k_{i+1/2}} = \Big(\frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)}\Big)^{-1}$$

Таким образом разностная схема имеет вид:

$$L_h(u)\Big|_{x=x_n} = \frac{\tilde{k_{n+1/2}}(u_{n+1}-u_n) - \tilde{k_{n-1/2}}(u_n - u_{n-1}}{h^2} - \tilde{q_n}u_n = \tilde{f_n}n = 1, 2...N-1$$

Будем считать, что N нацело делится на $b-a$, тогда коэффициенты $k(x)$ и $q(x)$ постоянны на каждом отрезке $[x_n, x_{n+1}]$. В таком случае, мы можем явно выписать $\tilde{k_{n+1/2}}, \tilde{q_n}$ и $\tilde{f_n}$:

$$\tilde{k}_{n+1/2} = \Big(\frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)}\Big)^{-1}$$

$$\tilde{q_n} = \frac{1}{h}\int_{x_i-1/2}^{x_{i+1/2}} q(x)dx = \frac{q_{n-1/2}+q_{n+1/2}}{2}$$

$$\tilde{f_n} = \frac{1}{h}\int_{x_i-1/2}^{x_{i+1/2}} f(x)dx = \frac{1}{h}(cos(x_{n-1/2}) - cos(x_{n+1/2}))$$

Порядок аппроксимации

Необходимо показать, что:

$$||L_h[u]_h - \tilde{f_n}|| = O(h^2)$$

Так как можем брать любую норму, возмем следующую:

$$||[u]_n|| = h\sum_{n=0}^{N}|u_n|$$

Оценки погрешности аппроксимации граничных условий

В правой границе аппроксимируем граничное условие следующим образом:

$$u_0 = 1$$

Так как в $x = 10$ краевое условие первого порядка - следовательно аппроксимация точна.
Для аппроксимации условия в левом конце воспользуемся формулой Тейлора в

точке x_0 и подставим в разложение функции u точку x_1.

$$u(x) = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + \frac{u''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3)$$
$$u_1 = u_0 - u'(x_0)h + \frac{u''(x_0)}{2}h^2 + O(h^3)$$
$$u'(x_0) = \frac{u_0 - u_1}{h} + \frac{u''(x_0)}{2}h + O(h^2)$$
$$k_0 u'(x_0) - 0.1u_0 = k_0\Big[\frac{u_0 - u_1}{h} + \frac{u''(x_0)}{2}h + O(h^2)\Big] - 0.1u_0 = 0$$

По условию:

$$u''(x_0) = \frac{q_0 u_0 + f_0}{k_0}$$
$$k_0\frac{u_0 - u_1}{h} + \frac{q_0 u_0 + f_0}{2}h - 0.1u_0 = O(h^2)$$

Следовательно оценка погрешности имеет второй порядок.

Погрешность аппроксимации уравнения

Рассмотрим сначала такие n, что x_n не попадают в точки разрыва k(x) и q(x). Для таких n на отрезке $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ справедливы следующие равенства:

$$u_{n+1} = u_n + u'_n h + \frac{u''_n}{2}h^2 + \frac{u'''_n}{6}h^3 + O(h^4)$$
$$u_{n-1} = u_n - u'_n h + \frac{u''_n}{2}h^2 - \frac{u'''_n}{6}h^3 + O(h^4)$$

Преобразуем данные разложения следующим образом:

$$\tilde{k}_{n+1/2}\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \tilde{k}_{n+1/2}\Big(u'_n + \frac{u''_n}{2}h + \frac{u'''_n}{6}h^2 + O(h^3)\Big) \tag{4}$$
$$\tilde{k}_{n-1/2}\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = \tilde{k}_{n-1/2}\Big(u'_n - \frac{u''_n}{2}h + \frac{u'''_n}{6}h^2 + O(h^3)\Big) \tag{5}$$

Так как k(x) не меняет значения на отрезке $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ то

$$\frac{\tilde{k}_{n+1/2}(u_{n+1} - u_n) - \tilde{k}_{n-1/2}(u_n - u_{n-1})}{h^2} = k_n(u''_n + O(h^2))$$

Так как, q(x) не меняет значения на отрезке $[x_{n-1}, x_{n+1}]$, получим:

$$L_h(u) - \tilde{f}_n = \frac{\tilde{k}_{n+1/2}(u_{n+1} - u_n) - \tilde{k}_{n-1/2}(u_n - un - 1)}{h^2} - \tilde{q}_n u_n - \tilde{f}_n = k_n u''_n - q_n u_n - \tilde{f}_n + O(h^2) =$$
$$f_n - \tilde{f}_n + O(h^2) = O(h^2) \tag{6}$$

Покажем, что $f_n - \tilde{f}_n = O(h^2)$

$$\tilde{f}_n = \frac{1}{h}\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} sin(x)dx = \frac{1}{h}(cos(x_{n-1/2}) - cos(x_{n+1/2}))$$

$$f_n - \tilde{f}_n = sin(x_n) - \frac{1}{h}(cos(x_{n-1/2}) - cos(x_{n+1/2})) =$$

$$sin(x_n) - \frac{1}{h}(cos(x_n)cos(\frac{h}{2}) + sin(x_n)sin\frac{h}{2} - cos(x_n)cos(\frac{h}{2}) + sin(x_n)sin(\frac{h}{2})) \tag{7}$$

$$= sin(x_n) - \frac{2}{h}(sin(x_n)sin(\frac{h}{2})) = \frac{2}{h}sin(x_n)(\frac{h}{2} - sin(\frac{h}{2})) = \frac{2}{h}O(h^3) = O(h^2) \tag{8}$$

Рассмотрим теперь такие n, что $k(x)$ и $q(x)$ разрывны в точках x_n. В x_n функция u имеет непрерывные правые и левые производные, следовательно, можно записать:

$$u_{n+1} = u_n + hu'_{n,r} + \frac{h^2}{2}u''_{n,r} + O(h^3),$$
$$u_{n-1} = u_n - hu'_{n,l} + \frac{h^2}{2}u''_{n,l} + O(h^3),$$

где вторые нижние индексы у производных u обозначают правую (r) и левую (l) производные соответственно. Далее:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \left(u'_{n,r} + \frac{h}{2}u''_{n,r} + O(h^2)\right)$$
$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = \left(u'_{n,l} - \frac{h}{2}u''_{n,l} + O(h^2)\right)$$

Из условия непрерывности ku' имеем $k_{n+1/2}u'_{n,r} = k_{n-1/2}u'_{n,l}$. Воспользовавшись вышедоказанным равенством $f_n - \tilde{f}_n = O(h^2)$, получим:

$$\begin{aligned}
L_N(u) - \tilde{f}_n &= \frac{\tilde{k}_{n+1/2}(u_{n+1} - u_n) - \tilde{k}_{n-1/2}(u_n - u_{n-1})}{h^2} - \tilde{q}_n u_n - \tilde{f}_n \\
&= \frac{1}{2}(k_{n+1/2}u''_{n,r} + k_{n-1/2}u''_{n,l}) - \frac{q_{n+1/2} + q_{n-1/2}}{2}u_n - \tilde{f}_n + O(h) = \\
&= \frac{1}{2}(k_{n+1/2}u''_{n,r} - q_{n+1/2}u_n) + \frac{1}{2}(k_{n-1/2}u''_{n,l} - q_{n-1/2}u_n) - \tilde{f}_n + O(h) = \\
&= f_n - \tilde{f}_n + O(h) = O(h)
\end{aligned}$$

Таким образом, в точках разрыва $k(x)$ и $q(x)$ погрешность аппроксимации уравнения составляет $O(h)$. Вычислим теперь погрешность аппроксимации в норме L_1. В $N-3$ точках погрешность равна $O(h^2)$, а в двух других – $O(h)$. Тогда погрешность в норме L_1 равна:

$$(N-3)hO(h^2) + 2hO(h) = NhO(h^2) + O(h^3) + O(h^2) = O(h^2),$$

то есть разностная схема (1) имеет **второй порядок аппроксимации.**

Метод прогонки

Описание метода прогонки

Система уравнений (1), (2), (3) записывается в виде $Ay = b$, где

$$\begin{pmatrix} -\beta_0 & \gamma_0 & & & & & \\ \alpha_1 & -\beta_1 & \gamma_1 & & & & \\ & \alpha_2 & -\beta_2 & \gamma_2 & & & \\ & & \alpha_3 & -\beta_3 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \gamma_{N-2} & \\ & & & & \alpha_{N-1} & \beta_{N-1} & \gamma_{N-1} \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{f}_{N-1} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\beta_0 = \frac{k_0}{h} + \frac{hq_0}{2} - 0.1$$
$$\gamma_0 = \frac{k_0}{h}$$
$$\delta_1 = \frac{hf_0}{2}$$

$$\alpha_n = \frac{k_{n-1}}{h^2}$$
$$\beta_n = \frac{k_{n-1} + k_n}{h^2} + \tilde{q}_n$$
$$\gamma_n = \frac{k_n}{h^2}$$

Отметим, что все $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N-1)$ положительны.

Исключим неизвестные от y_0 до y_{N-1}. Для этого сначала решим каждое уравнение относительно y_n:

$$y_0 = \frac{\gamma_0}{\beta_0} y_1 - \frac{\delta_1}{\beta_0}$$
$$y_n = C_n y_{n+1} + \varphi_n, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{10}$$

Теперь подставим полученное выражение вместо y_n в следующее уравнение, возникающее вследствие перемножения матрицы A и столбца $\bar{y}$:

$$(-\beta_{n+1} + \alpha_{n+1} C_n) y_{n+1} + \gamma_{n+1} y_{n+2} = b_{n+1} - \alpha_{n+1} \varphi_n$$

и тем самым получим:

$$y_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} C_n} y_{n+2} + \frac{\alpha_{n+1}\varphi_n - b_{n+1}}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} C_n}$$
$$C_0 = \frac{\gamma_0}{\beta_0}, \quad \varphi_0 = \frac{-\delta_1}{\beta_0}$$
$$C_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} C_n}$$
$$\varphi_{n+1} = \frac{\alpha_{n+1}\varphi_n - b_{n+1}}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} C_n}$$

На последнем шаге получим уравнение:

$$y_{N-1} = C_{N-1} y_N + \varphi_{N-1}$$

Подставим вместо y_N граничное условие:

$$y_{N-1} = C_{N-1} \cdot 0 + \varphi_{N-1} = \varphi_{N-1}$$

Остальные y_n находятся в порядке $n = N-2, N-3, \ldots, 1, 0$ с использованием (5).

Устойчивость метода прогонки

Докажем устойчивость метода. Под устойчивостью метода будем понимать, что если в процессе вычислений некоторое значение y_n было получено с ошибкой, а дальнейшие вычисления точны, то ошибка в вычисляемых далее y_n не будет увеличиваться.

Как видно из (5), для этого достаточно, чтобы

$$0 \leqslant C_n \leqslant 1, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{11}$$

Доказательство. Докажем формулу (6) по индукции:
База индукции: $C_0 = \frac{\gamma_0}{\beta_0}$, $0 \leqslant C_0 < 1$, так как все $k_0, q_0, h > 0$
Переход индукции. Пусть $0 \leqslant C_n < 1$. Тогда $0 \leqslant C_{n+1} < 1$.

$$\gamma_{n+1} + \alpha_{n+1} C_n < \gamma_{n+1} + \alpha_{n+1} < \beta_{n+1}$$
$$0 < \gamma_{n+1} < \beta_{n+1} - \alpha_{n+1} C_n$$
$$0 < \frac{\gamma_{n+1}}{\beta n + 1 - \alpha_{n+1} C_n} < 10 < C_{n+1} < 1$$

Значит формула (6) доказана и, соответственно, доказана устойчивость метода прогонки. □

Сходимость

Теорема 1. *Если задача $A_h u_h = F_h$ линейна, то из аппроксимации порядка k и устойчивости метода следует сходимость порядка k.*

Доказательство.
Пусть y – точное решение задачи $A_h y = F_h$, а u – точное решение приближаемой задачи.
Из аппроксимации следует, что $\|A_h u - F_h\| \leqslant C_1 h^k$ для некоторого C_1, начиная с некоторого h.
Положим $\tilde{F}_h = A_h u$. Тогда $\tilde{y} = [u]_h$ является решением задачи $A_h \tilde{y} = \tilde{F}_h$.
Из устойчивости метода следует, что:

$$\|y - \tilde{y}\| \leqslant C_2 \|F_h - \tilde{F}_h\| = C_2 \|A_h u - F_h\| \leqslant C_1 C_2 h^k$$

Таким образом, имеет место сходимость порядка k. □

Результаты счёта

Воспользуемся правилом Рунге. Будем запускать программу для $N = 10,\ 20,\ 40, \ldots, 10 \cdot 2^n$, получая численные решения $y^{(10)},\ y^{(20)},\ y^{(40)},\ \ldots,\ y^{(10\cdot 2^n)}$, где каждое $y^{(N)} = \{y_i^{(N)}\}_{i=0}^{N}$, пока не найдем такое N, что:

$$\frac{10}{2N}\left(\sum_{i=1}^{N-1}\left|y_i^{(N)} - y_{2i}^{(2N)}\right| + \sum_{i=1}^{N}\left|\frac{y_i^{(N)} + y_{i-1}^{(N)}}{2} - y_{2i-1}^{(2N)}\right|\right) + \left|y_0^{(N)} - y_0^{(2N)}\right| + \left|y_N^{(N)} - y_{2N}^{(2N)}\right| < \varepsilon = 10^{-2}$$

Метод Рунге завершил свою работу при $N = 2048$. График полученного решения представлен ниже на Рис. 1.

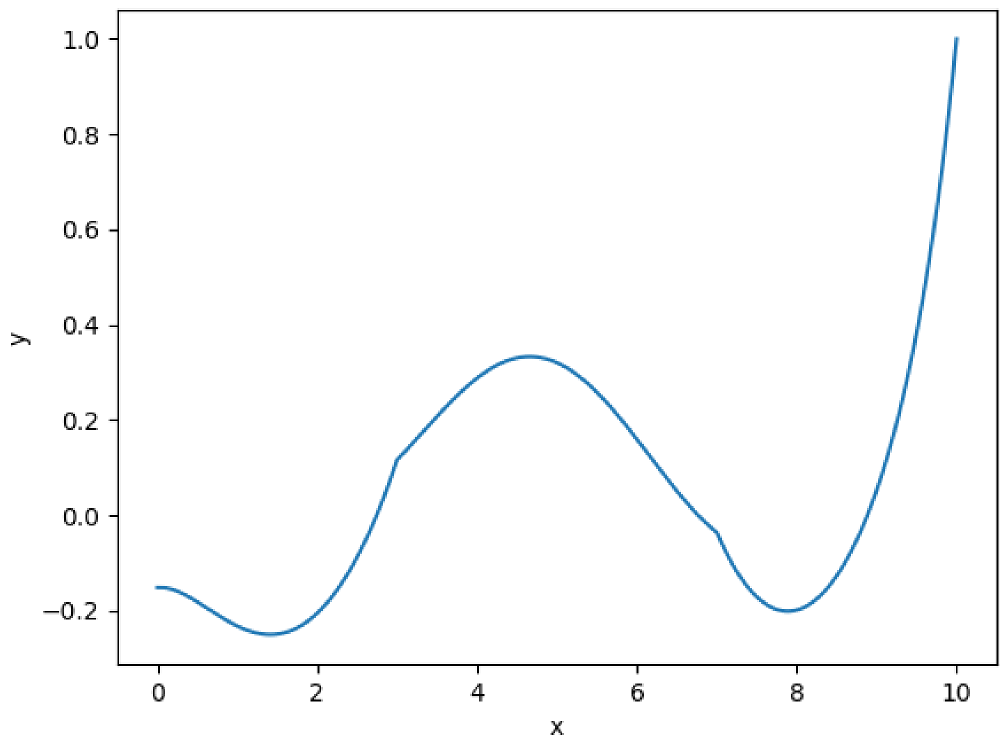

Рис. 1: График построенного приближенного решения