

Приближенное решение дифференциального уравнения

Михайлин Д.А.

6 ноября 2018 г.

Постановка задачи

Требуется найти приближенное обобщенное решение задачи

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = f(x), \quad x \in [0, 10], \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ k(x) &= \begin{cases} 1, & x \in [0, 3] \cup [7, 10] \\ 3, & x \in (3, 7) \end{cases} \\ q(x) &= \begin{cases} 1, & x \in [0, 3] \cup [7, 10] \\ 3, & x \in (3, 7) \end{cases} \end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \left(k(x) \frac{du}{dx} - 0.1u \right) \Big|_{x=0} &= 0 \\ u(x) \Big|_{x=10} &= 1 \end{aligned}$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

Решением данной задачи является такая функция u , что функции u и ku' непрерывны на $[0, 10]$. Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что при кусочно гладких коэффициентах $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ данная задача имеет единственное решение.

Построение разностной схемы для уравнения и краевых условий

Так как существуют точки разрыва функции $k(x)$ на отрезке $[0, 10]$ будем рассматривать интегральное соотношение:

$$\int_{x_1}^{x_2} (q(x)u(x) + f(x))dx = k(x)y'|_{x_1}^{x_2} \quad (1)$$

Это соотношение должно выполняться для любых x_1, x_2 из отрезка $[0, 10]$. Будем искать решение $u(x)$, удовлетворяющее условиям:

1. $u(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 10]$
2. $u(x)$ удовлетворяет исходному уравнению всюду, за исключением точек 3 и 7.
3. Поток $w(x) = k(x)u'(x)$ непрерывен на $[0, 10]$

Пусть $N \in \mathbb{N}$ – количество отрезков, на которые разбивается исходный отрезок $[a, b]$. Возьмем шаг $h = \frac{b-a}{N}$, узлы сетки $x_n = a + nh$, y_n – приближение к значениям $u_n = u(x_n)$. Представим функцию $u(x)$, как $u(x) = u_i + O(h)$, $x - x_i = O(h)$ на отрезке $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, где $x_{i+1/2} = x_i + h/2$. Подставим это в выражение выше и проинтегрируем по отрезку $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (q(x)u(x) + f(x))dx &= \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (q(x)(u_i + O(h)) + f(x))dx = \\ &= \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u_i dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)O(h)dx = h(\tilde{q}_i u_i + \tilde{f}_i) + O(h^2) \end{aligned}$$

$$\tilde{q}_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)dx \quad (2)$$

$$\tilde{f}_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx \quad (3)$$

Таким образом получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} w(x_{i+1/2}) - w(x_{i-1/2}) &= h(\tilde{q}_i u_i + \tilde{f}_i) + O(h^2) \\ w(x_{i+1/2}) - w(x_{i-1/2})/h - \tilde{q}_i u_i &= \tilde{f}_i + O(h) \end{aligned}$$

$$u'(x) = \frac{w(x)}{k(x)}$$

и $w(x) = w(x_{i+1/2}) + O(h)$ $h = x - x_{i+1/2}$. Проинтегрируем по отрезку $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x)dx &= u_{i+1} - u_i = w(x_{i+1/2}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)} + O(h^2) \\ \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h) &= w(x_{i+1/2}) \end{aligned}$$

где

$$k_{i+1/2}^{\sim} = \left(\frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}$$

Таким образом разностная схема имеет вид:

$$L_h(u) \Big|_{x=x_n} = \frac{k_{n+1/2}^{\sim}(u_{n+1} - u_n) - k_{n-1/2}^{\sim}(u_n - u_{n-1})}{h^2} - \tilde{q}_n u_n = \tilde{f}_n, n = 1, 2, \dots, N-1$$

Будем считать, что N нацело делится на $b-a$, тогда коэффициенты $k(x)$ и $q(x)$ постоянны на каждом отрезке $[x_n, x_{n+1}]$. В таком случае, мы можем явно выписать $k_{n+1/2}^{\sim}$, \tilde{q}_n и \tilde{f}_n :

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{n+1/2} &= \left(\frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \\ \tilde{q}_n &= \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx = \frac{q_{n-1/2} + q_{n+1/2}}{2} \\ \tilde{f}_n &= \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx = \frac{1}{h} (\cos(x_{n-1/2}) - \cos(x_{n+1/2})) \end{aligned}$$

Порядок аппроксимации

Необходимо показать, что:

$$||L_h[u]_h - \tilde{f}_n|| = O(h^2)$$

Так как можем брать любую норму, возьмем следующую:

$$||[u]_n|| = h \sum_{n=0}^N |u_n|$$

Оценки погрешности аппроксимации граничных условий

В правой границе аппроксимируем граничное условие следующим образом:

$$u_0 = 1$$

Так как в $x = 10$ краевое условие первого порядка - следовательно аппроксимация точна.

Для аппроксимации условия в левом конце воспользуемся формулой Тейлора в

точке x_0 и подставим в разложение функции и точку x_1 .

$$\begin{aligned}
u(x) &= u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + \frac{u''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3) \\
u_1 &= u_0 - u'(x_0)h + \frac{u''(x_0)}{2}h^2 + O(h^3) \\
u'(x_0) &= \frac{u_0 - u_1}{h} + \frac{u''(x_0)}{2}h + O(h^2) \\
k_0 u'(x_0) - 0.1u_0 &= k_0 \left[\frac{u_0 - u_1}{h} + \frac{u''(x_0)}{2}h + O(h^2) \right] - 0.1u_0 = 0
\end{aligned}$$

По условию:

$$\begin{aligned}
u''(x_0) &= \frac{q_0 u_0 + f_0}{k_0} \\
k_0 \frac{u_0 - u_1}{h} + \frac{q_0 u_0 + f_0}{2}h - 0.1u_0 &= O(h^2)
\end{aligned}$$

Следовательно оценка погрешности имеет второй порядок.

Погрешность аппроксимации уравнения

Рассмотрим сначала такие n , что x_n не попадают в точки разрыва $k(x)$ и $q(x)$. Для таких n на отрезке $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + u'_n h + \frac{u''_n}{2}h^2 + \frac{u'''_n}{6}h^3 + O(h^4) \\
u_{n-1} &= u_n - u'_n h + \frac{u''_n}{2}h^2 - \frac{u'''_n}{6}h^3 + O(h^4)
\end{aligned}$$

Преобразуем данные разложения следующим образом:

$$\tilde{k}_{n+1/2} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \tilde{k}_{n+1/2} \left(u'_n + \frac{u''_n}{2}h + \frac{u'''_n}{6}h^2 + O(h^3) \right) \quad (4)$$

$$\tilde{k}_{n-1/2} \frac{u_n - u_{n-1}}{h} = \tilde{k}_{n-1/2} \left(u'_n - \frac{u''_n}{2}h + \frac{u'''_n}{6}h^2 + O(h^3) \right) \quad (5)$$

Так как $k(x)$ не меняет значения на отрезке $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ то

$$\frac{\tilde{k}_{n+1/2}(u_{n+1} - u_n) - \tilde{k}_{n-1/2}(u_n - u_{n-1})}{h^2} = k_n(u''_n + O(h^2))$$

Так как, $q(x)$ не меняет значения на отрезке $[x_{n-1}, x_{n+1}]$, получим:

$$\begin{aligned}
L_h(u) - \tilde{f}_n &= \frac{\tilde{k}_{n+1/2}(u_{n+1} - u_n) - \tilde{k}_{n-1/2}(u_n - u_{n-1})}{h^2} - \tilde{q}_n u_n - \tilde{f}_n = k_n u''_n - q_n u_n - \tilde{f}_n + O(h^2) = \\
&= f_n - \tilde{f}_n + O(h^2) = O(h^2)
\end{aligned} \quad (6)$$

Покажем, что $f_n - \tilde{f}_n = O(h^2)$

$$\begin{aligned}\tilde{f}_n &= \frac{1}{h} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \sin(x) dx = \frac{1}{h} (\cos(x_{n-1/2}) - \cos(x_{n+1/2})) \\ f_n - \tilde{f}_n &= \sin(x_n) - \frac{1}{h} (\cos(x_{n-1/2}) - \cos(x_{n+1/2})) = \\ &= \sin(x_n) - \frac{1}{h} (\cos(x_n) \cos(\frac{h}{2}) + \sin(x_n) \sin(\frac{h}{2}) - \cos(x_n) \cos(\frac{h}{2}) + \sin(x_n) \sin(\frac{h}{2})) \quad (7) \\ &= \sin(x_n) - \frac{2}{h} (\sin(x_n) \sin(\frac{h}{2})) = \frac{2}{h} \sin(x_n) (\frac{h}{2} - \sin(\frac{h}{2})) = \frac{2}{h} O(h^3) = O(h^2) \quad (8)\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь такие n , что $k(x)$ и $q(x)$ разрывны в точках x_n . В x_n функция u имеет непрерывные правые и левые производные, следовательно, можно записать:

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n + h u'_{n,r} + \frac{h^2}{2} u''_{n,r} + O(h^3), \\ u_{n-1} &= u_n - h u'_{n,l} + \frac{h^2}{2} u''_{n,l} + O(h^3),\end{aligned}$$

где вторые нижние индексы у производных u обозначают правую (r) и левую (l) производные соответственно. Далее:

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1} - u_n}{h} &= \left(u'_{n,r} + \frac{h}{2} u''_{n,r} + O(h^2) \right) \\ \frac{u_n - u_{n-1}}{h} &= \left(u'_{n,l} - \frac{h}{2} u''_{n,l} + O(h^2) \right)\end{aligned}$$

Из условия непрерывности ku' имеем $k_{n+1/2} u'_{n,r} = k_{n-1/2} u'_{n,l}$. Воспользовавшись вышедоказанным равенством $f_n - \tilde{f}_n = O(h^2)$, получим:

$$\begin{aligned}L_N(u) - \tilde{f}_n &= \frac{\tilde{k}_{n+1/2}(u_{n+1} - u_n) - \tilde{k}_{n-1/2}(u_n - u_{n-1})}{h^2} - \tilde{q}_n u_n - \tilde{f}_n \\ &= \frac{1}{2} (k_{n+1/2} u''_{n,r} + k_{n-1/2} u''_{n,l}) - \frac{q_{n+1/2} + q_{n-1/2}}{2} u_n - \tilde{f}_n + O(h) = \\ &= \frac{1}{2} (k_{n+1/2} u''_{n,r} - q_{n+1/2} u_n) + \frac{1}{2} (k_{n-1/2} u''_{n,l} - q_{n-1/2} u_n) - \tilde{f}_n + O(h) = \\ &= f_n - \tilde{f}_n + O(h) = O(h)\end{aligned}$$

Таким образом, в точках разрыва $k(x)$ и $q(x)$ погрешность аппроксимации уравнения составляет $O(h)$. Вычислим теперь погрешность аппроксимации в норме L_1 . В $N-3$ точках погрешность равна $O(h^2)$, а в двух других — $O(h)$. Тогда погрешность в норме L_1 равна:

$$(N-3)hO(h^2) + 2hO(h) = NhO(h^2) + O(h^3) + O(h^2) = O(h^2),$$

то есть разностная схема (1) имеет **второй порядок аппроксимации**.

Метод прогонки

Описание метода прогонки

Система уравнений (1), (2), (3) записывается в виде $Ay = b$, где

$$\begin{pmatrix} -\beta_0 & \gamma_0 & & & & \\ \alpha_1 & -\beta_1 & \gamma_1 & & & \\ & \alpha_2 & -\beta_2 & \gamma_2 & & \\ & & \alpha_3 & -\beta_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \gamma_{N-2} \\ & & & & \alpha_{N-1} & \beta_{N-1} & \gamma_{N-1} \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{f}_{N-1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\beta_0 = \frac{k_0}{h} + \frac{hq_0}{2}$$

$$\gamma_0 = \frac{k_0}{h}$$

$$\delta_1 = \frac{hf_0}{2}$$

$$\alpha_n = \frac{a_{n-1}}{h^2}$$

$$\beta_n = \frac{a_{n-1} + a_n}{h^2} + \tilde{q}_n$$

$$\gamma_n = \frac{a_n}{h^2}$$

Отметим, что все $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ ($n = 1, 2, \dots, N-1$) положительны.

Исключим неизвестные от y_0 до y_{N-1} . Для этого сначала решим каждое уравнение относительно y_n :

$$y_0 = \frac{\gamma_0}{\beta_0} y_1 - \frac{\delta_1}{\beta_0}$$

$$y_n = C_n y_{n+1} + \varphi_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (10)$$

Теперь подставим полученное выражение вместо y_n в следующее уравнение, возникающее вследствие перемножения матрицы A и столбца \bar{y} :

$$(-\beta_{n+1} + \alpha_{n+1} C_n) y_{n+1} + \gamma_{n+1} y_{n+2} = b_{n+1} - \alpha_{n+1} \varphi_n$$

и тем самым получим:

$$y_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} C_n} y_{n+2} + \frac{\alpha_{n+1} \varphi_n - b_{n+1}}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} C_n}$$

$$C_0 = \frac{\gamma_0}{\beta_0}, \quad \varphi_0 = \frac{-\delta_1}{\beta_0}$$

$$C_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} C_n}$$

$$\varphi_{n+1} = \frac{\alpha_{n+1} \varphi_n - b_{n+1}}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} C_n}$$

На последнем шаге получим уравнение:

$$y_{N-1} = C_{N-1}y_N + \varphi_{N-1}$$

Подставим вместо y_N граничное условие:

$$y_{N-1} = C_{N-1} \cdot 0 + \varphi_{N-1} = \varphi_{N-1}$$

Остальные y_n находятся в порядке $n = N - 2, N - 3, \dots, 1, 0$ с использованием (5).

Устойчивость метода прогонки

Докажем устойчивость метода. Под устойчивостью метода будем понимать, что если в процессе вычислений некоторое значение y_n было получено с ошибкой, а дальнейшие вычисления точны, то ошибка в вычисляемых далее y_n не будет увеличиваться.

Как видно из (5), для этого достаточно, чтобы

$$0 \leq C_n \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (11)$$

Доказательство. Докажем формулу (6) по индукции:

База индукции: $C_0 = \frac{\gamma_0}{\beta_0}$, $0 \leq C_0 < 1$, так как все $k_0, q_0, h > 0$

Переход индукции. Пусть $0 \leq C_n < 1$. Тогда $0 \leq C_{n+1} < 1$.

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} + \alpha_{n+1}C_n &< \gamma_{n+1} + \alpha_{n+1} < \beta_{n+1} \\ 0 &< \gamma_{n+1} < \beta_{n+1} - \alpha_{n+1}C_n \\ 0 &< \frac{\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}C_n} < 10 < C_{n+1} < 1 \end{aligned}$$

Значит формула (6) доказана и, соответственно, доказана устойчивость метода прогонки. \square

Сходимость

Теорема 1. Если задача $A_h u_h = F_h$ линейна, то из аппроксимации порядка k и устойчивости метода следует сходимость порядка k .

Доказательство.

Пусть y – точное решение задачи $A_h y = F_h$, а u – точное решение приближаемой задачи.

Из аппроксимации следует, что $\|A_h u - F_h\| \leq C_1 h^k$ для некоторого C_1 , начиная с некоторого h .

Положим $\tilde{F}_h = A_h u$. Тогда $\tilde{y} = [u]_h$ является решением задачи $A_h \tilde{y} = \tilde{F}_h$.

Из устойчивости метода следует, что:

$$\|y - \tilde{y}\| \leq C_2 \|F_h - \tilde{F}_h\| = C_2 \|A_h u - F_h\| \leq C_1 C_2 h^k$$

Таким образом, имеет место сходимость порядка k . \square

Результаты счёта

Воспользуемся правилом Рунге. Будем запускать программу для $N = 10, 20, 40, \dots, 10 \cdot 2^n$, получая численные решения $y^{(10)}, y^{(20)}, y^{(40)}, \dots, y^{(10 \cdot 2^n)}$, где каждое $y^{(N)} = \{y_i^{(N)}\}_{i=0}^N$, пока не найдем такое N , что:

$$\frac{10}{2N} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \left| y_i^{(N)} - y_{2i}^{(2N)} \right| + \sum_{i=1}^N \left| \frac{y_i^{(N)} + y_{i-1}^{(N)}}{2} - y_{2i-1}^{(2N)} \right| \right) + \left| y_0^{(N)} - y_0^{(2N)} \right| + \left| y_N^{(N)} - y_{2N}^{(2N)} \right| < \varepsilon = 10^{-2}$$

Метод Рунге завершил свою работу при $N = 640$. График полученного решения представлен ниже на Рис. 1.

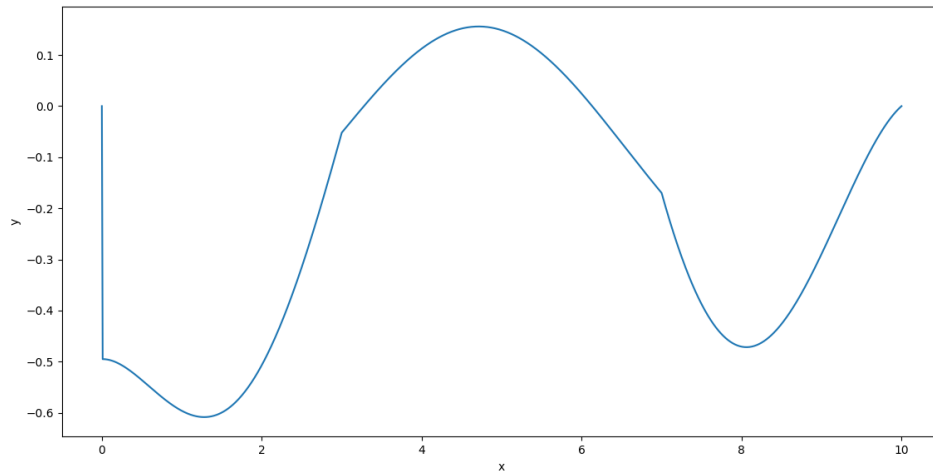


Рис. 1: График построенного приближенного решения