Вычисление несобственного интеграла с помощью квадратурных формул

Д.А. Михайлин

25 сентября 2018 г.

Постановка задачи

Требуется приближенно вычислить интеграл:

$$\int_0^{+\infty}(1+\frac{1}{x})\frac{(sin3x)^2}{\ln(1+x)}e^{-x^3}dx \tag{1}$$

с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

Доказательство сходимости интеграла

Прежде чем приступить к вычислению интеграла, необходимо убедиться в его сходимости во всей области интегрирования. Для этого исследуем подынтегральную функцию $f(x) = (1+\frac{1}{x})\frac{(sin3x)^2}{ln(1+x)}e^{-x^3}$ в особых точках на промежутке $[0, +\infty)$. Рассмотрим две особые точки: $x = 0$, $x \to \infty$:

1. $x = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})\frac{(sin3x)^2}{\ln(1+x)}e^{-x^3} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{9x^2+o(x^2)}{x(x+o(x))}(1+x)(e^{-x^2}) = 9$$

Таким образом, $x = 0$ является устранимой особой точкой. Это значит, что в нуле мы можем доопределить $f(x)$ до непрерывной функции, поэтому интеграл не является несобственным в точке $x = 0$.

2. $x \to \infty$

$\exists$ такое большое число C, что:

$$\left|\int_C^{+\infty} f(x)dx\right| \leqslant \int_C^{+\infty} \left|\frac{x+1}{x^2}\frac{sin^2 3x}{\ln{(1+x)}}e^{-x^2}\right| dx^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_C^{+\infty} 2e^{-x^3}dx^2 = 2e^{-C^2} < \infty$$

Сходимость интеграла на бесконечности доказана.

Оценки параметров δ_1, C

Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2\cdot 10^{-3}$ $\varepsilon_3 = 6\cdot 10^{-3}$ и разобьем наш промежуток интегрирования на 3 части: $[0,\delta_1), [\delta_1, C), [C, +\infty)$.

Теперь нам необходимо подобрать числа δ_1 и C таким образом, чтобы $\left|\int_0^{\delta_1} f(x)dx\right| \leqslant \varepsilon_1$ и $\left|\int_C^{+\infty} f(x)dx\right| \leqslant \varepsilon_3$. Тем самым, задача сведется к вычислению интеграла $\tilde{I}_2 = \int_{\delta_1} f(x)dx$ с точностью ε_2.

1. Оценим δ_1.
   Будем пользоваться следующими фактами:

$$\sin(x) \leqslant x$$
$$\text{и}$$
$$\frac{x}{x+1} \leqslant \ln{(x+1)}$$

$$\left|\int_0^{\delta_1} f(x)dx\right| \leqslant \int_0^{\delta_1} |f(x)|\,dx \leqslant \int_0^{\delta_1} \left|(1+\frac{1}{x})\frac{(sin3x)^2}{\ln(1+x)}e^{-x^3}\right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{\delta_1} \left|\frac{x+1}{x}e^{-x^2}\frac{x}{x+1}9x^2\right| dx =\leqslant \int_0^{\delta_1} 9x^2dx = 3\delta_1^3 \leqslant \varepsilon_1$$

   Следовательно,

$$\delta_1 \leqslant \left(\frac{1}{3}\varepsilon_1\right)^{1/3}$$

   Подставив $\varepsilon_1 = 2\cdot 10^{-3}$, получим $\boldsymbol{\delta_1 = 0.087}$.

2. Оценим C.

$$\left|\int_C^{+\infty} f(x)dx\right| \leqslant \int_C^{+\infty} \left|(1+\frac{1}{x})\frac{(sin3x)^2}{\ln(1+x)}e^{-x^3}\right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_C^{+\infty} \left|(\frac{x+1}{x^2})\frac{(sin3x)^2}{\ln(1+x)}e^{-x^3}\right| dx^2 \leqslant \frac{C+1}{2C^2}\frac{1}{\ln{(1+C)}}\int_C^{+\infty} e^{-x^2}dx^2 = \frac{C+1}{2C^2}\frac{1}{\ln{(1+C)}}e^{-C^2} =$$
$$F(C) \leqslant \varepsilon_3 \tag{2}$$
$$F(2) > 0.0062 \tag{3}$$

Покажем, что можем взять C = 2.

$$\left|\int_2^{+\infty} f(x)dx\right| \leqslant \int_2^3 (1+\frac{1}{x})\frac{(sin3x)^2}{\ln(1+x)}e^{-x^3}dx + \int_3^{+\infty} (1+\frac{1}{x})\frac{(sin3x)^2}{\ln(1+x)}e^{-x^3}dx$$
$$\leqslant \int_2^3 (1+\frac{1}{x})\frac{(sin3x)^2}{\ln(1+x)}e^{-x^3}dx + 0.00005 \leqslant 0.0055 + 0.0005 < \varepsilon_3 \qquad (4)$$