Вычисление несобственного интеграла с помощью квадратурных формул

Д.А. Михайлин

2 октября 2018 г.

Постановка задачи

Требуется приближенно вычислить интеграл:

$$\int_0^{+\infty}(x+\frac{1}{x})\frac{(sin3x)^2}{\ln(1+x)}e^{-x^2}dx \tag{1}$$

с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

Доказательство сходимости интеграла

Прежде чем приступить к вычислению интеграла, необходимо убедиться в его сходимости во всей области интегрирования. Для этого исследуем подынтегральную функцию $f(x) = (x+\frac{1}{x})\frac{(sin3x)^2}{ln(1+x)}e^{-x^2}$ в особых точках на промежутке $[0, +\infty)$. Рассмотрим две особые точки: $x = 0$, $x \to \infty$:

1. $x = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+\frac{1}{x})\frac{(sin3x)^2}{\ln(1+x)}e^{-x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{9x^2+o(x^2)}{x(x+o(x))}(1+x^2)(e^{-x^2}) = 9$$

   Таким образом, $x = 0$ является устранимой особой точкой. Это значит, что в нуле мы можем доопределить $f(x)$ до непрерывной функции, поэтому интеграл не является несобственным в точке $x = 0$.

2. $x \to \infty$

$\exists$ такое большое число C, что:

$$\left|\int_C^{+\infty} f(x)dx\right| \leqslant \int_C^{+\infty} \left|\frac{x+1}{x^2}\frac{sin^2 3x}{\ln(1+x)}e^{-x^2}\right| dx^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_C^{+\infty} 2e^{-x^2}dx^2 = 2e^{-C^2} < \infty$$

Сходимость интеграла на бесконечности доказана.

Оценки параметров δ_1, C

Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ $\varepsilon_3 = 6 \cdot 10^{-3}$ и разобьем наш промежуток интегрирования на 3 части: $[0, \delta_1), [\delta_1, C), [C, +\infty)$.

Теперь нам необходимо подобрать числа δ_1 и C таким образом, чтобы $\left|\int_0^{\delta_1} f(x)dx\right| \leqslant \varepsilon_1$ и $\left|\int_C^{+\infty} f(x)dx\right| \leqslant \varepsilon_3$. Тем самым, задача сведется к вычислению интеграла $\tilde{I}_2 = \int_{\delta_1} f(x)dx$ с точностью ε_2.

1. Оценим δ_1.
   Будем пользоваться следующими фактами:

$$\sin(x) \leqslant x$$
$$\text{и}$$
$$\frac{x}{x+1} \leqslant \ln(x+1)$$

$$\left|\int_0^{\delta_1} f(x)dx\right| \leqslant \int_0^{\delta_1} |f(x)|\, dx \leqslant \int_0^{\delta_1} \left|(x+\frac{1}{x})\frac{(sin3x)^2}{\ln(1+x)}e^{-x^2}\right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{\delta_1} \left|\frac{x^2+1}{x}e^{-x^2}\frac{x+1}{x}9x^2\right| dx \leqslant \int_0^{\delta_1} 18dx = 18\delta_1 \leqslant \varepsilon_1$$

   Следовательно, $\delta_1 \leqslant \varepsilon_1/18$ Подставив $\varepsilon_1 = 2 \cdot 10^{-3}$, получим $\boldsymbol{\delta_1 = 0.0001}$.

2. Оценим C.

$$\left|\int_C^{+\infty} f(x)dx\right| \leqslant \int_C^{+\infty} \left|(x+\frac{1}{x})\frac{(sin3x)^2}{\ln(1+x)}e^{-x^2}\right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_C^{+\infty} \left|(\frac{x^2+1}{x})\frac{(sin3x)^2}{\ln(1+x)}e^{-x^2}\right| dx^2 \leqslant \frac{C^2+1}{2C^2}\frac{1}{\ln(1+C)}\int_C^{+\infty} e^{-x^2}dx^2 = \frac{C^2+1}{2C^2}\frac{1}{\ln(1+C)}e^{-C^2} =$$
$$F(C) \leqslant \varepsilon_3 \tag{2}$$
$$F(2.1) > 0.006 \tag{3}$$
$$F(2.123) = 0.0059 \tag{4}$$

   Возьмем C = 2.123.

Квадратурные формулы для I_2

Будем вычислять I_2 по составной формуле прямоугольников. Для функции $f(x)$, определенной на некотором отрезке $[a, b]$ интеграл от нее приближенно вычисляется по формуле:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx S_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(a + (b-a)\frac{i-1/2}{N}\right)$$

Оценка погрешности квадратурных формул

Погрешностью квадратурной формулы является величина:

$$R_N(f) = I(f) - S_N(f)$$

Для формулы прямоугольников справедлива следующая оценка:

$$|R_N(f)| \leqslant A\frac{(b-a)^2}{4N},$$

для некоторого числа A, такого, что $|f'(x)| \leqslant A$ на $[a, b]$. Таким образом, для вычисления необходимого числа отрезков разбиения нам необходимо оценить $|f'(x)|$ на $[a, b]$.

Оценка производной

Рассмотрим производную функции $f(x)$. Хотим оценить ее на отрезке $[\delta_1, 2.123]$ Заметим, что $|(uvg)'| \leqslant |u'vg| + |uv'g| + |uvg'|$. Разобъем функцию $f(x) = (x + \frac{1}{x})\frac{(sin3x)^2}{\ln(1+x)}e^{-x^2}$ на $u = e^{-x^2}$ $v = (x + \frac{1}{x})sin(3x)$ $g = \frac{sin(3x)}{ln(1+x)}$

$$\left|e^{-x^2}\right| \leqslant 1$$

$$\left|2xe^{-x^2}\right| \leqslant 4.25 \tag{5}$$

Воспользуемя разложением синуса и косинуса в ряд тейлора с остаточным членом в форме лагранджа. $sin(x) = x - \frac{sin(c)}{2}x^2$ и $cos(x) = 1 - sin(c)x$

$$|v| = \left|(x + 1/x) * (3x - \frac{sin(c)9x^2}{2})\right| \leqslant \left|(x^2+1)(3+4.5x^2)\right| = 128.217$$

$$|v'| = \left|(1 - \frac{1}{x^2})sin(3x) + 3(x + \frac{1}{x})cos(3x)\right|$$
$$\leqslant \left|6x - sin(c)4.5x^2 + sin(c)4.5 - cos(c)3x^2 - cos(c)3\right| \leqslant 66.2 \tag{6}$$

$$|g| \leqslant |(3 - sin(c)4.5x)(x+1)| \leqslant 39.204$$

Воспользуемя разложением в ряд тейлора с остаточным членом в форме лагранджа. $ln(1+x) = x - \frac{1}{2(1+c)^2}x^2$

$$|g'| = \left| \frac{3ln(1+x)cos(3x) - \frac{sin(3x)}{1+x}}{ln^2(1+x)} \right| \leqslant$$

$$\left| \frac{3(x - \frac{x^2}{2(1+c)^2})(1 - 3sin(c)x)(1+x)^2 - (1+x)(3x - 4.5sin(c)x^2)}{x^2} \right| \leqslant \tag{7}$$

$$\leqslant 225.007 \tag{8}$$

Следовательно $|f'(x)| \leqslant 52808.159208$

Таблица параметров

Вычислим N_1:

$$N_1 = \frac{A_1(2.123 - \delta_1)^2}{4\varepsilon_2} = 29748846$$

Запишем полученные выше результаты в таблицу:

δ_1	C	A	N_1
0.0001	2.123	52808.159208	29748846

Результаты расчёта

$\tilde{I}_2$	$\tilde{I}$
4.87056	4.87056

Правило Рунге

Пусть I - точное значение интеграла, а S_N - его приближенное значение, вычисленное с использованием N обращений к подынтегральной функции. Предположим, что известен главный член погрешности квадратурной формулы:

$$I - S_N = CN^{-m} + o(N^{-m}),$$

где m - известно, а C - нет. Тогда, подставляя в формулы выше N_1 и $N_2 = 2N_1$, получим:

$$I - S_{N_1} = CN_1^{-m} + o(N_1^{-m})$$
$$I - S_{N_2} = CN_2^{-m} + o(N_2^{-m})$$
$$S_{N_1} - S_{N_2} \approx C\frac{N_2^m - N_1^m}{N_2^m N_1^m} \Rightarrow$$
$$C \approx \frac{S_{N_1} - S_{N_2}}{N_2^m - N_1^m} N_2^m N_1^m \Rightarrow$$
$$I - S_{N_2} = \frac{S_{N_1} - S_{N_2}}{N_2^m - N_1^m} N_1^m$$

Тогда, если взять $N_2 = 2N_1 = 2N$ получим:

$$|I - S_{2N}| = \frac{|S_{2N} - S_N|}{2^m - 1} \leqslant \varepsilon$$

Результаты по правилу Рунге

$\hat{N}_1$	$\hat{I}_2$
512	4.85289