Приближённое решение дифференциального уравнения

Отчёт студента 410 группы Михайлина Дмитрия Александровича

2 апреля 2019 г.

1 Постановка задачи

Решить дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1 + \alpha x^2)x = \cos(t), \alpha = 0.2, -0.2 \tag{1}$$

Сами зададим начальные условия. Перепишем 1 в виде системы двух дифференциальных уравнений:

$$1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \cos(t) - (1 + \alpha x^2)x \end{cases} \tag{2}$$

Получается мы свели дифференциальное уравнение второго порядка к системе дифференциальных уравнений. Будем решать эту систему при помощи метода Дормана-Принса 7 порядка.

Введём обозначения:

Пусть s - целое положительное число, называемое числом стадий и $a_{21}, \dots a_{s,s-1}, b_1, \dots b_s, c_2 \dots c_s$ - вещественные коэффициенты. Тогда метод

$$\begin{gathered} k_1 = f(x_0, y_0) \\ k_2 = f(x_0 + c_2 h, y_0 + h a_{2,1} k_1) \\ k_3 = f(x_0 + c_3 h, y_0 + h(a_{3,1} k_1 + a_{32} k_2) \\ \dots \\ k_s = f(x_0 + c_s h, y_0 + h(a_{s,1} k_1 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1})) \\ y_1 = y_0 + h(b_1 k_1 + \dots + b_s k_s)) \end{gathered} \tag{3}$$

- будет s-стадийным явным методом Рунге-Кутта, решения задачи:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{4}$$

Определение 1. Метод Рунге-Кутты имеет порядок p, если:

$$||y(x_0+h)-y_1|| \le Kh^{p+1},$$

т.е члены для точного решения $y(x_0+h)$ и для y_i совпадают до члена h^p включительно.

Приведем таблицы Бутчера из книги Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. "Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи которыми будем пользоватся:
Таблица Бутчера метода Рунге-Кутта 6 порядка.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
0 & & & & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & & \\
\frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{7}{36} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{12} & & & & \\
\frac{5}{6} & -\frac{35}{144} & -\frac{55}{36} & \frac{35}{48} & \frac{15}{8} & & & \\
\frac{1}{6} & -\frac{1}{360} & -\frac{11}{36} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & & \\
1 & -\frac{41}{260} & \frac{22}{13} & \frac{43}{156} & -\frac{118}{39} & \frac{32}{195} & \frac{80}{39} & \\
\hline
 & \frac{13}{200} & 0 & \frac{11}{40} & \frac{11}{40} & \frac{4}{25} & \frac{4}{25} & \frac{13}{200}
\end{array}$$

c_i находятся в первом столбце, $a_{i,j}$ - располагаются как матрица во всех остальных строках и столбцах, последний столбец соответствует b_s.

Согласно теореме на стр. 202, используя данную таблицу, мы можем построить приближение 6 порядка.
Так же приведем таблицу Бутчера для метода Дормана-Принса 8(7) порядка.

c_i	a_{ij}												$\hat{b}_i$	b_i
0													$\frac{14005451}{335480064}$	$\frac{13451932}{455176623}$
$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$												0	0
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{16}$											0	0
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	0	$\frac{3}{32}$										0	0
$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	0	$\frac{-75}{64}$	$\frac{75}{64}$									0	0
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{80}$	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{20}$								$\frac{-59238493}{1068277825}$	$\frac{-808719846}{976000145}$
$\frac{59}{400}$	$\frac{29443841}{614563906}$	0	0	$\frac{77736538}{692538347}$	$\frac{-28693883}{1125000000}$	$\frac{23124283}{1800000000}$							$\frac{181606767}{758867731}$	$\frac{1757004468}{5645159321}$
$\frac{93}{200}$	$\frac{16016141}{946692911}$	0	0	$\frac{61564180}{158732637}$	$\frac{22789713}{633445777}$	$\frac{545815736}{2771057229}$	$\frac{-180193667}{1043307555}$						$\frac{561292985}{797845732}$	$\frac{656045339}{265891186}$
$\frac{5490023248}{9719169821}$	$\frac{39632708}{573591083}$	0	0	$\frac{-433636366}{683701615}$	$\frac{-421739975}{2616292301}$	$\frac{100302831}{723423059}$	$\frac{790204164}{839813087}$	$\frac{800635310}{3783071287}$					$\frac{-1041891430}{1371343529}$	$\frac{-3867574721}{1518517206}$
$\frac{13}{20}$	$\frac{246121993}{1340847787}$	0	0	$\frac{-37695042795}{15268766246}$	$\frac{-309121744}{1061227803}$	$\frac{-12992083}{490766935}$	$\frac{6005943493}{2108947869}$	$\frac{393006217}{1396673457}$	$\frac{123872331}{1001029789}$				$\frac{760417239}{1151165299}$	$\frac{465885868}{322736535}$
$\frac{1201146811}{1299019798}$	$\frac{-1028468189}{846180014}$	0	0	$\frac{8478235783}{508512852}$	$\frac{1311729495}{1432422823}$	$\frac{-10304129995}{1701304382}$	$\frac{-48777925059}{3047939560}$	$\frac{15336726248}{1032824649}$	$\frac{-45442868181}{3398467696}$	$\frac{3065993473}{597172653}$			$\frac{118820643}{751138087}$	$\frac{53011238}{667516719}$
1	$\frac{185892177}{718116043}$	0	0	$\frac{-3185094517}{667107341}$	$\frac{-477755414}{1098053517}$	$\frac{-703635378}{230739211}$	$\frac{5731566787}{1027545527}$	$\frac{5232866602}{850066563}$	$\frac{-4093664535}{808688257}$	$\frac{3962137247}{1805957418}$	$\frac{65686358}{487910083}$		$\frac{-528747749}{2220607170}$	$\frac{2}{45}$
1	$\frac{403863854}{491063109}$	0	0	$\frac{-5068492393}{434740067}$	$\frac{-411421997}{543043805}$	$\frac{652783627}{914296604}$	$\frac{11173962825}{925320556}$	$\frac{-13158990841}{6184727034}$	$\frac{3936647629}{1978049680}$	$\frac{-160528059}{685178525}$	$\frac{248638103}{1413531060}$	0	$\frac{1}{4}$	0

2 Переменный шаг:

Правило Рунге:
Пусть заданы точка (x) и приближение $y^{(1)}(x)$ к $y(x)$ – из обычной задачи Коши, вычисленное через таблицу Бутчера (методом Рунге-Кутта) с шагом $2h$. Часто в ходе расчётов целесообразно изменять шаг интегрирования, контролируя величину погрешности метода на шаге. При практической оценке этой величины можно, например, рассуждать следующим образом. Главный член погрешности на шаге интегрирования есть;

$$\frac{\varphi^{(s+1)}(0)h^{s+1}}{(s+1)!}$$

Посчитаем приближение вычисленное в точке $(x+h)$: $y^{(2)}(x)$ через таблицу Бутчера (методом Рунге-Кутта) с шагом h, за две итерации.

В результате двух шагов имеем:

$$y^{(1)} - y(x+2h) \approx \frac{\varphi^{s+1}(0)(2h)^{s+1}}{(s+1)!}$$

Из этих соотношений получаем представление главного члена погрешности на шаге:

$$y^{(1)} - y(x+2h) \approx \frac{y^{(2)} - y^{(1)}}{2^s - 1} \Rightarrow y(x+2h) \approx y^{(1)} + \frac{y^{(1)} - y^{(2)}}{2^s - 1}$$

Далее посчитаем ошибку. $err = \frac{||y^{(1)} - y^{(2)}||}{2^s - 1}$, где s - порядок метода. В качестве нормы возьмем $||x|| = max|x_i|$.Если ошибка меньше наперед заданного tol то мы принимаем эти два шага. h длину шага пересчитываем по следующей формуле: $h_{new} = h_{old} * min(facmin, max(facmax, fac * (\frac{err}{tol})^{\frac{1}{7}}))$. facmax, facmin, fac - это константы, которые выбираются для того, чтобы h не убывала слишком быстро и не возрастала слишком быстро. Это повышает надежность программы. Такой выбор шага называется **Правилом Рунге**.

Выбор шага в алгоритме Дормана-Принса:

Сначала вычисляем $y^{(1)}$ - приближенное значение в точке $x_0 + h$ методом Рунге-Кутта 7 порядка. Потом вычисляем $y^{(2)}$ приближенное значение в точке $x_0 + h$ уже методом 8 порядка. Рассматриваем ошибку как $err = ||y^{(1)} - y^{(2)}||$. Если $err < tol$ - то шаг принимается. Новый шаг h пересчитывается по формуле $h_{new} = h_{old} * min(facmin, max(facmax, fac * (\frac{err}{tol})^{\frac{1}{7}}))$.

3 Гармонический осциллятор

Рассмотрим работу алгоритмов RK-6, RK-7, RK-8 с выбором шага по правилу Рунге и алгоритма DP-8(7) на гармоническом осцилляторе.

$$x'' + \omega^2 x = 0 \tag{5}$$

Перепишем это дифференциальное уравнение в следующем виде:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 x \end{cases} \tag{6}$$

В следующих таблицах приводятся результаты работы алгоритмов на $[0, 10\pi], [0, 100\pi], [0, 1000\pi], [0, 10000\pi]$.

Графики гармонического осциллятора $[0, 10\pi]$

Таблица 1: $[0, 10\pi]$.

Алг.:	Погр в 10π	Макс. погр.	Мин. шаг	Макс. шаг	Сред. шаг	Кол-во шагов
RK-6	6.16094e-08	6.16094e-08	0.0294031	0.124017	0.118662	265
RK-7	1.01278e-08	1.53735e-08	0.1	0.429062	0.387965	81
RK-8	4.3534e-09	6.37778e-09	0.0416447	0.593831	0.499327	63
DP-7	4.13717e-10	6.5382e-10	0.1	0.43188	0.402768	78

Таблица 2: $[0, 100\pi]$.

Алг.:	Погр в 100π	Макс. погр.	Мин. шаг	Макс. шаг	Сред. шаг	Кол-во шагов
RK-6	6.19492e-07	6.19492e-07	0.1	0.124017	0.119879	2621
RK-7	1.00721e-07	1.63357e-07	0.0392214	0.429062	0.409646	767
RK-8	1.61544e-08	6.87135e-08	0.1	0.593831	0.566994	555
DP-7	2.65332e-09	4.47656e-09	0.1	0.433579	0.433579	753

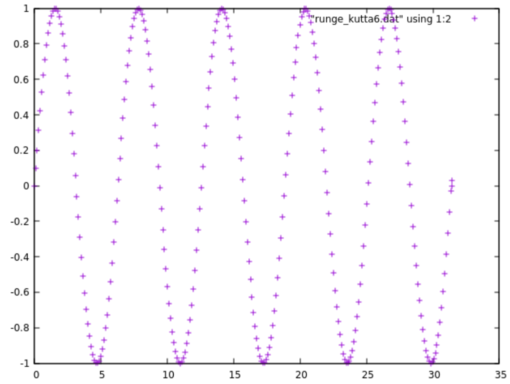
Таблица 3: $[0, 1000\pi]$.

Алг.:	Погр в 1000π	Макс. погр.	Мин. шаг	Макс. шаг	Сред. шаг	Кол-во шагов
RK-6	6.19848e-06	6.20021e-06	0.1	0.124017	0.119933	26195
RK-7	7.86173e-07	1.63662e-06	0.1	0.429062	0.413014	7607
RK-8	2.67748e-07	6.99391e-07	0.1	0.593831	0.572827	5485
DP-7	2.67163e-08	4.30018e-08	0.1	0.433578	0.418991	7498

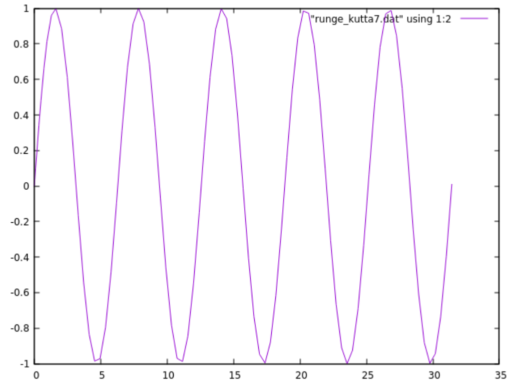
Таблица 4: $[0, 10000\pi]$.

Алг.:	Погр в 10000π	Макс. погр.	Мин. шаг	Макс. шаг	Сред. шаг	Кол-во шагов
RK-6	6.20938e-05	6.21198e-05	0.1	0.124017	0.119938	261935
RK-7	6.45327e-06	1.64321e-05	0.1	0.429062	0.413257	76021
RK-8	3.48813e-06	7.04343e-06	0.1	0.593831	0.573486	54781
DP-7	2.65863e-07	4.29382e-07	0.1	0.433595	0.419142	74953

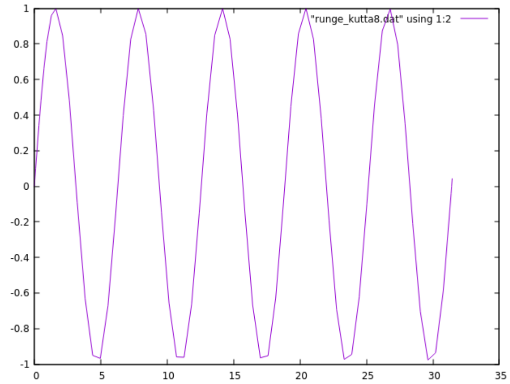
RK-6 $[0, 10\pi]$



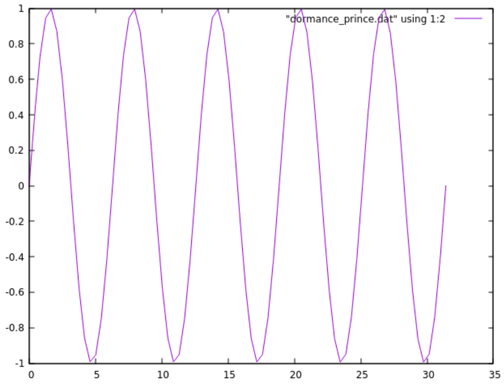
RK-7 $[0, 10\pi]$



RK-8 $[0, 10\pi]$



DP-7 $[0, 10\pi]$



Таким образом, DP-7 ,несмотря на меньший порядок точности основного метода чем у RK-8 в итоге показывает большую точность, из-за лучшего выбора шага. Если сравнить DP-7 и RK-7, то DP-7 при меньшем количестве узлов показывает гораздо лучшую точность. **Далее везде используем DP-7** .

4 Поиск периода

Сначала ищем такое минимальное t, что $y(x(t)) = 0$. Пусть это будет t_0. Далее идем по фазовому портрету и ищем место, где $y(x(t))$ меняет знак. Ищем корень методом хорд. Хотим найти такое T, что:

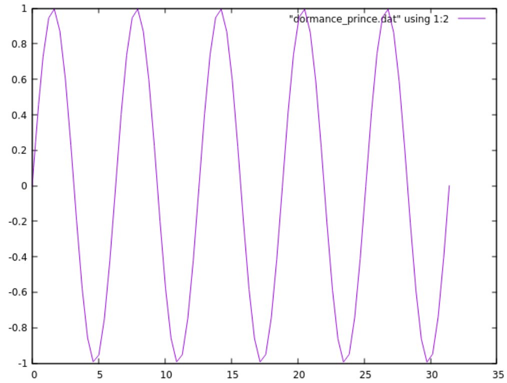
$$\begin{cases} x(t_0) = x(t_0 + T), \\ y(t_0) = y(t_0 + T) \end{cases}$$

Такое минимальное T и принимаем за ответ.
Период осциллятора

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

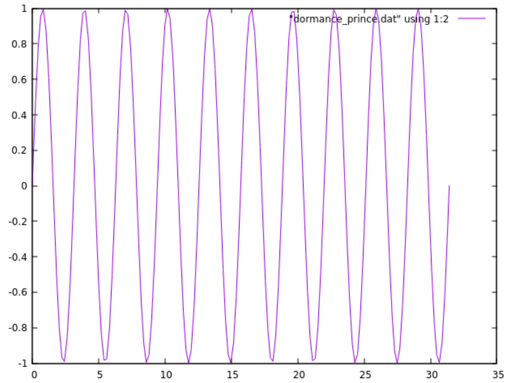
$T \approx 6.28319 \approx 2\pi$

Osc



$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -4x \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Osc

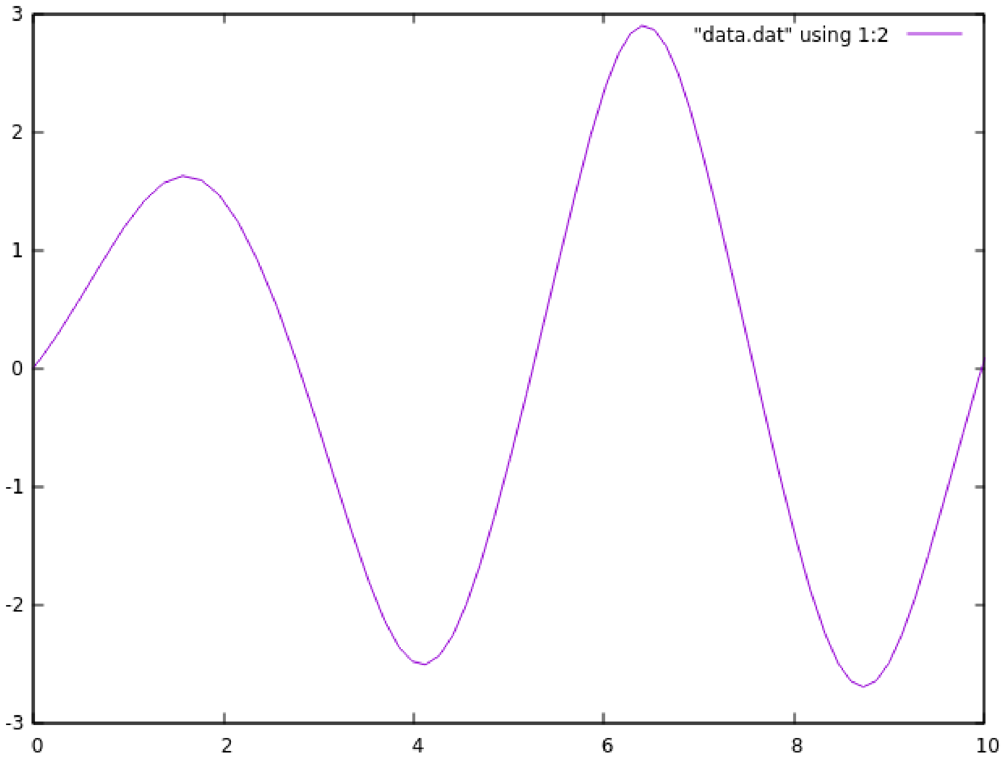


$T \approx 3.14159 \approx \pi$

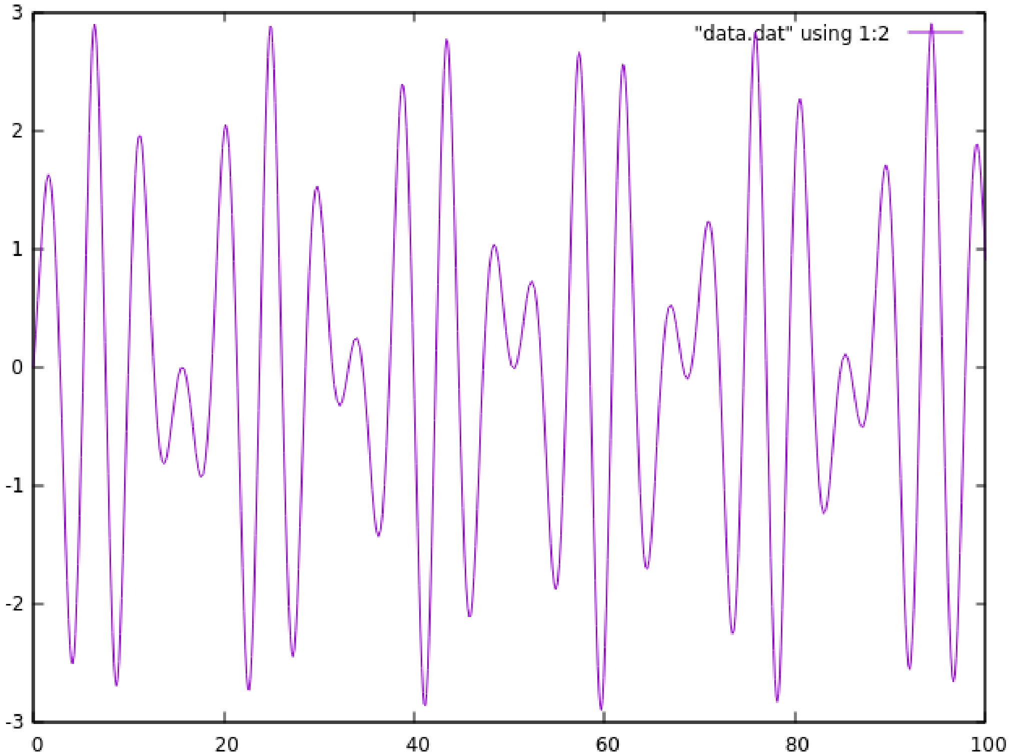
5 Графики задачи и период

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -(1 + 0.2x^2)x + cos(t) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

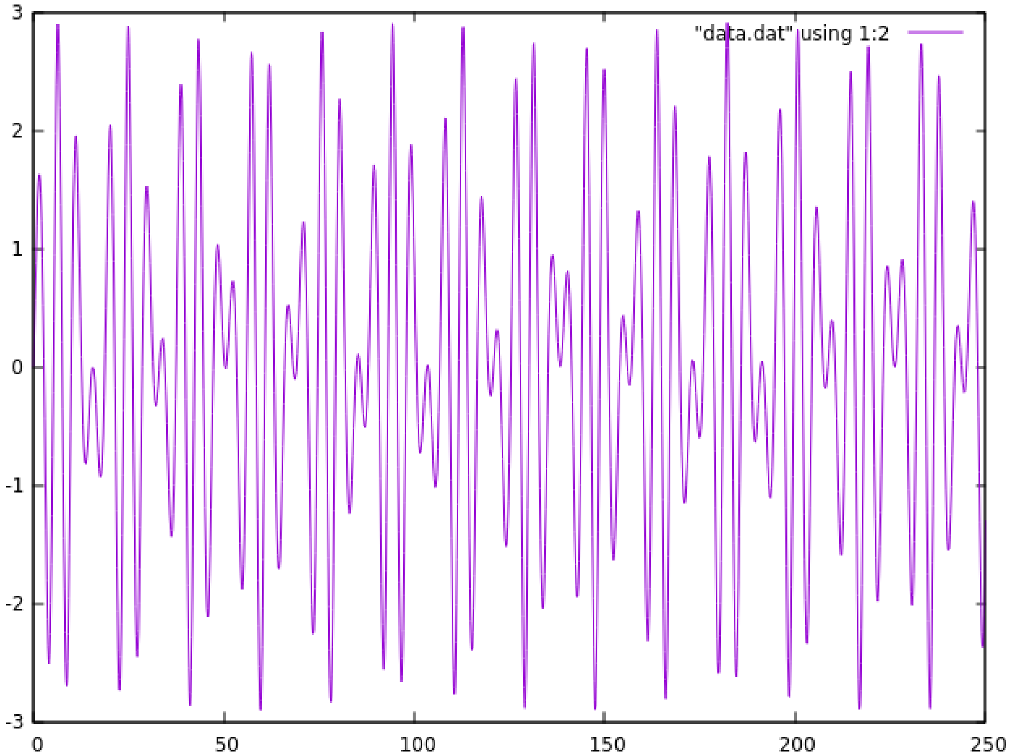
$[0, 10]$



$$[0, 100]$$



$[0, 250]$

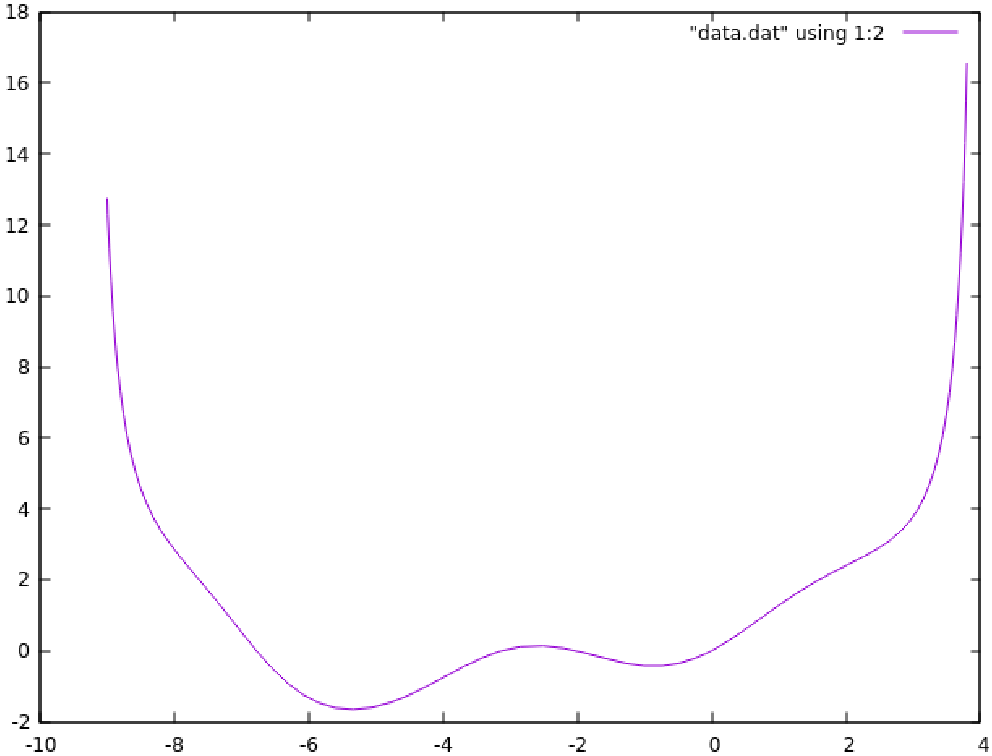


$T \approx 4677.78$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -(1 - 0.2x^2)x + cos(t) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Решение не периодическое.

$$[-9, 3.8]$$



$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -(1 - 0.2x^2)x + cos(t) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Решение не периодическое.

$$[-3.8, 9]$$