

Приближённое решение дифференциального уравнения

Отчёт студента 410 группы Михайлина Дмитрия Александровича

2 апреля 2019 г.

1 Постановка задачи

Решить дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1 + \alpha x^2)x = \cos(t), \alpha = 0.2, -0.2 \quad (1)$$

Сами зададим начальные условия. Перепишем 1 в виде системы двух дифференциальных уравнений:

$$1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \cos(t) - (1 + \alpha x^2)x \end{cases} \quad (2)$$

Получается мы свели дифференциальное уравнение второго порядка к системе дифференциальных уравнений. Будем решать эту систему при помощи метода Дормана-Принса 7 порядка.

Введём обозначения:

Пусть s - целое положительное число, называемое числом стадий и $a_{21}, \dots, a_{s,s-1}, b_1, \dots, b_s, c_2, \dots, c_s$ - вещественные коэффициенты. Тогда метод

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0) \\ k_2 &= f(x_0 + c_2 h, y_0 + h a_{2,1} k_1) \\ k_3 &= f(x_0 + c_3 h, y_0 + h(a_{3,1} k_1 + a_{32} k_2)) \\ &\dots \\ k_s &= f(x_0 + c_s h, y_0 + h(a_{s,1} k_1 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1})) \\ y_1 &= y_0 + h(b_1 k_1 + \dots + b_s k_s) \end{aligned} \quad (3)$$

- будет s -стадийным явным методом Рунге-Кутты, решения задачи:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (4)$$

Определение 1. Метод Рунге-Кутты имеет порядок p , если:

$$\|y(x_0 + h) - y_1\| \leq Kh^{p+1},$$

т.е члены для точного решения $y(x_0 + h)$ и для y_i совпадают до члена h^p включительно.

Приведем таблицы Бутчера из книги Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. "Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи которыми будем пользоваться:

Таблица Бутчера метода Рунге-Кутта 6 порядка.

0							
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$					
$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{12}$				
$\frac{5}{6}$	$-\frac{35}{144}$	$-\frac{55}{36}$	$\frac{35}{48}$	$\frac{15}{8}$			
$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{360}$	$-\frac{11}{36}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$		
1	$-\frac{41}{260}$	$\frac{22}{13}$	$\frac{43}{156}$	$-\frac{118}{39}$	$\frac{32}{195}$	$\frac{80}{39}$	
	$\frac{13}{200}$	0	$\frac{11}{40}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{13}{200}$

c_i находятся в первом столбце, $a_{i,j}$ - располагаются как матрица во всех остальных строках и столбцах, последний столбец соответствует b_s .

Согласно теореме на стр. 202, используя данную таблицу, мы можем построить приближение 6 порядка.

Так же приведем таблицу Бутчера для метода Дормана-Принса 8(7) порядка.

c_i	a_{ij}										\tilde{b}_i	b_i
0											<u>14005451</u>	<u>13451932</u>
$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$										335480064	455176623
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{16}$									0	0
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	0	$\frac{3}{32}$								0	0
$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	0	$-\frac{75}{64}$	$\frac{75}{64}$							0	0
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{80}$	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{20}$						<u>-59238493</u>	<u>-808719846</u>
59	<u>29443841</u>	0	0	<u>77736538</u>	<u>-28693883</u>	<u>23124283</u>					1068277825	976000145
400	614563906			692538347	1125000000	1800000000					181606767	1757004468
$\frac{93}{200}$	<u>16016141</u>	0	0	<u>61564180</u>	<u>22789713</u>	<u>545815736</u>	<u>-180193667</u>				758867731	5645159321
5490023248	946692911			158732637	633445777	2771057229	1043307555				561292985	656045339
719169821	<u>39632708</u>	0	0	<u>-433636366</u>	<u>-421739975</u>	<u>100302831</u>	<u>790204164</u>	<u>800635310</u>			797845732	265891186
$\frac{13}{20}$	<u>1340847787</u>	0	0	<u>15268766246</u>	<u>1061227803</u>	<u>490766935</u>	<u>2108947869</u>	<u>1396673457</u>	<u>1001029789</u>		<u>-1041891430</u>	<u>-3867574721</u>
201146811	<u>-1028468189</u>	0	0	<u>8478235783</u>	<u>1311729495</u>	<u>-10304129995</u>	<u>-48777925059</u>	<u>15336726248</u>	<u>-45442868181</u>	<u>3065993473</u>	1371343529	1518517206
299019798	846180014			508512852	1432422823	1701304382	3047939560	1032824649	3398467696	597172653	760417239	465885868
1	<u>185892177</u>	0	0	<u>-3185094517</u>	<u>-477755414</u>	<u>-703635378</u>	<u>5731566787</u>	<u>5232866602</u>	<u>-4093664535</u>	<u>3962137247</u>	1151165299	322736535
1	718116043			667107341	1098053517	230739211	1027545527	850066563	808688257	1805957418	118820643	53011238
	<u>403863854</u>	0	0	<u>-5068492393</u>	<u>-411421997</u>	<u>652783627</u>	<u>11173962825</u>	<u>-13158990841</u>	<u>3936647629</u>	<u>-160528059</u>	751138087	667516719
	491063109			434740067	543043805	914296604	925320556	6184727034	1978049680	685178525	528747749	2
											2220607170	45
											$\frac{1}{4}$	0

2 Переменный шаг:

Правило Рунге:

Пусть заданы точка (x) и приближение $y^{(1)}(x)$ к $y(x)$ – из обычной задачи Коши, вычисленное через таблицу Бутчера (методом Рунге-Кутты) с шагом $2h$. Часто в ходе расчётов целесообразно изменять шаг интегрирования, контролируя величину погрешности метода на шаге. При практической оценке этой величины можно, например, рассуждать следующим образом. Главный член погрешности на шаге интегрирования есть;

$$\frac{\varphi^{(s+1)}(0)h^{s+1}}{(s+1)!}$$

Посчитаем приближение вычисленное в точке $(x+h)$: $y^{(2)}(x)$ через таблицу Бутчера (методом Рунге-Кутты) с шагом h , за две итерации.

В результате двух шагов имеем:

$$y^{(1)} - y(x+2h) \approx \frac{\varphi^{s+1}(0)(2h)^{s+1}}{(s+1)!}$$

Из этих соотношений получаем представление главного члена погрешности на шаге:

$$y^{(1)} - y(x + 2h) \approx \frac{y^{(2)} - y^{(1)}}{2^s - 1} \Rightarrow y(x + 2h) \approx y^{(1)} + \frac{y^{(1)} - y^{(2)}}{2^s - 1}$$

Далее посчитаем ошибку. $err = \frac{\|y^{(1)} - y^{(2)}\|}{2^s - 1}$, где s - порядок метода. В качестве нормы возьмем $\|x\| = \max |x_i|$. Если ошибка меньше наперед заданного tol то мы принимаем эти два шага. h длину шага пересчитываем по следующей формуле: $h_{new} = h_{old} * \min(facmin, \max(facmax, fac * (\frac{err}{tol})^{\frac{1}{7}}))$. $facmax$, $facmin$, fac - это константы, которые выбираются для того, чтобы h не убывала слишком быстро и не возрастала слишком быстро. Это повышает надежность программы. Такой выбор шага называется **Правилом Рунге**.

Выбор шага в алгоритме Дормана-Принса:

Сначала вычисляем $y^{(1)}$ - приближенное значение в точке $x_0 + h$ методом Рунге-Кутты 7 порядка. Потом вычисляем $y^{(2)}$ приближенное значение в точке $x_0 + h$ уже методом 8 порядка. Рассматриваем ошибку как $err = \|y^{(1)} - y^{(2)}\|$. Если $err < tol$ - то шаг принимается. Новый шаг h пересчитывается по формуле $h_{new} = h_{old} * \min(facmin, \max(facmax, fac * (\frac{err}{tol})^{\frac{1}{7}}))$.

3 Гармонический осциллятор

Рассмотрим работу алгоритмов RK-6, RK-7, RK-8 с выбором шага по правилу Рунге и алгоритма DP-8(7) на гармоническом осцилляторе.

$$x'' + \omega^2 x = 0 \tag{5}$$

Перепишем это дифференциальное уравнение в следующем виде:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 x \end{cases} \tag{6}$$

В следующих таблицах приводятся результаты работы алгоритмов на $[0, 10\pi]$, $[0, 100\pi]$, $[0, 1000\pi]$, $[0, 10000\pi]$.

Графики гармонического осциллятора $[0, 10\pi]$

Таблица 1: $[0, 10\pi]$.

Алг.:	Погр в 10π	Макс. погр.	Мин. шаг	Макс. шаг	Сред. шаг	Кол-во шагов
RK-6	6.16094e-08	6.16094e-08	0.0294031	0.124017	0.118662	265
RK-7	1.01278e-08	1.53735e-08	0.1	0.429062	0.387965	81
RK-8	4.3534e-09	6.37778e-09	0.0416447	0.593831	0.499327	63
DP-7	4.13717e-10	6.5382e-10	0.1	0.43188	0.402768	78

Таблица 2: $[0, 100\pi]$.

Алг.:	Погр в 100π	Макс. погр.	Мин. шаг	Макс. шаг	Сред. шаг	Кол-во шагов
RK-6	6.19492e-07	6.19492e-07	0.1	0.124017	0.119879	2621
RK-7	1.00721e-07	1.63357e-07	0.0392214	0.429062	0.409646	767
RK-8	1.61544e-08	6.87135e-08	0.1	0.593831	0.566994	555
DP-7	2.65332e-09	4.47656e-09	0.1	0.433579	0.433579	753

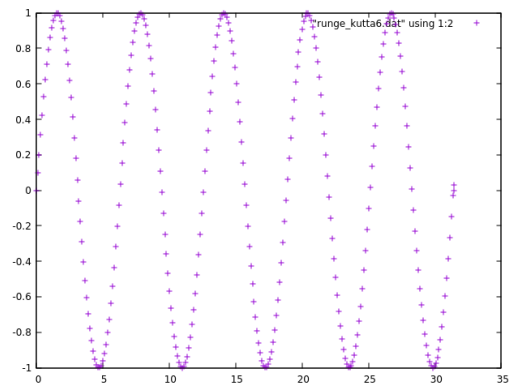
Таблица 3: $[0, 1000\pi]$.

Алг.:	Погр в 1000π	Макс. погр.	Мин. шаг	Макс. шаг	Сред. шаг	Кол-во шагов
RK-6	6.19848e-06	6.20021e-06	0.1	0.124017	0.119933	26195
RK-7	7.86173e-07	1.63662e-06	0.1	0.429062	0.413014	7607
RK-8	2.67748e-07	6.99391e-07	0.1	0.593831	0.572827	5485
DP-7	2.67163e-08	4.30018e-08	0.1	0.433578	0.418991	7498

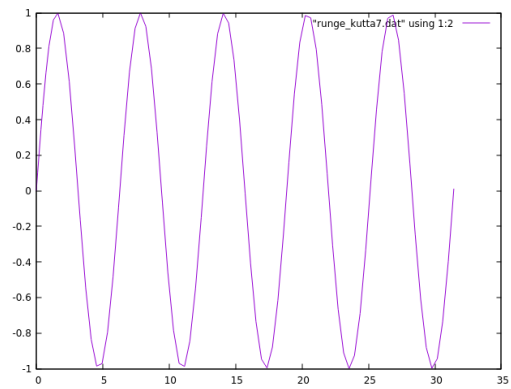
Таблица 4: $[0, 10000\pi]$.

Алг.:	Погр в 10000π	Макс. погр.	Мин. шаг	Макс. шаг	Сред. шаг	Кол-во шагов
RK-6	6.20938e-05	6.21198e-05	0.1	0.124017	0.119938	261935
RK-7	6.45327e-06	1.64321e-05	0.1	0.429062	0.413257	76021
RK-8	3.48813e-06	7.04343e-06	0.1	0.593831	0.573486	54781
DP-7	2.65863e-07	4.29382e-07	0.1	0.433595	0.419142	74953

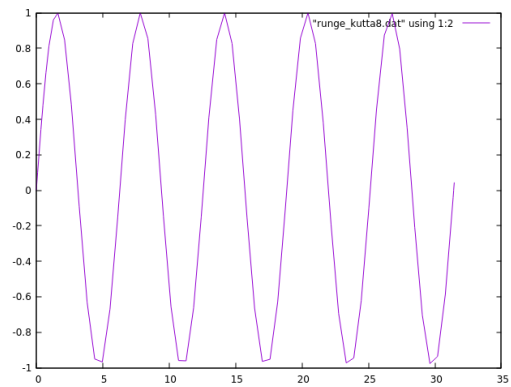
RK-6 $[0, 10\pi]$



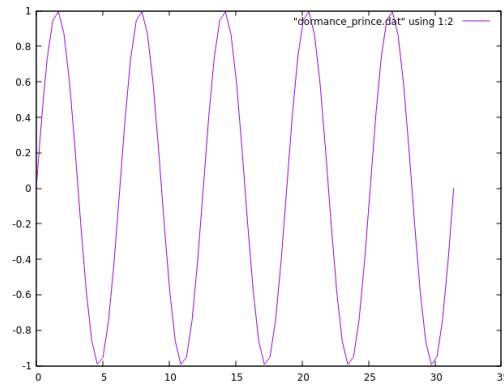
RK-7 $[0, 10\pi]$



RK-8 $[0, 10\pi]$



DP-7 $[0, 10\pi]$



Таким образом, DP-7 ,несмотря на меньший порядок точности основного метода чем у RK-8 в итоге показывает большую точность, из-за лучшего выбора шага. Если сравнить DP-7 и RK-7, то DP-7 при меньшем количестве узлов показывает гораздо лучшую точность. **Далее везде используем DP-7 .**

4 Поиск периода

Сначала ищем такое минимальное t , что $y(x(t)) = 0$. Пусть это будет t_0 . Далее идем по фазовому портрету и ищем место, где $y(x(t))$ меняет знак. Ищем корень методом хорд. Хотим найти такое T , что:

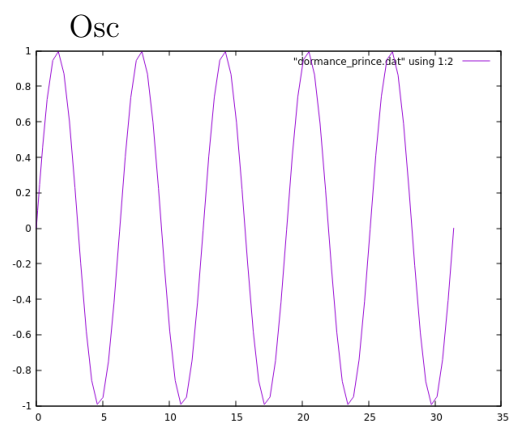
$$\begin{cases} x(t_0) = x(t_0 + T), \\ y(t_0) = y(t_0 + T) \end{cases}$$

Такое минимальное T и принимаем за ответ.

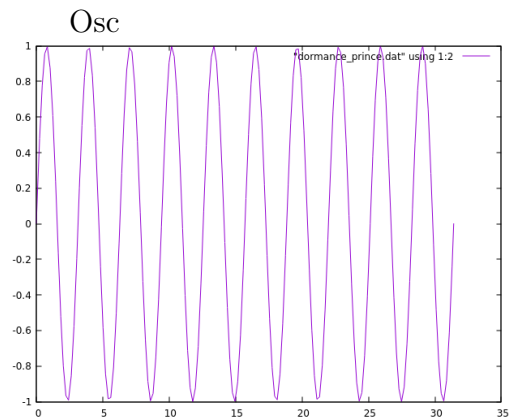
Период осциллятора

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$T \approx 6.28319 \approx 2\pi$$



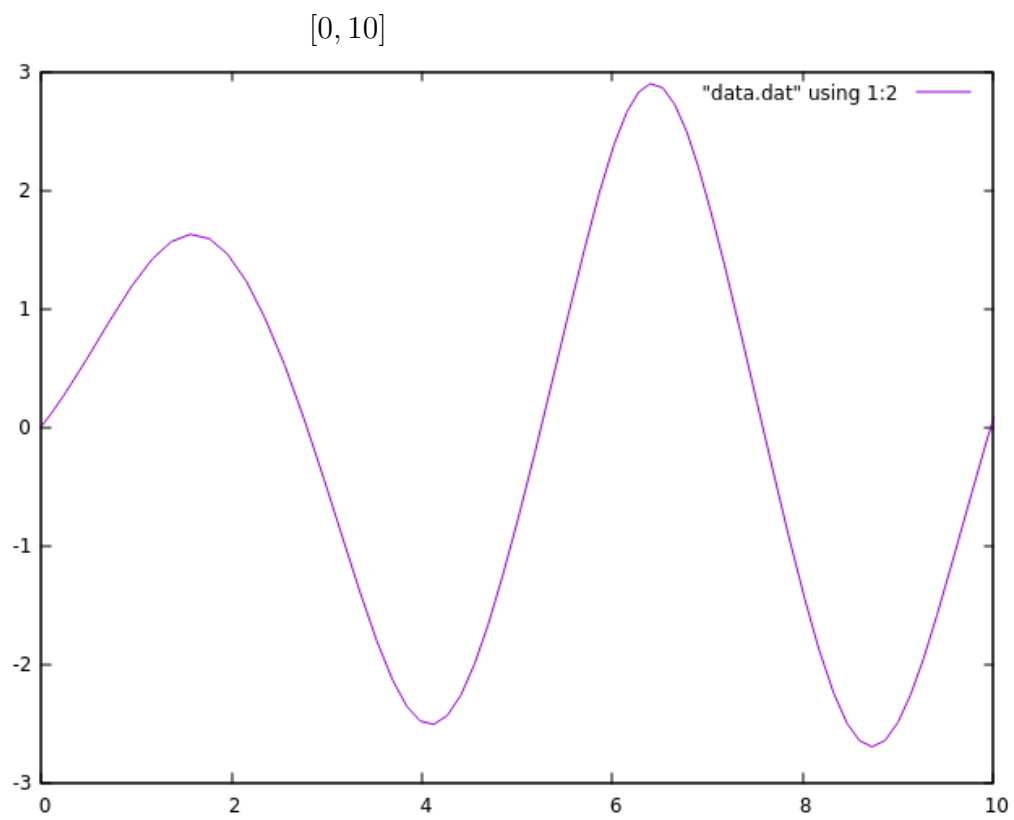
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -4x \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

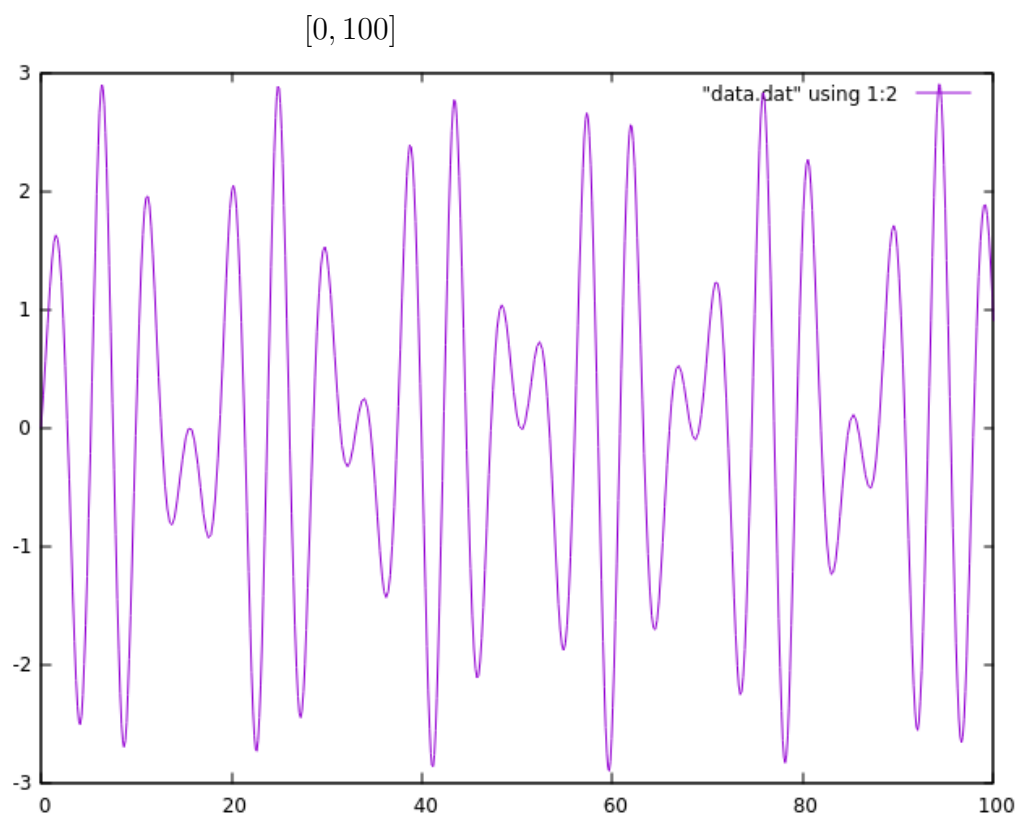


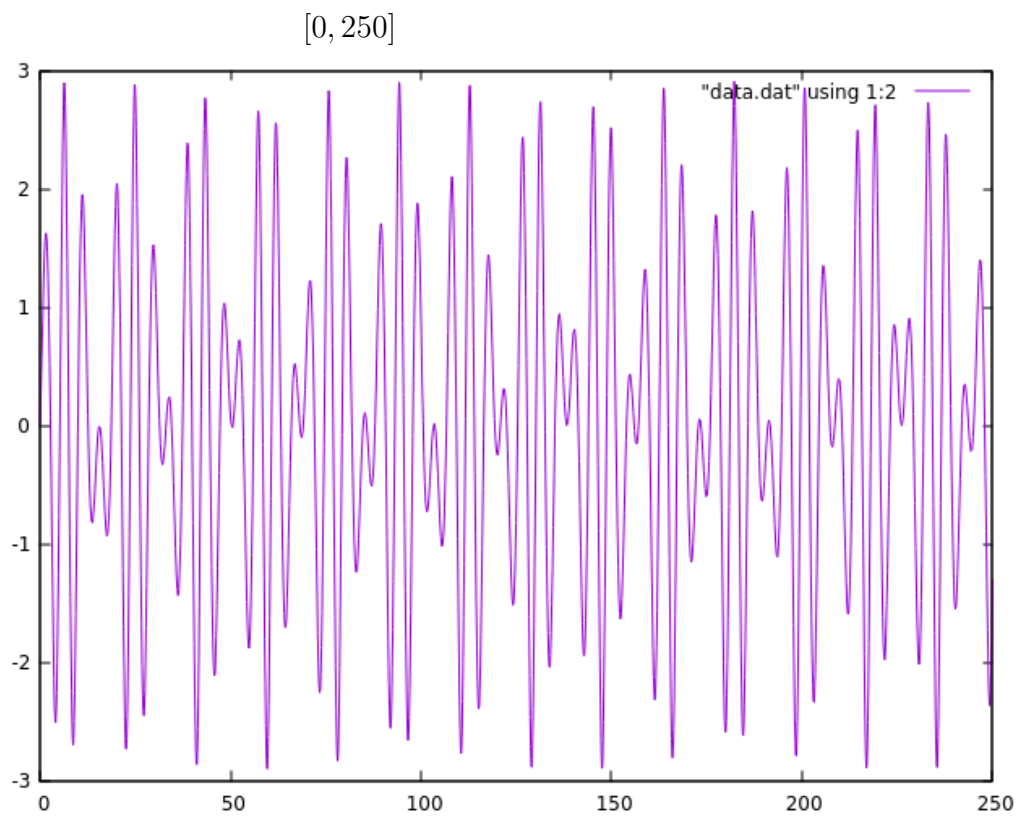
$$T \approx 3.14159 \approx \pi$$

5 Графики задачи и период

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -(1 + 0.2x^2)x + \cos(t) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$





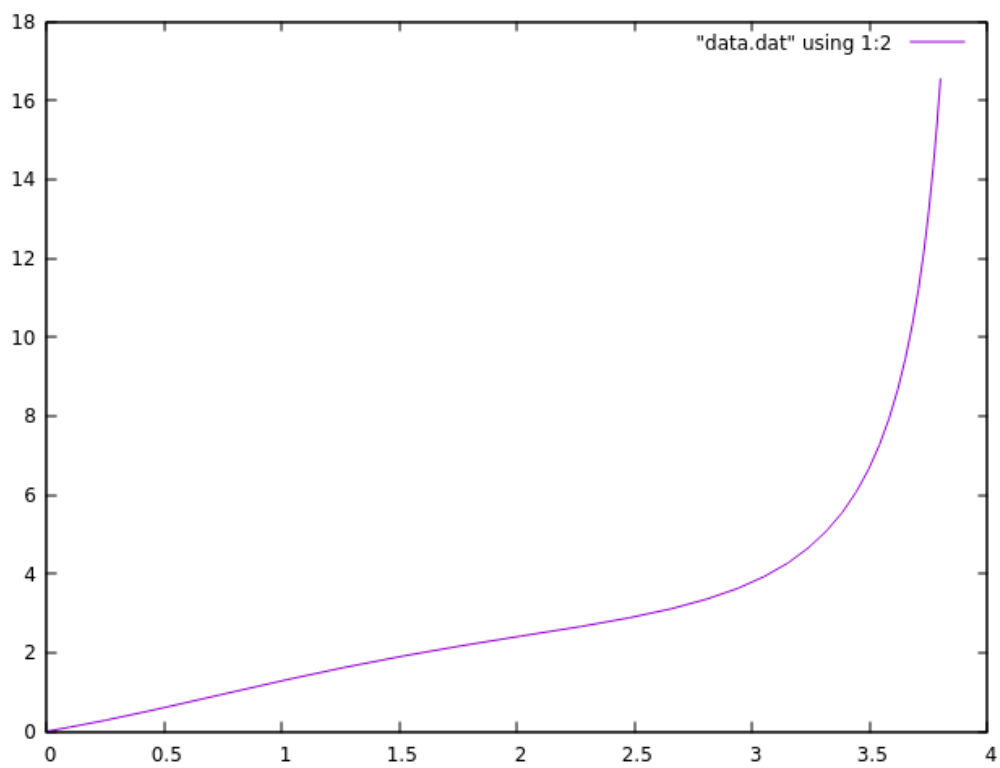


$$T \approx 4677.78$$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -(1 - 0.2x^2)x + \cos(t) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Решение не периодическое.

$[0, 3.8]$



$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -(1 - 0.2x^2)x + \cos(t) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Решение не периодическое.

$[0, 9]$

