Приближённое решение дифференциального уравнения

Отчёт студента 410 группы Михайлина Дмитрия Александровича

9 апреля 2019 г.

0.1 Постановка задачи

Решить дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1 + \alpha x^2)x = \cos(t), \alpha = 0.2, -0.2 \tag{1}$$

Сами зададим начальные условия. Перепишем 1 в виде системы двух дифференциальных уравнений:

$$1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \cos(t) - (1 + \alpha x^2)x \end{cases} \tag{2}$$

Получается мы свели дифференциальное уравнение второго порядка к системе дифференциальных уравнений. Будем решать эту систему при помощи метода Дормана-Принса 7 порядка.

Введём обозначения:

Пусть s - целое положительное число, называемое числом стадий и $a_{21}, \dots a_{s,s-1}, b_1, \dots b_s, c_2 \dots c_s$ - вещественные коэффициенты. Тогда метод

$$\begin{gathered} k_1 = f(x_0, y_0) \\ k_2 = f(x_0 + c_2 h, y_0 + h a_{2,1} k_1) \\ k_3 = f(x_0 + c_3 h, y_0 + h(a_{3,1} k_1 + a_{32} k_2) \\ \dots \\ k_s = f(x_0 + c_s h, y_0 + h(a_{s,1} k_1 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1})) \\ y_1 = y_0 + h(b_1 k_1 + \dots + b_s k_s)) \end{gathered} \tag{3}$$

- будет s-стадийным явным методом Рунге-Кутта, решения задачи:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{4}$$

Определение 1. Метод Рунге-Кутты имеет порядок p, если:

$$||y(x_0 + h) - y_1|| \leq K h^{p+1},$$

т.е члены для точного решения $y(x_0 + h)$ и для y_i совпадают до члена h^p включительно.

Приведем таблицу Бутчера для метода Дормана-Принса 8(7) порядка из книги Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. "Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи".

c_i	a_{ij}												$\hat{b}_i$	b_i
0													$\frac{14005451}{335480064}$	$\frac{13451932}{455176623}$
$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$												0	0
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{16}$											0	0
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	0	$\frac{3}{32}$										0	0
$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	0	$\frac{-75}{64}$	$\frac{75}{64}$									0	0
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{80}$	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{20}$								$\frac{-59238493}{1068277825}$	$\frac{-808719846}{976000145}$
$\frac{59}{400}$	$\frac{29443841}{614563906}$	0	0	$\frac{77736538}{692538347}$	$\frac{-28693883}{1125000000}$	$\frac{23124283}{1800000000}$							$\frac{181606767}{758867731}$	$\frac{1757004468}{5645159321}$
$\frac{93}{200}$	$\frac{16016141}{946692911}$	0	0	$\frac{61564180}{158732637}$	$\frac{22789713}{633445777}$	$\frac{545815736}{2771057229}$	$\frac{-180193667}{1043307555}$						$\frac{561292985}{797845732}$	$\frac{656045339}{265891186}$
$\frac{5490023248}{9719169821}$	$\frac{39632708}{573591083}$	0	0	$\frac{-433636366}{683701615}$	$\frac{-421739975}{2616292301}$	$\frac{100302831}{723423059}$	$\frac{790204164}{839813087}$	$\frac{800635310}{3783071287}$					$\frac{-1041891430}{1371343529}$	$\frac{-3867574721}{1518517206}$
$\frac{13}{20}$	$\frac{246121993}{1340847787}$	0	0	$\frac{-37695042795}{15268766246}$	$\frac{-309121744}{1061227803}$	$\frac{-12992083}{490766935}$	$\frac{6005943493}{2108947869}$	$\frac{393006217}{1396673457}$	$\frac{123872331}{1001029789}$				$\frac{760417239}{1151165299}$	$\frac{465885868}{322736535}$
$\frac{1201146811}{1299019798}$	$\frac{-1028468189}{846180014}$	0	0	$\frac{8478235783}{508512852}$	$\frac{1311729495}{1432422823}$	$\frac{-10304129995}{1701304382}$	$\frac{-48777925059}{3047939560}$	$\frac{15336726248}{1032824649}$	$\frac{-45442868181}{3398467696}$	$\frac{3065993473}{597172653}$			$\frac{118820643}{751138087}$	$\frac{53011238}{667516719}$
1	$\frac{185892177}{718116043}$	0	0	$\frac{-3185094517}{667107341}$	$\frac{-477755414}{1098053517}$	$\frac{-703635378}{230739211}$	$\frac{5731566787}{1027545527}$	$\frac{5232866602}{850066563}$	$\frac{-4093664535}{808688257}$	$\frac{3962137247}{1805957418}$	$\frac{65686358}{487910083}$		$\frac{-528747749}{2220607170}$	$\frac{2}{45}$
1	$\frac{403863854}{491063109}$	0	0	$\frac{-5068492393}{434740067}$	$\frac{-411421997}{543043805}$	$\frac{652783627}{914296604}$	$\frac{11173962825}{925320556}$	$\frac{-13158990841}{6184727034}$	$\frac{3936647629}{1978049680}$	$\frac{-160528059}{685178525}$	$\frac{248638103}{1413531060}$	0	$\frac{1}{4}$	0

0.2 Переменный шаг:

Выбор шага в алгоритме Дормана-Принса:
Сначала вычисляем $y^{(1)}$ - приближенное значение в точке $x_0 + h$ методом Рунге-Кутта 7 порядка. Потом вычисляем $y^{(2)}$ приближенное значение в точке $x_0 + h$ уже методом 8 порядка. Рассматриваем ошибку как $err = ||y^{(1)} - y^{(2)}||$. Если $err < tol$ - то шаг принимается. Новый шаг h пересчитывается по формуле $h_{new} = h_{old} * min(facmin, max(facmax, fac * (\frac{err}{tol})^{\frac{1}{7}}))$. fac, facmin, facmax - это параметры которые не дают алгоритму слишком быстро уменьшать или увеличивать шаг. Согласно книге Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. "Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи"их можно выбрать так:
$facmin = 0, facmax = 1.5, fac = 0.8$

0.3 Гармонический осциллятор

Рассмотрим работу алгоритма DP-8(7) на гармоническом осцилляторе.

$$x'' + \omega^2 x = 0 \tag{5}$$

Перепишем это дифференциальное уравнение в следующем виде:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 x \end{cases} \tag{6}$$

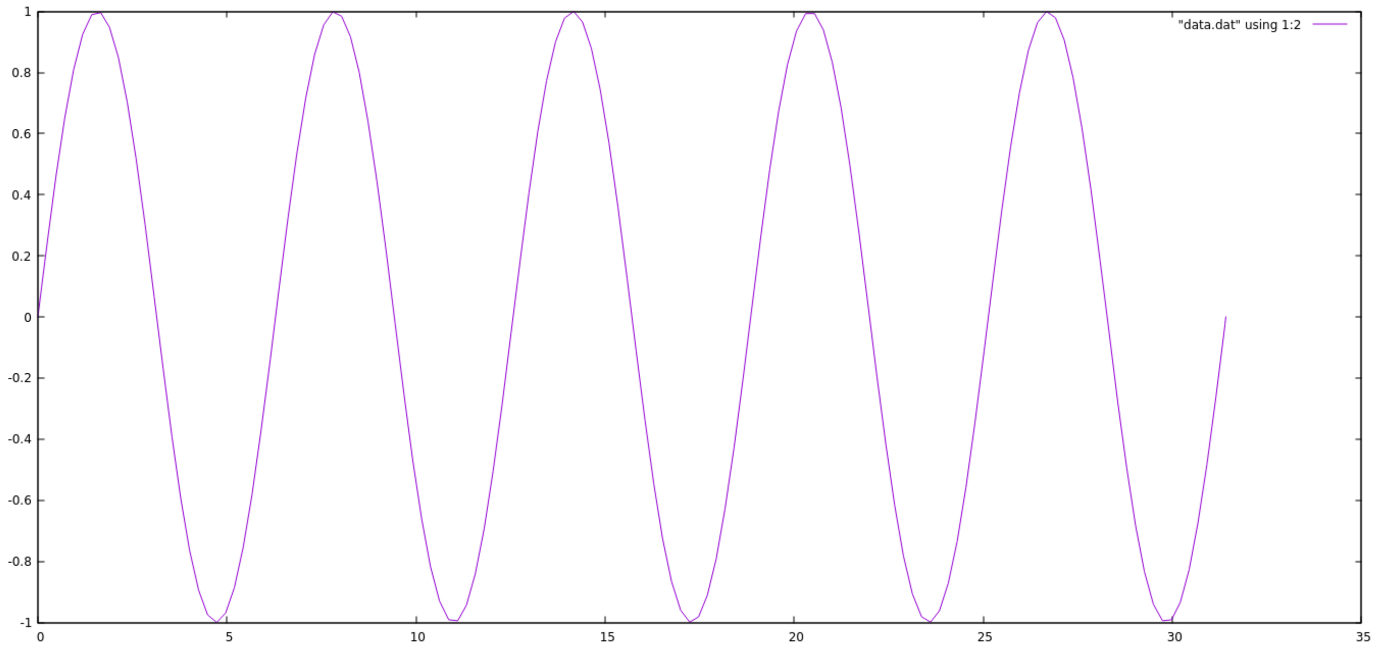
Таблица 1: $[DP-8(7)]$.

Отрезок:	Погр. в кон. тчк	Макс. погр.	Кол-во узлов в сетке	Число Рунге
$[0, 10\pi]$	1.232542e-10	3.010808e-10	135	83.289586
$[0, 100\pi]$	1.242393e-09	3.130512e-09	1333	84.822430
$[0, 1000\pi]$	1.246366e-08	3.160922e-08	13316	84.833284
$[0, 10000\pi]$	1.243602e-07	3.160972e-07	133142	84.857393
$[0, 100000\pi]$	1.236711e-06	3.159496e-06	1331410	84.990234

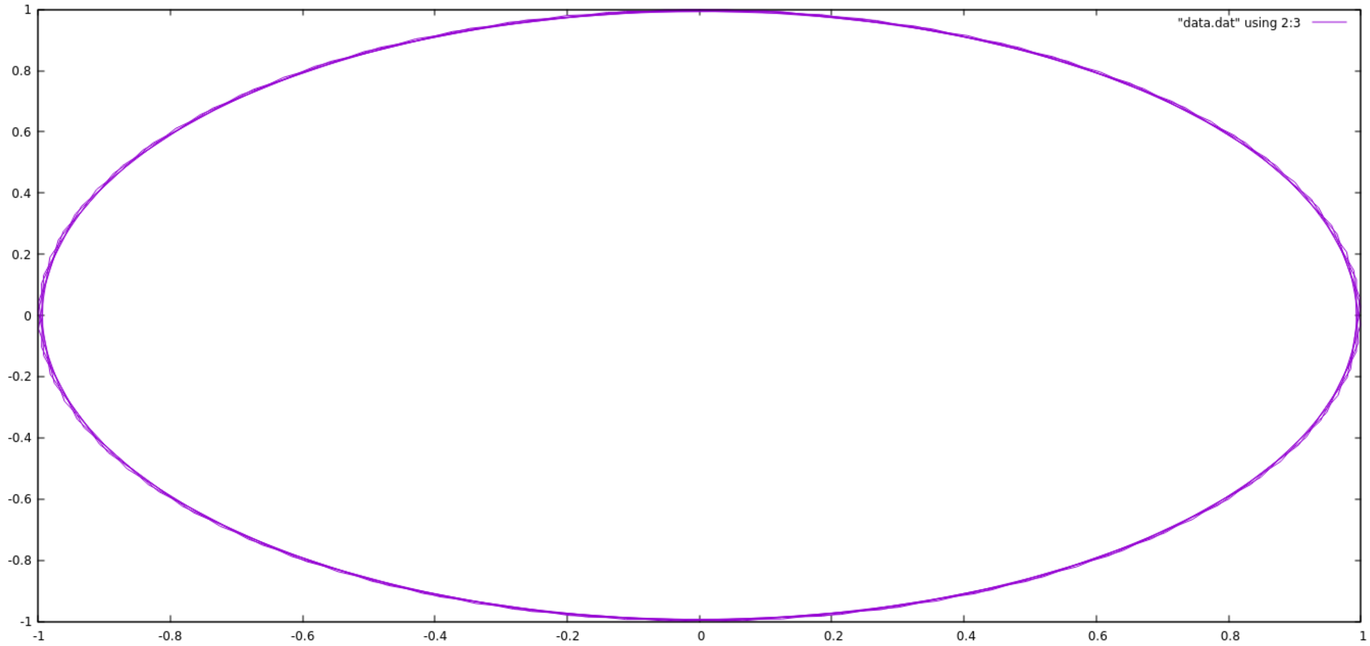
В этой таблице приводятся результаты работы алгоритма
на $[0, 10\pi], [0, 100\pi], [0, 1000\pi], [0, 10000\pi], [0, 100000\pi]$ с погрешностью на шаге 10^{-11}

Графики гармонического осциллятора $[0, 10\pi]$ с точностью на шаге 10^{-11}

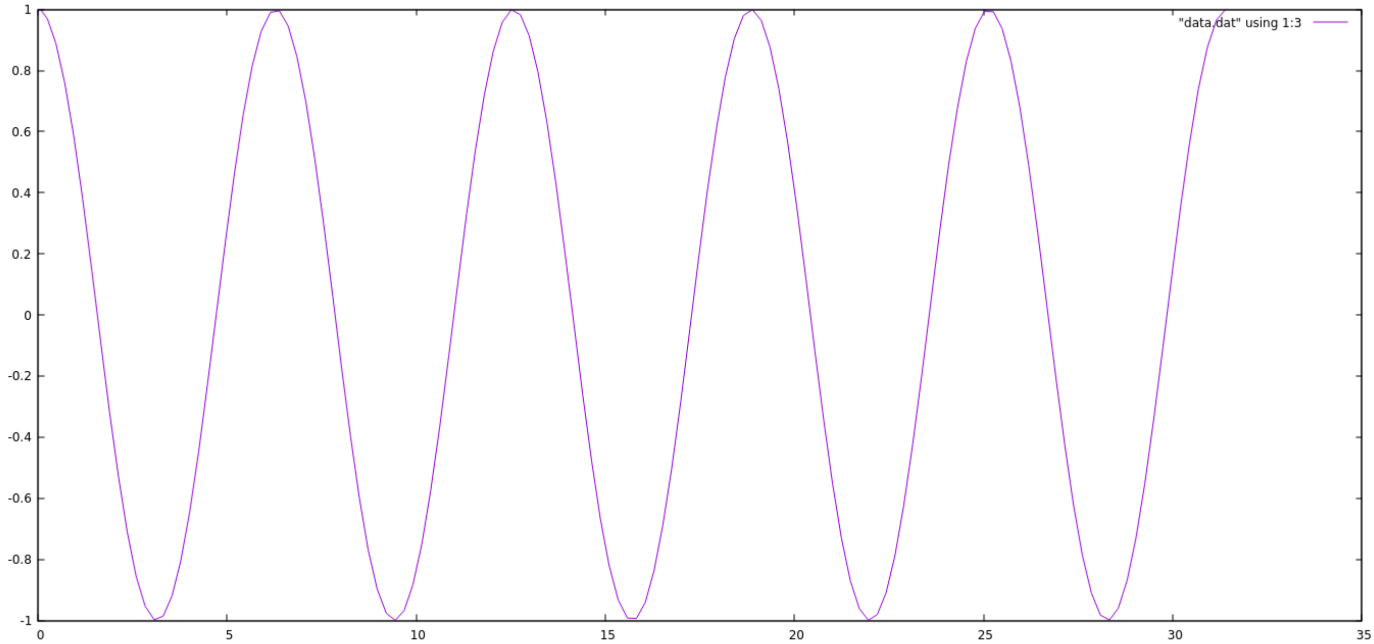
$[0, 10\pi]$ x(t)



$[0, 10\pi]\ x'(x)$



$[0, 10\pi]\ x'(t)$



0.4 Поиск периода

Сначала ищем такое минимальное t, что $y(x(t)) = 0$. Пусть это будет t_0. Далее идем по фазовому портрету и ищем место, где $y(x(t))$ меняет знак. Ищем корень методом хорд. Хотим найти такое T, что:

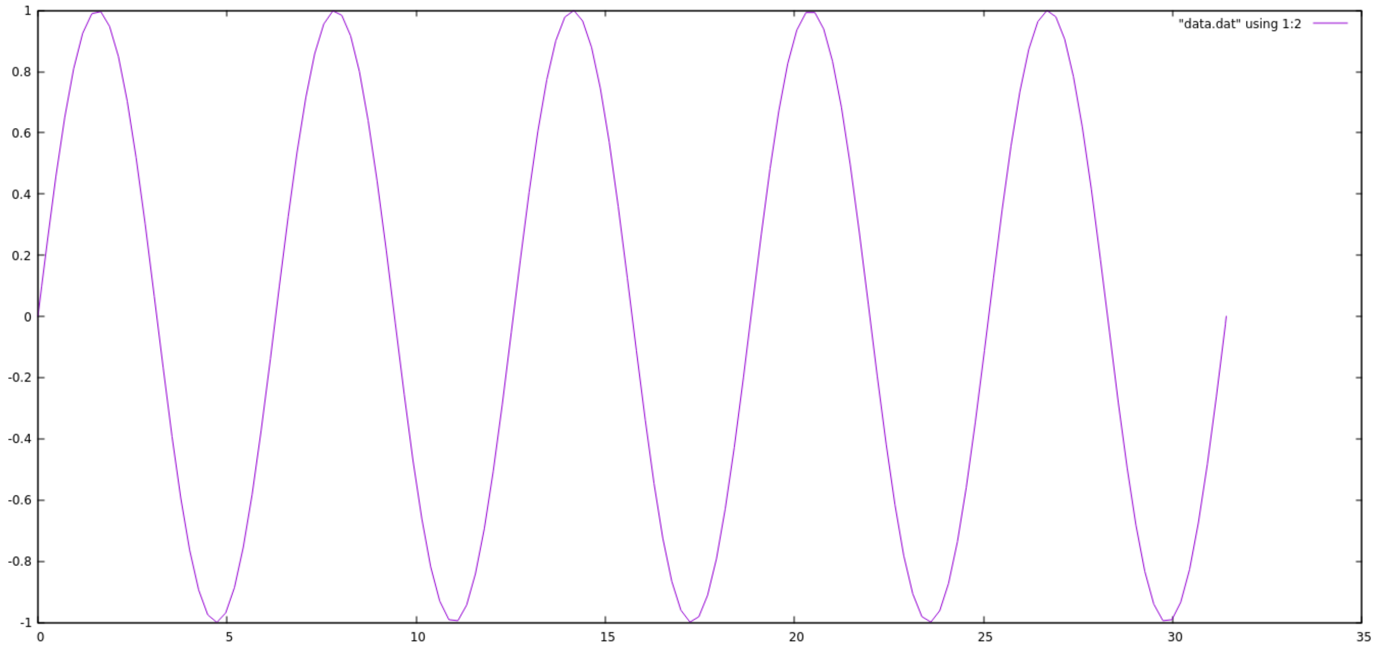
$$\begin{cases} x(t_0) = x(t_0 + T), \\ y(t_0) = y(t_0 + T) \end{cases}$$

Находим всех претендентов на период и потом проверяем, что это действительно период.
Период осциллятора

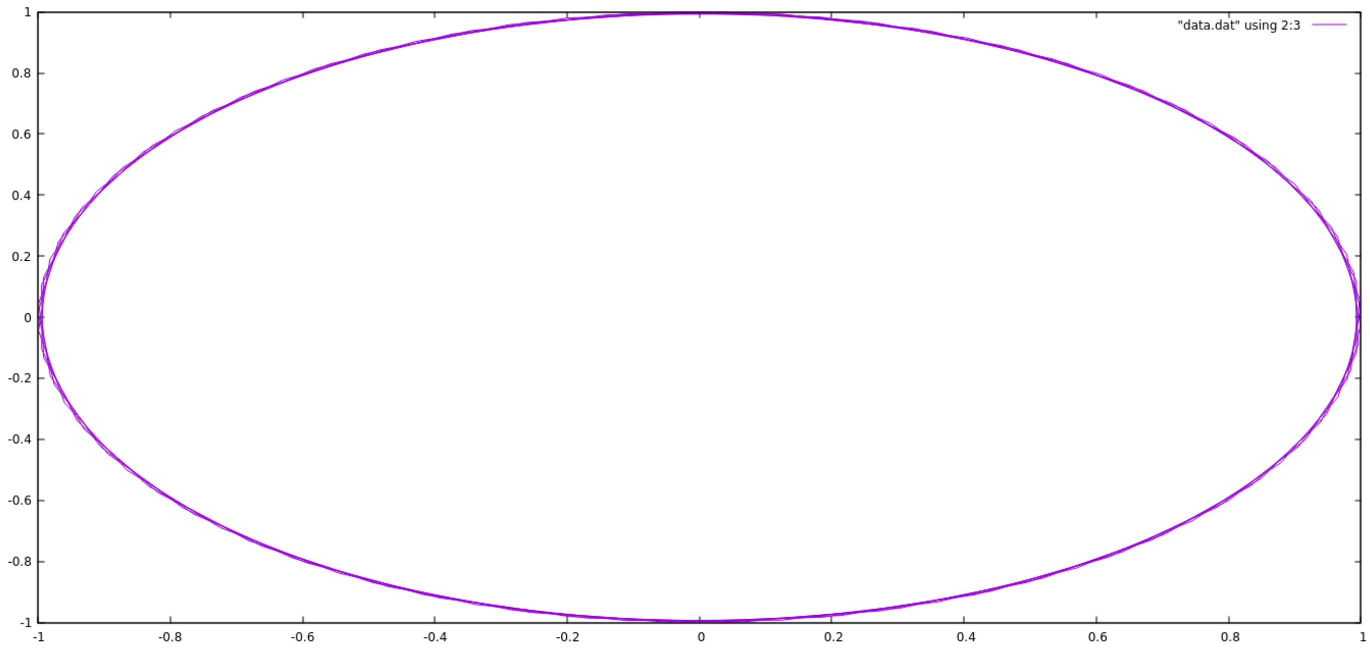
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$T \approx 6.28319 \approx 2\pi$

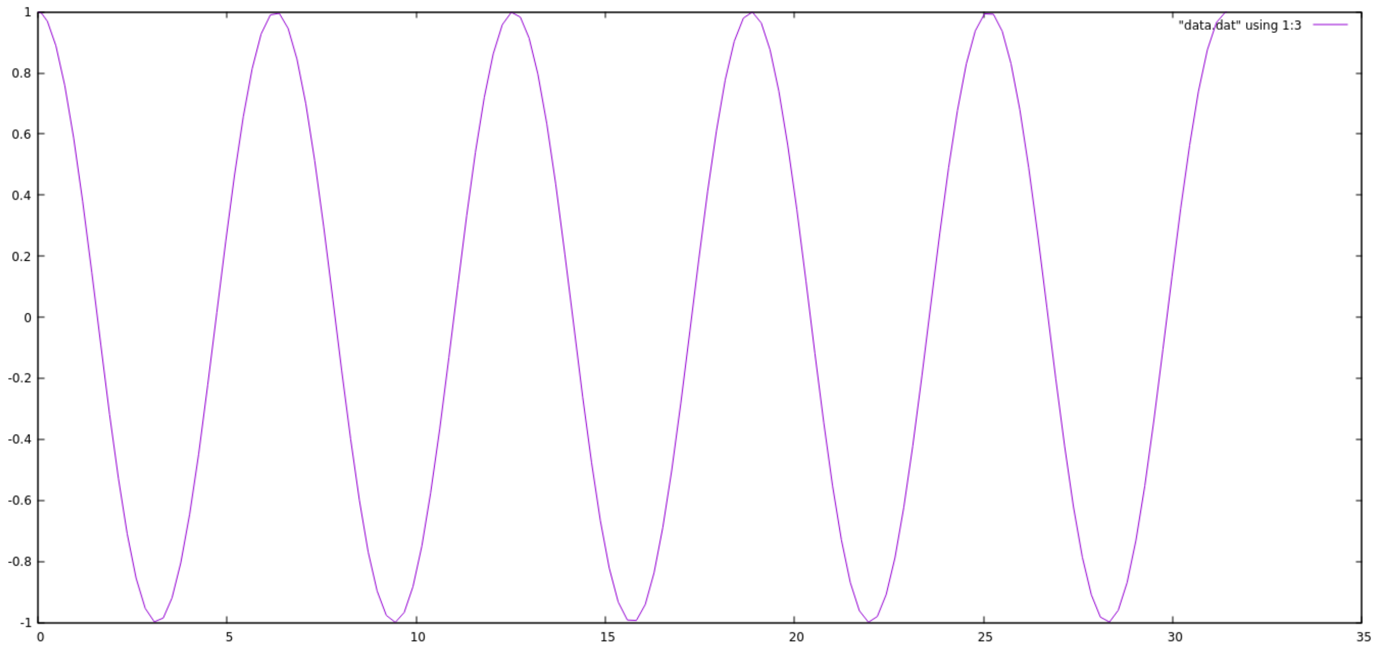
Osc $x(t)$ с точностью на шаге 10^{-11}



Osc $x'(x)$ с точностью на шаге 10^{-11}

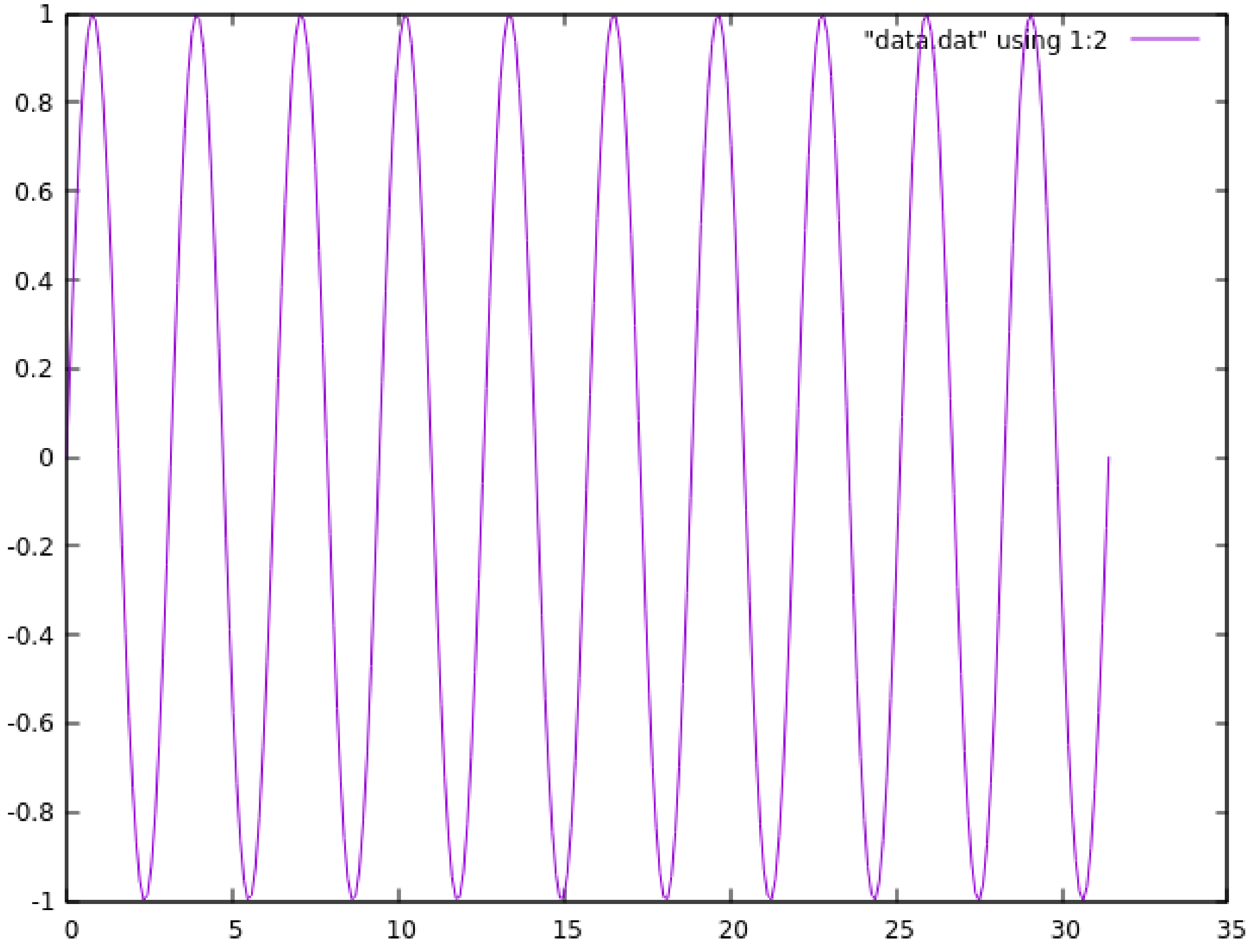


Osc $x'(t)$ с точностью на шаге 10^{-11}

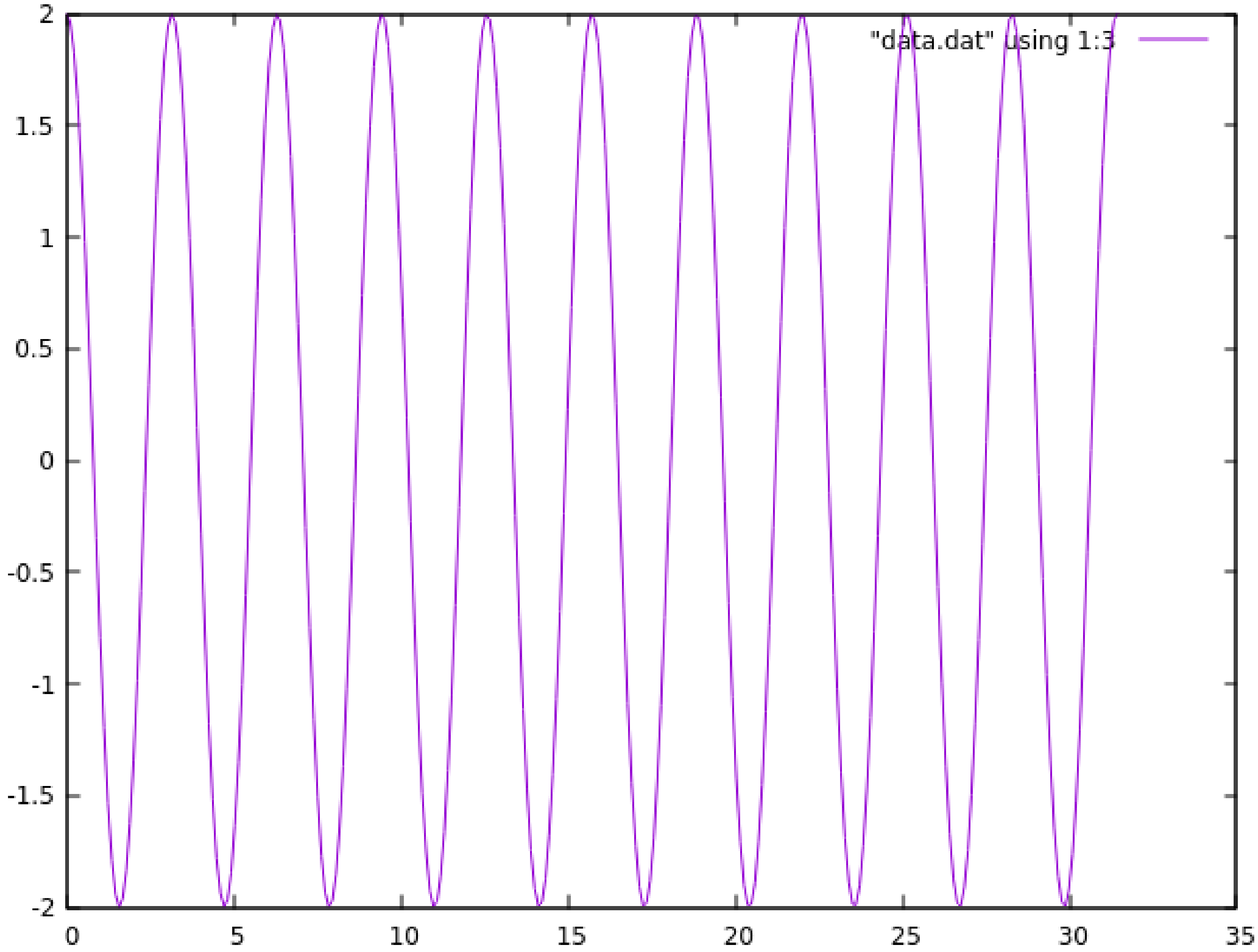


$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -4x \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

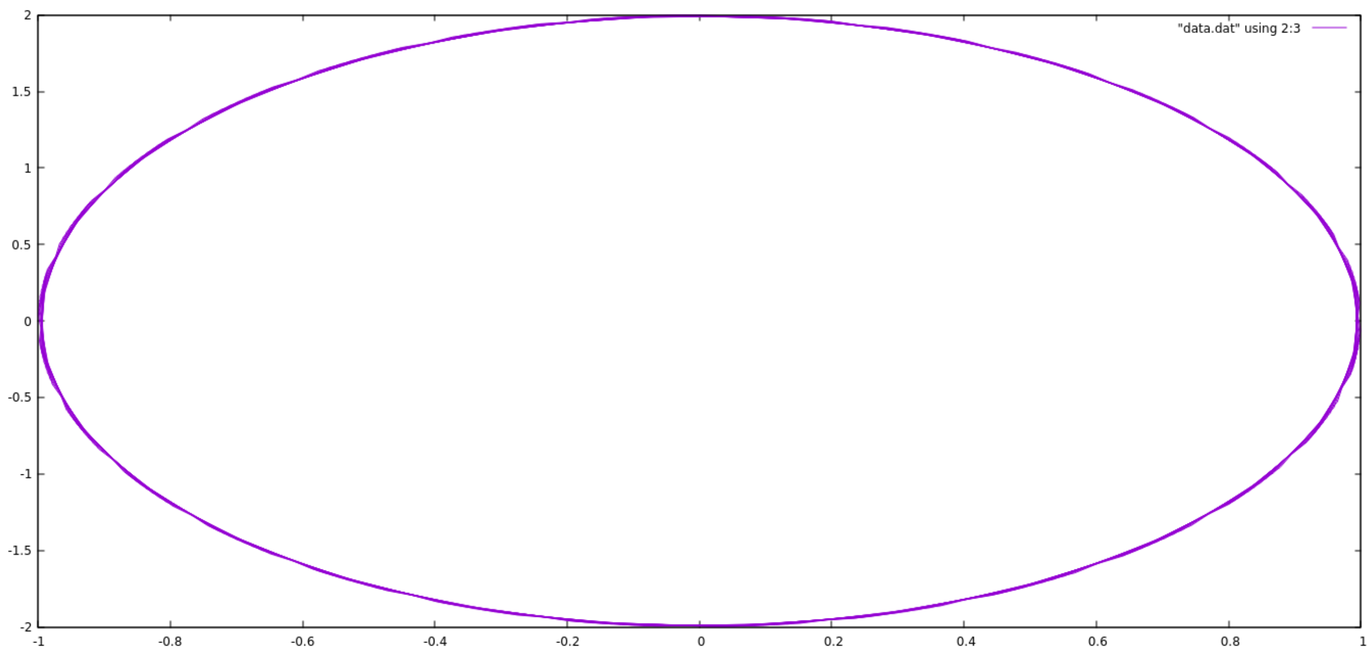
$[0, 10\pi]$ $x(t)$ с точностью на шаге 10^{-11}



$[0, 10\pi]$ $x'(t)$ с точностью на шаге 10^{-11}



$[0, 10\pi]$ $x'(x)$ с точностью на шаге 10^{-11}



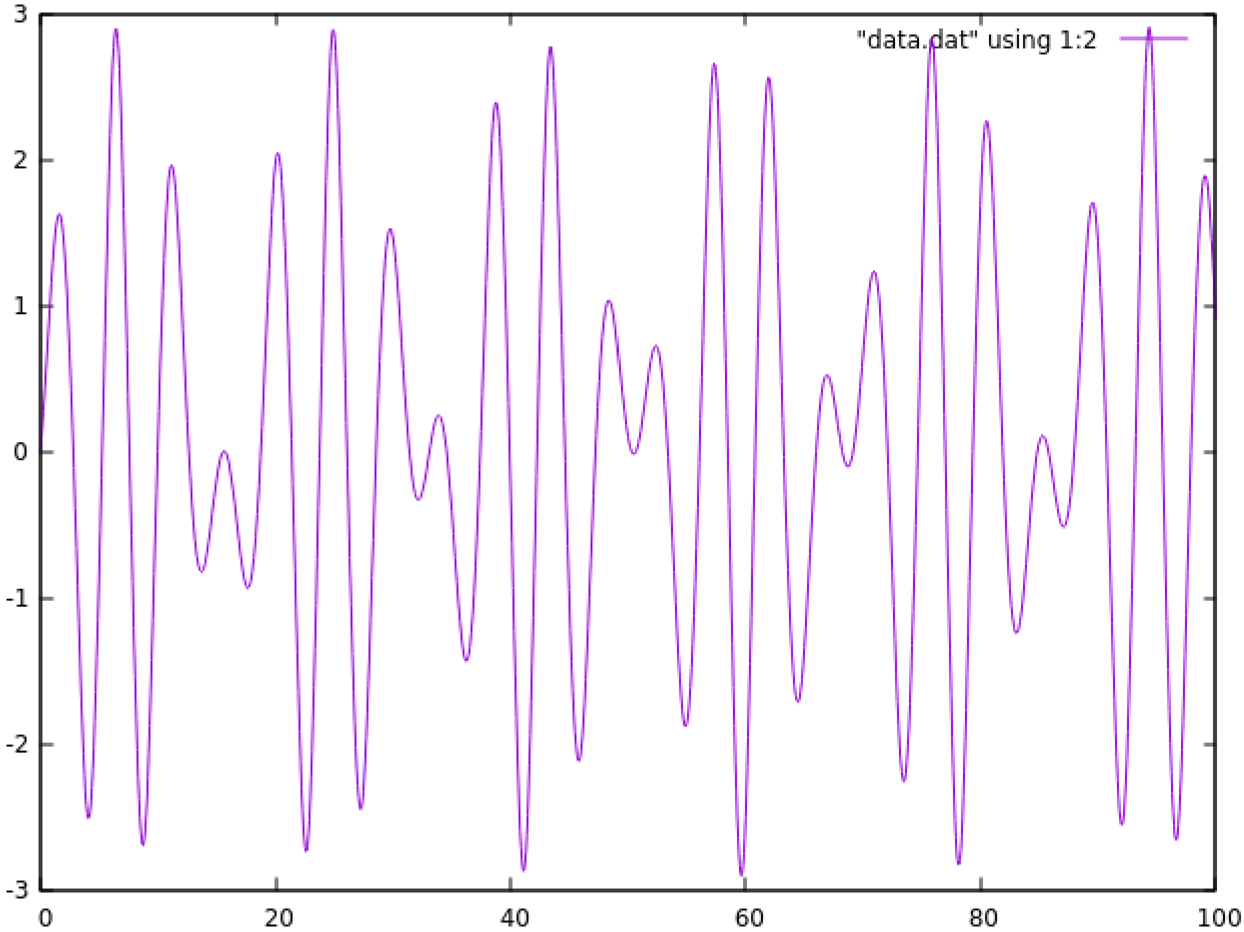
$T \approx 3.14159 \approx \pi$

0.5 Графики задачи и период

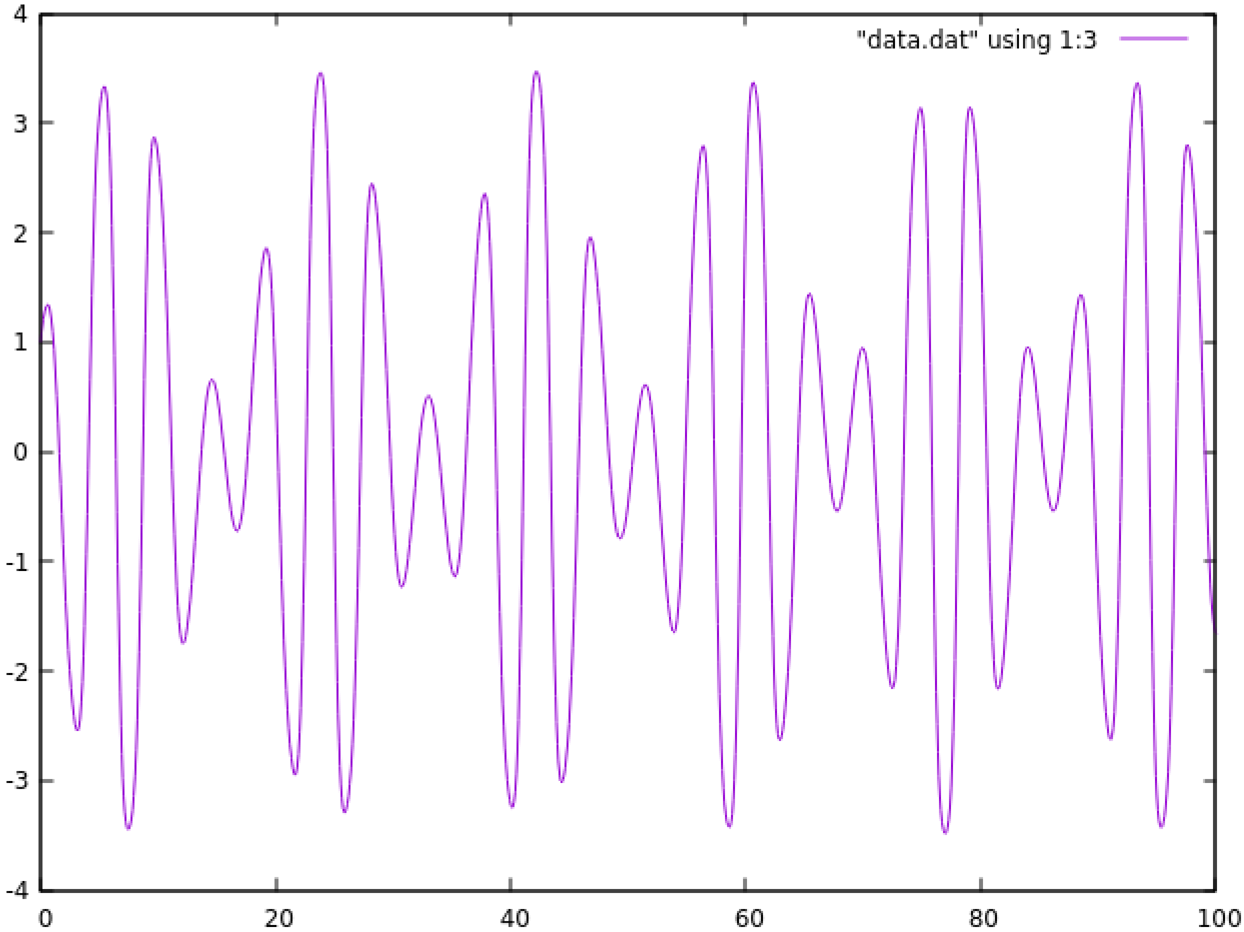
Рассмотрим сначала задачу с данными начальными условиями.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -(1 + 0.2x^2)x + cos(t) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

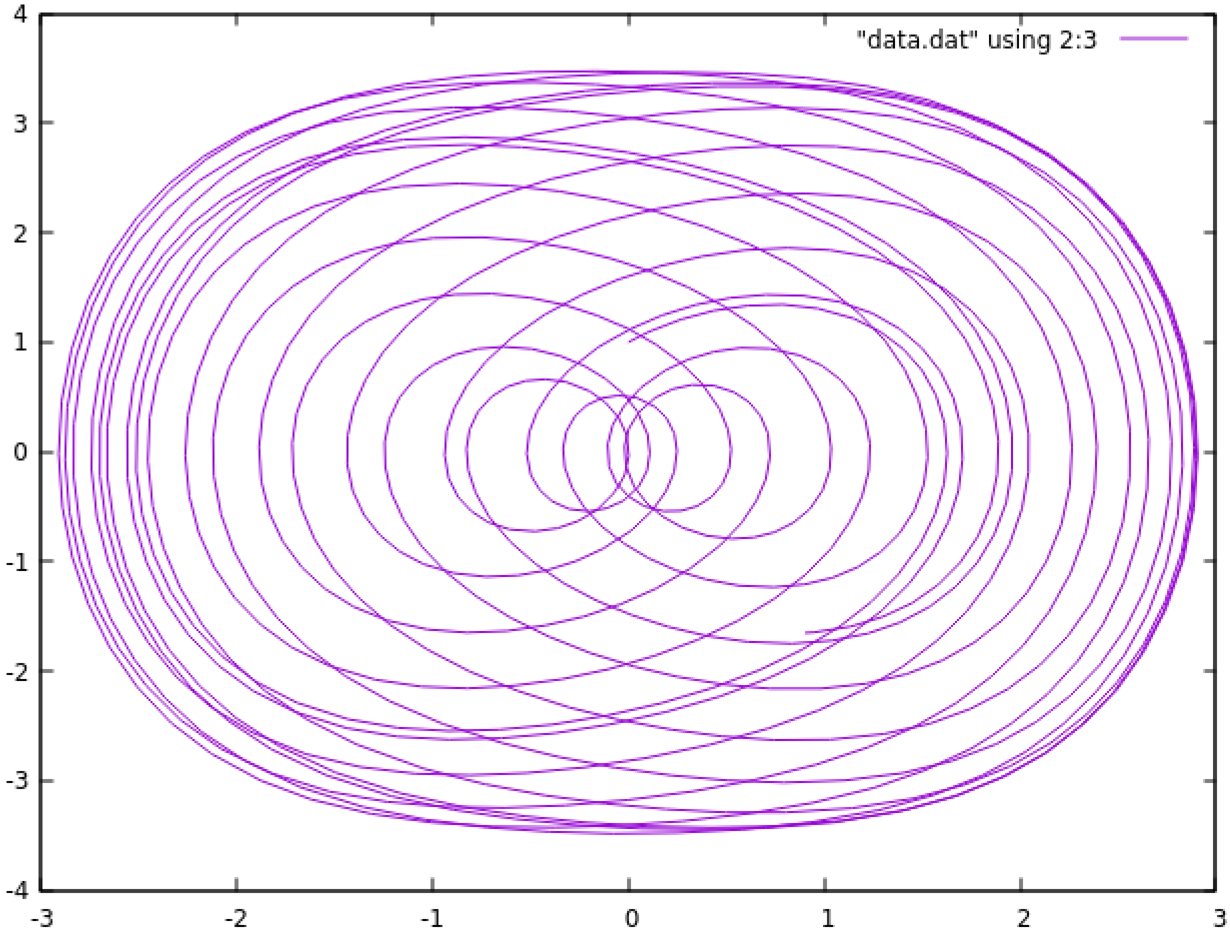
$[0, 100]$ $x(t)$ с точностью 10^{-11}



$[0, 100]$ $x'(t)$ с точностью 10^{-11}

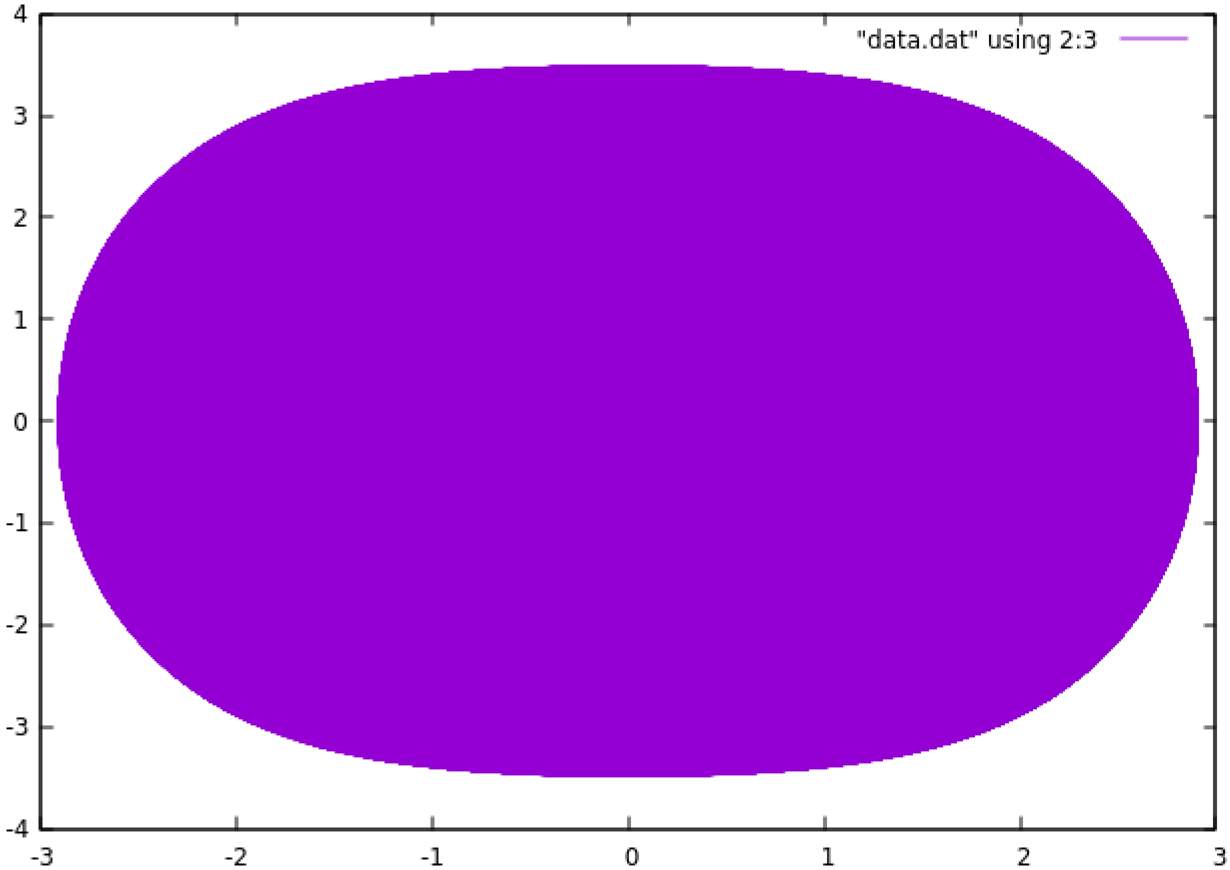


$[0, 100]$ $x'(x)$ с точностью 10^{-11}

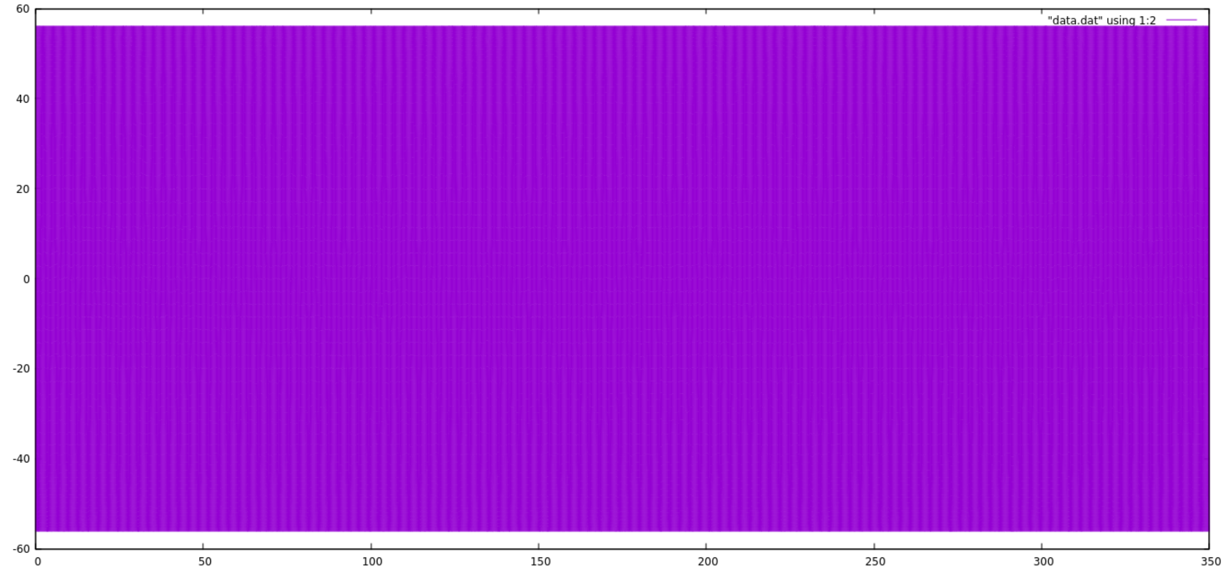


$T \approx 45182.385526$, Числа рунге $= 75.957517$

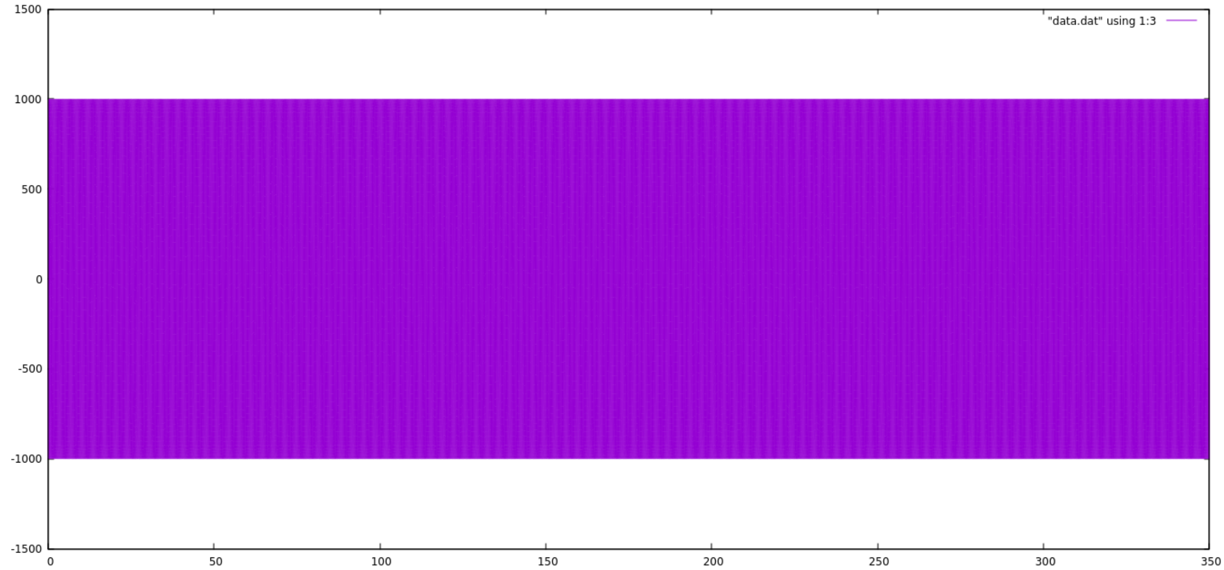
$x'(x)$ $[0, 50000]$



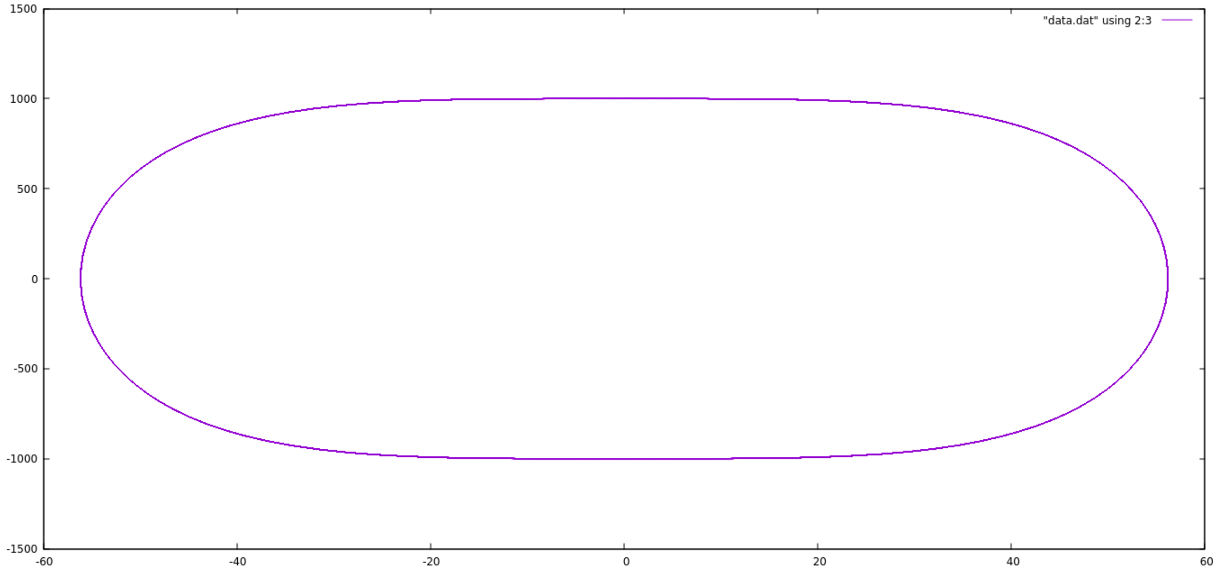
Найдем периоды для различных начальных условий:
Пусть x(0) = 0, y(0) = -1000, $T \approx 320.438513$ и число Рунге = 117.284488
$[0, 350]$ $x(t)$ с точностью 10^{-11}



$[0, 350]$ $x'(t)$ с точностью 10^{-11}



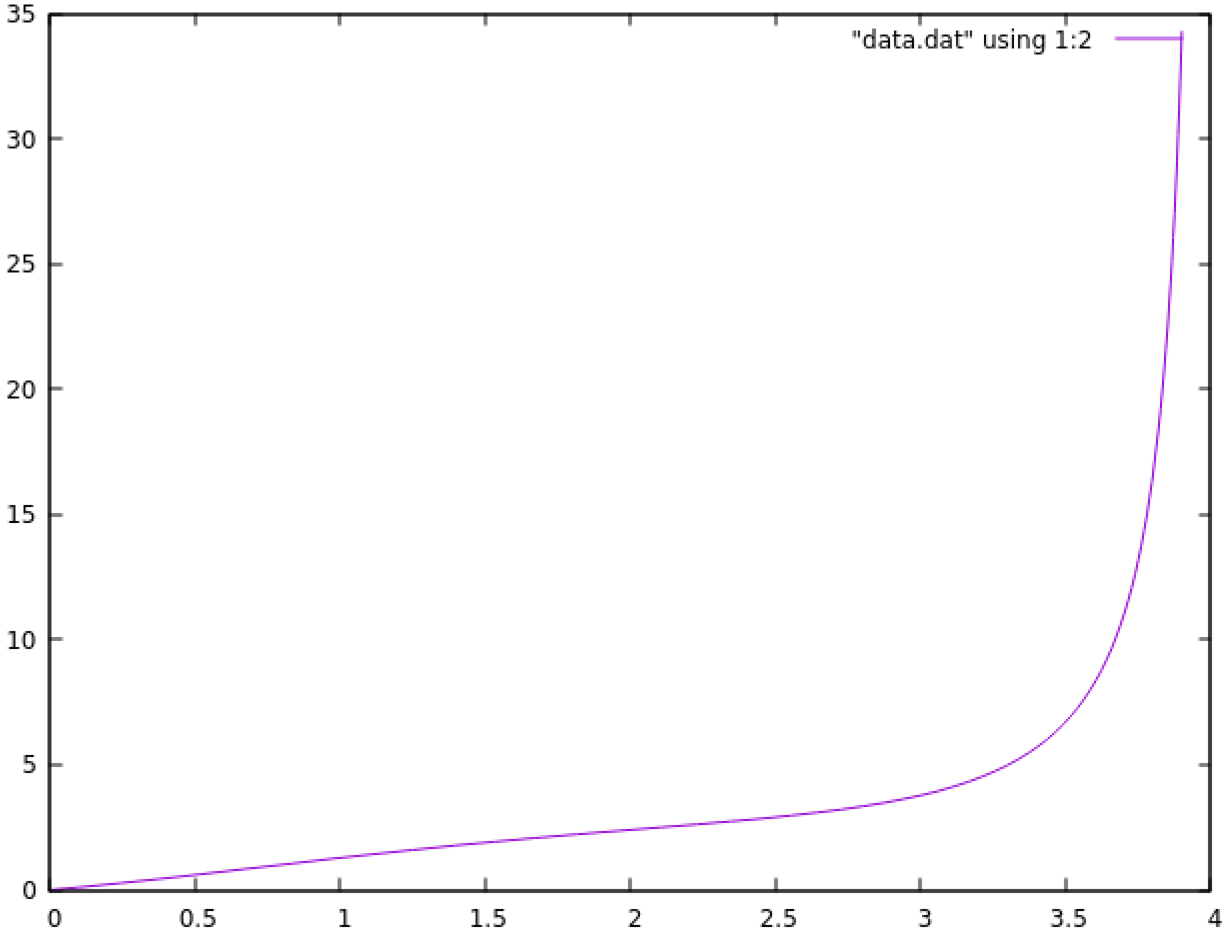
$[0, 350]$ $x'(x)$ с точностью 10^{-11}



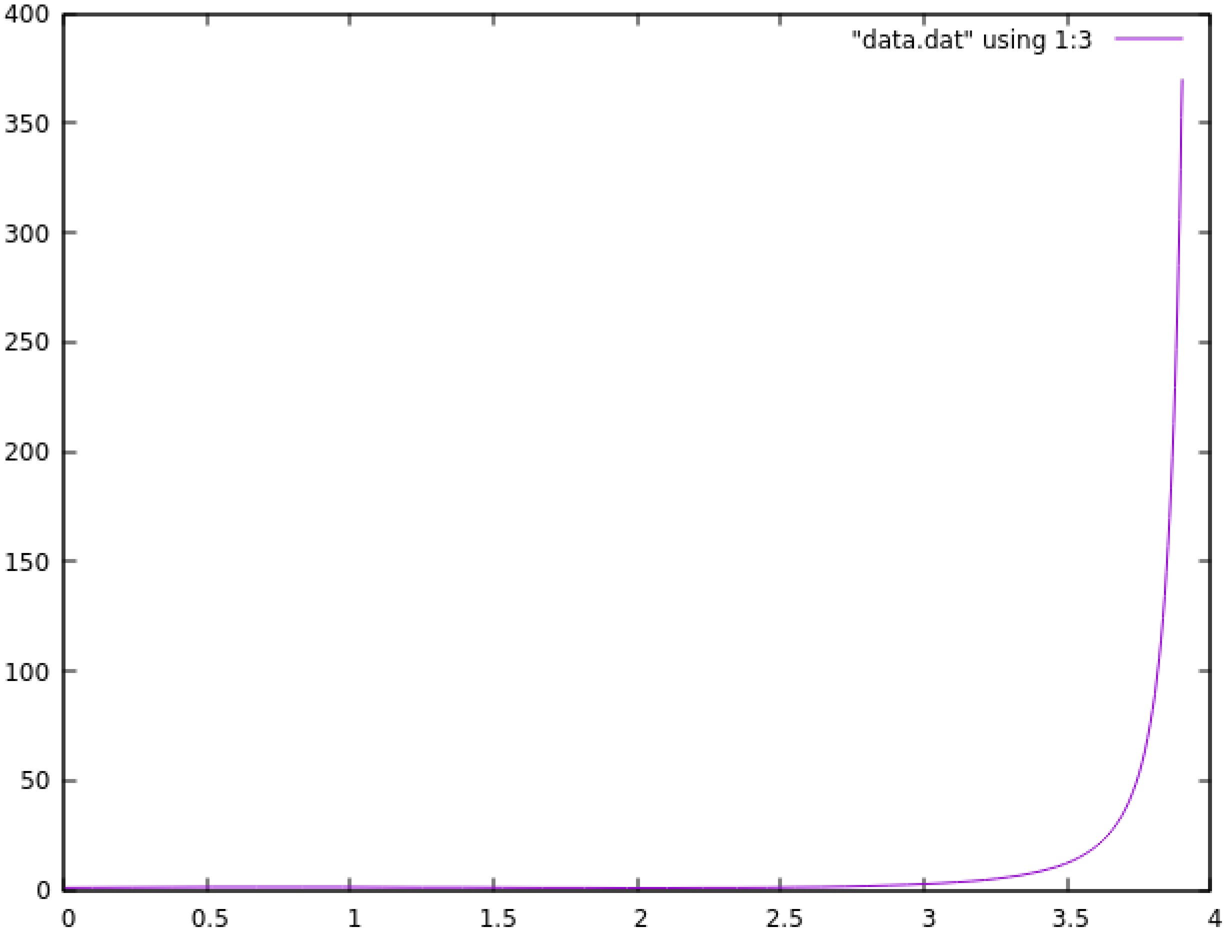
Рассмотрим теперь задачу для другого α.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -(1 - 0.2x^2)x + cos(t) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

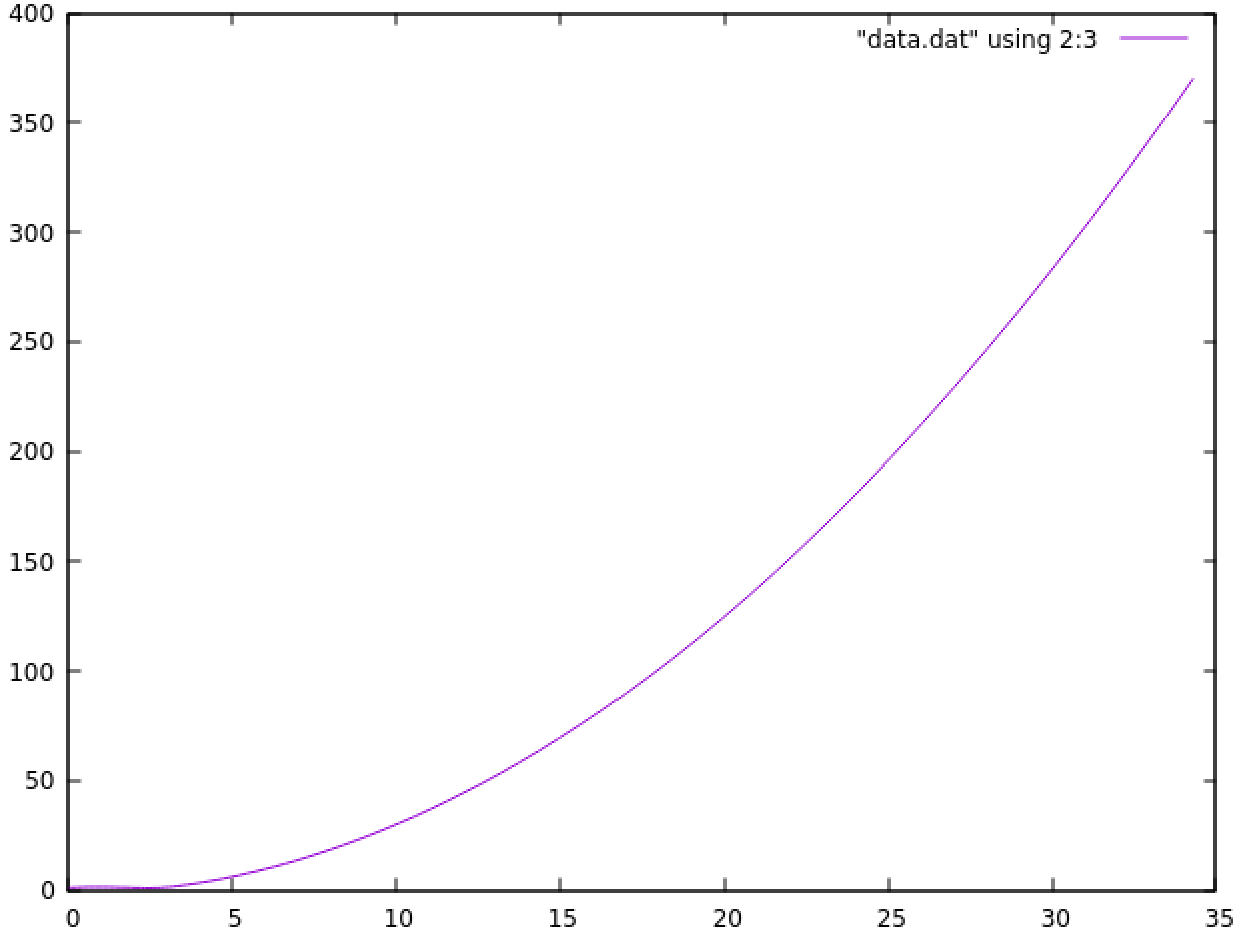
$[0, 3.9]$ $x(t)$ с точностью 10^{-11}



$[0, 3.9]$ $x'(t)$ с точностью 10^{-11}

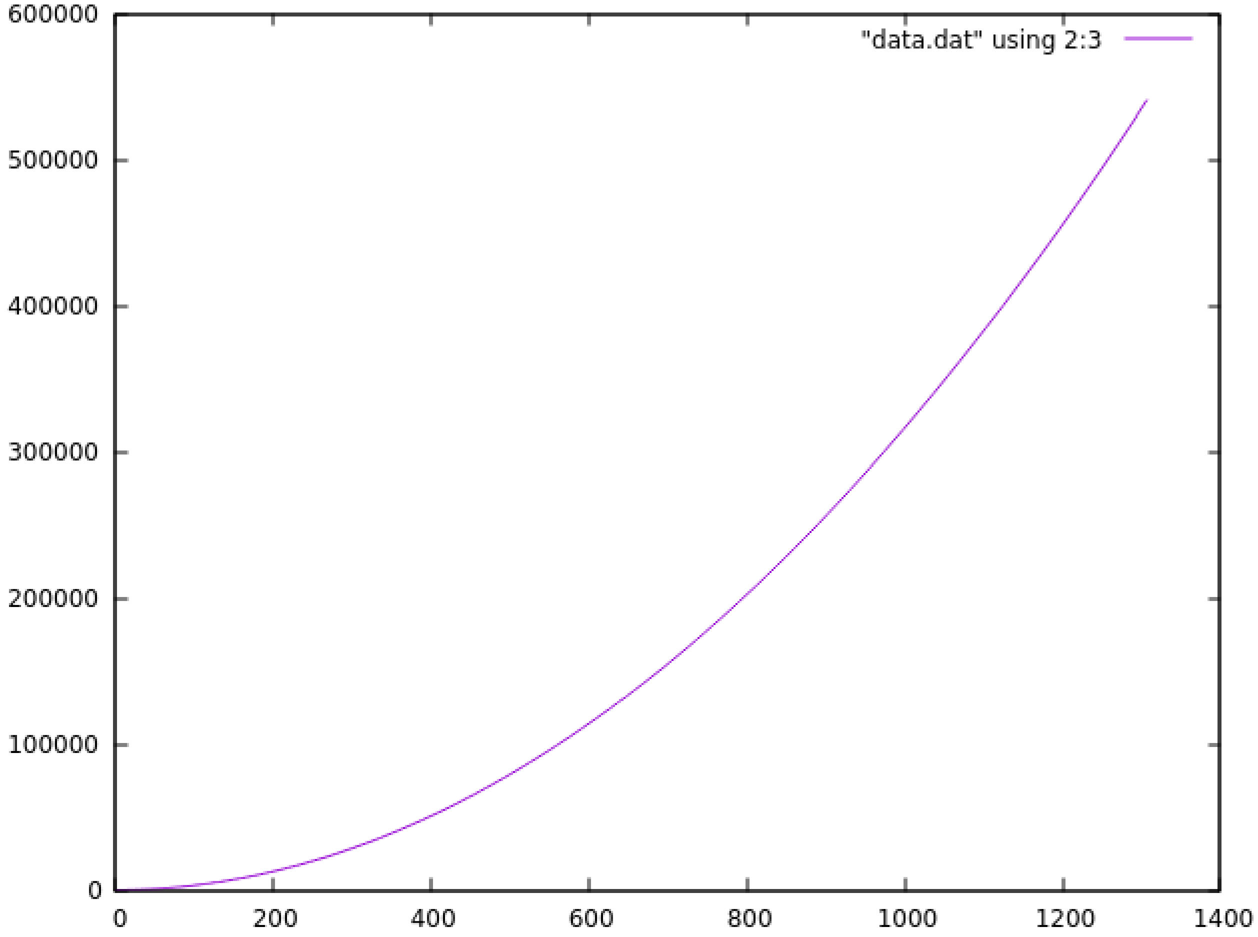


$[0, 3.9]$ $x'(x)$ с точностью 10^{-11}

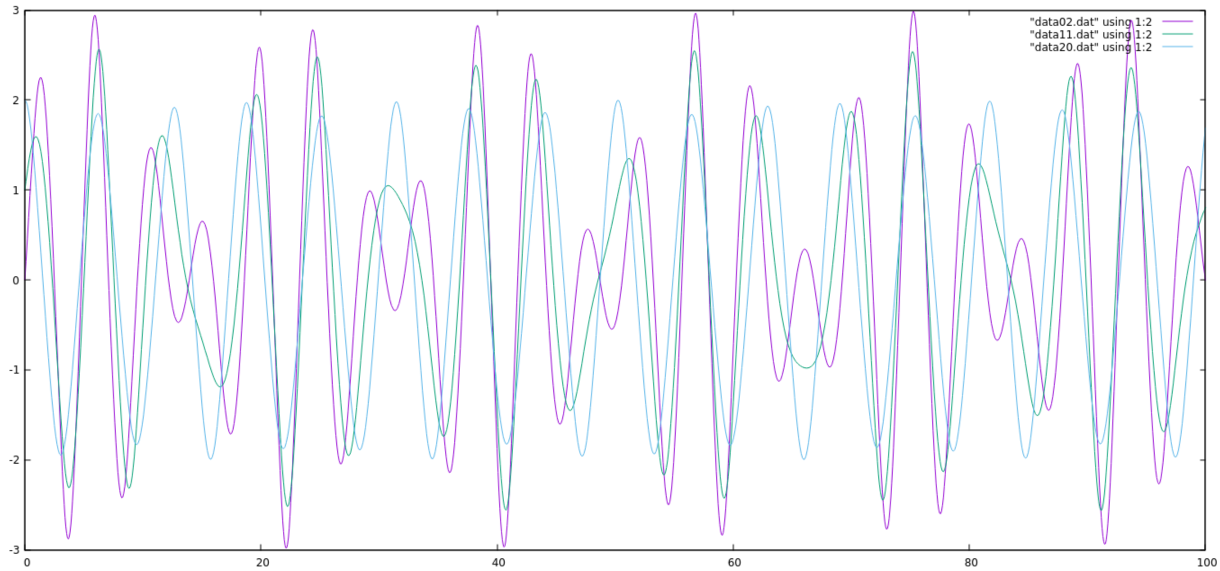


Периода нет, Числа рунге = 39.751736

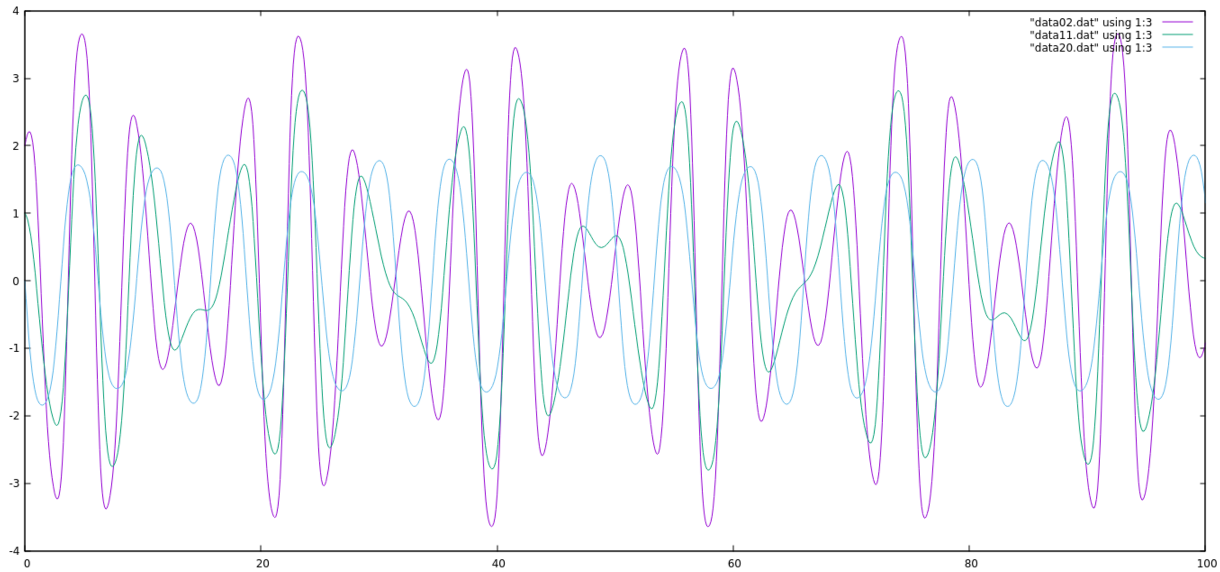
$x'(x)$ $[0, 3.99]$



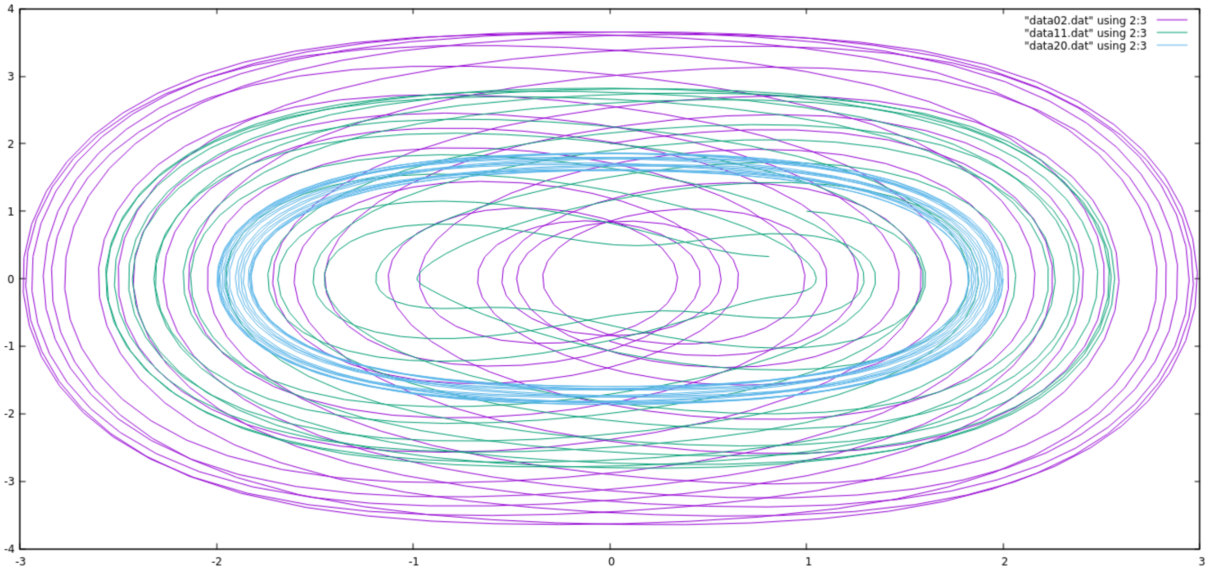
Нарисуем для нескольких начальных условий решения для $\alpha = 0.2$. Пусть $(x(0), y(0)) = (0, 2), (1, 1), (2, 0)$
Числа Рунге соответственно: 40.815113, 40.815113, 50.875706
$[0, 100]$ $x(t)$ с точностью 10^{-11}



$[0, 100]$ $x'(t)$ с точностью 10^{-11}



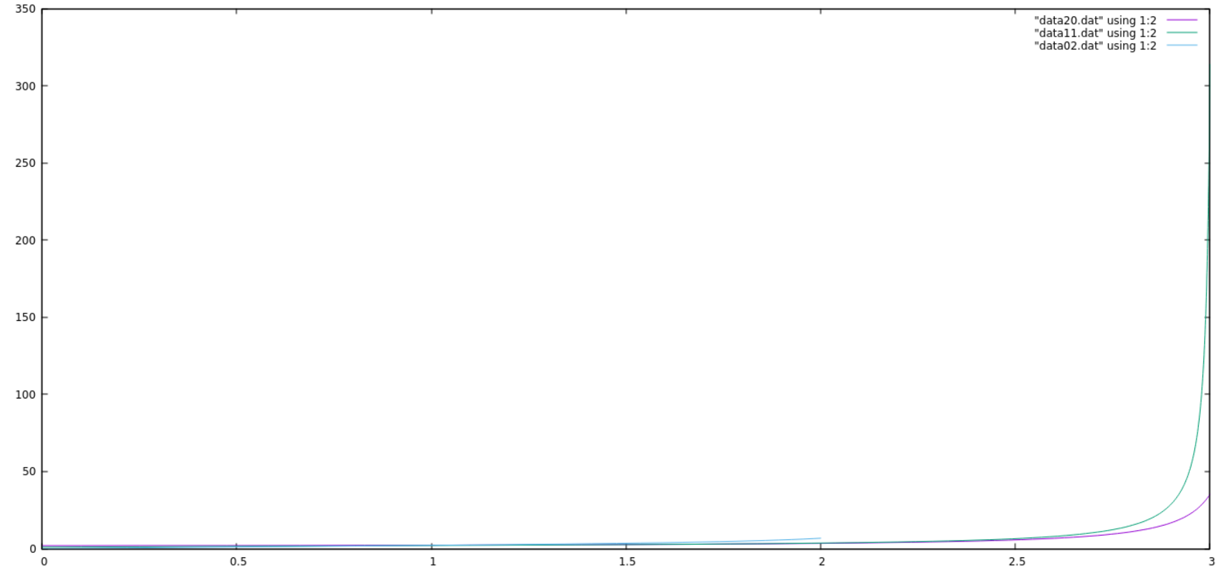
$[0, 100]$ $x'(x)$ с точностью 10^{-11}



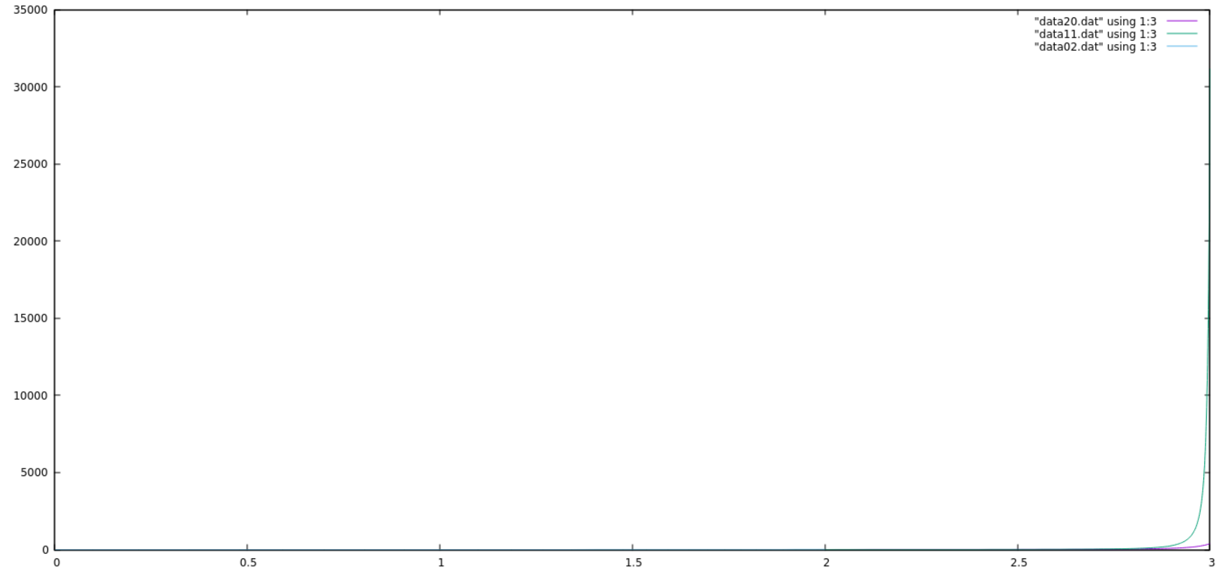
Нарисуем для нескольких начальных условий решения для $\alpha = -0.2$. Пусть $(x(0), y(0)) = (0, 2), (1, 1), (2, 0)$

Числа Рунге соответственно: 75.957517, 75.851, 75.935517

$[0, 3]$ $x(t)$ с точностью 10^{-11}



$[0, 3]$ $x'(t)$ с точностью 10^{-11}



$[0, 2]$ $x'(x)$ с точностью 10^{-11}