20

MINIMIZZAZIONE DEI COSTI

Il nostro obiettivo è lo studio del comportamento di un'impresa che massimizza il profitto sia in mercati concorrenziali che non concorrenziali. Nel Capitolo 19 abbiamo iniziato l'analisi del comportamento di massimizzazione del profitto in un mercato concorrenziale, affrontando direttamente il problema della massimizzazione del profitto.

Sembra, tuttavia, che anche un approccio meno diretto offra notevoli possibilità di approfondimento. Scomporremo il problema di massimizzazione del profitto in due fasi: in primo luogo, la minimizzazione dei costi necessari per produrre una data quantità di output e, in secondo luogo, la determinazione della quantità di output che corrisponde alla massimizzazione del profitto. In questo capitolo ci occuperemo del problema della minimizzazione dei costi di produzione in corrispondenza di un dato livello di output.

20.1 Minimizzazione dei costi

Supponiamo di disporre di due fattori produttivi i cui prezzi siano w_1 e w_2: vogliamo individuare il modo più economico per produrre un dato livello y di output. Se indichiamo con x_1 e x_2 le quantità impiegate dei due fattori e con $f(x_1, x_2)$ la funzione di produzione dell'impresa possiamo scrivere il problema nel modo seguente:

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$\text{tale che } f(x_1, x_2) = y.$$

Anche in questo caso vale l'avvertenza data nel capitolo precedente: nel calcolo dei costi devono essere inclusi *tutti* i costi di produzione, e si deve far riferimento allo stesso orizzonte temporale.

La soluzione del problema di minimizzazione dei costi — i costi minimi necessari per produrre il livello di output desiderato — dipenderà da w_1, w_2 e y, e sarà espressa pertanto da $c(w_1, w_2, y)$. Questa funzione è nota come **funzione di costo** ed esprime i costi minimi necessari per produrre y unità di output, quando i prezzi dei fattori sono (w_1, w_2).

Per risolvere questo problema, rappresentiamo sullo stesso grafico i costi e i vincoli tecnologici — questi ultimi, come si ricorderà, rappresentano tutte le combinazioni di x_1 e x_2 che consentono di produrre y.

Supponiamo di voler determinare tutte le combinazioni di input il cui costo sia C, vale a dire

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 = C.$$

Risolvendo per x_2 otteniamo

$$x_2 = \frac{C}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} x_1.$$

La funzione così ottenuta rappresenta evidentemente una retta con inclinazione $-w_1/w_2$ e intercetta verticale C/w_2. Al variare di C otterremo un insieme di **rette di isocosto**. Ad ogni punto sulla curva di isocosto corrisponde lo stesso costo, C, e a rette di isocosto più elevate corrispondono costi più elevati.

È quindi possibile riformulare il problema di minimizzazione dei costi nei seguenti termini: dobbiamo individuare sull'isoquanto il punto al quale è associata la retta di isocosto più bassa possibile. Questo punto è indicato nella Figura 20.1.

Si noti che, se la soluzione ottimale richiede che venga impiegata una certa quantità di ciascun fattore e se l'isoquanto ha la forma regolare rappresentata nella Figura 20.1, allora il punto che corrisponde alla minimizzazione dei costi sarà caratterizzato dalla condizione di tangenza: l'inclinazione dell'isoquanto deve essere uguale all'inclinazione della curva di isocosto. Con i termini impiegati nel Capitolo 18, possiamo dire che *il saggio tecnico di sostituzione deve essere uguale al rapporto tra i prezzi dei fattori:*

$$-\frac{MP_1(x_1^*, x_2^*)}{MP_2(x_1^*, x_2^*)} = \text{TRS}(x_1^*, x_2^*) = -\frac{w_1}{w_2}. \tag{20.1}$$

(Nel caso in cui uno dei due fattori non venga utilizzato, la condizione di tangenza può non essere soddisfatta. Analogamente, se la funzione di produzione presenta degli "angoli", la condizione di tangenza risulta priva di significato. Queste

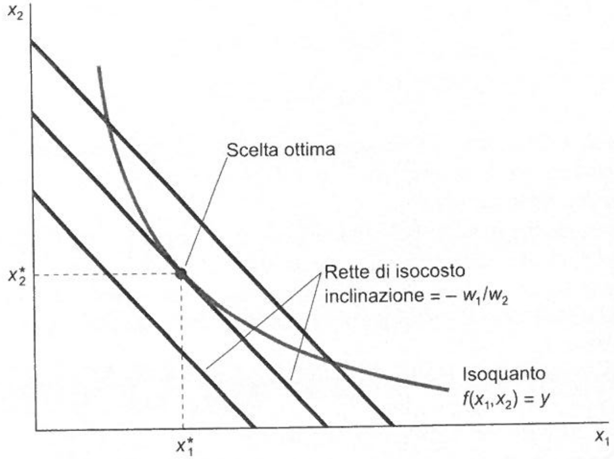

Figura 20.1 **Minimizzazione dei costi.** La scelta dei fattori che minimizzano i costi di produzione può essere determinata individuando sull'isoquanto il punto al quale è associata la curva di isocosto più bassa.

eccezioni sono simili a quelle affrontate nell'ambito della teoria del consumatore, pertanto, in questo capitolo, non ne tratteremo oltre.)

L'equazione (20.1) può essere ottenuta col seguente procedimento: si consideri una variazione nella quantità impiegata dei fattori produttivi $(\Delta x_1, \Delta x_2)$, che mantenga costante il livello dell'output, cioè che sia tale che

$$MP_1(x_1^*, x_2^*)\Delta x_1 + MP_2(x_1^*, x_2^*)\Delta x_2 = 0. \tag{20.2}$$

Si noti che i segni di Δx_1 e Δx_2 devono essere opposti: se si aumenta la quantità impiegata del fattore 1 è necessario diminuire la quantità impiegata del fattore 2 per mantenere l'output costante.

Se il costo è già minimo, tale variazione non lo potrà ridurre ulteriormente, e quindi:

$$w_1\Delta x_1 + w_2\Delta x_2 \geq 0. \tag{20.3}$$

Consideriamo ora la variazione $(-\Delta x_1, -\Delta x_2)$. Anch'essa consente di produrre un livello costante di output senza ridurre i costi. Ciò significa che

$$-w_1\Delta x_1 - w_2\Delta x_2 \geq 0. \tag{20.4}$$

Combinando le equazioni (20.3) e (20.4), si ottiene

$$w_1\Delta x_1 + w_2\Delta x_2 = 0. \tag{20.5}$$

Risolvendo le equazioni (20.2) e (20.5) per $\Delta x_1/\Delta x_2$ si otterrà

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{w_1}{w_2} = -\frac{MP_1(x_1^*, x_2^*)}{MP_2(x_1^*, x_2^*)}$$

che è esattamente la condizione di minimizzazione dei costi ottenuta geometricamente.

Si noti che la Figura 20.1 presenta analogie con la soluzione del problema di scelta del consumatore. Nonostante le soluzioni sembrino uguali, non si equivalgono esattamente. Nel problema del consumatore, la retta rappresenta il vincolo di bilancio, e il consumatore si sposta lungo tale retta per trovare la posizione preferita. Nel problema del produttore, l'isoquanto rappresenta il vincolo tecnologico, e il produttore si sposta lungo l'isoquanto per trovare la posizione ottimale.

Le scelte delle quantità di input che minimizzano i costi dell'impresa dipendono generalmente dai prezzi e dalla quantità di output che l'impresa intende produrre, e saranno pertanto indicate con $x_1(w_1, w_2, y)$ e $x_2(w_1, w_2, y)$. Queste scelte sono dette **funzioni di domanda condizionata dei fattori**, oppure **domande derivate dei fattori**, e misurano la relazione tra i prezzi, l'output e la scelta ottimale dei fattori dell'impresa, *condizionata* dalla produzione di un certo livello y di output.

Si osservi con attenzione la differenza tra la domanda *condizionata* dei fattori e la domanda dei fattori che massimizzano il profitto, esaminata nel capitolo precedente. La domanda condizionata dei fattori dà le scelte di minimizzazione dei costi in corrispondenza di un dato *livello* di output; la domanda dei fattori dà invece le scelte di massimizzazione del profitto in corrispondenza di un dato *prezzo* dell'output.

Le funzioni di domanda condizionata dei fattori sono in effetti una costruzione ipotetica, che ci consente di determinare la quantità di ciascun fattore che un'impresa *impiegherebbe* se intendesse produrre un livello dato di output al costo minimo. Tali funzioni, tuttavia, ci permettono di distinguere il problema della determinazione del livello ottimo di output da quello della determinazione del metodo di produzione cui corrisponde il minimo costo.

ESEMPIO: Minimizzazione dei costi nel caso di specifiche tecnologie

Supponiamo di analizzare una tecnologia in cui i fattori siano perfetti complementi, così che $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$. Di conseguenza, se si vogliono produrre y unità di output, sono evidentemente necessarie y unità di x_1 e y unità di x_2. I costi minimi di produzione saranno quindi

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 y + w_2 y = (w_1 + w_2)y.$$

Che cosa accade nel caso di tecnologie in cui i fattori siano perfetti sostituti, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$? Dato che, nella produzione, i beni 1 e 2 sono perfetti sostituti, è evidente che l'impresa sceglierà il meno costoso tra i due. In questo modo, il costo minimo di produzione di y unità di output sarà il più basso tra $w_1 y$ e $w_2 y$. In altri termini:

$$c(w_1, w_2, y) = \min\{w_1 y, w_2 y\} = \min\{w_1, w_2\} y.$$

Consideriamo, infine, la tecnologia Cobb-Douglas: $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$. Impiegando il calcolo differenziale possiamo dimostrare che la funzione di costo sarà

$$c(w_1, w_2, y) = K w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

dove K è una costante che dipende da a e da b. Per i dettagli del calcolo si veda l'appendice di questo capitolo.

20.2 Minimizzazione rivelata dei costi

L'ipotesi che l'impresa scelga determinati fattori per minimizzare il costo di produzione ha alcune implicazioni sul modo in cui le scelte dell'impresa variano al variare dei prezzi dei fattori.

Supponiamo di osservare due differenti insiemi di prezzi, (w_1^t, w_2^t) e (w_1^s, w_2^s), e le scelte dell'impresa ad essi associate, (x_1^t, x_2^t) e (x_1^s, x_2^s). Supponiamo che ciascuna di queste scelte consenta di produrre lo stesso livello y di output. Quindi, se ciascuna scelta, in corrispondenza dei prezzi ad essa associati, minimizza i costi, dobbiamo avere

$$w_1^t x_1^t + w_2^t x_2^t \leq w_1^t x_1^s + w_2^t x_2^s$$

e

$$w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s \leq w_1^s x_1^t + w_2^s x_2^t.$$

Se l'impresa, per produrre y unità di output, sceglie sempre il modo di produzione che minimizza i costi, le sue scelte nei periodi t e s devono soddisfare queste disuguaglianze, che definiremo **Assioma debole della minimizzazione dei costi (WACM)**.[1]

Si scriva la seconda equazione in questo modo:

$$-w_1^s x_1^t - w_2^s x_2^t \leq -w_1^s x_1^s - w_2^s x_2^s$$

sommando alla prima equazione si otterrà

$$(w_1^t - w_1^s) x_1^t + (w_2^t - w_2^s) x_2^t \leq (w_1^t - w_1^s) x_1^s + (w_2^t - w_2^s) x_2^s$$

e, con le opportune trasformazioni:

$$(w_1^t - w_1^s)(x_1^t - x_1^s) + (w_2^t - w_2^s)(x_2^t - x_2^s) \leq 0.$$

Se rappresentiamo con il simbolo Δ le *variazioni* della domanda e dei prezzi dei fattori otteniamo

$$\Delta w_1 \Delta x_1 + \Delta w_2 \Delta x_2 \leq 0.$$

[1] WACM dalle iniziali dell'espressione in lingua inglese *Weak Axiom of Cost Minimization*.

Questa equazione deriva unicamente dall'ipotesi di minimizzazione dei costi. Ne consegue che esistono dei vincoli al comportamento dell'impresa quando i prezzi degli input variano mentre l'output rimane costante.

Per esempio, se il prezzo del primo bene aumenta e il prezzo del secondo rimane costante, allora $\Delta w_2 = 0$, e quindi la disuguaglianza diventa

$$\Delta w_1 \Delta x_1 \leq 0.$$

Questa disuguaglianza implica che, se il prezzo del fattore 1 aumenta, la domanda del fattore 1 deve diminuire; pertanto le funzioni di domanda condizionata dei fattori devono avere inclinazione negativa.

Ci si può anche chiedere come varino i costi minimi se variano i parametri del problema. Si può facilmente constatare che i costi aumentano se aumenta il prezzo di uno dei due fattori: se un bene diventa più costoso mentre il prezzo dell'altro non varia, il costo minimo certamente non diminuirà. Analogamente, se un'impresa sceglie di produrre una maggiore quantità di output e i prezzi dei fattori rimangono costanti, i suoi costi aumenteranno.

20.3 Rendimenti di scala e funzione di costo

Nel Capitolo 18 abbiamo esaminato il concetto di rendimenti di scala della funzione di produzione. Si ricordi che una tecnologia presenta rendimenti di scala crescenti, decrescenti o costanti quando $f(tx_1, tx_2)$ è maggiore, minore o uguale, rispettivamente, a $tf(x_1, x_2)$, per ogni $t > 1$. Osserviamo che esiste un'interessante relazione tra il tipo di rendimenti di scala della funzione di produzione e l'andamento della funzione di costo.

Esaminiamo dapprima il caso di rendimenti di scala costanti. Immaginiamo di aver risolto il problema della minimizzazione dei costi necessari per produrre 1 unità di output. La **funzione di costo per unità** sarà quindi: $c(w_1, w_2, 1)$. Quale sarà allora il modo meno costoso per produrre y unità di output? Sarà sufficiente utilizzare y volte la quantità di ogni input impiegata per produrre 1 unità di output. Questo significa che il costo minimo di produzione di y unità di output sarà $c(w_1, w_2, 1)y$. Nel caso di rendimenti di scala costanti, pertanto, la funzione di costo è lineare nell'output.

Nel caso di rendimenti di scala crescenti i costi aumentano meno che proporzionalmente rispetto all'output. Infatti, se l'impresa decide di produrre una quantità doppia di output, può farlo con un costo *meno* che doppio, almeno finché i prezzi dei fattori rimangono fissi. Questa è una conseguenza ovvia dell'ipotesi di rendimenti di scala crescenti: se l'impresa raddoppia la quantità degli input, la quantità dell'output risulterà più che doppia. Quindi, se l'impresa vuole produrre una quantità doppia di output potrà farlo impiegando ciascun input in quantità meno che doppia.

Impiegare ciascun input in quantità doppia significa raddoppiare esattamente i costi, e quindi, se ciascun input viene utilizzato in quantità meno che doppia anche i costi risulteranno meno che doppi: in altri termini, la funzione di costo aumenterà meno che proporzionalmente rispetto all'output. Analogamente, se la tecnologia presenta rendimenti di scala decrescenti, la funzione di costo aumenterà più che proporzionalmente rispetto all'output. Se la quantità di output raddoppia, i costi risulteranno più che doppi.

La **funzione del costo medio** rappresenta sinteticamente quanto detto: essa esprime il costo *unitario* di produzione di y unità di output:

$$AC(y) = \frac{c(w_1, w_2, y)}{y}.$$

Se la tecnologia presenta rendimenti di scala costanti, la funzione di costo, come abbiamo già visto, deve avere la forma $c(w_1, w_2, y) = c(w_1, w_2, 1)y$. Questo significa che la funzione del costo medio sarà

$$AC(w_1, w_2, y) = \frac{c(w_1, w_2, 1)y}{y} = c(w_1, w_2, 1)$$

cioè il costo unitario rimane costante indipendentemente dalla quantità di output che l'impresa intende produrre.

Se la tecnologia presenta rendimenti di scala crescenti, i costi di produzione aumenteranno meno che proporzionalmente rispetto all'output, quindi i costi medi saranno decrescenti all'aumentare dell'output.

Analogamente, se la tecnologia presenta rendimenti di scala decrescenti, i costi medi saranno crescenti all'aumentare dell'output.

Come abbiamo già osservato, una tecnologia può presentare *regioni* in cui i rendimenti di scala sono crescenti, costanti o decrescenti — l'output può aumentare più rapidamente, con la stessa rapidità o meno rapidamente della scala operativa dell'impresa in corrispondenza di diversi livelli di produzione. Analogamente, la funzione di costo può aumentare meno rapidamente, con la stessa rapidità o più rapidamente dell'output in corrispondenza di diversi livelli di produzione. Questo implica che la funzione del costo medio può diminuire, rimanere costante o aumentare per quantità diverse di output. Nel capitolo successivo esamineremo queste possibilità in modo più approfondito.

D'ora in poi ci occuperemo in particolar modo dell'andamento della funzione di costo al variare dell'output. In linea di massima, considereremo i prezzi dei fattori fissi a livelli predeterminati, e assumeremo che i costi dipendano dalla scelta da parte dell'impresa della quantità da produrre. Nel resto del libro, quindi, la funzione di costo sarà considerata funzione del solo output, e sarà pertanto scritta $c(y)$.

20.4 Costi di lungo e breve periodo

La funzione di costo rappresenta il costo minimo che deve essere sostenuto per produrre una data quantità di output. È spesso importante distinguere tra i costi minimi che l'impresa deve sostenere se è libera di variare l'impiego di tutti i suoi fattori produttivi, e i costi minimi che essa invece deve sostenere nel caso in cui possa variare l'impiego soltanto di alcuni fattori.

Abbiamo definito breve periodo quel periodo di tempo nel quale una parte dei fattori produttivi deve essere impiegata in quantità predeterminate. Nel lungo periodo, invece, tutti i fattori sono liberi di variare. La **funzione di costo di breve periodo** rappresenta il costo minimo che deve essere sostenuto per produrre una data quantità di output, variando l'impiego dei soli fattori variabili. La **funzione di costo di lungo periodo** esprime il costo minimo che deve essere sostenuto per produrre una data quantità di output, variando l'impiego di *tutti* i fattori produttivi.

Supponiamo che nel breve periodo il fattore 2 sia fisso a qualche livello predeterminato, $\overline{x}_2$, e che nel lungo periodo sia libero di variare. La funzione di costo di breve periodo sarà

$$c_s(y, \overline{x}_2) = \min_{x_1} \ w_1 x_1 + w_2 \overline{x}_2$$

$$\text{tale che } f(x_1, \overline{x}_2) = y.$$

Si osservi che, generalmente, nel breve periodo il costo minimo di produzione di y unità di output dipende dalla quantità disponibile del fattore fisso.

Nel caso di due fattori, questo problema di minimizzazione è facilmente risolvibile: dobbiamo solo determinare la quantità minima di x_1 tale che $f(x_1, \overline{x}_2) = y$. Tuttavia, se vi sono molti fattori di produzione variabili nel breve periodo, la soluzione richiederà calcoli più elaborati.

La funzione di domanda di breve periodo del fattore 1 rappresenta la quantità del fattore 1 che minimizza i costi. Generalmente essa dipende sia dai prezzi dei fattori che dalla quantità disponibile dei fattori fissi; la domanda di breve periodo dei fattori può quindi essere espressa come:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^s(w_1, w_2, \overline{x}_2, y) \\ x_2 &= \overline{x}_2. \end{aligned}$$

Da queste equazioni risulta che, per esempio, se le dimensioni di un edificio sono fisse nel breve periodo, il numero di lavoratori che un'impresa assumerà, in corrispondenza di certi prezzi e di un certo livello di output, dipenderà dalle dimensioni dell'edificio.

Si osservi che per la definizione di funzione di costo di breve periodo

$$c_s(y, \overline{x}_2) = w_1 x_1(w_1, w_2, \overline{x}_2, y) + w_2 \overline{x}_2$$

cioè il costo minimo di produzione di una quantità y di output è il costo associato all'impiego della quantità di input che minimizza i costi.

La funzione di costo di lungo periodo in questo esempio è

$$c(y) = \min_{x_1, x_2} \ w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$\text{tale che } f(x_1, x_2) = y.$$

In questo caso entrambi i fattori sono liberi di variare. I costi di lungo periodo dipendono esclusivamente dalla quantità di output che l'impresa intende produrre e dai prezzi dei fattori. Sia la funzione di costo di lungo periodo $c(y)$, e siano le domande dei fattori di lungo periodo

$$x_1 = x_1(w_1, w_2, y)$$
$$x_2 = x_2(w_1, w_2, y).$$

La funzione di costo di lungo periodo può anche essere espressa in questo modo:

$$c(y) = w_1 x_1(w_1, w_2, y) + w_2 x_2(w_1, w_2, y).$$

Esattamente come nel caso precedente, i costi minimi sono quelli che l'impresa deve sostenere se la scelta dei fattori produttivi minimizza i costi.

Esiste un'interessante relazione tra la funzione di costo di breve e quella di lungo periodo, che utilizzeremo nel prossimo capitolo. Per semplicità, supponiamo che i prezzi dei fattori siano fissi a un dato livello, e scriviamo le domande di lungo periodo dei fattori

$$x_1 = x_1(y)$$
$$x_2 = x_2(y).$$

La funzione di costo di lungo periodo può quindi essere scritta

$$c(y) = c_s(y, x_2(y)).$$

Non è difficile comprendere il significato di questa espressione: i costi minimi, nel caso in cui tutti i fattori siano variabili, corrispondono al costo minimo sostenuto se il fattore 2 è fisso in corrispondenza *del livello che minimizza i costi di lungo periodo*. Di conseguenza, la domanda di lungo periodo del fattore variabile sarà

$$x_1(w_1, w_2, y) = x_1^s(w_1, w_2, x_2(y), y).$$

Vale a dire, la quantità del fattore variabile che minimizza i costi nel lungo periodo corrisponde alla quantità che l'impresa sceglierebbe nel breve periodo se disponesse della quantità del fattore fisso che minimizza il costo di lungo periodo.

20.5 Costi fissi e quasi-fissi

Nel Capitolo 19 abbiamo introdotto la distinzione tra fattori fissi e quasi-fissi. Fattori fissi sono quei fattori per i quali devono essere sostenuti dei costi indipendentemente dal fatto che l'output venga prodotto. I fattori quasi-fissi devono invece essere acquistati solo se l'impresa decide di produrre una quantità positiva di output.

È naturale che i costi fissi e quelli quasi-fissi siano definiti in modo simile. I **costi fissi** sono costi associati ai fattori fissi: non dipendono dal livello dell'output e, in particolare, devono essere sostenuti che l'impresa produca o no. I **costi quasi-fissi** egualmente non dipendono dal livello dell'output, ma devono essere sostenuti solo se l'impresa produce una quantità positiva di output.

Per definizione, nel lungo periodo non vi sono costi fissi, ma è possibile che vi siano costi quasi-fissi. Se, per esempio, è necessario spendere una certa quantità di denaro prima che sia possibile produrre un output qualsiasi, allora si determineranno dei costi quasi-fissi.

20.6 Costi sommersi

I costi sommersi sono un altro tipo di costi fissi. Possiamo esprimere meglio questo concetto con un esempio. Supponiamo di aver deciso di prendere in affitto un ufficio per un anno. Il canone mensile che ci siamo impegnati a pagare è un costo fisso, poiché siamo obbligati a pagarlo indipendentemente da quanto produciamo. Supponiamo ora di voler sistemare il nostro ufficio facendolo ridipingere e acquistando nuovi mobili. Il costo della ridipintura è un costo fisso, ma è anche un **costo sommerso**, dato che non potremo recuperare quanto abbiamo speso. Il costo dei mobili, d'altra parte, non è completamente sommerso, poiché potremo rivenderli quando non ne avremo più bisogno. Solo la *differenza* tra il costo dei mobili nuovi e usati rappresenta un costo sommerso.

Per esaminare la questione con maggiore dettaglio, supponiamo di prendere a prestito \$20 000 all'inizio dell'anno con un tasso d'interesse del 10 per cento. Firmiamo poi un contratto d'affitto per un ufficio e paghiamo in anticipo \$12 000 per il canone annuale. Spendiamo anche \$6000 per i mobili e \$2000 per ridipingere l'ufficio. Alla fine dell'anno ripaghiamo il prestito di \$20 000 più \$2000 di interessi e rivendiamo i mobili usati per \$5000.

I nostri costi sommersi totali sono rappresentati dai \$12 000 dell'affitto, dai \$2000 degli interessi, dai \$2000 della ridipintura, ma solo da \$1000 dei mobili, perché possiamo recuperare \$5000 rivendendo i mobili usati.

La differenza tra costi sommersi e costi recuperabili può essere molto significativa. Centomila dollari spesi per comprare cinque autocarri leggeri possono sembrare una cifra molto elevata, ma se gli autocarri possono essere rivenduti nel mercato dell'usato per ottantamila dollari, il costo sommerso effettivo è di soli ventimila dollari. Se si spendono invece centomila dollari per acquistare una pressa speciale fatta su ordinazione, che non può essere rivenduta, l'intera somma rappresenta un costo sommerso.

Il modo migliore per aver chiari questi concetti è di considerare tutte le spese in termini di flussi: quanto costa mantenere in piedi l'attività per un anno? In questo modo è meno probabile che non si tenga in conto il valore di rivendita dei beni capitali, e quindi la distinzione tra costi sommersi e costi recuperabili resterà chiara.

Sommario

1. La funzione di costo, $c(w_1, w_2, y)$, misura i costi minimi di produzione di una determinata quantità di output, dati i prezzi dei fattori.

2. Il comportamento di minimizzazione dei costi impone alcune restrizioni alle scelte dell'impresa. In particolare, le funzioni di domanda condizionata dei fattori avranno inclinazione negativa.

3. Esiste una stretta relazione tra i rendimenti di scala di una tecnologia e la funzione di costo. Rendimenti *crescenti* di scala comportano un costo medio *decrescente*,

rendimenti *decrescenti* di scala comportano un costo medio *crescente*, e rendimenti *costanti* di scala comportano un costo medio *costante*.

4. I costi sommersi sono i costi non recuperabili.

Domande

1. Si dimostri che un'impresa che massimizza il profitto minimizza sempre i costi.

2. Se un'impresa produce nel tratto in cui $MP_1/w_1 > MP_2/w_2$, che cosa può fare per ridurre i costi mantenendo invariata la quantità prodotta?

3. Supponiamo che un'impresa che minimizza i costi utilizzi due input che sono perfetti sostituti. Se i due input hanno lo stesso prezzo, che forma avranno le domande condizionate dei fattori?

4. Il prezzo della carta usata da un'impresa che minimizza i costi aumenta. L'impresa reagisce a questa variazione di prezzo modificando la sua domanda di alcuni input, ma mantiene costante l'output. Come varia l'impiego di carta da parte dell'impresa?

5. Se un'impresa impiega n input ($n > 2$), per la teoria della minimizzazione rivelata dei costi quale disuguglianza sarà valida tra le variazioni dei prezzi dei fattori (Δw_i) e le variazioni delle domande dei fattori (Δx_i), per una quantità data di output?

APPENDICE

Esaminiamo il problema di minimizzazione dei costi visto nel testo impiegando le tecniche di ottimizzazione introdotte nel Capitolo 5. Si tratta di un problema di minimizzazione vincolata del tipo:

$$\min_{x_1, x_2} \; w_1 x_1 + w_2 x_2$$
$$\text{tale che } f(x_1, x_2) = y.$$

Ricordiamo che esistono varie tecniche per risolvere problemi di questo tipo. Una di esse consiste nel sostituire il vincolo nella funzione obiettivo. Questo sistema può essere utile quando per $f(x_1, x_2)$ esiste una specifica forma funzionale, ma non può essere impiegato nel caso più generale.

Il secondo metodo è quello dei moltiplicatori di Lagrange. Per applicarlo occorre scrivere la Lagrangiana

$$L = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \lambda(f(x_1, x_2) - y)$$

e calcolare le derivate rispetto a x_1, x_2 e λ. Si ottengono così le condizioni del primo ordine:

$$w_1 - \lambda \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0$$
$$w_2 - \lambda \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$
$$f(x_1, x_2) - y = 0.$$

L'ultima condizione rappresenta il vincolo. Trasformando le due equazioni e dividendo la prima per la seconda, otteniamo

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}.$$

Si noti che si tratta della stessa condizione del primo ordine ottenuta nel testo: il saggio tecnico di sostituzione deve essere uguale al rapporto tra i prezzi dei fattori. Applichiamo ora questo metodo alla funzione di produzione Cobb-Douglas:

$$f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b.$$

Il problema di minimizzazione dei costi diventa allora

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$\text{tale che } x_1^a x_2^b = y.$$

Otteniamo così una forma funzionale specifica che può essere risolta utilizzando il metodo della sostituzione o il metodo di Lagrange. Con il primo metodo occorre prima risolvere il vincolo per x_2 come funzione di x_1:

$$x_2 = (y x_1^{-a})^{1/b}$$

e poi sostituire questa equazione nella funzione obiettivo, ottenendo il problema di massimizzazione non vincolata

$$\min_{x_1} w_1 x_1 + w_2 (y x_1^{-a})^{1/b}.$$

È possibile ora derivare la precedente espressione rispetto a x_1, ponendo come al solito la derivata uguale a zero. L'equazione risultante può essere risolta per ottenere x_1 come funzione di w_1, w_2 e y, in modo da ottenere la domanda condizionata dei fattori per x_1. Per quanto il procedimento non sia difficile, i calcoli sono complessi, e quindi non vengono riportati.

Risolviamo il nostro problema col metodo di Lagrange. Le tre condizioni del primo ordine sono

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda a x_1^{a-1} x_2^b \\ w_2 &= \lambda b x_1^a x_2^{b-1} \\ x_1^a x_2^b - y &= 0. \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima equazione per x_1 e la seconda per x_2 otteniamo

$$\begin{aligned} w_1 x_1 &= \lambda a x_1^a x_2^b = \lambda a y \\ w_2 x_2 &= \lambda b x_1^a x_2^b = \lambda b y \end{aligned}$$

così che

$$x_1 = \lambda \frac{ay}{w_1} \tag{20.6}$$

$$x_2 = \lambda \frac{by}{w_2}. \tag{20.7}$$

Si utilizza ora la terza equazione per ottenere λ. Sostituendo le espressioni per x_1 e x_2 nella terza condizione del primo ordine, si ottiene

$$\left(\frac{\lambda a y}{w_1}\right)^a \left(\frac{\lambda b y}{w_2}\right)^b = y.$$

Possiamo risolvere questa equazione per λ, ottenendo

$$\lambda = (a^{-a} b^{-b} w_1^a w_2^b y^{1-a-b})^{\frac{1}{a+b}}$$

che, con le equazioni (20.6) e (20.7), ci consente di ottenere x_1 e x_2. Le funzioni di domanda dei fattori avranno allora la forma

$$x_1(w_1, w_2, y) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} w_1^{\frac{-b}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

$$x_2(w_1, w_2, y) = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{a}{a+b}} w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{-a}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}.$$

La funzione di costo può essere trovata esprimendo i costi relativi alle scelte di minimizzazione dei costi dell'impresa, cioè:

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1(w_1, w_2, y) + w_2 x_2(w_1, w_2, y).$$

Con dei calcoli un po' noiosi otteniamo

$$c(w_1, w_2, y) = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-a}{a+b}}\right] w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}.$$

(Questa formula è presentata solamente allo scopo di dimostrare come sia possibile ottenere una soluzione esplicita al problema di minimizzazione dei costi impiegando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.)

Si noti che i costi aumentano più che proporzionalmente, proporzionalmente, o meno che proporzionalmente rispetto all'output, a seconda che $a + b$ sia rispettivamente minore, uguale o maggiore di 1. Ciò è dovuto al fatto che la tecnologia Cobb-Douglas presenta rendimenti di scala crescenti, costanti o decrescenti a seconda del valore di $a + b$.