

Algoritmi e Strutture Dati

Alberi binari di ricerca

Alberto Montresor

Università di Trento

2020/10/22

This work is licensed under a Creative Commons
Attribution-ShareAlike 4.0 International License.



Sommario

1 Alberi binari di ricerca

- Ricerca
- Minimo-massimo
- Successore-predecessore
- Inserimento
- Cancellazione
- Costo computazionale

2 Alberi binari di ricerca bilanciati

- Definizioni
- Esempi
- Inserimento
- Cancellazione

Introduzione

Dizionario

È un insieme dinamico che implementa le seguenti funzionalità:

- ITEM $\text{lookup}(\text{ITEM } k)$
- $\text{insert}(\text{ITEM } k, \text{ITEM } v)$
- $\text{remove}(\text{ITEM } k)$

Possibili implementazioni

Struttura dati	lookup	insert	remove
Vettore ordinato	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$
Vettore non ordinato	$O(n)$	$O(1)^*$	$O(1)^*$
Lista non ordinata	$O(n)$	$O(1)^*$	$O(1)^*$

* Assumendo che l'elemento sia già stato trovato, altrimenti $O(n)$

Alberi binari di ricerca (ABR)

Idea ispiratrice

Portare l'idea di ricerca binaria negli alberi

Memorizzazione

- Le **associazioni chiave-valore** vengono memorizzate in un albero binario
- Ogni nodo u contiene una coppia $(u.key, u.value)$
- Le chiavi devono appartenere ad un insieme **totalmente ordinato**

Nodo albero

TREE

TREE *parent*

TREE *left*

TREE *right*

ITEM *key*

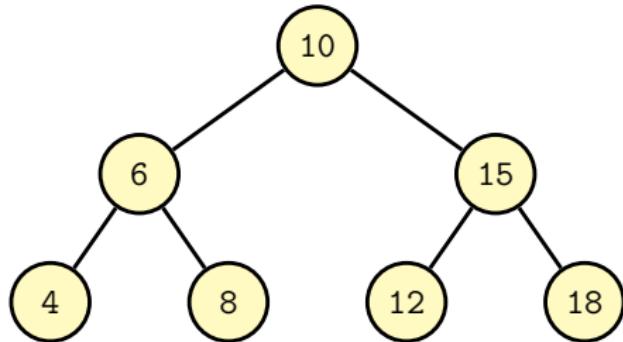
ITEM *value*

Alberi binari di ricerca (ABR)

Proprietà

- 1 Le chiavi contenute nei nodi del **sottoalbero sinistro** di u sono **minori** di $u.key$
- 2 Le chiavi contenute nei nodi del **sottoalbero destro** di u sono **maggiori** di $u.key$

Le proprietà 1. e 2. permettono di realizzare un algoritmo di ricerca dicotomica



Alberi binari di ricerca – Specifica

Getters

- ITEM `key()`
- ITEM `value()`
- TREE `left()`
- TREE `right()`
- TREE `parent()`

Dizionario

- ITEM `lookup(ITEM k)`
- insert(ITEM k , ITEM v)
- remove(ITEM k)

Ordinamento

- TREE `successorNode(TREE t)`
- TREE `predecessorNode(TREE t)`
- TREE `min()`
- TREE `max()`

Alberi binari di ricerca – Funzioni interne

- TREE `lookupNode(TREE T, ITEM k)`
- TREE `insertNode(TREE T, ITEM k, ITEM v)`
- TREE `removeNode(TREE T, ITEM k)`

DICTIONARY

TREE *tree*

Dictionary()

└ *tree* = **nil**

Ricerca – `lookupNode()`

ITEM `lookupNode(TREE T, ITEM k)`

- Restituisce il nodo dell'albero T che contiene la chiave k , se presente
- Restituisce **nil** se non presente

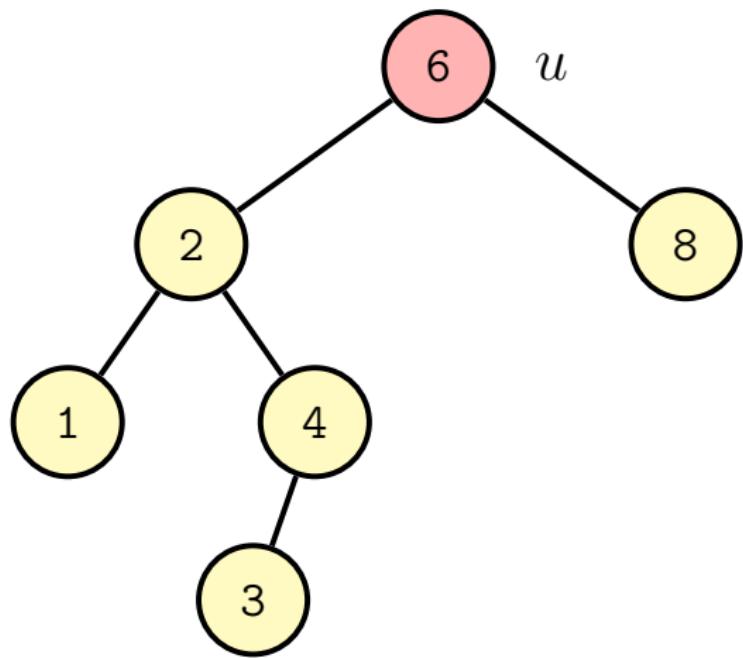
Implementazione dizionario

ITEM `lookup(ITEM k)`

`TREE t = lookupNode(tree, k)`

if $t \neq \text{nil}$ **then**
 | **return** $t.\text{value}()$
else
 | **return** **nil**

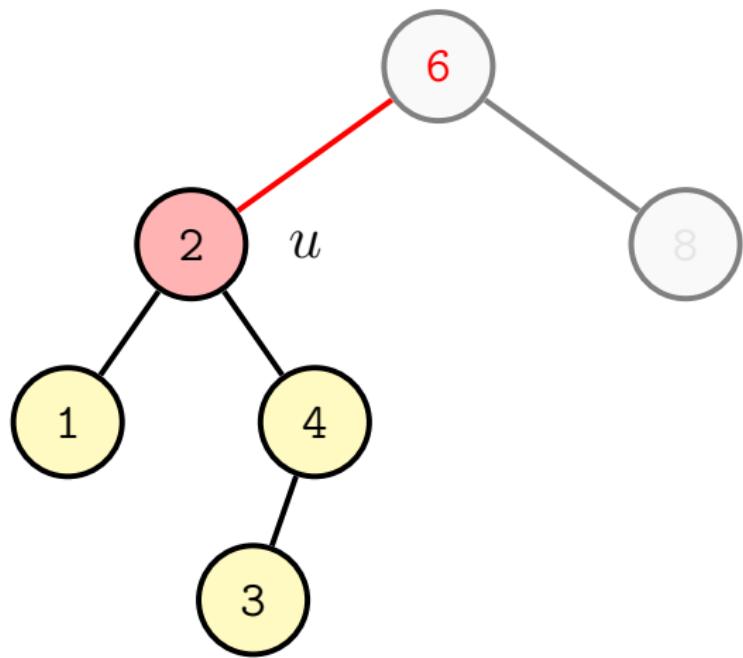
Ricerca – esempio



Valore cercato: 3

- $u = 6$

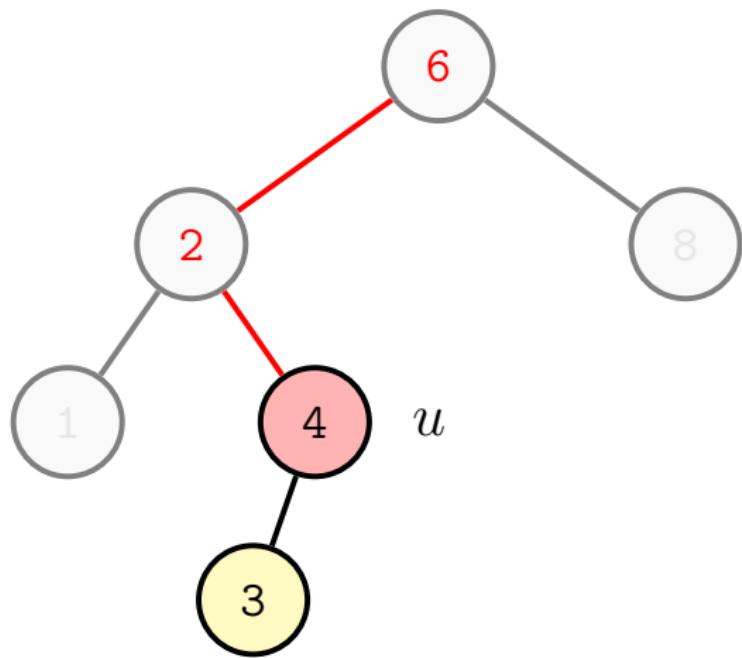
Ricerca – esempio



Valore cercato: 3

- $u = \textcircled{6}$
- $3 < 6$; $u = \textcircled{2}$ (Sinistra)

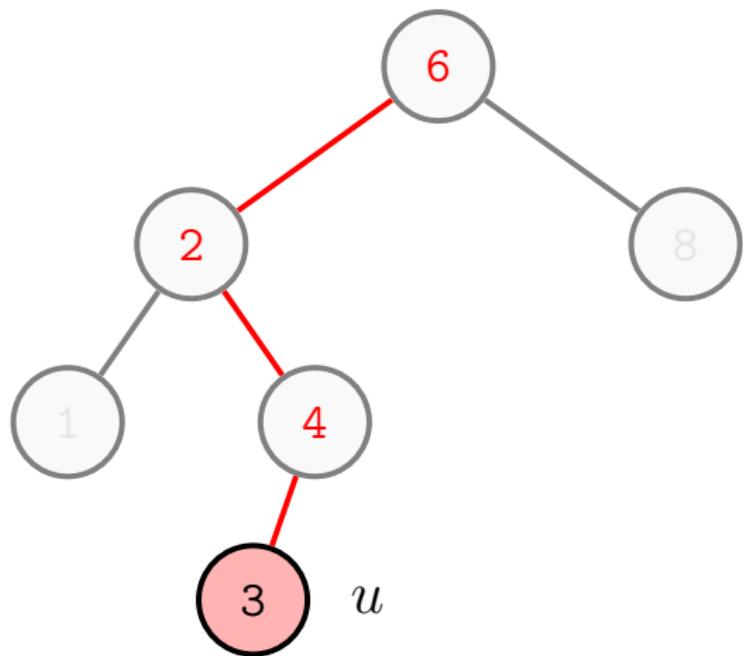
Ricerca – esempio



Valore cercato: 3

- $u = \textcircled{6}$
- $3 < 6$; $u = \textcircled{2}$ (Sinistra)
- $3 > 2$; $u = \textcircled{4}$ (Destra)

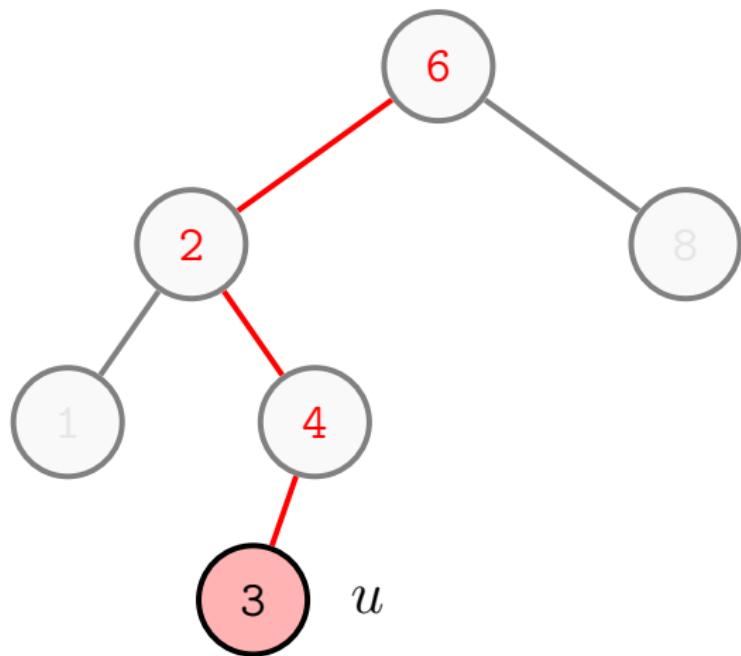
Ricerca – esempio



Valore cercato: 3

- $u = \textcircled{6}$
- $3 < 6$; $u = \textcircled{2}$ (Sinistra)
- $3 > 2$; $u = \textcircled{4}$ (Destra)
- $3 < 4$; $u = \textcircled{3}$ (Sinistra)

Ricerca – esempio



Valore cercato: 3

- $u = \textcircled{6}$
- $3 < 6$; $u = \textcircled{2}$ (Sinistra)
- $3 > 2$; $u = \textcircled{4}$ (Destra)
- $3 < 4$; $u = \textcircled{3}$ (Sinistra)
- $3 = 3$; Trovato

Ricerca – Implementazione

Iterativa

TREE lookupNode(TREE T , ITEM k)

TREE $u = T$

while $u \neq \text{nil}$ and $u.key \neq k$ **do**

if $k < u.key$ **then**

$u = u.left$

 % Sotto-albero di sinistra

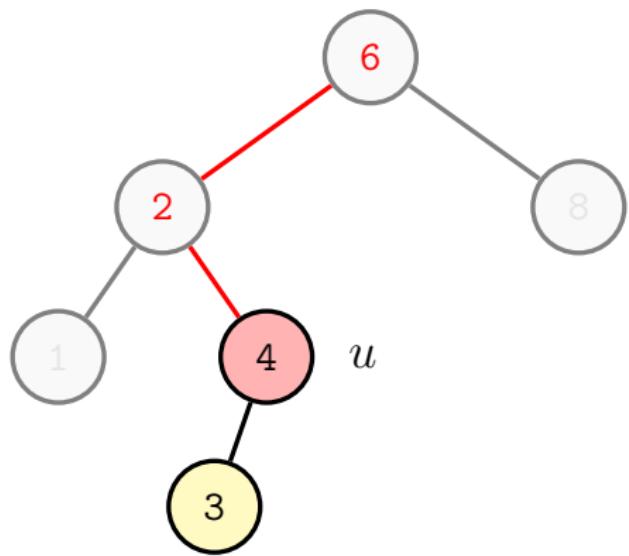
else

$u = u.right$

 % Sotto-albero di destra

return u

Ricerca – esempio



```
TREE lookupNode(TREE T, ITEM k)
```

```
TREE u = T
```

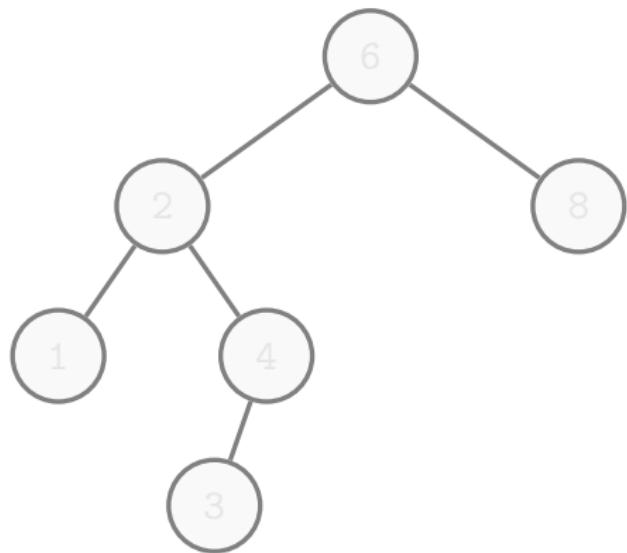
```
while T ≠ nil and T.key ≠ k do  
    u = iif(k < u.key, u.left, u.right)
```

```
return u
```

Valore cercato: 5

- $u = (6)$
- $5 < 6$; $u = (2)$
- $5 > 2$; $u = (4)$

Ricerca – esempio



TREE `lookupNode(TREE T, ITEM k)`

TREE $u = T$

while $T \neq \text{nil}$ and $T.\text{key} \neq k$ **do**
 $u = \text{iif}(k < u.\text{key}, u.\text{left}, u.\text{right})$

return u

Valore cercato: 5

- $u = (6)$
- $5 < 6$; $u = (2)$
- $5 > 2$; $u = (4)$
- $5 > 4$; $u = \text{nil}$ (Destra)
- **return nil** (Non trovato)

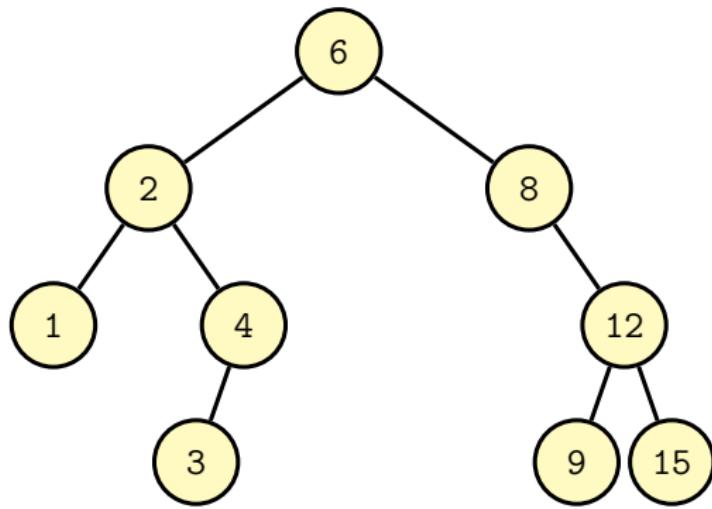
Ricerca – Implementazione

Ricorsiva

```
TREE lookupNode(TREE T, ITEM k)
```

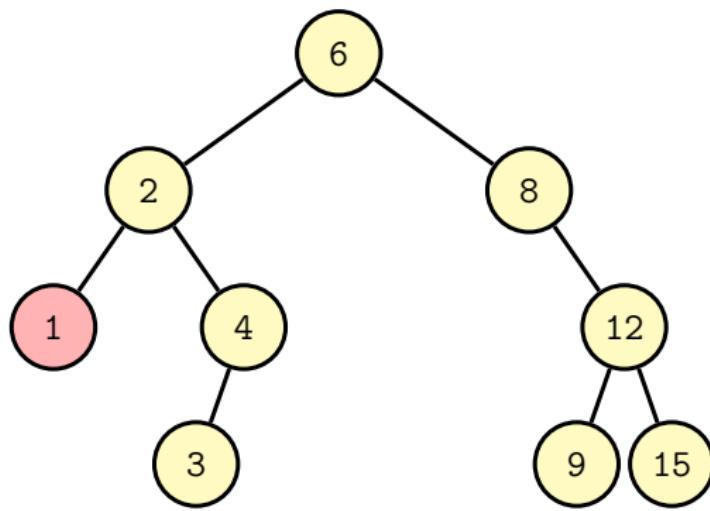
```
if T == nil or T.key == k then
    | return T
else
    | return lookupNode(iif(k < T.key, T.left, T.right), k)
```

Minimo-massimo



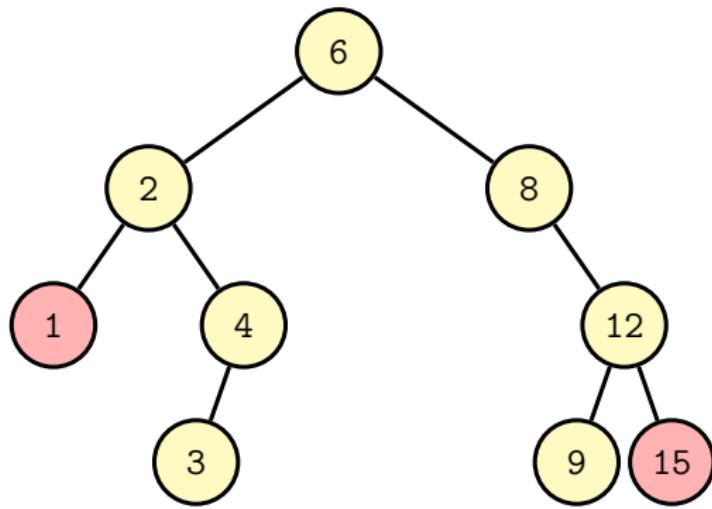
- min albero radice (6) ?

Minimo-massimo



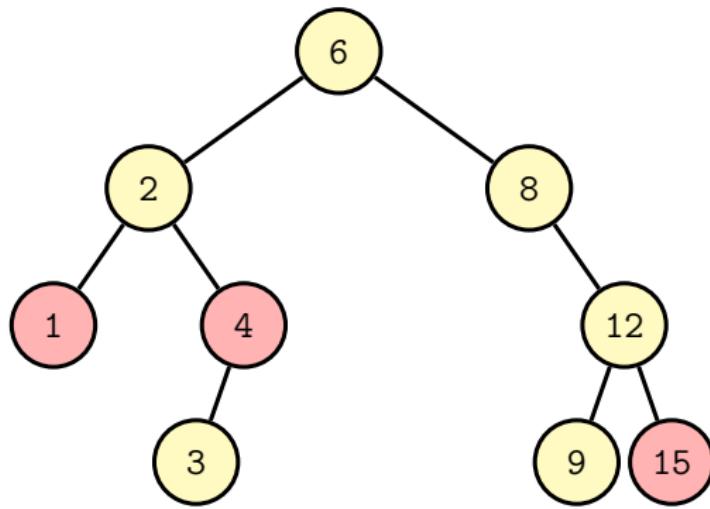
- min albero radice ?
1
- max albero radice ?

Minimo-massimo



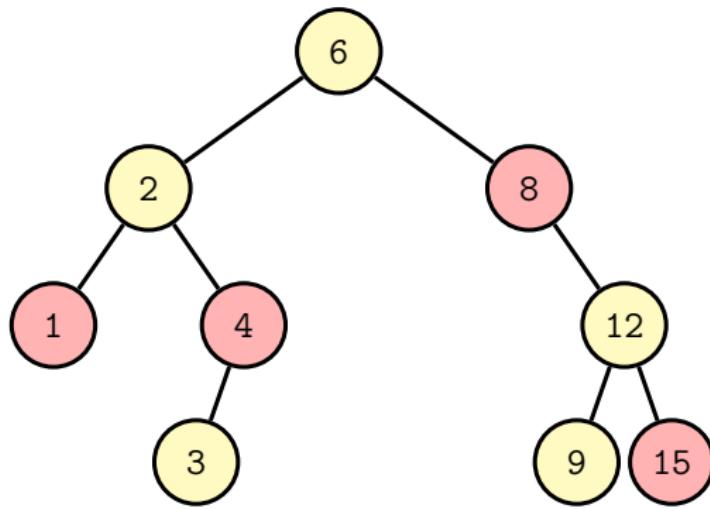
- min albero radice (6) ?
1
- max albero radice (6) ?
15
- max albero radice (2) ?

Minimo-massimo



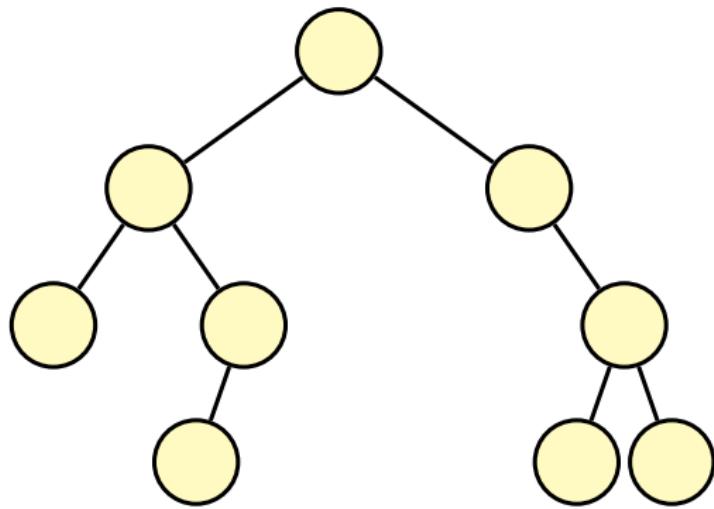
- min albero radice (6) ?
1
- max albero radice (6) ?
15
- max albero radice (2) ?
4
- min albero radice (8) ?

Minimo-massimo



- min albero radice (6) ?
1
- max albero radice (6) ?
15
- max albero radice (2) ?
4
- min albero radice (8) ?
8

Minimo-massimo



TREE $\min(\text{TREE } T)$

TREE $u = T$

while $u.\text{left} \neq \text{nil}$ **do**
 $u = u.\text{left}$

return u

TREE $\max(\text{TREE } T)$

TREE $u = T$

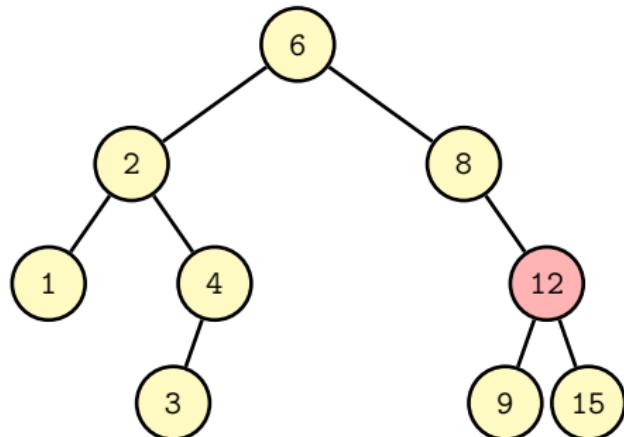
while $u.\text{right} \neq \text{nil}$ **do**
 $u = u.\text{right}$

return u

Successore-predecessore – Esempio 1

Definizione

Il **successore** di un nodo u è il più piccolo nodo maggiore di u

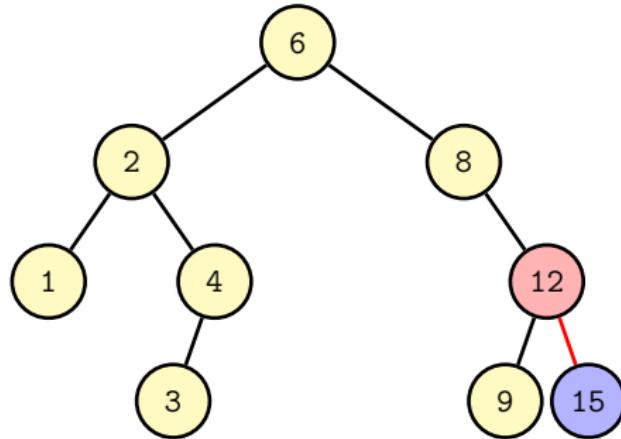


Successore di 12 ?

Successore-predecessore – Esempio 1

Definizione

Il **successore** di un nodo u è il più piccolo nodo maggiore di u

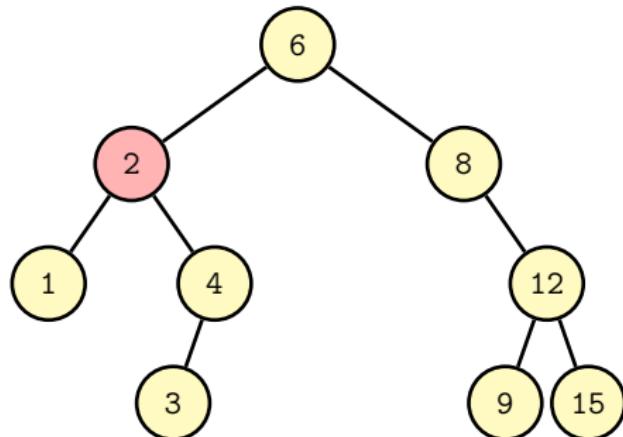


Successore di 12 ? 15

Successore-predecessore – Esempio 2

Definizione

Il **successore** di un nodo u è il più piccolo nodo maggiore di u

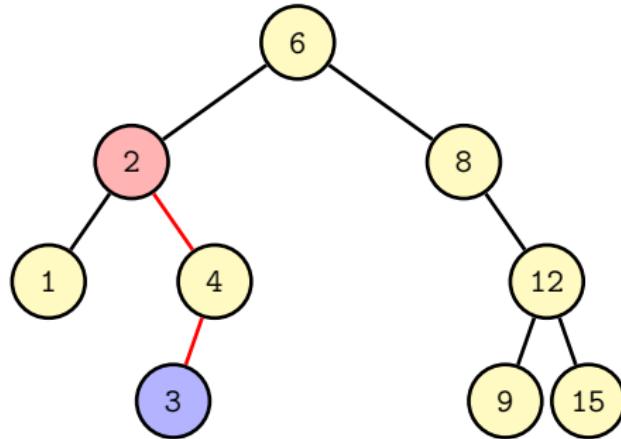


Successore di 2 ?

Successore-predecessore – Esempio 2

Definizione

Il **successore** di un nodo u è il più piccolo nodo maggiore di u

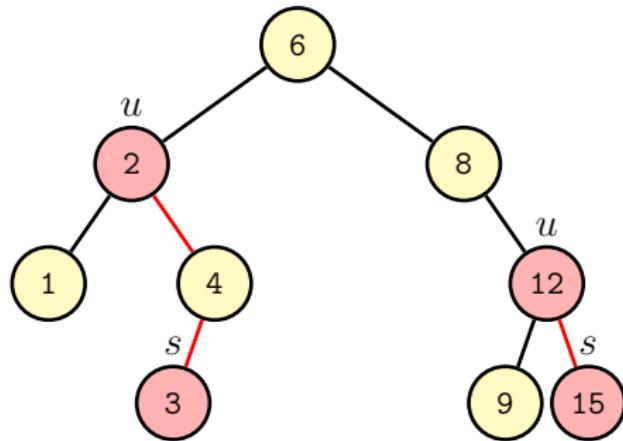


Successore di 2 ? 3

Successore-predecessore – Caso 1

Definizione

Il **successore** di un nodo u è il più piccolo nodo maggiore di u

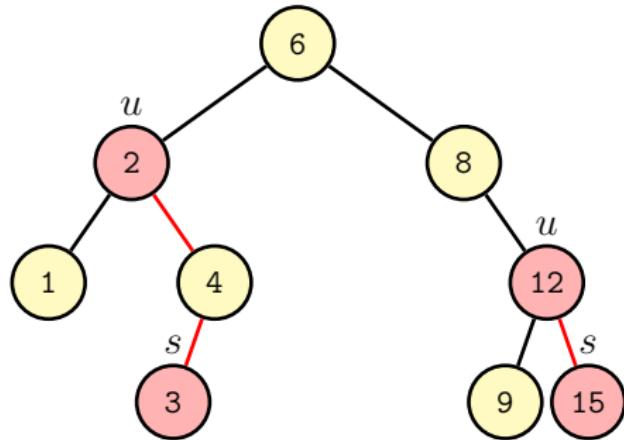


Successore di u ?

Successore-predecessore – Caso 1

Definizione

Il **successore** di un nodo u è il più piccolo nodo maggiore di u



Successore di u ?

Caso 1

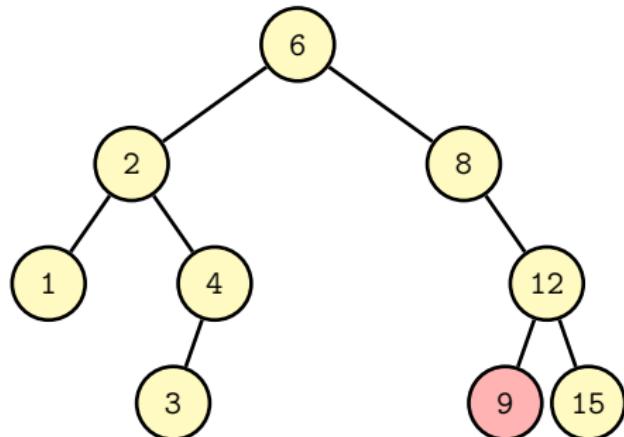
u ha figlio destro

Il successore v è il **minimo del sottoalbero destro** di u

Successore-predecessore – Esempio 3

Definizione

Il **successore** di un nodo u è il più piccolo nodo maggiore di u

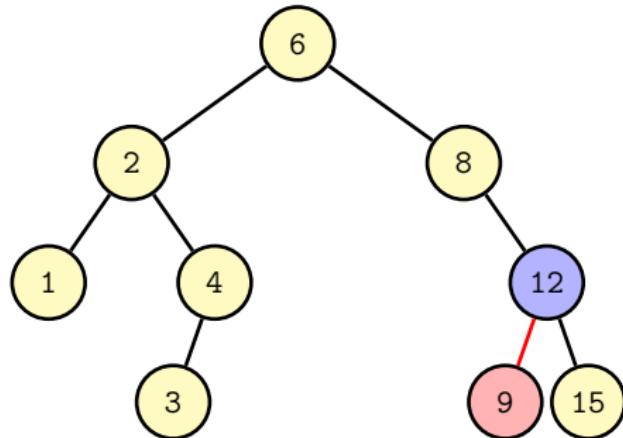


Successore di 9 ?

Successore-predecessore – Esempio 3

Definizione

Il **successore** di un nodo u è il più piccolo nodo maggiore di u

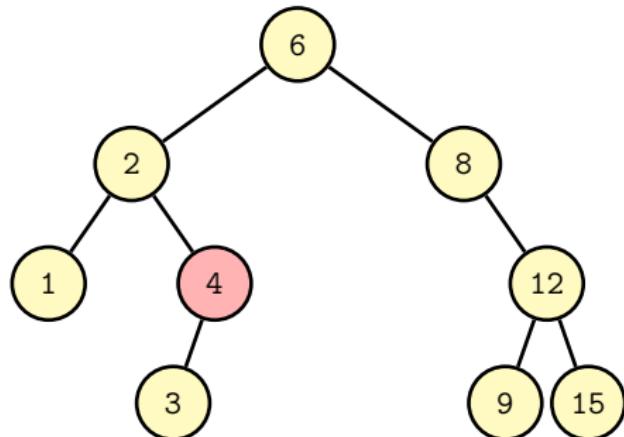


Successore di 9 ? 12

Successore-predecessore – nodo 4

Definizione

Il **successore** di un nodo u è il più piccolo nodo maggiore di u

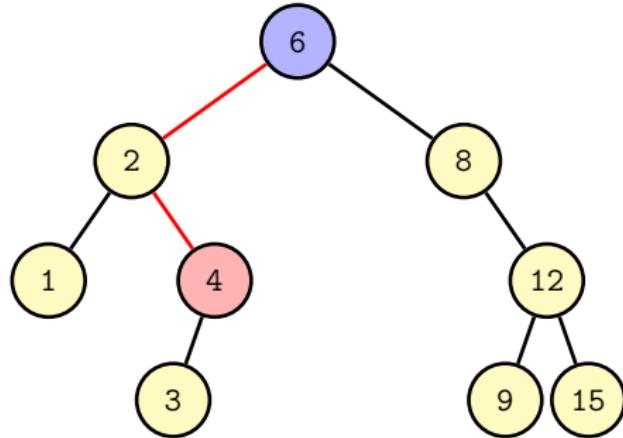


Successore di 4 ?

Successore-predecessore – nodo 4

Definizione

Il **successore** di un nodo u è il più piccolo nodo maggiore di u

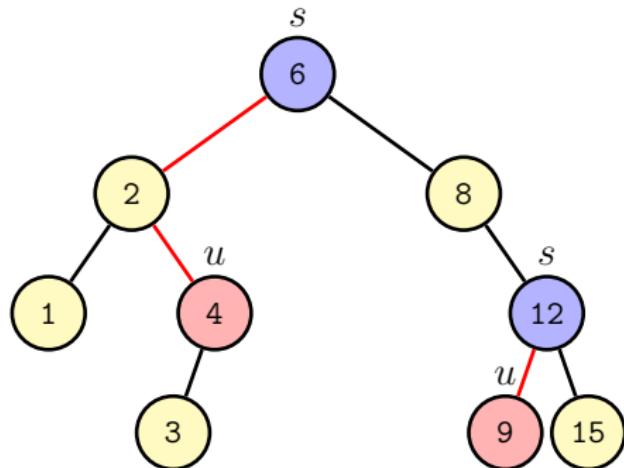


Successore di 4 ? 6

Successore-predecessore – Caso 2

Definizione

Il **successore** di un nodo u è il più piccolo nodo maggiore di u

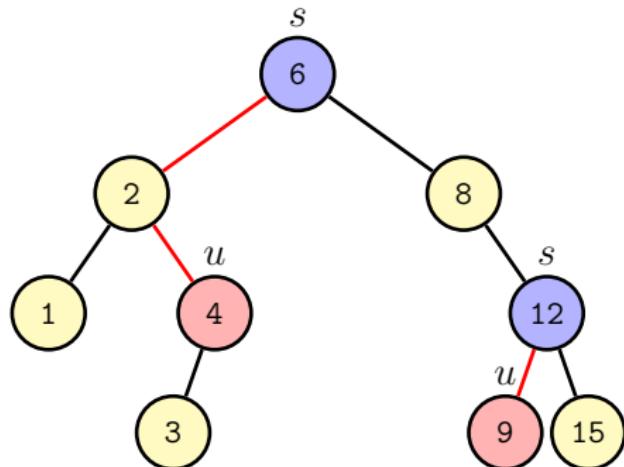


Successore di u ?

Successore-predecessore – Caso 2

Definizione

Il **successore** di un nodo u è il più piccolo nodo maggiore di u



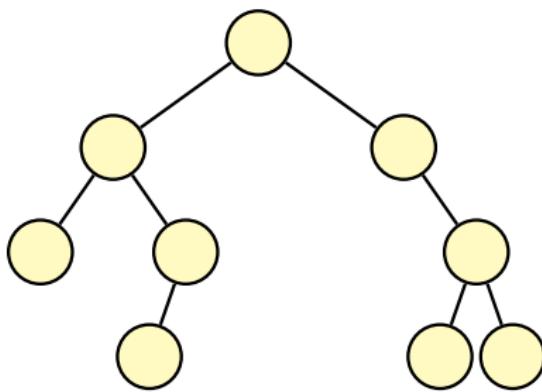
Successore di u ?

Caso 2

u non ha figlio destro

Risalendo attraverso i padri, il successore è il **primo avo** v tale per cui u sta nel **sottoalbero sinistro** di v

Successore-predecessore – Implementazione



TREE successorNode(TREE t)

```

if  $t == \text{nil}$  then
    return  $t$ 
else if  $t.\text{right} \neq \text{nil}$  then      % Caso 1
    return min( $t.\text{right}$ )
else
    TREE  $p = t.\text{parent}$ 
    while  $p \neq \text{nil}$  and  $t == p.\text{right}$  do
         $t = p$ 
         $p = p.\text{parent}$ 
    end
    return  $p$ 
  
```

Successore-predecessore – Implementazione

TREE predecessorNode(TREE t)

```

if  $t == \text{nil}$  then
    return  $t$ 

if  $t.\text{left} \neq \text{nil}$  then          % Caso 1
    return max( $t.\text{left}$ )
else                                % Caso 2
    TREE  $p = t.\text{parent}$ 
    while  $p \neq \text{nil}$  and  $t == p.\text{left}$  do
         $t = p$ 
         $p = p.\text{parent}$ 
    return  $p$ 

```

TREE successorNode(TREE t)

```

if  $t == \text{nil}$  then
    return  $t$ 

if  $t.\text{right} \neq \text{nil}$  then          % Caso 1
    return min( $t.\text{right}$ )
else                                % Caso 2
    TREE  $p = t.\text{parent}$ 
    while  $p \neq \text{nil}$  and  $t == p.\text{right}$  do
         $t = p$ 
         $p = p.\text{parent}$ 
    return  $p$ 

```

Per passare da successore a predecessore

- right diventa left
- min diventa max

Inserimento – `insertNode()`

TREE insertNode(TREE T , ITEM k , ITEM v)

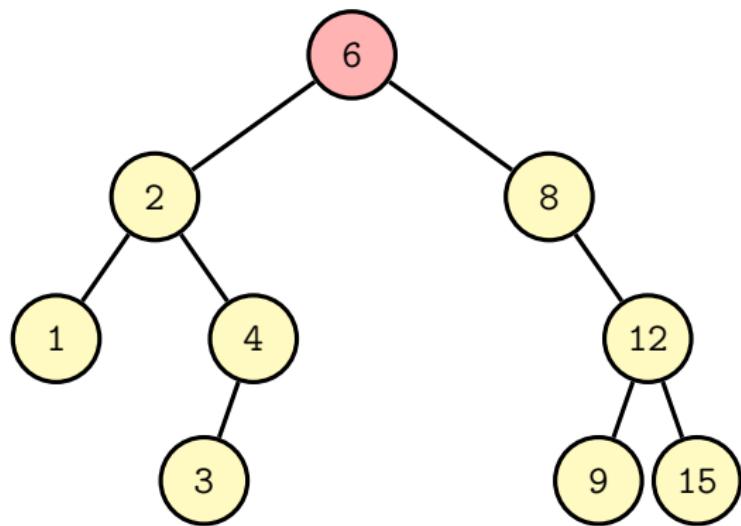
- Inserisce un'associazione chiave-valore (k, v) nell'albero T
- Se la chiave è già presente, sostituisce il valore associato; altrimenti, viene inserita una nuova associazione.
- Se $T == \text{nil}$, restituisce il primo nodo dell'albero.
- Altrimenti, restituisce T inalterato

Implementazione dizionario

`insert(ITEM k , ITEM v)`

`tree = insertNode(tree, k, v)`

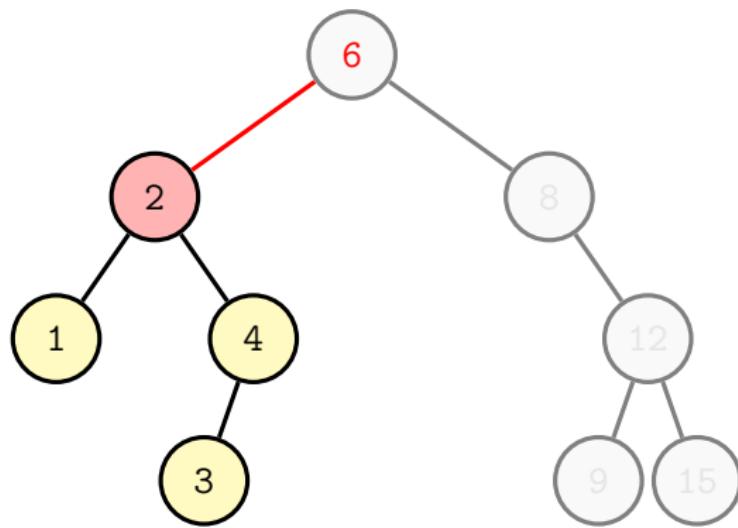
Inserimento – esempio



Valore da inserire: 5

- $u = 6$

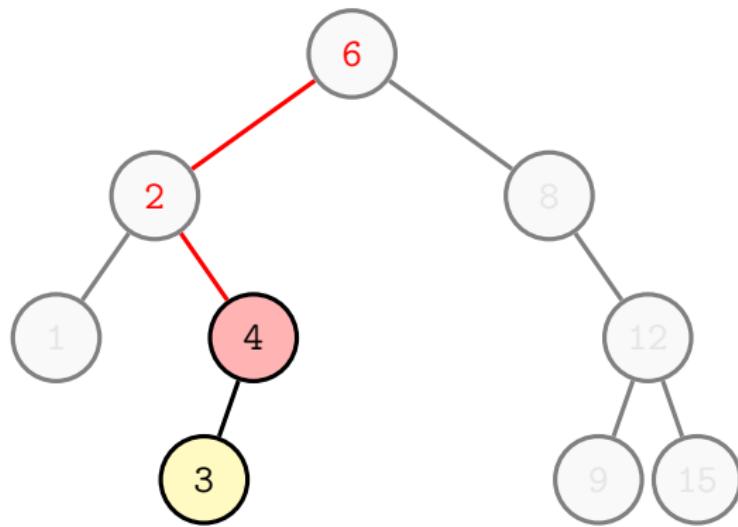
Inserimento – esempio



Valore da inserire: 5

- $u = 6$
- $5 < 6$; $u = 2$ (Sinistra)

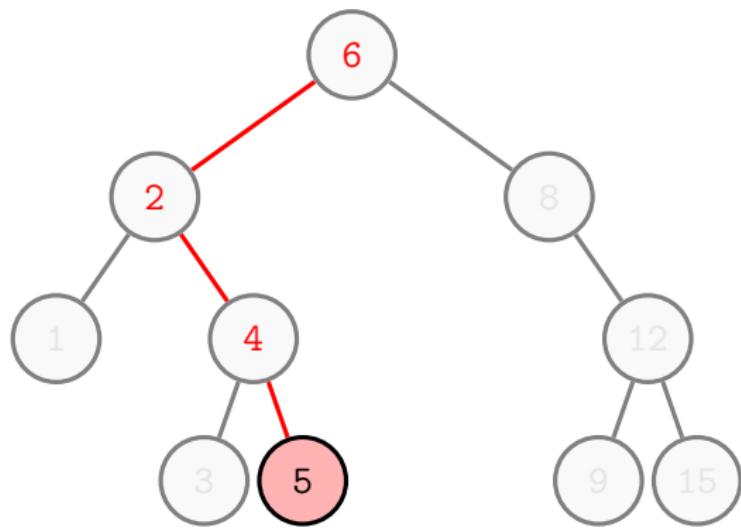
Inserimento – esempio



Valore da inserire: 5

- $u = \textcircled{6}$
- $5 < 6$; $u = \textcircled{2}$ (Sinistra)
- $5 > 2$; $u = \textcircled{4}$ (Destra)

Inserimento – esempio



Valore da inserire: 5

- $u = \text{nil}$
- $5 < 6$; $u = \text{nil}$ (Sinistra)
- $5 > 2$; $u = 4$ (Destra)
- $5 > 4$; $u = \text{nil}$ (Destra)
Inserito

Inserimento – implementazione

TREE insertNode(TREE T , ITEM k , ITEM v)

TREE $p = \text{nil}$ % Padre
TREE $u = T$
while $u \neq \text{nil}$ and $u.key \neq k$ **do** % Cerca posizione inserimento
 $p = u$
 $u = \text{iif}(k < u.key, u.left, u.right)$
if $u \neq \text{nil}$ and $u.key == k$ **then**
 $u.value = v$ % Chiave già presente
else
 TREE $new = \text{Tree}(k, v)$ % Crea un nodo coppia chiave-valore
 link(p, new, k)
 if $p == \text{nil}$ **then**
 $T = new$ % Primo nodo ad essere inserito
return T % Restituisce albero non modificato o nuovo nodo

Inserimento – implementazione

link(TREE p , TREE u , ITEM k)

if $u \neq \text{nil}$ then
 $u.parent = p$ % Registrazione padre

if $p \neq \text{nil}$ then
 if $k < p.key$ then $p.left = u$ % Attaccato come figlio sinistro
 else $p.right = u$ % Attaccato come figlio destro

Cancellazione

TREE removeNode(TREE T , ITEM k)

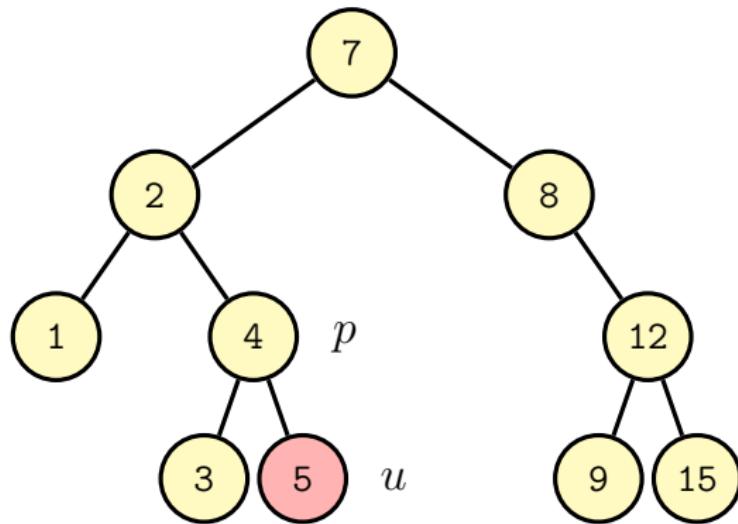
- Rimuove il nodo contenente la chiave k dall'albero T
- Restituisce la radice dell'albero (potenzialmente cambiata)

Implementazione dizionario

remove(ITEM k)

$tree = \text{removeNode}(tree, k)$

Cancellazione



Caso 1

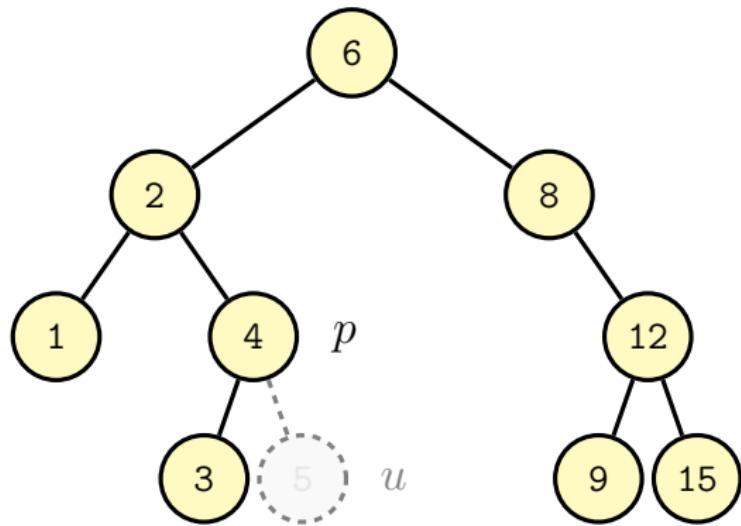
Il nodo da eliminare *u* non ha figli

Semplicemente si elimina!

Esempio

- Eliminazione 5

Cancellazione



Caso 1

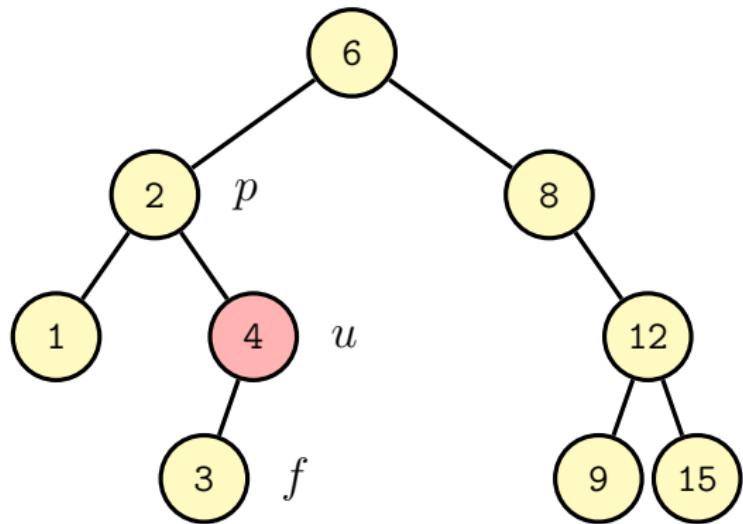
Il nodo da eliminare u non ha figli

Semplicemente si elimina!

Esempio

- Eliminazione 5

Cancellazione



Caso 2

Il nodo da eliminare u ha un solo figlio f

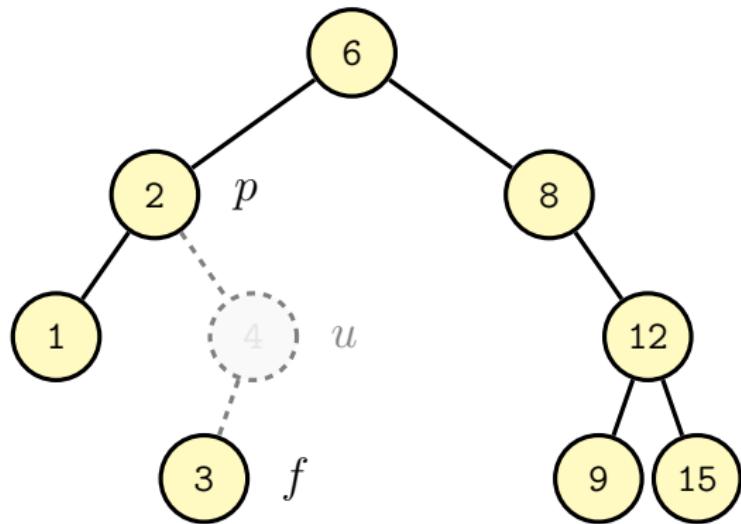
Si elimina u

Si attacca f all'ex-padre p di u in sostituzione di u (**short-cut**)

Esempio

- Eliminazione 4

Cancellazione



Caso 2

Il nodo da eliminare *u* ha un solo figlio *f*

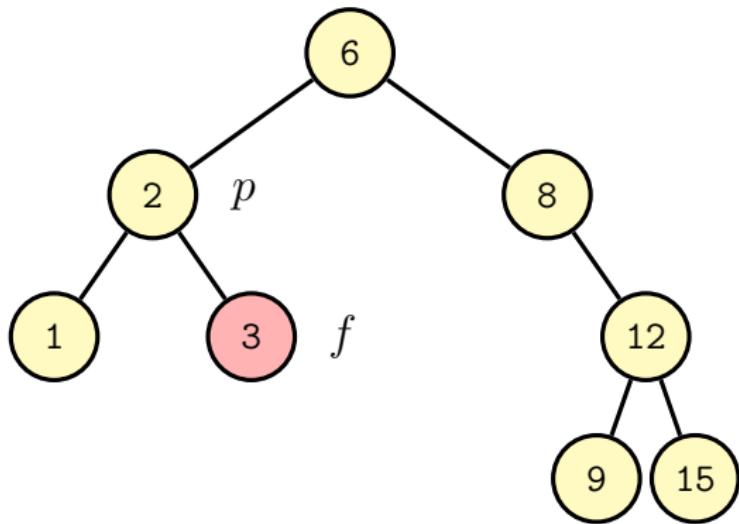
Si elimina *u*

Si attacca *f* all'ex-padre *p* di *u* in sostituzione di *u* (**short-cut**)

Esempio

- Eliminazione 4

Cancellazione



Caso 2

Il nodo da eliminare u ha un solo figlio f

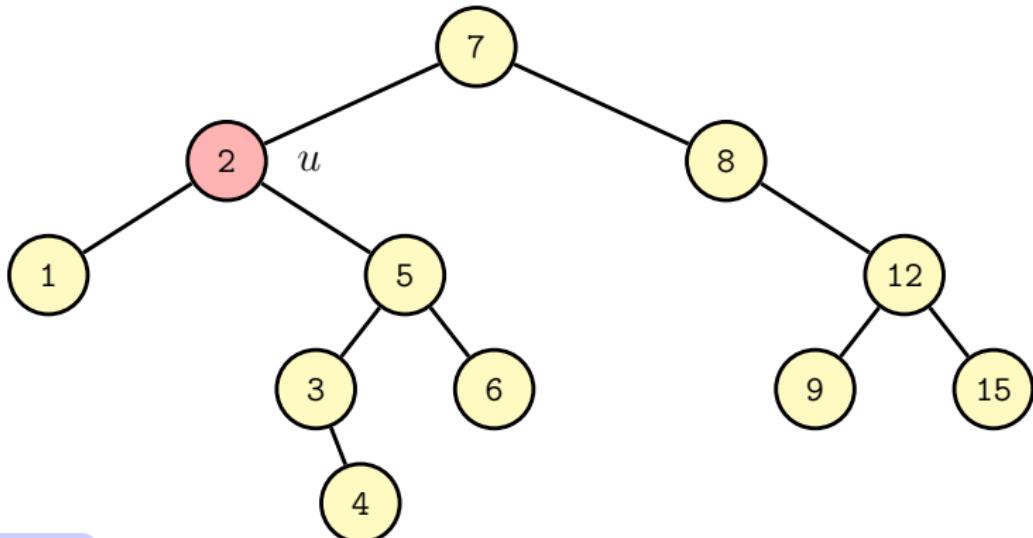
Si elimina u

Si attacca f all'ex-padre p di u in sostituzione di u (**short-cut**)

Esempio

- Eliminazione 4

Cancellazione

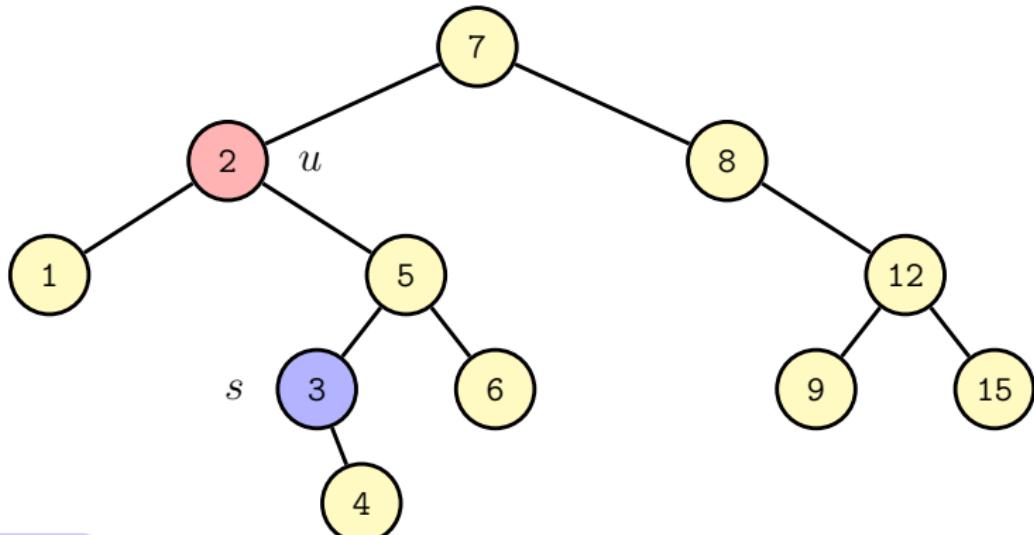


Caso 3

Il nodo da eliminare u ha due figli

- Eliminazione 2

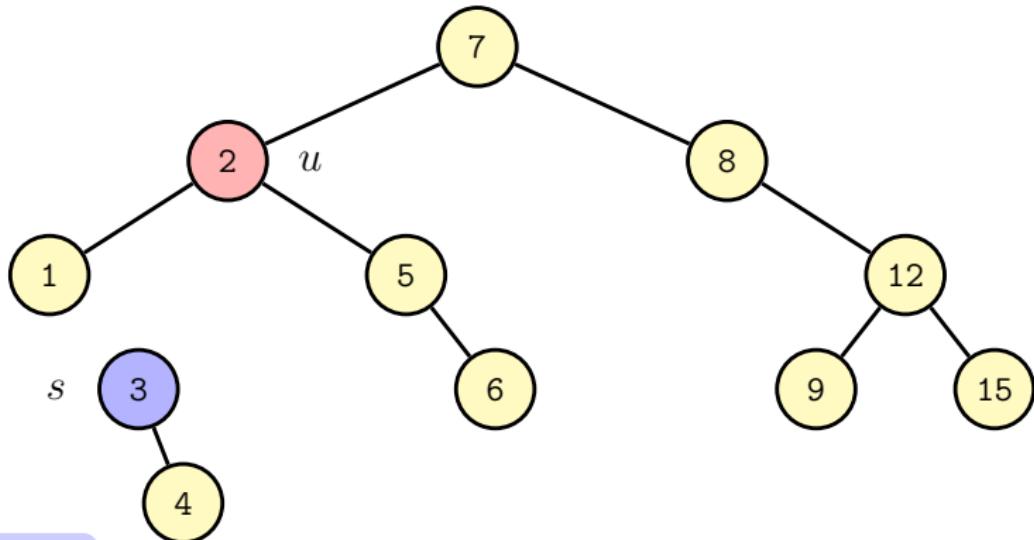
Cancellazione



Caso 3

- Si individua il successore s di u
- Il successore non ha figlio sinistro

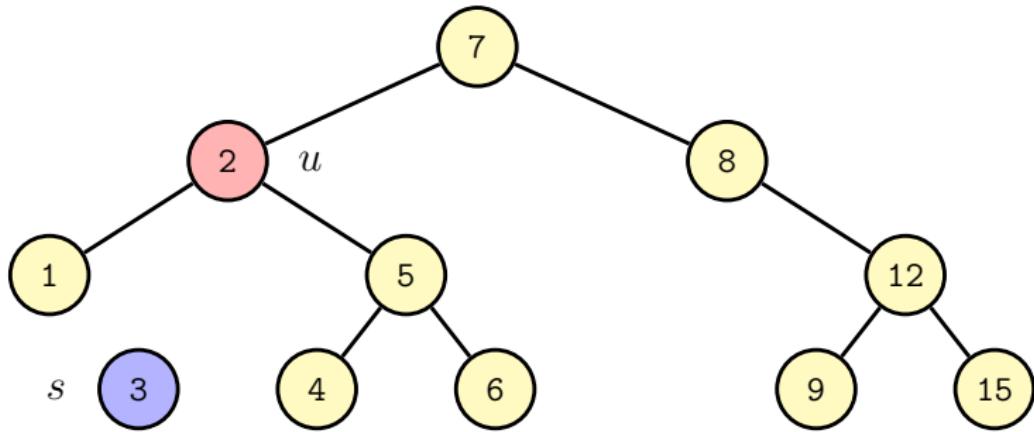
Cancellazione



Caso 3

- Si “stacca” il successore

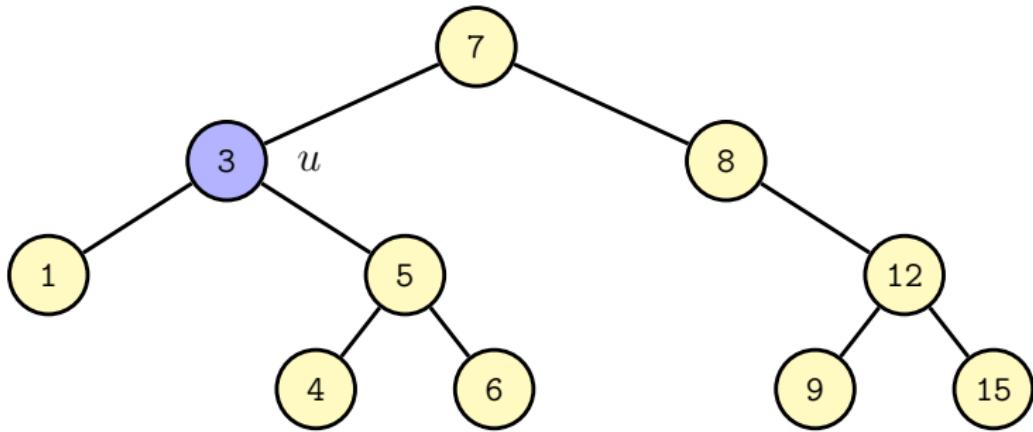
Cancellazione



Caso 3

- Si attacca l'eventuale figlio destro di s al padre di s (**short-cut**)

Cancellazione



Caso 3

- Si copia s su u
- Si rimuove il nodo s

Cancellazione – Implementazione

TREE removeNode(TREE T , ITEM k)

TREE t

TREE $u = \text{lookupNode}(T, k)$

if $u \neq \text{nil}$ **then**

if $u.\text{left} == \text{nil}$ **and** $u.\text{right} == \text{nil}$ **then** % Caso 1

 link($u.\text{parent}$, nil, k)

delete u

else if $u.\text{left} \neq \text{nil}$ **and** $u.\text{right} \neq \text{nil}$ **then** % Caso 3

 [...]

else % Caso 2

 [...]

return T

Cancellazione – Implementazione

TREE removeNode(TREE T , ITEM k)

TREE t

TREE $u = \text{lookupNode}(T, k)$

if $u \neq \text{nil}$ **then**

if $u.\text{left} == \text{nil}$ **and** $u.\text{right} == \text{nil}$ **then** % Caso 1

 [...]

else if $u.\text{left} \neq \text{nil}$ **and** $u.\text{right} \neq \text{nil}$ **then** % Caso 3

 TREE $s = \text{successorNode}()$

 link($s.\text{parent}, s.\text{right}, s.\text{key}$)

$u.\text{key} = s.\text{key}$

$u.\text{value} = s.\text{value}$

delete s

else % Caso 2

 [...]

return T

Cancellazione – Implementazione

TREE removeNode(TREE T , ITEM k)

TREE t

TREE $u = \text{lookupNode}(T, k)$

if $u \neq \text{nil}$ **then**

if $u.\text{left} == \text{nil}$ **and** $u.\text{right} == \text{nil}$ **then** % Caso 1

 [...]

else if $u.\text{left} \neq \text{nil}$ **and** $u.\text{right} \neq \text{nil}$ **then** % Caso 3

 [...]

else if $u.\text{left} \neq \text{nil}$ **and** $u.\text{right} == \text{nil}$ **then** % Caso 2

 link($u.\text{parent}$, $u.\text{left}$, k)

if $u.\text{parent} = \text{nil}$ **then**

$T = u.\text{left}$

else

 link($u.\text{parent}$, $u.\text{right}$, k)

if $u.\text{parent} = \text{nil}$ **then**

$T = u.\text{right}$

return T

Cancellazione – Dimostrazione

Caso 1 - nessun figlio

- Eliminare foglie non cambia l'ordine dei nodi rimanenti

Caso 2 - solo un figlio (destro o sinistro)

- Se u è il figlio destro (sinistro) di p , tutti i valori nel sottoalbero di f sono maggiori (minori) di p
- Quindi f può essere attaccato come figlio destro (sinistro) di p al posto di u

Cancellazione – Dimostrazione

Caso 3 - due figli

- Il successore s
 - è sicuramente \geq dei nodi nel sottoalbero sinistro di u
 - è sicuramente \leq dei nodi nel sottoalbero destro di u
- quindi può essere sostituito a u
- A quel punto, si ricade nel caso 2

Costo computazionale

Osservazione

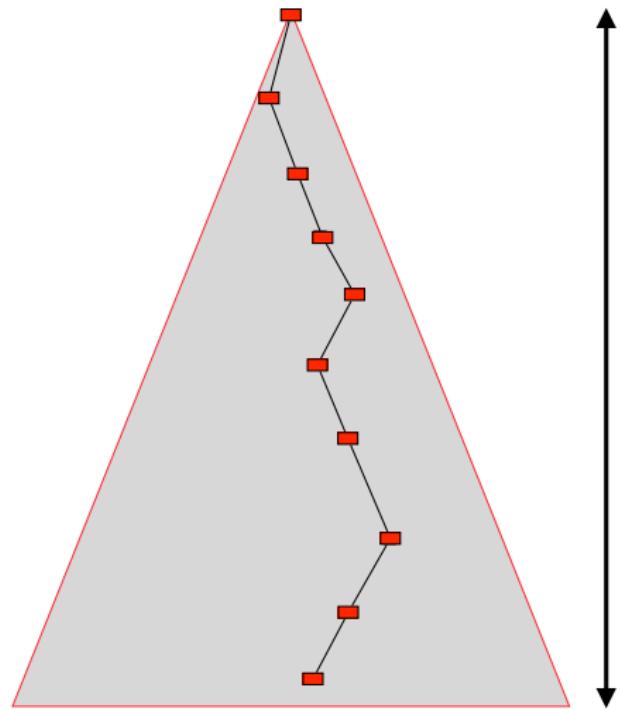
Tutte le operazioni sono confinate ai nodi posizionati lungo un cammino semplice dalla radice ad una foglia

$h = \text{Altezza dell'albero}$

Tempo di ricerca: $O(h)$

Domande

- Qual è il caso pessimo?
- Qual è il caso ottimo?



Costo computazionale

Osservazione

Le operazioni di ricerca sono confinate ai nodi posizionati lungo un cammino semplice dalla radice ad una foglia

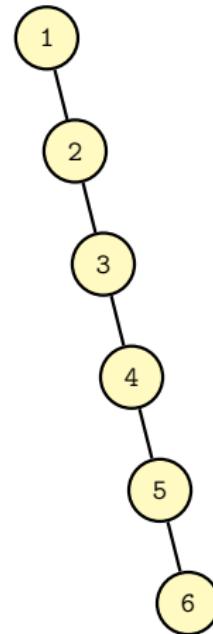
$h = \text{Altezza dell'albero}$

Tempo di ricerca: $O(h)$

Domande

- Qual è il caso pessimo?
- Qual è il caso ottimo?

Caso pessimo: $h = O(n)$



Costo computazionale

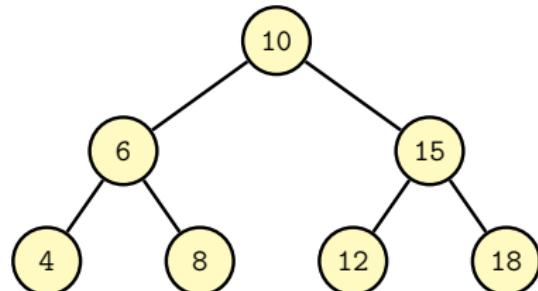
Osservazione

Le operazioni descritte sono confinate ai nodi posizionati lungo un cammino semplice dalla radice ad una foglia

$h = \text{Altezza dell'albero}$

Tempo di ricerca: $O(h)$

Caso ottimo: $h = O(\log n)$



Domande

- Qual è il caso pessimo?
- Qual è il caso ottimo?

Nothing to see here, move along!

La seconda parte di queste slide verrà revisionata prima della prossima lezione.

Algoritmi e Strutture Dati

Alberi binari di ricerca bilanciati

Alberto Montresor

Università di Trento

2020/10/22

This work is licensed under a Creative Commons
Attribution-ShareAlike 4.0 International License.



Sommario

1 Alberi binari di ricerca

- Ricerca
- Minimo-massimo
- Successore-predecessore
- Inserimento
- Cancellazione
- Costo computazionale

2 Alberi binari di ricerca bilanciati

- Definizioni
- Esempi
- Inserimento
- Cancellazione

Altezza degli alberi binari di ricerca

Altezza ABR, caso pessimo

- $O(n)$

Altezza ABR, caso medio

- Caso "semplice": inserimenti in ordine casuale
 - È possibile dimostrare che l'altezza media è $O(\log n)$
- Caso generale (inserimenti + cancellazioni):
 - Difficile da trattare

Nella realtà

- Non ci si affida al caso
- Si utilizzano tecniche per mantenere l'albero bilanciato

ABR bilanciati

Fattore di bilanciamento

Il fattore di bilanciamento $\beta(v)$ di un nodo v è la massima differenza di altezza fra i sottoalberi di v

- Alberi AVL (Adelson-Velskii e Landis, 1962)
 - $\beta(v) \leq 1$ per ogni nodo v
 - Bilanciamento ottenuto tramite **rotazioni**
- B-Alberi (Bayer, McCreight, 1972)
 - $\beta(v) = 0$ per ogni nodo v
 - Specializzati per strutture in memoria secondaria
- Alberi 2-3 (Hopcroft, 1983)
 - $\beta(v) = 0$ per ogni nodo v
 - Bilanciamento ottenuto tramite **merge/split**, grado variabile

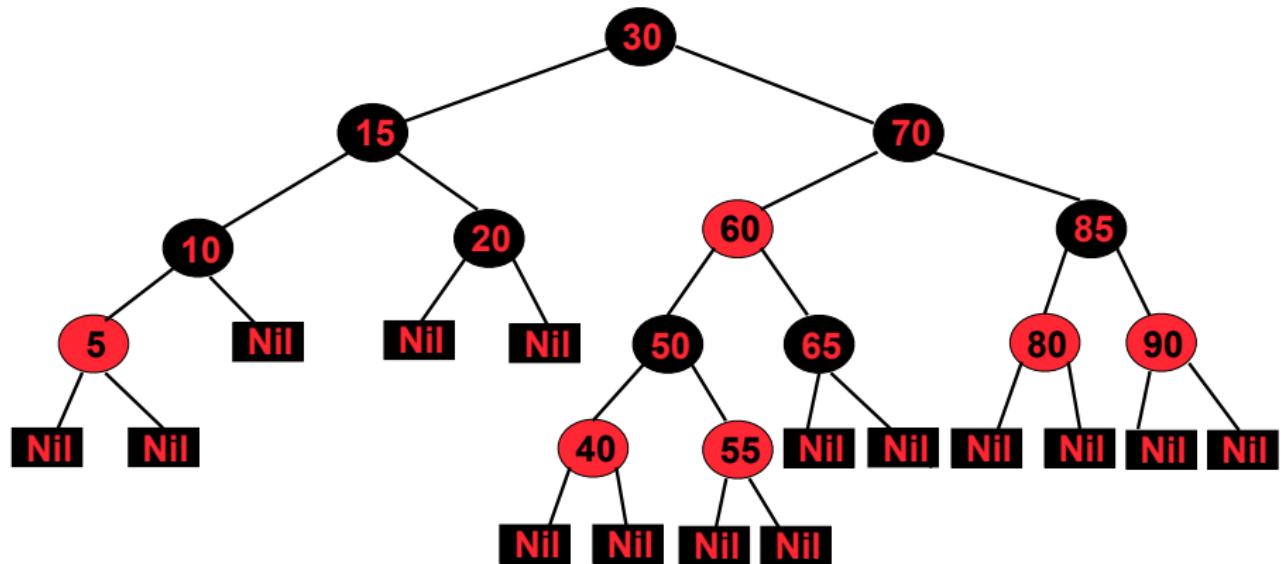
Alberi Red-Black (Guibas and Sedgewick, 1978)

Sono **alberi binari di ricerca** in cui:

- Ogni nodo è colorato di **rosso** o di **nero**
- Le **chiavi** vengono mantenute **solo nei nodi interni** dell'albero
- Le **foglie** sono costituite da **nodi speciali Nil**
- Vengono rispettati i seguenti vincoli:
 - ① La radice è nera
 - ② Tutte le foglie sono nere
 - ③ Entrambi i figli di un nodo rosso sono neri
 - ④ Ogni cammino semplice da un nodo u ad una delle foglie contenute nel suo sottoalbero ha lo stesso numero di nodi neri

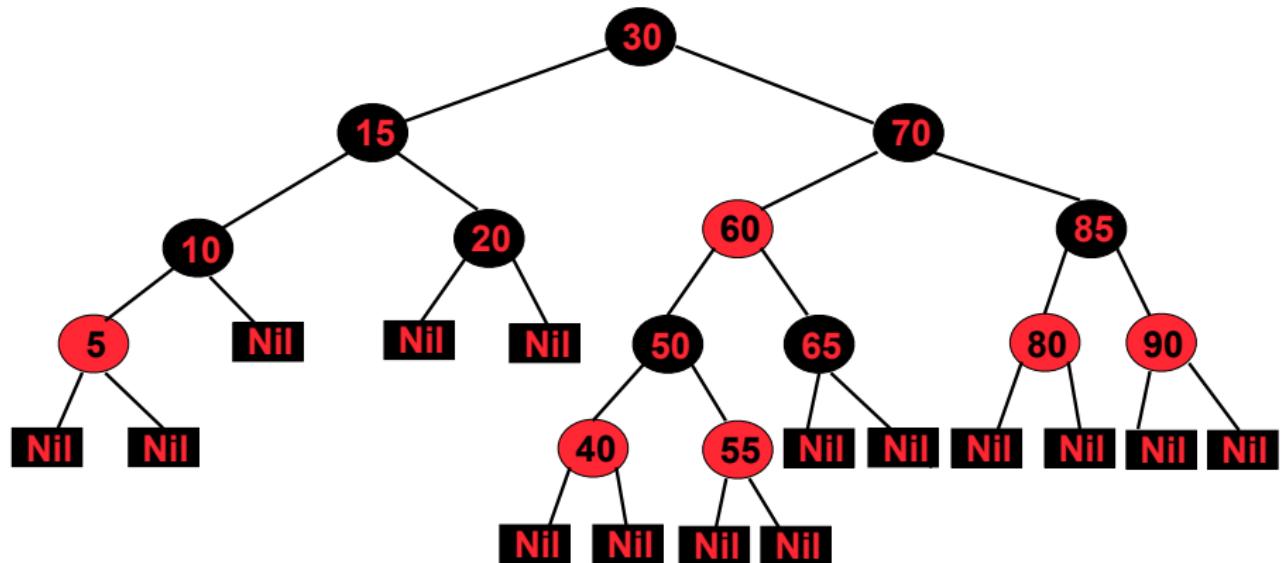
Esempi

- 1 La radice è nera



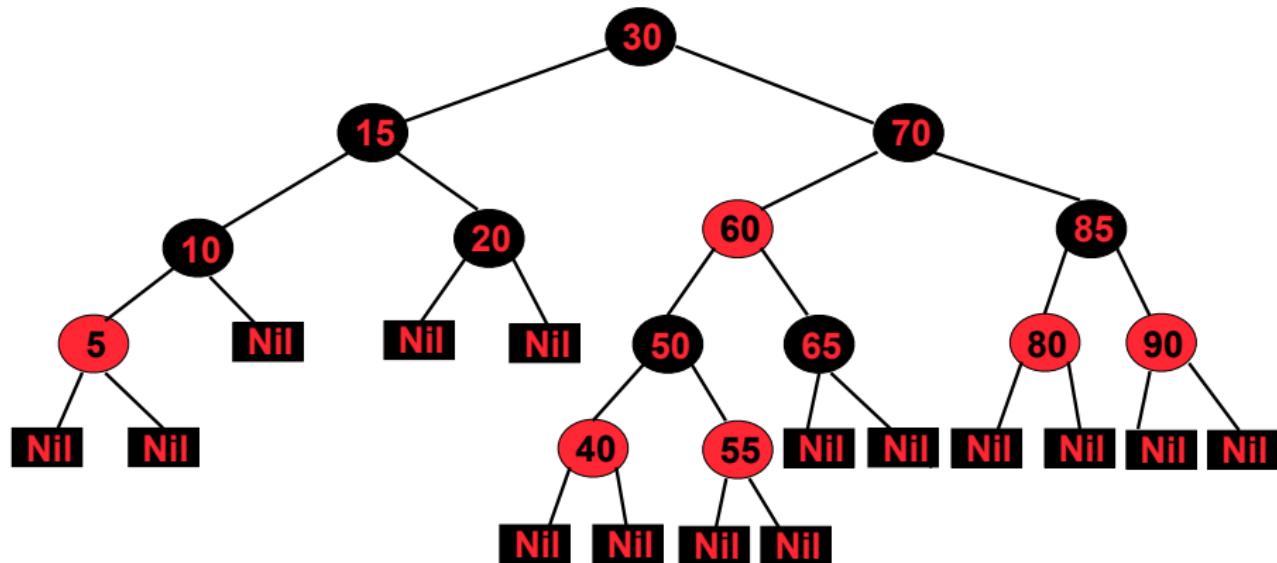
Esempi

- ❷ Tutte le foglie sono nere



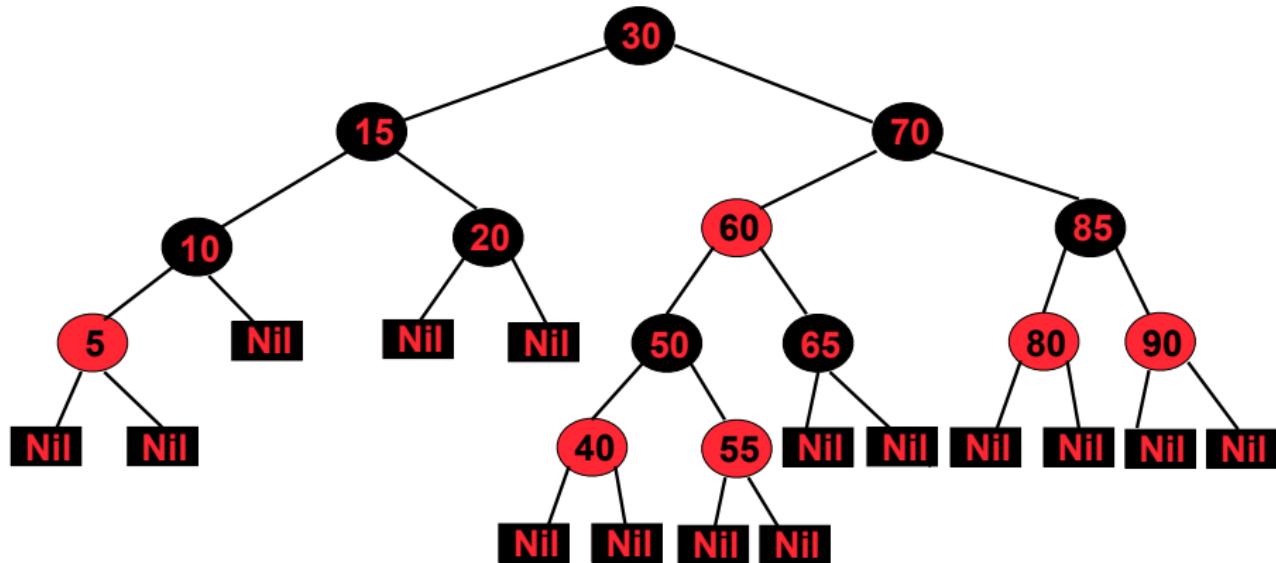
Esempi

- ❸ Entrambi i figli di un nodo rosso sono neri



Esempi

- ④ Ogni cammino semplice da un nodo u ad una delle foglie contenute nel suo sottoalbero ha lo stesso numero di nodi neri



Reality check

Java TreeMap, Java TreeSet

<https://docs.oracle.com/javase/8/docs/api/java/util/TreeMap.html>

```
public class TreeMap<K,V>
extends AbstractMap<K,V>
implements NavigableMap<K,V>, Cloneable, Serializable
```

A Red-Black tree based `NavigableMap` implementation. The map is sorted according to the natural ordering of its keys, or by a `Comparator` provided at map creation time, depending on which constructor is used.

C++ STL

https://gcc.gnu.org/onlinedocs/libstdc++/libstdc++-html-USERS-4.1/stl__tree_8h-source.html

```
00072 namespace std
00073 {
00074     // Red-black tree class, designed for use in implementing STL
00075     // associative containers (set, multiset, map, and multimap). The
00076     // insertion and deletion algorithms are based on those in Cormen,
00077     // Leiserson, and Rivest, Introduction to Algorithms (MIT Press,
00078     // 1990), except that
```

Reality check

Linux

<https://github.com/torvalds/linux/blob/master/Documentation/core-api/rbtree.rst>

To quote Linux Weekly News:

There are a number of red-black trees in use in the kernel. The deadline and CFQ I/O schedulers employ rbtrees to track requests; the packet CD/DVD driver does the same. The high-resolution timer code uses an rbtree to organize outstanding timer requests. The ext3 filesystem tracks directory entries in a red-black tree. Virtual memory areas (VMAs) are tracked with red-black trees, as are epoll file descriptors, cryptographic keys, and network packets in the "hierarchical token bucket" scheduler.

<https://github.com/torvalds/linux/blob/master/include/linux/rbtree.h>

The screenshot shows a GitHub repository page for the Linux kernel. The repository is named 'master' and the file is 'rbtree.h'. The file has 161 lines (130 sloc) and is 5.1 KB in size. The content of the file is displayed in a monospaced font:

```
1 /* SPDX-License-Identifier: GPL-2.0-or-later */
2 /*
3  Red Black Trees
4  (C) 1999  Andrea Arcangeli <andrea@suse.de>
```

Alberi Red-Black – Memorizzazione

TREE

TREE *parent*

TREE *left*

TREE *right*

int color

ITEM *key*

ITEM *value*

Nodi Nil

- Nodo **sentinella** il cui scopo è avere accesso al colore di entrambi i figli, evitare di dover gestire casi particolari quando uno dei due è **nil**.
- Al posto di un puntatore **nil**, si usa un puntatore ad un nodo **Nil** con colore nero
- Ne esiste solo uno, per risparmiare memoria

Altezza nera

Altezza nera di un nodo v

L'altezza nera $bh(v)$ di un nodo v è il numero di nodi neri lungo ogni cammino da v (escluso) ad ogni foglia (inclusa) del suo sottoalbero.

Altezza nera di un albero Red-Black

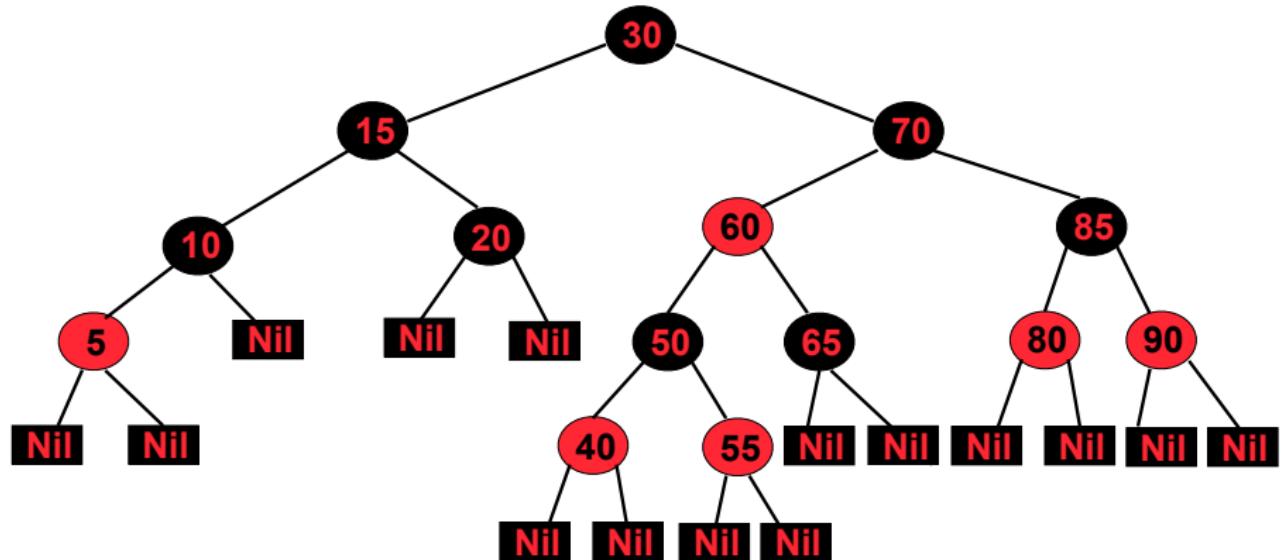
L'altezza nera di un albero Red-Black è pari all'altezza nera della sua radice

Entrambe ben definite perché tutti i cammini hanno lo stesso numero di nodi neri (Vincolo (4))

Esempi

Più colorazioni sono possibili – Versione 1

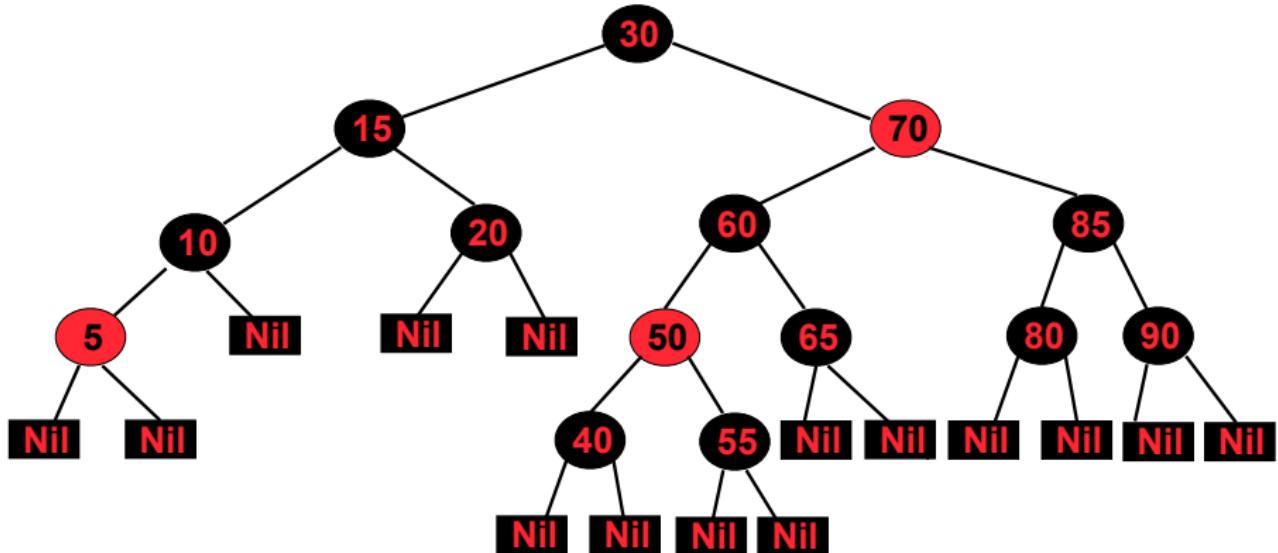
Altezza nera: $bh(r) = 3$



Esempi

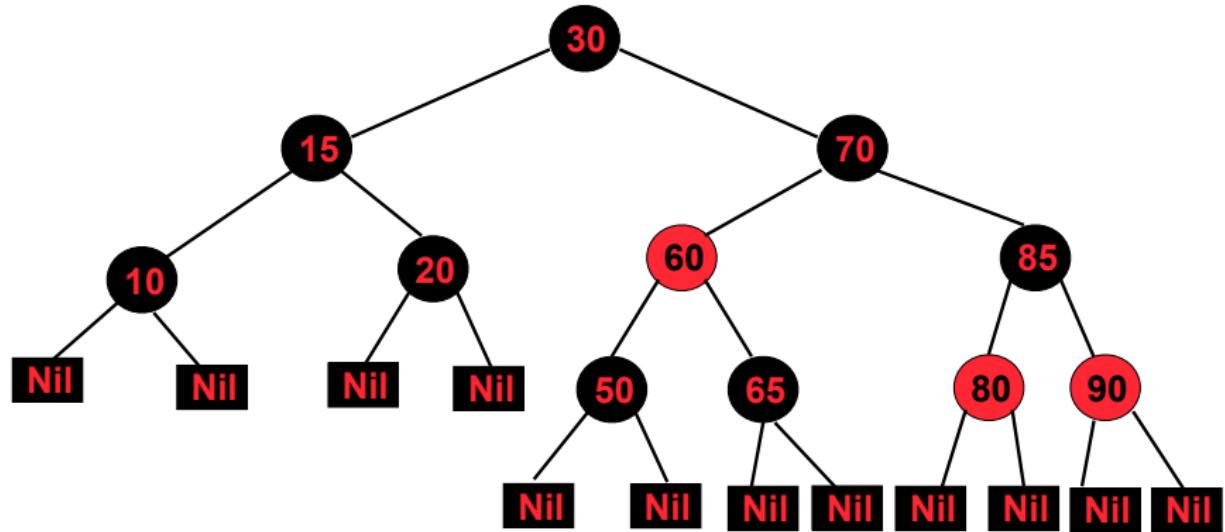
Più colorazioni sono possibili – Versione 2

Altezza nera: $bh(r) = 3$



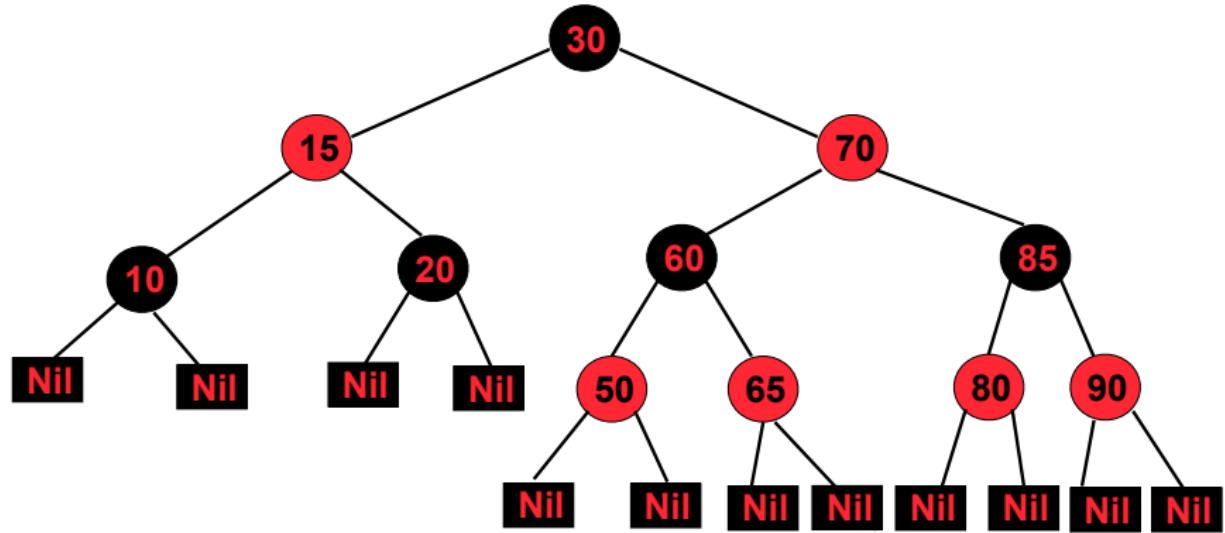
Esempi

Cambiare colorazione può cambiare l'altezza nera
Altezza nera: $bh(r) = 3$



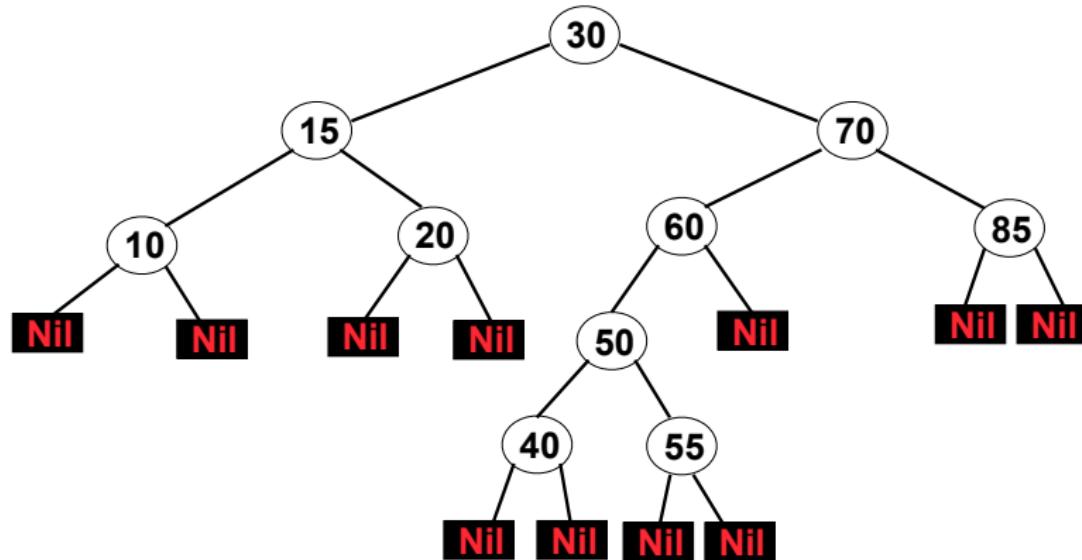
Esempi

Cambiare colorazione può cambiare l'altezza nera
Altezza nera: $bh(r) = 2$



Esempi

Questo albero può essere un albero Red-Black?

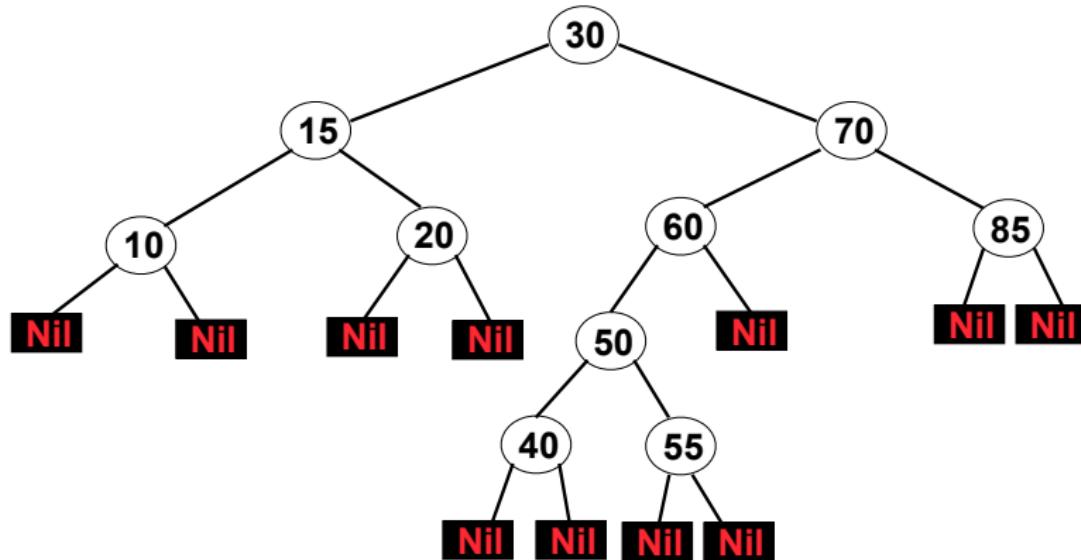


Esempi

Guardando il lato sinistro, $2 \leq bh(r) \leq 3$

Guardando il lato destro, $bh(r) \geq 3$

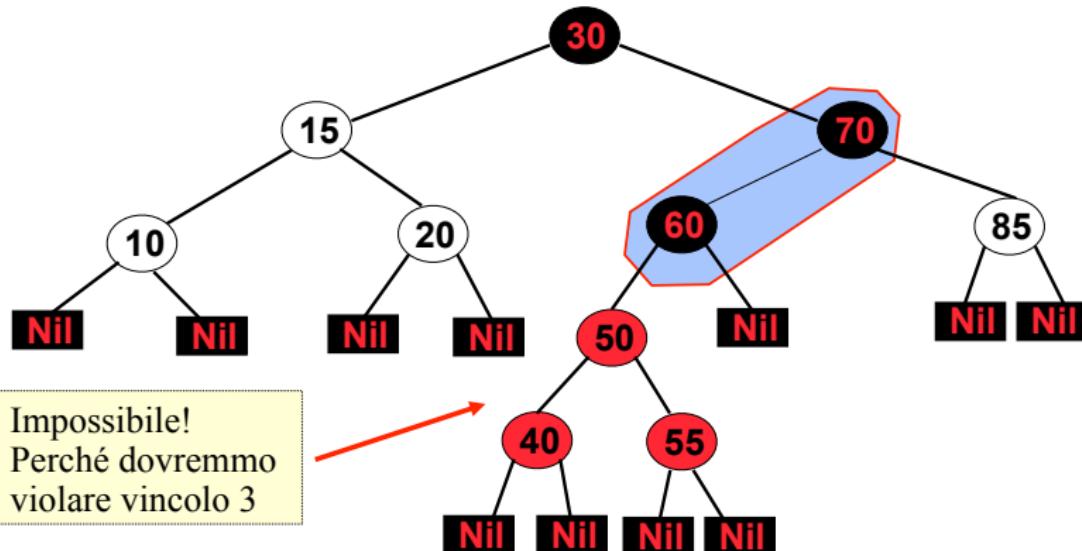
Quindi $bh(r)=3$.



Esempi

Supponiamo che 60 e 70 siano entrambi neri.

Per rispettare il vincolo ④, dobbiamo infrangere il vincolo ③

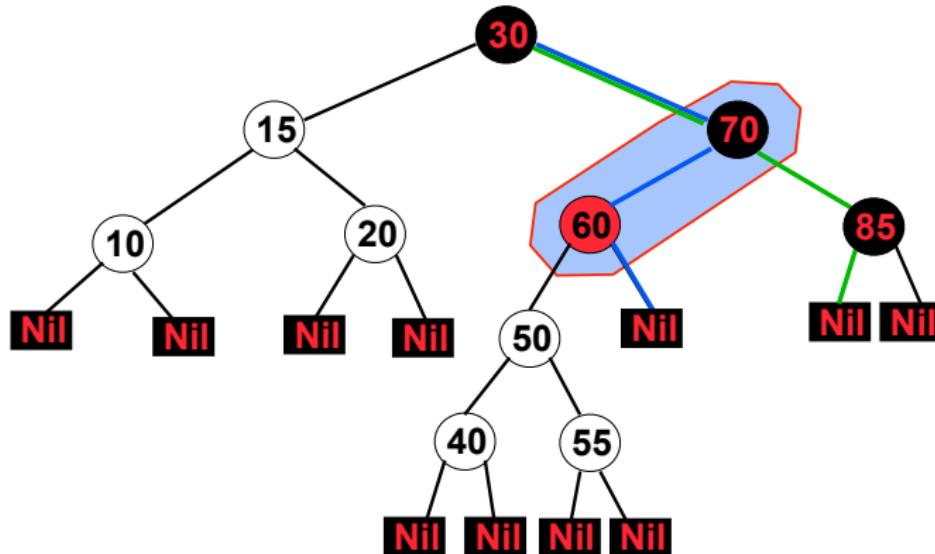


Esempi

Proviamo a colorare di rosso il nodo 60.

Esistono cammini con 2 nodi neri e con 3 nodi neri.

Impossibile per il vincolo ④

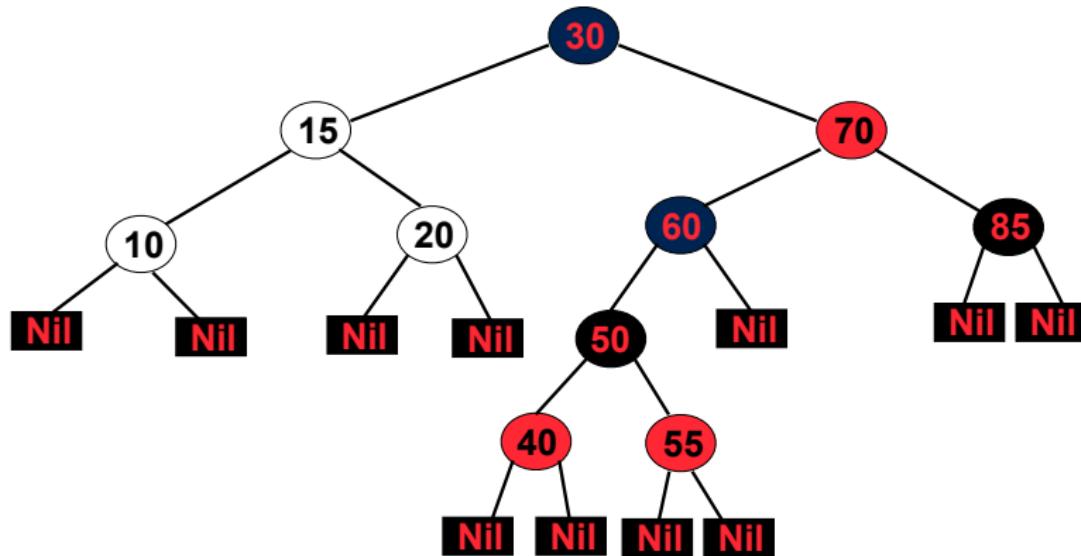


Esempi

Proviamo a colorare di rosso il nodo 70.

Esistono cammini con 2 nodi neri

Impossibile per il vincolo ④

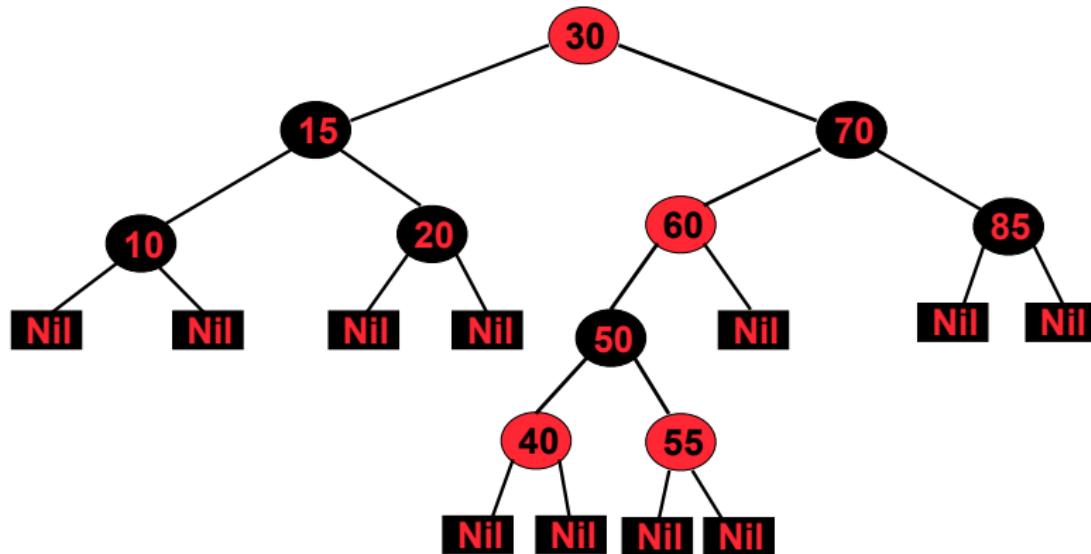


Esempi

Questa è l'ultima possibilità.

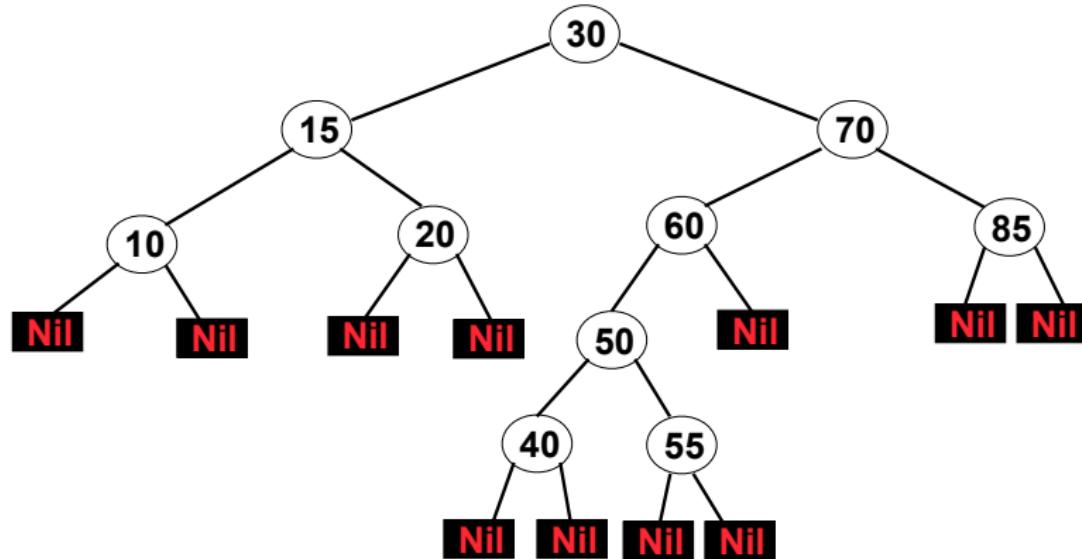
Impossibile perchè non rispetta il vincolo 1

Impossibile perchè non rispetta il vincolo 4



Esempi

Questo albero non può essere un albero Red-Black!



Inserimento

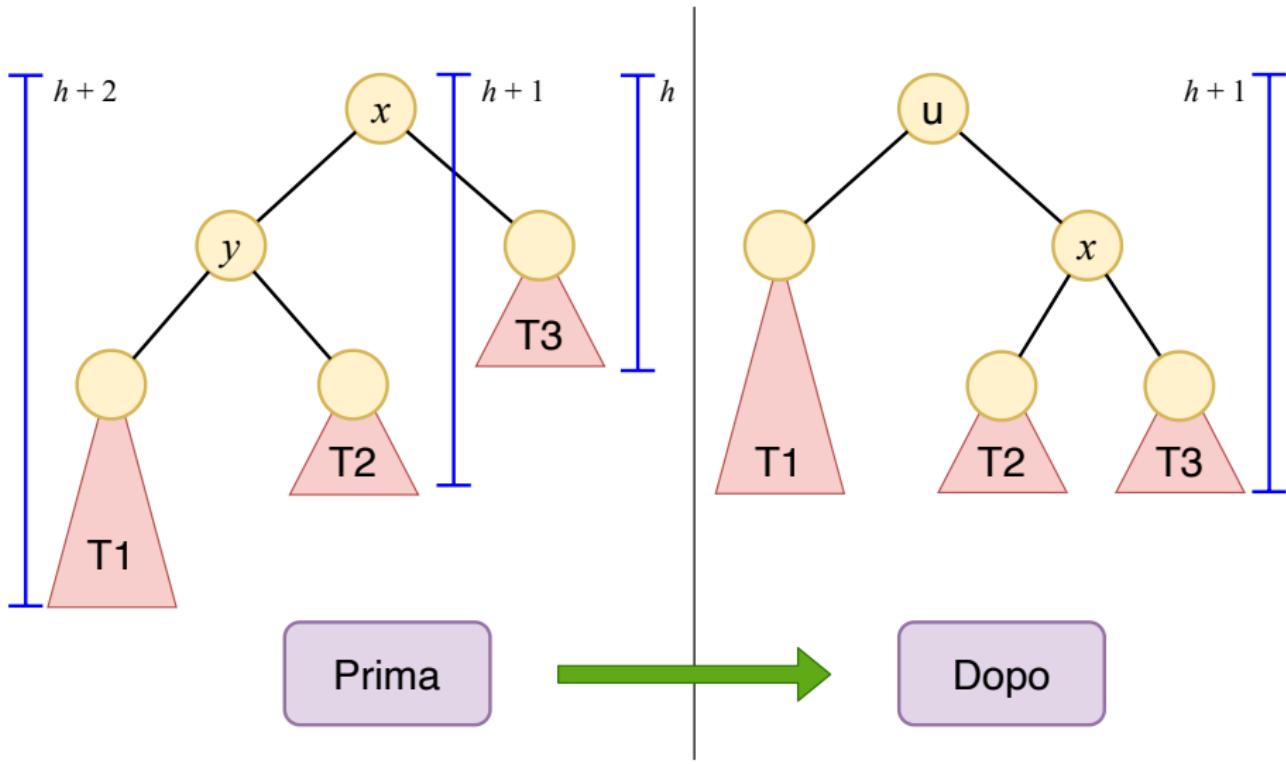
Durante la modifica di un albero Red-Black

- È possibile che le condizioni di bilanciamento risultino violate

Quando i vincoli Red-Black vengono violati si può agire:

- Modificando i colori nella zona della violazione
- Operando dei ribilanciamenti dell'albero tramite **rotazioni**
 - Rotazione destra
 - Rotazione sinistra

Rotazione



Rotazione a sinistra

TREE rotateLeft(TREE x)

TREE $y \leftarrow x.\text{right}$

TREE $p \leftarrow x.\text{parent}$

(1) $x.\text{right} \leftarrow y.\text{left}$ % Il sottoalbero B diventa figlio destro di x

(1) **if** $y.\text{left} \neq \text{nil}$ **then** $y.\text{left.parent} \leftarrow x$

(2) $y.\text{left} \leftarrow x$ % x diventa figlio sinistro di y

(2) $x.\text{parent} \leftarrow y$

(3) $y.\text{parent} \leftarrow p$ % y diventa figlio di p

(3) **if** $p \neq \text{nil}$ **then**

if $p.\text{left} = x$ **then** $p.\text{left} \leftarrow y$ **else** $p.\text{right} \leftarrow y$

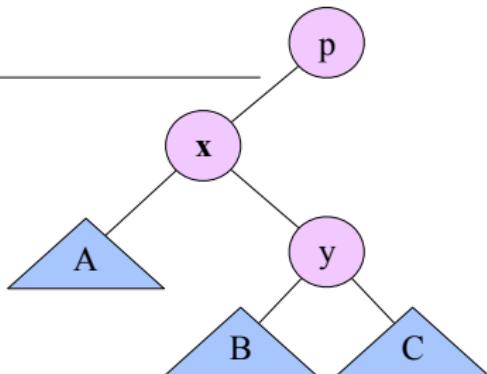
return y

• Operazioni

(1) far diventare B figlio destro di x

(2) far diventare x il figlio sinistro di y

(3) far diventare y figlio di p , il vecchio padre di x



Rotazione a sinistra

TREE rotateLeft(TREE x)

TREE $y \leftarrow x.\text{right}$

TREE $p \leftarrow x.\text{parent}$

(1) $x.\text{right} \leftarrow y.\text{left}$ % Il sottoalbero B diventa figlio destro di x

(1) **if** $y.\text{left} \neq \text{nil}$ **then** $y.\text{left.parent} \leftarrow x$ % x diventa figlio sinistro di y

(2) $y.\text{left} \leftarrow x$

(2) $x.\text{parent} \leftarrow y$

(3) $y.\text{parent} \leftarrow p$ % y diventa figlio di p

(3) **if** $p \neq \text{nil}$ **then**

if $p.\text{left} = x$ **then** $p.\text{left} \leftarrow y$ **else** $p.\text{right} \leftarrow y$

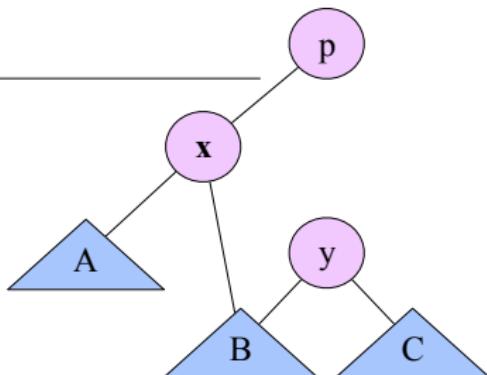
return y

• Operazioni

(1) far diventare B figlio destro di x

(2) far diventare x il figlio sinistro di y

(3) far diventare y figlio di p , il vecchio padre di x



Rotazione a sinistra

TREE rotateLeft(TREE x)

TREE $y \leftarrow x.\text{right}$

TREE $p \leftarrow x.\text{parent}$

(1) $x.\text{right} \leftarrow y.\text{left}$ % Il sottoalbero B diventa figlio destro di x

(1) **if** $y.\text{left} \neq \text{nil}$ **then** $y.\text{left.parent} \leftarrow x$

(2) $y.\text{left} \leftarrow x$

% x diventa figlio sinistro di y

(2) $x.\text{parent} \leftarrow y$

(3) $y.\text{parent} \leftarrow p$ % y diventa figlio di p

(3) **if** $p \neq \text{nil}$ **then**

if $p.\text{left} = x$ **then** $p.\text{left} \leftarrow y$ **else** $p.\text{right} \leftarrow y$

return y

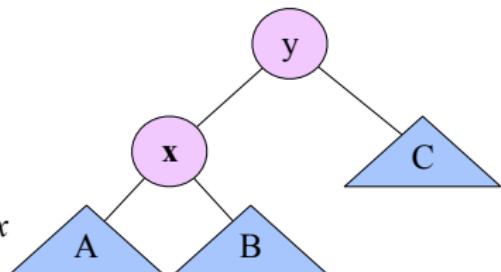
p

• Operazioni

(1) far diventare B figlio destro di x

(2) far diventare x il figlio sinistro di y

(3) far diventare y figlio di p , il vecchio padre di x



Rotazione a sinistra

TREE rotateLeft(TREE x)

TREE $y \leftarrow x.\text{right}$

TREE $p \leftarrow x.\text{parent}$

(1) $x.\text{right} \leftarrow y.\text{left}$ % Il sottoalbero B diventa figlio destro di x

(1) **if** $y.\text{left} \neq \text{nil}$ **then** $y.\text{left.parent} \leftarrow x$

(2) $y.\text{left} \leftarrow x$ % x diventa figlio sinistro di y

(2) $x.\text{parent} \leftarrow y$

(3) $y.\text{parent} \leftarrow p$ % y diventa figlio di p

(3) **if** $p \neq \text{nil}$ **then**

if $p.\text{left} = x$ **then** $p.\text{left} \leftarrow y$ **else** $p.\text{right} \leftarrow y$

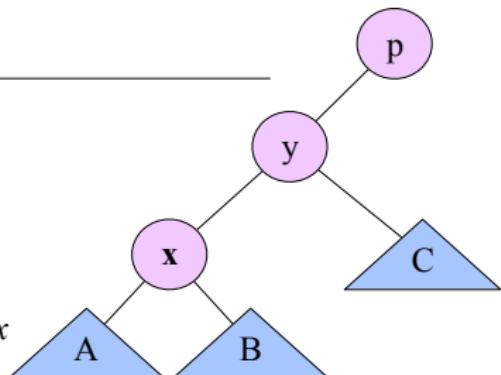
return y

• Operazioni

(1) far diventare B figlio destro di x

(2) far diventare x il figlio sinistro di y

(3) far diventare y figlio di p , il vecchio padre di x



Inserimento in alberi Red-Black

Inserimento

- Si cerca la posizione usando la stessa procedura usata per gli alberi binari di ricerca
- Si colora il nuovo nodo di **rosso**

Quale dei quattro vincoli può essere violato?

- ① La radice è nera
- ② Tutte le foglie sono nere
- ③ Entrambi i figli di un nodo rosso sono neri
- ④ Ogni cammino semplice da un nodo u ad una delle foglie contenute nel sottoalbero radicato in u hanno lo stesso numero di nodi neri

Come modificare la `insertNode()`

TREE `insertNode(TREE T, ITEM k, ITEM v)`

TREE $p = \text{nil}$ % Padre
TREE $u = T$
while $u \neq \text{nil}$ and $u.key \neq k$ **do** % Cerca posizione inserimento
 $p = u$
 $u = \text{iif}(k < u.key, u.left, u.right)$
if $u \neq \text{nil}$ and $u.key == k$ **then** % Chiave già presente
 $u.value = v$
else
 TREE $new = \text{Tree}(k, v)$ % Crea un nodo coppia chiave-valore
 $\text{link}(p, new, k)$
 balanceInsert(new)
 if $p == \text{nil}$ **then** % Primo nodo ad essere inserito
 $T = new$
return T % Restituisce albero non modificato o nuovo nodo

Inserimento in alberi Red-Black

Principi generali

- Ci spostiamo verso l'alto lungo il percorso di inserimento
- Ripristinare il vincolo ③ (figli neri di nodo rosso)
- Spostiamo le violazioni verso l'alto rispettando il vincolo (4) (mantenendo l'altezza nera dell'albero)
- Al termine, coloriamo la radice di nero (vincolo ①)

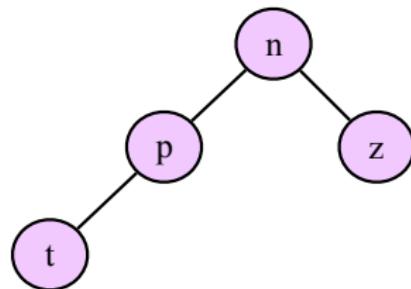
Nota

Le operazioni di ripristino sono necessarie solo quando due nodi consecutivi sono rossi!

balanceInsert(TREE t)

• Nodi coinvolti

- Il nodo inserito t
- Suo padre p
- Suo nonno n
- Suo zio z



balanceInsert(TREE t)

$t.color \leftarrow \text{RED}$

while $t \neq \text{nil}$ **do**

 TREE $p \leftarrow t.parent$

% Padre

 TREE $n \leftarrow \text{if}(p \neq \text{nil}, p.parent, \text{nil})$

% Nonno

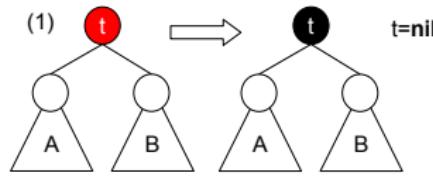
 TREE $z \leftarrow \text{if}(n = \text{nil}, \text{nil}, \text{if}(n.left = p, n.right, n.left))$

% Zio

Inserimento – 7 casi possibili

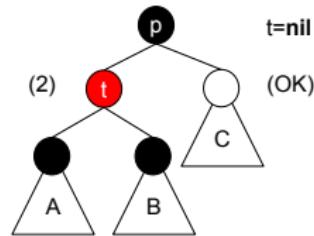
• Caso 1:

- Nuovo nodo t non ha padre
- Primo nodo ad essere inserito o siamo risaliti fino alla radice
- Si colora t di nero



• Caso 2

- Padre p di t è nero
- Nessun vincolo violato



Inserimento – 7 casi possibili

• Caso 1:

- Nuovo nodo t non ha padre
- Primo nodo ad essere inserito o siamo risaliti fino alla radice
- Si colora t di nero

• Caso 2

- Padre p di t è nero
- Nessun vincolo violato

while $t \neq \text{nil}$ **do**

 TREE $p \leftarrow t.parent$

 % Padre

 TREE $n \leftarrow \text{iif}(p.parent \neq \text{nil}, p.parent, \text{nil})$

 % Nonno

 TREE $z \leftarrow \text{iif}(n = \text{nil}, \text{nil}, \text{iif}(n.left = p, right, left))$

 % Zio

if $p = \text{nil}$ **then**

 % Caso (1)

$t.color \leftarrow \text{BLACK}$

$t \leftarrow \text{nil}$

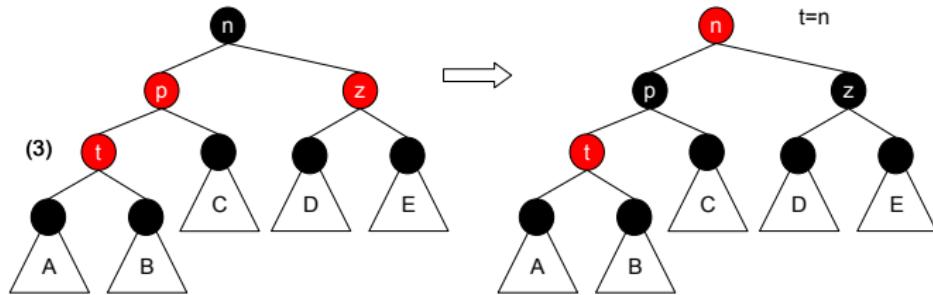
else if $p.color = \text{BLACK}$ **then**

 % Caso (2)

$t \leftarrow \text{nil}$

Inserimento – 7 casi possibili

- ♦ **Caso 3**
 - ♦ t rosso
 - ♦ p rosso
 - ♦ z rosso
 - ♦ Se z è rosso, è possibile colorare di nero p , z , e di rosso n .
 - ♦ Poiché tutti i cammini che passano per z e p passano per n , la lunghezza dei cammini neri non è cambiata.
 - ♦ Il problema può essere ora sul nonno:
 - ♦ violato vincolo (1), ovvero n può essere una radice rossa
 - ♦ violato vincolo (3), ovvero n rosso può avere un padre rosso.
 - ♦ Poniamo $t = n$, e il ciclo continua.



Inserimento – 7 casi possibili

- **Caso 3**
 - t rosso
 - Poiché tutti i cammini che passano per z e p passano per n , la lunghezza dei cammini neri non è cambiata.
 - p rosso
 - Il problema può essere ora sul nonno:
 - violato vincolo (1), ovvero n può essere una radice rossa
 - violato vincolo (3), ovvero n rosso può avere un padre rosso.
 - z rosso
 - Poniamo $t = n$, e il ciclo continua.

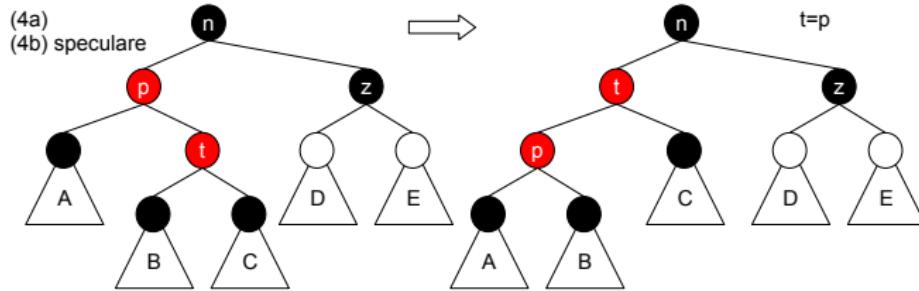
else if $z.color = \text{RED}$ **then**

$p.color \leftarrow z.color \leftarrow \text{BLACK}$
 $n.color \leftarrow \text{RED}$
 $t \leftarrow n$

% Caso (3)

Inserimento – 7 casi possibili

- **Caso 4a,4b**
 - t rosso
 - p rosso
 - z nero
 - Si assuma che t sia figlio destro di p e che p sia figlio sinistro di n
 - Una rotazione a sinistra a partire dal nodo p scambia i ruoli di t e p ottenendo il caso (5a), dove i nodi rossi in conflitto sul vincolo (3) sono entrambi figli sinistri dei loro padri
 - I nodi coinvolti nel cambiamento sono p e t , entrambi rossi, quindi la lunghezza dei cammini neri non cambia



Inserimento – 7 casi possibili

- **Caso 4a,4b**
 - t rosso
 - p rosso
 - z nero
 - Si assuma che t sia figlio destro di p e che p sia figlio sinistro di n
 - Una rotazione a sinistra a partire dal nodo p scambia i ruoli di t e p ottenendo il caso (5a), dove i nodi rossi in conflitto sul vincolo (3) sono entrambi figli sinistri dei loro padri
 - I nodi coinvolti nel cambiamento sono p e t , entrambi rossi, quindi la lunghezza dei cammini neri non cambia

else

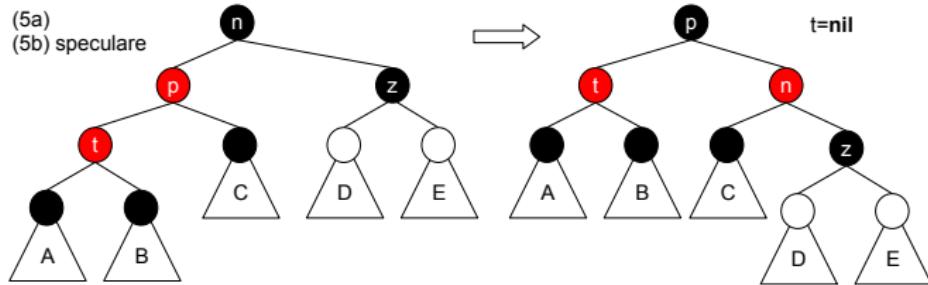
```

if ( $t = p.right$ ) and ( $p = n.left$ ) then % Caso (4.a)
     $n.left \leftarrow \text{rotateLeft}(p)$ 
     $t \leftarrow p$ 
else if ( $t = p.left$ ) and ( $p = n.right$ ) then % Caso (4.b)
     $n.right \leftarrow \text{rotateRight}(p)$ 
     $t \leftarrow p$ 

```

Inserimento – 7 casi possibili

- **Caso 5a,5b**
 - t rosso
 - p rosso
 - z nero
 - Si assume che t sia figlio sinistro di p e p sia figlio sinistro di n
 - Una rotazione a destra a partire da n ci porta ad una situazione in cui t e n sono figli di p
 - Colorando n di rosso e p di nero ci troviamo in una situazione in cui tutti i vincoli Red-Black sono rispettati
 - in particolare, la lunghezza dei cammini neri che passano per la radice è uguale alla situazione iniziale



Inserimento – 7 casi possibili

- **Caso 5a,5b**
 - t rosso
 - p rosso
 - z nero
 - Si assuma che t sia figlio sinistro di p e p sia figlio sinistro di n
 - Una rotazione a destra a partire da n ci porta ad una situazione in cui t e n sono figli di p
 - Colorando n di rosso e p di nero ci troviamo in una situazione in cui tutti i vincoli Red-Black sono rispettati
 - in particolare, la lunghezza dei cammini neri che passano per la radice è uguale alla situazione iniziale

```

else
  if ( $t = p.left$ ) and ( $p = n.left$ ) then % Caso (5.a)
    |  $n.left \leftarrow \text{rotateRight}(n)$ 
  else if ( $t = p.right$ ) and ( $p = n.right$ ) then % Caso (5.b)
    |  $n.right \leftarrow \text{rotateLeft}(n)$ 
   $p.color \leftarrow \text{BLACK}$ 
   $n.color \leftarrow \text{RED}$ 
   $t \leftarrow \text{nil}$ 

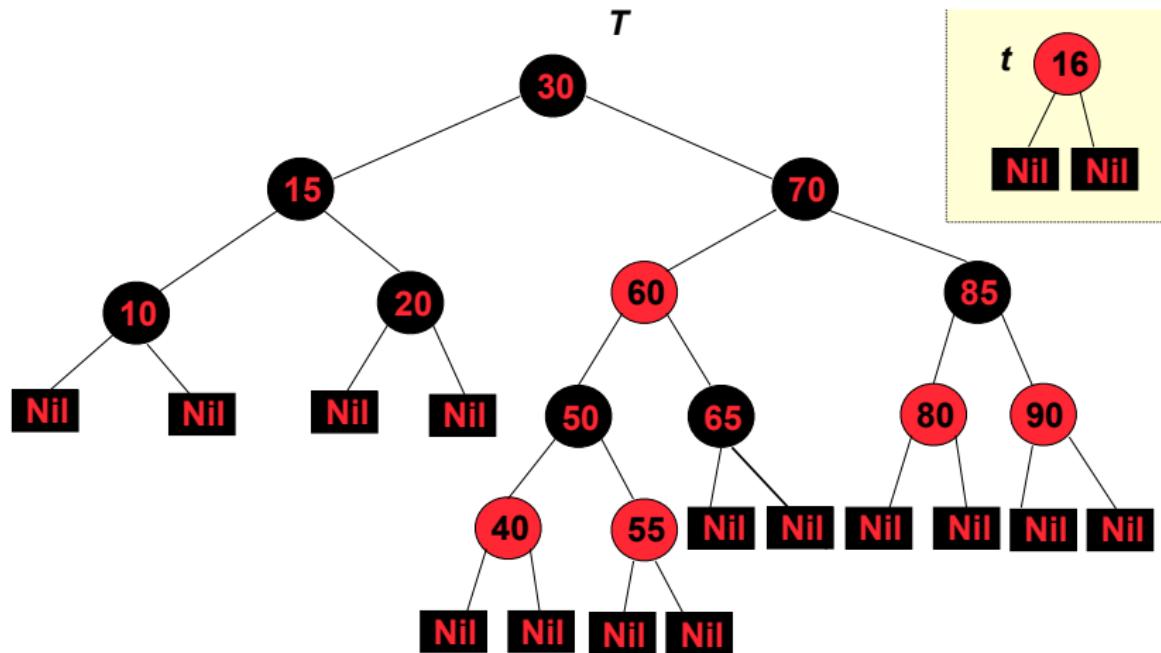
```

All together, now!

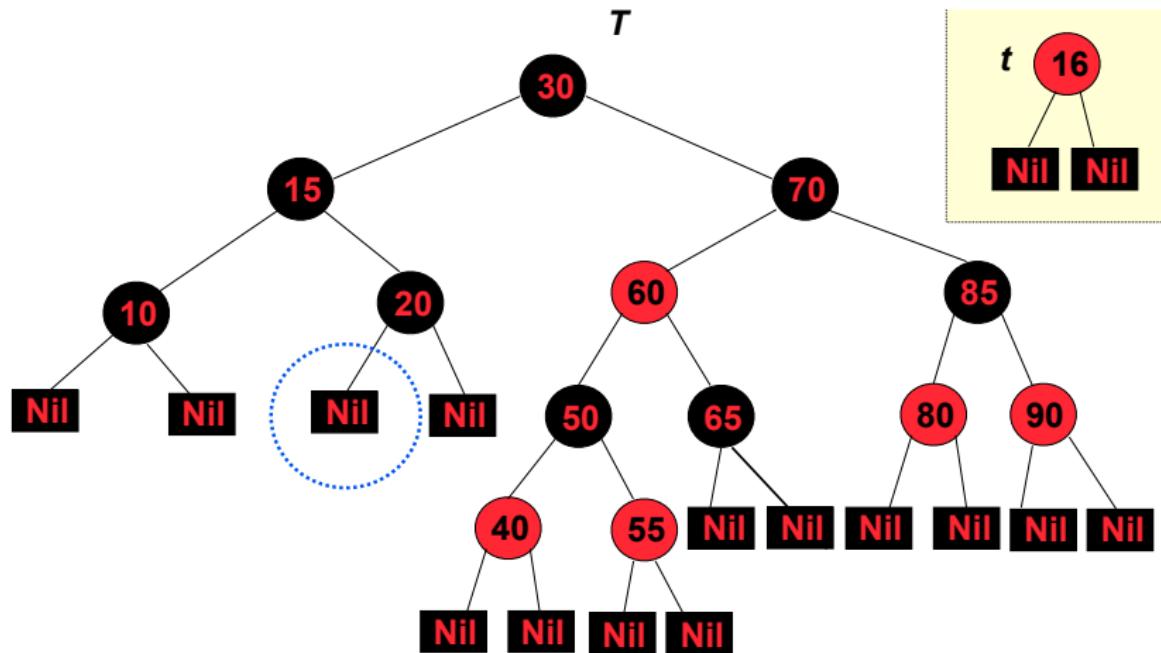
```

balanceInsert(TREE t)
  t.color ← RED
  while t ≠ nil do
    TREE p ← t.parent
    TREE n ← iif(p ≠ nil, p.parent, nil)                                % Padre
    TREE z ← iif(n = nil, nil, iif(n.left = p, n.right, n.left))          % Nonno
    if p = nil then
      t.color ← BLACK
      t ← nil
    else if p.color = BLACK then                                         % Zio
      t ← nil
    else if z.color = RED then                                           % Caso (1)
      p.color ← z.color ← BLACK
      n.color ← RED
      t ← n
    else
      if (t = p.right) and (p = n.left) then                            % Caso (4.a)
        rotateLeft(p)
        t ← p
      else if (t = p.left) and (p = n.right) then                         % Caso (4.b)
        rotateRight(p)
        t ← p
      else
        if (t = p.left) and (p = n.left) then                            % Caso (5.a)
          rotateRight(n)
        else if (t = p.right) and (p = n.right) then                      % Caso (5.b)
          rotateLeft(n)
        p.color ← BLACK
        n.color ← RED
        t ← nil
  
```

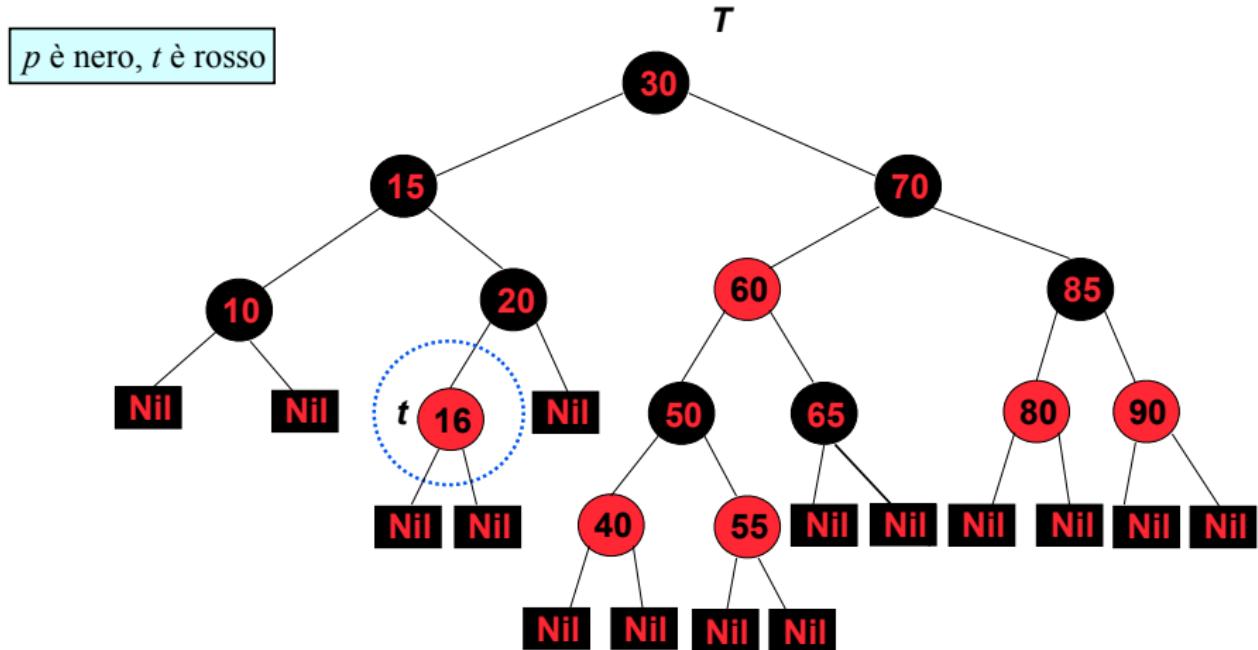
Inserimento – Esempio



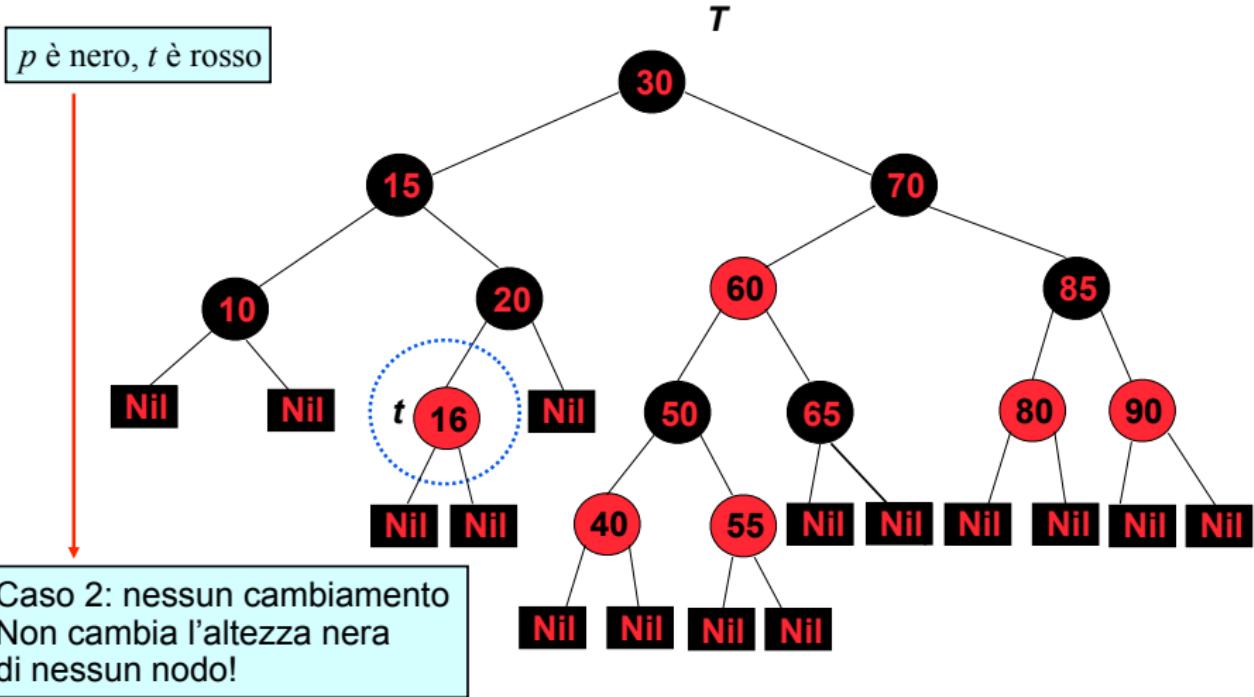
Inserimento – Esempio



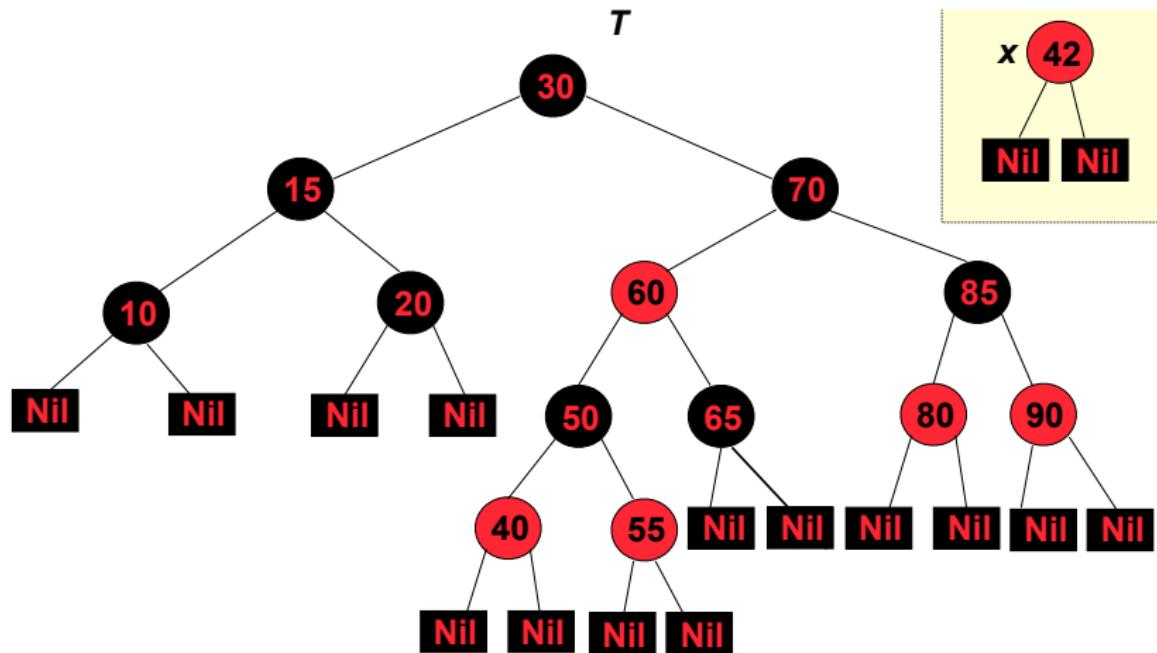
Inserimento – Esempio



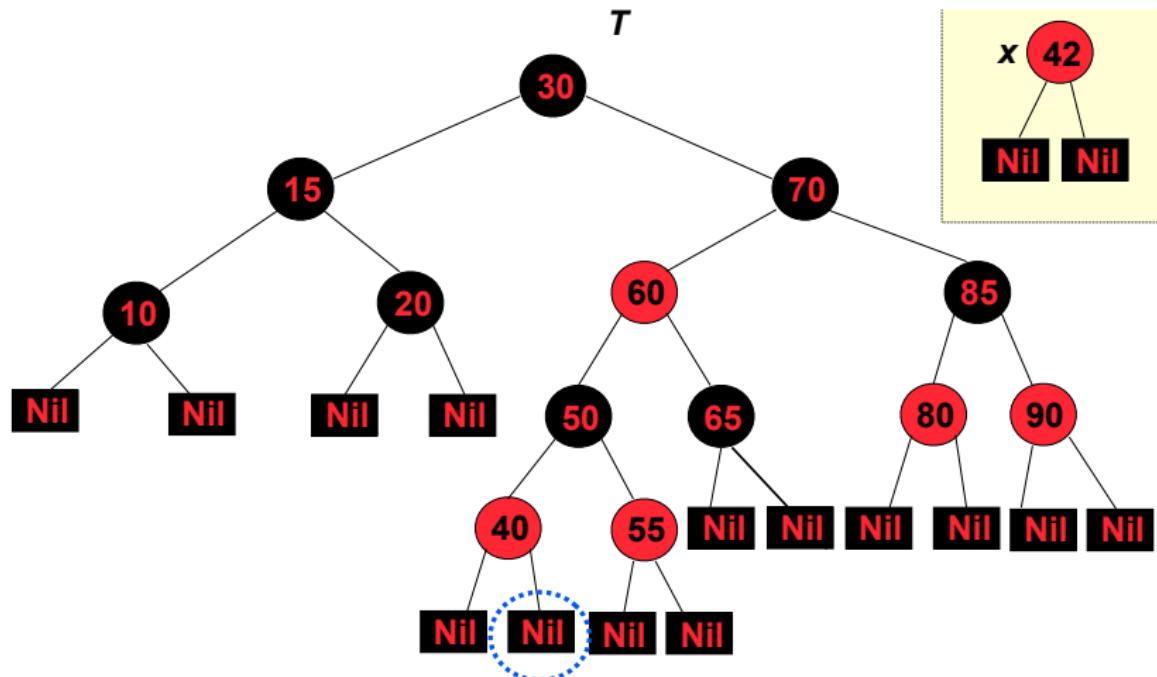
Inserimento – Esempio



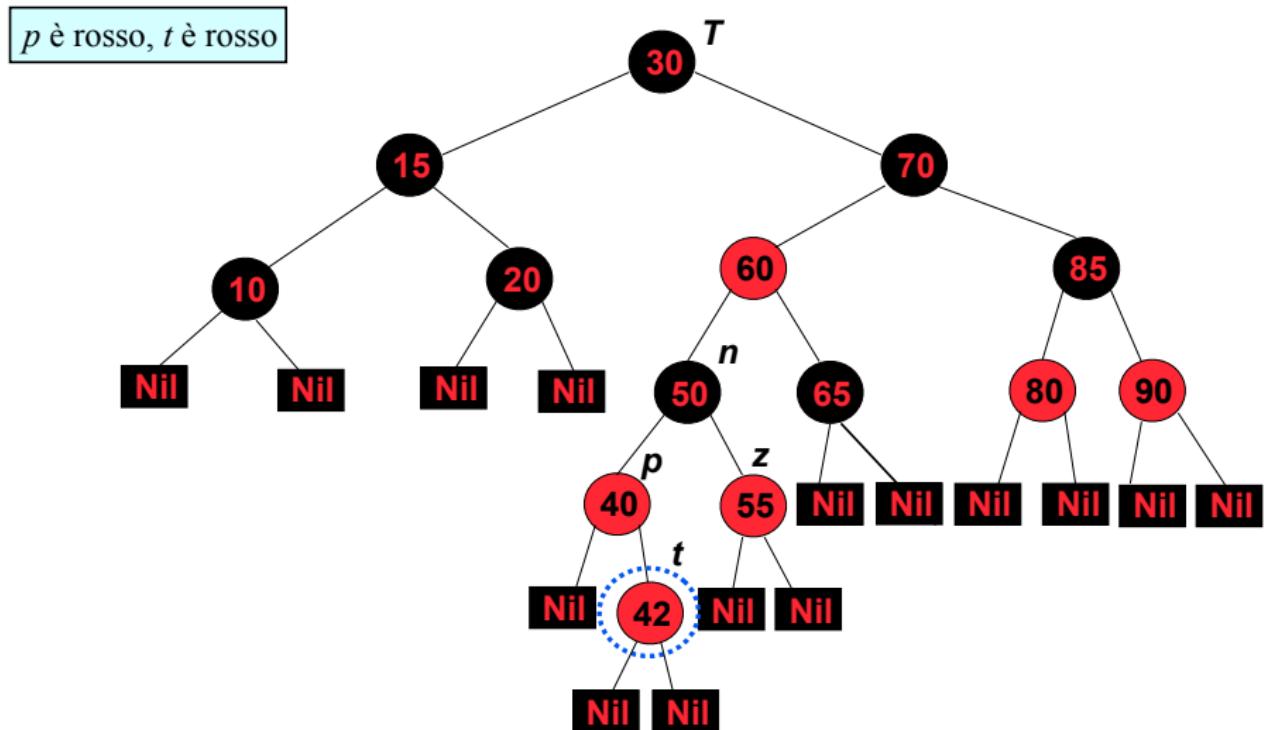
Inserimento – Esempio



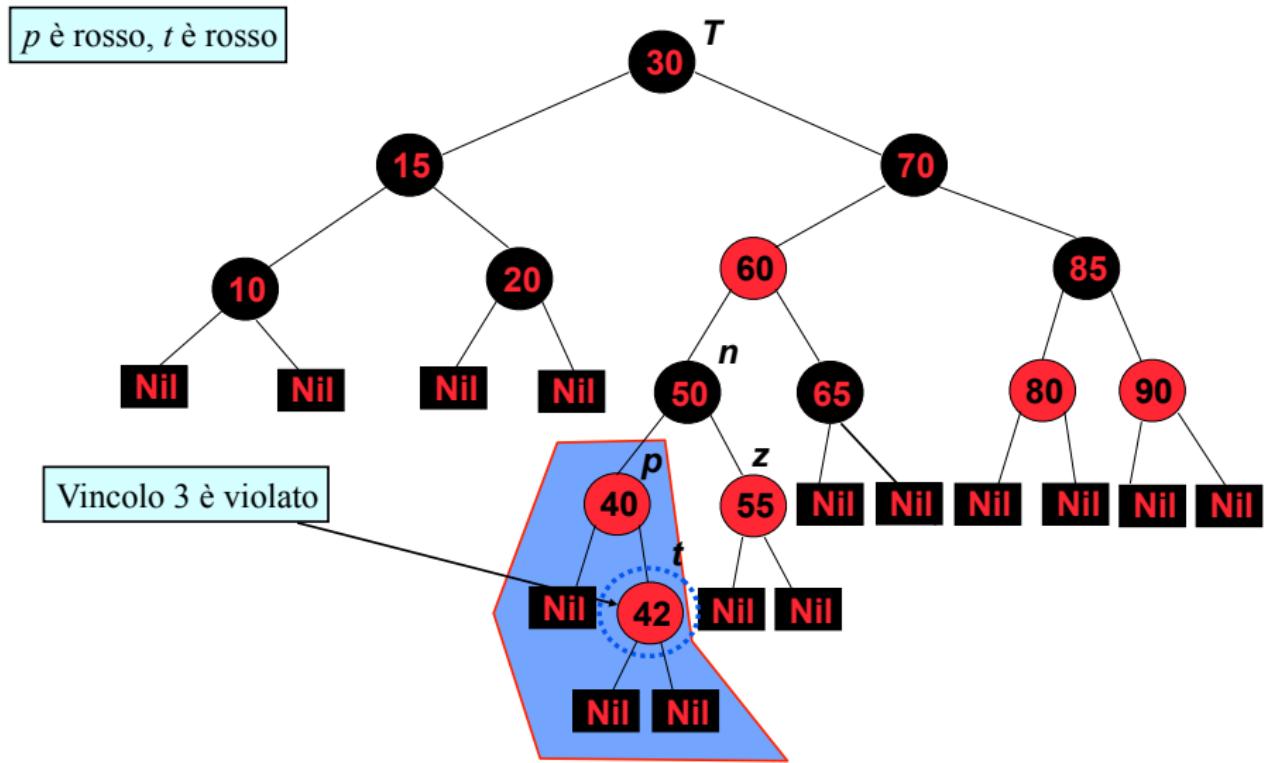
Inserimento – Esempio



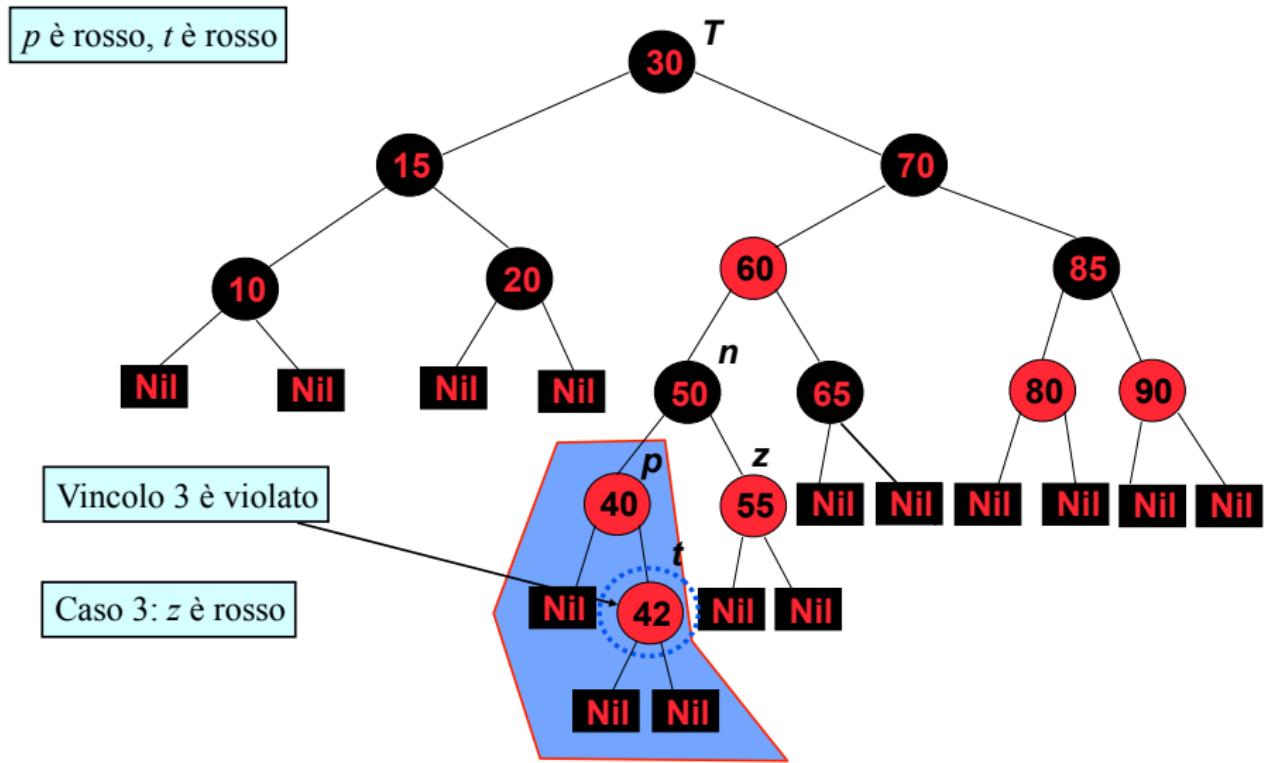
Inserimento – Esempio



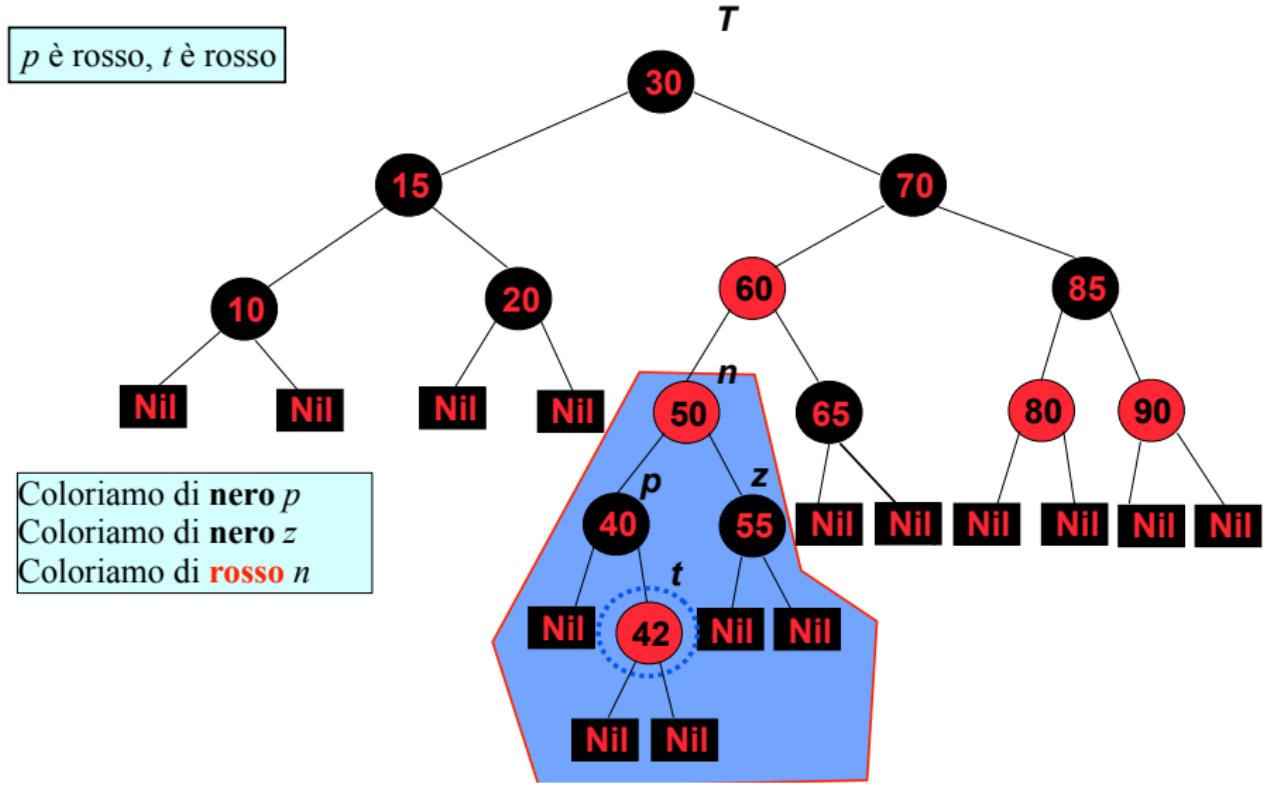
Inserimento – Esempio



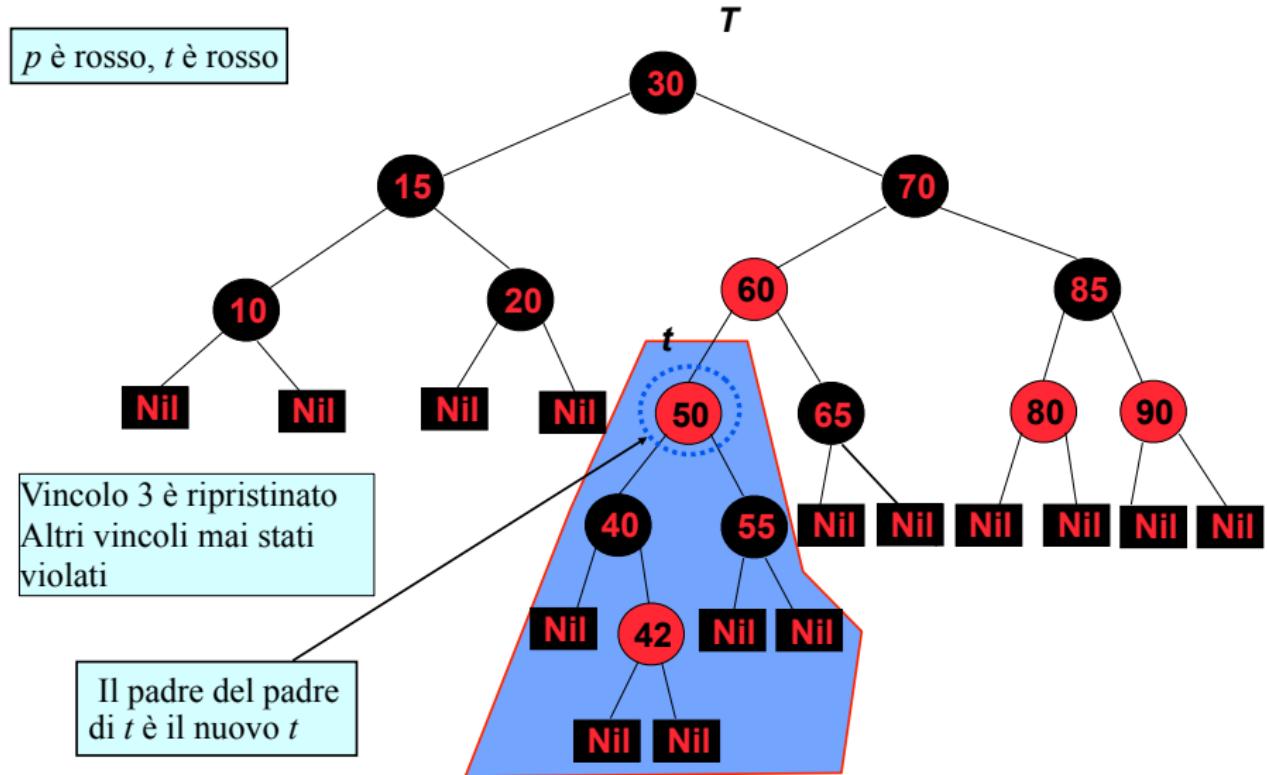
Inserimento – Esempio



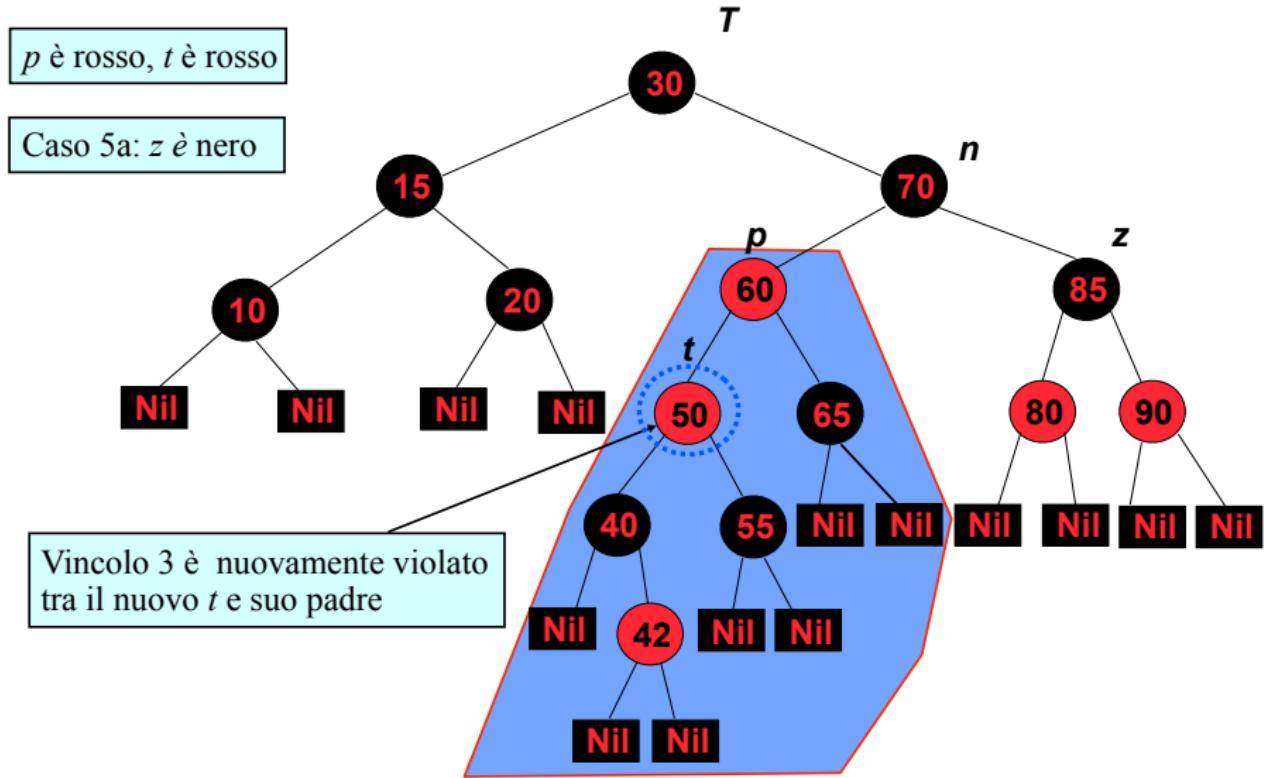
Inserimento – Esempio



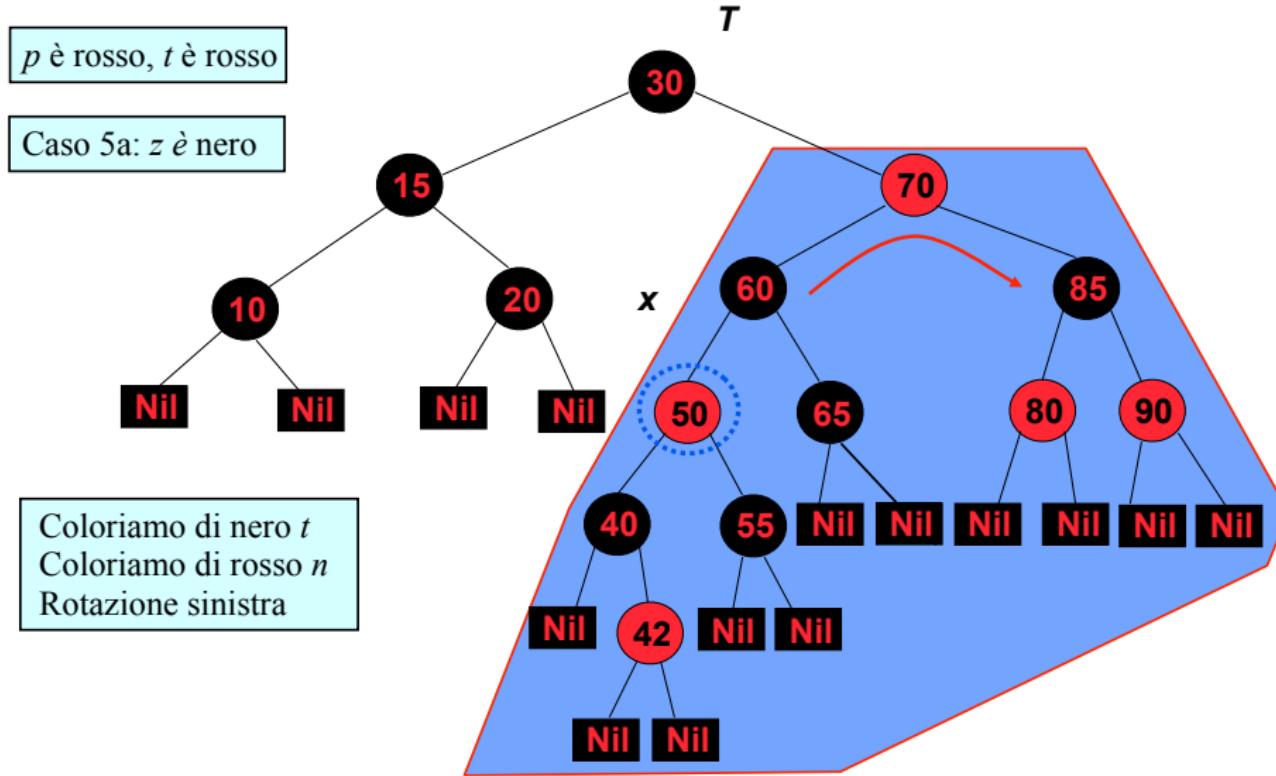
Inserimento – Esempio



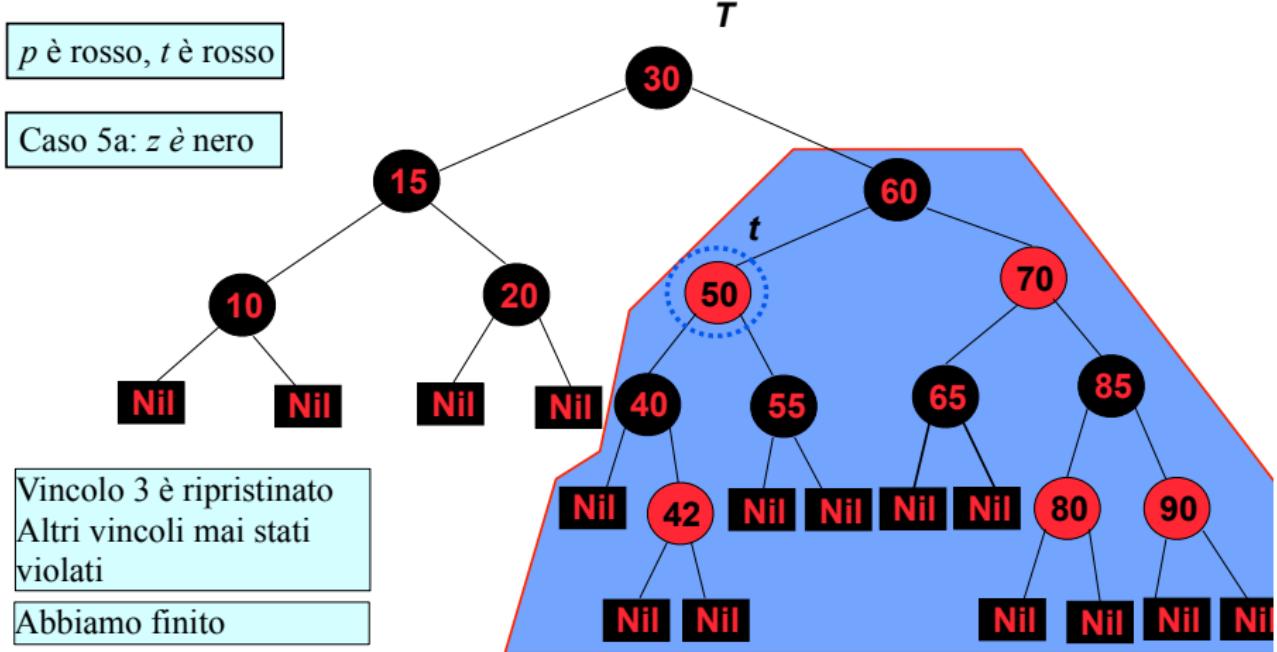
Inserimento – Esempio



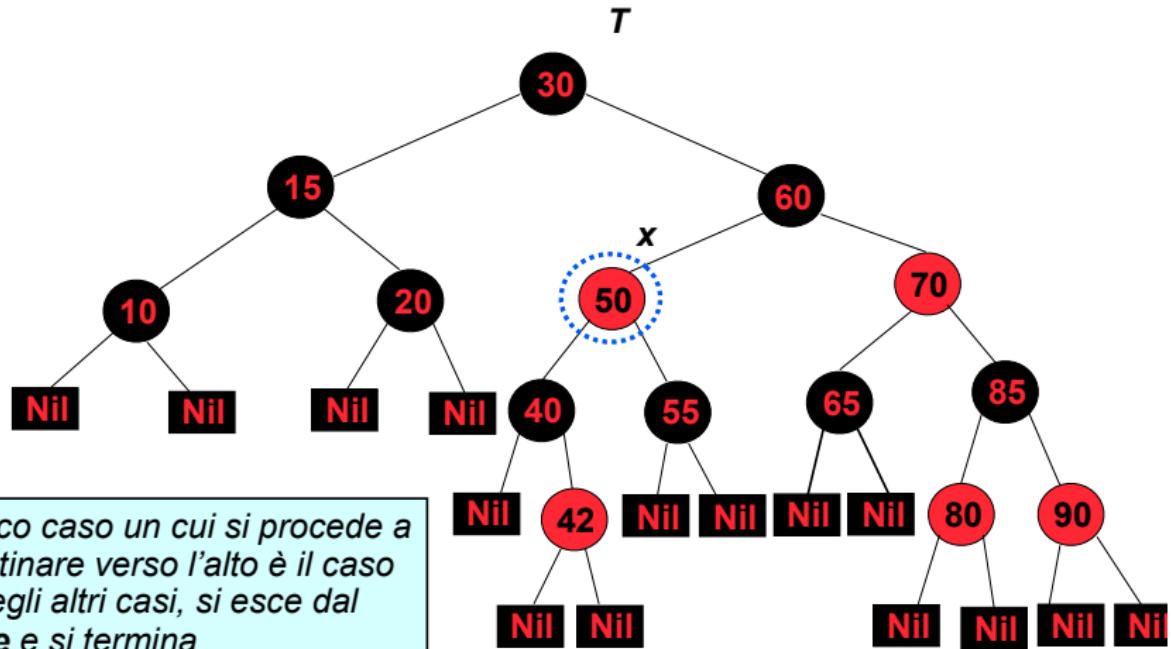
Inserimento – Esempio



Inserimento – Esempio



Inserimento – Esempio



Altezza albero Red-Black

Teorema

In un albero RB, un sottoalbero di radice u contiene $n \geq 2^{bh(u)} - 1$ nodi interni (nodi non foglie **Nil**).

Dimostrazione

Caso base $h = 0$:

- Se $h = 0$, u è una foglia **Nil**
- il sottoalbero con radice u contiene $n \geq 2^{bh(u)} - 1 = 2^0 - 1 = 0$ nodi interni

Altezza albero Red-Black

Teorema

In un albero RB, un sottoalbero di radice u contiene $n \geq 2^{bh(u)} - 1$ nodi interni (nodi non foglie **Nil**).

Dimostrazione

Passo induttivo $h > 1$:

- Allora u è un nodo interno con due figli
- Ogni figlio v di u ha un'altezza nera $bh(v)$ pari a:
 - Se rosso: $bh(u)$
 - Se nero: $bh(u) - 1$
- Per ip. induttiva, ogni figlio ha $\geq 2^{bh(u)-1} - 1$ nodi interni
- Quindi, il n. di nodi interni del sottoalbero con radice u è:
$$n \geq 2 \cdot \left(2^{bh(u)-1} - 1\right) + 1 = 2^{bh(u)} - 2 + 1 = 2^{bh(u)} - 1$$

Altezza albero Red-Black

Teorema

In un albero RB, almeno la metà dei nodi dalla radice ad una foglia deve essere nera.

Dimostrazione

- Per il vincolo ②, se un nodo è rosso, i suoi figli devono essere neri.
- La situazione in cui sono presenti il minor numero di nodi neri è il caso in cui rossi e neri sono alternati
- Quindi, almeno la metà dei nodi deve essere nera.

Altezza albero Red-Black

Teorema

In un albero RB, dati due cammini dalla radice a due foglie, non è possibile che uno sia più lungo del doppio dell'altro.

Dimostrazione

- Per il vincolo ④, ogni cammino da un nodo ad una qualsiasi foglia contiene lo stesso numero di nodi neri.
- Per il Lemma precedente, almeno metà dei nodi in ognuno di questi cammini sono neri.
- Quindi, al limite, uno dei due cammini è costituito da solo nodi neri, mentre l'altro è costituito da nodi neri e rossi alternati.

Altezza albero Red-Black

Teorema

L'**altezza** massima di un albero rosso-nero con n nodi interni è al più $2 \log(n + 1)$.

Dimostrazione

$$\begin{aligned} n \geq 2^{bh(r)} - 1 &\Leftrightarrow n \geq 2^{h/2} - 1 \\ &\Leftrightarrow n + 1 \geq 2^{h/2} \\ &\Leftrightarrow \log(n + 1) \geq h/2 \\ &\Leftrightarrow h \leq 2 \log(n + 1) \end{aligned}$$

Inserimento – Complessità

Complessità totale: $O(\log n)$

- $O(\log n)$ per scendere fino al punto di inserimento
- $O(1)$ per effettuare l'inserimento
- $O(\log n)$ per risalire e “aggiustare” (caso 3)

Nota

- È possibile effettuare una “top-down” insertion
- Si scende fino al punto di inserimento, “aggiustando” l'albero mano a mano
- Si effettua l'inserimento in una foglia

Cancellazione in Alberi Red-Black

- L'algoritmo di cancellazione per alberi Red-Black è costruito sull'algoritmo di cancellazione per alberi binari di ricerca
- Dopo la cancellazione si deve decidere se è necessario ribilanciare o meno
- Le operazioni di ripristino del bilanciamento sono necessarie solo quando il nodo cancellato è nero!
- Perché?

Cancellazione in Alberi Red-Black

- Se il nodo “cancellato” è rosso
 - Altezza nera invariata
 - Non sono stati creati nodi rossi consecutivi
 - La radice resta nera
- Se il nodo “cancellato” è nero
 - Possiamo violare il vincolo ①: la radice può essere un nodo rosso
 - Possiamo violare il vincolo ③: se il padre e uno dei figli del nodo cancellato erano rossi
 - Abbiamo violato il vincolo ④: altezza nera cambiata

L’algoritmo **balanceDelete(T, t)** ripristina la proprietà Red-Black con rotazioni e cambiamenti di colore.

Ci sono 4 casi possibili (e 4 simmetrici)!

Cancellazione in Alberi Red-Black

balanceDelete(TREE T , TREE t)

```

while  $t \neq T$  and  $t.\text{color} = \text{BLACK}$  do
    TREE  $p = t.\text{parent}$                                 % Padre
    if  $t = p.\text{left}$  then
        TREE  $f = p.\text{right}$                             % Fratello
        TREE  $ns = f.\text{left}$                             % Nipote sinistro
        TREE  $nd = f.\text{right}$                            % Nipote destro
        if  $f.\text{color} == \text{RED}$  then                  % (1)
             $p.\text{color} = \text{RED}$ 
             $f.\text{color} = \text{BLACK}$ 
            rotateLeft( $p$ )
            %  $t$  viene lasciato inalterato, quindi si ricade nei casi (2),(3),(4)
        else
            if  $ns.\text{color} == nd.\text{color} == \text{BLACK}$  then          % (2)
                 $f.\text{color} = \text{RED}$ 
                 $t = p$ 
            else if  $ns.\text{color} == \text{RED}$  and  $nd.\text{color} == \text{BLACK}$  then          % (3)
                 $ns.\text{color} = \text{BLACK}$ 
                 $f.\text{color} = \text{RED}$ 
                rotateRight( $f$ )
                %  $t$  viene lasciato inalterato, quindi si ricade nel caso (4)
            else if  $nd.\text{color} == \text{RED}$  then                      % (4)
                 $f.\text{color} = p.\text{color}$ 
                 $p.\text{color} = \text{BLACK}$ 
                 $nd.\text{color} = \text{BLACK}$ 
                rotateLeft( $p$ )
                 $t = T$ 
            else

```

Cancellazione in Alberi Red-Black

La cancellazione è concettualmente complicata, ma efficiente

- Dal caso (1) si passa ad uno dei casi (2), (3), (4)
- Dal caso (2) si torna ad uno degli altri casi, ma **risalendo di un livello l'albero**
- Dal caso (3) si passa al caso (4)
- Nel caso (4) si termina

Complessità

- In altre parole, è possibile visitare al massimo un numero $O(\log n)$ di casi, ognuno dei quali è gestito in tempo $O(1)$

Alberi Red-Black in Popular Culture

Gli alberi RB sono menzionati (correttamente) in un episodio della serie TV canadese "Missing"

Jess: "It was the red door again."

Pollock: "I thought the red door was the storage container."

Jess: "But it wasn't red anymore, it was black."

Antonio: "So red turning to black means what?"

Pollock: "Budget deficits, red ink, black ink."

Antonio: "It could be from a binary search tree. **The red-black tree tracks every simple path from a node to a descendant leaf that has the same number of black nodes.**"

Jess: "Does that help you with the ladies?"

https://en.wikipedia.org/wiki/Red%E2%80%93black_tree#Popular_culture