# 4

# UTILITÀ

In età vittoriana, filosofi ed economisti parlavano dell'"utilità" come dell'indicatore del benessere complessivo di un individuo: si riteneva cioè che l'utilità fosse la misura numerica della felicità di una persona. Partendo da questo concetto, era naturale pensare che i consumatori operino scelte che ne massimizzino l'utilità, cioè che li rendano più felici possibile.

Gli economisti classici, però, non hanno mai descritto effettivamente come l'utilità possa essere misurata. Come si può infatti misurare la "quantità" di utilità associata a scelte diverse? L'utilità di un individuo è uguale a quella di un altro? Che cosa significa dire che avere un pezzo di dolce in più darebbe a un consumatore un'utilità due volte superiore a quella fornita da una carota di più? Il concetto di utilità ha un qualche significato indipendente, oltre a essere ciò che gli individui massimizzano?

A causa di questi problemi concettuali, gli economisti hanno abbandonato la precedente visione dell'utilità come misura della felicità; al contrario, la teoria del comportamento del consumatore è stata riformulata interamente nei termini delle **preferenze del consumatore** e l'utilità viene interpretata solamente come *un modo di descrivere le preferenze*.

Gli economisti hanno iniziato gradualmente a riconoscere che l'elemento essenziale del comportamento di scelta è se un paniere abbia un'utilità maggiore di un altro — non importa quanto maggiore. Inizialmente le preferenze erano definite in termini di utilità: dire che un paniere $(x_1, x_2)$ era preferito a un paniere $(y_1, y_2)$, significava che il paniere-x aveva un'utilità superiore a quella del paniere-y. Ora, invece, tendiamo a pensare in modo opposto: le *preferenze* del consumatore sono sufficienti per analizzare la scelta, e l'utilità è semplicemente un modo per rappresentare le preferenze.

Una **funzione di utilità** è un modo per associare un numero a ogni possibile paniere di consumo, tale che ai panieri preferiti siano assegnati numeri più elevati. Un paniere $(x_1, x_2)$ è preferito a un paniere $(y_1, y_2)$ se, e solo se, l'utilità di $(x_1, x_2)$ è superiore all'utilità di $(y_1, y_2)$: formalmente, $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$ se, e solo se, $u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$.

La caratteristica fondamentale della funzione di utilità è il modo in cui *ordina* i panieri di beni. I valori della funzione di utilità sono importanti solamente in quanto *ordinano* i diversi panieri di consumo, o, in altri termini, non è importante l'esatto valore della differenza tra l'utilità di due panieri. L'utilità ha quindi un significato esclusivamente **ordinale**.

Consideriamo, ad esempio, la Tabella 4.1, dove sono rappresentati diversi modi di assegnare l'utilità a tre panieri di beni, ordinati però tutti nello stesso modo. In questo esempio, il consumatore preferisce A a B e B a C: tutte le assegnazioni rappresentano funzioni di utilità accettabili per descrivere lo stesso tipo di preferenza, poiché ad A viene sempre assegnato un numero più elevato che a B, al quale, a sua volta, viene assegnato un numero più elevato che a C.

| Paniere | $U_1$ | $U_2$ | $U_3$ |
|---|---|---|---|
| A | 3 | 17 | −1 |
| B | 2 | 10 | −2 |
| C | 1 | 0,002 | −3 |

**Tabella 4.1** **Modi differenti di assegnare l'utilità**

Poiché è rilevante soltanto l'ordinamento dei panieri, vi possono essere diversi modi di assegnare loro valori di utilità. Quando troviamo un modo per assegnare tali valori di utilità, ne abbiamo anche infiniti altri. Se $u(x_1, x_2)$ rappresenta un modo per assegnare valori di utilità ai panieri $(x_1, x_2)$, allora moltiplicare $u(x_1, x_2)$ per 2 (o per qualsiasi altro numero positivo) è un modo altrettanto accettabile.

La moltiplicazione per 2 è un esempio di **trasformazione monotòna**[1], cioè di un modo per trasformare un insieme di numeri in un altro mantenendone invariato l'ordine.

Rappresentiamo una trasformazione monotona con la funzione $f(u)$, che trasforma ciascun numero $u$ in un altro numero $f(u)$ in modo da preservare l'ordine, nel

[1] Si pronuncia monotòna e *non* monòtona. Di regola, verrà scritto d'ora in poi senza accento.

senso che se $u_1 > u_2$, allora $f(u_1) > f(u_2)$. Una trasformazione monotona e una funzione monotona sono essenzialmente la stessa cosa.

Esempi di trasformazioni monotone si ottengono moltiplicando la funzione per un numero positivo (per esempio, $f(u) = 3u$), sommandovi un numero qualsiasi (per esempio, $f(u) = u + 17$), elevando $u$ a una potenza dispari (per esempio, $f(u) = u^3$), e così via[2].

Si può misurare il saggio di variazione di $f(u)$ al variare di $u$ dividendo la variazione di $f$ in corrispondenza di due valori di $u$ per la variazione di $u$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta u} = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1}.$$

In seguito a una trasformazione monotona, $f(u_2) - f(u_1)$ ha sempre lo stesso segno di $u_2 - u_1$. Una funzione monotona ha pertanto sempre un saggio di variazione positivo: ciò significa che il grafico di una funzione monotona avrà sempre inclinazione positiva, come rappresentato nella Figura 4.1A.

Se $f(u)$ è una trasformazione monotona *qualsiasi* di una funzione di utilità che rappresenta alcune particolari preferenze, allora anche $f(u(x_1, x_2))$ è una funzione di utilità che rappresenta le stesse preferenze.

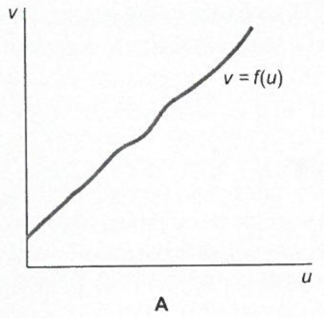
Questa conclusione deriva dai seguenti enunciati:

1. Se $u(x_1, x_2)$ rappresenta alcune particolari preferenze, allora sarà $u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$ se, e solo se, $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$.
2. Ma se $f(u)$ è una trasformazione monotona, allora $u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$ se, e solo se, $f(u(x_1, x_2)) > f(u(y_1, y_2))$.
3. Perciò $f(u(x_1, x_2)) > f(u(y_1, y_2))$ se, e solo se, $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$, e quindi la funzione $f(u)$ rappresenta le preferenze esattamente come la funzione di utilità di partenza $u(x_1, x_2)$.

Riassumiamo questo ragionamento con il principio seguente: *una trasformazione monotona di una funzione di utilità corrisponde a una funzione di utilità che rappresenta le stesse preferenze della funzione di utilità di partenza*.

In termini geometrici, una funzione di utilità è un'assegnazione di valori alle curve di indifferenza: poiché ciascun paniere posto su una curva di indifferenza ha la stessa utilità, una funzione di utilità è un modo di assegnare valori alle diverse curve di indifferenza tale che alle curve di indifferenza più alte siano assegnati valori più elevati. Da questo punto di vista, una trasformazione monotona è semplicemente un modo di rinumerare le curve di indifferenza. Fin tanto che alle curve di indifferenza che contengono panieri maggiormente preferiti siano assegnati numeri più elevati che alle curve di indifferenza che contengono panieri meno preferiti, la nuova numerazione rappresenta le medesime preferenze.

[2] Quella che chiamiamo "trasformazione monotona" è chiamata più precisamente "trasformazione monotona positiva", per distinguerla dalla "trasformazione monotona negativa" che *inverte* l'ordine dei numeri. Le trasformazioni monotone sono chiamate, talvolta, "trasformazioni monòtone", ma ciò non sembra giusto, considerato il loro grande interesse.



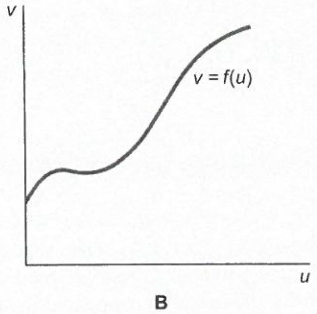




**Figura 4.1** **Trasformazione monotona positiva.** Il quadro A rappresenta una funzione monotona, cioè una funzione sempre crescente. Il quadro B rappresenta una funzione *non* monotona, poiché presenta tratti crescenti e decrescenti.

## 4.1 Utilità cardinale

Le teorie che attribuiscono un significato alla grandezza dell'utilità sono note come **teorie dell'utilità cardinale**: esse si fondano sull'ipotesi che la differenza tra le utilità di due panieri di beni abbia qualche significato.

Esiste un semplice criterio per sapere se una persona preferisce un paniere di beni a un altro: gli offriamo di scegliere tra i due e vediamo quale sceglie. In questo modo sappiamo anche come assegnare un'utilità ordinale a due panieri di beni: è sufficiente assegnare al paniere scelto un'utilità maggiore che a quello rifiutato. Tutte le assegnazioni di questo tipo saranno funzioni di utilità. Abbiamo pertanto un criterio operativo per determinare se per un individuo un paniere abbia un'utilità maggiore di un altro.

Ma come possiamo capire se a un individuo un paniere piace due volte più di un altro? Come potete perfino *voi* dire se un paniere vi piaccia due volte più di un altro?

Si potrebbero proporre varie definizioni di questo tipo di assegnazione: un paniere mi piace due volte più di un altro se sono disposto a pagarlo due volte di più, oppure un paniere mi piace due volte più di un altro se sono disposto a correre due volte più lontano per averlo, oppure aspettare due volte più a lungo, oppure scommettere con una puntata doppia per ottenerlo. Non vi è nulla di sbagliato in queste definizioni, poiché ognuna consente di assegnare livelli di utilità significativi. Tuttavia, sebbene tutte le definizioni precedenti sembrino plausibili, nessuna è effettivamente convincente.

In ogni caso, per dire se sarà scelto un paniere oppure un altro, dobbiamo solamente sapere qual è preferito, cioè a quale corrisponde l'utilità più elevata: sapere quanto sia più elevata non aggiunge nulla alla descrizione della scelta. Poiché per descrivere la scelta non è necessario utilizzare l'utilità cardinale, e poiché non esiste comunque nessun modo convincente di assegnare le utilità cardinali, ci limiteremo a prendere in considerazione l'utilità ordinale.

## 4.2 Costruzione di una funzione di utilità

Vediamo ora se esiste effettivamente un modo di assegnare le utilità ordinali. Dato un ordinamento delle preferenze, riusciremo sempre a trovare una funzione di utilità che ordini i panieri nello stesso modo? Esiste una funzione di utilità che descriva qualsiasi ordinamento ragionevole delle preferenze?

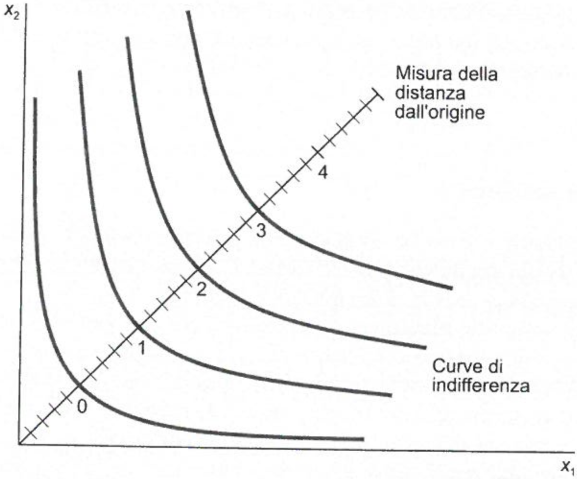



**Figura 4.2** **Funzione di utilità e curve di indifferenza.** Tracciamo una diagonale e assegniamo un valore a ciascuna curva di indifferenza a seconda di quanto dista dall'origine, misurando la distanza lungo la retta.

Non tutti i tipi di preferenze possono essere rappresentati da una funzione di utilità. Supponiamo, per esempio, che un individuo abbia preferenze non transitive tali che $A \succ B \succ C \succ A$: una funzione di utilità relativa a queste preferenze dovrebbe essere costituita dai numeri $u(A)$, $u(B)$ e $u(C)$ tali che $u(A) > u(B) > u(C) > u(A)$. Ciò è impossibile.

Ma se eliminiamo i casi perversi, come quello delle preferenze intransitive, saremo sempre in grado di trovare una funzione di utilità che rappresenti le preferenze: illustreremo di seguito un procedimento, e nel Capitolo 14 ne verrà presentato un altro.

Supponiamo di avere una rappresentazione delle curve di indifferenza, come nella Figura 4.2. Sappiamo che una funzione di utilità è un modo per assegnare valori alle curve di indifferenza tali che a curve di indifferenza più alte corrispondano numeri più elevati.

Per ottenere questo ordinamento è sufficiente tracciare la diagonale rappresentata in figura e contrassegnare ogni curva di indifferenza a seconda della sua distanza dall'origine misurata lungo tale retta.

Come possiamo stabilire che questa è una funzione di utilità? Non è difficile capire che se le preferenze sono monotone, la retta che passa per l'origine deve intersecare ogni curva di indifferenza esattamente una volta. A ciascun paniere è associato quindi un valore, e ai panieri posti sulle curve di indifferenza più alte sono assegnati valori più elevati: questo è sufficiente per avere una funzione di utilità.

Quello appena illustrato è uno dei modi di assegnare valori alle curve di indifferenza, o, almeno, lo è nel caso di preferenze monotone. Non sarà sempre il modo più semplice, ma, perlomeno, dimostra che il concetto di utilità ordinale è in generale valido: infatti quasi tutti i tipi di preferenze "ragionevoli" possono essere rappresentati da funzioni di utilità.

## 4.3 Alcuni esempi di funzioni di utilità

Nel Capitolo 3 abbiamo descritto alcuni esempi di preferenze e le curve di indifferenza che le rappresentano: queste preferenze possono essere rappresentate anche da funzioni di utilità. Data una funzione di utilità $u(x_1, x_2)$, è relativamente semplice tracciare le curve di indifferenza: basta rappresentare su un grafico tutti i punti $(x_1, x_2)$ tali che $u(x_1, x_2)$ sia costante. In termini formali, l'insieme di tutti i punti $(x_1, x_2)$ tali che $u(x_1, x_2)$ sia costante è chiamato **insieme di livello:** in corrispondenza di ciascun valore della costante si ottiene una diversa curva di indifferenza.

### ESEMPIO: Curve di indifferenza e utilità

Supponiamo che la funzione di utilità sia $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Come saranno le curve di indifferenza?

Sappiamo che una tipica curva di indifferenza è l'insieme di tutti i punti $x_1$ e $x_2$ tali che $k = x_1 x_2$, ove $k$ è una costante qualsiasi. Risolvendo per $x_2$ in funzione di $x_1$, otteniamo:

$$x_2 = \frac{k}{x_1}.$$ — tipo iperbole

La curva è rappresentata nella Figura 4.3 per $k = 1, 2, 3 \cdots$.

Consideriamo un altro esempio. Supponiamo che $v(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ sia la funzione di utilità. Come saranno in questo caso le curve di indifferenza? Sappiamo che:

$$v(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 = (x_1 x_2)^2 = u(x_1, x_2)^2.$$

Quindi la funzione di utilità $v(x_1, x_2)$ è uguale al quadrato della funzione di utilità $u(x_1, x_2)$. Poiché $u(x_1, x_2)^2$ non può avere valori negativi, ne consegue

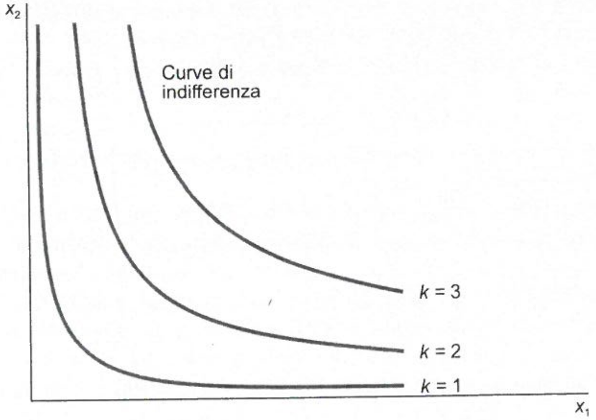



**Figura 4.3** **Curve di indifferenza.** Le curve di indifferenza $k = x_1x_2$ per valori diversi di $k$.

che $v(x_1, x_2)$ è una trasformazione monotona della precedente funzione di utilità $u(x_1, x_2)$. Ciò significa che la funzione di utilità $v(x_1, x_2) = x_1^2x_2^2$ deve dare curve di indifferenza della stessa forma di quelle tracciate nella Figura 4.3. I valori associati alle curve di indifferenza saranno diversi — invece che 1, 2, 3, $\cdots$ avremo ora 1, 4, 9, $\cdots$ — ma l'insieme dei panieri per i quali $v(x_1, x_2) = 9$ è esattamente uguale all'insieme dei panieri per i quali $u(x_1, x_2) = 3$. Quindi $v(x_1, x_2)$ descrive esattamente le stesse preferenze di $u(x_1, x_2)$, poiché *ordina* tutti i panieri allo stesso modo.

L'operazione inversa, cioè trovare una funzione di utilità che rappresenti delle curve di indifferenza, è alquanto più difficile: è comunque possibile procedere in due modi. Il primo è formale: date le curve di indifferenza, vogliamo trovare una funzione che sia costante lungo ciascuna curva di indifferenza e che assegni valori più elevati a curve di indifferenza più alte.

Il secondo è più intuitivo: data una descrizione delle preferenze, cerchiamo di immaginare che cosa il consumatore stia cercando di massimizzare, quale combinazione di beni corrisponde cioè alla scelta del consumatore. Per ora tutto ciò può apparire vago, ma sarà più chiaro dopo che avremo discusso alcuni esempi.

## Perfetti sostituti

Ricordiamo l'esempio delle matite rosse e blu: il consumatore era interessato unicamente al numero totale di matite. È quindi naturale misurare l'utilità per mezzo del numero totale di matite. Scegliamo provvisoriamente la funzione di utilità $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Ci chiediamo ora se tale funzione è costante lungo le curve di indifferenza e assegna numeri più elevati ai panieri preferiti. Poiché la risposta a entrambe le domande è affermativa, ciò significa che la funzione precedente è una funzione di utilità.

Naturalmente non è l'unica funzione di utilità che possiamo usare. Potremmo usare anche il *quadrato* del numero delle matite: anche la funzione di utilità $v(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ rappresenterà le preferenze nel caso di perfetti sostituti, così come qualsiasi altra trasformazione monotona di $u(x_1, x_2)$.

Consideriamo ora il caso in cui il consumatore è disposto a sostituire i due beni in una proporzione diversa da quella uno a uno. Supponiamo, per esempio, che il consumatore richieda *due* unità del bene 2 per rinunciare a una unità del bene 1. Ciò significa che per lui il bene 1 vale *due volte* il bene 2. La funzione di utilità assume pertanto la forma $u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$. Si noti che a questa funzione di utilità corrispondono curve di indifferenza con inclinazione $-2$.

In generale, le preferenze relative ai perfetti sostituti possono essere rappresentate da una funzione di utilità del tipo

$$\boxed{u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2}$$

dove $a$ e $b$ sono numeri positivi che rappresentano il "valore" che il consumatore attribuisce ai beni 1 e 2. Si noti che l'inclinazione di una tipica curva di indifferenza è uguale a $-a/b$.

## Perfetti complementi

Si tratta del caso delle scarpe sinistra e destra. In questo caso al consumatore interessa soltanto il numero di *paia* di scarpe che possiede, ed è perciò naturale scegliere come funzione di utilità il numero delle paia di scarpe. Il numero di paia di scarpe che il consumatore possiede corrisponde al *minimo* tra il numero di scarpe destre, $x_1$, e sinistre, $x_2$, che possiede. La funzione di utilità assume, nel caso dei perfetti complementi, la forma $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$.

Infatti, dato un paniere di beni (10,10), se aggiungiamo un'unità addizionale del bene 1 otterremo il paniere (11,10), che lascerà il consumatore sulla stessa curva di indifferenza, perché $\min\{10, 10\} = \min\{11, 10\} = 10$.

Quindi la funzione di utilità $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ è una possibile rappresentazione del caso dei perfetti complementi: come sempre queste preferenze possono essere descritte anche da una qualsiasi altra trasformazione monotona.

Consideriamo ora il caso in cui due beni vengano consumati in una proporzione diversa da quella uno a uno. Supponiamo per esempio che il consumatore desideri sempre due cucchiaini di zucchero per ciascuna tazza di tè.

Se sono disponibili $x_1$ tazze di tè e $x_2$ cucchiaini di zucchero, allora il numero di tazze di tè adeguatamente zuccherate sarà $\min\{x_1, \frac{1}{2}x_2\}$.

Poiché questo risultato può non apparire immediatamente chiaro ci soffermeremo ad esaminarlo. Se le tazze di tè sono più della metà dei cucchiaini di zucchero disponibili, ovviamente non sarà possibile mettere due cucchiaini di zucchero in ogni tazza, ma si potranno zuccherare adeguatamente soltanto $\frac{1}{2}x_2$ tazze di tè. (Potete sostituire dei numeri a $x_1$ e a $x_2$ per convincervene).

Naturalmente ogni trasformazione monotona di questa funzione di utilità descriverà le stesse preferenze. Se per esempio la moltiplichiamo per 2, per eliminare la frazione, otteniamo la funzione di utilità $u(x_1, x_2) = \min\{2x_1, x_2\}$.

In generale, una funzione di utilità che descrive le preferenze relative ai perfetti complementi ha la forma

$$\boxed{u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\},}$$

dove $a$ e $b$ sono numeri positivi che rappresentano la proporzione nella quale i beni vengono consumati.

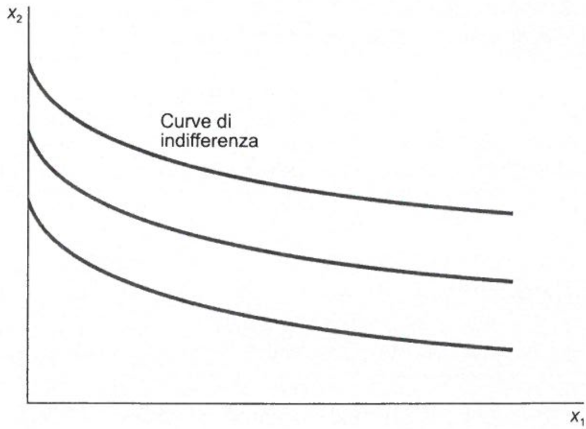



**Figura 4.4** **Preferenze quasi-lineari.** Ciascuna curva corrisponde alla "traslazione verticale" della stessa curva di indifferenza.

## Preferenze quasi-lineari

Ecco un tipo di preferenze che non abbiamo ancora preso in considerazione. Supponiamo che le curve di indifferenza di un consumatore corrispondano ciascuna alla traslazione verticale dell'altra, come nella Figura 4.4: tutte le curve sono "traslazioni verticali" di una sola curva di indifferenza.

Ne consegue che l'equazione di una curva di indifferenza avrà la forma $x_2 = k - v(x_1)$, ove $k$ è una costante diversa per ciascuna curva. L'altezza di ogni curva di indifferenza è una funzione di $x_1$, $-v(x_1)$, più una costante $k$. A valori più elevati di $k$ corrispondono curve di indifferenza più alte (il segno negativo è convenzionale e ne spiegheremo il significato più oltre).

In questo caso il modo più naturale di ordinare le curve è impiegare $k$, ovvero l'altezza della curva di indifferenza misurata lungo l'asse verticale.

Ponendo l'utilità uguale a $k$ e risolvendo per $k$, otteniamo:

$$u(x_1, x_2) = k = v(x_1) + x_2.$$

In questo caso la funzione di utilità è lineare per il bene 2, ma (eventualmente) non lineare per il bene 1, ed è perciò detta **utilità quasi-lineare**, che significa "parzialmente lineare". Esempi di utilità quasi-lineare sono $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$, oppure $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$. Le funzioni di utilità quasi-lineari non sono particolarmente verosimili, ma il loro impiego rende spesso più semplici i calcoli, e quindi saranno usate in seguito in numerosi esempi.

## Preferenze Cobb-Douglas

Un'altra funzione di utilità usata comunemente è la funzione di utilità Cobb-Douglas:

$$\boxed{u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d}$$

ove $c$ e $d$ sono numeri positivi[3].

Impiegheremo la funzione di utilità Cobb-Douglas in numerosi esempi. Le preferenze rappresentate dalla funzione di utilità Cobb-Douglas hanno in generale la forma riprodotta nella Figura 4.5. La Figura 4.5A rappresenta le curve di indifferenza nel caso in cui $c = 1/2$, $d = 1/2$, mentre la Figura 4.5B rappresenta il caso in cui $c = 1/5$, $d = 4/5$. Si noti come differenti valori dei parametri $c$ e $d$ diano luogo a forme diverse delle curve di indifferenza.

Va sottolineato che le curve di indifferenza Cobb-Douglas godono delle proprietà di convessità e monotonicità allo stesso modo di quelle esaminate nel Capitolo 3. Le preferenze Cobb-Douglas forniscono l'esempio tipico di curve di indifferenza "well-behaved", e in effetti la formula che le rappresenta è una delle più semplici espressioni algebriche che generi preferenze "well-behaved". Naturalmente, una trasformazione monotona della funzione di utilità Cobb-Douglas rappresenta esattamente le stesse preferenze: vediamone ora alcuni esempi.

Per prima cosa, se consideriamo il logaritmo naturale dell'utilità, il prodotto dei termini diventerà una somma, e quindi otterremo:

$$v(x_1, x_2) = \ln(x_1^c x_2^d) = c \ln x_1 + d \ln x_2.$$

Le curve di indifferenza di questa funzione di utilità sono le stesse della funzione Cobb-Douglas di partenza, poiché il logaritmo è una trasformazione monotona. (A proposito dei logaritmi si veda l'Appendice matematica).

[3] Paul Douglas è un economista di questo secolo. Ha lavorato presso la University of Chicago e, in seguito, è divenuto senatore degli Stati Uniti. Charles Cobb ha lavorato come matematico presso l'Amherst College. La forma funzionale Cobb-Douglas fu proposta originariamente come funzione di produzione.

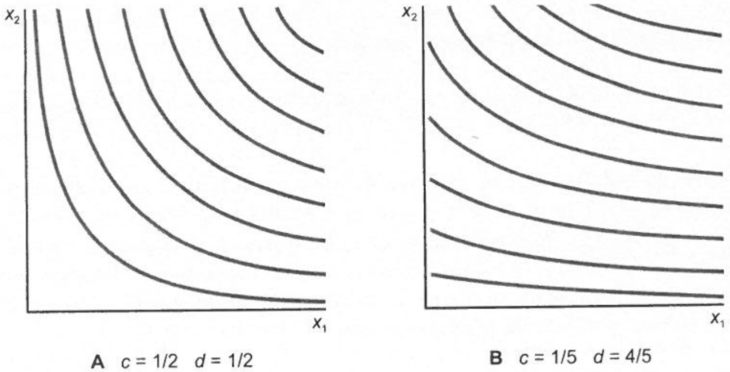



**Figura 4.5** **Curve di indifferenza Cobb-Douglas.** Il quadro A rappresenta il caso in cui $c = 1/2$, $d = 1/2$ e il quadro B il caso in cui $c = 1/5$, $d = 4/5$.

Supponiamo ora che una funzione di utilità abbia la forma

$$v(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d.$$

Elevando l'utilità alla potenza $1/(c+d)$, otteniamo:

$$x_1^{\frac{c}{c+d}} x_2^{\frac{d}{c+d}}.$$

Se definiamo

$$a = \frac{c}{c+d}$$

possiamo scrivere la nostra funzione di utilità

$$v(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}.$$

Ciò significa che è sempre possibile impiegare una trasformazione monotona della funzione di utilità Cobb-Douglas tale che la somma degli esponenti sia uguale a 1. A questo fatto daremo più avanti un'interessante interpretazione.

Le funzioni di utilità Cobb-Douglas possono essere espresse in una grande varietà di modi ed è importante saperne riconoscere le varie forme perché saranno utili per illustrare vari esempi di fenomeni economici.

## 4.4 Utilità marginale

Prendiamo in esame il caso di un consumatore che consumi un paniere di beni $(x_1, x_2)$. Come varia l'utilità di questo consumatore se aumentiamo di poco la quantità del bene 1? Tale saggio di variazione è chiamato **utilità marginale** del bene 1, $MU_1$, e può essere visto come il rapporto

$$\boxed{MU_1 = \frac{\Delta U}{\Delta x_1} = \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1}}$$

che misura il saggio di variazione dell'utilità ($\Delta U$) associato ad una variazione molto piccola della quantità del bene 1 ($\Delta x_1$). Va sottolineato che la quantità del bene 2 è mantenuta costante[4].

Questa definizione suggerisce che, per calcolare la variazione dell'utilità associata a una piccola variazione del consumo del bene 1, è sufficiente moltiplicare la variazione del consumo per l'utilità marginale del bene:

$$\Delta U = MU_1 \Delta x_1.$$

L'utilità marginale del bene 2 viene definita in modo analogo:

$$MU_2 = \frac{\Delta U}{\Delta x_2} = \frac{u(x_1, x_2 + \Delta x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_2}.$$

Si noti anche qui che quando calcoliamo l'utilità marginale del bene 2, manteniamo costante la quantità del bene 1. La variazione dell'utilità associata alla variazione del consumo del bene 2 è rappresentata dalla formula

$$\Delta U = MU_2 \Delta x_2.$$

È importante rendersi conto che la grandezza dell'utilità marginale dipende dalla grandezza dell'utilità e quindi dal modo scelto per misurarla. Se moltiplicassimo l'utilità per 2, anche l'utilità marginale raddoppierebbe: avremmo ancora una funzione di utilità valida poiché rappresenterebbe le stesse preferenze, ma la sua scala sarebbe diversa.

Si noti che è impossibile derivare l'utilità marginale dal comportamento di scelta di un consumatore. Il comportamento di scelta offre soltanto informazioni sul modo in cui un consumatore *ordina* panieri diversi di beni. L'utilità marginale dipende dalla particolare funzione di utilità che usiamo per rappresentare l'ordine delle preferenze e la sua grandezza non ha alcun significato particolare. Tuttavia, si dà il caso che l'utilità marginale possa essere impiegata per calcolare qualcosa di significativo rispetto al comportamento degli individui, come vedremo nel prossimo paragrafo.

## 4.5 Utilità marginale e MRS

Possiamo calcolare il saggio marginale di sostituzione per mezzo di una funzione di utilità $u(x_1, x_2)$. Nel Capitolo 3 abbiamo visto che il saggio marginale di sostituzione

[4] Si veda l'appendice a questo capitolo per un trattamento dell'utilità marginale in termini di calcolo differenziale.

(MRS) misura l'inclinazione della curva di indifferenza in corrispondenza di un dato paniere di beni e può essere interpretato come il saggio al quale un consumatore è disposto a sostituire il bene 2 con il bene 1.

Questo ci consente di calcolarlo immediatamente. Prendiamo in esame una variazione nel consumo di ciascun bene $(\Delta x_1, \Delta x_2)$ che mantenga costante l'utilità e, pertanto, consenta al consumatore di spostarsi lungo la curva di indifferenza. Dobbiamo quindi avere:

$$MU_1 \Delta x_1 + MU_2 \Delta x_2 = \Delta U = 0.$$

Risolvendo rispetto all'inclinazione della curva di indifferenza otteniamo:

$$\boxed{\text{MRS} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{MU_1}{MU_2}} \tag{4.1}$$

(Va notato, per evitare confusioni, che nel membro di sinistra 2 sta sopra 1, mentre in quello di destra 1 è sopra 2).

L'MRS ha segno negativo, poiché se si ottiene una quantità maggiore del bene 1 si dovrà avere una quantità *minore* del bene 2 per mantenere lo stesso livello di utilità. Tuttavia, per semplicità, ne considereremo il valore assoluto, adottando questa convenzione finché sarà possibile.

Un aspetto interessante del calcolo del MRS è che lo si può misurare osservando il comportamento effettivo di un individuo. È sufficiente determinare il saggio di scambio in corrispondenza del quale questi non trova più vantaggioso scambiare ulteriormente, come si è visto nel Capitolo 3.

La funzione di utilità e, di conseguenza, la funzione di utilità marginale, non è determinata in modo univoco: ogni trasformazione monotona di una funzione di utilità dà luogo a una funzione di utilità ugualmente valida.

Se moltiplichiamo l'utilità per 2, per esempio, anche l'utilità marginale raddoppia: la grandezza della funzione di utilità marginale dipende, pertanto, dalla scelta arbitraria della funzione di utilità. Essa non dipende cioè soltanto dal comportamento, ma dalla funzione di utilità impiegata per descriverlo.

Dal *rapporto* delle utilità marginali otteniamo tuttavia una grandezza osservabile, cioè il saggio marginale di sostituzione. Il rapporto tra le utilità marginali è indipendente dalle trasformazioni della funzione di utilità.

Osserviamo che cosa avviene se moltiplichiamo l'utilità per 2. Il saggio marginale di sostituzione diviene

$$\text{MRS} = -\frac{2MU_1}{2MU_2}.$$

Semplificando, l'MRS rimane invariato.

Ciò avviene anche quando consideriamo una qualsiasi trasformazione monotona di una funzione di utilità. Una trasformazione monotona equivale infatti a modificare le assegnazioni dei valori delle curve di indifferenza e il calcolo del saggio marginale di sostituzione riguarda spostamenti lungo una data curva di indifferenza. Sebbene le utilità marginali varino in seguito a trasformazioni monotone, il *rapporto* tra le utilità marginali è indipendente dal modo scelto per rappresentare le preferenze.

## 4.6 Utilità relative al pendolarismo

Le funzioni di utilità rappresentano, fondamentalmente, dei modi per descrivere la scelta: se viene scelto un paniere di beni $X$ quando è disponibile un paniere di beni $Y$, allora $X$ deve avere un'utilità maggiore di $Y$. Dall'esame delle scelte dei consumatori, possiamo cioè stimare una funzione di utilità che ne descriva il comportamento.

Questo concetto è stato ampiamente usato nel campo dell'economia dei trasporti per studiare il comportamento dei pendolari. Nella maggior parte delle grandi città i pendolari possono scegliere di usare i trasporti pubblici oppure recarsi al lavoro in automobile. Si può immaginare che ciascuna alternativa sia rappresentata da una combinazione di elementi diversi, quali la durata del viaggio, la durata dell'attesa, la spesa, la comodità, e così via. Indichiamo con $x_1$ la durata del viaggio per ciascun tipo di trasporto, con $x_2$ là durata dell'attesa, ecc.

Se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rappresenta, ad esempio, i valori di $n$ caratteristiche diverse del trasporto privato e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ rappresenta i valori delle stesse caratteristiche per il trasporto pubblico, possiamo considerare un modello in cui il consumatore decida di usare l'automobile oppure l'autobus a seconda che preferisca un paniere oppure l'altro.

Supponiamo più precisamente che le preferenze del consumatore medio per le caratteristiche dei due panieri possano essere rappresentate da una funzione di utilità della forma:

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

ove i coefficienti $\beta_1$, $\beta_2$, e così via, sono parametri ignoti. Naturalmente, ogni trasformazione monotona di questa funzione descriverebbe il comportamento di scelta ma, da un punto di vista statistico, è più semplice usare una forma lineare.

Supponiamo ora di esaminare un certo numero di consumatori che debbano scegliere tra l'autobus e l'automobile, tenendo conto dei tempi, dei costi, e così via. Possiamo utilizzare tecniche statistiche per trovare i valori dei coefficienti $\beta_i$ per $i = 1, \ldots, n$ che meglio esprimono il comportamento di scelta di un insieme di consumatori; queste tecniche consentono quindi di stimare la funzione di utilità dei diversi mezzi di trasporto.

Uno studio riporta una funzione di utilità del tipo[5]

$$U = (TW, TT, C) = -0,147TW - 0,0411TT - 2,24C \qquad (4.2)$$

ove $TW$ = tempo complessivo impiegato per raggiungere a piedi l'automobile o l'autobus, e ritorno
$TT$ = durata complessiva del viaggio in minuti
$C$ = costo complessivo del viaggio in dollari

[5] Cfr. Thomas Domenich-Daniel MacFadden, *Urban Travel Demand*, North-Holland Publishing Company, 1975. Le procedure di stima impiegate nel libro incorporano molteplici caratteristiche demografiche in aggiunta alle variabili puramente economiche descritte nel nostro esempio. Nel 2000, Daniel McFadden è stato insignito del premio Nobel per l'economia per la sua ricerca nello sviluppo di tecniche per la stima di questo tipo di modelli.

Nello studio di Domenich-MacFadden questa funzione di utilità descrive correttamente la scelta tra trasporto privato e pubblico per il 93 per cento delle famiglie del campione preso in esame.

I coefficienti delle variabili dell'equazione (4.2) esprimono il peso che una famiglia media attribuisce alle varie caratteristiche del viaggio, cioè l'utilità marginale di ciascuna caratteristica. Il *rapporto* tra un coefficiente e un altro misura il saggio marginale di sostituzione tra una caratteristica e l'altra. Per esempio, il rapporto tra l'utilità marginale della durata del percorso a piedi e l'utilità marginale della durata complessiva del viaggio indica che la durata del percorso a piedi viene considerata dal consumatore medio circa 3 volte più gravosa della durata del viaggio. In altri termini, il consumatore sarebbe disposto ad aggiungere 3 minuti di viaggio per evitare 1 minuto di percorso a piedi.

Analogamente, il rapporto tra il costo e la durata del viaggio indica a quale tasso il consumatore medio sia disposto a sostituire queste due variabili. In questo studio, il pendolare medio valuta un minuto di viaggio $0,0411/2,24 = 0,0183$ dollari, cioè $1.10 all'ora. Per fare un confronto basti pensare che nel 1967, l'anno in cui è stato realizzato questo studio, lo stipendio orario del pendolare medio del campione esaminato era di circa $2.85 all'ora.

La stima di queste funzioni di utilità può essere di grande aiuto per determinare l'opportunità di modifiche al sistema dei trasporti pubblici. Nella precedente funzione di utilità, per esempio, uno dei fattori significativi che spiegava la scelta era il tempo impiegato per il viaggio. L'amministrazione dei trasporti urbani può, sostenendo dei costi supplementari, aumentare il numero degli autobus per ridurre la durata del viaggio; ma sarà sufficiente l'aumento del numero dei passeggeri a coprire l'incremento delle spese?

Data una funzione di utilità e un campione di consumatori, possiamo prevedere quali consumatori useranno i trasporti privati e quali sceglieranno quelli pubblici: questo ci aiuterà a capire se le entrate saranno sufficienti a coprire i costi addizionali.

Inoltre, possiamo impiegare il saggio marginale di sostituzione per stimare il *valore* che ogni consumatore attribuisce alla riduzione della durata del viaggio. Abbiamo già visto nello studio di Domenich-MacFadden che nel 1967 il pendolare medio valutava la durata del viaggio $1.10 all'ora. Il pendolare dovrebbe quindi essere disposto a pagare circa $0.37 per ridurre il viaggio di 20 minuti. Questa cifra ci fornisce una misura dei benefici derivanti da un miglioramento dell'efficienza del servizio degli autobus: questi devono essere confrontati con i costi per determinare se un tale provvedimento è vantaggioso. Senza dubbio sarà utile avere una misura quantitativa di tali benefici prima di prendere delle decisioni nell'ambito della politica dei trasporti.

## Sommario

1. La funzione di utilità è semplicemente un modo di rappresentare o sintetizzare l'ordine delle preferenze. Le grandezze numeriche dei livelli di utilità non hanno alcun significato intrinseco.

2. Data una qualsiasi funzione di utilità, una sua qualunque trasformazione monotona rappresenterà le stesse preferenze.

3. Il saggio marginale di sostituzione (MRS) può essere derivato dalla funzione di utilità tramite la formula MRS = $\Delta x_2/\Delta x_1 = -MU_1/MU_2$.

## Domande

1. Nel testo abbiamo affermato che l'elevamento a una potenza dispari dà luogo a una trasformazione monotona. L'elevamento a una potenza pari dà anch'esso luogo a una trasformazione monotona? (Suggerimento: considerate il caso $f(u) = u^2$).

2. Quali delle seguenti trasformazioni sono monotone? (1) $u = 2v - 13$; (2) $u = -1/v^2$; (3) $u = 1/v^2$; (4) $u = \ln v$; (5) $u = -e^{-x}$; (6) $u = v^2$; (7) $u = v^2$ per $v > 0$; (8) $u = v^2$ per $v < 0$.

3. Nel testo abbiamo affermato che se le preferenze sono monotone, una diagonale che passa per l'origine deve intersecare ogni curva di indifferenza una sola volta. Potete dimostrarlo rigorosamente? (Suggerimento: che cosa accadrebbe se la diagonale intersecasse due volte una curva di indifferenza?)

4. Quali preferenze sono rappresentate da una funzione di utilità della forma $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2}$? E da una funzione di utilità $v(x_1, x_2) = 13x_1 + 13x_2$?

5. Quali preferenze sono rappresentate da una funzione di utilità della forma $u(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{x_2}$? La funzione di utilità $v(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1\sqrt{x_2} + x_2$ è una trasformazione monotona di $u(x_1, x_2)$?

6. Considerate la funzione di utilità $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$. Quali preferenze rappresenta? La funzione $v(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ è una trasformazione monotona di $u(x_1, x_2)$? La funzione $w(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ è una trasformazione monotona di $u(x_1, x_2)$?

7. Potete spiegare perché se si effettua una trasformazione monotona di una funzione di utilità il saggio marginale di sostituzione non subisce cambiamenti?

## APPENDICE

Cominciamo col chiarire il significato di "utilità marginale". Nell'ambito dell'analisi economica, in genere "marginale" equivale semplicemente a "derivata". L'utilità marginale del bene 1 è così:

$$MU_1 = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}.$$

Osserviamo che in questo caso abbiamo usato una derivata *parziale*, poiché l'utilità marginale del bene 1 è calcolata mantenendo costante il bene 2.

Possiamo calcolare nuovamente il saggio marginale di sostituzione usando il calcolo differenziale. Seguiremo due procedimenti: i differenziali, e le funzioni implicite.

Seguendo il primo metodo, consideriamo una variazione $(dx_1, dx_2)$ che mantenga costante l'utilità. Vogliamo cioè

$$du = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = 0.$$

Il primo termine misura l'aumento dell'utilità derivante da una piccola variazione $dx_1$, il secondo l'aumento dell'utilità derivante da una piccola variazione $dx_2$. Scegliamo queste variazioni in modo che la variazione complessiva dell'utilità, $du$, sia nulla. Risolvendo per $dx_2/dx_1$ otteniamo

$$\boxed{\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2}}$$

che è l'equivalente in termini di calcolo dell'equazione (4.1).

Il secondo metodo rappresenta la curva di indifferenza come $x_2(x_1)$, vale a dire, per ogni valore di $x_1$ la funzione $x_2(x_1)$ esprime la quantità di $x_2$ necessaria per rimanere su quella stessa curva. La funzione $x_2(x_1)$ deve pertanto soddisfare l'identità

$$u(x_1, x_2(x_1)) \equiv k$$

ove $k$ indica il livello d'utilità associato alla curva di indifferenza in questione.

Possiamo differenziare questa identità rispetto a $x_1$ per ottenere

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1} = 0$$

che risolviamo per $\partial x_2(x_1)/\partial x_1$, ottenendo

$$\frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1} = -\frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2}$$

lo stesso risultato di prima.

Il metodo che utilizza le funzioni implicite è più rigoroso, mentre quello che utilizza i differenziali è più diretto.

Supponiamo di effettuare una trasformazione monotona di una funzione di utilità, per esempio $v(x_1, x_2) = f(u(x_1, x_2))$. Calcoliamo il MRS di questa funzione di utilità. Usando la regola di derivazione delle funzioni composte otteniamo

$$\begin{aligned} \text{MRS} = -\frac{\partial v/\partial x_1}{\partial v/\partial x_2} &= -\frac{\partial f/\partial u}{\partial f/\partial u} \frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} \\ &= -\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} \end{aligned}$$

poiché il termine $\partial f/\partial u$ si semplifica. Ciò dimostra che il MRS non dipende dalla rappresentazione dell'utilità.

Tutto ciò fornisce un utile metodo per riconoscere le preferenze rappresentate da differenti funzioni di utilità: date due funzioni di utilità, per stabilire se da esse si derivano le stesse curve di indifferenza è sufficiente calcolare i saggi marginali di sostituzione e verificare se si equivalgono. Se è così, le due funzioni di utilità hanno le stesse curve di indifferenza: infatti, se la direzione in cui le preferenze aumentano è la stessa per ogni funzione di utilità, le preferenze devono essere le stesse.

## ESEMPIO: Preferenze Cobb-Douglas

È facile derivare il saggio marginale di sostituzione delle preferenze Cobb-Douglas usando la formula precedente.

Se scegliamo la rappresentazione logaritmica in cui

$$u(x_1, x_2) = c \ln x_1 + d \ln x_2$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \text{MRS} &= -\frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2} \\ &= -\frac{c/x_1}{d/x_2} \\ &= -\frac{c}{d}\frac{x_2}{x_1}. \end{aligned}$$

Si noti che il saggio marginale di sostituzione dipende solo dal rapporto tra i due parametri.

Che cosa avviene se scegliamo la rappresentazione esponenziale in cui

$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d?$$

Otteniamo allora

$$\begin{aligned} \text{MRS} &= -\frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2} \\ &= -\frac{c x_1^{c-1} x_2^d}{d x_1^c x_2^{d-1}} \\ &= -\frac{c x_2}{d x_1} \end{aligned}$$

che equivale al risultato già ottenuto. È evidente che una trasformazione monotona non può modificare il saggio marginale di sostituzione!