Algoritmi e Strutture Dati

Tabelle Hash

Alberto Montresor

Università di Trento

2023/11/02

Sommario

Introduzione

Ripasso

Un dizionario è una struttura dati utilizzata per memorizzare insiemi dinamici di coppie $\langle$ chiave, valore $\rangle$

- Le coppie sono indicizzate in base alla chiave
- Il valore è un dato satellite

Operazioni:

- $\mathsf{lookup}(key) \rightarrow value$
- $\mathsf{insert}(key, value)$
- $\mathsf{remove}(key)$

Applicazioni:

- Le tabelle dei simboli di un compilatore
- I dizionari di Python
- ...

Possibili implementazioni

	Array non ordinato	**Array ordinato**	**Lista**	**Alberi RB**	**Implemen. ideale**
insert()					$O(1)$
lookup()					$O(1)$
remove()					$O(1)$
foreach					$O(n)$

Possibili implementazioni

se c'è spazio in memoria

	Array non ordinato	Array ordinato	Lista	Alberi RB	Implemen. ideale
insert()	$O(1), O(n)$	$O(n)$	$O(1), O(n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
lookup()	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
remove()	$O(n)$ ricerca	$O(n)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
foreach	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$

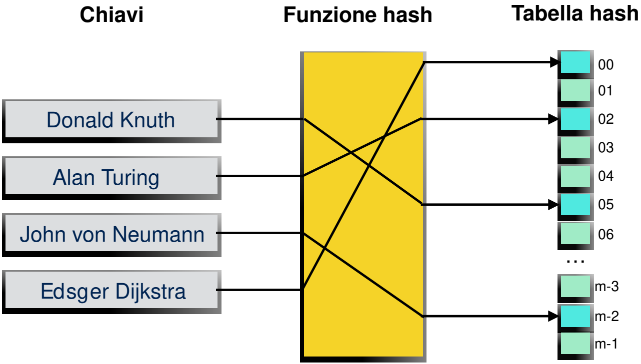
se ci sono buchi

Implementazione ideale: tabelle hash

- Hash: From French hacher ("to chop"), from Old French hache ("axe")
- L'insieme delle possibili chiavi è rappresentato dall'insieme universo $\mathcal{U}$ di dimensione u
- Si memorizzano le chiavi in un vettore $T[0 \ldots m-1]$ di dimensione m, detto tabella hash

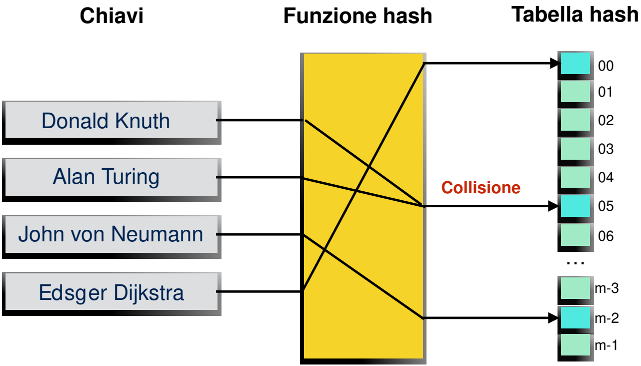
Tabelle hash – Definizioni

- Una funzione hash è definita come $h : \mathcal{U} \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$
- La coppia chiave–valore $\langle k, v \rangle$ viene memorizzata in un vettore nella posizione $h(k)$



Collisioni

- Quando due o più chiavi nel dizionario hanno lo stesso valore hash, diciamo che è avvenuta una collisione
- Idealmente, vogliamo funzioni hash senza collisioni



Possibili implementazioni

	Array non ordinato	**Array ordinato**	**Lista**	**Alberi RB**	**Hash table**
insert()	$O(1), O(n)$	$O(n)$	$O(1), O(n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
lookup()	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
remove()	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
foreach	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(m)$

Tabelle ad accesso diretto

Caso particolare: l'insieme $\mathcal{U}$ è già un sottoinsieme (piccolo) di $\mathbb{Z}^+$

- L'insieme dei giorni dell'anno, numerati da 1 a 366
- L'insieme dei Pokemon di Kanto, numerati da 1 a 151

Tabella a accesso diretto

- Si utilizza la funzione hash identità $h(k) = k$
- Si sceglie un valore m pari a u

Problemi

- Se u è molto grande, l'approccio non è praticabile
- Se u non è grande ma il numero di chiavi effettivamentre registrate è molto minore di $u = m$, si spreca memoria

Sommario

Funzioni hash perfette

Definizione

Una funzione hash h si dice perfetta se è iniettiva, ovvero se non dà origine a collisioni:

$$\forall k_1, k_2 \in \mathcal{U} : k_1 \neq k_2 \Rightarrow h(k_1) \neq h(k_2)$$

Esempi

- Studenti ASD 2005-2016
  N. matricola in $[100.090, 183.864]$

  $h(k) = k - 100.090, m = 83.774$

- Studenti immatricolati 2014
  N. matricola in [173.185, 183.864]

  $h(k) = k - 173.185, m = 10.679$

Problemi

- Spazio delle chiavi spesso grande, sparso, non conosciuto

- È spesso impraticabile ottenere una funzione hash perfetta

Funzioni hash

Se non possiamo evitare le collisioni

- almeno cerchiamo di minimizzare il loro numero
- vogliamo funzioni che distribuiscano uniformemente le chiavi negli indici $[0 \ldots m-1]$ della tabella hash

Uniformità semplice

- Sia $P(k)$ la probabilità che una chiave k sia inserita in tabella
- Sia $Q(i)$ la probabilità che una chiave finisca nella cella i

$$Q(i) = \sum_{k \in \mathcal{U} : h(k) = i} P(k)$$

- Una funzione hash h gode di uniformità semplice se:

$$\forall i \in [0, \ldots, m-1] : Q(i) = 1/m$$

Funzioni hash

Per poter ottenere una funzione hash con uniformità semplice, la distribuzione delle probabilità P deve essere nota

Esempio

Se $\mathcal{U}$ è dato dai numeri reali in $[0, 1[$ e ogni chiave ha la stessa probabilità di essere scelta, allora $H(k) = \lfloor km \rfloor$ soddisfa la proprietà di uniformità semplice

Nella realtà

- La distribuzione esatta può non essere (completamente) nota
- Si utilizzano allora tecniche “euristiche"

Come realizzare una funzione hash

Assunzione

Le chiavi possono essere tradotte in valori numerici, anche interpretando la loro rappresentazione in memoria come un numero.

Esempio: trasformazione stringhe

- $ord(c)$: valore ordinale binario del carattere c in qualche codifica
- $bin(k)$: rappresentazione binaria della chiave k, concatenando i valori binari dei caratteri che lo compongono
- $int(b)$: valore numerico associato al numero binario b
- $int(k) = int(bin(k))$

Come realizzare una funzione hash

Nei prossimi esempi, utilizziamo codice ASCII a 8 bit

$$\begin{aligned} bin(\text{“}\mathtt{DOG}\text{”}) &= ord(\text{“}\mathtt{D}\text{”}) \quad ord(\text{“}\mathtt{O}\text{”}) \quad ord(\text{“}\mathtt{G}\text{”}) \\ &= \mathtt{01000100} \quad \mathtt{01001111} \quad \mathtt{01000111} \\ int(\text{“}\mathtt{DOG}\text{”}) &= 68 \cdot 256^2 + \quad 79 \cdot 256 + \quad 71 \\ &= 4,476,743 \end{aligned}$$

Domanda: come trasformare questa sequenza di bit o questo numero in un valore compreso in $[0, m-1]$?

Funzione hash - Estrazione

Estrazione

- $m = 2^p$
- $H(k) = int(b)$, dove b è un sottoinsieme di p bit presi da $bin(k)$

Problemi

Domanda: Quali possono essere i problemi di questo approccio?

Funzione hash - Estrazione

Estrazione

- $m = 2^p$
- $H(k) = int(b)$, dove b è un sottoinsieme di p bit presi da $bin(k)$

Problemi

- Selezionare bit presi dal suffisso della chiave può generare collisioni con alta probabilità
- Tuttavia, anche prendere parti diverse dal suffisso o dal prefisso può generare collisioni.

Funzione hash - Estrazione

Esempio 1

$m = 2^p = 2^{16} = 65536$; 16 bit meno significativi di $bin(k)$

$$
\begin{aligned}
bin(\text{“}\texttt{Alberto}\text{”}) &= \texttt{01000001 01101100 01100010 01100101} \\
& \texttt{01110010 01110100 01101111} \\
bin(\text{“}\texttt{Roberto}\text{”}) &= \texttt{01010010 01101111 01100010 01100101} \\
& \texttt{01110010 01110100 01101111} \\
H(\text{“}\texttt{Alberto}\text{”}) &= int(0111010001101111) = 29.807 \\
H(\text{“}\texttt{Roberto}\text{”}) &= int(0111010001101111) = 29.807
\end{aligned}
$$

Funzione hash - Estrazione

Esempio 2

$m = 2^p = 2^{16} = 65536$; 16 bit presi all'interno di $bin(k)$

$$bin(\text{“}\texttt{Alberto}\text{”}) = \texttt{0100{\color{red}0001}\ {\color{red}01101100}\ {\color{red}0110}0010\ 01100101\ 01110010\ 01110100\ 01101111}$$

$$bin(\text{“}\texttt{Alessio}\text{”}) = \texttt{0100{\color{red}0001}\ {\color{red}01101100}\ {\color{red}0110}0101\ 01110011\ 01110011\ 01101001\ 01101111}$$

$$H(\text{“}\texttt{Alberto}\text{”}) = int({\color{red}0001011011000110}) = 5.830$$

$$H(\text{“}\texttt{Alessio}\text{”}) = int({\color{red}0001011011000110}) = 5.830$$

Funzione hash - XOR

XOR

- $m = 2^p$
- $H(k) = int(b)$, dove b è dato dalla somma modulo 2, effettuata bit a bit, di sottoinsiemi di p bit di $bin(k)$

Problemi

Domanda: Quali possono essere i problemi di questo approccio?

Funzione hash - XOR

XOR

- $m = 2^p$
- $H(k) = int(b)$, dove b è dato dalla somma modulo 2, effettuata bit a bit, di sottoinsiemi di p bit di $bin(k)$

Problemi

- Permutazioni (anagrammi) della stessa stringa possono generare lo stesso valore hash
- Mitigazione: eseguire una rotazione dei bit dipendente dalla posizione.

Funzione hash - XOR

Esempio

$m = 2^{16} = 65536$; 5 gruppi di 16 bit ottenuti con 8 zeri di "padding"

$bin(\text{“}\texttt{montresor}\text{”}) =$

`01101101 01101111` $\oplus$

`01101110 01110100` $\oplus$

`01110010 01100101` $\oplus$

`01110011 01101111` $\oplus$

`01110010 00000000`

$H(\text{“}\texttt{montresor}\text{”}) =$

$int(\texttt{01110000 00010001}) =$

28.689

$bin(\text{“}\texttt{sontremor}\text{”}) =$

`01110011 01101111` $\oplus$

`01101110 01110100` $\oplus$

`01110010 01100101` $\oplus$

`01101101 01101111` $\oplus$

`01110010 00000000`

$H(\text{“}\texttt{sontremor}\text{”}) =$

$int(\texttt{01110000 00010001}) =$

28.689

Funzione hash - Metodo della divisione

Metodo della divisione

- m dispari, meglio se numero primo
- $H(k) = int(k) \bmod m$

Esempio

$m = 383$

$$\begin{aligned} H(\text{“}\texttt{Alberto}\text{”}) &= 18.415.043.350.787.183 \bmod 383 = & 221 \\ H(\text{“}\texttt{Alessio}\text{”}) &= 18.415.056.470.632.815 \bmod 383 = & 77 \\ H(\text{“}\texttt{Cristian}\text{”}) &= 4.860.062.892.481.405.294 \bmod 383 = & 130 \end{aligned}$$

Funzione hash - Metodo della divisione

Non vanno bene:

- $m = 2^p$: solo i p bit meno significativi vengono considerati (caveat: se la funzione hash perturba uniformemente tutti i bit questo non è un problema)
- $m = 2^p - 1$: permutazione di stringhe con set di caratteri di dimensione 2^p hanno lo stesso valore hash

Vanno bene:

- Numeri primi, distanti da potenze di 2 (e di 10)

Reality check

- Ottenere una "buona" funzione hash non è poi così semplice...
- Test moderni per valutare la bontà delle funzioni hash
  - Avalanche effect: Se si cambia un bit nella chiave, deve cambiare almeno la metà dei bit del valore hash
  - Test statistici (Chi-square)
- Funzioni crittografiche (SHA-1)
  - Deve essere molto difficile o quasi impossibile risalire al testo che ha portato ad un dato hash;

Funzioni hash moderne

Nome	Note	Link
FNV Hash	Funzione hash non crittografica, creata nel 1991.	[Wikipedia] [Codice]
Murmur Hash	Funzione hash non crittografica, creata nel 2008, il cui uso è ormai sconsigliato perchè debole.	[Wikipedia] [Codice]
City Hash	Una famiglia di funzioni hash non-crittografiche, progettate da Google per essere molto veloci. Ha varianti a 32, 64, 128, 256 bit.	[Wikipedia] [Codice]
Farm Hash	Il successore di City Hash, sempre sviluppato da Google.	[Codice]

Sommario

Problema delle collisioni

Come gestire le collisioni?

- Dobbiamo trovare posizioni alternative per le chiavi
- Se una chiave non si trova nella posizione attesa, bisogna cercarla nelle posizioni alternative
- Questa ricerca:
  - dovrebbe costare $O(1)$ nel caso medio
  - può costare $O(n)$ nel caso pessimo

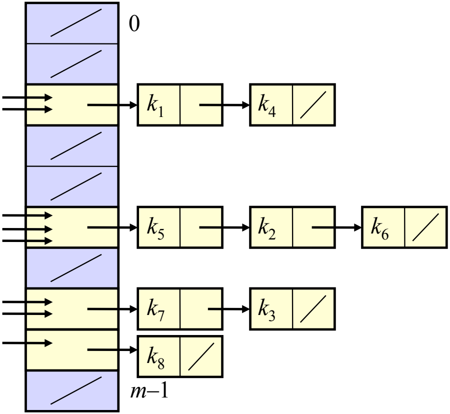
Due possibili tecniche

- Liste di trabocco o memorizzazione esterna
- Indirizzamento aperto o memorizzazione interna

Liste/vettori di trabocco (Concatenamento o Chaining)

Idea

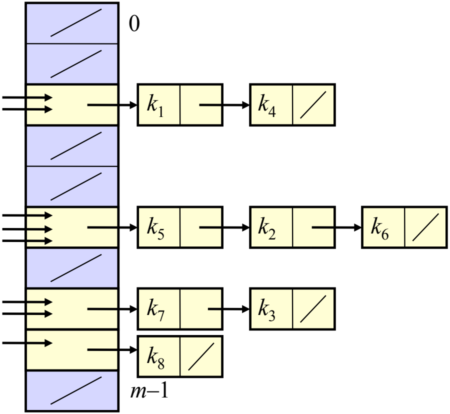
- Le chiavi con lo stesso valore hash h vengono memorizzate in una lista monodirezionale / vettore dinamico
- Si memorizza un puntatore alla testa della lista / al vettore nello slot $H(k)$-esimo della tabella hash



Liste/vettori di trabocco (Concatenamento o Chaining)

Operazioni

- insert(): inserimento in testa
- lookup(), remove(): scansione della lista per cercare la chiave



Liste/vettori di trabocco: analisi complessità

n	Numero di chiavi memorizzati in tabella hash
m	Capacità della tabella hash
$\alpha = n/m$	Fattore di carico
$I(\alpha)$	Numero medio di accessi alla tabella per la ricerca di una chiave non presente nella tabella (ricerca con insuccesso)
$S(\alpha)$	Numero medio di accessi alla tabella per la ricerca di una chiave presente nella tabella (ricerca con successo)

Analisi del caso pessimo?

Liste/vettori di trabocco: analisi complessità

n	Numero di chiavi memorizzati in tabella hash
m	Capacità della tabella hash
$\alpha = n/m$	Fattore di carico
$I(\alpha)$	Numero medio di accessi alla tabella per la ricerca di una chiave non presente nella tabella (ricerca con insuccesso)
$S(\alpha)$	Numero medio di accessi alla tabella per la ricerca di una chiave presente nella tabella (ricerca con successo)

Analisi del caso pessimo?

- Tutte le chiavi sono collocate in unica lista
- insert(): $\Theta(1)$
- lookup(), remove(): $\Theta(n)$

Liste/vettori di trabocco: analisi complessità

Analisi del caso medio: assunzioni

- Dipende da come le chiavi vengono distribuite
- Assumiamo hashing uniforme semplice
- Costo calcolo funzione di hashing: $\Theta(1)$

Quanto sono lunghe le liste / i vettori?

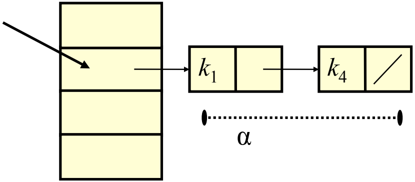
Liste/vettori di trabocco: analisi complessità

Analisi del caso medio: assunzioni

- Dipende da come le chiavi vengono distribuite
- Assumiamo hashing uniforme semplice
- Costo calcolo funzione di hashing: $\Theta(1)$

Quanto sono lunghe le liste / i vettori?

- Il valore atteso della lunghezza di una lista è pari a $\alpha = n/m$



Liste/vettori di trabocco: analisi complessità

Costo hashing

- Una chiave presente o non presente in tabella può essere collocata in uno qualsiasi degli m slot
- Costo di hashing: $\Theta(1)$

Ricerca senza successo

- Una ricerca senza successo tocca tutte le chiavi nella lista corrispondente

Ricerca con successo

- Una ricerca con successo tocca in media metà delle chiavi nella lista corrispondente

Liste/vettori di trabocco: analisi complessità

Costo hashing

- Una chiave presente o non presente in tabella può essere collocata in uno qualsiasi degli m slot
- Costo di hashing: $\Theta(1)$

Ricerca senza successo

- Una ricerca senza successo tocca tutte le chiavi nella lista corrispondente
- Costo atteso: $\Theta(1) + \alpha$

Ricerca con successo

- Una ricerca con successo tocca in media metà delle chiavi nella lista corrispondente
- Costo atteso: $\Theta(1) + \alpha/2$

Liste/vettori di trabocco: analisi complessità

Qual è il significato del fattore di carico?

- Influenza il costo computazionale delle operazioni sulle tabelle hash
- Se $n = O(m)$, $\alpha = O(1)$
- Quindi tutte le operazioni sono $O(1)$

Indirizzamento aperto

Problemi delle liste/vettori di trabocco

- Struttura dati complessa, con liste, puntatori, etc.

Gestione alternativa: indirizzamento aperto

- Idea: memorizzare tutte le chiavi nella tabella stessa
- Ogni slot contiene una chiave oppure **nil**

Inserimento

Se lo slot prescelto è utilizzato, si cerca uno slot "alternativo"

Ricerca

Si cerca nello slot prescelto, e poi negli slot "alternativi" fino a quando non si trova la chiave oppure **nil**

Indirizzamento aperto

Ispezione

Un'ispezione è l'esame di uno slot durante la ricerca.

Funzione hash

Estesa nel modo seguente:

$$H : \mathcal{U} \times \overbrace{[0 \ldots m-1]}^{\text{Numero ispezione}} \rightarrow \overbrace{[0 \ldots m-1]}^{\text{Indice vettore}}$$

Indirizzamento aperto

Sequenza di ispezione

Una sequenza di ispezione $[H(k,0), H(k,1), \ldots, H(k,m-1)]$ è una permutazione degli indici $[0, \ldots, m-1]$ corrispondente all'ordine in cui vengono esaminati gli slot.

- Non vogliamo esaminare ogni slot più di una volta
- Potrebbe essere necessario esaminare tutti gli slot nella tabella

	$\mathbf{k_1}$		$\mathbf{k_2}$	$\mathbf{k_3}$	$\mathbf{k_4}$		$\mathbf{k_5}$			

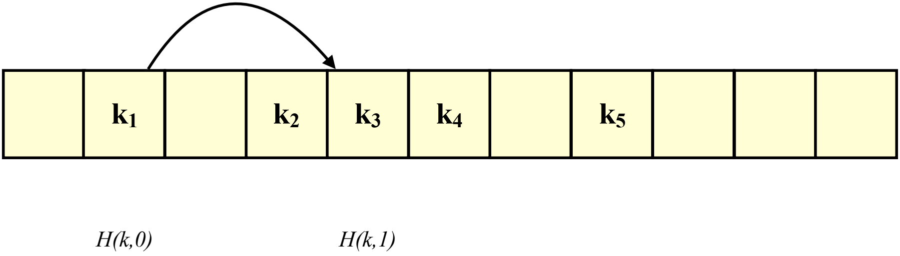
H(k,0)

Indirizzamento aperto

Sequenza di ispezione

Una sequenza di ispezione $[H(k,0), H(k,1), \ldots, H(k,m-1)]$ è una permutazione degli indici $[0,\ldots,m-1]$ corrispondente all'ordine in cui vengono esaminati gli slot.

- Non vogliamo esaminare ogni slot più di una volta
- Potrebbe essere necessario esaminare tutti gli slot nella tabella

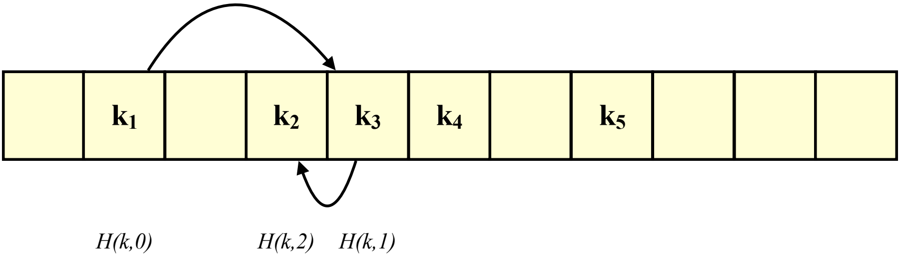


Indirizzamento aperto

Sequenza di ispezione

Una sequenza di ispezione $[H(k,0), H(k,1), \ldots, H(k,m-1)]$ è una permutazione degli indici $[0,\ldots,m-1]$ corrispondente all'ordine in cui vengono esaminati gli slot.

- Non vogliamo esaminare ogni slot più di una volta
- Potrebbe essere necessario esaminare tutti gli slot nella tabella

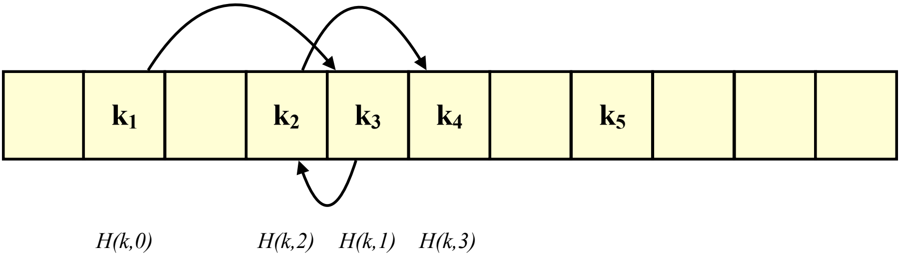


Indirizzamento aperto

Sequenza di ispezione

Una sequenza di ispezione $[H(k,0), H(k,1), \ldots, H(k,m-1)]$ è una permutazione degli indici $[0, \ldots, m-1]$ corrispondente all'ordine in cui vengono esaminati gli slot.

- Non vogliamo esaminare ogni slot più di una volta
- Potrebbe essere necessario esaminare tutti gli slot nella tabella

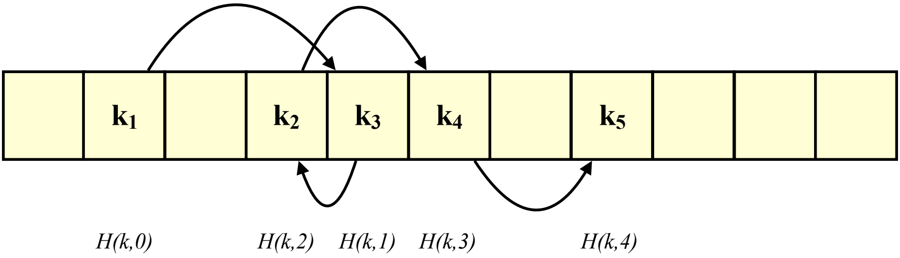


Indirizzamento aperto

Sequenza di ispezione

Una sequenza di ispezione $[H(k,0), H(k,1), \ldots, H(k,m-1)]$ è una permutazione degli indici $[0,\ldots,m-1]$ corrispondente all'ordine in cui vengono esaminati gli slot.

- Non vogliamo esaminare ogni slot più di una volta
- Potrebbe essere necessario esaminare tutti gli slot nella tabella

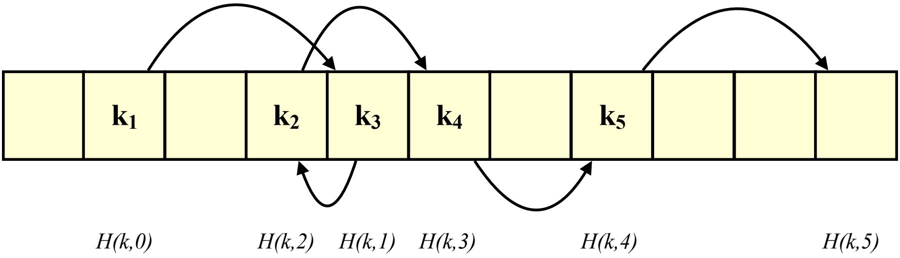


Indirizzamento aperto

Sequenza di ispezione

Una sequenza di ispezione $[H(k,0), H(k,1), \ldots, H(k,m-1)]$ è una permutazione degli indici $[0, \ldots, m-1]$ corrispondente all'ordine in cui vengono esaminati gli slot.

- Non vogliamo esaminare ogni slot più di una volta
- Potrebbe essere necessario esaminare tutti gli slot nella tabella



Fattore di carico

Cosa succede al fattore di carico α?

- Compreso fra 0 e 1
- La tabella può andare in overflow

Tecniche di ispezione

Hashing uniforme

La situazione ideale prende il nome di hashing uniforme, in cui ogni chiave ha la stessa probabilità di avere come sequenza di ispezione una qualsiasi delle $m!$ permutazioni di $[0, \ldots, m-1]$.

- Generalizzazione dell'hashing uniforme semplice
- Nella realtà:
  - È difficile implementare il vero hashing uniforme
  - Ci si accontenta di ottenere almeno una permutazione
- Tecniche diffuse:
  - Ispezione lineare
  - Ispezione quadratica
  - Doppio hashing

Ispezione lineare

Funzione: $H(k,i) = (H_1(k) + h \cdot i) \bmod m$

- La sequenza $H_1(k)$, $H_1(k) + h$, $H_1(k) + 2 \cdot h$, $\ldots$, $H_1(k) + (m-1) \cdot h$ (modulo m) è determinata dal primo elemento
- Al massimo m sequenze di ispezione distinte sono possibili

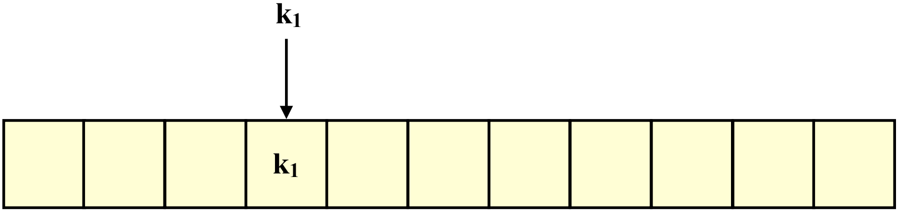
Agglomerazione primaria (primary clustering)

- Lunghe sotto-sequenze occupate...
- ... che tendono a diventare più lunghe: uno slot vuoto preceduto da i slot pieni viene riempito con probabilità $(i+1)/m$
- I tempi medi di inserimento e cancellazione crescono

Agglomerazione primaria

Agglomerazione primaria (primary clustering)

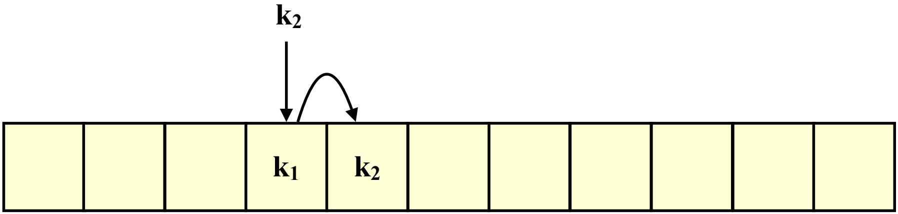
- Lunghe sotto-sequenze occupate...
- ... che tendono a diventare più lunghe: uno slot vuoto preceduto da i slot pieni viene riempito con probabilità $(i+1)/m$
- I tempi medi di inserimento e cancellazione crescono



Agglomerazione primaria

Agglomerazione primaria (primary clustering)

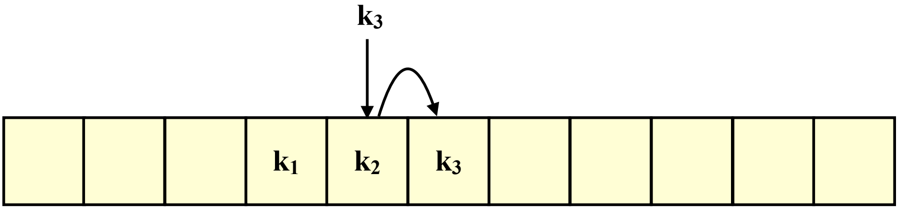
- Lunghe sotto-sequenze occupate...
- ... che tendono a diventare più lunghe: uno slot vuoto preceduto da i slot pieni viene riempito con probabilità $(i + 1)/m$
- I tempi medi di inserimento e cancellazione crescono



Agglomerazione primaria

Agglomerazione primaria (primary clustering)

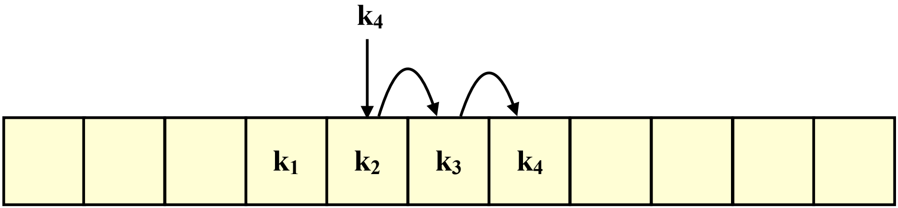
- Lunghe sotto-sequenze occupate...
- ... che tendono a diventare più lunghe: uno slot vuoto preceduto da i slot pieni viene riempito con probabilità $(i+1)/m$
- I tempi medi di inserimento e cancellazione crescono



Agglomerazione primaria

Agglomerazione primaria (primary clustering)

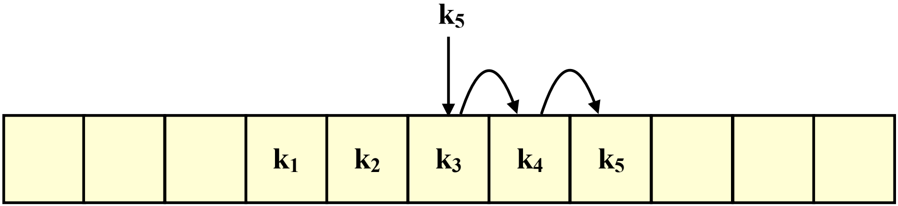
- Lunghe sotto-sequenze occupate...
- ... che tendono a diventare più lunghe: uno slot vuoto preceduto da i slot pieni viene riempito con probabilità $(i+1)/m$
- I tempi medi di inserimento e cancellazione crescono



Agglomerazione primaria

Agglomerazione primaria (primary clustering)

- Lunghe sotto-sequenze occupate...
- ... che tendono a diventare più lunghe: uno slot vuoto preceduto da i slot pieni viene riempito con probabilità $(i + 1)/m$
- I tempi medi di inserimento e cancellazione crescono



Ispezione quadratica

Funzione: $H(k,i) = (H_1(k) + h \cdot i^2) \bmod m$

- Dopo il primo elemento $H_1(k,0)$, le ispezioni successive hanno un offset che dipende da una funzione quadratica nel numero di ispezione i
- La sequenza risultante non è una permutazione!
- Al massimo m sequenze di ispezione distinte sono possibili

Agglomerazione secondaria (secondary clustering)

- Se due chiavi hanno la stessa ispezione iniziale, le loro sequenze sono identiche

Doppio hashing

Funzione: $H(k, i) = (H_1(k) + i \cdot H_2(k)) \bmod m$

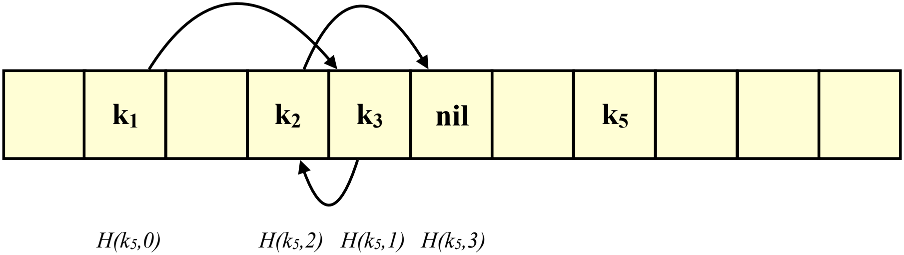
- Due funzioni ausiliarie:
  - H_1 fornisce la prima ispezione
  - H_2 fornisce l'offset delle successive ispezioni
- Al massimo m^2 sequenze di ispezione distinte sono possibili
- Per garantire una permutazione completa, $H_2(k)$ deve essere relativamente primo con m
  - Scegliere $m = 2^p$ e $H_2(k)$ deve restituire numeri dispari
  - Scegliere m primo, e $H_2(k)$ deve restituire numeri minori di m

Cancellazione

Domanda: Non possiamo semplicemente sostituire la chiave che vogliamo cancellare con un **nil**. Perché?

Cancellazione

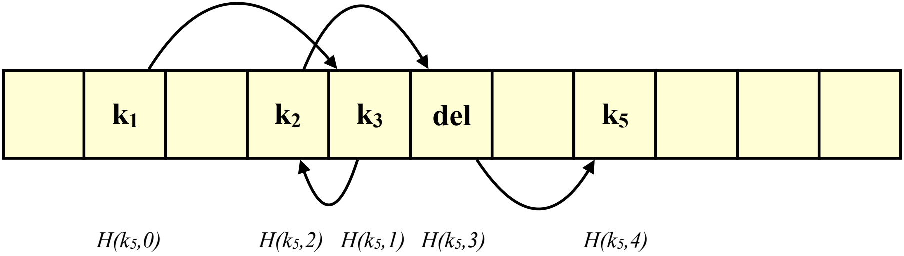
Domanda: Non possiamo semplicemente sostituire la chiave che vogliamo cancellare con un **nil**. Perché?



Cancellazione

Approccio

- Utilizziamo un speciale valore **deleted** al posto di **nil** per marcare uno slot come vuoto dopo la cancellazione
  - Ricerca: **deleted** trattati come slot pieni
  - Inserimento: **deleted** trattati come slot vuoti
- Svantaggio: il tempo di ricerca non dipende più da α
- Concatenamento più comune se si ammettono cancellazioni



Implementazione - Hashing doppio

```
HASH
ITEM[] K                                  % Tabella delle chiavi
ITEM[] V                                  % Tabella dei valori
int m                                     % Dimensione della tabella

HASH Hash(int dim)
    HASH t = new HASH
    t.m = dim
    t.keys = new ITEM[0 ... dim − 1]
    t.values = new ITEM[0 ... dim − 1]
    for i = 0 to dim − 1 do
        t.keys[i] = nil
    return t
```

Implementazione - Hashing doppio

```
int scan(ITEM k, boolean insert)
    int delpos = m                                  % Prima posizione deleted
    int i = 0                                       % Numero di ispezione
    int j = H(k)                                    % Posizione attuale
    while keys[j] ≠ k and keys[j] ≠ nil and i < m do
        if keys[j] == deleted and delpos == m then
            delpos = j
        j = (j + H'(k)) mod m
        i = i + 1
    if insert and keys[j] ≠ k and delpos < m then
        return delpos
    else
        return j
```

Implementazione - Hashing doppio

```
ITEM lookup(ITEM k)
    int i = scan(k, false)
    if keys[i] == k then
        return values[i]
    else
        return nil

insert(ITEM k, ITEM v)
    int i = scan(k, true)
    if keys[i] == nil or keys[i] == deleted or keys[i] == k then
        keys[i] = k
        values[i] = v
    else
        % Errore: tabella hash piena
```

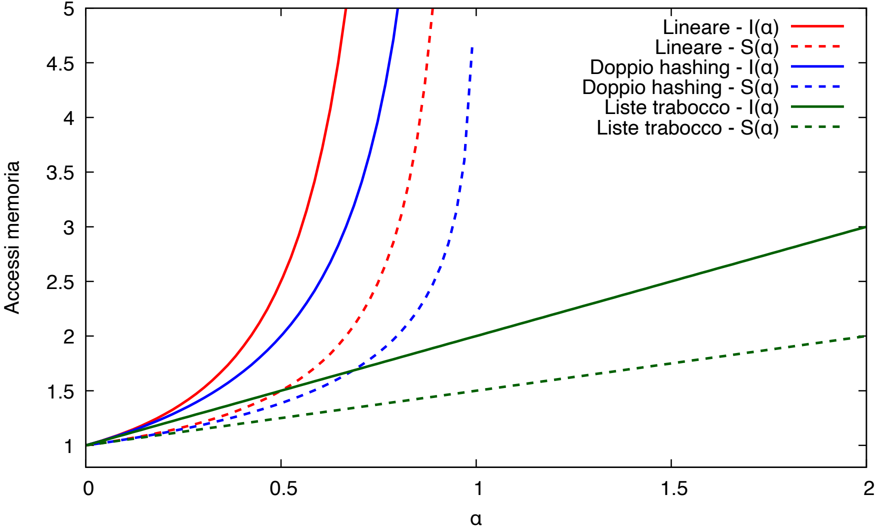
Implementazione - Hashing doppio

```
remove(ITEM k)
    int i = scan(k, false)
    if keys[i] == k then
        keys[i] = deleted
        values[i] = nil
```

Complessità

Metodo	α	$I(\alpha)$	$S(\alpha)$
Lineare	$0 \leq \alpha < 1$	$\dfrac{(1-\alpha)^2+1}{2(1-\alpha)^2}$	$\dfrac{1-\alpha/2}{1-\alpha}$
Hashing doppio	$0 \leq \alpha < 1$	$\dfrac{1}{1-\alpha}$	$-\dfrac{1}{\alpha}\ln(1-\alpha)$
Liste di trabocco	$\alpha \geq 0$	$1+\alpha$	$1+\alpha/2$

Complessità



Java `hashcode()`

Dalla documentazione di `java.lang.Object`

The general contract of `hashCode()` is:

1. Whenever it is invoked on the same object more than once during an execution of a Java application, *the `hashCode()` method must consistently return the same integer, provided no information used in equals comparisons on the object is modified*. This integer need not remain consistent from one execution of an application to another execution of the same application.
2. *If two objects are equal according to the `equals(Object)` method, then calling the `hashCode()` method on each of the two objects must produce the same integer result*.
3. It is not required that if two objects are unequal according to the `equals(Object)` method, then calling the `hashCode()` method on each of the two objects must produce distinct integer results. However, *the programmer should be aware that producing distinct integer results for unequal objects may improve the performance of hash tables*.

Java `hashcode()`

Se una classe non fa override di `equals()`:

- Eredita i metodi `equals()` e `hashCode()` così come definiti da `java.lang.Object`:
  - `x.equals(y)` ritorna **true** se e solo se `x == y`
  - `x.hashCode()` converte l'indirizzo di memoria di `x` in un intero

Se una classe fa ovveride di `equals()`:

- "Always override hashCode when you override equals", in Bloch, Joshua (2008), Effective Java (2nd ed.)
- Se non fate override, oggetti uguali finiscono in posizioni diverse nella tabella hash

Java `hashcode()`

Esempio: `java.lang.String`

- Override di `equals()` per controllare l'uguaglianza di stringhe
- `hashCode()` in Java 1.0, Java 1.1
  - Utilizzati 16 caratteri della stringa per calcolare l'`hashCode()`
  - Problemi con la regola (3) - cattiva performance nelle tabelle
- `hashCode()` in Java 1.2 e seguenti:

$$h(s) = \sum_{i=0}^{n-1} s[i] \cdot 31^{n-1-i}$$

(utilizzando aritmetica `int`)

Il numero *magico*

Perché 31???

- 31 è un numero primo di Marsenne ($M_p = 2^p - 1$)
- Esprimiamo il prodotto generico come una somma di prodotti per potenze di 2, quale influenza ha la rappresentazione binaria del moltiplicatore?

Java hashcode()

Cosa non fare!

```
public int hashCode()
{
  return 0;
}
```

Come si fa

```
public int hashCode()
{
  return Objects.hash(this.foo, this.bar, ...);
}
```

Reality check

Linguaggio	Tecnica	t_α	Note
Java 7 `HashMap`	Liste di trabocco basate su `LinkedList`	0.75	$O(n)$ nel caso pessimo Overhead: $16n + 4m$ byte
Java 8 `HashMap`	Liste di trabocco basate su RB Tree	0.75	$O(\log n)$ nel caso pessimo Overhead: $48n + 4m$ byte
C++ `sparse_hash`	Ind. aperto, scansione quadratica	?	Overhead: $2n$ bit
C++ `dense_hash`	Ind. aperto, scansione quadratica	0.5	X byte per chiave-valore $\Rightarrow$ 2-3X overhead
C++ STL `unordered_map`	Liste di trabocco basate su liste	1.00	MurmurHash
Python	Indirizzam. aperto, scansione quadratica	0.66	

Sommario

Considerazioni finali

Problemi con hashing

- Scarsa "locality of reference" (cache miss)
- Non è possibile ottenere le chiavi in ordine

Hashing utilizzato in altre strutture dati

- Distributed Hash Table (DHT)
- Bloom filters

Oltre le tabelle hash

- Data deduplication
- Protezioni dati con hash crittografici (MD5)