5. Polinomi

Una funzione p definita $\forall x \in \mathbb{R}$ da $p(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$ dove n è un numero negativo e $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono numeri reali fissati è detto polinomio

Se $p(x)$ è t.c. $a_n \neq 0$, allora $p(x)$ ha grado esattamente n

se tutti i coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono nulli, allora $p(x)$ è detto polinomio nullo

Esempio

$n = 3 \quad p(3) = 5 + 3{,}2x + 4x^2 + 1{,}2x^3$

$\mathbb{P}_3$ = insieme di tutti i polinomi di grado 3 (ma anche esattamente 2, 1, o il polinomio nullo)

↳ spazio dei polinomi di grado 3

$\mathbb{P}_n$, bastano $n+1$ pol. lin ind per rappresentare tutti i polinomi dello spazio usando tutte le loro comb. lineari

$1, x, x^2, \dots, x^n \in \mathbb{P}^n$

Quali sono le basi migliori per trovare una base di polinomi?

Teorema fondamentale dell'algebra

$n \geq 1$

sia $p(x)$ un polinomio fondamentale di grado n, ogni equazione algebrica di grado n $(p(x) = 0)$ ha esattamente n radici complesse, ciascuna contate con la sua semplicità, cioè

$$p(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{m_1} - (x - \alpha_2)^{m_2} - (x - \alpha_k)^{k}$$

dove $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sono radici distinte ed m_i con $i = 1, \dots k$ sono le loro molteplicità t.c. $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$

Teorema

Siano $a(x)$ e $b(x)$ polinomi con $b(x) \neq 0$, allora esistono e sono unici i polinomi $q(x)$ ed $r(x)$ per cui

$$a(x) = \underset{\text{quoziente}}{\underbrace{q(x)}}\, b(x) + \underset{\text{resto}}{\underbrace{r(x)}} \quad \text{con } r(x) = 0 \text{ o } r(x) \text{ con grado minore di } b(x)$$

Come si valuta un polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

input: $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}$

output: $p(\bar{x})$

$f: \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R} \qquad a_0, \dots, a_n, \bar{x} \to f(a_0, a_1, \dots, a_n) = p(x)$

Algoritmo 1

$s = 1$ → tiene la potenza della x

$p = a_0$

per $k = 1 \dots n$

$\quad s = s \cdot \bar{x}$ → aumenta la potenza di x

$\quad p = p + a_k \cdot s$

} 2 moltiplicazioni e 1 addiz.

$p(x) \leftarrow s$

Costo computazionale: $2n$ molt/div + n add/sottr

Algoritmo 2 (di Horner)

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \\ &= a_0 + x(a_1 + \dots a_n x^{n-1}) \\ &= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots a_n x^{n-2}) = \\ &\vdots \end{aligned}$$

$= a_0 + \underbrace{x(a_1 + \underbrace{x(a_2 + \cdots + \underbrace{x(a_{n-1} + \underbrace{x a_n}}) \ldots))}}$

ci sono solo n moltiplicazioni e n addizioni.

$p = a(n)$ — Costo = n (molt + somme)

per $k = n-1, \ldots, 0$

$p = a_k + x \cdot p$

$p(\bar{x}) \leftarrow p$

Algoritmo 3

$a(x) = q(x)\, b(x) + r(x)$

$b(x) = x - \bar{x}$

$p(x) = q(x)(x - \bar{x}) + r(x)$

$p(\bar{x}) = \cancel{q(\bar{x})(\bar{x}-\bar{x})} + r(\bar{x}) = r(\bar{x})$

Regola di Ruffini

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_0
$\bar{x}$		$\bar{x}\, b_n$	$\bar{x}\, b_{n-1}$	$\bar{x}\, b_1$
	b_n	b_{n-1}	b_1	r

$b_n = a_n$

$b_{n-1} = a_{n-1} + \bar{x} \cdot b_n$

$b_{n-2} = a_{n-2} + \bar{x} \cdot b_{n-1} + b_n$

$\vdots$

$b_1 = a_1 + \bar{x}\, b_2$

$r = a_0 + \bar{x}\, b_1$

$p = \cancel{b_n} = a_n$

per $k = n-1, \ldots, 0$:

$p\ \cancel{b_k} = a_k + \bar{x}\, \cancel{b_{k+1}}\ p$

$p(\bar{x}) = r = b_0$

$p = a_n$

per $k = n-1, \ldots, 0$

$p = a_k + \bar{x} \cdot p$ → n molt/div + n somme/sottr

$p(\bar{x}) = p$

Ruffini e Horner vengono implementati nello stesso modo (2 algoritmi diversi portano allo stesso risultato)

Esempio $p(x) = 1 + x - 2x^2 + 3x^4$

$p(2) = ?$

$3x^4 + 0x^3 - 2x^2 + x + 1$

	3	0	-2	1	1
2		6	0	12	20	42
	3	6	10	21	43 = p(2)
2		0	6	24	68
	3	12	34	89 = p'(2)

$p(2) = 43$

$p'(2) = ?$

Derivata

$p(x) = q(x)(x - \bar{x}) + r$

$p'(x) = q'(x)(x - \bar{x}) + q(x)$

$p'(\bar{x}) = \cancel{q'(\bar{x})(\bar{x} - \bar{x})} + q(\bar{x})$

$p_1 = 0$

$p = a_n$

per $k = n-1, \ldots, 0$

$p_1 = p + \bar{x}\, p_1$

$p = a_k + \bar{x}\, p$

$p(\bar{x}) = p$

$p'(\bar{x}) = p_1$

Analisi errore algoritmo Ruffini - Horner

$p(x) = a_0 + a_1 x$ — analisi in avanti dell'errore

ε_2 (su +), ε_1 (su ·)

$E_{ALG} = \left| \dfrac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right|$

$E_{ALG} = \left| \dfrac{(\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \tilde{x}(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) - (\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \tilde{x})}{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \tilde{x}} \right|$

$= \left| \dfrac{\cancel{\tilde{a}_0} + \cancel{\tilde{a}_1 \tilde{x}} + \tilde{a}_1 \tilde{x} \varepsilon_1 + \tilde{a}_0 \varepsilon_2 + \tilde{a}_0 \tilde{x} \varepsilon_2 + \tilde{a}_1 \cancel{\tilde{x}} \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \tilde{a}_0 \cancel{\tilde{x}} \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \cancel{\tilde{a}_0} - \cancel{\tilde{a}_1 \tilde{x}}}{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \tilde{x}} \right|$

$$= \left| \frac{\cancel{\tilde{a}_0} + \cancel{\tilde{a}_1 \tilde{x}} + \tilde{a}_1 \tilde{x} \varepsilon_1 + \tilde{a}_0 \varepsilon_2 + \tilde{a}_0 \tilde{x} \varepsilon_2 + \tilde{a}_1 \tilde{x} \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \tilde{a}_0 \tilde{x} \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \cancel{\tilde{a}_0} - \cancel{\tilde{a}_1 \tilde{x}}}{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \tilde{x}} \right|$$

$$= \left| \frac{\tilde{a}_1 \tilde{x}}{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \tilde{x}} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \right| \qquad \varepsilon_2 \leftarrow \tilde{a}_0 \varepsilon_2 (1+\tilde{x})$$

$$= \left| \frac{\tilde{a}_0}{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \tilde{x}} \varepsilon_1 + \frac{\tilde{a}_1 \tilde{x}}{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \tilde{x}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right|$$

Generalizzazione per polinomi di grado n

$$\varepsilon_{ALG} \leq \frac{\gamma_{2n}}{|p(x)|} \sum_{i=0}^{n} |\tilde{a}_i \tilde{x}| \qquad \text{con } \gamma_{2n} \leq 2{,}01\, n$$

Errore inerente nelle valutazione polinomiale

Stima $\varepsilon_{IN} \simeq \sum_{i=0}^{n} |c_i||\varepsilon_i| + |c_x||\varepsilon_x|$ $\qquad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

↳ perturbazioni sui dati

$$\varepsilon_i = \left| \frac{\tilde{a}_i - a_i}{a_i} \right| \quad i = 0, \dots, n \qquad \varepsilon_x = \left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right|$$

$$c_i = \frac{a_i}{f(a_0, \dots, a_n)} \frac{\partial f(a_0, \dots, a_x)}{\partial a_i} = \frac{a_i}{p(x)} x^i$$

$$c(x) = \frac{x}{f(a_0, \dots, a_x)} \frac{\partial f(a_0, \dots, a_x)}{\partial (x)} = \frac{x}{p(x)} p'(x)$$

$p(x) = a_0 + a x$ $\qquad c_0 = \frac{a_0}{p(x)} \qquad c_1 = \frac{a_1}{p(x)} \qquad c_x = \frac{x}{p(x)} a_1$

$\varepsilon_{IN} \leq |c_0||\varepsilon_0| + |c_1||\varepsilon_1| + |c_x||\varepsilon_x|$

Sia

$a_0 = 100,\ a_1 = -1,\ x \in 100, 101 \qquad p(x) = 100 - x \quad x \in [100, 101]$

$x = 101$

$$c_0 = \frac{100}{100-x} 101^0 \quad c_1 = \frac{-1}{100-x} \cdot 101^1 \quad c_x = \frac{101}{100-x} \cdot -1$$

$$\varepsilon_{IN} \leq \left| \frac{100}{100-101} \right| |\varepsilon_0| + \left| \frac{-1}{100-101} \right| |\varepsilon_1| + \left| \frac{101}{100-101} \right| |\varepsilon_x|$$

$$= 100 |\varepsilon_0| + 101 |\varepsilon_1| + 101 |\varepsilon_x|$$

Come migliorare l'errore inerente

Si sceglie una base polinomiale diversa da quella richiesta

$1, x, x^2, \dots, x^n$ base canonica $[a, b]$

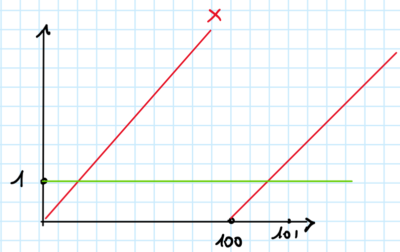
$1, (x-c), (x-c)^2 \dots$ base con centro $c \in [a, b]$ $c \in \mathbb{F}$

$$p(x) = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \dots + b_n(x-c)^n$$

$$p(x) = 100 - x \rightarrow b_0 + b_1(x-c) \qquad c = 100 \quad b_0 = 0 \quad b_1 = 1$$

$$0 - 1(x - 100) = 100 - x$$

$x = 101$



$$\varepsilon_{IN} \leq \left| \frac{b_0}{p(x)} \right| |\varepsilon_0| + \left| \frac{b_1}{p(x)} (x-c) \right| |\varepsilon_1| + \left| \frac{x}{p(x)} p'(x) \right|$$

$$= \frac{0}{px} |\varepsilon_0| + \left| \frac{-1}{px} (101 - 100) \right| |\varepsilon_1| + \left| \frac{101}{p(x)} \right| |\varepsilon_x| =$$

$$0 |\varepsilon_0| + \left| \frac{-1}{-1} \right| \varepsilon_1 + \left| \frac{101}{-1} \right| |\varepsilon_x| = \varepsilon_1 + 101\, \varepsilon_x$$

Si possono scegliere basi migliori di quella concentrica

$p(x) = -(x-100)$ $\quad x = 101 \quad p(101) = -1 \quad b_0 = 0 \quad b_1 = -1$

$$\frac{\tilde{b}_1 - b_1}{b_1} = \frac{1}{100} \qquad \tilde{b}_1 = -\left(1 - \frac{1}{100}\right)$$

$$\frac{q(101) - p(101)}{p(101)} = \left| \frac{-0{,}99 + 1}{1} \right| = \frac{1}{100}$$

$$q(x) = -\left(1-\frac{1}{100}\right)(x-100) = -\frac{99}{100}(x-100)$$

Errore sui dati = errore sul risultato

$p(x) = 100 - x$ base canonica $x \in [100, 101]$

$$= a_0 + a_1 x \qquad a_0 = 100 \qquad a_1 = -1 \qquad \left|\frac{\tilde{a}_1 - a_1}{a_1}\right| = \frac{1}{100}$$

$$q(x) = 100 - \left(1 - \frac{1}{100}\right)x = 100 - \frac{99}{100}x \qquad \hat{a}_1 = 1 \pm \frac{1}{100}$$

$$x = 101 \quad p(101) = -1 \qquad q(101) = 0{,}01$$

$$\left|\frac{q(101) - p(101)}{p(101)}\right| = \left|\frac{0{,}01 + 1}{1}\right| = 1{,}01 \qquad C_x = \frac{x}{p_x} p'(x)$$

rimane lo stesso anche cambiando base

Base Generica

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \varphi_i(x) \quad x \in [a,b] \qquad \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$$

$$\varepsilon_{IN} \le \sum_{i=0}^{n} |c_i||\varepsilon_i| + |C_x|\varepsilon_x| \qquad \varepsilon_i = \left|\frac{\tilde{b}_i - b_i}{b_i}\right| \quad \varepsilon_x = \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right|$$

$$c_i = \frac{b_i}{f(b_0, \dots, b_n, x)} \frac{\partial f(b_0 - b_n x)}{\partial b_i} = \underbrace{\frac{b_i}{p(x)} \varphi_i(x)}$$

$\hookrightarrow$ trovare una base t.c $c_i \le 1$

$C_x = \frac{x}{p(x)} p'(x) \longrightarrow$ non dipende dalla base

Base ben condizionata (Base polinomiale di Bernstein)

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(x) \qquad x \in [a,b] \qquad i = 0, \dots, n$$

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(b-x)^{n-i}(x-a)^i}{(b-a)^n} \qquad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

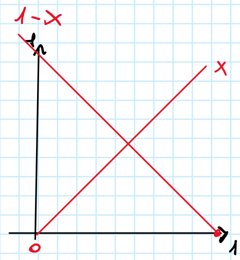
$\downarrow$

denom > numeratore

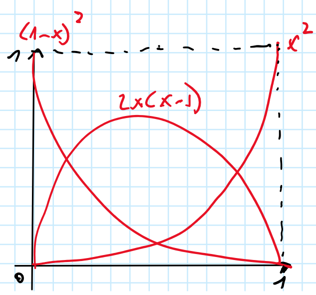
$n = 1, [a,b] = [0,1]$

$$B_{0,1} = \binom{1}{0} \frac{(1-x)^{1-0}(x-0)}{1} = 1 - x$$

$$B_{1,1} = \binom{1}{1} \frac{(1-x)^0 (x-0)^1}{1} = x$$



$n = 2 \quad [a,b] = [0,1]$



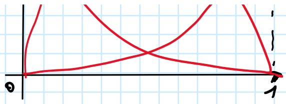
$$B_{0,2}(x) = \binom{2}{0}(1-x)^2(x-0)^0 = (1-x)^2$$

$$B_{1,2}(x) = \binom{2}{1}(1-x)^1(x-0)^1 = 2x(1-x)$$

$$B_{2,2}(x) = \binom{2}{2}(1-x)^0(x-0)^2 = x^2$$

$B_{1,2}(x) = \binom{2}{1}(1-x)^1(x-0)^1 = 2x(1-x)$

$B_{2,2}(x) = \binom{2}{2}(1-x)^0(x-0)^2 = x^2$



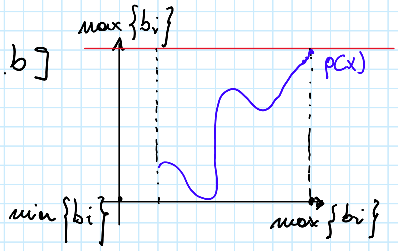
Proprietà

1) $B_{i,n}(x) \geq 0 \quad i = 0, \dots, n \quad \forall x \in [a,b]$

2) $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) = 1 \quad \forall x \in [a,b]$ partizione dell'unità $\rightarrow$ combinazione convessa degli elementi

3) $p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(x) \quad x \in [a,b]$ è una combinazione convessa, cioè

$\min\{b_i\} \leq p(x) \leq \max\{b_i\} \quad \forall x \in [a,b]$



Esempio $p(x) = 100 - x \quad x = [100, 101]$

$a = 100 \quad b = 101 \quad n = 1 \quad b_0 = 100 \quad b_1 = -1 \quad x = 101 \quad p(101) = -1$

$$B_{0,1}(x) = \binom{1}{0}\frac{(101-x)^1(x-100)^0}{(101-100)^1} = 101 - x$$

$$B_{1,1}(x) = \binom{1}{1}\frac{(101-x)^0(x-100)^1}{(101-100)^1} = x - 100$$

$$E_{in} \leq |c_0||\varepsilon_0| + |c_1||\varepsilon_1| + |c_x||\varepsilon_x| =$$

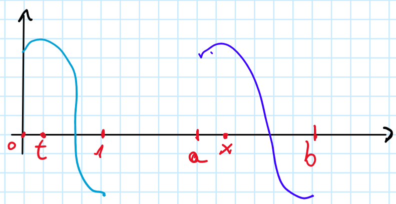
$$\left|\frac{b_0}{p(x)}(101-x)\right||\varepsilon_0| + \left|\frac{b_1}{p(x)}(x-100)\right| + \left|\frac{x}{p(x)}p'(x)\right||\varepsilon_x| =$$

$$\left|\frac{100}{-1}\cancel{(101-101)}\right||\varepsilon_0| + \left|\frac{-1}{-1}\cancel{(101-100)}\right||\varepsilon_1| + \left|\frac{101}{-1}-1\right||\varepsilon_x| \leq$$

$$E_{in} \leq |\varepsilon_1| + 102|\varepsilon_x|$$

$$E_{in} \leq \sum_{i=0}^{n}|c_i||\varepsilon_i| + |c_x||\varepsilon_x| \qquad \varepsilon_i = \left|\frac{\hat{a}_i - a_i}{a_i}\right|$$

Polinomi invarianti per traslazione e scale dell'intervallo



$[a,b] \rightarrow [0,1]$

$x \rightarrow t \qquad t = \dfrac{x-a}{b-a}$

anziché valutare $p(x)$, valuto $p(t)$

$t = \dfrac{x-a}{b-a} \longrightarrow x = a + t(b-a)$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{i,n}(t) \quad x \in [a,b] \qquad B_{i,n} = \binom{n}{i}\frac{(b-x)^{n-i}(x-a)^n}{(b-a)^n}$$

$$= \binom{n}{i}\frac{(b-a-t(b-a))^{n-i}(\cancel{a}+t(b-a)-\cancel{a})^n}{(b-a)^{n-i}(b-a)^i}$$

$$= \binom{n}{i}\frac{(\cancel{(b-a)}(1-t))^{n-i}(t\cancel{(b-a)})^i}{\cancel{(b-a)^{n-i}}\cancel{(b-a)^i}} = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$$

$= p(x)$ nell'intervallo $[0,1]$

$$= \binom{n}{i} \frac{(\cancel{(b-a)}(1-t))^{n-i} \, (t\cancel{(b-a)})^{i}}{\cancel{(b-a)^{n-i}} \, \cancel{(b-a)^{i}}} = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i} t^{i}$$

= p(x) nell'intervallo [0,1]

$$C_t = \frac{t}{p(t)} p'(t)$$

$$p'(t) = (b-a)\, p'(x)$$

$$p(x) = 100 - x \qquad x \in [\overset{a}{100}, \overset{b}{101}]$$

$$= -1(x-100)$$

$$B_{0,1}(t) = 1-t \qquad B_{1,1}(t) = t$$

$$p(t) = -1 \cdot t = -t$$

$$C_t = \frac{t}{p(t)} p'(t) = \frac{1}{-1} \cdot -1 = 1$$

$$\left| \frac{\tilde{t} - t}{t} \right| = \frac{1}{100} \qquad \tilde{t} = \frac{99}{100}$$

$$\left| \frac{p(1) - p\left(\frac{99}{100}\right)}{p(1)} \right| = \frac{1}{100}$$

le basi di Bernstein sono anche le migliori per progettare forme geometriche

Valutazione di $p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(x)$

$$B_{i,n}(t) = t\, B_{i-1,n-1}(t) + (1-t)\, B_{i,n-1}(t)$$
con $B_{0,0}(t) = 1 \qquad t \in [0,1]$
e $B_{i,n}(t) = 0 \ \forall i \notin \{0, \dots, n\}$

formula ricorsiva/ricorrente

$$\begin{array}{cccccc}
 & B_{0,0}(t) = 1 & 0 & & \\
0 \leftarrow & B_{0,1}(t) & B_{1,1}(t) & 0 \\
0 \leftarrow & B_{0,2}(t) & B_{1,2}(t) & B_{2,2}(t)
\end{array}$$

$(1-t)$

$(1-t)$

$$\begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{2} & +- \\ n(n+1) & \cdot/ \end{cases}$$

$O(n^2)$

vs $O(n)$ di Horner, ma più stabile

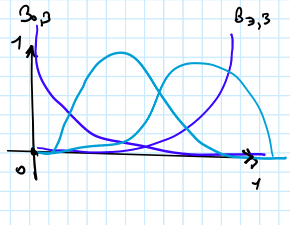
Non si fanno mai operazioni a rischio numerico (si lavora sempre con elementi positivi)

$$p(t) = 2\, B_{0,4}(t) + 2\, B_{2,3}(t) \qquad t \in [0,1]$$

b_0, b_2

$p(t)$ per $t = [0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1]$

$$\begin{array}{llll}
B_{0,0} & & & \\
B_{0,1} & B_{1,1} & & \\
B_{0,2} & B_{1,2} & B_{2,2} & \\
B_{0,3} & B_{1,3} & B_{2,3} & B_{3,3}
\end{array}$$



$p(0) = 2$

$p(1) = 0$

$1 - \frac{1}{2}$

$$p\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{array}{cccc}
1 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \\
\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8}
\end{array}$$

$\times \frac{1}{2}$

$$\rightarrow B\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right]$$

$$p\left(\tfrac{1}{2}\right) = (2, 0, 2, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \frac{2}{8} + \frac{6}{8} = 1$$

$$P\left(\tfrac{1}{2}\right) = B\left(\tfrac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{m\cdot 4 \\ t_i = 1,\dots,m}}{B} = \begin{pmatrix} B_{0,3}(t_1) & B_{1,3}(t_1) & B_{2,3}(t_1) & B_{3,3}(t_1) \\ B_{0,3}(t_2) & \dots & \dots & B_{3,3}(t_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{0,3}(t_m) & \dots & \dots & B_{3,3}(t_m) \end{pmatrix} \qquad P = \underset{m\times 4}{B} \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\text{ALG 1} \begin{cases} B = [B_{0,n}(t), \dots, B_{n,n}(t)] \\ p(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(t) \end{cases}$$

Algoritmo di casteljau

$$B_{i,n}(t) = t\, B_{i-1,n-1}(t) + (1-t) B_{i,n-1}(t)$$

con $B_{0,0}(t) = 1$ $\quad t \in [0,1]$

e $B_{i,n}(t) = 0 \ \forall i \notin \{0,\dots,n\}$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \big(x B_{i-1,n-1}(x) + (1-x) B_{i,n-1}(x) \big)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} b_i x \underbrace{B_{i-1}}_{} (x) + \sum_{i=0}^{n} b_i (1-x) B_{i,n-1}(x)$$

se $i = 0$
$B_{-1}(x)$ non
esiste, quindi è 0

$$= \sum_{i=1}^{n} b_i x B_{i-1}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i (1-x) B_{i,n-1}(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} x B_{i,n-1}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i (1-x) B_{i,n-1}(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \big(b_{i+1} x + b_i (1-x) \big) B_{i,n-1}(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{[1]} B_{i,n-1}(x) \quad , \text{ dove } B_i^{[1]} = b_{i+1}(x)\, x + b_i (1-x)$$

$$B_i^{[2]} = b_{i+1}^{[1]} (x) + b_i^{[1]} (1-x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} b_i^{[2]} B_{i,n-2}(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n=0} b_0^{[n]} B_{0,0}(x) = b_0^{[n]}$$

$$b_i^{[j]} = b_i^{[j-1]} (1-x) + b_{i+1}^{[j-1]} x \qquad j = 0,\dots,n \quad i = 0,\dots,n$$

con $b_i^{[0]} = b_i \quad i = 0,\dots,n$

$b_0^{[0]}$ $\quad b_1^{[0]}$ $\quad b_2^{[0]}$ $\dots$ $b_n^{[0]}$

$b_0^{[1]}$ $\quad b_1^{[1]}$ $\quad \dots \quad b_{n-1}^{[1]}$

$b_0^{[2]}$ $\quad \dots \quad b_{n-2}^{[2]}$

$b_0^{[n]} = p(x)$

Schema triangolare con $\frac{n(n+1)}{2}$ valori da calcolare.

Quindi sono $\frac{n(n+1)}{2}$ addizioni/sottrazioni

$n(n+1)$ moltiplicazioni/divisioni

Ha stessa complessità computazionale dell'algoritmo 1

Anche qua non ci sono situazioni di cancellazione numerica

$$p(t) = 2B_{0,3}(t) + 2B_{2,3}(t) \qquad t \in [0,1]$$

$$t = [0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, 1] \rightarrow p(0) = 2 \quad p(1) = 0$$

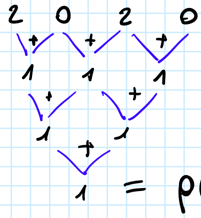
$t = \frac{1}{2}$

$1 - t = \frac{1}{2}$

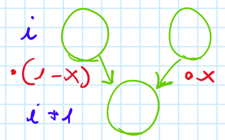
$\times \frac{1}{2}$

$\times \frac{1}{2}$

$\times \frac{1}{2}$

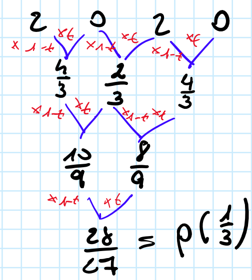


$= p(\tfrac{1}{2})$



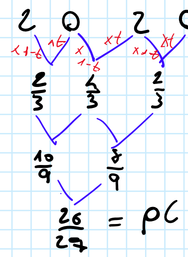
$t = \frac{1}{3}$

$1 - t = \frac{2}{3}$

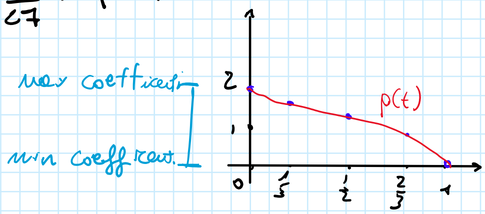


$= p(\tfrac{1}{3})$

$t = \frac{2}{3}$



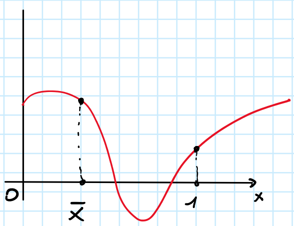
$= p(\tfrac{2}{3})$



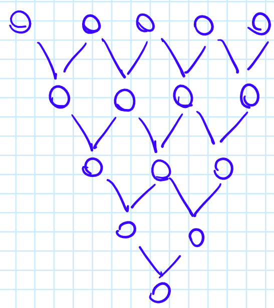
Suddivisione di un polinomio nella base di Bernstein

↓

Tramite algoritmo di Casteljau



$[0, \bar{x}]$, $[\bar{x}, 1]$



$$p(x) = \begin{cases} p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_0^{[i]} B_{i,n}(x) \\ x \in [0, \bar{x}] \\ p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i^{[n-i]} B_{i,n}(\bar{x}) \\ x \in [\bar{x}, 1] \end{cases}$$

Algoritmo per determinare le derivate prime di un polinomio nella base di Bernstein

$$B'_{i,n}(x) = [B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)]$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(x)$$

$$p'(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i B'_{i,n}(x) \rightarrow \text{valore di } p(x)$$

$$p'(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i\, n\left(B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)\right) =$$

$$= n\left(\sum_{i=0}^{n} b_i B_{i-1,n-1}(x) - \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n-1}(x)\right)$$

$$= n\left(\sum_{i=1}^{n} b_i B_{i-1,n-1}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} b_i B_{i,n-1}(x)\right)$$

$$= n\sum_{i=0}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) B_{i,n-1}(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i B_{i,n-1}(x) \qquad d_i = n(b_{i+1} - b_1) \text{ con } i = 0, \dots, n-1$$

$$d'' = d'(p'(x))$$

$$p''(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i B''_{i,n}(x) = (n-1)\left(B'_{i-1,n-2}(x) - B'_{i,n-2}(x)\right)$$

$$p'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i B_{i,n-1}(x) \quad x \in [0,1]$$

come si trova una primitiva di $p'(x)$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(x), \; x \in [0,1] \qquad d_i = n(b_{i+1} - b_i) \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$b_{i+1} = \frac{d_i}{n} + b_i$$

primitiva di q

$$\int_0^1 q(x)\,dx = [q^{-1}(x)]_0^1$$

$$\int_0^1 p'(x)\,dx = [p(x)]_0^1 = p(1) - p(0) = b_n - b_0$$

$$b_n = \frac{d_{n-1}}{dn} + b_{n-1} = \frac{d_{n-1}}{n} + \frac{d_{n-2}}{n} + b_{n-2} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} d_i \qquad b_0 = 0$$

$$p'(0) = d_0 = n(b_1 - b_0) \qquad p'(1) = d_{n-1}$$