5

SCELTA

In questo capitolo tratteremo congiuntamente l'insieme di bilancio e le preferenze, per poter studiare la scelta ottima del consumatore. Abbiamo già detto che secondo il modello di scelta del consumatore gli individui scelgono le migliori combinazioni di consumo possibili. Possiamo ora riformulare questo concetto in termini più precisi e dire che "il consumatore sceglie il paniere preferito tra quelli appartenenti al suo insieme di bilancio".

5.1 Scelta ottima

Un caso tipico è illustrato nella Figura 5.1: rappresentiamo nello stesso grafico l'insieme di bilancio e un certo numero di curve di indifferenza del consumatore. Vogliamo ora individuare nell'insieme di bilancio il paniere che si trova sulla curva di indifferenza più alta. Se le preferenze sono "well-behaved", così che "più è preferito a meno", possiamo limitare la nostra attenzione ai panieri che si trovano *sulla* retta di bilancio, senza preoccuparci di quelli *al di sotto* di essa.

Partendo dall'angolo destro della retta di bilancio e spostandoci verso sinistra lungo la retta, incontriamo curve di indifferenza sempre più alte. Ci fermiamo quando troviamo la curva di indifferenza più alta che tocchi appena la retta di bilancio: nel grafico, il paniere di beni associato alla curva di indifferenza più alta che tocchi appena la retta di bilancio è indicato con (x_1^*, x_2^*).

La scelta (x_1^*, x_2^*) è una **scelta ottima** del consumatore: l'insieme dei panieri preferiti a (x_1^*, x_2^*) — l'insieme dei panieri *al di sopra* della sua curva di indifferenza — non interseca l'insieme dei panieri acquistabili — quelli posti al di *sotto* della sua retta di bilancio. Il paniere (x_1^*, x_2^*) è pertanto il paniere migliore che il consumatore possa acquistare.

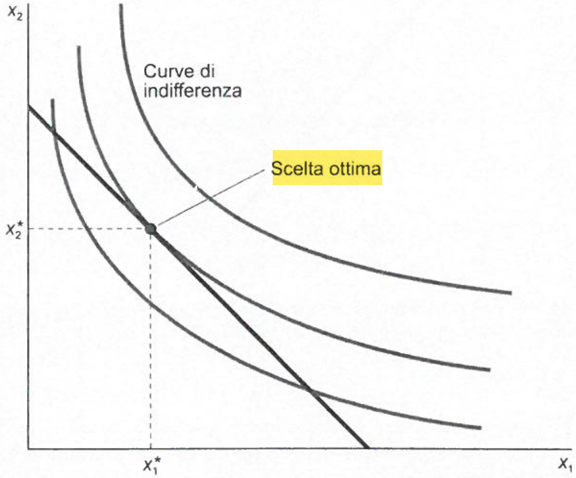


Figura 5.1 **Scelta ottima.** La posizione ottima di consumo si ha in corrispondenza del punto in cui la curva di indifferenza è tangente alla retta di bilancio.

Prendiamo in esame una caratteristica essenziale del paniere ottimo: in corrispondenza di questa scelta, la curva di indifferenza è *tangente* alla retta di bilancio. Non è difficile capire che deve essere così: se la curva di indifferenza non fosse tangente, intersecherebbe la retta di bilancio, e quindi vi sarebbero dei punti sulla retta di bilancio al di sopra della curva di indifferenza — un punto di intersezione non potrebbe essere un punto di ottimo.

È necessario che per avere una scelta ottima si realizzi la condizione di tangenza? Questa non si verifica in *tutti* i casi: la sola condizione generale è che in corrispondenza del punto di ottimo la curva di indifferenza non può intersecare la retta di bilancio. Ma la "non intersezione" implica la tangenza? Prima di osservare in quali casi si verifichi la condizione di tangenza, prendiamo in esame alcune eccezioni.

La prima è rappresentata da una curva di indifferenza che non abbia tangente, come nella Figura 5.2: questa curva di indifferenza ha un "angolo" in corrispondenza della scelta ottima, e quindi non si ha alcuna tangente, perché la definizione matematica di tangente richiede che ve ne sia una sola in corrispondenza di ciascun

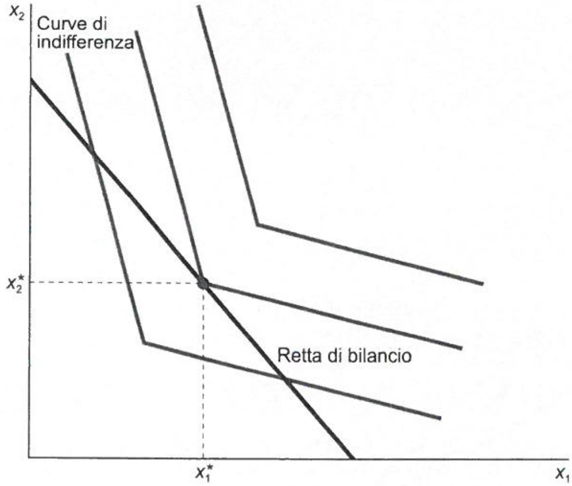


Figura 5.2 **Preferenze ad angolo.** Un paniere di consumo ottimo in corrispondenza del quale la curva di indifferenza non ha tangente.

punto. Questo caso rappresenta più che altro un'eccezione non molto significativa da un punto di vista economico.

La seconda eccezione è più interessante. Supponiamo che il punto di ottimo si trovi in corrispondenza del punto in cui il consumo di un dato bene sia nullo, come nella Figura 5.3. In questo caso l'inclinazione della curva di indifferenza e quella della retta di bilancio sono diverse, ma la curva di indifferenza non *interseca* la retta di bilancio. La Figura 5.3 rappresenta un **ottimo di frontiera**, mentre un caso come quello della Figura 5.1 rappresenta un **ottimo interno**.

Al di là di questi due casi, se abbiamo un ottimo interno con curve di indifferenza "lisce", l'inclinazione della curva di indifferenza deve essere uguale a quella della retta di bilancio. . . perché se fossero diverse la curva di indifferenza intersecherebbe la retta di bilancio e non si avrebbe così un punto di ottimo.

Abbiamo trovato una condizione necessaria per la scelta ottima: se in corrispondenza della scelta ottima si consuma una certa quantità di entrambi i beni, così che tale scelta corrisponda a un ottimo interno, allora la curva di indifferenza deve necessariamente essere tangente alla retta di bilancio. Ma dobbiamo ora chiederci se la condizione di tangenza sia anche una condizione *sufficiente* perché un paniere sia ottimo: in altre parole, possiamo essere certi di trovarci di fronte a una scelta ottima nel caso di un paniere in corrispondenza del quale la curva di indifferenza è tangente alla retta di bilancio?

Nella Figura 5.4 sono rappresentati tre panieri per i quali la condizione di tangenza è soddisfatta: tutti sono interni ma solamente due sono ottimi. Quindi la con-

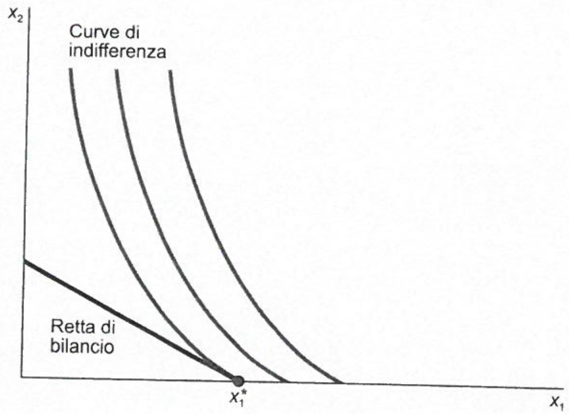


Figura 5.3 **Ottimo di frontiera.** Il paniere di consumo ottimo contiene 0 unità del bene 2. La curva di indifferenza non è tangente alla retta di bilancio.

dizione di tangenza è in genere soltanto una condizione necessaria per l'ottimalità, ma non una condizione sufficiente.

Tuttavia, nel caso di preferenze convesse, la condizione di tangenza è una condizione sufficiente: ogni punto che soddisfa la condizione di tangenza deve essere un punto di ottimo. Ciò risulta chiaro in termini geometrici, poiché una curva convessa tangente a una retta non modifica la sua curvatura per tornare a essere tangente alla stessa retta.

La Figura 5.4 mostra anche che, in genere, vi può essere più di un punto di ottimo che soddisfa la condizione MRS, ma la convessità impone, nuovamente, una restrizione. Se le curve di indifferenza sono *strettamente* convesse (tali da non avere alcun tratto piatto) vi sarà una sola scelta ottima per ciascuna retta di bilancio. Sebbene ciò possa essere dimostrato matematicamente, risulta anche evidente osservando la figura.

Da un punto di vista geometrico è chiaro che il saggio marginale di sostituzione deve essere uguale all'inclinazione della retta di bilancio in corrispondenza di un ottimo interno, ma cosa significa questo in termini economici? Ricordiamo che è possibile interpretare il saggio marginale di sostituzione come il saggio di scambio in corrispondenza del quale il consumatore è disposto a cessare le proprie transazioni. Il mercato offre al consumatore un saggio di scambio $-p_1/p_2$, cioè se egli rinuncia ad un'unità del bene 1, può acquistare p_1/p_2 unità del bene 2. Se, in corrispondenza di un certo paniere di consumo, il consumatore è disposto a cessare le transazioni, ciò significa che per quel paniere il saggio marginale di sostituzione è uguale a questo saggio di scambio:

$$\text{MRS} = -\frac{p_1}{p_2}.$$

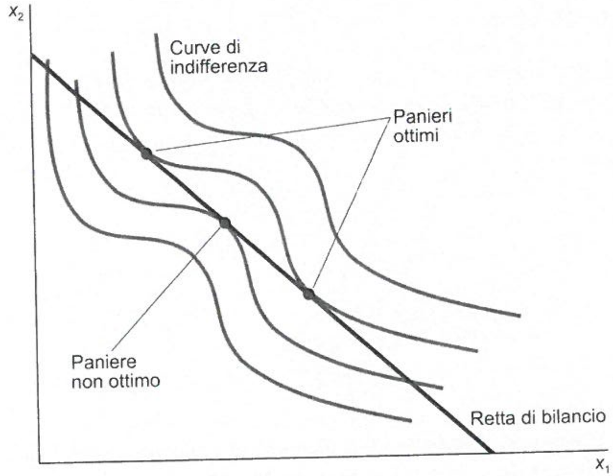


Figura 5.4 **Più di un punto di tangenza.** Vi sono tre punti di tangenza, ma soltanto due punti di ottimo, quindi la condizione di tangenza è una condizione necessaria ma non sufficiente.

Un altro modo di affrontare questo argomento è immaginare cosa accadrebbe se il saggio marginale di sostituzione fosse diverso dal rapporto tra i prezzi. Supponiamo, per esempio, che il MRS sia $\Delta x_2/\Delta x_1 = 1/2$ e che il rapporto tra i prezzi sia $1/1$: ciò significa che il consumatore è disposto a rinunciare a 2 unità del bene 1 per ottenere 1 unità del bene 2, mentre il mercato è disposto a scambiarli 1 a 1. Ma in questo modo il consumatore sarebbe sicuramente disposto a rinunciare a una certa quantità del bene 1 per acquistare una quantità addizionale del bene 2. Quindi ogni volta che il saggio marginale di sostituzione è diverso dal rapporto tra i prezzi, il consumatore non sta effettuando una scelta ottima.

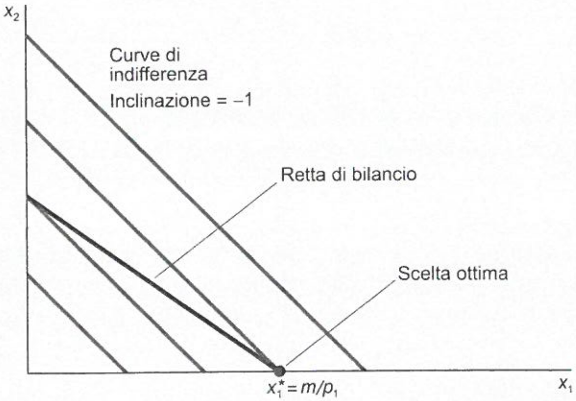
5.2 Domanda del consumatore

La scelta ottima dei beni 1 e 2, dati un certo insieme di prezzi e il reddito, è definita **paniere domandato** dal consumatore. Quando variano i prezzi ed il reddito, in genere varierà anche la scelta ottima del consumatore. La **funzione di domanda** mette in relazione la scelta ottima, cioè la quantità domandata, con i diversi valori dei prezzi e dei redditi.

Le funzioni di domanda sono scritte come funzioni di entrambi i prezzi e del reddito: $x_1(p_1, p_2, m)$ e $x_2(p_1, p_2, m)$. Per ciascun reddito e insieme di prezzi, esiste una combinazione di beni che corrisponde alla scelta ottima del consumatore. Preferenze diverse si tradurranno in funzioni di domanda diverse: ne vedremo alcuni esempi tra poco. Lo scopo principale dei prossimi capitoli sarà studiare il comportamento di queste funzioni di domanda, cioè quali siano le variazioni delle scelte ottime al variare di prezzi e reddito.

5.3 Alcuni esempi

Applichiamo ora il modello di scelta del consumatore agli esempi di preferenze descritti nel Capitolo 3. In ciascun esempio adotteremo lo stesso procedimento: disegneremo le curve di indifferenza e la retta di bilancio e troveremo il punto in corrispondenza del quale la curva di indifferenza più alta tocca appena la retta di bilancio.



$\frac{P_1}{P_2}$ = inclinazione curva di indifferenza

Figura 5.5 **Scelta ottima nel caso di perfetti sostituti.** Se i beni sono perfetti sostituti, la scelta ottima sarà generalmente un punto di frontiera.

Perfetti sostituti

Il caso dei perfetti sostituti è rappresentato nella Figura 5.5. Si presentano tre possibili casi: se $p_2 > p_1$, l'inclinazione della retta di bilancio è inferiore a quella della curva di indifferenza. In questo caso il paniere ottimo corrisponde al punto in cui il consumatore spende tutto il suo reddito per l'acquisto del bene 1. Se $p_1 > p_2$, il consumatore acquista soltanto il bene 2. Infine, se $p_1 = p_2$, vi è un'intera gamma di scelte ottime: in questo caso qualsiasi quantità dei beni 1 e 2 che soddisfi il vincolo di bilancio è ottima. La funzione di domanda per il bene 1 sarà quindi

$$x_1 = \begin{cases} m/p_1 & \text{quando } p_1 < p_2; \\ \text{qualsiasi numero tra 0 e } m/p_1 & \text{quando } p_1 = p_2; \\ 0 & \text{quando } p_1 > p_2. \end{cases}$$

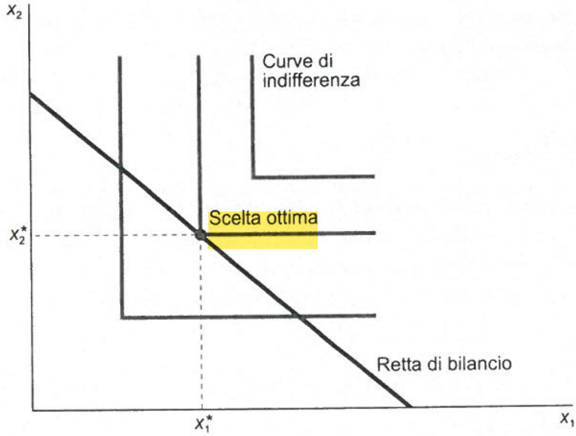


Figura 5.6 **Scelta ottima nel caso di perfetti complementi.** Se i beni sono perfetti complementi, le quantità domandate saranno sempre sulla diagonale, poiché la scelta ottima si ha in un punto in cui x_1 è uguale a x_2.

Sono questi risultati ragionevoli? Essi ci dicono che se i due beni sono perfetti sostituti, un consumatore acquisterà quello meno caro, e se i due beni hanno lo stesso prezzo, per il consumatore sarà indifferente acquistare l'uno o l'altro.

Perfetti complementi

Il caso dei perfetti complementi è rappresentato nella Figura 5.6: va sottolineato che il paniere ottimo deve sempre trovarsi sulla diagonale, quali che siano i prezzi. Nel nostro esempio, sappiamo che gli individui che hanno due piedi acquisteranno le scarpe a paia[1].

Vogliamo ora determinare algebricamente la scelta ottima. Sappiamo che il consumatore acquista la stessa quantità del bene 1 e del bene 2, quali che siano i prezzi. Indichiamo tale quantità con x: dobbiamo ora soddisfare il vincolo di bilancio

$$p_1 x + p_2 x = m.$$

Risolvendo per x, otteniamo le scelte ottime dei beni 1 e 2:

$$x_1 = x_2 = x = \frac{m}{p_1 + p_2}.$$

In questo caso la funzione di domanda corrispondente alla scelta ottima è del tutto intuitiva: poiché i due beni vengono consumati assieme, è come se il consumatore spendesse tutto il suo denaro per acquistare un unico bene il cui prezzo fosse $p_1 + p_2$.

[1] Non preoccupatevi: in seguito otterremo risultati più interessanti!

Beni neutrali e "mali"

Nel caso di un bene neutrale o di un "male" il consumatore spende tutto il suo denaro per acquistare il bene che gli piace e non acquista affatto né il bene neutrale né il "male". Quindi se la merce 1 è un bene e la merce 2 è un "male", le funzioni di domanda saranno

$$x_1 = \frac{m}{p_1}$$
$$x_2 = 0.$$

Beni discreti

Supponiamo che il bene 1 sia un bene discreto disponibile soltanto in unità intere, mentre il bene 2 rappresenta la moneta che può essere spesa per tutti gli altri beni. Se il consumatore sceglie 1, 2, 3, $\cdots$ unità del bene 1, sceglie implicitamente i panieri di consumo $(1, m - p_1), (2, m - 2p_1), (3, m - 3p_1)$, e così via. Possiamo allora confrontare l'utilità di ciascun paniere per determinare a quale di essi sia associata l'utilità maggiore.

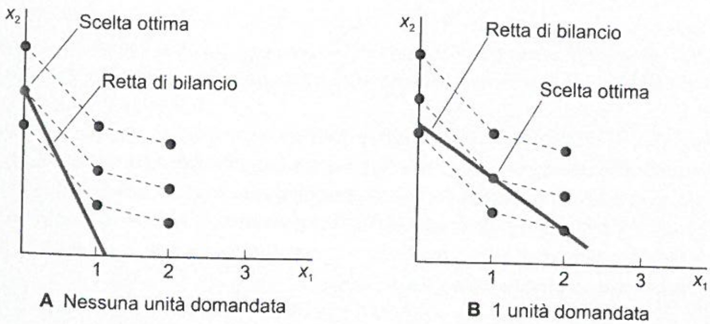


Figura 5.7 **Beni discreti.** Nel quadro A abbiamo rappresentato la scelta di non consumare alcuna unità del bene 1, mentre nel quadro B ne viene domandata 1 unità.

Alternativamente possiamo analizzare le curve di indifferenza rappresentate nella Figura 5.7. Come di consueto il paniere ottimo è quello situato sulla "curva" di indifferenza più elevata. Se il prezzo del bene 1 è molto alto, il consumatore sceglierà di non consumarne alcuna unità, mentre, se il prezzo diminuisce, la scelta ottima sarà di consumarne 1 unità. Se il prezzo diminuisce ulteriormente il consumatore sceglierà di consumare un numero maggiore di unità del bene 1.

Preferenze concave

Osserviamo la situazione rappresentata nella Figura 5.8: possiamo dire che X rappresenti la scelta ottima? La risposta è no. La scelta ottima per queste preferenze sarà sempre un punto di frontiera, come il paniere Z. Ciò è evidente se si ricorda il significato delle preferenze non convesse: se un consumatore può acquistare gelato e olive ma non vuole consumarli contemporaneamente, spenderà tutto per l'acquisto dell'uno oppure dell'altro bene.

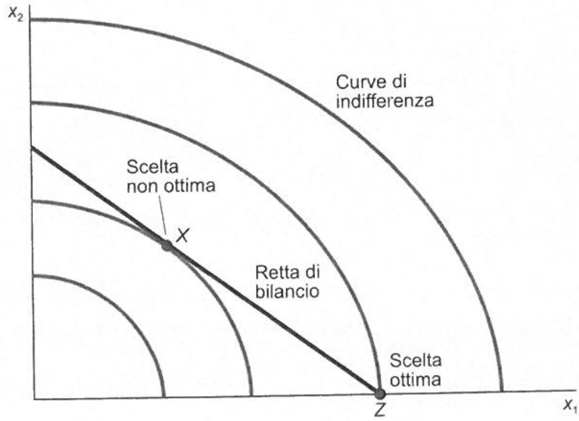


Figura 5.8 **Scelta ottima nel caso di preferenze concave.** La scelta ottima è il punto di frontiera Z e non il punto interno di tangenza X, perché Z si trova su una curva di indifferenza più alta.

Preferenze Cobb-Douglas

Sia la funzione di utilità di tipo Cobb-Douglas: $u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$. Nell'appendice di questo capitolo useremo il calcolo differenziale per ottenere le scelte ottime per questa funzione di utilità, che sono:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \frac{c}{c+d}\frac{m}{p_1} \\ x_2 &= \frac{d}{c+d}\frac{m}{p_2}. \end{aligned}}$$

Queste funzioni di domanda sono spesso utili negli esempi matematici, cosicché sarebbe bene che il lettore le imparasse a memoria. Le preferenze Cobb-Douglas godono di un'utile proprietà. Consideriamo la frazione del reddito che un consumatore spende per il bene 1 in caso di preferenze Cobb-Douglas. Se egli consuma x_1 unità del bene 1, spende $p_1 x_1$, e ciò rappresenta una frazione $p_1 x_1/m$ del suo reddito complessivo. Sostituendo a x_1 la corrispondente funzione di domanda otteniamo

$$\frac{p_1 x_1}{m} = \frac{p_1}{m} \frac{c}{c+d} \frac{m}{p_1} = \frac{c}{c+d}.$$

Analogamente, la frazione del reddito che il consumatore spende per il bene 2 è $d/(c+d)$.

Nel caso delle preferenze Cobb-Douglas, il consumatore spende quindi sempre una frazione fissa del suo reddito per ciascun bene: la grandezza della frazione è determinata dall'esponente della funzione.

Per questo motivo è spesso utile scegliere una rappresentazione della funzione di utilità Cobb-Douglas nella quale la somma degli esponenti sia uguale a 1. Se $u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$ possiamo immediatamente interpretare a come la frazione del reddito spesa per il bene 1. Per questo generalmente scriveremo le preferenze Cobb-Douglas in questa forma.

5.4 Stima di una funzione di utilità

Abbiamo visto sino ad ora vari tipi di preferenze e di funzioni di utilità e abbiamo esaminato le funzioni di domanda che vi corrispondono. Ma in realtà ci troviamo generalmente di fronte al problema opposto: possiamo osservare le scelte del consumatore, ma dobbiamo determinare quale genere di preferenze abbia prodotto il comportamento osservato.

Per esempio, supponiamo di osservare le scelte di un consumatore in corrispondenza di vari prezzi e livelli di reddito. Nella Tabella 5.1 abbiamo rappresentato la domanda di due beni in corrispondenza dei diversi livelli di reddito e dei prezzi prevalenti in anni diversi. Abbiamo inoltre calcolato le frazioni del reddito spese per ciascun bene in ciascun anno impiegando le formule $s_1 = p_1 x_1/m$ e $s_2 = p_2 x_2/m$.

Possiamo vedere che le frazioni del reddito spese per ciascun bene sono relativamente costanti: vi sono infatti piccole variazioni da un'osservazione a un'altra, ma nessuna appare abbastanza significativa. La frazione media spesa per il bene 1 è circa $1/4$ e quella spesa per il bene 2 circa $3/4$. Una funzione di utilità del tipo $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}}$ sembra perciò coerente con questi dati. Vale a dire, da una funzione di utilità di questo tipo conseguirebbero scelte molto vicine a quelle osservate. Per comodità abbiamo calcolato l'utilità associata a ciascuna scelta impiegando questa stima della funzione di utilità Cobb-Douglas.

Per quanto i dati a nostra disposizione ci permettono di dire, il consumatore si comporta come se stesse massimizzando la funzione $x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}}$. Ulteriori osservazioni potrebbero certamente indurci a rifiutare quest'ipotesi, ma le scelte che abbiamo fin qui osservato sembrano adattarsi piuttosto bene al principio di ottimizzazione.

Un'importante conseguenza di questo risultato è che possiamo impiegare questa funzione di utilità per valutare l'effetto delle diverse proposte di politica economica.

Anno	p_1	p_2	m	x_1	x_2	s_1	s_2	Utilità
1	1	1	100	25	75	0,25	0,75	57,0
2	1	2	100	24	38	0,24	0,76	33,9
3	2	1	100	13	74	0,26	0,74	47,9
4	1	2	200	48	76	0,24	0,76	67,8
5	2	1	200	25	150	0,25	0,75	95,8
6	1	4	400	100	75	0,25	0,75	80,6
7	4	1	400	24	304	0,24	0,76	161,1

Tabella 5.1 **Alcuni dati relativi al comportamento del consumatore.**

Supponiamo per esempio che il governo intenda imporre una tassa il cui effetto si tradurrà per il consumatore in questione, nei prezzi $(2, 3)$ e in un reddito pari a 200. Secondo le nostre stime, il paniere domandato in corrispondenza di questi prezzi sarebbe

$$x_1 = \frac{1}{4}\frac{200}{2} = 25$$
$$x_2 = \frac{3}{4}\frac{200}{3} = 50.$$

Possiamo stimare l'utilità associata a questo paniere:

$$u(x_1, x_2) = 25^{\frac{1}{4}} 50^{\frac{3}{4}} \approx 42.$$

Ciò significa che da questa proposta conseguirebbe per il consumatore un benessere più elevato di quello dell'anno 6, ma inferiore a quello dell'anno 5. In questo modo possiamo impiegare le scelte osservate per valutare le conseguenze, per questo consumatore, di una proposta di cambiamento della politica economica.

Quest'idea ha una notevole importanza in economia, e vogliamo perciò esaminarla ulteriormente. Data l'osservazione di un certo numero di scelte, possiamo tentare di determinare la corrispondente funzione, se ne esiste una, che viene massimizzata. Una volta stimata questa funzione, possiamo impiegarla per prevedere il comportamento di scelta in una nuova situazione, o per valutare proposte di cambiamento del contesto economico.

Naturalmente abbiamo descritto una situazione molto semplice. Nella realtà normalmente non siamo in grado di conoscere le scelte di consumo dei singoli individui, anche se spesso disponiamo di dati relativi a quelle di gruppi di individui (giovani, famiglie del ceto medio, anziani, e così via). Le preferenze di questi gruppi per diversi beni possono essere differenti, e sono riflesse nei loro diversi tipi di spesa per il consumo. Possiamo stimare una funzione di utilità che descrive le loro abitudini di consumo, e impiegarla per prevedere la domanda o valutare le proposte di politica economica.

Nel nostro semplice esempio è evidente che le frazioni del reddito sono relativamente costanti, e quindi la funzione di utilità Cobb-Douglas rappresenta un'approssimazione piuttosto buona. In altri casi può essere appropriata una forma più complessa della funzione di utilità: i calcoli saranno allora molto più complicati, ma la sostanza del procedimento è identica.

5.5 Implicazioni della condizione MRS

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che l'osservazione delle scelte del consumatore ci permette di determinare le preferenze che le hanno prodotte. Dato un numero sufficiente di osservazioni è spesso possibile stimare la funzione di utilità corrispondente alle scelte osservate.

Ma anche l'osservazione di *una* scelta del consumatore in corrispondenza di un insieme di prezzi ci può far capire come l'utilità del consumatore varia in relazione a una variazione del consumo.

In un mercato ben organizzato, i prezzi dei beni sono in generale più o meno gli stessi per tutti gli individui. Prendiamo l'esempio di due beni come il burro e il latte: se il prezzo di burro e latte è lo stesso per tutti, se tutti ottimizzano e se tutti si trovano in una soluzione interna... allora il saggio marginale di sostituzione tra burro e latte sarà lo stesso per tutti.

Questa è la conseguenza dell'analisi precedente: il mercato offre a tutti lo stesso saggio di scambio tra burro e latte, e tutti variano il consumo dei beni finché la valutazione marginale "interna" dei due beni è uguale alla valutazione "esterna" del mercato.

L'aspetto interessante di questa affermazione è che essa è indipendente dal reddito e dai gusti personali dei consumatori. Gli individui possono valutare il loro consumo *complessivo* dei due beni in modi molto diversi: c'è chi consuma molto burro e poco latte, e viceversa. Può darsi che una persona agiata consumi molto latte e molto burro e che altri consumino invece piccole quantità di entrambi. Ma il saggio marginale di sostituzione deve essere lo stesso per tutti coloro i quali consumano i due beni: tutti i consumatori devono convenire su quanto valga l'uno in termini dell'altro, cioè a quanto sarebbero disposti a rinunciare di un bene per avere una quantità maggiore dell'altro.

È molto importante che il rapporto tra i prezzi misuri i saggi marginali di sostituzione, perché questo significa che esiste un modo di valutare le possibili variazioni dei panieri di consumo. Supponiamo, per esempio, che un litro di latte costi \$1 e che mezzo chilogrammo di burro costi \$2. Il saggio marginale di sostituzione per tutti i consumatori di latte e di burro sarà quindi 2: per rinunciare a mezzo chilogrammo di burro i consumatori dovranno ottenere 2 litri di latte, oppure dovranno avere mezzo chilogrammo di burro per rinunciare a 2 litri di latte. Per questo motivo tutti i consumatori di entrambi i beni valuteranno allo stesso modo la variazione marginale del consumo.

Supponiamo ora che un inventore scopra un sistema per trasformare il latte in burro: versando 3 litri di latte in questa macchina, si otterrà 1/2 chilogrammo di burro e nessun altro sottoprodotto. Esiste un mercato per questa invenzione? La risposta è no: è più che certo che nessun capitalista deciderà di investire in questo progetto. Infatti siamo già in una situazione in cui tutti i consumatori sono disposti a scambiare 2 litri di latte con 1/2 chilogrammo di burro: perché mai dovrebbero voler sostituire 3 litri di latte a 1/2 chilogrammo di burro? L'invenzione è inutile.

Che cosa accadrebbe se l'inventore potesse far funzionare la macchina nel modo inverso e con 1/2 chilogrammo di burro potesse ottenere 3 litri di latte? Per questa invenzione esisterebbe certamente un mercato. I prezzi di mercato di latte e burro ci dicono che i consumatori sono disposti a scambiare 1/2 chilogrammo di burro con 2 litri di latte: avere 3 litri di latte al posto di 1/2 chilogrammo di burro è quindi uno scambio più vantaggioso di quello offerto dal mercato.

I prezzi di mercato dimostrano che la prima macchina non è un investimento redditizio: si producono $2 di burro impiegando $3 di latte. Dire che non è un buon investimento equivale a dire che i consumatori valutano di più l'input che l'output. La seconda macchina produce $3 di latte usando soltanto $2 di burro: questo è un investimento redditizio perché i consumatori valutano di più l'output che l'input.

Il punto è che, poiché i prezzi misurano il saggio al quale gli individui sono disposti a sostituire un prodotto con un altro, possiamo impiegare i prezzi per valutare le scelte che comportano variazioni nei consumi. Il fatto che i prezzi non siano numeri arbitrari ma riflettano quanto gli individui valutino i beni al margine è una delle idee più importanti ed essenziali della teoria economica.

Osservando una singola scelta in corrispondenza di un insieme di prezzi è possibile determinare il saggio marginale di sostituzione che corrisponde a quella combinazione di consumo. Se i prezzi cambiano e si osserva una nuova scelta si può determinare un altro valore del saggio marginale di sostituzione. Quanto maggiore è il numero delle scelte osservate, tante più informazioni si avranno circa la forma delle preferenze che possono aver prodotto il comportamento osservato.

5.6 Scelta di una tassa

Anche se finora abbiamo discusso soltanto una piccola parte della teoria del consumatore, possiamo già applicarla per ricavarne conclusioni di grande interesse e importanza. Ecco un esempio che tratta della scelta tra due tipi di tasse.

Abbiamo già visto che una **tassa sulla quantità** è una tassa sulla quantità consumata di un bene, come per esempio una tassa sulla benzina di 15 centesimi al gallone, mentre una **tassa sul reddito** grava sul reddito del consumatore. Se, ad esempio, lo stato si propone di ottenere una certa entrata addizionale, è meglio, a tal fine, introdurre una tassa sulla quantità o una tassa sul reddito? Per rispondere a questa domanda, applichiamo quel che abbiamo imparato fin qui. Consideriamo dapprima l'effetto di una tassa sulla quantità. Supponiamo che il vincolo di bilancio di partenza sia:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m.$$

Come si modificherà il vincolo di bilancio se il consumo del bene 1 è tassato a un saggio t? Dal punto di vista del consumatore è esattamente come se il prezzo del bene 1 fosse aumentato di t. Il nuovo vincolo di bilancio è pertanto

$$(p_1 + t)x_1 + p_2x_2 = m. \tag{5.1}$$

Per il consumatore una tassa sulla quantità equivale a un aumento del prezzo del bene: la Figura 5.9 presenta un esempio di come questa variazione del prezzo influisca sulla domanda. A questo punto, non sappiamo ancora se la tassa aumenterà o diminuirà il consumo del bene 1, anche se supponiamo che lo farà diminuire. In ogni caso, sappiamo che la scelta ottima, (x_1^*, x_2^*), deve soddisfare il vincolo di bilancio

$$(p_1 + t)x_1^* + p_2 x_2^* = m. \tag{5.2}$$

Le entrate derivanti dalla tassa saranno, d'altra parte $R^* = t x_1^*$.

Prendiamo ora in considerazione una tassa sul reddito che determini la stessa quantità di entrate. Il vincolo di bilancio del consumatore sarà in questo caso

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m - R^*$$

oppure, sostituendo per R^*,

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m - t x_1^*.$$

Dove si situa questa retta di bilancio nella Figura 5.9?

È facile vedere che essa ha la stessa inclinazione, $-p_1/p_2$, della retta di bilancio di partenza, ma il problema è determinarne la posizione. Si dà il caso che la retta di bilancio in presenza della tassa sul reddito debba passare per il punto (x_1^*, x_2^*): per verificarlo è sufficiente inserire (x_1^*, x_2^*) nel vincolo di bilancio con tassa sul reddito e verificare se è soddisfatto.

È vero, cioè, che

$$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = m - t x_1^*?$$

La risposta è affermativa, poiché questa equazione è semplicemente un modo di riscrivere la (5.2), che sappiamo essere vera.

È pertanto stabilito che (x_1^*, x_2^*) giace sulla retta di bilancio in presenza di tassa sul reddito: rappresenta cioè una scelta che il consumatore *può permettersi*. È facile capire che questa scelta non è ottima: in corrispondenza di (x_1^*, x_2^*) il saggio marginale di sostituzione è $-(p_1 + t)/p_2$, ma la tassa sul reddito consente di scambiare a un saggio $-p_1/p_2$. Così la retta di bilancio interseca la curva di indifferenza in corrispondenza di (x_1^*, x_2^*), il che significa che sulla retta di bilancio esistono certamente dei punti preferiti a (x_1^*, x_2^*).

La tassa sul reddito è pertanto sicuramente migliore della tassa sulla quantità: infatti la quantità di denaro che il consumatore dovrà pagare sarà la stessa con entrambe le tasse, ma la sua soddisfazione sarà maggiore in presenza di una tassa sul reddito che di una sulla quantità.

Questo è un bel risultato, che val la pena di tenere a mente, ma è necessario capirne anche i limiti. Per prima cosa ciò vale soltanto per un consumatore. Il ragionamento dimostra che per ogni consumatore esiste una tassa sul reddito che consente allo stato di ottenere entrate identiche a quelle ottenute con una tassa sulla quantità, e provoca una minor riduzione del benessere del consumatore. Ma l'ammontare della tassa sul reddito sarà ovviamente diverso per ciascun consumatore, quindi una

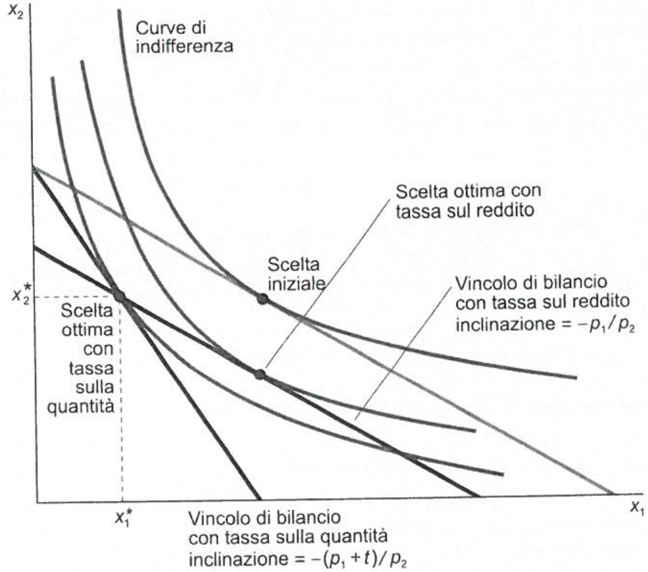


Figura 5.9 **Tassa sul reddito e tassa sulla quantità.** Prendiamo in considerazione il caso di una tassa sulla quantità che dia R^* entrate e una tassa sul reddito con lo stesso risultato. Come abbiamo dimostrato nel testo, la soddisfazione del consumatore sarà maggiore nel caso della tassa sul reddito perché potrà scegliere un punto su una curva di indifferenza più alta.

tassa sul reddito *uniforme* per tutti i consumatori non è necessariamente migliore di una tassa sulla quantità *uniforme* per tutti i consumatori. (Si pensi al caso di un consumatore che non consumi affatto il bene 2 — questi preferirebbe sicuramente la tassa sulla quantità a una tassa uniforme sul reddito).

In secondo luogo, abbiamo assunto che, in presenza di una tassa sul reddito, il reddito del consumatore non vari: abbiamo assunto cioè che la tassa sul reddito sia fondamentalmente una tassa globale che diminuisce la quantità di denaro che un consumatore può spendere, ma che non influisce sulle sue scelte. Ma questa sembra un'ipotesi poco plausibile. Se il consumatore percepisce un reddito da lavoro, possiamo aspettarci che, se tassiamo il reddito, egli sia indotto a lavorare di meno, quindi, in seguito alla tassa, il reddito potrebbe ridursi di una quantità maggiore dell'ammontare della tassa.

In terzo luogo, non abbiamo considerato come reagisce l'offerta alla tassa: abbiamo visto come reagisce la domanda, ma l'analisi completa dovrebbe considerare anche le variazioni dell'offerta.

Sommario

1. La scelta ottima del consumatore corrisponde a quel paniere nell'insieme di bilancio che si trova sulla curva di indifferenza più alta.

2. Il paniere ottimo sarà caratterizzato dalla condizione di uguaglianza tra l'inclinazione della curva di indifferenza (il saggio marginale di sostituzione) e l'inclinazione della retta di bilancio.

3. Dall'osservazione di varie scelte del consumatore è possibile stimare una funzione di utilità che può aver determinato quel tipo di scelte. Tale funzione di utilità può essere impiegata per prevedere scelte future e per valutare l'effetto sui consumatori delle proposte di politica economica.

4. Se tutti i consumatori si trovano di fronte agli stessi prezzi, il saggio marginale di sostituzione è lo stesso per tutti e tutti saranno pertanto disposti a scambiare i due beni allo stesso modo.

Domande

1. Se i beni sono perfetti sostituti, quale sarà la funzione di domanda del bene 2?

2. Supponiamo che le curve di indifferenza siano rette con inclinazione $-b$. Dati prezzi arbitrari p_1, p_2 e un reddito monetario m, quali saranno le scelte ottimali del consumatore?

3. Supponiamo che un consumatore consumi sempre 2 cucchiaini di zucchero per ogni tazza di caffè. Se il prezzo di un cucchiaino di zucchero è p_1 e quello di una tazza di caffè è p_2, e il consumatore ha a disposizione m dollari per caffè e zucchero, quale quantità ne vorrà acquistare?

4. Si supponga di avere preferenze non convesse per gelato e olive, come nel testo, che i prezzi siano p_1, p_2, mentre il reddito è m dollari. Si elenchino i panieri di consumo ottimali.

5. Se la funzione di utilità di un consumatore è $u(x_1, x_2) = x_1 x_2^4$, quale frazione del suo reddito spenderà per l'acquisto del bene 2?

6. Per quali tipi di preferenze il consumatore avrà la stessa soddisfazione in presenza di una tassa sulla quantità e di una sul reddito?

APPENDICE

È utile risolvere il problema della massimizzazione delle preferenze e ottenere degli esempi di funzioni di domanda. Nel testo abbiamo già affrontato questo problema per casi semplici come i perfetti sostituti o i perfetti complementi: in questa appendice esamineremo il problema in termini più generali.

Per prima cosa rappresenteremo le preferenze del consumatore con una funzione di utilità, $u(x_1, x_2)$. Nel Capitolo 4 abbiamo visto che non si tratta di un'ipotesi molto restrittiva: infatti la maggior parte delle preferenze "well-behaved" può essere descritta da una funzione di utilità.

Osserviamo che *sappiamo* già come risolvere il problema della scelta ottima: dobbiamo semplicemente mettere insieme quanto visto negli ultimi tre capitoli. In questo capitolo abbiamo imparato che la scelta ottima (x_1, x_2) deve soddisfare la condizione:

$$\text{MRS}(x_1, x_2) = -\frac{p_1}{p_2} \tag{5.3}$$

e nell'appendice al Capitolo 4 abbiamo visto che il MRS può essere espresso come il rapporto tra le derivate della funzione di utilità preceduto dal segno negativo. Effettuando la sostituzione e cambiando di segno otteniamo:

$$\boxed{\frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}.} \tag{5.4}$$

Dal Capitolo 2 sappiamo che una scelta ottima deve soddisfare anche il vincolo di bilancio:

$$\boxed{p_1 x_1 + p_2 x_2 = m.} \tag{5.5}$$

Abbiamo quindi due equazioni — la condizione MRS e il vincolo di bilancio — e due incognite, x_1 e x_2. Tutto ciò che dobbiamo fare è risolvere queste due equazioni per esprimere le scelte ottimali di x_1 e x_2 in funzione dei prezzi e del reddito. Vi sono molti modi di risolvere due equazioni in due incognite: un modo efficace, sebbene non sempre il più semplice, consiste nel risolvere il vincolo di bilancio per una delle scelte, e poi sostituirla nella condizione MRS.

Riscrivendo il vincolo di bilancio otteniamo

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \tag{5.6}$$

e sostituendo nell'equazione (5.4) otteniamo

$$\frac{\partial u(x_1, m/p_2 - (p_1/p_2)x_1)/\partial x_1}{\partial u(x_1, m/p_2 - (p_1/p_2)x_1)/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Questa espressione ha una sola incognita, x_1, e può essere risolta per x_1 rispetto a (p_1, p_2, m). Successivamente, possiamo ottenere dal vincolo di bilancio anche x_2 come funzione dei prezzi e del reddito.

Possiamo risolvere il problema della massimizzazione anche in un modo più sistematico, usando le condizioni di massimizzazione del calcolo differenziale. Per farlo, poniamo dapprima il problema della massimizzazione dell'utilità come un problema di massimizzazione vincolata:

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2)$$

$$\text{tale che } p_1 x_1 + p_2 x_2 = m.$$

Questo significa che vogliamo scegliere x_1 e x_2 in modo che soddisfino il vincolo, e che diano un valore di $u(x_1, x_2)$ più elevato di quello corrispondente a qualsiasi altro valore di x_1 e x_2 che soddisfi il vincolo.

Questo problema può essere risolto in due modi. Il primo consiste semplicemente nel risolvere il vincolo per una delle variabili in termini dell'altra e poi sostituirla nella funzione obiettivo.

Per esempio, per ogni dato valore di x_1 la quantità di x_2 necessaria per soddisfare il vincolo di bilancio è data dalla funzione lineare

$$x_2(x_1) = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1. \tag{5.7}$$

Sostituiamo ora $x_2(x_1)$ e x_2 nella funzione di utilità per risolvere il problema di massimizzazione *non vincolata*:

$$\max_{x_1} u(x_1, m/p_2 - (p_1/p_2)x_1).$$

Questo è un problema di massimizzazione non vincolata solo in x_1, poiché abbiamo usato la funzione $x_2(x_1)$ che ci assicura che il valore di x_2 soddisferà sempre il vincolo di bilancio, quale che sia il valore di x_1.

Per risolvere questo problema è sufficiente differenziare rispetto a x_1 e porre come sempre il risultato uguale a zero. Questo procedimento ci dà una condizione del primo ordine:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2(x_1))}{\partial x_1} + \frac{\partial u(x_1, x_2(x_1))}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} = 0. \tag{5.8}$$

In questo caso il primo termine rappresenta l'effetto diretto dell'aumento dell'utilità derivante dall'aumento di x_1. Il secondo termine è costituito da due parti: il saggio di aumento dell'utilità all'aumentare di x_2, $\partial u/\partial x_2$, moltiplicato per dx_2/dx_1, il tasso di aumento di x_2 all'aumentare di x_1, in modo da soddisfare l'equazione di bilancio. Possiamo differenziare (5.7) per calcolare quest'ultima derivata:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2}.$$

Sostituendo in (5.8) otteniamo

$$\frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)/\partial x_1}{\partial u(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

per cui il saggio marginale di sostituzione tra x_1 e x_2 deve essere uguale al rapporto tra i prezzi in corrispondenza della scelta ottima (x_1^*, x_2^*). Questa è esattamente la condizione che abbiamo ottenuto sopra: l'inclinazione della curva di indifferenza deve essere uguale all'inclinazione della retta di bilancio. Naturalmente la scelta ottima deve soddisfare anche il vincolo di bilancio $p_1x_1^* + p_2x_2^* = m$, per cui abbiamo ancora due equazioni in due incognite.

Il secondo modo in cui si possono risolvere questi problemi è impiegando i **moltiplicatori di Lagrange**. Questo metodo parte dalla definizione di una funzione ausiliaria nota come *Lagrangiana*:

$$\boxed{L = u(x_1, x_2) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m).}$$

La nuova variabile λ è chiamata **moltiplicatore di Lagrange**, poiché è moltiplicata per il vincolo.[2] Il teorema di Lagrange afferma che una scelta ottima (x_1^*, x_2^*) deve soddisfare le tre condizioni del primo ordine

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= \frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= p_1 x_1^* + p_2 x_2^* - m = 0. \end{aligned}}$$

Si possono fare alcune osservazioni interessanti a proposito di queste tre equazioni. Per prima cosa osserviamo che esse sono semplicemente le derivate della Lagrangiana rispetto a x_1, x_2, e λ, ciascuna posta uguale a zero. La derivata rispetto a λ non è altro che il vincolo di bilancio. Abbiamo ora tre equazioni in tre incognite x_1, x_2 e λ: possiamo sperare di risolvere per x_1 e x_2 in p_1, p_2 e m.

Il teorema di Lagrange è dimostrato in tutti i testi di calcolo differenziale avanzato: esso è ampiamente usato nei corsi avanzati di teoria economica, ma per i nostri scopi è sufficiente conoscere l'enunciato del teorema e sapere come usarlo.

Nel nostro caso particolare, è importante osservare che se dividiamo la prima condizione per la seconda, otteniamo:

$$\boxed{\frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)/\partial x_1}{\partial u(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}}$$

che significa semplicemente che il MRS deve essere uguale al rapporto tra i prezzi. Il vincolo di bilancio ci fornisce l'altra equazione e quindi abbiamo nuovamente due equazioni in due incognite.

ESEMPIO: Funzioni di domanda Cobb-Douglas

Nel Capitolo 4 abbiamo introdotto la **funzione di utilità Cobb-Douglas**

$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d.$$

Poiché le funzioni di utilità vengono definite a meno di una trasformazione monotona, prendiamo i logaritmi di questa espressione, ottenendo

$$\ln u(x_1, x_2) = c \ln x_1 + d \ln x_2.$$

Vogliamo trovare le funzioni di domanda per x_1 e x_2 relative alla funzione di utilità Cobb-Douglas. Il problema che vogliamo risolvere è

$$\max_{x_1, x_2} c \ln x_1 + d \ln x_2$$

$$\text{tale che } p_1 x_1 + p_2 x_2 = m.$$

[2] Il simbolo λ è la lettera greca *lambda* minuscola.

Vi sono almeno tre modi per risolverlo: uno consiste nello scrivere la condizione MRS e il vincolo di bilancio. Usando l'espressione del MRS derivata nel Capitolo 4, otteniamo

$$\frac{cx_2}{dx_1} = \frac{p_1}{p_2}$$
$$p_1x_1 + p_2x_2 = m.$$

Queste sono due equazioni in due incognite che possono essere risolte per la scelta ottima di x_1 e x_2. Un modo per risolverle consiste nel sostituire la seconda nella prima ottenendo

$$\frac{c(m/p_2 - x_1p_1/p_2)}{dx_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Con le opportune trasformazioni otteniamo

$$c(m - x_1p_1) = dp_1x_1$$

e quindi

$$cm = (c+d)p_1x_1$$

ovvero

$$x_1 = \frac{c}{c+d}\frac{m}{p_1}.$$

Questa è la funzione di domanda di x_1. Per trovare la funzione di domanda di x_2, sostituiamo nel vincolo di bilancio e otteniamo

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\frac{c}{c+d}\frac{m}{p_1} \\ &= \frac{d}{c+d}\frac{m}{p_2}. \end{aligned}$$

Il secondo modo consiste nel sostituire direttamente il vincolo di bilancio nel problema di massimizzazione. Il problema così diventa

$$\max_{x_1} c\ln x_1 + d\ln(m/p_2 - x_1p_1/p_2).$$

La condizione del primo ordine è

$$\frac{c}{x_1} - d\frac{p_2}{m - p_1x_1}\frac{p_1}{p_2} = 0.$$

Con facili calcoli otteniamo

$$x_1 = \frac{c}{c+d}\frac{m}{p_1}.$$

Sostituiamo nuovamente nel vincolo di bilancio $x_2 = m/p_2 - x_1p_1/p_2$ ottenendo

$$x_2 = \frac{d}{c+d}\frac{m}{p_2}.$$

Queste sono le funzioni di domanda dei due beni, ed esse coincidono con le funzioni ricavate sopra con l'altro metodo.

Consideriamo ora il metodo di Lagrange. Scriviamo la Lagrangiana

$$L = c \ln x_1 + d \ln x_2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$$

e differenziamo per ottenere le tre condizioni del primo ordine

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{c}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= \frac{d}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0.
\end{aligned}$$

Il modo migliore di procedere è risolvere prima per λ e poi per x_1 e x_2. Con opportuni passaggi otteniamo

$$\begin{aligned}
c &= \lambda p_1 x_1 \\
d &= \lambda p_2 x_2.
\end{aligned}$$

Non resta altro da fare che sommarle membro a membro:

$$c + d = \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2) = \lambda m$$

e quindi

$$\lambda = \frac{c + d}{m}.$$

Sostituiamo nelle prime due equazioni e risolviamo per x_1 e x_2 per ottenere

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{c}{c + d} \frac{m}{p_1} \\
x_2 &= \frac{d}{c + d} \frac{m}{p_2}
\end{aligned}$$

esattamente come prima.