21

CURVE DI COSTO

Abbiamo studiato nel capitolo precedente la minimizzazione dei costi da parte dell'impresa; continuiamo ora la nostra analisi per mezzo di un'importante costruzione geometrica: la **curva di costo**. Le curve di costo possono essere impiegate per rappresentare graficamente la funzione di costo di un'impresa e per studiare la determinazione delle scelte relative alla quantità ottima di output.

21.1 Costi medi

Consideriamo la funzione di costo descritta nel Capitolo 20, $c(w_1, w_2, y)$, che esprime il costo minimo che deve essere sostenuto per produrre una quantità y di output, se i prezzi dei fattori sono (w_1, w_2). In questo capitolo assumeremo che i prezzi dei fattori siano fissi, in modo da poter esprimere il costo come funzione del solo y, e cioè $c(y)$.

Alcuni dei costi dell'impresa non dipendono dalla quantità di output che essa produce. Come abbiamo già visto nel Capitolo 20, questi sono i costi fissi, cioè quelli che devono essere sostenuti indipendentemente dalla quantità prodotta. Per esempio, un'impresa che abbia contratto un'ipoteca deve rimborsare il prestito ipotecario indipendentemente dalla quantità di output che produce.

Gli altri costi, invece, variano al variare della produzione: sono questi i costi variabili. I costi totali di un'impresa corrispondono sempre alla somma dei costi variabili, $c_v(y)$, e dei costi fissi, F:

$$c(y) = c_v(y) + F.$$

La **funzione di costo medio** esprime il costo per unità di output. La **funzione di costo medio variabile** misura i costi variabili per unità di output, e analogamente la **funzione di costo medio fisso** misura i costi fissi per unità di output. Per l'equazione precedente:

$$AC(y) = \frac{c(y)}{y} = \frac{c_v(y)}{y} + \frac{F}{y} = AVC(y) + AFC(y)$$

dove $AVC(y)$ indica i costi medi variabili e $AFC(y)$ i costi medi fissi[1]. Quale sarà la forma di queste funzioni? La più semplice è senz'altro la funzione di costo medio fisso: quando $y = 0$ essa tende all'infinito, e tende a zero all'aumentare di y. (Si veda la Figura 21.1A).

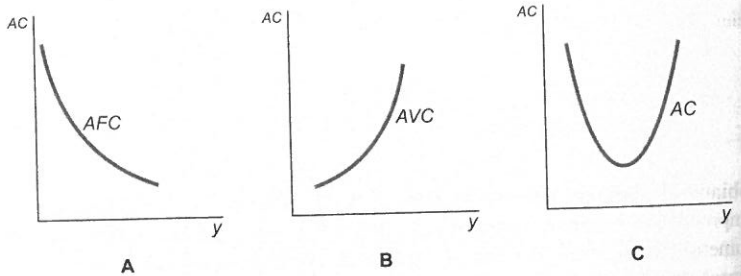

Figura 21.1 **Costruzione della curva del costo medio.** (A) I costi medi fissi decrescono all'aumentare dell'output. (B) I costi medi variabili, da un certo punto in poi, crescono all'aumentare dell'output. (C) La combinazione di questi due effetti dà luogo a una curva del costo medio con una forma a U.

Consideriamo ora la funzione di costo variabile. Partendo da una quantità nulla di output, si pensi di produrre una unità. In questo caso, quando $y = 1$, i costi medi variabili corrispondono esattamente al costo (variabile) di produzione di questa unità. Si porti ora il livello di produzione a due unità. Ci attenderemo che, nel peggiore dei casi, i costi variabili raddoppino, e quindi che i costi medi variabili rimangano costanti. Se fosse possibile organizzare la produzione in modo più efficiente, all'aumentare della scala dell'output i costi medi variabili potrebbero,

[1] *AC*, *AVC* e *AFC* dalle iniziali delle espressioni in lingua inglese *Average Costs*, *Average Variable Costs* e *Average Fixed Costs*.

inizialmente, addirittura diminuire. A lungo andare, però, possiamo attenderci che essi aumentino poiché, se vi sono dei fattori fissi, questi finiranno per porre dei vincoli al processo produttivo.

Supponiamo, per esempio, che i costi fissi derivino dal pagamento dell'affitto per un edificio di date dimensioni. In questo caso, aumentando la produzione, i costi medi variabili (costi per unità di prodotto) possono, per un certo periodo, rimanere costanti. Ma, quando l'edificio sia sfruttato al massimo, questi costi subiranno un forte aumento, determinando una curva di costo medio variabile come quella della Figura 21.1B.

La curva del costo medio corrisponde alla somma di queste due curve, e avrà quindi l'andamento a U rappresentato nella Figura 21.1C. L'iniziale diminuzione dei costi medi dipende dalla diminuzione dei costi medi fissi, mentre l'aumento finale dei costi medi è dovuto all'aumento dei costi medi variabili. La combinazione di questi due effetti produce l'andamento a U che si osserva nella figura.

21.2 Costi marginali

Un'altra curva interessante è la **curva del costo marginale**. La curva del costo marginale misura la *variazione* dei costi corrispondente ad una variazione dell'output. In altri termini, per qualsiasi livello y di output, possiamo chiederci quale sarà la variazione dei costi se l'output varia di una quantità Δy:

$$MC(y) = \frac{\Delta c(y)}{\Delta y} = \frac{c(y + \Delta y) - c(y)}{\Delta y}.$$

Il costo marginale può essere egualmente espresso nei termini della funzione di costo variabile:

$$MC(y) = \frac{\Delta c_v(y)}{\Delta y} = \frac{c_v(y + \Delta y) - c_v(y)}{\Delta y}$$

che equivale alla prima definizione, poiché $c(y) = c_v(y) + F$ e i costi fissi, F, non variano al variare di y.

Si considera spesso che Δy rappresenti una unità di output, e quindi che il costo marginale rappresenti la variazione dei costi derivante dal produrre una unità addizionale di output. Se si considera la produzione di un bene discreto, il costo marginale corrispondente alla produzione di y unità non è altro che $c(y) - c(y - 1)$. Ciò facilita la trattazione, ma è talvolta fuorviante. Si ricordi che il costo marginale è un *saggio di variazione*: il rapporto tra la variazione dei costi e la variazione dell'output. Se si considera una variazione unitaria dell'output, il costo marginale appare una semplice variazione dei costi, mentre è in realtà un saggio di variazione.

È possibile rappresentare anche la curva del costo marginale nella figura precedente? Notiamo in primo luogo che, per definizione, i costi variabili sono nulli quando la produzione è nulla, e quindi, per la prima unità di output

$$MC(1) = \frac{c_v(1) + F - c_v(0) - F}{1} = \frac{c_v(1)}{1} = AVC(1).$$

Quindi il costo marginale della prima (piccola) unità addizionale di output è uguale al suo costo medio variabile.

Supponiamo ora di produrre in corrispondenza di livelli di output in cui i costi *medi* variabili siano decrescenti. Ne consegue che, in corrispondenza di questi livelli, i costi *marginali* risultano inferiori ai costi variabili medi. Infatti, se si aggiungono a una somma numeri inferiori al valore della media, la media si abbassa.

Pensiamo a una serie di numeri che rappresenti i costi medi in corrispondenza di diversi livelli di output. Se la media è decrescente, ciò significa che il costo di ogni unità addizionale è inferiore alla media calcolata fino a quel punto. Per abbassarla, è necessario aggiungere unità addizionali i cui costi siano inferiori a quelli medi.

Analogamente, se ci si trova in corrispondenza di livelli di output in cui i costi medi variabili sono crescenti, i costi marginali saranno superiori ai costi medi variabili — gli elevati costi marginali alzano la media.

Quindi la curva del costo marginale si troverà al di sotto della curva di costo medio variabile, a sinistra del minimo di quest'ultima, e, al di sopra della stessa curva, a destra del suo punto di minimo. Questo significa che la curva del costo marginale interseca la curva di costo medio variabile in corrispondenza del suo punto di minimo.

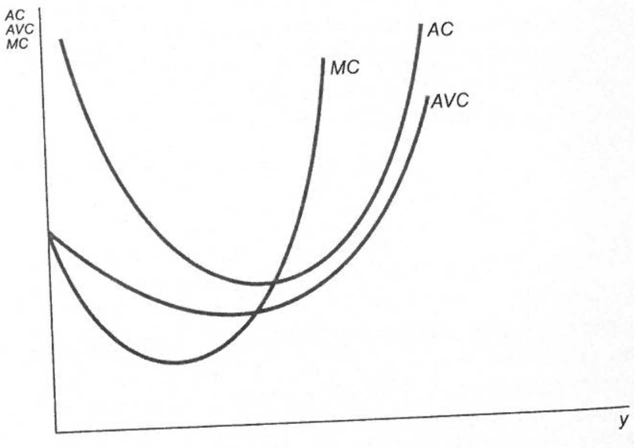

Figura 21.2 **Curve di costo.** Curva del costo medio (AC), del costo medio variabile (AVC) e del costo marginale (MC).

Lo stesso vale per la curva del costo medio. Se i costi medi diminuiscono, i costi marginali devono necessariamente essere inferiori ai costi medi e, se i costi medi aumentano, i costi marginali devono essere maggiori dei costi medi. Tali osservazioni ci permettono di tracciare la curva del costo marginale (si veda la Figura 21.2).

Riassumiamo i punti principali:

- Inizialmente, la curva del costo medio variabile può avere inclinazione negativa, anche se non necessariamente. Tuttavia, in presenza di fattori fissi che vincolano la produzione, a partire da un certo punto inizierà a crescere.
- La curva del costo medio inizialmente diminuisce, poiché diminuiscono i costi fissi, ma, da un certo punto in poi, inizierà a crescere a causa dei crescenti costi medi variabili.
- Per la prima unità prodotta il costo marginale e il costo medio variabile coincidono.
- La curva del costo marginale passa per il punto di minimo della curva del costo variabile medio e della curva del costo medio.

21.3 Costi marginali e costi variabili

Esaminiamo ora altre relazioni tra le varie curve. Una non proprio scontata è la seguente: l'area al di sotto della curva del costo marginale, determinata in corrispondenza di diversi livelli dell'output y, rappresenta il costo variabile di produzione di y unità di output.

La curva del costo marginale misura il costo di produzione di ciascuna unità addizionale di output. Sommando il costo di produzione di ciascuna unità di output, otteniamo i costi totali di produzione — esclusi i costi fissi.

Possiamo trattare rigorosamente il caso di un bene prodotto in quantità discrete. Prima di tutto notiamo che

$$c_v(y) = [c_v(y) - c_v(y-1)] + [c_v(y-1) - c_v(y-2)] + \\ \cdots + [c_v(1) - c_v(0)]$$

poiché $c_v(0) = 0$ e gli altri termini si semplificano, cioè il secondo termine semplifica il terzo, il quarto il quinto, e così via. Ma ciascun termine di questa somma corrisponde al costo marginale relativo ad un differente livello di output:

$$c_v(y) = MC(y-1) + MC(y-2) + \ldots + MC(0).$$

Quindi ogni termine della somma rappresenta l'area di un rettangolo con altezza $MC(y)$ e base unitaria. Sommando tutti questi rettangoli si otterrà l'area al di sotto della curva del costo marginale rappresentata nella Figura 21.3.

ESEMPIO: Specifiche curve di costo

Sia $c(y) = y^2 + 1$ la funzione di costo. Si avrà:

- costi variabili: $c_v(y) = y^2$

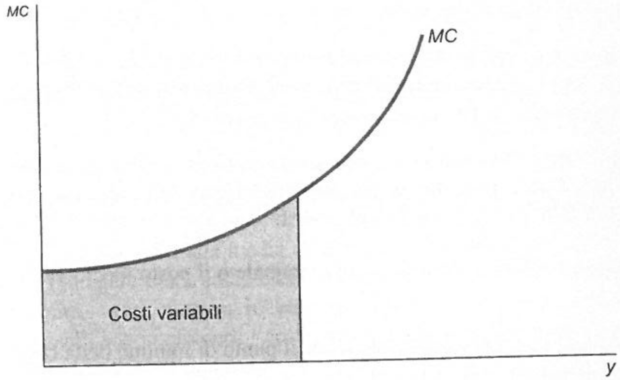

Figura 21.3 **Costo marginale e costi medi variabili.** L'area al di sotto della curva del costo marginale rappresenta i costi variabili.

- costi fissi: $c_f(y) = 1$
- costi medi variabili: $AVC(y) = y^2/y = y$
- costi medi fissi: $AFC(y) = 1/y$
- costi medi: $AC(y) = \dfrac{y^2+1}{y} = y + \dfrac{1}{y}$
- costi marginali: $MC(y) = 2y$.

Le precedenti espressioni sono tutte ovvie, a parte l'ultima, per derivare la quale è necessario possedere alcune nozioni di calcolo. Se la funzione di costo è $c(y) = y^2 + F$, la funzione del costo marginale sarà $MC(y) = 2y$. È opportuno tenere a mente quest'ultima formula, poiché sarà usata negli esercizi.

Quale sarà l'andamento di queste curve? Il modo più semplice per disegnarle consiste nel tracciare in primo luogo la curva del costo medio variabile, una retta con inclinazione 1, e quindi la curva del costo marginale, una retta con inclinazione 2.

La curva del costo medio è minima quando il costo medio coincide con il costo marginale, cioè quando

$$y + \frac{1}{y} = 2y$$

che può essere risolta per ottenere $y_{\min} = 1$. Il costo medio corrispondente a $y = 1$ è 2, che è anche il costo marginale. Il grafico risultante è quello della Figura 21.4.

ESEMPIO: Curve del costo marginale per due impianti

Supponiamo che due impianti abbiano funzioni di costo differenti, $c_1(y_1)$ e $c_2(y_2)$.

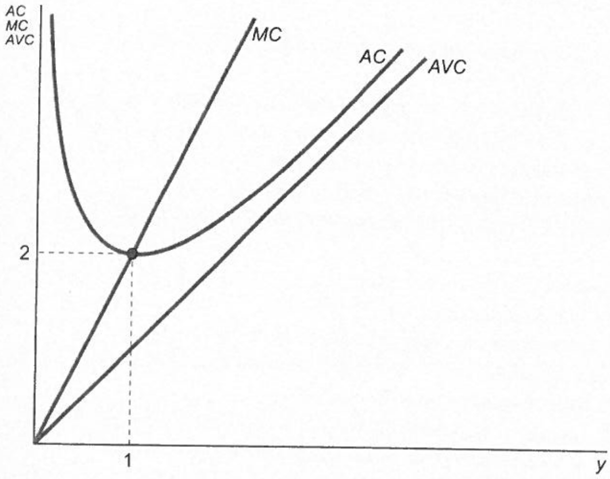

Figura 21.4 **Curve di costo.** Curve di costo per $c(y) = y^2 + 1$.

Intendiamo produrre y unità di output al costo più basso. Assegneremo a ciascun impianto una certa quantità di output da produrre. La domanda è: quale quantità dovrà produrre ciascun impianto?

Formuliamo il problema di minimizzazione dei costi:

$$\min_{y_1, y_2} c_1(y_1) + c_2(y_2)$$

$$\text{tale che } y_1 + y_2 = y.$$

Come risolverlo? Perché la ripartizione della produzione tra i due impianti sia ottimale, il costo marginale dell'output per l'impianto 1 deve essere uguale al costo marginale dell'output per l'impianto 2. Per dimostrarlo, supponiamo che i costi marginali non siano uguali; in questo caso sarebbe conveniente trasferire una piccola parte della produzione dall'impianto con costi marginali più elevati a quello con costi marginali più bassi. Se la ripartizione della produzione è ottima, il trasferimento della produzione da un impianto all'altro non può ridurre i costi.

Sia $c(y)$ la funzione di costo che esprime il modo più economico per produrre y unità di output — cioè il costo di produzione di y unità di output, posto che sia ottima la ripartizione della produzione tra i due impianti. Il costo marginale di produzione di una unità addizionale di output deve allora essere il medesimo, indipendentemente dall'impianto in cui tale unità viene prodotta.

Rappresentiamo le due curve del costo marginale, $MC_1(y_1)$ e $MC_2(y_2)$, nella Figura 21.5. La curva del costo marginale per i due impianti, considerati insieme,

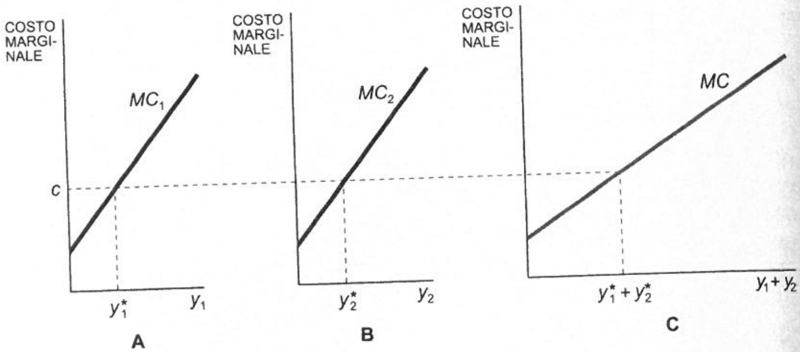

Figura 21.5 **Costi marginali per un'impresa con due impianti.** La curva dei costi marginali totali (C) corrisponde alla somma orizzontale delle curve dei costi marginali per i due impianti (A e B).

corrisponde alla somma orizzontale delle due curve del costo marginale (si veda la Figura 21.5C).

Per qualsiasi livello dei costi marginali, c, produrremo y_1^* e y_2^* tali che $MC_1(y_1^*) = MC_2(y_2^*) = c$, e avremo così prodotto $y_1^* + y_2^*$ unità di output. Pertanto la quantità di output prodotto in corrispondenza di un qualsiasi costo marginale c è pari esattamente alla somma delle quantità di output prodotte dai due impianti se i costi marginali dell'impresa 1 e dell'impresa 2 sono uguali a c, cioè alla somma orizzontale delle curve del costo marginale.

21.4 Costi di lungo periodo

Nell'analisi precedente, i costi fissi dell'impresa sono stati definiti come i costi derivanti dall'acquisto di fattori il cui impiego l'impresa non è in grado di variare nel breve periodo. Nel lungo periodo, al contrario, l'impresa può scegliere il livello dei suoi fattori "fissi", poiché non sono più fissi.

È evidente che nel lungo periodo vi possono essere ancora dei fattori quasi-fissi. In altri termini, si può considerare come una specifica caratteristica della tecnologia il fatto che alcuni costi debbano comunque essere sostenuti per poter produrre una quantità positiva di output. Ma, nel lungo periodo, non vi sono costi fissi, nel senso che è sempre possibile produrre una quantità nulla di output a costi nulli, cioè è sempre possibile cessare l'attività. Se, nel lungo periodo, vi sono fattori quasi-fissi, la curva del costo medio tenderà ad avere una forma a U, esattamente come nel breve periodo. Ma nel lungo periodo, per definizione, è sempre possibile produrre una quantità nulla di output a costi nulli.

Ovviamente, il significato di "lungo periodo" dipende dal problema in esame. Se la scala dell'impianto viene considerata un fattore fisso, il "lungo periodo" corrisponde al tempo impiegato dall'impresa per modificare la scala dell'impianto. Se il fattore fisso è costituito dagli obblighi contrattuali di pagamento dei salari, il lungo periodo corrisponde al tempo che l'impresa impiega per variare le dimensioni della sua mano d'opera.

Consideriamo, per esempio, la scala dell'impianto come fattore fisso, e indichiamola con k. La funzione di costo di breve periodo dell'impresa, posto che la dimensione dell'impianto sia k, sarà $c_s(y,k)$, dove l'indice s sta per "breve periodo"[2]. (Qui k corrisponde a $\overline{x}_2$ nel Capitolo 20).

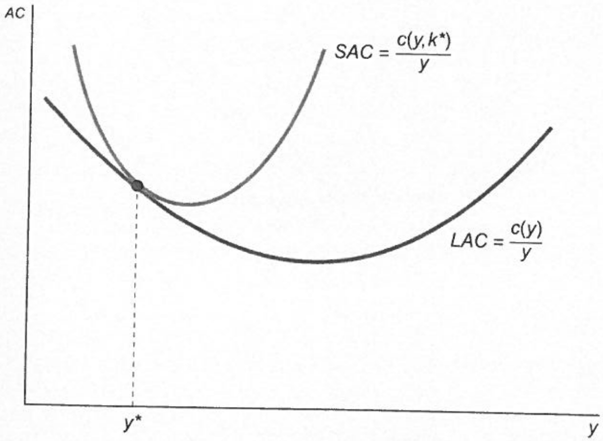

Figura 21.6 **Costi medi di breve e di lungo periodo.** La curva del costo medio di breve periodo deve essere tangente alla curva del costo medio di lungo periodo.

Per qualsiasi dato livello dell'output, esisterà una scala dell'impianto ottima per produrlo. Indichiamo con $k(y)$ la dimensione ottima dell'impianto. Questa corrisponde alla domanda condizionata del fattore "dimensione d'impianto" in funzione dell'output. (Naturalmente, la domanda dipende anche dai costi dell'impianto e da altri fattori di produzione, che qui non abbiamo considerato). Quindi, come abbiamo già visto nel Capitolo 20, la funzione di costo di lungo periodo sarà $c_s(y, k(y))$. Questo rappresenta il costo totale di produzione di un livello y di output, posto che l'impresa possa modificare in modo ottimale la dimensione dell'impianto. La funzione di costo di lungo periodo coincide con la funzione di costo di breve periodo, in corrispondenza delle scelte ottime dei fattori fissi

$$c(y) = c_s(y, k(y)).$$

[2] Da *short run*, breve periodo.

Consideriamo la funzione da un punto di vista grafico. Scelto un livello y^* di output, sia $k^* = k(y^*)$ la dimensione ottima dell'impianto per quel dato livello di output. La funzione di costo di breve periodo per un impianto di dimensioni k^* sarà $c_s(y, k^*)$, e la funzione di costo di lungo periodo sarà $c(y) = c_s(y, k(y))$, esattamente come prima.

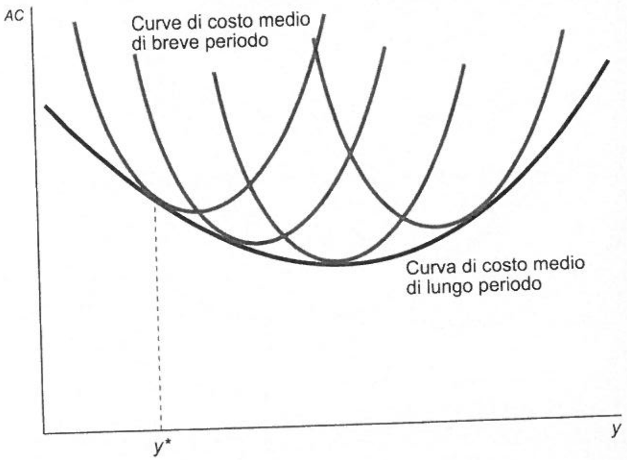

Figura 21.7 **Costi medi di breve e di lungo periodo.** La curva del costo medio di lungo periodo è l'inviluppo delle curve di costo medio di breve periodo.

Si noti ora un fatto importante: il costo di breve periodo necessario per produrre un livello di output y deve essere almeno altrettanto grande del costo di lungo periodo necessario per produrre lo stesso output. Nel breve periodo infatti la dimensione dell'impianto è fissa, mentre nel lungo periodo l'impresa è libera di variarla. Poiché una delle scelte di lungo periodo concerne la dimensione dell'impianto k^*, la scelta ottima relativa alla produzione di y unità di output deve comportare costi non più elevati di $c(y, k^*)$. Questo significa che l'impresa deve conseguire risultati almeno altrettanto buoni sia che modifichi le dimensioni dell'impianto, sia che le mantenga fisse, cioè

$$c(y) \leq c_s(y, k^*)$$

per tutti i livelli di y.

Infatti, per un dato livello di y, y^*, sappiamo che

$$c(y^*) = c_s(y^*, k^*)$$

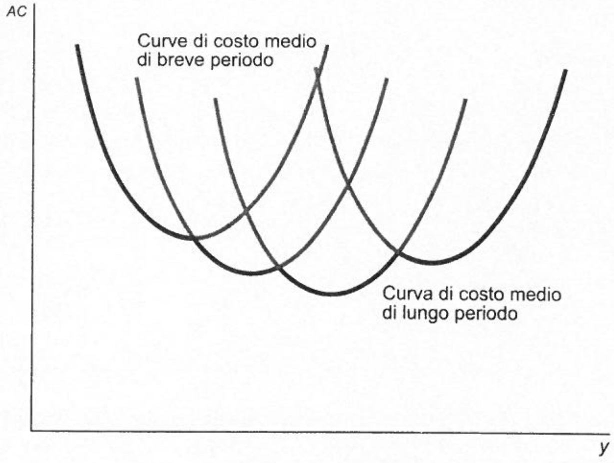

Figura 21.8 **Livelli discreti di dimensione dell'impianto.** La curva di costo di lungo periodo è l'inviluppo inferiore delle curve di breve periodo, esattamente come nell'esempio precedente.

perché in corrispondenza di y^* la scelta *ottima* della dimensione dell'impianto è k^*. Quindi, in corrispondenza di y^*, i costi di lungo periodo e quelli di breve periodo coincidono.

Se il costo di breve periodo è sempre maggiore del costo di lungo periodo, ed entrambi coincidono in corrispondenza di un determinato livello di output, ciò significa che i costi medi di breve e di lungo periodo godono della medesima proprietà: $AC(y) \leq AC_s(y, k^*)$ e $AC(y^*) = AC_s(y^*, k^*)$. Questo implica che la curva di costo medio di breve periodo giace sempre al di sopra della curva di costo medio di lungo periodo e che esse coincidono in un punto, y^*. Quindi, la curva del costo medio di lungo periodo (LAC) e quella di breve periodo (SAC) devono essere tangenti in quel punto (si veda la Figura 21.6).

Lo stesso vale per livelli di output diversi da y^*, per esempio $y_1, y_2, \ldots, y_n$, cui sono associate le dimensioni di impianto $k_1 = k(y_1), k_2 = k(y_2), \ldots, k_n = k(y_n)$. Si otterrà dunque un grafico come quello della Figura 21.7, dove la curva di costo medio di lungo periodo rappresenta l'**inviluppo inferiore** delle curve dei costi medi di breve periodo.

21.5 Livelli discreti di dimensione dell'impianto

Nella discussione precedente abbiamo assunto implicitamente che fosse possibile scegliere le dimensioni di impianto in modo continuo. Ne consegue che ciascun livello di output è associato a una sola dimensione ottima dell'impianto. Consideriamo ora il caso in cui si possa scegliere tra un numero limitato di dimensioni

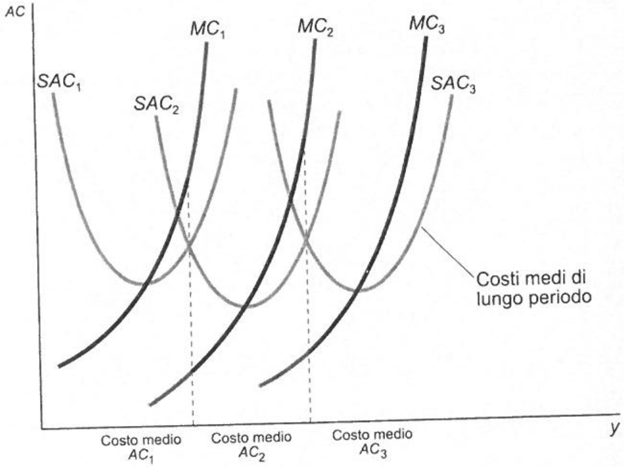

Figura 21.9 **Costi marginali di lungo periodo.** Quando sono disponibili livelli discreti del fattore fisso, l'impresa sceglierà la quantità del fattore fisso che minimizza i costi medi. Così, la curva del costo marginale di lungo periodo sarà costituita da segmenti delle curve del costo marginale di breve periodo associate a ciascun livello del fattore fisso.

dell'impianto, per esempio tra k_1, k_2 e k_3. Disegniamo le curve del costo medio associate a queste dimensioni di impianto, come nella Figura 21.8.

Per costruire la curva del costo medio di lungo periodo, ricordiamo che questa è la curva di costo che si ottiene variando k in modo ottimale. In questo caso ciò non è difficile: poiché vi sono solo tre diverse dimensioni di impianto, è sufficiente determinare quella alla quale sono associati i costi più bassi. In altri termini, per qualsiasi livello y di output, si sceglie la dimensione dell'impianto alla quale è associato il costo minimo di produzione per quel dato livello di output.

La curva del costo medio di lungo periodo rappresenta quindi l'inviluppo inferiore della curva di costo medio di breve periodo, come rappresentato nella Figura 21.8. Si noti che le caratteristiche di questa figura sono simili a quelle della Figura 21.7: i costi medi di breve periodo hanno sempre una dimensione almeno pari a quella dei costi medi di lungo periodo, e coincidono per il livello dell'output in corrispondenza del quale la domanda di lungo periodo del fattore fisso corrisponde alla quantità disponibile dello stesso fattore.

21.6 Costi marginali di lungo periodo

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che la curva del costo medio di lungo periodo rappresenta l'inviluppo inferiore delle curve di costo medio di breve periodo.

Quali implicazioni avrà questo fatto sui costi marginali? Consideriamo in primo luogo il caso di livelli discreti di dimensione dell'impianto. In questo caso la curva del costo marginale di lungo periodo è formata dai tratti appropriati delle curve del costo marginale di breve periodo (si veda la Figura 21.9). In corrispondenza di ciascun livello di output, individuiamo una curva di costo medio di breve periodo e, quindi, il costo marginale ad essa associato.

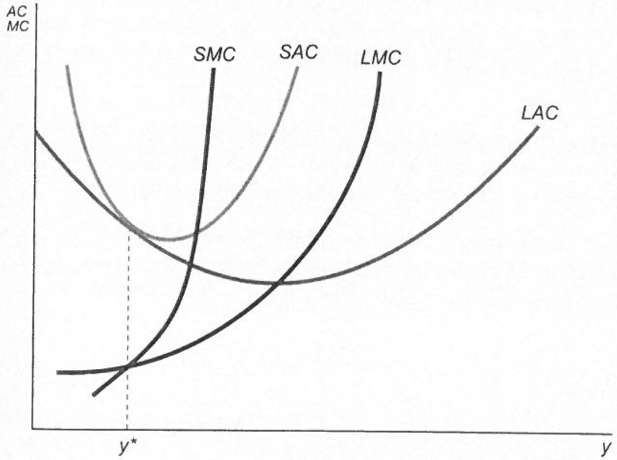

Figura 21.10 **Costi marginali di lungo periodo.** La relazione tra i costi marginali di lungo e di breve periodo nel caso di livelli continui del fattore fisso.

Questo vale quale che sia il numero delle dimensioni dell'impianto, e quindi il grafico relativo al caso continuo è quello della Figura 21.10. Il costo marginale di lungo periodo, per qualsiasi livello y di output, deve essere uguale al costo marginale di breve periodo associato al livello ottimo della dimensione dell'impianto che consente di produrre y.

Sommario

1. I costi medi sono la somma dei costi medi variabili e dei costi medi fissi. I costi medi fissi diminuiscono all'aumentare dell'output, mentre i costi medi variabili aumentano: la curva del costo medio che ne risulta ha pertanto una forma a U.

2. La curva del costo marginale si trova al di sotto della curva del costo medio nel tratto in cui i costi medi diminuiscono, e al di sopra di essa nel tratto in cui aumentano. I costi marginali devono quindi essere uguali ai costi medi in corrispondenza del punto di minimo di questi ultimi.

3. L'area al di sotto della curva del costo marginale misura i costi medi variabili.

4. La curva del costo medio di lungo periodo rappresenta l'inviluppo inferiore delle curve di costo medio di breve periodo.

Domande

1. Quale delle seguenti affermazioni è vera? (1) I costi medi fissi non aumentano mai all'aumentare dell'output. (2) I costi medi totali sono sempre maggiori o uguali ai costi medi variabili. (3) Il costo medio non aumenta mai quando i costi marginali diminuiscono.

2. Un'impresa produce la stessa quantità di output con due impianti diversi. Se il costo marginale relativo al primo impianto è superiore a quello relativo al secondo, come può l'impresa ridurre i costi mantenendo invariata la quantità prodotta?

3. Nel lungo periodo l'impresa opera sempre in corrispondenza del livello minimo dei costi medi che devono essere sostenuti per produrre una data quantità di output utilizzando la dimensione d'impianto ottima. Vero o falso?

APPENDICE

Abbiamo affermato nel testo che il costo medio variabile è uguale al costo marginale per la prima unità di output. Formalmente:

$$\lim_{y \to 0} \frac{c_v(y)}{y} = \lim_{y \to 0} c'(y).$$

La parte sinistra dell'espressione non è definita per $y = 0$, mentre il suo limite è definito, e può essere calcolato mediante la regola di de l'Hôpital, che stabilisce che il limite di una frazione, il cui numeratore e il cui denominatore tendano entrambi a zero, corrisponde al limite delle derivate del numeratore e del denominatore. Applicando questa regola si ottiene

$$\lim_{y \to 0} \frac{c_v(y)}{y} = \frac{\lim_{y \to 0} dc_v(y)/dy}{\lim_{y \to 0} dy/dy} = \frac{c'(0)}{1}$$

che dimostra la nostra affermazione.

Abbiamo anche affermato che l'area al di sotto della curva del costo marginale rappresenta il costo variabile. Questo può essere dimostrato per mezzo del teorema fondamentale del calcolo integrale. Poiché

$$MC(y) = \frac{dc_v(y)}{dy}$$

l'area al di sotto della curva di costo marginale sarà

$$c_v(y) = \int_0^y \frac{dc_v(x)}{dx} dx = c_v(y) - c_v(0) = c_v(y).$$

La discussione relativa alle curve del costo marginale di lungo e breve periodo è abbastanza chiara da un punto di vista geometrico, ma qual è il suo significato economico? Il costo marginale di produzione corrisponde alla variazione dei costi derivante da una variazione della quantità prodotta. Nel breve periodo si deve mantenere fissa, per esempio, la dimensione dell'impianto (o un qualsiasi altro fattore), mentre, nel lungo periodo, è possibile modificarla. Il costo marginale di lungo periodo, quindi, può essere scomposto in due elementi: la variazione dei costi se viene mantenuta fissa la dimensione dell'impianto, e la variazione dei costi al variare della dimensione dell'impianto. Ma se la scelta della dimensione dell'impianto è ottima, quest'ultimo termine deve essere nullo! Di conseguenza i costi marginali di lungo e di breve periodo devono coincidere.

La dimostrazione richiede l'uso della regola di derivazione di funzioni composte. Dalla definizione data nel testo:

$$c(y) \equiv c_s(y, k(y)).$$

Differenziando rispetto a y e applicando la regola di derivazione di funzioni composte sappiamo che

$$\frac{dc(y)}{dy} = \frac{\partial c_s(y,k)}{\partial y} + \frac{\partial c_s(y,k)}{\partial k}\frac{\partial k(y)}{\partial y}.$$

Se calcoliamo questa funzione in corrispondenza del livello di output y^* e dell'associata dimensione ottima dell'impianto $k^* = k(y^*)$ otteniamo

$$\frac{\partial c_s(y^*, k^*)}{\partial k} = 0$$

poiché questa è la condizione del primo ordine necessaria perché k^* sia la dimensione dell'impianto che minimizza i costi in corrispondenza di y^*. Così il secondo termine dell'espressione si annulla, e quello che rimane è il costo marginale di breve periodo:

$$\frac{dc(y^*)}{dy} = \frac{\partial c_s(y^*, k^*)}{\partial y}.$$