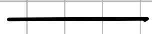
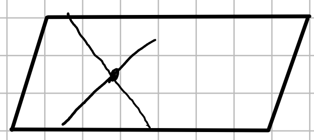
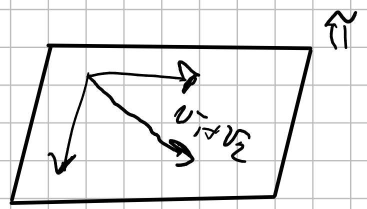
V^0 

V^1 

V^2 

ci sono in V^2 tanti sottospazi identificabili con V^1

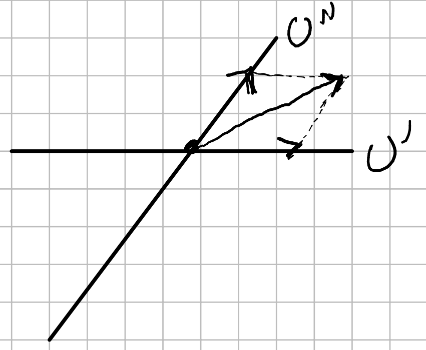


$v_1 + v_2 \in \pi$

$U \subseteq V$ sp. vett, U sottospazio di V se U con 0_V e le operazioni di V è uno spazio vettoriale

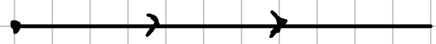
U è sottospazio se ammette l'elemento nullo ed è chiuso rispetto a somma e prodotto di V

V^2



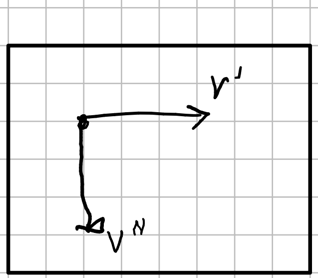
$U = U' \cup U''$

La somma di U' e U^2 deve $\in$ a V^2



non è un sottosp perché non è chiuso rispetto alla somma

$V^3 \cong R^3$



π $\quad xi + yj \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+x'' \\ y'+y'' \\ 0 \end{pmatrix} \in R^3$$

Sia $U \leq V$ sp. vett

U è sottosp di V sse

- $\forall u', u'' \in U$, $u' + u'' \in U$
- $\forall u \in U$, $\forall \lambda \in R$ $\lambda u \in V$
- $U \neq \emptyset$

$\underline{0}_v \in U$?

$\exists \bar{u} \in U$, per 2 $0\bar{u} \in U$

$0\bar{u} = \underline{0}_v$

$-1 \cdot u \in U$

gli opposti sono inclusi nello sottosp. vettoriale

$\forall a, b \in U$ $\quad a+b = b+a$ in U

$a, b \in V$, $a+b = b+a$

V spazio vettoriale

$U = \{a\}$ è sottosp di V?

$\forall \alpha \in R$, $\alpha a = a$ solo se $a = \underline{0}$, altrimenti non è spazio vettoriale

V spazio vettoriale $\quad a \in V$ $\quad \{\alpha a ; \alpha \in R\}$

1) Chiuso per +? si

$\alpha_1 a + \alpha_2 a = (\alpha_1 + \alpha_2) a$

2) chiuso per prodotto? si

$\beta(\alpha a) = (\beta\alpha) a$

3) $\underline{0}$? $0a = \underline{0}$

Prop: Siano $a_1, \dots, a_n \in V$, allora

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i ; \alpha_i \in R \right\}$$ è un sottospazio di V

che contiene $a_1, \dots, a_n$ è il più piccolo sottospazio con queste proprietà. Si dice sottospazio generato da $a_1, \dots, a_n$ span $\{a_1, \dots, a_n\}$

$a = (1,-1,0)$ $b = (1,0,-1)$ $c = (0,1,-1)$

$\text{span}\{a,b,c\} =$

$\{\alpha a + \beta b + \gamma c ; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

$$\alpha(1,-1,0) + \beta(1,0,-1) + \gamma(0,1,-1) = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ -\alpha+\gamma \\ -\beta-\gamma \end{pmatrix}$$

se $-a+b = c$, c può essere ignorato

Proprietà

- $\text{span}\{a,\dots,c\} \subseteq \text{span}\{a,\dots,c,d\} \iff d$ è comb. lin di $a,\dots,c$

Il generico elemento di $\text{span}\{a,\dots,c\}$ è $\alpha a + \dots + \gamma c =$ $\alpha a + \dots + \gamma c + 0d$ quindi è un elemento di $\text{span}\{a,\dots,c,d\}$

$\text{span}\{a,\dots,c\} = \text{span}\{a,\dots,c,d\}$

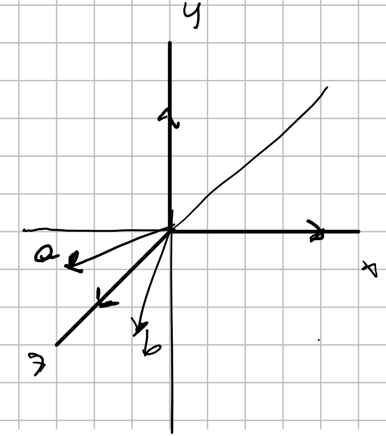
① $\downarrow$

d è comb lin di $a,\dots,c$

② so che $d = \bar{\alpha} a + \dots + \bar{\gamma} c$, devo provare che ogni combinazione lineare di $a,\dots,c,d$ è anche comb. lin di $a,\dots,c$

$$\alpha a + \dots + \gamma c + \delta d = \alpha a + \dots + \gamma c + \delta(\bar{\alpha} a + \dots + \bar{\gamma} c) =$$

$(\alpha + \bar{\alpha}\delta) a + \dots + (\gamma + \bar{\gamma}\delta) c$ è sempre una comb. lineare



a, b è una base di questo spazio

dati $a, b, \dots, d \in \mathbb{R}^n$ determino una base di $\text{span}\{a,b,\dots,d\}$

span $\{a, b, \dots\}$

In $\mathbb{R}^4$ si riescono a costruire sottospazi

e_1, e_2, e_3, e_4

span $\{e_1\}$ dim 1

span $\{e_1, e_2\}$ dim 2

span $\{e_1, \dots, e_n\}$ dim n

prop: Sia V sp vett, $\dim(V) = n$,

1) ogni U sottospazio di V ha $\dim(U) \leq n$ e vale = sse $U = V$

2) $\forall\ 0 \leq i \leq n\ \exists\ U \leq V \mid \dim(U) = i$

n = max n° vettori indipendenti in V

$u_1, \dots, u_m \in U$ lin indip $\rightarrow u_1, \dots, u_m \in V$ lin indipendenti $\rightarrow m \leq n$

se le dimensioni sono uguali, allora $U = V$

$U \leq V \quad \dim(U) = n \xrightarrow[?]{} U = V$

$\exists\ u_1, \dots, u_n \in U$ indip $\rightarrow u_1, \dots, u_n$ base di $V \rightarrow$ ogni $v \in V = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in U$

a	b	c	d
1	1	0	1
-1	0	1	1
0	-1	-1	1

span $\{a, b, c\} \overset{?}{\ni} d$

d si può scrivere come comb. lin di a, b, c?

$\exists\ \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha a + \beta b + \gamma c = d$?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \cancel{0} & 1 \\ -1 & 0 & \cancel{1} & 1 \\ 0 & -1 & \cancel{-1} & 1 \end{array}\right)$$

c comb lin a, b

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}$$

indipendenti, quindi d non è comb lineare di a e c, d non è generato dallo span $\{a, c\}$

Per quali d_1, d_2, d_3 $d \in \text{span}\{a, c\}$?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & d_1 \\ -1 & 0 & d_2 \\ 0 & -1 & d_3 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline d_1 & d_2 & d_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & d_2+d_1 & d_3 \end{matrix}$$

$R_3 - d_1 R_1 \qquad R_3 - (d_2+d_1) R_2$

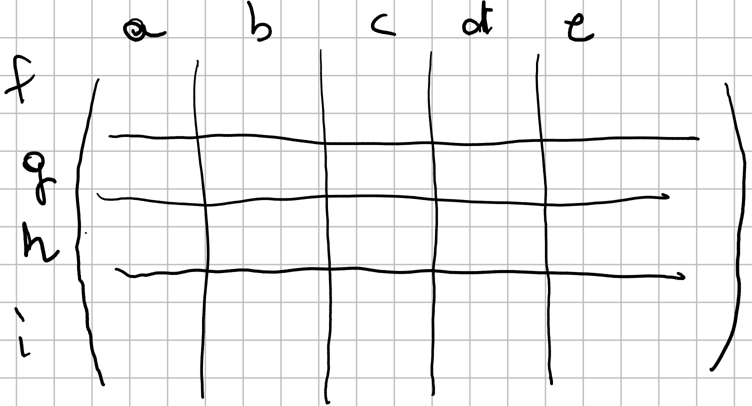
$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & d_3+d_2+d_1 \end{matrix}$$

dipendenti per $d_1+d_2+d_3=0$

Dati $a_1, \dots, a_m \in U$, determinare una base di $\text{span}\{a_1, \dots, a_m\}$. Le operazioni elementari su a, b conservano l'indipendenza lineare di un vettore. Si applica riduzione di Gauss

$C(A)$ = spazio colonne di A Sottosp $\mathbb{R}^5$

$R(A)$ = spazio riga di A, sottospazio $\mathbb{R}^3$



span $\{a', b', e'\}$ = span $\{a', b', c', d', e'\}$

span $\{f, g, h, i\}$ = span $\{f', g', h'\}$

$$\dim C(A) = 3 = r_c$$
$$\dim R(A) = 3 = r_r$$

Prop Le operazioni elementari su $a, b, \ldots$ conservano span $\{a, b, \ldots\}$

Def

$$(C_1, \ldots, C_n) \underset{m \times n}{=} A = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$$

$r_i \in \mathbb{R}^m \qquad r_i \in \mathbb{R}^n$

$$\text{span}\{C_1, \ldots, C_n\} = C(A) \leq \mathbb{R}^m$$
$$\text{span}\{r_1, \ldots, r_n\} = R(A) \leq \mathbb{R}^n$$

Th: $\dim C(A) = \dim R(A)$ rango di A, $\underbrace{r(A) \leq {m \atop n}}_{\text{il minore tra } r_r \text{ e } r_c}$

$A(x) = 0 \quad N(A) =$ spazio nullo di A

$r(A) \qquad \dim N(A)$

?

$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad (1,1,1) \left| \begin{array}{c} x \\ = 0 \end{array} \right. \qquad r = 1$

$N[1,1,1] \qquad\qquad\qquad\qquad \dim = 2$

$\downarrow$

ha dimensione 2

$x_1 = -x_2 - x_3$

$\left.\begin{array}{l} x_2 \\ x_3 \end{array}\right\}$ variabili libere $2 \longrightarrow$ dimensione del sottospazio

$(-x_2 - x_3),\ x_2,\ x_3$

$x_2(-1, 1, 0) + x_3(-1, 0, 1)$

$\text{span}\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$ $\Longrightarrow$ comb lin di queste 2 colonne fisse

base di dimensione 2

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] R_2 - R_1 \qquad r = 2, \dim = 1$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1 = -x_2 - x_3 = 2x_3 - x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{array}$

$x_1 = x_3 \qquad x_3, 2x_3, x_3 \Rightarrow x_3(1, 2, 1)$

$x_2 = -2x_3$

$x_3 \qquad \text{span}\{(1,2,1)\}$

$\dim = n$ variabili $- r$

$- = n$ riabi

$x_1 + x_2 = 0$

$\forall x_1 \ \exists! \ x_2 \mid x_1 + x_2 = 0$

$\forall x_1, x_2 \ \exists! \ x_3 \mid x_1, x_2, x_3$ è soluz $(\in N(A))$

a ogni variabile libera è associata una particolare soluzione

Dato un sistema di equazioni in $x_1, \dots, x_n$.
$x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ è libera se $\forall x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ si completa a un'unica soluzione. le altre si dicono vincolate

Th

1) $\dim N(A) + r(A) = n$ (incognite)

2) sia $C_{j_1}, \dots, C_{j_r}$ Base di $r(A)$ allora

$x_{j_1}, \dots, x_{j_\delta}$ vincolate

$x_{j_{\delta+1}}, \dots, x_{j_{n-p}}$ libera