MATRICI APPL LIN

5.2 Matrici di un'applicazione lineare

Coordinate, notazione

Ogni vettore di uno spazio vettoriale si scrive in un unico modo come combinazione lineare dei vettori di una base; ricordiamo che i coefficienti nella scrittura del vettore sono detti "le coordinate" del vettore rispetto ai vettori della base; diciamo che la sequenza delle coordinate di un vettore v rispetto a una sequenza base $\mathcal{A} : a_1, \ldots, a_n$ è "la coordinata" (al singolare) di v rispetto ad $\mathcal{A}$, la indichiamo con $[v]_\mathcal{A}$ e la scriviamo come colonna:

$$\text{se } v = r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n \ (r_i \in \mathbb{R}), \text{ allora } [v]_\mathcal{A} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}.$$

Esempio. $\mathcal{A} : a_1, a_2$; essendo $a_1 = 1\, a_1 + 0\, a_2$, si ha $[a_1]_\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Osservazione. Ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ si scrive come combinazione lineare, con coefficienti le sue componenti, dei vettori unità di $\mathbb{R}^n$; quindi la coordinata del vettore rispetto alla base canonica $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_n$ di $\mathbb{R}^n$ è il vettore stesso:

$$[x]_\mathcal{E} = x.$$

Esempi.

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix};\ \mathcal{A} : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad [v]_\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix};$$

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix};\ \mathcal{E} : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad [v]_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

coordinate

Matrici di un'applicazione lineare. Caso introduttivo

Siano
V uno spazio vettoriale con una base $\mathcal{A} : a_1, a_2$;
W uno spazio vettoriale con una base $\mathcal{B} : b_1, b_2, b_3$;
$\mathrm{F} : V \to W$ l'applicazione lineare che sui vettori della base $\mathcal{A}$ assume i valori

$$\mathrm{F}(a_1) = \ell\, b_1 + m\, b_2 + n\, b_3$$

$$\mathrm{F}(a_2) = p\, b_1 + q\, b_2 + r\, b_3$$

($\ell, \ldots, r$ costanti $\in \mathbb{R}$). Sul vettore tipico di V

$$v = x_1 a_1 + x_2 a_2$$

F assume il valore

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(v) &= x_1 \mathrm{F}(a_1) + x_2 \mathrm{F}(a_2) \\ &= x_1(\ell\, b_1 + m\, b_2 + n\, b_3) + x_2(p\, b_1 + q\, b_2 + r\, b_3) \\ &= (\ell\, x_1 + p\, x_2) b_1 + (m\, x_1 + q\, x_2) b_2 + (n\, x_1 + r\, x_2) b_3. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$[\mathrm{F}(a_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{bmatrix}, \ [\mathrm{F}(a_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix};$$

$$[v]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$

$$[\mathrm{F}(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \ell\, x_1 + p\, x_2 \\ m\, x_1 + q\, x_2 \\ n\, x_1 + r\, x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell & p \\ m & q \\ n & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [(\mathrm{F}a_1)_{\mathcal{B}}\ (\mathrm{F}a_2)_{\mathcal{B}}]\, [v]_{\mathcal{A}}.$$

(per semplicità, abbiamo scritto $(\mathrm{F}a_i)_{\mathcal{B}}$ al posto di $[\mathrm{F}(a_i)]_{\mathcal{B}}$).

Diciamo che $[(\mathrm{F}a_1)_{\mathcal{B}}\ (\mathrm{F}a_2)_{\mathcal{B}}]$ è la matrice di F rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{A}$ (in questo ordine) e la indichiamo con $[\mathrm{F}]_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$:

$$[\mathrm{F}]_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = [(\mathrm{F}a_1)_{\mathcal{B}}\ (\mathrm{F}a_2)_{\mathcal{B}}].$$

Allora possiamo dire che la coordinata di $\mathrm{F}(v)$ rispetto a $\mathcal{B}$ è il prodotto della matrice di F rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{A}$ per la coordinata di v rispetto ad $\mathcal{A}$:

$$[\mathrm{F}v]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{F}]_{\mathcal{B}\mathcal{A}}\, [v]_{\mathcal{A}}.$$

Esempio. Sia $\mathrm{F} : \mathcal{V}^2 \to \mathcal{V}^3$ un'applicazione lineare iniettiva. Se $\mathcal{A} : a_1, a_2$ è una base di $\mathcal{V}^2$, allora $\mathrm{F}(a_1), \mathrm{F}(a_2)$ è linearmente indipendente ed esiste una base $\mathcal{B} : b_1, b_2, b_3$ di $\mathcal{V}^3$ tale che $b_1 = \mathrm{F}(a_1), b_2 = \mathrm{F}(a_2)$. Così

$$\mathrm{F}(a_1) = 1\, b_1 + 0\, b_2 + 0\, b_3,$$

$$\mathrm{F}(a_2) = 0\, b_1 + 1\, b_2 + 0\, b_3,$$

e la matrice di F rispetto a queste basi è

$$[\mathrm{F}]_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osservazione. La matrice di un'applicazione lineare $\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alle basi canoniche $\mathcal{E}', \mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ è la matrice che ha per colonne le immagini dei vettori unità di $\mathbb{R}^2$:

$$[\mathrm{F}]_{\mathcal{E}',\mathcal{E}} = [\mathrm{F}(e_1)\ \mathrm{F}(e_2)].$$

Matrici di un'applicazione lineare

In generale, siano
V uno spazio vettoriale con una base $\mathcal{A} : a_1, \ldots, a_n$;
W uno spazio vettoriale con una base $\mathcal{B} : b_1, \ldots, b_m$;
$\mathrm{F} : V \to W$ un'applicazione lineare.

Diciamo che la matrice $m \times n$ che ha per colonne le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ delle immagini dei vettori di $\mathcal{A}$ è la matrice di F rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{A}$ (in questo ordine) e la indichiamo con $[\mathrm{F}]_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$:

$$[\mathrm{F}]_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = [(\mathrm{F}a_1)_{\mathcal{B}}\ \cdots\ (\mathrm{F}a_n)_{\mathcal{B}}]$$

Così come nel caso $n = 2$ ed $m = 3$ si trova che per ogni $v \in V$ la coordinata di $\mathrm{F}(v)$ rispetto a $\mathcal{B}$ è il prodotto della matrice di F rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{A}$ per la coordinata di v rispetto ad $\mathcal{A}$:

$$[\mathrm{F}(v)]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{F}]_{\mathcal{B}\mathcal{A}}\,[v]_{\mathcal{A}}\,.$$

Osservazione. La matrice di un'applicazione lineare $\mathrm{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rispetto alle basi canoniche $\mathcal{E}', \mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ è la matrice che ha per colonne le immagini dei vettori unità di $\mathbb{R}^n$:

$$[\mathrm{F}]_{\mathcal{E}',\mathcal{E}} = [\mathrm{F}(e_1)\ \cdots \mathrm{F}(e_n)].$$

Le matrici più semplici

Una stessa applicazione lineare è si può dunque rappresentare rispetto tutte le possibili basi del codominio e del dominio. A certe basi corrisponderanno matrici più complicate e a certe altre matrici più semplici.

Esempio. Sia $\mathrm{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{F}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 5\,x_3 \\ x_1 + 2\,x_2 + 8\,x_3 \end{bmatrix}.$$

La matrice di F rispetto alle basi $\mathcal{E}' : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathcal{E} : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ è

$$[\mathrm{F}]_{\mathcal{E}'\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

La matrice di F rispetto alle basi $\mathcal{B} : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\mathcal{A} : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ è

$$[\mathrm{F}]_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(vale a dire:

$$\mathrm{F}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\mathrm{F}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\mathrm{F}\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

si lascia la verifica al lettore).

Si possono sempre scegliere le basi in modo che la matrice sia particolarmente semplice.

Proposizione Siano:

V, W spazi vettoriali di dimensioni n ed m;
$\mathrm{F} : V \to W$ un'applicazione lineare;
$v_1, \dots, v_p \in V$ tali che $\mathrm{F}(v_1), \dots, \mathrm{F}(v_p)$ sia una base di Im(F);
$z_1, \dots, z_q \in V$ una base di Ker(F;

Allora:

$\mathcal{A} : v_1, \dots, v_p, z_1, \dots, z_q$ è una base di V;
esiste una base $\mathcal{B} : b_1, \dots, b_p, \dots$ di W tale che $\mathrm{F}(v_1) = b_1, \dots, \mathrm{F}(v_p) = b_p$;
la matrice di F rispetto a queste basi è la matrice $m \times n$ con i primi elementi diagonali uguali a 1 e tutti gli altri elementi uguali a 0:

$$[\mathrm{F}]_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Commenti.

- Le due basi $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ che rendono semplice la matrice dell'applicazione nell'esempio precedente sono state costruite secondo questa proposizione (se ne possono costruire altre).
- Che la sequenza $\mathcal{A}$ sia una base di V segue dal Teorema sulle dimensioni di Ker e Im a p.93.

- Che esista una base $\mathcal{B}$ di W del tipo indicato segue dal fatto che ogni sequenza linearmente indipendente di uno spazio vettoriale si può completare a una base.