Composizione e inversione di applicazioni lineari

Applicazioni fra insiemi.

Siano date due applicazioni F, G tali che il codominio di F sia uguale al dominio di G. Allora a ciascun elemento a del suo dominio, l'applicazione F associa un elemento $\mathrm{F}(a)$ e a $\mathrm{F}(a)$ l'applicazione G associa un elemento $\mathrm{G}(\mathrm{F}(a))$ del suo codominio. Si ha così un'applicazione dal dominio di F al codominio di G che si dice "G composta dopo F", in breve "G dopo F", e si indica con $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$. In simboli:

$$\begin{array}{lll} A \xrightarrow{\mathrm{F}} B & \xrightarrow{\mathrm{G}} C \\ a \longmapsto \mathrm{F}(a) & \longmapsto \mathrm{G}(\mathrm{F}(a)) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} A \xrightarrow{\mathrm{G}\circ\mathrm{F}} C \\ a \longmapsto (\mathrm{G} \circ \mathrm{F})(a) \end{array}$$

Se il codominio di F è diverso dal dominio di G, allora $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$ non viene definita. Questa è la convenzione adottata in Algebra lineare; altre convenzioni, più lasche, sono adottate in altre parti della matematica, ad esempio in Analisi.

Si ha così l'operazione di "composizione" fra applicazioni. Le sue prime proprietà sono:

(1) La composizione non è commutativa, in quanto può succedere che di due composizioni $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$ e $\mathrm{F} \circ \mathrm{G}$ una sia definita e l'altra no; anche quando entrambe le composizioni sono definite, spesso sono diverse.

(2) La composizione è associativa: per ogni tre applicazioni $\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}$, l'applicazione $(\mathrm{H} \circ \mathrm{G}) \circ \mathrm{F}$ è definita se e solo se l'applicazione $\mathrm{H} \circ (\mathrm{G} \circ \mathrm{F})$ è definita, e in tal caso le due applicazioni sono uguali:

$$(\mathrm{H} \circ \mathrm{G}) \circ \mathrm{F} = \mathrm{H} \circ (\mathrm{G} \circ \mathrm{F}).$$

(3) Per ogni insieme A, l'applicazione che ad ogni elemento di A associa sé stesso si dice "identità su A" e si indica con id_A; quindi

$$\underset{\circlearrowleft \mathrm{id}_A}{A} \quad \text{è data da } \mathrm{id}_A(a) = a.$$

Le applicazioni identità sono caratterizzate dalla seguente proprietà

$$\text{per ogni } A \xrightarrow{\mathrm{F}} B, \text{ si ha } \mathrm{F} \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{F} = \mathrm{id}_B \circ \mathrm{F}.$$

Applicazione inversa. Sia data un'applicazione biiettiva

$$\mathrm{F} : A \to B.$$

Per ogni $b \in B$, l'equazione

$$\mathrm{F}(a) = b$$

ha una ed una sola soluzione, che indichiamo con

$$a = \mathrm{F}^{-1}(b).$$

Si ha così un'applicazione

$$\mathrm{F}^{-1} : B \to A, \quad b \mapsto \mathrm{F}^{-1}(b),$$

che si dice "applicazione inversa" di F.

Proposizione. Per ogni $\mathrm{F} : A \to B$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) F è biiettiva;

F biettiva $\iff G \circ F = Id_A,\ G \circ F = Id_B \iff G = F^{-1}$

(2) esiste una $\mathrm{G} : B \to A$ tale che

$$\mathrm{G} \circ \mathrm{F} = \mathrm{id}_A, \quad \mathrm{F} \circ \mathrm{G} = \mathrm{id}_B.$$

In tal caso, G è unica, e

$$\mathrm{G} = \mathrm{F}^{-1}.$$

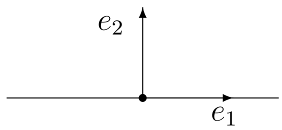
Una rotazione, una proiezione.

Fissato un punto O nel piano, identifichiamo i vettori del piano con segmenti orientati uscenti da O. Consideriamo le seguenti applicazioni di $\mathcal{V}^2$ in sé:

Rot_+, rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario;

Pr, proiezione su una retta fissata passante per O.

Fissiamo un riferimento di due versori ortogonali, il primo sulla retta della proiezione, il secondo rotato del primo di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario; tramite questo riferimento identifichiamo $\mathcal{V}^2$ con $\mathbb{R}^2$. Quindi i due vettori del riferimento vengono identificati coi rispettivi vettori unità e_1, e_2 di $\mathbb{R}^2$.



Rappresentiamo ciascuna applicazione lineare F con una matrice rispetto alla base canonica $\mathcal{E} : e_1, e_2$, e la indichiamo con [F] (sottintendendo la scelta della base).

R_+ è l'unica applicazione lineare tale che

$$\begin{matrix} \mathrm{R}_+(e_1) = & e_2 \\ \mathrm{R}_+(e_2) = & -e_1 \end{matrix} \quad \text{cioè } [\mathrm{R}_+] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

quindi, esplicitamente

$$\mathrm{R}_+\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix};$$

altrimenti scritto

$$\mathrm{R}_+(x_1, x_2) = (-x_2, x_1).$$

Pr è l'unica applicazione lineare tale che

$$\begin{matrix} \mathrm{Pr}(e_1) = e_1 \\ \mathrm{Pr}(e_2) = \underline{0} \end{matrix} \quad \text{cioè } [\mathrm{Pr}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

quindi, esplicitamente

$$\mathrm{Pr}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

altrimenti scritto

$$\mathrm{Pr}(x_1, x_2) = (x_1, 0).$$

Di seguito, calcoliamo l'applicazione composta $\mathrm{Pr} \circ \mathrm{R}_+$, in tre modi diversi:

- calcolando le immagini dei vettori base:

$$(\mathrm{Pr} \circ \mathrm{R}_+)(e_1) = \mathrm{Pr}(\mathrm{R}_+(e_1)) = \mathrm{Pr}(e_2) = \underline{0}$$
$$(\mathrm{Pr} \circ \mathrm{R}_+)(e_2) = \mathrm{Pr}(\mathrm{R}_+(e_2)) = \mathrm{Pr}(-e_1) = -e_1$$

- usando le matrici:

$$\begin{aligned}(\mathrm{Pr} \circ \mathrm{R}_+)(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) &= \mathrm{Pr}(\mathrm{R}_+(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix})) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -x_2 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- usando solo la definizione di applicazione composta:

$$(\mathrm{Pr} \circ \mathrm{R}_+)(x_1, x_2) = \mathrm{Pr}(\mathrm{R}_+(x_1, x_2)) = \mathrm{Pr}(-x_2, x_1) = (-x_2, 0).$$

Per quanto riguarda biiettività e inversa:

R_+ ha come inversa l'applicazione R_- rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario, descritta da

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_-(e_1) &= -e_2 \\ \mathrm{R}_-(e_2) &= e_1\end{aligned} \quad \text{cioè } [\mathrm{R}_-] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

esplicitamente:

$$\mathrm{R}_-(x_1, x_2) = (x_2, -x_1);$$

una verifica:

$$(\mathrm{R}_- \circ \mathrm{R}_+)(x_1, x_2) = \mathrm{R}_-(\mathrm{R}_+(x_1, x_2)) = \mathrm{R}_-(-x_2, x_1) = (x_1, x_2),$$

quindi $\mathrm{R}_- \circ \mathrm{R}_+ = \mathrm{Id}$;

In definitiva, in simboli:

$$(\mathrm{R}_+)^{-1} = \mathrm{R}_-.$$

Pr non è biiettiva; motiviamo l'affermazione in due modi:

- l'affermazione

" per ogni y, l'equazione $\mathrm{Pr}(x) = y$ ha una ed una sola soluzione"

è falsa, in quanto l'equazione $\mathrm{Pr}(x) = e_2$ non ha alcuna soluzione (oppure, in quanto l'equazione $\mathrm{Pr}(x) = e_1$ ha infinite soluzioni);

- la matrice $[\mathrm{Pr}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ è singolare.

Quindi, Pr non possiede inversa.

Applicazioni fra spazi $\mathbb{R}^n$

Proposizione. Sono date due applicazioni lineari fra spazi $\mathbb{R}^*$

$\mathrm{F}(x) = Ax$ (A matrice costante; x colonna variabile);

$\mathrm{G}(y) = By$ (B matrice costante; y colonna variabile);

Allora l'applicazione composta $\mathrm{G}\circ\mathrm{F}$ è definita se e solo se è definita la matrice prodotto BA; in tal caso

$$(\mathrm{G}\circ\mathrm{F})(x) = (BA)x.$$

In altri termini: date due applicazioni lineari F, G fra spazi $\mathbb{R}^*$ con matrici $[\mathrm{F}], [\mathrm{G}]$ rispetto alle basi canoniche, la composizione $\mathrm{G}\circ\mathrm{F}$ è definita se e solo se il prodotto $[\mathrm{G}][\mathrm{F}]$ è definito, e in tal caso

$$[\mathrm{G}\circ\mathrm{F}] = [\mathrm{G}][\mathrm{F}].$$

Dimostrazione. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

$\mathrm{G}\circ\mathrm{F}$ è definita;
per opportuni m, n, p si ha $\mathrm{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\mathrm{G}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$;
per opportuni m, n, p si ha A, B hanno tipi $m\times n$ e $p\times m$;
BA è definito.

Inoltre, in tal caso

$$(\mathrm{G}\circ\mathrm{F})(x) = \mathrm{G}(\mathrm{F}(x)) = B(Ax) = (BA)x$$

(per l'associatività del prodotto di matrici).

Proposizione. Un'applicazione lineare

$$\mathrm{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \mathrm{F}(x) = Ax.$$

è invertibile se e solo se la matrice A è invertibile (quindi in particolare $n = m$) e in tal caso l'applicazione inversa è

$$\mathrm{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{F}^{-1}(x) = A^{-1}x.$$

In altri termini: un' applicazione lineare F fra spazi $\mathbb{R}^*$ con matrice $[\mathrm{F}]$ rispetto alle basi canoniche è invertibile se e solo se la matrice $[\mathrm{F}]$ è invertibile, e in tal caso

$$[\mathrm{F}^{-1}] = [\mathrm{F}]^{-1}.$$

Dimostrazione parziale. Supponiamo che la matrice A sia invertibile. Per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, l'equazione $\mathrm{F}(x) = y$ equivale all'equazione

$$Ax = y,$$

che ha sempre un'unica soluzione, data da $x = A^{-1}y$. Quindi, F è invertibile, con inversa $\mathrm{F}^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathrm{F}^{-1}(y) = A^{-1}y$.

Esempio.

$$\overset{\mathrm{G}}{\circlearrowleft}\, \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathrm{F}} \mathbb{R}^3 \,\overset{\mathrm{H}}{\circlearrowleft}$$

$$\mathrm{F}(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_2);$$

$$\mathrm{G}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2);$$

$$\mathrm{H}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3);$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consideriamo le applicazioni F e G, ci chiediamo se sono componibili e nel caso calcoliamo l'applicazione composta. Lo facciamo in due modi.

- Usando solo la definizione di applicazione composta:

$\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$ non è definita in quanto il dominio di G è $\mathbb{R}^2$, diverso dal codominio $\mathbb{R}^3$ di F;

$\mathrm{F} \circ \mathrm{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{F} \circ \mathrm{G})(x_1, x_2) &= \mathrm{F}(\mathrm{G}(x_1, x_2)) \\ &= \mathrm{F}(x_1 + x_2, x_1 - x_2) \\ &= (x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_1 - x_2, x_1 - x_2) \\ &= (x_1 + x_2, 2x_1, x_1 - x_2).\end{aligned}$$

- Usando le matrici.

$[\mathrm{G}][\mathrm{F}]$ non è definita in quanto $[\mathrm{G}]$ è 2×2 e $[\mathrm{F}]$ è 3×2;

$[\mathrm{F}][\mathrm{G}]$ è definita ed è 3×2;

$$[\mathrm{F} \circ \mathrm{G}] = [\mathrm{F}][\mathrm{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Quindi $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$ non è definita e $\mathrm{F} \circ \mathrm{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è

$$(\mathrm{F} \circ \mathrm{G})(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1, x_1 - x_2).$$

Consideriamo ancora le applicazioni F e G, ci chiediamo se sono biiettive e nel caso calcoliamo l'applicazione inversa.

$[\mathrm{F}]$ è 3×2, non quadrata, non possiede inversa;

$[\mathrm{G}]$ è (quadrata) non singolare; calcoliamo la sua inversa con l'algoritmo di Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$ Inverse

$$[G]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Quindi non esiste F^{-1} ed esiste $\mathrm{G}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{G}^{-1}(x_1, x_2) = (\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2, \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2).$$

Applicazioni fra spazi vettoriali

Dalla definizione di applicazione lineare segue che:

- Se due applicazioni $\mathrm{F} : V \to W$ e $\mathrm{G} : W \to Z$ fra spazi vettoriali sono lineari, allora anche l'applicazione composta $\mathrm{G} \circ \mathrm{F} : V \to Z$ è lineare;

- Per ogni spazio vettoriale V, l'identità id_V è lineare;

- Se un'applicazione $\mathrm{F} : V \to W$ invertibile è lineare, allora anche l'applicazione inversa $\mathrm{F}^{-1} : W \to V$ è lineare.

La rappresentazione di applicazioni lineari rispetto a basi qualsiasi si comporta bene rispetto alla composizione e inversione, precisamente:

Proposizione.

(1) Siano date due applicazioni lineari fra spazi vettoriali con basi fissate

$$V_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\mathrm{F}} W_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\mathrm{G}} Z_{\mathcal{C}}$$

e l'applicazione composta

$$V_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\mathrm{G}\circ\mathrm{F}} Z_{\mathcal{C}}.$$

Allora, rispetto alle dovute basi, la matrice di $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$ è il prodotto delle matrici di G e F

$$[\mathrm{G} \circ \mathrm{F}]_{\mathcal{CA}} = [\mathrm{G}]_{\mathcal{CB}}[\mathrm{F}]_{\mathcal{BA}}.$$

(2) La matrice dell'applicazione identità su uno spazio vettoriale V di dimensione n, rispetto alla stessa base in dominio e codominio, è la matrice identità I_n :

$$[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{AA}} = \mathrm{I}_n.$$

(3) Sia data un'applicazione lineare fra due spazi vettoriali con base fissata

$$V_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\mathrm{F}} W_{\mathcal{B}}$$

che possiede inversa

$$W_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\mathrm{F}^{-1}} V_{\mathcal{A}}.$$

Allora, rispetto alle dovute basi la matrice di F^{-1} è l'inversa dela matrice di F :

$$[\mathrm{F}^{-1}]_{\mathcal{AB}} = ([\mathrm{F}]_{\mathcal{BA}})^{-1}.$$

Dimostrazione.

(1) Per ogni $v \in V$ si ha

$$[(\mathrm{G} \circ \mathrm{F})(v)]_{\mathcal{C}} = [\mathrm{G} \circ \mathrm{F}]_{\mathcal{CA}}[v]_{\mathcal{A}}$$

$$[(\mathrm{G} \circ \mathrm{F})(v)]_{\mathcal{C}} = [\mathrm{G}(\mathrm{F}(v))]_{\mathcal{C}} = [\mathrm{G}]_{\mathcal{CB}}[\mathrm{F}(v)]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{G}]_{\mathcal{CB}}[\mathrm{F}]_{\mathcal{BA}}[v]_{\mathcal{A}}$$

quindi $[\mathrm{G} \circ \mathrm{F}]_{\mathcal{CA}} = [\mathrm{G}]_{\mathcal{CB}}[\mathrm{F}]_{\mathcal{BA}}$.

(2) Lasciata al lettore.

(3) Dalle uguaglianze fra applicazioni

$$\mathrm{F}^{-1} \circ \mathrm{F} = \mathrm{Id}_V = \mathrm{F} \circ \mathrm{F}^{-1}$$

seguono le uguaglianze fra matrici

$$[\mathrm{F}^{-1}]_{\mathcal{AB}}[\mathrm{F}]_{\mathcal{BA}} = \mathrm{I}_n = [\mathrm{F}]_{\mathcal{BA}}[\mathrm{F}^{-1}]_{\mathcal{AB}}$$

che significano proprio

$$[\mathrm{F}^{-1}]_{\mathcal{AB}} = ([\mathrm{F}]_{\mathcal{BA}})^{-1}.$$

Algebre di matrici e di applicazioni lineari

5.3 Autovettori ed autovalori

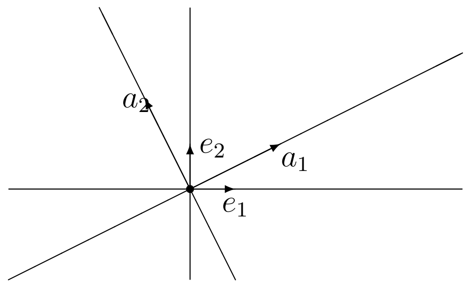
Contesto.

Uno spazio vetoriale V di un certa dimensione n. Consideriamo applicazioni lineari F di V in sè e le rappresentiamo rispetto ad una stessa base $\mathcal{A}$ sia nel dominio che nel codominio; al posto $[\mathrm{F}]_{\mathcal{A}\mathcal{A}}$, scriviamo in breve $[\mathrm{F}]_{\mathcal{A}}$.

Caso di studio

Consideriamo la base ortogonale di $\mathcal{V}^2$

$$\mathcal{A}: a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$



Sia F la simmetria ortogonale rispetto alla retta vettoriale generata da a_1;

$$\begin{array}{l} \mathrm{F}(a_1) = a_1 \\ \mathrm{F}(a_2) = -a_2 \end{array} \quad \text{quindi } [\mathrm{F}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Di seguito, prima determiniamo la matrice $[\mathrm{F}]_{\mathcal{E}}$ dell'applicazione rispetto alla base canonica, poi, a partire solo da tale matrice, vediamo come si può riconoscere che l'applicazione è una simmetria ortogonale e come si può determinare l'asse di simmetria e il suo asse ortogonale. Per determinare $[\mathrm{F}]_{\mathcal{E}}$ considereremo il problema generale della relazione fra le varie matrici che rappresentano una stessa applicazione lineare. Nel riconoscere la natura dell'applicazione, introdurremo i concetti di autovalore ed autovettore di un'applicazione lineare.

Relazione fra le matrici di una stessa applicazione lineare

Siano V uno spazio vettoriale, di dimensione n e F un'applicazione lineare di V in sé. Date due basi $\mathcal{A} : a_1, \ldots, a_n$ e $\mathcal{B} : b_1, \ldots, b_n$ di V, descriviamo la matrice $[\mathrm{F}]_{\mathcal{B}}$ in funzione della matrice $[\mathrm{F}]_{\mathcal{A}}$. Prima di tutto, consideriamo delle matrici che descrivono relazioni fra le basi.

Matrici dell'identità

L'identità id : $V_{\mathcal{A}} \to V_{\mathcal{B}}$, rispetto alla base $\mathcal{A}$ di V come dominio e alla base $\mathcal{B}$ di V come codominio, è rappresentata dalla matrice che ha nelle colonne le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ dei valori dell'identità sui vettori di $\mathcal{A}$

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = [(\mathrm{id}(a_1))_{\mathcal{B}} \cdots (\mathrm{id}(a_n))_{\mathcal{B}}]$$

quindi dalla matrice che ha nelle colonne le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ dei vettori di $\mathcal{A}$

$[\mathrm{id}]_{\mathcal{BA}} = [(a_1)_{\mathcal{B}} \cdots (a_n)_{\mathcal{B}}];$

la diciamo in breve "matrice, rispetto a $\mathcal{B}$, di $\mathcal{A}$"

Caso particolare. Se $V = \mathbb{R}^n$ ed $\mathcal{E}$ è la base canonica $\mathbb{R}^n$, essendo $(a_i)_{\mathcal{E}} = a_i$, si ha

$[\mathrm{id}]_{\mathcal{EA}} = [a_1 \cdots a_n],$

in parole: la matrice rispetto ad $\mathcal{E}$ di $\mathcal{A}$ è la matrice con colonne i vettori di $\mathcal{A}$.

Caso di studio, esempio

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{EA}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Fine esempio.

Dal fatto che $\mathrm{id} = \mathrm{id} \circ \mathrm{id}$ segue che

$[\mathrm{id}]_{\mathcal{AA}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{AB}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{BA}}$

$[\mathrm{id}]_{\mathcal{BB}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{BA}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{AB}};$

essendo $[\mathrm{id}]_{\mathcal{AA}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{BB}} = \mathrm{I}$ (matrice identità), si ha che le matrici $[\mathrm{id}]_{\mathcal{BA}}$ e $[\mathrm{id}]_{\mathcal{AB}}$ sono una l'inversa dell'altra; in altri termini: la matrice rispetto a $\mathcal{A}$ di $\mathcal{B}$ è l'inversa della matrice rispetto a $\mathcal{B}$ di $\mathcal{A}$:

$[\mathrm{id}]_{\mathcal{AB}} = ([\mathrm{id}]_{\mathcal{BA}})^{-1}$

Caso di studio, esempio

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{AE}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Fine esempio.

Relazione fra le matrici di una stessa applicazione

Componendo le applicazioni

$$V_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\mathrm{id}} V_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\mathrm{F}} V_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\mathrm{id}} V_{\mathcal{B}};$$

si ha l'applicazione

$$V_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\mathrm{F}} V_{\mathcal{B}}$$

quindi la relazione fra le matrici dell'applicazione rispetto alle due basi è

$$[\mathrm{F}]_{\mathcal{BB}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{BA}}[\mathrm{F}]_{\mathcal{AA}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{AB}}$$

Caso particolare. Se $V = \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{E}$ è la sua base canonica, allora

$$\begin{aligned}[\mathrm{F}]_{\mathcal{EE}} &= [\mathrm{id}]_{\mathcal{EA}}[\mathrm{F}]_{\mathcal{AA}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{AE}} \\ &= [a_1 \cdots a_n][\mathrm{F}]_{\mathcal{AA}}[a_1 \cdots a_n]^{-1}\end{aligned}$$

Caso di studio, esempio

$$\begin{aligned}[\mathrm{F}]_{\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Quindi

$$F(x_1, x_2) = (\tfrac{3}{5}\,x_1 + \tfrac{4}{5}\,x_1,\ \tfrac{4}{5}\,x_1 - \tfrac{3}{5}\,x_1).$$

Verifica: F è l'unica applicazione lineare di $\mathbb{R}^2$ in sè tale che $F(a_1) = a_1$ e $F(a_2) = -a_2$. Verifichiamo la 1°:

$$(\tfrac{6}{5} + \tfrac{4}{5},\ \tfrac{8}{5} - \tfrac{3}{5}) = (2, 1)? \quad \text{si}$$

Fine esempio.

Autovettori ed autovalori

Caso di studio

Abbiamo trovato che l'applicazione lineare F di $\mathbb{R}^2$ in sè, rispetto alla base canonica ha matrice

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Usando solo questa informazione, possiamo ricostruire che F è una simmetria ortogonale, l'asse di simmetria (e quindi il suo asse ortogonale)? e i vettori a_1, a_2?

Osserviamo che a_1, a_2 sono accomunati dal fatto di essere mandati in loro multipli

$$F(a_1) = a_1$$
$$F(a_2) = -a_2$$

Autovettori e autovalori.

Definizione. Sia F un'applicazione lineare di uno spazio vettoriale V in sé. Si dice che un vettore $v \neq \underline{0}$ ed un numero λ sono un "autovettore" e un "autovalore" di F se e solo se il valore di F su v è il prodotto di λ per v :

$(*) \qquad F(v) = \lambda\, v;$

in altri termini:

- $v \neq \underline{0}$ è un autovettore di F se e solo se esiste un λ tale che valga $(*)$;

- λ è un autovalore di F se e solo se esiste un $v \neq \underline{0}$ tale che valga $(*)$.

Caso di studio, esempio.

λ è un autovalore di F se e solo se esiste un $x \neq \underline{0}$ tale che

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{5}\,x_1 + \frac{4}{5}\,x_2 = \lambda\,x_1 \\ \frac{4}{5}\,x_1 - \frac{3}{5}\,x_2 = \lambda\,x_2 \end{cases}$$

$$(\dagger) \qquad \begin{cases} (\ \frac{3}{5} - \lambda)\,x_1 + \frac{4}{5}\,x_2 = 0 \\ \frac{4}{5}\,x_1 + (-\frac{3}{5} - \lambda)\,x_2 = 0 \end{cases}$$

un sistema lineare omogeneo con matrice dei coefficienti

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \lambda & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} - \lambda \end{bmatrix};$$

il sistema ha qualche soluzione $x \neq \underline{0}$ se e solo se la matrice è singolare, cioè

$$\det \begin{bmatrix} \frac{3}{5}-\lambda & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}-\lambda \end{bmatrix} = 0; \quad (\tfrac{3}{5}-\lambda)(-\tfrac{3}{5}-\lambda) - \tfrac{4}{5}\,\tfrac{4}{5} = 0; \quad \lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda = \pm 1.$$

Quindi F ha due autovalori: 1 e -1.

L'insieme degli autovettori con autovalore 1, aggiunto $\underline{0}$, è l'insieme delle soluzioni del sistema (†) con $\lambda = 1$

$$\begin{cases} -\frac{2}{5}\,x_1 + \frac{4}{5}\,x_2 = 0 \\ \frac{4}{5}\,x_1 - \frac{8}{5}\,x_2 = 0 \end{cases}, \qquad x_1 - 2\,x_2 = 0;$$

è l'insieme i vettori

$$\begin{bmatrix} 2\,x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ con } x_2 \text{ libera;}$$

è una retta vettoriale, che indichiamo con V_1; abbiamo ritrovato l'asse della simmetria.

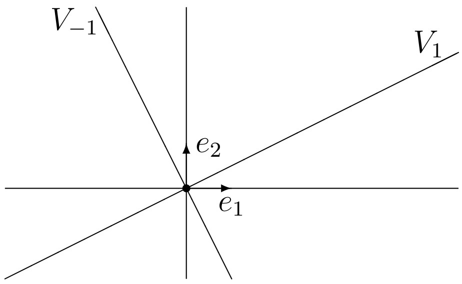
L'insieme degli autovettori con autovalore -1, aggiunto $\underline{0}$, è l'insieme delle soluzioni del sistema (†) con $\lambda = -1$

$$\begin{cases} \frac{8}{5}\,x_1 + \frac{4}{5}\,x_2 = 0 \\ \frac{4}{5}\,x_1 + \frac{2}{5}\,x_2 = 0 \end{cases}, \qquad 2\,x_1 + x_2 = 0;$$

è l'insieme dei vettori

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -2\,x_1 \end{bmatrix}, \text{ con } x_1 \text{ libera;}$$

è una retta vettoriale, che indichiamo con V_{-1}; è l'asse ortogonale all'asse di simmetria.



Osservazione: se b_1, b_2 sono due qualsiasi autovettori con autovalori rispettivi 1 e -1, cioè due vettori non nulli sulle rette vettoriali V_1 e V_{-1}, allora $\mathcal{B} : b_1, b_2$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e

$$[\mathrm{F}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Fine esempio.

Equazione caratteristica, autospazi

Sia $\mathrm{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathrm{F}(x) = Ax$. Allora l'equazione $(*)$ degli autovettori e autovalori diviene

$$Ax = \lambda\, x$$

per esteso

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = \lambda\, x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = \lambda\, x_2 \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = \lambda\, x_n \end{cases}$$

che equivale al sistema omogeneo

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n & = 0 \end{cases}$$

con matrice dei coefficienti

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = A - \lambda\,\mathrm{I}.$$

Il sistema ha qualche soluzione $\neq \underline{0}$ se e solo se la matrice $A - \lambda\,\mathrm{I}$ è singolare, cioè

$$\det(A - \lambda\,\mathrm{I}) = 0.$$

Quindi: gli autovalori di F sono le soluzioni di questa equazione, che si dice "equazione caratteristica" di A.

L'insieme $V_{\overline{\lambda}}$ degli autovettori con un dato autovalore $\overline{\lambda}$, con l'aggiunta di $\underline{0}$, si dice "autospazio" di F con autovalore $\overline{\lambda}$, è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A - \lambda\,\mathrm{I})x = \underline{0},$$

è lo spazio nullo della matrice

$$V_{\overline{\lambda}} = \mathcal{N}(A - \lambda\mathrm{I}),$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, con dimensione $n - \mathrm{r}(A - \lambda\,\mathrm{I})$, sempre > 0.

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow$ trovo autovalore

sostituisco λ con i valori trovati e trovo gli autovettori