

APPL. LINEARI

Intermezzo

Abbiamo visto principalmente i seguenti esempi di spazi vettoriali

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{V}^1 & \mathcal{V}^2 & \mathcal{V}^3 & & & & \\ \mathbb{R}^1 & \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^4 & \dots & \mathbb{R}^n & \dots \end{array}$$

una volta fissato un riferimento, precisamente una base, ciascun spazio vettoriale geometrico \mathcal{V}^n si può identificare, come spazio vettoriale col rispettivo spazio vettoriale numerico \mathbb{R}^n ($n = 1, 2, 3$). Per ogni intero positivo n si può considerare come analogo n -dimensionale degli spazi vettoriali geometrici uno spazio vettoriale n -dimensionale astratto; una volta fissata una base, tale spazio vettoriale si può identificare con il corrispondente spazio vettoriale \mathbb{R}^n . Di regola, le definizioni, le proposizioni, i teoremi e le dimostrazioni sono più naturali per gli spazi vettoriali astratti.

Di seguito vedremo in particolare come le descrizioni della applicazioni lineari fra spazi vettoriali \mathbb{R}^n si possano estendere a descrizioni di applicazioni lineari fra spazi vettoriali astratti.

D'ora innanzi, tranne avviso contrario, ogni spazio vettoriale considerato sarà tacitamente supposto di dimensione finita.

Applicazioni lineari

Siano V, W spazi vettoriali. Cosa possiamo dire delle applicazioni lineari da V a W ?

Innanzitutto, l'unico elemento che sicuramente esiste in uno spazio vettoriale è il vettore nullo. Dunque possiamo definire un'applicazione $F : V \rightarrow W$ ponendo $F(v) = \underline{0} \in W$, per ogni $v \in V$. Questa applicazione è lineare, viene detta "applicazione nulla".

Teorema. Siano dati: uno spazio vettoriale V , una sequenza di vettori a_1, \dots, a_n base di V , uno spazio vettoriale W , una sequenza di vettori w_1, \dots, w_n di W . Allora esiste un'unica applicazione lineare $F : V \rightarrow W$ tale che

$$F(a_1) = w_1, \dots, F(a_n) = w_n;$$

esplicitamente, per ogni $v = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \in V$,

$$F(v) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n.$$

dati: $a_1, \dots, a_n \in V$ e $w_1, \dots, w_n \in W$
 $\exists ! F : V \rightarrow W \mid F(a_i) = w_i$
 $\forall i = 1, \dots, n$

Commenti:

- Il senso del teorema è che, dato uno spazio vettoriale n -dimensionale V , una volta fissata una base in V , si possono identificare le applicazioni lineari da V verso uno spazio vettoriale W con le sequenze di n vettori di W : ogni applicazione lineare $V \rightarrow W$ si può rappresentare con un sequenza di n vettori di W , le immagini dei vettori base di V , e ogni sequenza di n vettori di W rappresenta una ed una sola applicazione lineare $V \rightarrow W$.

- L'ipotesi che a_1, \dots, a_n sia una base di V è fondamentale, in quanto assicura per ciascun vettore $v \in V$ l'esistenza e l'unicità della sequenza dei coefficienti x_1, \dots, x_n che servono per costruire $F(v)$.

- L'unicità dell'applicazione F , con la sua descrizione esplicita, è ovvia. La parte principale della dimostrazione consiste nel provare che una tale applicazione F è lineare.

Esempio. In \mathcal{V}^2 , identificato con \mathbb{R}^2 mediante un riferimento, consideriamo

$$\text{una base, ad esempio } a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{due vettori, ad esempio } w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

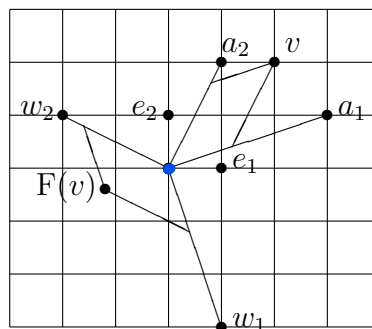
Esiste un'unica applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $F(a_1) = w_1$, $F(a_2) = w_2$.

Calcoliamo il valore di F su un vettore, ad esempio $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ se e solo se } x_1 = \frac{2}{5}, \quad x_2 = \frac{4}{5};$$

quindi

$$F \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \frac{4}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$



Applicazioni lineari **iniettive, suriettive, biiettive**

Applicazioni fra insiemi, iniettive, suriettive, biiettive.

Ricordiamo che un'applicazione $F : D \rightarrow C$ fra insiemi si dice

- **iniettiva** se soddisfa una delle tre condizioni equivalenti

per ogni $d_1, d_2 \in D$, da $d_1 \neq d_2$ segue $F(d_1) \neq F(d_2)$;

per ogni $d_1, d_2 \in D$, da $F(d_1) = F(d_2)$ segue $d_1 = d_2$;

per ogni $c \in C$, esiste al più un $d \in D$ tale che $F(d) = c$; ?

- **suriettiva** se

per ogni $c \in C$, esiste almeno un $d \in D$ tale che $F(d) = c$;

- **biiettiva** se

per ogni $c \in C$, esiste un'unico $d \in D$ tale che $F(d) = c$.

$$\text{Sur} \Leftrightarrow \text{Im}(L) = W$$

$$F: D \mapsto C$$

$$\forall c \in C \exists d \in D \\ | F(d) = c$$

In altri termini, l'applicazione è **biiettiva** se e solo se è sia **iniettiva** che **suriettiva**.

Cosa si può dire delle applicazioni lineari iniettive, suriettive, biiettive? Iniziamo con le applicazioni fra spazi vettoriali numerici.

Sia data un'applicazione lineare fra spazi vettoriali numerici

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, F(x) = Ax \quad (A \text{ costante } m \times n).$$

Osserviamo che per ogni $b \in \mathbb{R}^m$, l'equazione nell'incognita x su \mathbb{R}^n

$$F(x) = b$$

equivale all'equazione

$$Ax = b,$$

$$F(v) = Av = b \quad A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \bar{F}(v_1, \dots, v_n)$$

che è un sistema lineare di m equazioni in n incognite.

Proposizione.

- F è iniettiva se e solo se le colonne di A sono linearmente indipendenti, cioè $r(A) = n$;

- F è suriettiva se e solo se le righe di A sono linearmente indipendenti; cioè $r(A) = m$;

- F è biiettiva se e solo se $n = r(A) = m$, cioè A è non singolare. *$r \leq c$ indip $\det \neq 0$*

Dimostrazione parziale. Proviamo solo la 1° e la 3° affermazione. Indicate con f_1, \dots, f_n le colonne di A , l'equazione $Ax = b$ si scrive anche come

$$x_1 f_1 + \dots + x_n f_n = b.$$

- Se F è iniettiva, allora per ogni $b \in \mathbb{R}^m$ l'equazione $x_1 f_1 + \dots + x_n f_n = b$ ha al più una soluzione, allora l'equazione $x_1 f_1 + \dots + x_n f_n = 0$ ha solo la soluzione $x_1 = \dots = x_n = 0$, allora f_1, \dots, f_n sono linearmente indipendenti. Viceversa, si prova che se f_1, \dots, f_n sono linearmente indipendenti, allora per ogni $b \in \mathbb{R}^m$ l'equazione $x_1 f_1 + \dots + x_n f_n = b$ ha al più una soluzione, quindi F è iniettiva.

- F è biiettiva se e solo se per ogni $b \in \mathbb{R}^m$ l'equazione $x_1 f_1 + \dots + x_n f_n = b$ ha un'unica soluzione se e solo se f_1, \dots, f_n è una base di \mathbb{R}^m se e solo se A è non singolare se e solo se $m = r(A) = n$.

Esempi.

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ è iniettiva ma non suriettiva.}$$

$$G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad G \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ non è iniettiva né suriettiva.}$$

$$H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad H \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ è suriettiva ma non iniettiva.}$$

$$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad L \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ è biiettiva.}$$

Queste considerazioni e proposizione si possono riformulare in vari modi più o meno forti in termini di spazi vettoriali astratti, ad esempio come segue. Sia data un'applicazione lineare da uno spazio vettoriale V con una base a_1, \dots, a_n verso uno spazio vettoriale W

$$F(x_1 a_1 + \dots + x_n a_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n \quad (f_i \text{ costanti } \in W).$$

$$F(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) = \lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_m \omega_m$$

$$F \text{ in} \Leftrightarrow \text{Ker}(F) = \{0_V\}$$

$$F \text{ sur} \Leftrightarrow \text{Im } F = W$$

Proposizione.

- F è iniettiva se e solo se f_1, \dots, f_n è linearmente indipendente; w_1, \dots, w_n lin ind
- F è suriettiva se e solo se $\text{Span}\{f_1, \dots, f_n\} = W$; $\langle w_1, \dots, w_n \rangle = W$
- F è biiettiva se e solo se f_1, \dots, f_n è una base di W .

Commento. La dimostrazione di questa proposizione segue quasi direttamente dalle definizioni. Viene lasciata al lettore.

Spazi nullo e colonna, spazi nucleo e immagine

Ricordiamo che a ciascuna matrice A di tipo $m \times n$ abbiamo associato alcuni spazi vettoriali, in particolare:

- lo spazio nullo di A

$$\mathcal{N}(A) = \text{insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo } Ax = 0;$$

- lo spazio colonna di A

$$\mathcal{C}(A) = \text{Span}\{f_1, \dots, f_n\} \quad (f_j \in \mathbb{R}^m \text{ colonne di } A);$$

e abbiamo visto la relazione fra le loro dimensioni

$$\dim(\mathcal{N}(A)) + \dim(\mathcal{C}(A)) = n.$$

Indicata con $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'applicazione lineare data da

$$F(x) = Ax$$

possiamo descrivere questi spazi come segue:

- $\mathcal{N}(A)$ è l'insieme dei vettori di \mathbb{R}^n che vengono mandati nel vettore nullo di \mathbb{R}^m :

$$\mathcal{N}(A) = \{x \mid F(x) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n;$$

- $\mathcal{C}(A)$ è l'insieme delle immagini in \mathbb{R}^m dei vettori di \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{C}(A) = \{F(x); x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Lo spazio nullo e lo spazio colonna della matrice si dicono rispettivamente anche “spazio nucleo” e “spazio immagine” dell'applicazione F . Più in generale, si ha la

Definizione. Sia $F : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare fra due spazi vettoriali V, W ;

- il nucleo di F è l'insieme dei vettori che F manda nel vettore nullo di W :

$$\text{Ker}(F) = \{x : F(x) = 0\} \subseteq V;$$

$$\text{ker}(F) = \{x \mid F(x) = 0\}$$

- l'immagine di F è l'insieme dei vettori immagine che F crea in W :

$$\text{Im}(F) = \{F(x); x \in V\} \subseteq W.$$

Si verifica che $\text{Ker}(F)$ e $\text{Im}(F)$ sono sottospazi, rispettivamente di V e W .

Esempio.

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$

$\begin{matrix} 3 \times 2 \\ \text{D} & \text{C} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 3 \text{ righe} \\ 2 \text{ colonne} \end{matrix}$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 & x_1 = x_2 \\ -x_1 + x_2 = 0 & x_1 = x_2 \\ \cancel{x_1 - x_2 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(F) &= \mathcal{N} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= (\text{soluzioni di } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \\ &= (\text{insieme dei } \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ con } x_2 \text{ libera}) \\ &= \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ \text{Im}(F) &= \mathcal{C} \begin{bmatrix} \overset{v_1}{1} & \overset{v_2}{-1} \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{con } x_1 \end{aligned}$$

Esempio. Siano date: una base a_1, a_2 di uno spazio vettoriale V , due vettori w_1, w_2 linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale W , l'applicazione lineare $F : V \rightarrow W$ tale che

$$F(a_1) = w_1, \quad F(a_2) = w_2$$

esplicitamente,

$$F(xa_1 + ya_2) = xw_1 + yw_2 \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\text{Ker}(F) = \{xa_1 + ya_2 \mid xw_1 + yw_2 = \underline{0}\} = \{\underline{0}\};$$

$$\text{Im}(F) = \{xw_1 + yw_2; x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Span}\{w_1, w_2\}.$$

Al teorema sulla relazione fra le dimensioni dello spazio nullo e spazio colonna di una matrice corrisponde il seguente teorema sulla relazione fra le dimensioni dello spazio nucleo e spazio immagine di un'applicazione lineare

Teorema. Siano: $F : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare, z_1, \dots, z_p una bse di $\text{Ker}(F)$, $F(v_1), \dots, F(v_q)$ una base di $\text{Im}(F)$. Allora $z_1, \dots, z_p, v_1, \dots, v_q$ è una base di V , quindi

$$\dim(\text{Ker}F) + \dim(\text{Im}F) = \dim(V). \quad \leftarrow$$

Dimostrazione.

- Consideriamo l'uguaglianza

$$x_1 z_1 + \dots + x_p z_p + y_1 v_1 + \dots + y_q v_q = \underline{0};$$

applicando F ad entrambi i membri, essendo F lineare, si ha

$$x_1 F(z_1) + \cdots + x_p F(z_p) + y_1 F(v_1) + \cdots + y_q F(v_q) = \underline{0};$$

essendo $z_1, \dots, z_p \in \text{Ker}(F)$, si ha

$$y_1 F(v_1) + \cdots + y_q F(v_q) = \underline{0};$$

essendo $F(v_1), \dots, F(v_q)$ linearmente indipendenti, si ha $y_1 = \cdots = y_q = 0$; quindi

$$x_1 z_1 + \cdots + x_p z_p = \underline{0};$$

essendo z_1, \dots, z_p linearmente indipendenti, si ha $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Quindi $z_1, \dots, z_p, v_1, \dots, v_q$ è linearmente indipendente.

- Sia $v \in V$. Poichè $F(v_1), \dots, F(v_q)$ genera $\text{Im}(F)$, esistono dei numeri y_1, \dots, y_q tali che

$$F(v) = y_1 F(v_1) + \cdots + y_q F(v_q);$$

essendo F lineare, si ha

$$F(v - y_1 v_1 - \cdots - y_q v_q) = \underline{0};$$

essendo z_1, \dots, z_p una base di $\text{Ker}(F)$, esistono dei numeri x_1, \dots, x_p tali che

$$v - y_1 v_1 - \cdots - y_q v_q = x_1 z_1 + \cdots + x_p z_p;$$

quindi

$$v = x_1 z_1 + \cdots + x_p z_p + y_1 v_1 + \cdots + y_q v_q.$$

Quindi $z_1, \dots, z_p, v_1, \dots, v_q$ genera V .