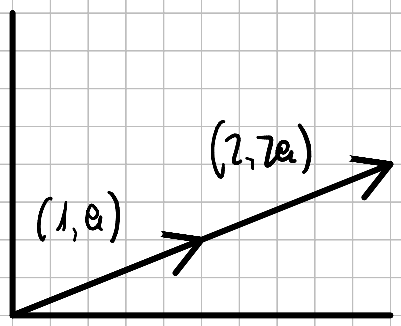
Combinazioni lineari e Generatori

Ogni sp. vett $\neq \{0\}$ contiene ∞ vettori

$W = \{(x, ax) \mid x \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}^2$

↳ $y = ax$ → multipli del vettore $(1,a)$



$(1,a)$ genera il sottospazio W rappresentato da $y = ax$

Il più piccolo sottospazio che contiene $(1,0)$ e $(0,1) \in W$

$W_1 = \{\lambda(1,0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ asse x

$W_2 = \{\mu(0,1) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ asse y

la somma di 2 vettori di W deve ancora appartenere a W. $(\lambda,0)+(0,\mu) = (\lambda,\mu) \in W$. ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ si può scrivere in questo modo scegliendo $\lambda = x$ e $\mu = y$

Il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^2$ che contiene $(0,1)$ e $(1,0)$ è $\mathbb{R}^2$

Siano V sp. vett e $\{v_1, \dots, v_n\}$ insieme di vettori di V. Il sottosp. generato da $v_1, \dots, v_n$ è l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$

$(0,1)$ e $(1,0)$ generano $\mathbb{R}^2$ in quanto ogni vettore (a,b) di $\mathbb{R}^2$ si può scrivere come combinazione lineare di $(1,0), (0,1)$

$(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$

Siano V sp. vett, $v_1, \dots, v_n$ vettori di V e w una loro comb lin $(w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \Rightarrow$

$\langle v_1, \dots, v_n, w \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Indipendenza Lineare

Descrivere un sottospazio come sottospazio generato dal minor numero di vettori possibile.

Sia V uno spazio vettoriale, i vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ si dicono linearmente indipendenti se per ogni combinazione lineare dove
$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$
L'unica combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_n$ uguale al vettore nullo è quella con scalari tutti nulli.

I vettori dell'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono linearmente dipendenti se esistono scalari $\lambda_1, \dots \lambda_n$ non tutti nulli tali che
$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$

$(1,0)$ e $(0,1)$ sono linearmente indipendenti perché l'unica combinazione lineare che dà il vettore nullo è
$\alpha(1,0) + \beta(0,1) = (\alpha, \beta) = (0,0)$, ossia con scalari nulli

$\{(1,0), (0,1), (1,1)\}$ sono linearmente dipendenti poiché esiste una comb lin tale che $\alpha(1,0) + \beta(0,1) + \gamma(1,1) = 0$
$1(1,0) + 1(0,1) - 1(1,1) = (0,0)$

- In uno spazio vettoriale V, i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono lin dip $\Leftrightarrow$ almeno uno di essi è comb lin degli altri
- Due vettori sono lin ind $\Leftrightarrow$ non sono uno multiplo dell'altro.

ES.

Per quali k $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ k & -18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ sono lin ind?

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ k & -18 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + 6\lambda_2 + \mu\lambda_3 & 0 \\ \lambda_1 + \mu\lambda_2 + \lambda_3 & -3\lambda_1 - 18\lambda_2 + 5\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 6\lambda_2 + \mu\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \mu\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 - 18\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & \mu & 0 \\ 1 & \mu & 1 & 0 \\ -3 & -18 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 + 3R_1 \end{array}$$

Riduco a scala

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & \mu & 0 \\ 0 & \mu-6 & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 5+3\mu & 0 \end{array}\right.$$

$\mu \neq 6$ e $\mu \neq -\frac{3}{5}$ $rr = 3$, il sistema ammette un'unica soluz

$\mu = 1$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right.$$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = 0$

Gli scalari sono tutti nulli

DIPENDENZA LINEARE

$$\frac{2}{5}a + \frac{4}{5}b = c \longrightarrow 2a + 4b - 5c = 0$$

$a_1, a_2, \dots, a_n \in V^n$ sono linearmente indipendenti se l'uguaglianza $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \underline{0}$ vale per qualche $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \neq 0, 0, \dots, 0$

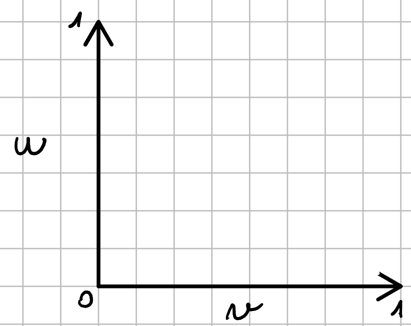
se questa combin lin è nulla e c'è almeno un vettore $\neq 0$, allora la combinaz lineare è lin indipendente.

Altrimenti, se $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$ solo per $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = 0$ allora $a_1, \dots, a_n$ sono linearmente indipendenti.

$v = rw = \underline{0}$, $w \neq \underline{0} \rightarrow r = 0$

$\alpha_1 v + \alpha_2 w = \underline{0} \rightarrow \alpha_1, \alpha_2 = 0$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \alpha_1 = 0 \\ \rightarrow \alpha_2 = 0 \end{matrix}$$



v e w sono linearmente indipendenti

$R^4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ lin indip

$$e_1 = \begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix} \quad e_2 = \begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix} \quad e_3 = \begin{matrix}0\\0\\1\\0\end{matrix} \quad e_4 = \begin{matrix}0\\0\\0\\1\end{matrix}$$

anche se tolgo un vettore rimangono linearmente indipendenti

$1e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 + (-1)v = 0$

V sp. v. $v \in V$ $\alpha v = \underline{0}$

$v = \underline{0} \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow$ lin dip

$v \neq \underline{0} \rightarrow \alpha = \underline{0} \rightarrow$ lin indip

Siano $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$

1) $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \underline{0}$ vale per qualche $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \neq 0, 0, \dots, 0$

$\updownarrow$

2) $\exists i = 1, 2, \dots, n \mid a_i = \alpha_1 a_i + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_{i-1} a_{i-1}$

$\alpha_1 a_i + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_{i-1} a_{i-1} - a_i = 0$

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_{i-1} a_{i-1} - a_i + 0\, a_{i+1} + 0\, a_m = 0$

$\mathbb{R}^n$ $a, b, c, \dots$ procedura per decidere se sono lin dip/indip

operazioni elementari su $a, b, c \in V$

- sommare a un vettore un multiplo dell'altro $(a = a + 2b)$
- moltiplicare un termine per un certo scalare $\alpha \neq 0$
- scambiare 2 termini

la proprietà di dipendenza o indipendenza lineare è invariante per le operazioni elementari

a, b, c lin ind.

$\lambda a, b, c$ lin ind. $\quad \lambda \neq 0$

$\alpha(\lambda a) + \beta b + \gamma c = \underline{0}$

$\alpha\lambda a + \beta b + \gamma c = \underline{0}$ tutti i coefficenti devono essere 0

$\alpha\lambda, \beta, \gamma = 0 \rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$

$a(1,2,3,0)$ $b(2,1,0,3)$ $c(3,0,1,2)$ $d(0,3,2,1)$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ R_2 = R_2 - 2R_1 \\ R_3 = R_3 - 3R_1 \\ \\ \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ R_4 = R_4 + R_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ R_3 = R_3 - 3R_2 \\ \\ \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ R_4 = R_4 + 2R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a\,(1,2,3,0) \\ b\,(0,-1,-2,1) \\ c\,(0,0,2,-2) \\ d\,(0,0,0,0) \end{matrix}$$