Singolarità di matrici e annullamento del determinante

Matrici triangolari

Una matrice quadrata si dice "triangolare superiore" se è del tipo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}, \quad \ldots$$

in altri termini, indicati con a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ gli elementi della generica matrice $n \times n$, una matrice è triangolare superiore se e solo se soddisfa le condizioni

$$\begin{aligned} 0 &= a_{2,1} \\ 0 &= a_{3,1} = a_{3,2} \\ \vdots &= \\ 0 &= a_{n,1} = a_{n,2} = \cdots = a_{n,n-1} = 0; \end{aligned}$$

in sintesi:

$$a_{ij} = 0 \text{ per ogni } n \geq i > j \geq 1.$$

Il determinante di una matrice triangolare superiore è semplice:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = ac, \quad \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = adf, \quad \ldots$$

in altri termini, il determinate di una matrice A triangolare superiore $n \times n$ è il prodotto degli elementi diagonali di A :

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

Analogamente, si definiscono le matrici triangolari inferiori; il determinante di una matrice triangolare inferiore è il prodotto degli elementi diagonali.

Operazione elementare

L'operazione elementare "sommare a una colonna un multiplo di un'altra colonna" lascia invariato il determinante. Infatti:

$$\begin{aligned} \det[\cdots, a_i, \cdots, a_j + ra_i, \cdots] &= \det[\cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots] + r \det[\cdots, a_i, \cdots, a_i, \cdots] \\ &= \det[\cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots]. \end{aligned}$$

Questa proprietà permette di ricondurre il calcolo del determinante di una matrice al determinante di una matrice triangolare. Ad esempio:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 2(-1)1 = -2$$

(operazioni elementari: $2^\circ - 2 \cdot 1^\circ$, $3^\circ - 2 \cdot 2^\circ$)

Teorema principale

Teorema. Per ogni matrice A quadrata $n \times n$,

(1) se A è singolare allora $\det A = 0$, e

(2) se A è non singolare allora $\det A \neq 0$.

In altri termini,

A è singolare se e solo se $\det(A) = 0$.

Dimostrazione. Sia $A = [a_1, \cdots, a_n]$ $(a_j \in \mathbb{R}^n)$. Per ogni colonna a_j, indichiamo la sua 1°, 2°, ... componente con $(a_j)_1, (a_j)_2, \ldots$

(1) Se A è singolare, allora $a_1, \ldots, a_n$ sono linearmente dipendenti; allora $a_1 = \underline{0}$ oppure esiste una colonna a_i (con $i \geq 2$) che è combinazione lineare delle precedenti,

$$a_i = \sum_{1 \leq j < i} r_j a_j$$

allora nel primo caso $\det(A) = \det[\underline{0}, a_2, \cdots] = 0$ e nel secondo caso

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det[a_1, \cdots, a_{i-1}, \sum_{1 \leq j < i} r_j a_j, a_{i+1}, \cdots] \\
&= \sum_{1 \leq j < i} r_j \det[a_1, \cdots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \cdots] \\
&= \sum_{1 \leq j < i} r_j 0 \\
&= 0;
\end{aligned}$$

quindi in ogni caso $\det(A) = 0$.

(2) Indichiamo con a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ gli elementi della generica matrice $n \times n$. Sia data una matrice A' non singolare.

1° passo; le colonne di A' sono linearmente indipendenti, quindi la 1° è $\neq \underline{0}$; supponiamo per semplicità che A' soddisfi la condizione

$$a_{11} \neq 0;$$

sommando alle colonne dalla 2° in poi opportuni multipli della 1°, trasformiamo A' in una A'' che soddisfa (la condizione precedente e) la condizione

$$a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = 0;$$

2° passo; le colonne di A'' sono linearmente indipendenti, quindi la 2° è $\neq \underline{0}$; supponiamo per semplicità che A'' soddisfi la condizione

$$a_{22} \neq 0;$$

sommando alle colonne dalla 3° in poi opportuni multipli della 2°, trasformiamo A'' in una A''' che soddisfa (le condizioni precedenti e) la condizione

$$a_{23} = a_{24} = \cdots = a_{2n} = 0;$$

3° passo; le colonne di A''' sono linearmente indipendenti, quindi la 3° è $\neq \underline{0}$; supponiamo per semplicità che A''' soddisfi la condizione

$$a_{33} \neq 0;$$

...
procedendo in questo modo si giunge ad una matrice $A^{(n)}$ triangolare inferiore con elementi diagonali tutti $\neq 0$.

Durante il processo il determinante della matrice rimane invariato, quindi

$$\det(A') = \det(A^{(n)}) \neq 0.$$

Esempio. $\det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$, quindi la matrice è non singolare.

Esempio. Sia p un parametro $\in \mathbb{R}$.

$$\det \begin{bmatrix} p & -1 & 1 \\ 1 & p & -1 \\ -1 & 1 & p \end{bmatrix} = p^3 + 3p$$

quindi la matrice è singolare se e solo se $p^3 + 3p = 0$, essendo $p^3 + 3p = p(p^2 + 3)$, se e solo se $p = 0$.

Sistemi lineari e determinanti

Teorema. E' dato il sistema lineare di n equazioni in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = p,$$

con $a_1, \ldots, a_n, p$ costanti in $\mathbb{R}^n$.

1) Se $\det[a_1, \cdots, a_n] = 0$, allora il sistema non ha soluzioni oppure ne ha infinite;

2) Se $\det[a_1, \cdots, a_n] \neq 0$, allora il sistema ha una ed una sola soluzione; una formula per la soluzione è

$$x_i = \frac{\det[a_1, \cdots, \overset{i}{p}, \cdots, a_n]}{\det[a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n]} \qquad \text{per ogni } i = 1, \ldots, n.$$

dove il numeratore si ottiene dal denominatore sostituendo alla $i-$ma colonna a_i la colonna p.

Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite x_1, x_2, x_3 associato alla matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|c} p & -1 & 1 & 1 \\ 1 & p & -1 & 1 \\ -1 & 1 & p & 1 \end{array}\right]$$

$$\det \begin{bmatrix} p & -1 & 1 \\ 1 & p & -1 \\ -1 & 1 & p \end{bmatrix} = p^3 + 3p = p(p^2 + 3) = 0 \text{ se e solo se } p = 0.$$

Caso $p \neq 0$. Il sistema ha un'unica soluzione;

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & p & -1 \\ 1 & 1 & p \end{bmatrix}}{p^2 + 3p} = \frac{p^{+}3}{p^3 + 3p} = \frac{1}{p}$$

x_2, x_3 lasciate al lettore;

Caso $p = 0$ lasciato al lettore.

Commento. La formula deriva direttamente dalle proprietà del determinante. Proviamo quella per x_1. Ciascuna delle seguenti uguaglianze implica la successiva:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_j = p,$$

$$\det[\sum_{j=1}^{n} x_j a_j, a_2, \cdots, a_n] = \det[p, a_2, \cdots, a_n],$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \det[a_j, a_2, \cdots, a_n] = \det[p, a_2, \cdots, a_n],$$

$$x_1 \det[a_1, a_2, \cdots, a_n] = \det[p, a_2, \cdots, a_n]$$

$$x_1 = \frac{\det[p, a_2, \cdots, a_n]}{\det[a_1, a_2, \cdots, a_n]}.$$

Volume e determinante

Informalmente, un parallelepipedo è una configurazione che si ottiene da un cubo modificando le lunghezze dei lati e gli angoli fra i lati e conservando parallelismo e congruenza dei lati opposti.

Fatto. Il determinante di una matrice 3×3 ha il seguente significato geometrico:

Fissato un punto O dello spazio, ad ogni terna di vettori $a, b, c \in \mathcal{V}^3$ associamo il parallelepipedo con un vertice in O e tre lati i segmenti orientati uscenti da O che danno a, b, c (gli altri 9 lati sono allora determinati). Identificato $\mathcal{V}^3$ con $\mathbb{R}^3$ mediante un riferimento i, j, k per ogni $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $b = b_i i + b_2 j + b_3 k$, $c = c_i i + c_2 j + c_3 k$, si ha

$$\frac{\text{area del parallepipedo su } a, b, c}{\text{area del parallepipedo su } i, j, k} = |\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}|,$$

dove a destra compare il valore assoluto del determinante.

Prodotto di matrici, singolarità, determinante

Proposizione. Due matrici A, B quadrate $n \times n$ sono non singolari se e solo se il prodotto AB è non singolare.

Dimostrazione parziale. Supponiamo che A e B siano non singolari. Ciascuna delle seguenti uguaglianze implica la successiva

$(AB)x = \underline{0}$ $\qquad$ (x e $\underline{0}$ colonne $n \times 1$)

$A(Bx) = \underline{0}$;

$Bx = \underline{0}$;

$x = \underline{0};$

ciò prova che le colonne di AB sono linearmente indipendenti, quindi AB è non singolare. (nel 2° e 3° passaggio abbiamo usato le ipotesi che le colonne di A e le colonne di B sono linearmente indipendenti).

Non proviamo che se AB è non singolare allora A e B sono non singolari.

La proposizione si può esprimere nella forma

$$\forall A, B \text{ quadrate moltiplicabili, } \det(AB) \neq 0 \text{ se e solo se } \det(A) \neq 0 \text{ e } \det(B) \neq 0.$$

Vale un risultato più forte:

Teorema Per ogni A, B quadrate moltiplicabili,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Non diamo dimostrazione.

Commento. Una conseguenza:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Infatti, ciascuna delle seguenti uguaglianze implica la successiva

$$AA^{-1} = \mathrm{I}_n, \ \det(AA^{-1}) = \det(\mathrm{I}_n), \ \det(A)\det(A^{-1}) = 1, \ \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$