Diagonalizzazione

Fino ad avviso contrario, siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita n e F un'applicazione lineare di V in sé. Di regola, negli esempi ed esercizi considereremo $V = \mathbb{R}^n$ e F data esplicitamente come $\mathrm{F}(v) = Av$ con A matrice costante (la matrice di F rispetto alla base canonica).

Applicazioni diagonalizzabili

Terminologia. Per ogni base $\mathcal{A}$ di V, l'applicazione F è rappresentata da una matrice $[\mathrm{F}]_{\mathcal{A}}$; diciamo che F è "rappresentabile" da una matrice M se esiste una base $\mathcal{A}$ di V tale che $[\mathrm{F}]_{\mathcal{A}} = M$; diciamo che F è "diagonalizzabile" se è rappresentabile da qualche matrice diagonale.

Per una data applicazione F ci poniamo le seguenti questioni:

(1) Stabilire se F è diagonalizzabile;

(2) determinare tutte le matrici diagonali che rappresentano F;

(3) per ogni matrice diagonale D che rappresenta F, determinare una base $\mathcal{A}$ di V tale che $[\mathrm{F}]_{\mathcal{A}} = D$.

Autovettori e autovalori.

Terminologia. Diciamo che un vettore $v \neq \underline{0}$ e un numero λ sono un autovettore e un autovalore di F fra loro "associati" se

$$\mathrm{F}(v) = \lambda\, v.$$

Fatti.

- A ciascun autovettore v è associato un unico autovalore. Infatti: $\mathrm{F}(v) = \lambda_1 v$ e $\mathrm{F}(v) = \lambda_1 v$ implicano $\lambda_1 v = \lambda_2 v$ implica $(\lambda_1 - \lambda_2)v = \underline{0}$ implica $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, implica $\lambda_1 = \lambda_2$ (il penultimo passaggio segue da $v \neq \underline{0}$).

- A ciascun autovalore $\overline{\lambda}$ sono associati infiniti autovettori che, con il vettore nullo, formano un sottospazio di V, che diciamo autospazio associato a $\overline{\lambda}$ e indichiamo con $V_{\overline{\lambda}}$.

Matrici diagonali, autovettori e autovalori.

Fatto. Per ciascuna base $\mathcal{A} : a_1, a_2, \ldots, a_n$ di V le due affermazioni sono equivalenti:

- $[\mathrm{F}]_{\mathcal{A}}$ è diagonale;

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono autovettori di F;

in tal caso, gli elementi diagonali di $[\mathrm{F}]_{\mathcal{A}}$ sono gli autovalori associati agli autovettori.

Infatti, $[\mathrm{F}]_{\mathcal{A}} = D$ diagonale se e solo se

$$[(\mathrm{F}a_1)_{\mathcal{A}} (\mathrm{F}a_2)_{\mathcal{A}} \cdots (\mathrm{F}a_n)_{\mathcal{A}}] = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

se e solo se

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{F}(a_1) = d_1\, a_1 + 0\, a_2 + \cdots + 0\, a_n = d_1\, a_1\\
&\mathrm{F}(a_2) = 0\, a_1 + d_2\, a_2 + \cdots + 0\, a_n = d_2\, a_2\\
&\vdots\\
&\mathrm{F}(a_n) = 0\, a_1 + 0\, a_2 + \cdots + d_n\, a_n = d_n\, a_n
\end{aligned}
$$

Quindi le questioni esposte sopra si possono tradurre in termini di autovettori ed autovalori come segue

(1) Stabilire se esiste una base di V di autovettori di F;

(2) Determinare le sequenze di autovalori associate alle varie basi di autovettori;

(3) Per ogni sequenza ammissibile di autovalori, determinare una base di autovettori cui è associata.

Nel caso F applicazione lineare di $\mathbb{R}^n$ in sé, $\mathrm{F}(v) = Av$, l'equazione degli autovettori ed autovalori è

$$A\, v = \lambda\, v, \qquad (v \neq \underline{0}),$$

cioè

$$(A - \lambda\, \mathrm{I})\, v = \underline{0}, \qquad (v \neq \underline{0}),$$

gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\det(A - \lambda\, \mathrm{I}) = 0;$$

per ogni autovalore $\overline{\lambda}$ si ha un autospazio

$$V_{\overline{\lambda}} = \mathcal{N}(A - \overline{\lambda}\, \mathrm{I}).$$

Per ogni autospazio, si cerca una sua base, e con queste basi si cerca di costruire una base di V. Di seguito mostriamo i primi risultati della teoria di autovettori ed autovalori e usando queti risultati diamo una strategia efficace.

Qualche esempio in dimensione 2

Fatto. Per ogni due autovettori a, b con autovalori associati α, β,

se a, b sono linearmente dipendenti allora $\alpha = \beta$, cioè
se $\alpha \neq \beta$ allora a, b sono linearmente indipendenti.

Infatti: a, b autovettori linearmente dipendenti implica $b = ra$ per qualhce numero r implica $\mathrm{F}(b) = \mathrm{F}(ra)$ implica $\beta b = r\alpha a$ implica $\beta b = \alpha b$ implica $\beta = \alpha$.

Esempio 1

$$\mathrm{F}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x, \qquad (x \in \mathbb{R}^2)$$

Equazione degli autovettori ed autovalori:

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x = \lambda\, x, \qquad \begin{bmatrix} -\lambda & 9 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

equazione caratteristica degli autovalori:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 9 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0, \;\; \lambda^2 - 9 = 0, \;\; \lambda = \pm 3.$$

Ci sono 2 autovalori distinti; 2 autovettori ad essi associati, comunque scelti, sono linearmente indipendenti, quindi sono una base di $\mathbb{R}^2$. F è diagonalizzabile.

Autospazio V_3 : spazio delle soluzioni di

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x = 3\,x, \qquad \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

un sistema singolare di 2 equazioni in 2 incognite, che equivale all'unica equazione

$$x_1 - 3\,x_2 = 0; \text{ con soluzioni } \begin{bmatrix} 3\,x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \ (x_2 \text{ libera}); \text{ una base è } a = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Autospazio V_{-3} : spazio delle soluzioni di

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x = -3\,x, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

un sistema che equivale all'unica equazione

$$x_1 + 3\,x_2 = 0; \text{ con soluzioni } \begin{bmatrix} -3\,x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \ (x_2 \text{ libera}); \text{ una base è } b = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rispetto alla base a, b, la matrice di F è

$$[\mathrm{F}]_{a,b} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},$$

rispetto alla base b, a è

$$[\mathrm{F}]_{b,a} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Non ci sono altre matrici diagonali che rappresentano F; infatti: 2 autovettori con autovalore associato 3, essendo nell'autospazio V_3 che ha dimensione 1, sono linearmente dipendenti quindi non sono base di $\mathbb{R}^2$; allo stesso modo 2 autovettori con autovalore associato -3 non sono base di $\mathbb{R}^2$.

Esempio 2

$$\mathrm{R}(x) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x, \qquad (x \in \mathbb{R}^2)$$

R si può iterpretare come la rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario; in particolare, manda ciascun vettore non nullo in un vettore con direzione diversa, quindi non possiede alcun autovettore; non è diagonalizzabile. Svolgiamo comunque i conti.

Equazione degli autovettori ed autovalori:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x = \lambda\,x, \qquad \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

equazione caratteristica degli autovalori:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 1 = 0, \ \text{ nessuna soluzione in } \mathbb{R}.$$

Non ci sono autovalori reali, quindi non ci sono autovettori, R non è diagonalizzabile sui reali (lo è sui complessi).

Esempio 3

$$G(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x, \qquad (x \in \mathbb{R}^2)$$

Equazione degli autovettori ed autovalori:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x = \lambda\, x, \qquad \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

equazione caratteristica degli autovalori:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0, \quad \lambda^2 = 0, \quad \text{due soluzioni coincidenti in } \lambda = 0.$$

Autospazio V_0 : spazio delle soluzioni di

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x = 0\, x, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

un sistema che equivale all'unica equazione

$$x_1 = 0; \qquad \text{con soluzioni } \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \; (x_2 \text{ libera}).$$

V_0 è una retta vettoriale; 2 vettori di V_0 comunque scelti non sono una base di $\mathbb{R}^2$; G non è diagonalizzabile.

Tutte e tre queste applicazioni sono casi particolari di una famiglia di applicazioni, che consideriamo qui di seguito.

Esercizio 4. E' data la famiglia di applicazioni

$$F_k(x) = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x, \qquad (x \in \mathbb{R}^2)$$

dove k è un parametro $\in \mathbb{R}$.

a) Determinare per quali k l'applicazione F_k è diagonalizzabile;

b) Per ciascuno di tali k si scrivano le matrici diagonali che rappresentano F_k;

c) Per ciascuno di tali k e ciascuna di tali matrici diagonali, si scriva una base di autovettori rispetto alla quale F_k è rappresentata dalla matrice diagonale.

Equazione degli autovettori ed autovalori:

$$\begin{bmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x = \lambda\, x, \qquad \begin{bmatrix} -\lambda & k \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

equazione caratteristica degli autovalori:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & k \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - k = 0.$$

Distinguiamo tre casi

$k > 0$, due soluzioni reali distinte $\lambda = \pm\sqrt{k}$;

$k = 0$, due soluzioni reali coincidenti in $\lambda = 0$;

$k < 0$; nessuna soluzione reale.

Caso $k > 0$. Ci sono 2 autovalori distinti, $\pm\sqrt{k}$; 2 autovettori ad essi associati, comunque scelti, sono linearmente indipendenti, quindi sono una base di $\mathbb{R}^2$. F_k è diagonalizzabile.

Autospazio $V_{\sqrt{k}}$: spazio delle soluzioni di

$$\begin{bmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x = \sqrt{k}\, x, \qquad \begin{bmatrix} -\sqrt{k} & k \\ 1 & -\sqrt{k} \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

un sistema singolare di 2 equazioni in 2 incognite, che equivale all'unica equazione

$$x_1 - \sqrt{k}\, x_2 = 0, \text{ con soluzioni } \begin{bmatrix} \sqrt{k}\, x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} (x_2 \text{ libera}); \text{ una base è } a_k = \begin{bmatrix} \sqrt{k} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Autospazio $V_{-\sqrt{k}}$: spazio delle soluzioni di

$$\begin{bmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x = -\sqrt{k}\, x, \qquad \begin{bmatrix} \sqrt{k} & k \\ 1 & \sqrt{k} \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

un sistema che equivale all'unica equazione

$$x_1 + \sqrt{k}\, x_2 = 0, \text{ con soluzioni } \begin{bmatrix} -\sqrt{k}\, x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} (x_2 \text{ libera}); \text{ una base è } b_k = \begin{bmatrix} -\sqrt{k} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

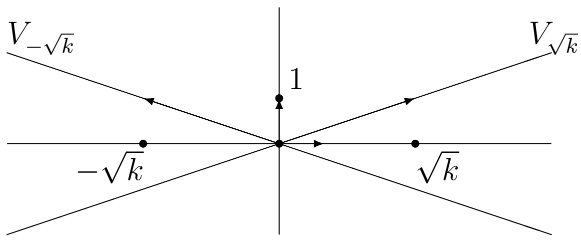
Rispetto alla base a_k, b_k, la matrice di F_k è

$$[\mathrm{F}_k]_{a_k, b_k} = \begin{bmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & -\sqrt{k} \end{bmatrix},$$

rispetto alla base b_k, a_k è

$$[\mathrm{F}_k]_{b_k, a_k} = \begin{bmatrix} -\sqrt{k} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{bmatrix}.$$

Non ci sono altre matrici diagonali che rappresentano F_k.



Caso $k = 0$.

$$\mathrm{F}_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x, \qquad (x \in \mathbb{R}^2)$$

Caso già considerato nell'Esempio 3. F_0 non è diagonalizzabile.

Caso $k < 0$. F_k non ha autovalori, non ha autovettori, non è diagonalizzabile.

Generale

Fino ad avviso contrario, siano V uno spazio vettoriale di dimensione n e F una applicazione lineare di V in sé. Abbiamo visto che a due autovalori distinti corrispondono autovettori indipendenti. Questo fatto vale più in generale e la sua versione generale è all'origine della teoria di autovettori ed autovalori. Di seguito enunciamo i primi teoremi e proposizioni, senza dimostrazione, e diamo una strategia in linea di principio efficace per rispondere alle principali questioni. Illustreremo la teoria su esempi in dimensione 3.

Teorema 1. Siano $a, b, \ldots, c$ autovettori di F con autovalori associati $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$. Se $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ sono distinti, allora $a, b, \ldots, c$ sono linearmente indipendenti.

Commento. Essendo V di dimensione n, in V ci sono al massimo n vettori linearmente indipendenti, quindi F ha al più n autovalori distinti.

Teorema 1.1. Se F ha n autovalori distinti, allora scegliendo un autovettore per ciscun autovalore si ha una base di V, e F è diagonalizzabile.

Esempio 5

$$\mathrm{F}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x, \qquad (x \in \mathbb{R}^3)$$

Equazione degli autovettori ed autovalori:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

equazione caratteristica degli autovalori:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0, \quad \lambda(\lambda^2 - 1) = 0, \quad \lambda = 1, 0, -1.$$

Ci sono 3 autovalori distinti, tanti quanti la dimensione di $\mathbb{R}^3$, quindi F è diagonalizzabile. Comunque scelti 3 autovettori a, b, c con autovalori associati $1, 0, -1$, si ha una base di $\mathbb{R}^3$, rispetto a questa base la matrice di F è

$$[\mathrm{F}]_{a,b,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

Fine esempio.

Il Teorema 1 ha una forma più generale:

Teorema 2. Siano $a_1, \ldots, a_p$ e $b_1, \ldots, b_q$ e ... e $c_1, \ldots, c_r$ sequenze linearmente indipendenti di autovettori associati ad autovalori $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$. Se $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ sono distinti, allora la sequenza $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q, \ldots, c_1, \ldots, c_r$ è linearmente indipendente.

Commento. Indicati con $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ gli autovalori di F, prendendo in ciascun autospazio $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_m}$ una sequenza base, e concatenando le sequenze, si ottiene una sequenza linearmente indipendente, quindi

$$\sum_{i=1}^{m} \dim(V_{\lambda_i}) \leq \dim(V).$$

Teorema 2.1. Se la somma delle dimensioni degli autospazi di F è uguale alla dimensione di V, allora prendendo una sequenza base per ciascun autospazio e concatenando si ottiene una sequenza base di V, e F è diagonalizzabile. Vale il viceversa. In altri termini, indicati con $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ gli autovalori di F, F è diagonalizzabile se e solo se

$$\sum_{i=1}^{m} \dim(V_{\lambda_i}) = \dim(V).$$

Esempio 6

$$\mathrm{G}(x) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x, \qquad (x \in \mathbb{R}^3)$$

Equazione degli autovettori ed autovalori:

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

equazione caratteristica degli autovalori:

$$\det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0, \ \ (-1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0, \ \ \lambda = 1, -1.$$

Autospazio V_1 : spazio delle soluzioni di

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

$$\dim(V_1) = 3 - \mathrm{rango}(matrice) = 3 - 2 = 1;$$

risolvendo il sistema si trova una base di un vettore a;

Autospazio V_{-1} : spazio delle soluzioni di

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

$$\dim(V_{-1}) = 3 - \mathrm{rango}(matrice) = 3 - 1 = 2;$$

risolvendo il sistema si trova una base di due vettori b_1, b_2.

La sequenza a, b_1, b_2 è una base di $\mathbb{R}^3$, rispetto a questa base la matrice di G è

$$[\mathrm{G}]_{a,b_1,b_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

Esempio 7

$$\mathrm{H}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x, \qquad (x \in \mathbb{R}^3)$$

Equazione degli autovettori ed autovalori:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

equazione caratteristica degli autovalori:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0, \ \ (1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0, \ \ \lambda = 1, -1.$$

Autospazio V_1 : spazio delle soluzioni di

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

$$\dim(V_1) = 3 - \text{rango}(matrice) = 3 - 2 = 1;$$

risolvendo il sistema si trova una base di un vettore a.

Autospazio V_{-1} : spazio delle soluzioni di

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

$$\dim(V_{-1}) = 3 - \text{rango}(matrice) = 3 - 2 = 1;$$

risolvendo il sistema si trova una base di un vettore b.

Riassumendo, si ha:

$$\dim(V_1) + \dim(V_{-1}) = 1 + 1 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3),$$

quindi H non è diagonalizzabile.

Esempio 8. E' data la famiglia di applicazioni

$$\mathrm{F}_k(x) = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad (x \in \mathbb{R}^3)$$

dove k è un parametro $\in \mathbb{R}$.

Equazione degli autovettori ed autovalori:

$$\begin{bmatrix} k-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

equazione caratteristica degli autovalori:

$$\det \begin{bmatrix} k-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0, \quad (k-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0, \quad \lambda = k, 1, -1.$$

Se $k \neq \pm 1$, allora ci sono 3 autovalori distinti, tanti quanti la dimensione di $\mathbb{R}^3$, quindi F è diagonalizzabile. Comunque scelti 3 autovettori a, b, c con autovalori associati $k, 1, -1$, si ha una base di $\mathbb{R}^3$, rispetto a questa base la matrice di F_k è

$$[\mathrm{F}_k]_{a,b,c} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

Se $k = -1$, allora F_k è diagonalizzabile (cfr. Esempio 6).

Se $k = 1$, allora F_k non è diagonalizzabile (cfr. Esempio 7).