$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} = b_1 \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} = b_2 \end{cases} \longrightarrow \text{Sistema lineare}$$

$a_1, \dots, a_n$ sono coefficienti
$b_1, \dots, b_m$ sono termini noti

Un sistema si dice compatibile se ammette soluzioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases} \Longrightarrow$$ condizioni che non si contraddicono e non possono essere ottenute una dall'altra

Due sistemi lineari si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni

Matrice $m \times n$
$$\begin{array}{c|ccc} & c_1 & c_2 & c_3 \\ r_1 & 5 & -6 & 0 \\ r_2 & 4 & 3 & -1 \end{array}$$
m righe e n colonne

Matrice RC. l'elemento $(1,3)$ è a riga 1 e colonna 3

Somme tra matrici

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

Prodotto tra matrici $A \cdot B = C$
numero di righe di A deve essere uguale al numero di colonne di B

$$\begin{array}{cc} & \quad\quad C \\ A= & \begin{pmatrix}1&0&3&-1\\0&-2&2&1\\1&0&-1&0\end{pmatrix} r\end{array} , \quad \begin{array}{cc} & \quad\quad C \\ B= & \begin{pmatrix}0&1\\-3&5\\1&0\\2&-1\end{pmatrix} r\end{array}$$

$A_{3\times 4}$

$B_{4\times 2}$

$A \times B \rightarrow 3\times 2$

$$r_{1,2} = 1\cdot 1 + 0\cdot 5 + 3\cdot 0 + -1\cdot -1 = 2$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix}\text{--} & 2\\ \text{--} & \text{--}\\ \text{--} & \text{--}\end{pmatrix}$$

Il prodotto non gode della proprietà commutativa

Matrici e sistemi lineari

$$\begin{pmatrix}a_{11}x_1 + a_{12}x_2\\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix} \Rightarrow \underset{A}{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}} \underset{\underline{x}}{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}} = \underset{\underline{b}}{\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}}$$

$A\underline{x} = \underline{b} \longrightarrow$ vettore colonne termini noti

$\downarrow$

A è la matrice $m\times n$ dei coefficienti delle incognite, x è la colonna delle incognite e b è la colonna dei termini noti

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c}a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{array}\right) \rightarrow$$ matrice completa associata al sistema

Definizione matrice a scala

- eventuali righe nulle si trovano in fondo alla matrice
- il primo elemento di ogni riga non nulla si trova più a destra del primo elemento non nullo della riga precedente

Esempio:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
è a scala

rr (rango righe) è numero di righe non nulle

Il SL $A\underline{x}=\underline{b}$ si dice a scala se A è in forma a scala

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1 \\ x_2-2x_3=2 \\ x_3-x_4=0 \\ x_4=1 \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Sia $A\underline{x}=\underline{b}$ un sistema lineare a scala nelle n incognite $x_1, \dots, x_n$, allora:

- Il sistema ammette soluzioni $\iff rr(A) = rr(A|\underline{b})$
- Se $rr(A) = rr(B) = n$, il sistema lineare ammette una sola soluzione
- Se $rr(A) = rr(A|b) = k < n$ il sistema ammette infinite soluzioni, che dipendono da $n-k$ variabili libere

Algoritmo di Gauss

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} R_3 - 2R_1$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema ridotto con algoritmo di Gauss può

- non avere soluzioni
- avere 1 sola soluzione
- avere ∞ soluzioni

$\sqrt{2} = 1{,}414...$ può essere visto come un limite di successioni che tende a $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} n(a+b) &= a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_n + b_n \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_n + b_1 + b_2 + \dots + b_n \end{aligned}$$

Sistemi lineari Tutte le incognite sono di grado 1

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \quad \infty \text{ soluz.}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \quad 0 \text{ soluz.}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = \rho_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = \rho_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = \rho_3 \end{cases}$$

In generale un sistema di m equazioni in n incognite

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = \rho_1$$

n = colonne
m = righe

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = \rho_m$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n & 1 \end{array} \\ m & \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \rho_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & \rho_m \end{array}\right) \end{array}$$

$[A|\rho]$

$A \to m \times n$, $\rho \to m \times 1$

Per quali A, ρ il sistema ha una e una sola soluz?

Per quali A si ha che $\forall \rho$, il sistema ha un'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_m \end{pmatrix}$$

1) $\forall p$, il sist lin ha una sola soluzione ?

2) $n = m$

n righe $=$ n incognite

le colonne devono essere lin ind

3) $n = m$

le righe di A sono lin indip

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 2 & & 3 \end{tikzcd}$$

Le soluzioni possono essere

$0 \rightarrow r >$ incognite (o soluz. incompatibili)

$\infty \rightarrow r <$ incognite

$1 \rightarrow r =$ incognite

Prodotto di matrici

1 riga · 1 colonna

$(a, b)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ $\quad a \cdot c + b \cdot d$

→ n righe A = n colonne b

$$\begin{array}{c c} & \\ r3 & \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow 4 \times 3$$

c_2

$\downarrow$

r_3, c_2 5

$$\overset{r3}{(5, 6)}\overset{c2}{(2, 5)} = 10 + 30 = 40$$

A	B	AB
$m \times n$	$n \times p$	$m \times p$

$$AB_{ij} = A_i B_j$$

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 4x + 5y \\ 6x + 7y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\underset{m \times n}{A}\ \overset{n \times 1}{X} = \underset{m \times 1}{P}$$