Eserciziettti di Algebra Lineare - I

5 Maggio 2023 – E. Masina

Esercizio 0.

Stabilire se esiste una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$T(1,2) = (3,0) \qquad T(2,7) = (4,5) \qquad T(1,5) = (1,4)$$

Soluzione 0.

Se T fosse lineare, allora dovrebbe verificare

$$T(1,2) + T(1,5) = T\Big((1,2) + (1,5)\Big) = T(2,7)$$

Tuttavia si verifica mediante le informazioni contenute nel testo che

$$T(1,2) + T(1,5) = (3,0) + (1,4) = (4,4)$$

mentre

$$T(2,7) = (4,5)$$

pertanto una tale applicazione lineare non esiste.

Esercizio 1.

Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbb{R}^2$ come segue:

$$T(e_1) = (1, 2, 1) \qquad\qquad T(e_2) = (1, 0, -1)$$

1. Esplicitare $T(x, y)$;
2. Determinare la matrice A associata a T (rispetto alla base canonica);
3. Dire se $(3, 4, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

Soluzione 1.

(1). Un generico vettore $\boldsymbol{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori canonici:

$$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$$

Per la linearità di T:

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{v}) &= xT(\boldsymbol{e}_1) + yT(\boldsymbol{e}_2) \\ &= x(1, 2, 1) + y(1, 0, -1) \\ &= (x + y,\ 2x,\ x - y) \end{aligned}$$

(2). La matrice associata ha per colonne le immagini di T rispetto alla base canonica $\boldsymbol{e}_k$, pertanto la costruzione della matrice è immediata dal testo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(3). Il vettore $\boldsymbol{w} = (3, 4, 1)$ appartiene all'immagine di T se esiste $(z, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $T(x, y) = \boldsymbol{w}$.
Da quest'ultima considerazione, traducendo:

$$T(x, y) = \boldsymbol{w} \to (x + y,\ 2x,\ x - y) = (3, 4, 1) \to \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Il sistema è risolvibile e si ottiene la soluzione $x = 2, y = 1$, pertanto si può anche dire: $(3, 4, 1) = T(1, 2)$ dunque $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Im}(T)$.

Esercizio 2.

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (2x, y + z)$$

1. Verificare che T è di fatto lineare;
2. Dato $\omega = (1, 1, 1)$ calcolare $T(\omega)$;
3. Determinare una base e la dimensione degli spazi vettoriali $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^2$ e $N(T) \subseteq \mathbb{R}^3$.

Soluzione 2.

(1). Si tratta di verificare di fatto che

$$T(x_1+x_2,\ y_1+y_2+z_1+z_2) = T(x_1, y_1+z_1)+T(x_2, y_2+z_2) \qquad \forall x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$$

Notiamo subito:

$$\begin{aligned} T(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2 + z_1 + z_2) &= \Big(2(x_1 + x_2), y_1 + y_2 + z_1 + z_2\Big) \\ &= \Big(2(x_1 + x_2),\ y_1 + y_2 + z_1 + z_2\Big) \\ &= \Big(2x_1 + 2x_2,\ y_1 + y_2 + z_1 + z_2\Big) \\ &= (2x_1,\ y_1 + z_1) + (2x_2,\ y_2 + z_2) \\ &= T(x_1, y_1 + z_1) + T(x_2, y_2 + z_2) \end{aligned}$$

Questo verifica la prima delle condizioni di linearità. Si ha inoltre:

$$\begin{aligned} T(\lambda(x, y, z)) = T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) &= \Big(2\lambda x,\ \lambda y + \lambda z\Big) = \Big(\lambda(2x),\ \lambda(y + z)\Big) \\ &= \lambda(2x,\ y + z) \\ &= \lambda T(x, y, z) \end{aligned}$$

Dimostrando che T è una applicazione lineare.

(2). $T(\omega)$ si calcola applicando la regola di T al vettore ω:

$$T(\omega) = T(1,1,1) = (2 \cdot 1,\ 1+1) = (2,1)$$

(3). Possiamo risolvere questo punto costruendo la matrice associata. Le immagini di T rispetto alla base canonica in $\mathbb{R}^3$ sono:

$$T(\boldsymbol{e}_1) = (2,0) \qquad T(\boldsymbol{e}_2) = (0,1) \qquad T(\boldsymbol{e}_3) = (0,1)$$

pertanto

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

È immediato notare che

$$\mathrm{Im}(T) = \Big(T(\boldsymbol{e}_1),\ T(\boldsymbol{e}_2),\ T(\boldsymbol{e}_3) \Big)$$

ossia l'immagine dell'applicazione (o meglio, della matrice associata all'applicazione T) è lo spazio generato dalle colonne della matrice A.
Ricordando i concetti di dimensione, immagine, rango, base e nucleo si ha per la dimensione dello spazio immagine:

$$\dim \Big(\mathrm{Im}(T) \Big) = \mathrm{rk}(A) = 2$$

(Ricordarsi che il rango di una matrice M è sempre $\mathrm{rk}(M \leqslant \min\{r, c\}$, dove $r =$ numero di righe e $c =$ numero di colonne). In questo caso si può osservare facilmente che il rango sia 2.

Come base per $\mathrm{Im}(T)$ possiamo prendere i primi due vettori colonna:

$$\mathcal{B}\Big(\mathrm{Im}(T) \Big) = \{(2,0),\ (0,1)\}$$

Il nucleo dell'applicazione ($N(T)$ o equivalentemente $\ker(T)$) è dato dal sottospazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ dove $\boldsymbol{x}$ è il vettore delle coordinate cartesiane. Dunque:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ z + y = 0 \end{cases}$$

Necessariamente $x = 0$, mentre $z = -y$. Allora

$$\ker(T) = \{(0, y, -y), \forall y \in \mathbb{R}\} \quad \text{inoltre} \quad \dim(\ker(T)) = 1$$

$$\text{e la base è} \quad \mathcal{B}\Big(\ker(T) \Big) = \{(0, 1, -1)\}$$