

1 Spazi vettoriali

1.1 Spazi vettoriali geometrici \mathcal{V}^n ($n = 1, 2, 3$). Spazi vettoriali. Spazi vettoriali numerici \mathbb{R}^n

Spazi vettoriali geometrici \mathcal{V}^n ($n = 1, 2, 3$)

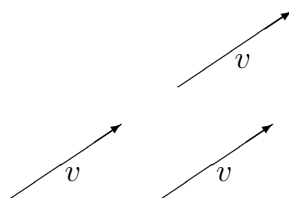
Vettori. L'ambito del discorso è uno fra la retta, il piano, lo spazio Euclideo.

Un “vettore” è il complesso di una “lunghezza”, una “direzione”, un “verso”. Indichiamo i vettori con lettere minuscole a, b, \dots . Si conviene che una lunghezza nulla, una qualsiasi direzione e verso diano un unico vettore, che si dice “vettore nullo” e si indica con 0 ; due vettori con la stessa lunghezza e direzione ma con versi diversi si dicono l'uno “opposto” dell'altro; indicato un vettore con v , si indica il suo opposto con $-v$; ovviamente $-(-v) = v$.

Un “segmento orientato” è un segmento con un verso di percorrenza, si rappresenta con una freccia che va dal primo all'ultimo estremo.

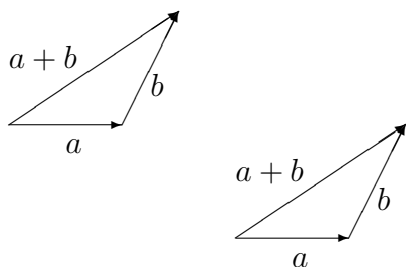
Ogni segmento orientato con estremi distinti dà una lunghezza, una direzione e un verso, quindi un vettore; un segmento orientato ridotto a un punto dà il vettore nullo; due segmenti orientati che differiscono solo per l'orientamento danno due vettori opposti.

Ogni vettore è dato da infiniti segmenti orientati: per ogni vettore v ed ogni punto, esiste un'unico segmento orientato che esce dal punto e dà v .



Somma di vettori; proprietà. Siano dati due vettori a, b . Dato un punto, dal punto esce un'unico segmento orientato che dà a , si ha così un secondo punto, dal punto esce un'unico segmento orientato che dà b , si ha così un terzo punto. Il segmento orientato dal primo al terzo punto dà un vettore, che si dice “vettore somma” di a e b e si indica con $a + b$.

Dati due diversi primi punti, si ottengono due diversi segmenti orientati, che però danno lo stesso vettore.

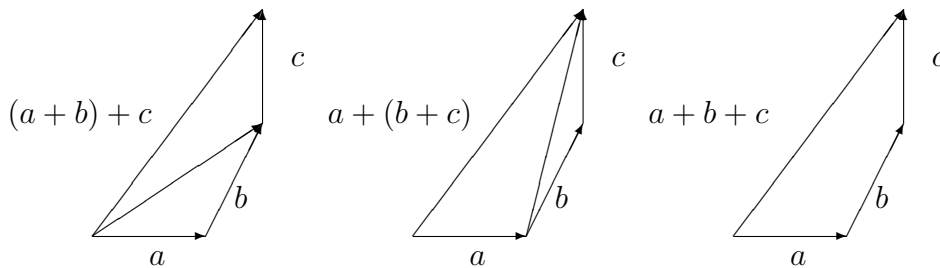


L'operazione di somma di vettori, come la somma di numeri reali, possiede le seguenti proprietà.

Associatività I due modi diversi per sommare tre vettori, lasciando invariato l'ordine, sono equivalenti:

$$(1) \quad (a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{per ogni } a, b, c$$

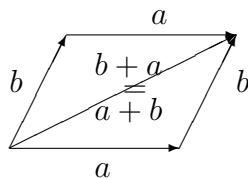
Si può dunque parlare di somma di tre vettori e scrivere la somma senza usare parentesi. $a + b + c$ si può ottenere direttamente come segue: da un punto, il vettore a dà un secondo punto, dal quale b dà un terzo punto, dal quale c dà un quarto punto, e il primo e l'ultimo punto danno il vettore $a + b + c$.



Commutatività. I due modi di sommare due vettori sono equivalenti:

$$(2) \quad a + b = b + a \quad \text{per ogni } a, b$$

Il valore comune delle due somme si può descrivere come segue. Dato un punto, dal punto escono due segmenti orientati che danno a e b , che danno due punti, dai quali escono due segmenti orientati che danno b ed a . I quattro segmenti orientati sono lati di un parallelogramma e la diagonale del parallelogramma dà il vettore somma $a + b = b + a$.



Vettore nullo. Il vettore nullo $\underline{0}$ possiede (ed è l'unico a possedere) la proprietà

$$(3) \quad a + \underline{0} = a = \underline{0} + a \quad \text{per ogni } a$$

Opposti. Per ogni vettore a , il vettore opposto $-a$ possiede (ed è l'unico a possedere) la proprietà

$$(4) \quad a + (-a) = \underline{0} = (-a) + a.$$

Come per i numeri reali, anche per i vettori queste proprietà permettono di risolvere le equazioni espresse in termini di somma:

per ogni a, b l'equazione $x + a = b$ ha un'unica soluzione, $x = b + (-a)$;

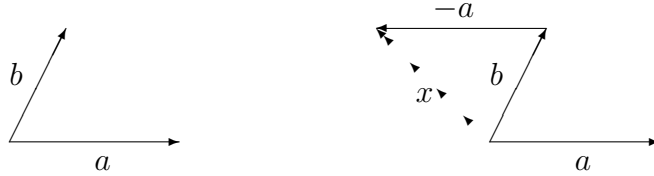
Infatti, ciascuna delle seguenti uguaglianze implica la successiva

$$x + a = b; \quad x + a + (-a) = b + (-a); \quad x + \underline{0} = b + (-a); \quad x = b + (-a);$$

quindi, se c'è una soluzione, essa è $b + (-a)$.

Si lascia al lettore di verificare che $b + (-a)$ è una soluzione.

$b + (-a)$ si scrive in breve $b - a$ e si dice “differenza di b meno a ”.



Prodotto di numeri per vettori. Sia a un vettore. Si definisce il prodotto di un numero intero relativo per a ponendo

$$n a = a + a + \cdots + a \text{ (} n \text{ volte)}, \quad \text{per ogni } n = 1, 2, \dots,$$

$$0 a = \vec{0};$$

$$n a = (-a) + (-a) + \cdots + (-a) \text{ (} |n| \text{ volte)}, \quad \text{per ogni } n = -1, -2, \dots,$$

Si definisce il prodotto di un numero razionale per a ponendo per ogni $n = 1, 2, \dots$

$$\frac{1}{n} a = (\text{unica soluzione dell'equazione } n x = a),$$

e per ogni $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ed $n = 1, 2, \dots$

$$\frac{m}{n} a = m \left(\frac{1}{n} a \right).$$

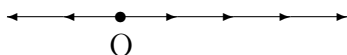
Ogni numero reale può essere dato da una successione di numeri razionali non negativi. Si definisce il prodotto di un numero reale per a mediante una successione di prodotti di numeri razionali per a . Ad esempio, $\sqrt{2} = 1.414 \dots$ si può vedere come “limite” della successione di numeri razionali

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots$$

e si definisce $\sqrt{2} a$ come “limite” della successione di vettori

$$1 a, 1.4 a, 1.41 a, 1.414 a, \dots$$

Un'illustrazione dei vettori $\frac{m}{2} a$ per $-2 \leq m \leq 4$; tutti i vettori sono rappresentati da segmenti orientati uscenti dal punto O.



Proprietà. Le operazioni prodotto di numeri per numeri, somma di numeri per numeri, prodotto di numeri per vettori, somma di vettori sono legate dalla proprietà

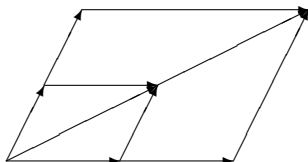
$$(5) \quad r(a + b) = r a + r b;$$

$$(6) \quad (r + s) a = r a + s a;$$

$$(7) \quad (rs) a = r (s a);$$

$$(8) \quad 1 a = a.$$

Un'illustrazione della (5):



Indichiamo con $\mathcal{V}^1, \mathcal{V}^2, \mathcal{V}^3$ rispettivamente gli insiemi dei vettori della retta, piano e spazio Euclidei, con le operazioni di somma di vettori e di prodotto di numeri per vettori. Diciamo che questi insiemi con queste operazioni sono gli “spazi vettoriali geometrici”.

Rappresentazione. Per “vedere” tutti i vettori, è utile rappresentarli con segmenti orientati uscenti da un punto fissato. Fissato un punto O , si ha che ogni segmento orientato uscente da O dà un vettore e ogni vettore è dato da un’unico segmento orientato uscente da O . Si ha così una corrispondenza biunivoca fra segmenti orientati uscenti da O e vettori. Per semplicità di linguaggio, a volte riferiremo termini e concetti dati per vettori anche a segmenti orientati e viceversa.

Dalle definizioni delle operazioni sui vettori si può dedurre che

sia dato un vettore $a \neq \underline{0}$; allora:

il segmento orientato a sta su un’unica retta per O ;

per ogni numero r , il segmento orientato ra sta sulla retta;

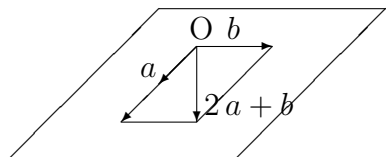
ogni segmento orientato sulla retta è del tipo ra per qualche r ;

siano dati due vettori a, b con direzioni diverse; allora:

i segmenti orientati a, b stanno su un’unico piano per O ;

per ogni due numeri r, s il segmento orientato $ra + sb$ sta sul piano;

ogni segmento orientato sul piano è del tipo $ra + sb$ per qualche r, s .



dati tre segmenti orientati a, b, c che non stanno su un piano per O ,

ogni segmento orientato dello spazio è del tipo $ra + sb + tc$ per qualche $r, s, t \in \mathbb{R}$.

Spazi vettoriali.

Uno “spazio vettoriale” reale è

- un insieme V di elementi qualsiasi detti “vettori” indicati con lettere minuscole a, b, \dots , con un dato elemento detto “vettore nullo” indicato con $\underline{0}$ e per ogni vettore a un vettore “opposto” indicato con $-a$;
 - un’operazione “somma”, che ad ogni $a, b \in V$ associa un $a + b \in V$;
 - un’operazione “prodotto esterno”, che ad ogni $r \in \mathbb{R}$ e $a \in V$ associa un $ra \in V$;
- tali che valgano le proprietà evidenziate per gli spazi vettoriali geometrici, cioè:

proprietà dell’operazione somma:

- (1) associativa $(a + b) + c = a + (b + c)$
- (2) commutativa $a + b = b + a$
- (3) del vettor nullo $a + \underline{0} = a = \underline{0} + a$
- (4) degli opposti $a + (-a) = \underline{0} = (-a) + a$ $(a, b, c \in V)$

proprietà di legame fra le operazioni

- (5) semidistributiva $r(a + b) = ra + rb$
- (6) semidistributiva $(r + s)a = ra + sa$
- (7) semiassociativa $r(sa) = (rs)a$
- (8) del numero 1 $1a = a$ $(a, b \in V, r, s, 1 \in \mathbb{R})$

In particolare, per la proprietà associativa, ha senso scrivere una somma di tre o più vettori senza usare parentesi; la somma di sequenza di vettori $a_1, a_2, \dots, a_m \in V$ si scrive $a_1 + a_2 + \dots + a_m$ in breve

$$\sum_{i=1}^m a_i.$$

Il “multiplo” con coefficiente $r \in \mathbb{R}$ di un vettore a è il vettore ra ; la “combinazione lineare” con coefficienti $r, s \in \mathbb{R}$ di due vettori a, b è il vettore

$$ra + sb;$$

in generale, la “combinazione lineare” con coefficienti $r_1, r_2, \dots, r_m \in \mathbb{R}$ di m vettori a_1, a_2, \dots, a_m è il vettore

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_m a_m = \sum_{i=1}^m r_i a_i.$$

Spazi vettoriali numerici \mathbb{R}^n

Sia n un intero positivo fissato. Una n -pla ordinata di numeri reali, in breve una n -pla di numeri reali, ha una prima, seconda, ..., n -ma componente numero reale. Due n -ple sono uguali se e solo se ciascuna componente dell’una è uguale alla rispettiva componente dell’altra. L’insieme delle n -ple di numeri reali si indica con \mathbb{R}^n .

Spesso, se si indica una n -pla con una lettera, allora si indicano le sue componenti con la stessa lettera con indici $1, \dots, n$. Dunque per ogni due n -ple a, b ,

$a = b$ se e solo se $a_i = b_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

La n -pla con tutte le componenti uguali a 0 si dice n -pla nulla e si indica con $\underline{0}$:

$$(\underline{0})_i = 0 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Prendendo gli opposti delle componenti di n -pla a , si ha la n -pla opposta di a , che si indica con $-a$:

$$(-a)_i = -a_i \text{ per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Sommando le componenti di una n -pla a con le rispettive componenti di una n -pla b , si ottiene la n -pla somma di a e b , che si indica con $a + b$:

$$(a + b)_i = a_i + b_i \text{ per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Moltiplicando un numero r per le componenti di una n -pla a si ottiene la n -pla prodotto di r per a , che si indica con ra :

$$(ra)_i = r a_i \text{ per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Le operazioni sui numeri reali soddisfano le proprietà (1), ..., (8); le operazioni sulle n -ple sono definite componente per componente come le rispettive operazioni sui numeri reali; così le operazioni sulle n -ple soddisfano le proprietà (1), ..., (8). Quindi l'insieme \mathbb{R}^n delle n -ple di numeri reali, con queste operazioni di somma e di prodotto esterno, è uno spazio vettoriale.

Ad esempio, per ogni $r \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$,

$$r(a + b) = ra + rb \text{ equivale a}$$

$$(r(a + b))_i = (ra + rb)_i \text{ per ogni } i, \text{ equivale a}$$

$$r(a + b)_i = (ra)_i + (rb)_i \text{ per ogni } i, \text{ equivale a}$$

$$r(a_i + b_i) = r a_i + r b_i \text{ per ogni } i, \text{ che vale perchè in } \mathbb{R}.$$

Identificazione di \mathcal{V}^n ed \mathbb{R}^n .

\mathcal{V}^1 ed \mathbb{R} . Un “riferimento” per \mathcal{V}^1 è un vettore non nullo $i \neq \underline{0}$; ogni vettore v si scrive in un unico modo come multiplo di i

$$v = v_1 i$$

si dice che v_1 è la “coordinata” di v rispetto ad i .

Associando a ciascun vettore la sua coordinata si ha un'applicazione biiettiva, che permette di identificare \mathcal{V}^1 con \mathbb{R} .

\mathcal{V}^2 ed \mathbb{R}^2 . Un “riferimento” per \mathcal{V}^2 è dato da una coppia di vettori i, j aventi direzioni diverse; ogni vettore v si scrive in un unico modo come combinazione lineare di i e j

$$v = v_1 i + v_2 j$$

si dice che la coppia (v_1, v_2) è la “coordinata” di v rispetto a i, j .

Si osservi che

$$\underline{0} \text{ ha coordinata } (0, 0);$$

i ha coordinata $(1, 0)$;

j ha coordinata $(0, 1)$.

Associando a ciascun vettore la sua coordinata si ha un'applicazione biiettiva, che permette di identificare \mathcal{V}^2 con \mathbb{R}^2 . Questa biiezione è compatibile con le operazioni di somma e di prodotto esterno su \mathcal{V}^2 ed \mathbb{R}^2 , nel senso che per ogni v', v'', v si ha

$$v' + v'' = v \text{ in } \mathcal{V}^2 \text{ se e solo se } v' + v'' = v \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

Infatti, posto

$$v' = v'_1 i + v'_2 j$$

$$v'' = v''_1 i + v''_2 j$$

$$v = v_1 i + v_2 j,$$

si ha:

$v' + v'' = v$ in \mathcal{V}^2 significa $v'_1 i + v'_2 j + v''_1 i + v''_2 j = v_1 i + v_2 j$, che equivale a

$v'_1 + v''_1 = v_1$ e $v'_2 + v''_2 = v_2$ che equivale a

$(v'_1, v'_2) + (v''_1, v''_2) = (v_1, v_2)$ che significa $v' + v'' = v$ in \mathbb{R}^2 .

\mathcal{V}^3 ed \mathbb{R}^3 . Un “riferimento” per \mathcal{V}^3 è dato da una terna di vettori i, j, k rappresentati da segmenti orientati uscenti da un punto O , non complanari; ogni vettore v si scrive in un unico modo come combinazione lineare di i, j, k

$$v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

si dice che la terna (v_1, v_2, v_3) è la “coordinata” di v rispetto a i, j, k .

Si osservi che

$\underline{0}$ ha coordinata $(0, 0, 0)$;

i ha coordinata $(1, 0, 0)$;

j ha coordinata $(0, 1, 0)$;

k ha coordinata $(0, 0, 1)$.

Associando a ciascun vettore la sua coordinata si ha un'applicazione biiettiva, che permette di identificare \mathcal{V}^3 con \mathbb{R}^3 . Questa biiezione è compatibile con le operazioni di somma e di prodotto esterno su \mathcal{V}^3 ed \mathbb{R}^3 .

Possiamo dunque tradurre problemi e risoluzioni espressi in termini di vettori geometrici in problemi e risoluzioni espressi in termini di vettori numerici.

Esempio. Fissato in \mathcal{V}^2 un riferimento i, j , consideriamo i vettori

$$a = (3, 1), b = (1, 2), c = (2, 2).$$

Ci chiediamo se c è combinazione di a e b .

L'equazione

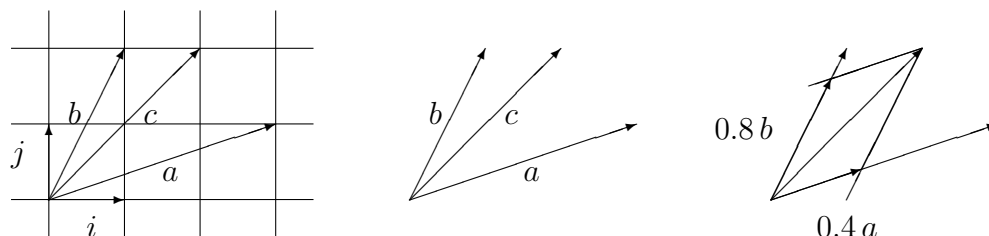
$$x(3, 1) + y(1, 2) = (2, 2)$$

equivale al sistema di equazioni

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

che ha soluzione $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{4}{5}$.

Un'illustrazione del corrispettivo geometrico del problema e del risultato:



Esempio. Il sistema di 3 uguaglianze fra numeri reali

$$\begin{cases} 2x + 3y = p_1 \\ 4x + 5y = p_2 \\ 6x + 7y = p_3 \end{cases}$$

equivale all'unica uguaglianza fra terne di numeri reali

$$(2x + 3y, 4x + 5y, 6x + 7y) = (p_1, p_2, p_3)$$

e può essere riscritto come

$$x(2, 4, 6) + y(3, 5, 7) = (p_1, p_2, p_3);$$

osserviamo che $(2, 4, 6)$ e $(3, 5, 7)$ non sono uno multiplo reale dell'altro.

Fissato un riferimento per \mathcal{V}^3 , e identificati $a = (2, 4, 6)$, $b = (3, 5, 7)$, $p = (p_1, p_2, p_3)$ con vettori in \mathcal{V}^3 , possiamo vedere che: (1) al variare di x, y in \mathbb{R} il 1° membro dà i vettori su un piano; (2) il sistema delle 3 equazioni nelle incognite x, y ha qualche soluzione se e solo se il piano per a, b contiene il vettore p ; (3) in tal caso la soluzione è unica.

Riassunto, notazioni, approfondimenti

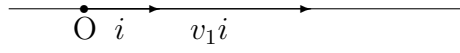
Abbiamo considerato le seguenti strutture:

- spazi vettoriali \mathcal{V}^n ($n = 1, 2, 3$) dei vettori nella retta, piano, spazio Euclideo;
- spazi vettoriali \mathbb{R}^n di n -ple ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$);

ed abbiamo dato la definizione di

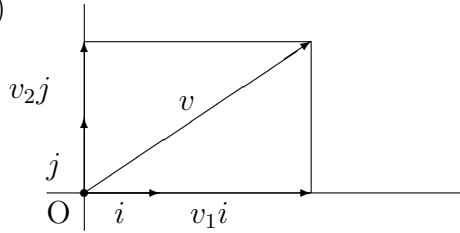
- spazio vettoriale V , come insieme con operazioni che soddisfano certe proprietà.

\mathcal{V}^n ed \mathbb{R}^n . Gli spazi vettoriali geometrici \mathcal{V}^n , fissato un riferimento, possono essere identificati coi corrispondenti spazi vettoriali numerici \mathbb{R}^n ($n = 1, 2, 3$) come segue:



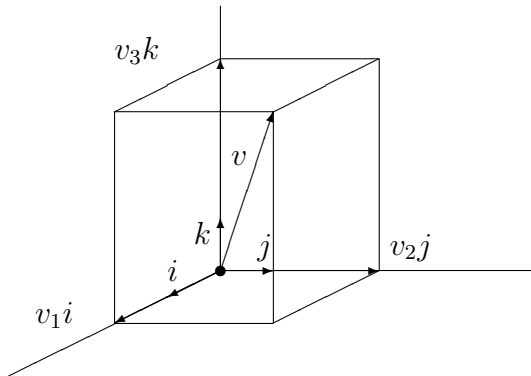
$$\mathcal{V}^1 \ni v_1 i \sim v_1 \in \mathbb{R}$$

(vettori come segmenti orientati uscenti da un punto fissato O; riferimento: un vettore $i \neq 0$)



$$\mathcal{V}^2 \ni v = v_1 i + v_2 j \sim (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$$

(vettori come segmenti orientati uscenti da un punto fissato O; riferimento: una coppia di vettori i, j non allineati)



$$\mathcal{V}^3 \ni v = v_1 i + v_2 j + v_3 k \sim (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$$

(vettori segmenti orientati uscenti da un punto fissato; riferimento: una terna di vettori i, j, k non complanari)

\mathbb{R}^n , **notazione.** Per il calcolo, la usuale scrittura in riga di coppie ordinate è meno agevole della scrittura come colonne; ad esempio:

$$(1, 2) + (3, 4) = (3, 6); \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$3(1, 2) = (3, 6); \quad 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Per questa ragione, di regola scriveremo le coppie, terne, ... n -ple come colonne

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \dots$$

Spazi vettoriali, regole di calcolo. Di seguito mostriamo come dalle proprietà che caratterizzano le operazioni in uno spazio vettoriale V seguano alcune proprietà familiari dal calcolo letterale. Di seguito, a, b, c indicano vettori in V e r un numero in \mathbb{R} .

- Legge di cancellazione:

$$a + c = b + c \text{ implica } a = b;$$

infatti, ciascuna delle seguenti uguaglianze implica la successiva (si lascia al lettore di motivare ciascun passaggio):

$$a + c = b + c;$$

$$(a + c) + (-c) = (b + c) + (-c);$$

$$a + (c + (-c)) = b + (c + (-c));$$

$$a + \underline{0} = b + \underline{0};$$

$$a = b.$$

- Legge di annullamento del prodotto esterno:

$$r a = \underline{0} \text{ se e solo se } r = 0 \text{ oppure } a = \underline{0}.$$

Infatti, da una parte si ha:

$$0 a + 0 a = \underline{0} + 0 a \text{ (si lascia al lettore giustificarla) e per la legge di cancellazione } 0 a = \underline{0};$$

in modo analogo si prova che $r \underline{0} = \underline{0}$.

Dall'altra parte, ciascuna delle seguenti uguaglianze implica la successiva (si lascia al lettore di motivare i passaggi)

$$r a = \underline{0} \text{ e } r \neq 0,$$

$$\frac{1}{r} (r a) = \frac{1}{r} \underline{0},$$

$$\left(\frac{1}{r} r\right) a = \underline{0},$$

$$1 a = \underline{0}$$

$$a = \underline{0}.$$

1.2 Dipendenza/Indipendenza lineare

Definizione, primi esempi, proposizioni.

Premessa. I vettori di \mathbb{R}^2

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

soddisfano la relazione

c è combinazione lineare, con coefficienti $\frac{2}{5}, \frac{4}{5}$, di a, b :

$$\frac{2}{5}a + \frac{4}{5}b = c;$$

questa relazione equivale alla relazione

$$2a + 4b - 5c = \underline{0}, \text{ cioè}$$

$\underline{0}$ è combinazione lineare, con coefficienti $2, 4, -5$ di a, b, c .

Da questa relazione si deduce che anche b, c sono combinazione lineare degli altri:

$$b = -\frac{2}{4}a + \frac{5}{4}c$$

$$a = -\frac{4}{2}b + \frac{5}{2}c.$$

Definizione. Una sequenza a_1, a_2, \dots, a_m di vettori di uno spazio vettoriale V è linearmente dipendente se l'uguaglianza

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m = \underline{0}$$

vale per qualche $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ non tutti nulli.

Si dice che una sequenza di vettori è linearmente indipendente se non è linearmente dipendente, cioè:

Definizione. Una sequenza a_1, a_2, \dots, a_m di vettori di uno spazio vettoriale V è linearmente indipendente se l'uguaglianza

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m = \underline{0}$$

vale solo per $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ tutti nulli.

Esempi

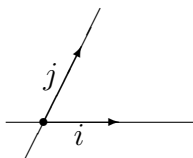
(0) I vettori a, b, c di \mathbb{R}^2 considerati sopra sono linearmente dipendenti.

(1) In \mathcal{V}^1 , un qualsiasi vettore $i \neq \underline{0}$ è linearmente indipendente; infatti, l'uguaglianza $\alpha i = \underline{0}$ vale solo per $\alpha = 0$.

(2) In \mathcal{V}^2 :

un qualsiasi vettore $i \neq \underline{0}$ è linearmente indipendente;

una coppia di vettori i, j non allineati è linearmente indipendente; ce ne si può convincere da un punto di vista geometrico oppure da un punto di vista algebrico;



nel secondo modo: identifichiamo \mathcal{V}^2 con \mathbb{R}^2 usando i, j come riferimento, allora la relazione

$$\alpha i + \beta j = \underline{0}$$

equivale alla relazione

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dalla quale, uguagliando le 1° componenti si ha $\alpha 1 + \beta 0 = 0$ cioè $\alpha = 0$ e uguagliando le 2° componenti si ha $\alpha 0 + \beta 1 = 0$ cioè $\beta = 0$.

aggiungendo ad i, j un qualsiasi vettore v si ha una sequenza i, j, v linearmente dipendente; infatti vale una relazione

$$v_1 i + v_2 j = v$$

da cui

$$v_1 i + v_2 j - v = \underline{0}$$

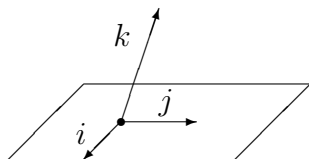
e $v_1, v_2, -1$ non sono tutti nulli.

(3) In \mathcal{V}^3 :

un qualsiasi vettore $i \neq \underline{0}$ è linearmente indipendente;

una coppia di vettori i, j non allineati è linearmente indipendente;

una terna di vettori i, j, k non complanari è linearmente indipendente;



ce ne si può convincere da un punto di vista geometrico oppure da un punto di vista algebrico; nel secondo modo: identifichiamo \mathcal{V}^3 con \mathbb{R}^3 usando i, j, k come riferimento, allora la relazione

$$\alpha i + \beta j + \gamma k = \underline{0}$$

equivale alla relazione

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dalla quale, uguagliando le 1°, 2°, 3° componenti si ha rispettivamente $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

(4) In \mathbb{R}^n :

la sequenza e_1, e_2, \dots, e_n dei vettori unità, definiti da

$$e_i = n\text{-pla con } i\text{-ma componente } 1 \text{ e altre componenti } 0,$$

è linearmente indipendente;

ogni sottosequenza della sequenza e_1, e_2, \dots, e_n è linearmente indipendente.

(6) In uno spazio vettoriale V , consideriamo un vettore v ;

se $v \neq \underline{0}$, allora $\alpha v = \underline{0}$ implica $\alpha = 0$ quindi v è linearmente indipendente;

$1 \underline{0} = \underline{0}$, quindi $\underline{0}$ è linearmente dipendente.

Proposizione. Per ciascuna sequenza a_1, a_2, \dots, a_m di vettori di uno spazio vettoriale V , sono equivalenti:

- (1) a_1, a_2, \dots, a_m è linearmente dipendente;
- (2) $a_1 = \underline{0}$ oppure esiste un a_i ($i \geq 2$) che è combinazione lineare dei precedenti.

Dimostrazione.

(1) implica (2). Per ipotesi, vale una relazione

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m = \underline{0}$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ non tutti nulli; sia i massimo tale che $\alpha_i \neq 0$; allora:

se $i = 1$, si ha $\alpha_1 a_1 + 0 a_2 + \dots + 0 a_m = \underline{0}$ cioè $\alpha_1 a_1 = \underline{0}$ con $\alpha_1 \neq 0$, da cui $a_1 = \underline{0}$.

se $i \geq 2$, si ha

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_i a_i + 0 a_{i+1} + \dots + 0 a_m = \underline{0}$$

cioè

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_i a_i = \underline{0} \text{ con } \alpha_i \neq 0,$$

da cui

$$a_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} a_1 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} a_{i-1}.$$

(2) implica (1).

Se $a_1 = \underline{0}$, allora vale $1 a_1 + 0 a_2 + \dots + 0 a_m = \underline{0}$, quindi a_1, \dots, a_m è linearmente dipendente.

Se esiste un a_i ($i \geq 2$) tale che $a_i = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{i-1} a_{i-1}$, allora

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{i-1} a_{i-1} - a_i + 0 a_{i+1} + \dots + 0 a_m = \underline{0},$$

quindi a_1, \dots, a_m è linearmente dipendente ■

Applicazione. In \mathcal{V}^2 , ogni sequenza a_1, \dots, a_m di almeno 3 vettori è linearmente dipendente. Infatti:

se $a_1 = \underline{0}$, allora la sequenza è linearmente dipendente;

se $a_1 \neq \underline{0}$ e a_2 sta sulla retta di a_1 , allora $a_2 = \alpha a_1$, quindi la sequenza è linearmente dipendente;

se a_1 e a_2 non sono allineati, allora $a_3 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$ (cfr. esempio 2) quindi la sequenza è linearmente dipendente.

In termini di indipendenza lineare, si ha:

Proposizione. Per ciascuna sequenza a_1, a_2, \dots, a_m di vettori di uno spazio vettoriale V , sono equivalenti:

- (1) a_1, a_2, \dots, a_m è linearmente indipendente;
- (2) $a_1 \neq \underline{0}$ e nessun a_i ($i \geq 2$) è combinazione lineare dei precedenti.

Due proprietà

1- Due sequenze di vettori che differiscono solo per l'ordine dei vettori, sono entrambe linearmente dipendenti o entrambe linearmente indipendenti (deriva dalla commutatività dell'operazione di somma di vettori).

2- Se una sequenza di vettori è linearmente indipendente, allora anche ogni sua sottosequenza lo è. (Idea: sia a, b, c, \dots linearmente indipendente; l'uguaglianza $\beta, b + \gamma, c + \dots = \underline{0}$ può essere riscritta $0a + \beta, b + \gamma, c + \dots = \underline{0}$, dunque si ha $0 = \beta = \gamma = \dots = 0$; abbiamo provato che b, c, \dots è linearmente indipendente.)

Una procedura per vettori in \mathbb{R}^n

Descriviamo una procedura per risolvere in modo tendenzialmente efficiente il problema di stabilire la proprietà di dipendenza/indipendenza lineare di una sequenza di vettori in uno spazio vettoriale \mathbb{R}^n . La procedura consiste nell'applicazione di operazioni sulla sequenza di vettori che lasciano invariata la proprietà e permettono di passare da una sequenza ad una con un vettore in meno, avvicinandosi così al caso di un solo vettore, per il quale il problema ha una soluzione ovvia.

Di regola, consideriamo ciascun vettore di \mathbb{R}^n come una colonna con n componenti e ciascuna sequenza a, b, \dots, d di m vettori di \mathbb{R}^n come una matrice con n righe ed m colonne, e rappresentiamo la matrice come una tabella

a	b	\dots	d
a_1	b_1		d_1
\vdots	\vdots		\vdots
a_n	b_n		d_n

Fatti.

1- Per un singolo vettore v , si ha: v è linearmente dipendente o indipendente secondo che v sia uguale o diverso da $\underline{0}$ (vero in ogni spazio vettoriale);

2- C'è un caso in cui si può cancellare un vettore, lasciando invariata la proprietà.

Se a, b, c, \dots sono vettori in \mathbb{R}^n tali che in una certa componente, a è non 0, mentre b, c, \dots sono 0, allora a, b, c, \dots è linearmente indipendente se e solo se b, c, \dots è linearmente indipendente.

Un esempio: una sequenza di 3 vettori a, b, c di \mathbb{R}^4 del tipo

a	b	c
*	*	*
◆	0	0
*	*	*
*	*	*

dove il simbolo ◆ indica un numero $\neq 0$ e i simboli * indicano numeri, è linearmente indipendente se e solo se la sequenza dei 2 vettori b, c

$$\begin{array}{cc} b & c \\ \hline * & * \\ 0 & 0 \\ * & * \\ * & * \end{array}$$

è linearmente indipendente.

Dimostrazione. Se a, b, c, \dots è linearmente indipendente, allora anche b, c, \dots lo è. Proviamo che se b, c, \dots è linearmente indipendente, allora anche a, b, c, \dots lo è. La uguaglianza

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \dots = \underline{0}$$

equivale a n uguaglianze in \mathbb{R} , una per ogni componente. Per ipotesi, c'è una componente nella quale a è un certo numero $\diamond \neq 0$, mentre b, c, \dots sono 0; in tale componente si ha

$$\alpha \diamond + \beta 0 + \gamma 0 + \dots = 0, \quad \text{da cui} \quad \alpha = 0;$$

dunque (*) equivale a

$$\alpha = 0 \quad \beta b + \gamma c + \dots = \underline{0}.$$

Essendo b, c, \dots linearmente indipendente, si ha $\beta = \gamma = \dots = 0$. Dunque a, b, c, \dots è linearmente indipendente.

3- Ci sono delle operazioni su una sequenza di vettori che lasciano invariata la proprietà di indipendenza lineare e possono essere usate per semplificare la sequenza. In particolare, si ha:

Per ogni sequenza di vettori di uno spazio vettoriale, l'operazione di sommare un multiplo di un vettore a un altro vettore lascia invariata la proprietà di indipendenza lineare della sequenza.

Dimostrazione. Proviamo che per ogni sequenza a, b, c, \dots di vettori ed ogni $r \in \mathbb{R}$, l'operazione di sommare r volte un vettore a un altro vettore, per semplicità il 1° al 2°, lascia invariata l'indipendenza lineare.

Supponiamo che a, b, c, \dots sia linearmente indipendente e proviamo che $a, b + ra, c, \dots$ lo è.

$$x a + y (b + ra) + z c + \dots = \underline{0} \text{ equivale a}$$

$$(x + yr) a + y b + z c + \dots = \underline{0},$$

implica

$$x + yr = y = z = \dots = 0, \text{ da cui}$$

$$x = y = z = \dots = 0.$$

Supponiamo che $a, b + ra, c, \dots$ sia linearmente indipendente e proviamo che a, b, c, \dots lo è. Basta osservare che la seconda sequenza si ottiene dalla prima sommando $-r$ volte il 1° vettore al 2°.

Procedura *Esempio 1.*

a	b	c	d	a	b	c	d	b	c	d	b	c	d	c	d
1	1	3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	5	2	1	1	2	1	1	2	1	1	0	0	0	0
1	3	7	4	1	2	4	3	2	4	3	2	0	1	0	1
1	4	9	8	1	3	6	7	3	6	7	3	0	4	0	4
1	5	11	16	1	4	8	15	4	8	15	4	0	11	0	11

(qui i simboli a, b, c, d vanno intesi come variabili, il cui valore varia durante la procedura) Conclusione:

i vettori iniziali a, b, c, d sono linearmente dipendenti.

1° passo: $a_1 \neq 0$, annullate b_1, c_1, d_1 sommando $-a, -3a, -a$ a b, c, d ;

2° passo: cancellato a ;

3° passo: $b_2 \neq 0$, annullate c_2, d_2 sommando $-2b, -b$ a c, d ;

4° passo: cancellato b ;

5° passo: riconosciuto che $c = 0, d$ sono linearmente dipendenti.

Commento. Qui si è illustrata la procedura, così come l'avrebbe applicata una macchina; in realtà, dopo il 1° passo si sarebbe potuto osservare che $c = 2b$ quindi che i vettori a, b, c, d dopo il 1° passo sono linearmente dipendenti, e dedurre che i vettori a, b, c, d iniziali lo sono.

Esempio 2.

a	b	c	b	c	c
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1

Conclusione:

i vettori iniziali a, b, c sono linearmente indipendenti.

1° passo: visto che $a_2 \neq 0$ e $b_2 = c_2 = 0$, cancellato a ;

2° passo: visto che $b_3 \neq 0$ e $c_3 = 0$, cancellato b ;

3° passo: riconosciuto che $c \neq 0$ è linearmente indipendente.

Procedura, Pseudocodice (grezzo)

Input: una sequenza di vettori in un \mathbb{R}^n ;

Output: "lin. dip." o "lin. indep."

Leggi 1° vettore;

Casi

Se 1° vett = $\underline{0}$, scrivi "lin. dip.";

Se 1° vett $\neq \underline{0}$ ed è il solo vettore della sequenza, scrivi "lin. indep."

Altrimenti, scegli una componente non 0 del 1° vettore, annulla* quella componente negli altri vettori, cancella il 1° vettore.

Fine Casi

Ripeti

*tramite operazioni elementari.

$m > n$ **vettori in \mathbb{R}^n .**

Geometricamente, si "vede" che:

2 o più vettori in $\mathcal{V}^1 \simeq \mathbb{R}$ sono linearmente dipendenti;

3 o più vettori in $\mathcal{V}^2 \simeq \mathbb{R}^2$ sono linearmente dipendenti;

4 o più vettori in $\mathcal{V}^3 \simeq \mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti.

In generale, si ha

Teorema. Ogni sequenza di $m > n$ vettori di \mathbb{R}^n è linearmente dipendente.

Dimostrazione. Siano $a_1, \dots, a_{n+1}, \dots$ vettori in \mathbb{R}^n . Li consideriamo come colonne di una matrice e li rappresentiamo con una tabella

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & \dots & a_n & a_{n+1} & \dots & \\ \hline * & \dots & * & * & \dots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ * & \dots & * & * & \dots & \end{array}$$

Applichiamo la procedura.

Se $a_1 = \underline{0}$, allora i vett. sono lin dip.; altrimenti, a_1 ha una componente $\neq 0$, supponiamo per semplicità la 1°, con operazioni elementari la annulliamo negli altri vettori.

Se $a_2 = \underline{0}$, allora i vett. sono lin dip.; altrimenti, a_2 ha una componente $\neq 0$, supponiamo per semplicità la 2°, con operazioni elementari la annulliamo negli altri vettori.

...

Se $a_n = \underline{0}$, allora i vett. sono lin dip.; altrimenti, a_n ha una componente $\neq 0$, che deve essere la n° , con operazioni elementari la annulliamo negli altri vettori.

A questo punto si ha una sequenza del tipo

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & \dots & 0 & a_{n+1} & \dots & \\ \hline \blacklozenge & \dots & 0 & 0 & \dots & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \\ * & \dots & \blacklozenge & 0 & \dots & \end{array}$$

con $a_{n+1} = \underline{0}$. Concludiamo che i vettori iniziali $a_1, \dots, a_{n+1}, \dots$ sono linearmente dipendenti.

1.3 Dimensione, basi, coordinate

Altri esempi di spazi vettoriali.

- Spazio vettoriale nullo. Uno spazio vettoriale deve contenere almeno un vettore: il vettore nullo $\underline{0}$. Per l'insieme $\{\underline{0}\}$ si ha un'unica possibile operazione di somma di vettori e un'unica possibile operazione di prodotto di numeri per vettori

$$\underline{0} + \underline{0} = \underline{0},$$

$$r \underline{0} = \underline{0}, \quad \forall r \in \mathbb{R},$$

e queste operazioni soddisfano tutte le proprietà (1), ..., (8). Quindi, c'è uno ed un solo spazio vettoriale con un solo elemento: l'insieme $\{\underline{0}\}$ con le operazioni ovvie sopra scritte, lo si dice "spazio vettoriale nullo". Geometricamente, lo spazio vettoriale nullo può essere pensato come l'insieme dei vettori che stanno in un punto, e può essere indicato con \mathcal{V}^0 .

- Spazio vettoriale delle successioni. Una successione a di numeri reali ha una componente numero reale a_i per ogni intero positivo $i = 1, 2, \dots$; due successioni sono uguali se e solo se ciascuna componente dell'una è uguale alla rispettiva componente dell'altra. L'insieme delle successioni di numeri reali si indica con \mathbb{R}^∞ .

Così come si sono definite la n -pla nulla, l'opposta di una n -pla e le operazioni di somma di n - e di prodotto di numeri per n -ple, analogamente si definiscono la successione nulla, l'opposta di una successione, le operazioni di somma di successioni e di prodotto di numeri per successioni e si prova che l'insieme \mathbb{R}^∞ con queste operazioni è uno spazio vettoriale.

In \mathbb{R}^∞ si hanno infinite successioni unità

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots)$$

$$\vdots$$

Dimensione.

Possiamo distinguere gli spazi vettoriali geometrici \mathcal{V}^n senza usare termini geometrici come segmenti orientati, punto, retta, piano e spazio, usando invece solo termini del linguaggio degli spazi vettoriali, specialmente l'indipendenza lineare:

\mathcal{V}^0 : non c'è alcun vettore indipendente;

\mathcal{V}^1 : c'è un, ma non più di un, vettore indipendente;

\mathcal{V}^2 : ci sono due, ma non più di due, vettori indipendenti;

\mathcal{V}^3 : ci sono tre, ma non più di tre, vettori indipendenti.

Per convenzione, diciamo che

una sequenza vuota di vettori è indipendente.

Al posto di dire "numero dei termini" di una sequenza, diciamo in breve "lunghezza" di una sequenza. Dunque: in \mathcal{V}^n la massima lunghezza di una sequenza di vettori indipendente è n . Ciò suggerisce la seguente

Definizione. Si dice che uno spazio vettoriale V ha “dimensione finita” se l’insieme delle lunghezze delle sequenze di vettori indipendenti in V possiede massimo; tale massimo si dice “dimensione” di V e si indica con $\dim(V)$.

Esempi

- Per ciascun ente geometrico, la dimensione dello spazio vettoriale sull’ente coincide con quella dell’ente: $\dim(\mathcal{V}^n) = n$.
- Per ogni intero positivo n fissato, in \mathbb{R}^n c’è una sequenza di n vettori indipendente, ad esempio quella dei vettori unità e_1, e_2, \dots, e_n , ma ogni sequenza di $m > n$ vettori è dipendente, quindi $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^∞ , per ogni intero positivo n c’è una sequenza di n vettori indipendente, quindi \mathbb{R}^∞ non ha dimensione finita.

Basi, coordinate.

In ciascun spazio vettoriale geometrico si può fissare una sequenza di vettori di riferimento e tramite di essa assegnare ad ogni vettore una sequenza coordinata di numeri. Ciò suggerisce la seguente

Definizione. Si dice che una sequenza b_1, \dots, b_n di vettori di uno spazio vettoriale V è una “base” di V se ogni $v \in V$ si scrive in un unico modo come combinazione lineare

$$v = v_1 b_1 + \dots + v_n b_n;$$

la n -pla dei coefficienti si dice “coordinata” di v rispetto alla base.

Esempi

- Lo spazio vettoriale nullo $\{0\}$ ha un’unica base: l’insieme vuoto \emptyset ; la coordinata di 0 rispetto alla base è la sequenza vuota di numeri reali.
- In ciascuno spazio vettoriale geometrico \mathcal{V}^n , ciascuna sequenza di n vettori riferimento è una base e per ciascun vettore la n -pla coordinata in senso geometrico coincide con la n -pla coordinata in senso algebrico.
- In \mathbb{R}^2 vale l’identità

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$
 cioè: ogni coppia $v \in \mathbb{R}^2$ si scrive come combinazione lineare delle due coppie unità e_1, e_2 e i coefficienti sono le componenti di v , così la scrittura è unica; e_1, e_2 è una base, detta “base canonica”, di \mathbb{R}^2 e le coordinate di ciascun $v \in \mathbb{R}^2$ rispetto ad essa sono le componenti di v .
- Identificando \mathbb{R}^2 con \mathcal{V}^2 si vede che \mathbb{R}^2 ha infinite basi.
- Sia n un intero positivo fissato. In \mathbb{R}^n vale l’identità

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n$$

(si lascia al lettore di provarla), cioè: ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si scrive come combinazione lineare delle n -ple unità e_1, e_2, \dots, e_n e i coefficienti sono le componenti v_1, v_2, \dots, v_n di v ,

così la scrittura è unica; e_1, e_2, \dots, e_n è una base, detta “base canonica”, di \mathbb{R}^n e le coordinate di ciascun $v \in \mathbb{R}^n$ rispetto ad essa sono le componenti di v .

- Si prova che non è possibile scrivere ogni successione di numeri reali come combinazione lineare di un numero finito di successioni fissate una volta per tutte, dunque lo spazio vettoriale \mathbb{R}^∞ delle successioni non ha alcuna base.

Proposizione. Se b_1, \dots, b_n è una base di uno spazio vettoriale V allora b_1, \dots, b_n è linearmente indipendente.

Infatti, essendo b_1, \dots, b_n una base di V , l'uguaglianza

$$\beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n = \underline{0}$$

deve valere per un'unica sequenza di coefficienti, dunque $\beta_1 = \dots, \beta_n = 0$, e b_1, \dots, b_n è indipendente.

Poichè ogni sequenza di $m > n$ vettori in \mathbb{R}^n è dipendente, si ha

Ogni base di \mathbb{R}^n ha al più n vettori.

Dimensione, basi.

In ciascun spazio vettoriale geometrico \mathcal{V}^n , ogni sequenza indipendente di n vettori è una base e viceversa ogni sequenza base è indipendente ed ha n vettori. Questo fatto vale in generale:

Teorema 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n . Se b_1, \dots, b_n sono n vettori indipendenti in V allora b_1, \dots, b_n sono una base di V .

Dimostrazione.

- Proviamo che ogni $v \in V$ si scrive come combinazione lineare di b_1, \dots, b_n . La sequenza

$$b_1, \dots, b_n, v$$

ha $n + 1$ vettori, per ipotesi il massimo numero di vettori indipendenti in V è n , quindi la sequenza b_1, \dots, b_n, v è dipendente; per la proposizione, si ha $b_1 = \underline{0}$ oppure uno dei vettori della sequenza è combinazione lineare dei precedenti; ancora per la proposizione, essendo b_1, \dots, b_n indipendente, si ha $b_1 \neq \underline{0}$ e nessun b_i è combinazione lineare dei precedenti; dunque v è combinazione lineare di b_1, \dots, b_n :

$$v = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i.$$

- Proviamo che ogni $v \in V$ si scrive in un unico modo come combinazione lineare di b_1, \dots, b_n . Siano

$$v = \sum_{i=1}^n \beta'_i b_i,$$

$$v = \sum_{i=1}^n \beta''_i b_i;$$

Sottraendo alla 1° uguaglianza la 2° uguaglianza, si ha

$$\underline{0} = \sum_{i=1}^n (\beta'_i - \beta''_i) b_i;$$

essendo b_1, \dots, b_n indipendenti, si ha $\beta'_i - \beta''_i = 0$ per ogni i , cioè $\beta'_i = \beta''_i$ per ogni i . ■

Come conseguenza, si ha

Ogni sequenza di n vettori indipendenti di \mathbb{R}^n è una base di \mathbb{R}^n .

Teorema 2. Sia V uno spazio vettoriale. Se in V esiste una base b_1, \dots, b_n di n vettori, allora V ha dimensione finita n .

Non diamo dimostrazione. Come conseguenza, si ha

Ogni base di \mathbb{R}^n ha n vettori.

I due teoremi si possono riassumere come segue:

Teorema. Una sequenza di vettori di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n è una base di V se e solo se è una sequenza indipendente di n vettori.

2 Sistemi lineari, spazi vettoriali, matrici

2.1 Sistemi lineari

n equazioni e incognite ($n = 2, 3$)

I sistemi lineari di 2 equazioni in 2 incognite x, y sono quelli del tipo

$$(2.1) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y = p_1 \\ a_2x + b_2y = p_2 \end{cases};$$

i dati di cui consiste il sistema si possono raccogliere nella matrice

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \end{array} \right].$$

In genere, un tale sistema ha una ed una sola soluzione. Un metodo di risoluzione, detto metodo di “eliminazione” consiste in linea di massima in: (1) sommare alla 2° equazione un multiplo della 1° equazione, in modo da eliminare la x dalla 2° equazione; (2) dalla 2° equazione ricavare il valore della y ; (3) sostituire il valore della y nella 1° equazione, e dalla 1° equazione ricavare la x . Ma il sistema può anche avere infinite soluzioni, o nessuna soluzione.

Esempio 1. Risoluzione di un sistema col metodo di eliminazione.

$$\begin{cases} x + 2y = 4 & x + 2y = 4 & x + 6 = 4 & x = -2 \\ 3x + 5y = 9 & -y = -3 & y = 3 & y = 3 \end{cases}$$

il sistema ha l'unica soluzione $x = -2, y = 3$.

Esempio 2.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

ogni soluzione della 1° equazione è anche soluzione della 2° equazione, il sistema ha le stesse soluzioni della 1° equazione, ha infinite soluzioni.

Esempio 3.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

nessuna soluzione della 1° equazione è anche soluzione della 2° equazione, il sistema non ha soluzioni.

Interpretazione vettoriale. Ogni sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite si può riscrivere come 1 equazione in 2 incognite con coefficienti e termine noto coppie

$$(2.2) \quad x \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \quad \text{in breve} \quad xa + yb = p;$$

i dati di cui consiste il sistema si possono raccogliere nella matrice

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & p \end{array} \right], \text{ in breve } \left[\begin{array}{c|c} A & p \end{array} \right]$$

dove A è la matrice con colonne a, b .

Le seguenti proprietà sono equivalenti

il sistema (2.1) ha un'unica soluzione, per ogni $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$;

l'equazione (2.2) ha un'unica soluzione, per ogni $p \in \mathbb{R}^2$;

a, b è una base di \mathbb{R}^2 ;

a, b sono indipendenti.

Esempio. Le seguenti proprietà sono equivalenti

$$\begin{cases} x + 2y = p_1 \\ 3x + 5y = p_2 \end{cases} \text{ ha un'unica soluzione, per ogni } p_1, p_2 \in \mathbb{R};$$

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \text{ ha un'unica soluzione, per ogni } p \in \mathbb{R}^2;$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ è una base di } \mathbb{R}^2;$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ sono indipendenti.}$$

L'ultima proprietà è vera, dunque tutte le proprietà sono vere.

I sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite x, y, z sono quelli del tipo

$$(3.1) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = p_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = p_3 \end{cases}$$

i dati di cui consiste il sistema si possono raccogliere nella matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & p_3 \end{array} \right].$$

In genere, un tale sistema ha una ed una sola soluzione. Il metodo di risoluzione per eliminazione consiste in linea di massima in:

- (1) sommare alla 2° e 3° equazione un multiplo della 1°, in modo da eliminare la x ;
- (2) sommare alla 3° equazione un multiplo della 2°, in modo da eliminare la y ;
- (3) dalla 3° equazione ricavare il valore della z ;
- (4) sostituire il valore della z nella 2° equazione e ricavare la y ;
- (5) sostituire il valore della z e della y nella 1° equazione e ricavare la x .

Ma il sistema può anche avere infinite soluzioni, o nessuna soluzione.

Esempio 4. Risoluzione di un sistema col metodo di eliminazione.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 2x + 3y + 4z = 8 \\ 3x + 4y + 6z = 9 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 9 \end{array} \right]$$

sommiamo alla 2° e 3° equazione dei multipli della 1°, per eliminare la x :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & -3 & -12 \end{array} \right]$$

sommiamo alla 3° equazione un multiplo della 2°, per eliminare la y :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ -y - 2z = -6 \\ z = 0 \end{cases}$$

dalla 3° equazione ricaviamo $z = 0$;

sostituiamo $z = 0$ nella 2° equazione, otteniamo $-y = -6$, ricaviamo $y = 6$;

sostituiamo $z = 0$ e $y = 6$ nella 1° equazione, otteniamo $x + 12 = 7$, ricaviamo $x = -5$.

Esempio 5.

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y + 4z = 7 \end{cases}$$

Da una parte si ha

$$(x + y + z) + (x + 2y + 3z) = 2x + 3y + 4z$$

e dall'altra parte si ha

$$5 + 6 \neq 7;$$

dunque il sistema non ha alcuna soluzione.

Interpretazione vettoriale. Ogni sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite si può riscrivere come 1 equazione in 3 incognite con coefficienti a, b, c e termine noto $p \in \mathbb{R}^3$

$$(3.2) \quad x a + y b + z c = p;$$

i dati di cui consiste il sistema si possono raccogliere nella matrice di 3 righe e 3+1 colonne

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \end{array} \right], \text{ in breve } \left[\begin{array}{ccc|c} A & & & p \end{array} \right].$$

Le seguenti proprietà sono equivalenti

il sistema (3.1) ha un'unica soluzione, per ogni tre termini noti;

l'equazione (3.2) ha un'unica soluzione, per ogni termine noto;

a, b, c è una base di \mathbb{R}^3 ;

a, b, c è indipendente.

m equazioni, n incognite

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite x_1, x_2, \dots, x_n è una sequenza di equazioni del tipo

$$(4) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = p_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = p_m \end{cases}$$

con gli a_{ij} e i b_i costanti in \mathbb{R} . Il sistema è rappresentato dalla matrice di m righe ed $n + 1$ colonne

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & p_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & p_m \end{array} \right].$$

Abbiamo descritto informalmente, su esempi di sistemi di n equazioni in n incognite con $n = 2, 3$, il metodo di eliminazione, per trovare la soluzione di un sistema nel “caso generale”. Di seguito descriviamo su esempi una versione del metodo di eliminazione più generale e più flessibile, per rispondere alle seguenti domande su un sistema lineare qualsiasi:

il sistema ha soluzioni? se sì, ha un'unica soluzione? se sì, qual'è?

Al posto di scrivere “un'incognita compare con coefficiente $\neq 0$ in un'equazione” scriviamo in breve “un'incognita compare in un'equazione”.

Il passo principale consiste nello scegliere in un'equazione un'incognita che compare e, sommando multipli dell'equazione alle altre equazioni, eliminare l'incognita dalle altre equazioni. Indichiamo l'operazione di sommare alla i° equazione r per la j° ($r \in \mathbb{R}$) con

$$\xrightarrow{i^\circ + r \cdot j^\circ}$$

Se a un certo passo si trova un'equazione in cui non compare alcuna incognita e il termine noto è $\neq 0$, allora si conclude che il sistema non ha alcuna soluzione.

Se questa circostanza non si presenta mai, si giunge a un sistema in cui a ciascuna equazione è associata un'incognita che compare solo nell'equazione.

Da ciascuna equazione si ricava l'incognita associata, lasciando libere le eventuali altre incognite; se ci sono incognite libere, il sistema ha infinite soluzioni, altrimenti ha un'unica soluzione.

Esempio 1.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{2^\circ - 3 \cdot 1^\circ} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{1^\circ + 2 \cdot 2^\circ} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{array} \right];$$

1° equazione: $x = -2$;

2° equazione: $-y = -3$, da cui $y = 3$.

Esempio 2.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{2^\circ - 2 \cdot 1^\circ} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

2° equazione: $0x + 0y = 0$, soddisfatta per ogni x, y ; la cancelliamo.

1° equazione: $x + y = 1$; ricaviamo $x = 1 - y$, con y libera (infinite soluzioni).

Esempio 3.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{2^\circ - 2 \cdot 1^\circ} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

2° equazione: $0x + 0y = 1$, non ha alcuna soluzione; il sistema non ha alcuna soluzione.

Esempio 4.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 9 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[3^\circ - 3 \cdot 1^\circ]{2^\circ - 2 \cdot 1^\circ} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & -3 & -12 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[3^\circ - 2 \cdot 2^\circ]{1^\circ + 2 \cdot 2^\circ} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[2^\circ + 2 \cdot 3^\circ]{1^\circ + 3^\circ} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

1° equazione: $x = -5$; 2° equazione: $-y = -6$, da cui $y = 6$; 3° equazione: $z = 0$.

Esempio 6.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right] \quad \text{nella 1° equaz. scegliamo la } y,$$

$$\xrightarrow{3^\circ - 1^\circ} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right] \quad \text{nella 2° equaz. scegliamo la } x,$$

$$\xrightarrow{3^\circ - 2^\circ} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[2^\circ + 1/2 \cdot 3^\circ]{1^\circ + 1/2 \cdot 3^\circ} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

2° equazione: $x = \frac{5}{2}$; 1° equazione: $y = \frac{3}{2}$; 3° equazione: $-2z = 1$, da cui $z = -\frac{1}{2}$.

Esempio 7.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{2^\circ - 1^\circ} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{1^\circ - 2^\circ} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

1° equazione: $x - z = 3$; da cui $x = 3 + z$;

2° equazione: $y + 2z = 1$; da cui $y = 1 - 2z$;

z è libera; infinite soluzioni.

Esempio 8.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow[3^\circ - 1^\circ]{2^\circ - 1^\circ} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{3^\circ - 2 \cdot 2^\circ} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right].$$

Il sistema non ha alcuna soluzione.

Teorema. Per ogni matrice di m righe ed n colonne di numeri reali

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) ciascun sistema con matrice dei coefficienti A ha un'unica soluzione;
- (2) $m = n$ e le colonne di A sono linearmente indipendenti;
- (3) $m = n$ e le righe di A sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione parziale.

(1) equivale a (2).

Ciascun sistema con matrice dei coefficienti A è di m equazioni in n incognite x_1, \dots, x_n e si scrive come un'equazione

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = p$$

dove $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ sono le colonne di A e $p \in \mathbb{R}^m$.

Ciascun sistema ha un'unica soluzione se e solo se

ciascuna equazione ha un'unica soluzione se e solo se (per definizione di base)

a_1, \dots, a_n è una base di \mathbb{R}^m se e solo se (per i Th. sulle basi)

$n = m$ e a_1, \dots, a_m è indipendente.

(1) equivale a (3): lo proveremo più avanti.

2.2 Algebra delle matrici

Prodotto di matrici

Righe, colonne. Una n -pla ordinata di numeri reali si scrive solitamente scrivendo le sue componenti nell'ordine, per riga, separate da virgole, tra parentesi tonde, ma si scrive anche scrivendo le componenti per riga, separate da spazi, tra parentesi quadre, oppure per colonna, tra parentesi quadre; ad esempio, la coppia ordinata $(6, 7)$ si scrive anche

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

D'ora innanzi, consideriamo queste altre scritte, in righe e colonne, e le consideriamo come oggetti diversi. Sotto un simbolo scriviamo $1 \times n$ per indicare che rappresenta una riga di n numeri reali, e indichiamo con $\mathbb{R}^{1 \times n}$ l'insieme delle righe di n numeri reali; analogamente, scriviamo $n \times 1$ per una colonna di n numeri reali, e indichiamo con $\mathbb{R}^{n \times 1}$ l'insieme delle colonne di n numeri reali; nell'esempio,

$$a_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}, \quad b_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}.$$

Prodotto righe per colonne. Data una riga ed una colonna di numeri reali, aventi lo stesso numero di componenti, moltiplicando ciascuna componente della riga per la rispettiva componente della colonna e sommando si ottiene un numero reale che si dice prodotto della riga per la colonna e si indica giustapponendo la riga e la colonna (prima la riga e poi la colonna). Il prodotto di una riga per una colonna con diversi numeri di componenti non è definito. Ad esempio,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{non definiti.}$$

In generale,

$$a_{1 \times n} b_{n \times 1} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

(qui le a_i sono le componenti di a , analogamente per b_i e b),

$$a_{1 \times n'} b_{n'' \times 1} \quad \text{non definito per } n' \neq n''.$$

Questa operazione si può usare per scrivere in modo sintetico le espressioni lineari; ad esempio

$$2x_1 + 3x_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = a_{1 \times n} x_{n \times 1}.$$

Matrici, terminologia, notazioni. Al posto di dire che una matrice “ha m righe ed n colonne”, diciamo in breve che la matrice ha “tipo” $m \times n$; al posto di “elemento della i -ma riga e j -ma colonna” spesso diciamo in breve elemento di “posto” (i, j) .

Notazioni per una matrice A :

$A_{m \times n}$ sta per “ A ha tipo $m \times n$ ”;

$\mathbb{R}^{m \times n}$ insieme delle matrici di tipo $m \times n$;

A_{ij} = (elemento di posto (i, j) di A);

$A_{i:}$ = (i -ma riga di A);

$A_{:j}$ = (j -ma colonna di A).

Esempio:

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3};$$

$$A_{21} = 5, \quad A_{2:} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_{:1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Prodotto di matrici. Se il numero delle colonne di una prima matrice è uguale al numero delle righe di una seconda matrice, allora possiamo moltiplicare ciascuna riga della prima per ciascuna colonna della seconda ed organizzare questi prodotti in una tabella; otteniamo così una terza matrice. Abbiamo così un'operazione sulle matrici detta "prodotto" di matrici. Ad esempio

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & & & \\ \hline 3 & 4 & & & \\ \hline 5 & 6 & & & \\ \hline 7 & 8 & & & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \\ 39 & 54 & 69 \end{array} \right];$$

il prodotto della 3° riga della prima matrice per la 2° colonna della seconda matrice compare come elemento della 3° riga e 2° colonna della matrice prodotto:

$$\left[\begin{array}{cc} 5 & 6 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 2 \\ 5 \end{array} \right] = 5 \cdot 2 + 6 \cdot 5 = 40,$$

analogamente per gli altri.

In simboli, il prodotto di una matrice A di tipo $m \times n$ per una matrice B di tipo $n \times p$ è la matrice AB di tipo $m \times p$

$$\begin{matrix} A, & B, & AB \\ m \times n, & n \times p, & m \times p \end{matrix}$$

data dai prodotti delle m righe di A per le p colonne di B : l'elemento di posto (i, j) in AB è il prodotto della riga i -ma di A per la colonna j -ma di B

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= A_{i:} B_{:j} \\ &= [A_{i1} \ \dots \ A_{in}] \begin{bmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{bmatrix} \\ &= A_{i1} B_{1j} + \dots + A_{in} B_{nj} \\ &= \sum_{h=1}^n A_{ih} B_{hj}. \end{aligned}$$

Il prodotto di una prima matrice per una seconda matrice tali che il numero delle colonne della prima è diverso dal numero delle righe della seconda non è definito:

$$\begin{matrix} A, & B, & AB \text{ non definito per } n' \neq n''. \\ m \times n', & n'' \times p, & \end{matrix}$$

Uso: scrittura di combinazioni e sistemi lineari. Questa operazione si può usare per scrivere in modo sintetico le combinazioni lineari. Ad esempio

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Il sistema lineare di 3 equazioni in 2 incognite a coefficienti, incognite, termini noti in \mathbb{R}

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 7 \\ 3x_1 + 6x_2 = 8 \\ 4x_1 + 7x_2 = 9 \end{cases}$$

si può riscrivere come un'unica equazione lineare con una matrice coefficiente 3×2 , un'incognita 2×1 , un termine noto 3×1

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

In generale:

- ogni combinazione lineare di colonne si fattorizza come prodotto della matrice delle colonne per la colonna dei coefficienti

$$\sum_{j=1}^n x_j A_{:,j} = Ax;$$

- ogni sistema lineare di m equazioni in n incognite con coefficienti, incognite, termini noti in \mathbb{R}

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

si scrive come un'equazione lineare con matrice coefficiente $m \times n$, incognita $n \times 1$, termine noto $m \times 1$

$$Ax = b.$$

Proprietà

Premessa. Per ogni due matrici A, B , tali che il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B , ciascuna riga di A si può moltiplicare per ciascuna colonna di B , e questi prodotti danno la matrice prodotto AB . In altri termini, per ogni matrice A di tipo $m \times n'$ e B di tipo $n'' \times p$, se $n' = n''$ si definisce la matrice prodotto AB di tipo $m \times p$ ponendo

$$(AB)_{ij} = A_{i:} B_{:j} = \sum_{h=1}^n A_{ih} B_{hj};$$

se invece $n' \neq n''$ non si definisce alcuna matrice prodotto. Gli esempi più semplici si ottengono da matrici riga e matrici colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [11], \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{non definito}$$
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

I numeri reali possono essere identificati con matrici 1×1 e al prodotto di numeri reali corrisponde il prodotto di matrici 1×1 :

$$a \simeq [a], \quad b \simeq [b], \quad ab \simeq [a][b];$$

in questo senso, il prodotto di numeri reali ha come estensione il prodotto di matrici. Nel seguito, ripercorriamo gli aspetti principali del prodotto di numeri reali e vagliamo gli analoghi aspetti del prodotto di matrici.

Innanzitutto, sottolineiamo di nuovo che, mentre il prodotto di due numeri reali è sempre definito, il prodotto di due matrici non è sempre definito. Può succedere che il prodotto di una prima matrice per una seconda matrice sia definito, e che il prodotto della seconda per la prima non lo sia. In breve:

il prodotto di matrici è un'operazione parziale, non commutativa.

Numero 1, matrici identità. Fra i numeri reali, il numero 1 è caratterizzato in termini di prodotto dalla proprietà

$$1a = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

L'analogo del numero 1 è dato dalle "matrici identità"

$$I_1 = [1], \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dots;$$

$$I_n \text{ è } n \times n \text{ con elementi } (I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Queste matrici sono caratterizzate da

$$I_m A = A = A I_n, \quad \text{per ogni } A \text{ } m \times n$$

Un esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Proviamo una delle proprietà.

I_m ed A sono $m \times m$ e $m \times n$, quindi $I_m A$ è definita ed è $m \times n$; per ogni i da 1 ad m e j da 1 a n si ha

$$(I_m A)_{ij} = \sum_{h=1}^m (I_m)_{ih} A_{hj} = (I_m)_{ii} A_{ij} = A_{ij};$$

quindi $I_m A = A$.

Associatività. Date tre matrici A, B, C tali che il numero di colonne di A sia uguale al numero di righe di B e il numero di colonne di B sia uguale al numero di righe di C , abbiamo due modi di moltiplicarle, mantenendo l'ordine,

$$(AB)C, \quad A(BC).$$

Ad esempio, per

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

si ha

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Quello che abbiamo visto su questo esempio si prova valere in generale.

La moltiplicazione di matrici possiede la proprietà associativa: comunque siano date tre matrici A, B, C , l'espressione $(AB)C$ è definita se e solo se è definita l'espressione $A(BC)$, e in tal caso si ha

$$(AB)C = A(BC).$$

Potremo così scrivere un prodotto di più matrici senza usare parentesi.

Trasposizione. Data una matrice A , leggendo gli elementi per righe e trascrivendoli per colonne si ottiene una matrice, che si dice “trasposta” di A e si indica con A^T . Ad esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = A^T.$$

In simboli: trasposta di una matrice A $m \times n$ è la matrice A^T $n \times m$ tale che

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} \quad \forall i, j.$$

Ovviamente la trasposta della trasposta di una matrice è la matrice stessa: $(A^T)^T = A$.

Si vede che A è moltiplicabile per B se e solo se B^T è moltiplicabile per A^T e si prova che i due prodotti sono uguali:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Un esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrice inversa Ricordiamo che l'inverso di un numero reale a è un numero reale b tale che $ab(=ba) = 1$; a possiede inverso se e solo se $a \neq 0$; in tal caso, a possiede un unico inverso, lo si indica con a^{-1} . Ad esempio: l'inverso di $\frac{2}{3}$ è il numero che moltiplicato per $\frac{2}{3}$ dà 1, dunque $(\frac{2}{3})^{-1} = \frac{3}{2}$; l'inverso di $\pi = 3,1415\dots$ è un numero reale che moltiplicato per π dà 1, si ha $\pi^{-1} = 0.3183\dots$ (così come non è banale determinare le cifre decimali di π , allo stesso modo non è banale determinare le cifre decimali di π^{-1}).

Definizione. Si dice che una matrice A $n \times n$ ha una matrice inversa B $n \times n$ se

$$AB = I_n = BA;$$

in tal caso, si prova che A ha un'unica inversa, la si indica con A^{-1} .

L'unicità dell'inversa segue dalle proprietà del prodotto di matrici: se A ha due inverse B' e B'' , allora

$$B' = B'I = B'(AB'') = (B'A)B'' = IB'' = B'';$$

si noti che abbiamo usato solo il fatto che A ha inversa sinistra B' e inversa destra B'' .

Esempio. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ha un'inversa $\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ se e solo se

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};$$

la prima equazione equivale a 2 sistemi lineari in 2 incognite

$$\begin{cases} b_1 + 2b_2 = 1 \\ b_1 + 3b_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ c_1 + 3c_2 = 1 \end{cases};$$

risolvendo i sistemi, si trova $\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$

si verifica che la matrice soddisfa anche la seconda equazione;

dunque

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esempio. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ ha un'inversa $\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ se e solo se

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix};$$

la prima equazione equivale ai 2 sistemi lineari in 2 incognite

$$\begin{cases} b_1 + 3b_2 = 1 \\ 2b_1 + 6b_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + 3c_2 = 0 \\ 2c_1 + 6c_2 = 1 \end{cases} ;$$

uno dei due sistemi (in realtà entrambi) non ha soluzioni;

quindi $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ non ha alcuna inversa.

Equazioni matriciali

Consideriamo l'equazione $2x = 3$ nell'incognita x su \mathbb{R} ; subito ricaviamo la soluzione $x = \frac{3}{2}$. Ricordiamo che questa risoluzione si basa sui seguenti passaggi (che normalmente si omettono)

$$2x = 3 \quad \frac{1}{2} 2x = \frac{1}{2} 3 \quad 1x = \frac{3}{2} \quad x = \frac{3}{2}.$$

In questa sezione consideriamo più in generale equazioni matriciali, con coefficiente, incognita e termine noto matrici e mostriamo un modo per risolverne alcune.

Una matrice A ha inversa se due certe equazioni che coinvolgono A hanno una soluzione; la soluzione di queste equazioni è l'inversa di A . In tal caso tutte le equazioni che coinvolgono A hanno un'unica soluzione e la soluzione si può ottenere tramite l'inversa di A . Precisamente si ha:

Proposizione. Sia A invertibile. Allora

(1) Ogni equazione $AX = \underset{n \times p}{B}$ ha un'unica soluzione: $X = A^{-1}B$.

(2) Ogni equazione $XA = \underset{m \times n}{B}$ ha un'unica soluzione: $X = BA^{-1}$.

In particolare:

(0) Ogni sistema lineare $Ax = b$ ha un'unica soluzione: $x = A^{-1}b$.

Dimostrazione della (1).

Da una parte:

$AX = B$ implica

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ implica $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$ implica $I_n X = A^{-1}B$ implica $X = A^{-1}B$.

Dall'altra:

$A(A^{-1}B) = B$, in quanto

$A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = I_n B = B$.

Esempio. Sappiamo che $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, dunque

il sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ x_1 + 3x_2 = 9 \end{cases}$, cioè $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$,

ha un'unica soluzione: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Indipendenza di righe, indipendenza di colonne

Abbiamo definito uno spazio vettoriale come un insieme con un'operazione di somma di vettori ed un'operazione di prodotto di numeri per vettori che soddisfano certe proprietà; in senso stretto, abbiamo così definito uno spazio vettoriale sinistro. In modo analogo, si definisce uno spazio vettoriale destro, nel quale si ha un'operazione di prodotto di vettori per numeri. Poichè il prodotto di numeri reali è commutativo, ogni spazio vettoriale sinistro si può anche vedere come spazio vettoriale destro e viceversa.

Osserviamo che la moltiplicazione di matrici fornisce

- un prodotto di vettori colonna $n \times 1$ per (matrici 1×1) \simeq (numeri reali);
- un prodotto di (numeri reali) \simeq (matrici 1×1) per vettori riga $1 \times n$.

L'insieme dei vettori colonna e l'insieme dei vettori riga hanno rispettivamente una struttura di spazio vettoriale destro e una struttura di spazio vettoriale sinistro, compatibili col prodotto di matrici. Non c'è necessità di adottare questo punto di vista, ma questo punto di vista porta a svolgere espressioni e provare identità in modo più naturale.

Combinazioni lineari e prodotti di matrici.

- Il prodotto di una riga per una colonna può essere visto come una combinazione lineare degli elementi della riga (con coefficienti a destra) e come una combinazione lineare (con coefficienti a sinistra) degli elementi della colonna

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

- Il prodotto di una matrice per una colonna di numeri equivale alla combinazione lineare delle colonne della matrice, con coefficienti i numeri.

Un esempio:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \\ 6x_1 + 7x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} x_2.$$

In generale:

$$\begin{bmatrix} a & b & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \vdots \end{bmatrix} = a\alpha + b\beta + \dots$$

(a, b, \dots colonne, α, β, \dots numeri, soddisfacenti le dovute condizioni). Infatti: i due membri danno due colonne dello stesso tipo, e per ogni indice i ,

$$(1^\circ \text{ membro})_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \vdots \end{bmatrix} = a_i \alpha + b_i \beta + \dots;$$

$$(2^\circ \text{ membro})_i = (a\alpha)_i + (b\beta)_i + \dots = a_i \alpha + b_i \beta + \dots.$$

Uso: espressione sintetica dell'indipendenza lineare.

Ogni sequenza c_1, \dots, c_n di colonne $m \times 1$ dà una matrice $A = [c_1 \dots c_n]$ $m \times n$ e viceversa. La sequenza soddisfa la condizione

$$c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \underline{0} \text{ vale solo per i numeri } x_1 = \dots = x_n = 0$$

se e solo se la matrice soddisfa la condizione

$$Ax = \underline{0} \text{ vale solo per la colonna } x = \underline{0}.$$

- Il prodotto di una riga di numeri per una matrice equivale alla combinazione lineare, con coefficienti i numeri, delle righe della matrice.

Un esempio:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1 2 + y_2 4 + y_3 6 & y_1 3 + y_2 5 + y_3 7 \end{bmatrix} \\ &= y_1 \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} 6 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

In generale:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ \vdots \end{bmatrix} = \alpha a + \beta b + \dots$$

(α, β, \dots numeri, a, b, \dots righe, soddisfacenti le dovute condizioni).

Uso: espressione sintetica dell'indipendenza lineare.

Ogni sequenza r_1, \dots, r_m di righe $1 \times n$ dà una matrice $A = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$ $m \times n$ e viceversa.

La sequenza soddisfa la condizione

$$y_1 r_1 + \dots + y_m r_m = \underline{0} \text{ vale solo per i numeri } y_1 = \dots = y_m = 0$$

se e solo se la matrice soddisfa la condizione

$$yA = \underline{0} \text{ vale solo per la riga } y = \underline{0}.$$

Ampliamo, in enunciato e dimostrazione, il Teorema su indipendenza lineare, basi e sistemi lineari (cfr. § 2.1 Sistemi lineari). Di seguito sia A una matrice $m \times n$ con righe r_1, \dots, r_m e colonne c_1, \dots, c_n

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix}.$$

Prop. Se le righe di A sono linearmente dipendenti (in \mathbb{R}^n) allora esiste qualche colonna (in \mathbb{R}^m) che non è combinazione lineare delle colonne di A ; specificamente: se vale una relazione

$$\bar{y}_1 r_1 + \dots + \bar{y}_m r_m = \underline{0}$$

con qualche $\bar{y}_i \neq 0$, allora l'equazione

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_m \end{bmatrix}$$

non ha alcuna soluzione. Vale un analogo enunciato scambiando il ruolo delle righe e delle colonne.

Esempio. Per la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$,

le righe soddisfano la relazione

$$-3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$

quindi l'equazione

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

non ha alcuna soluzione (si lascia la verifica al lettore).

Dimostrazione. Per ipotesi si ha $\begin{bmatrix} \bar{y}_1 & \cdots & \bar{y}_m \end{bmatrix} A = \underline{0}$, con qualche $\bar{y}_i \neq 0$.

Se valesse $A\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_m \end{bmatrix}$ per qualche $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, allora si avrebbe la contraddizione:

- da una parte $\begin{bmatrix} \bar{y}_1 & \cdots & \bar{y}_m \end{bmatrix} (A\bar{x}) = \left(\begin{bmatrix} \bar{y}_1 & \cdots & \bar{y}_m \end{bmatrix} A \right) \bar{x} = \underline{0} \bar{x} = 0$;

- dall'altra $\begin{bmatrix} \bar{y}_1 & \cdots & \bar{y}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_m \end{bmatrix} = \sum_1^m \bar{y}_i^2 > 0$.

Teorema. Le seguenti condizioni su una matrice $m \times n$ sono equivalenti

- | | |
|--|---|
| 1: $n = m$ e colonne sono lin. indep.; | 1': $m = n$ e righe sono lin. indep.; |
| 2: colonne sono base di \mathbb{R}^m ; | 2': righe sono una base di \mathbb{R}^n ; |

Dimostrazione.

$1 \Rightarrow 2$: per il Th. sulle basi; $2 \Rightarrow 1$: ovvio. Analogamente per $1' \Leftrightarrow 2'$.

$2 \Rightarrow 1'$: se $1'$ non valesse allora, per la Prop., 2 non varrebbe; $2' \Rightarrow 1$ analogo.

Definizione. Una matrice che soddisfa una (e quindi tutte) le condizioni del Teorema si dice "non singolare".

Indipendenza, invertibilità, inversione

Il prodotto matrice-per-matrice è legato al prodotto matrice-per-colonna e al prodotto riga-per-matrice dalla seguente relazione.

Siano A una matrice con righe r, s, \dots e B una matrice con colonne c, d, \dots , righe e colonne della stessa lunghezza, allora

(1) le colonne di AB sono i prodotti di A per le colonne di B :

$$A \begin{bmatrix} c & d & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ac & Ad & \cdots \end{bmatrix};$$

(2) le righe di AB sono i prodotti delle righe di A per B :

$$\begin{bmatrix} r \\ s \\ \vdots \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} rB \\ sB \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Verifichiamo la (1):

$$A \begin{bmatrix} c & d & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rc & rd & \cdots \\ sc & sd & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ac & Ad & \cdots \end{bmatrix}.$$

Teorema. Per ogni matrice A quadrata $n \times n$, le seguenti condizioni sono equivalenti:
(1) A è non singolare; (2) A è invertibile.

Dimostrazione.

(1) \Rightarrow (2). Se A è non singolare, allora le colonne di A sono una base di \mathbb{R}^n , allora esistono (uniche) colonne b_1, \dots, b_n tali che $Ab_1 = e_1, \dots, Ab_n = e_n$, allora

$$A[b_1 \cdots b_n] = [Ab_1 \cdots Ab_n] = [e_1 \cdots e_n] = I_n,$$

e A ha un'inversa destra. In modo simile si trova che A possiede un'inversa sinistra. Quindi A è invertibile.

(2) \Rightarrow (1). Se A è invertibile, allora l'equazione $Ax = \underline{0}$ ha un'unica soluzione, quindi ha l'unica soluzione $x = \underline{0}$, quindi le colonne di A son lin. indep. e A è non singolare.

Esempi. Cosa sarebbe cambiato nello studio dell'invertibilità e ricerca dell'inversa delle due matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ (cfr. p. 33) ?}$$

Osservando che la prima ha colonne indipendenti e la seconda dipendenti, avremmo potuto dire subito che la prima è invertibile e la seconda non lo è.

Per il calcolo dell'inversa della prima, avremmo determinato due colonne b, c tali che

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e avremmo subito affermato che l'inversa destra $[b \ c]$ è l'inversa della matrice (senza controllare che è anche inversa sinistra).

Definizione. Le "operazioni elementari" su una sequenza a_1, a_2, \dots di vettori di uno spazio vettoriale V sono:

(1) sommare a un vettore un multiplo reale di un altro vettore

$$a_i := a_i + r a_j \quad i \neq j$$

(2) moltiplicare un vettore per un numero non nullo:

$$a_i := s a_i \quad s \neq 0$$

(3) scambiare due vettori

$$a_i \leftrightarrow a_j.$$

Queste operazioni lasciano invariata la indipendenza/dipendenza lineare della sequenza. Inoltre, applicate alla matrice completa (coefficienti e termini noti) di un sistema lineare, lasciano invariate le soluzioni del sistema.

Proposizione. Sia A una matrice non singolare. Allora la matrice

$$[A|I_n]$$

si può trasformare, mediante operazioni elementari sulle righe, nella matrice

$$[I_n|A^{-1}].$$

Non diamo la dimostrazione.

Esempio 1.

$$\begin{aligned} [A|I_2] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{2^\circ - 1^\circ} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{1^\circ - 2 \cdot 2^\circ} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] = [I_2|A^{-1}] \end{aligned}$$

Esempio 2.

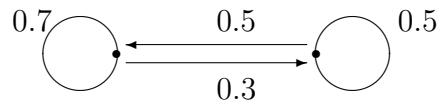
$$\begin{aligned} [A|I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{3^\circ - 3 \cdot 1^\circ} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2} 2^\circ} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{3^\circ - 3 \cdot 2^\circ} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{6} \cdot 3^\circ} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{2^\circ - 3^\circ; 1^\circ - 3^\circ} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{1^\circ \leftrightarrow 2^\circ} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \end{array} \right] = [I_3|A^{-1}] \end{aligned}$$

Applicazione. Supponiamo che fra due città 1 e 2 nel passaggio da un tempo 0 ad un tempo 1 si siano verificati i seguenti spostamenti percentuali:

degli abitanti in 1 al tempo 0, il 70% è rimasto in 1 e il 30% si è trasferito in 2;

degli abitanti in 2 al tempo 0, il 50% si è trasferito in 1 e il 50% è rimasto in 2.

Ci si chiede di determinare i numeri degli abitanti nelle città al tempo 1 in funzione di quelli al tempo 0 e se possibile quelli al tempo 0 in funzione di quelli al tempo 1.



Indicati con x_1 e x_2 i numeri degli abitanti in 1 e 2 al tempo 0, e con y_1 e y_2 quelli al tempo 1, si ha

$$y_1 = 0.7 x_1 + 0.5 x_2$$

$$y_2 = 0.3 x_1 + 0.5 x_2$$

che si può riscrivere

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$

si ha

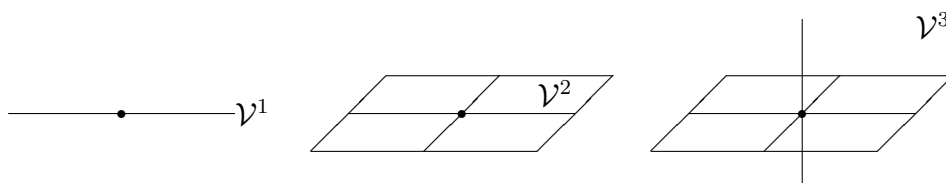
$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2.5 & -2.5 \\ -1.5 & 3.5 \end{bmatrix};$$

dunque si ricava in modo unico

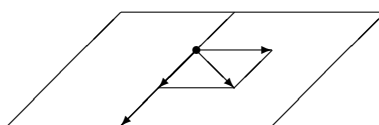
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & -2.5 \\ -1.5 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Sottospazi

“La retta”, “il piano”, “lo spazio” euclidei sono entità a sé stanti; nel piano non c’è “la retta”, ce ne sono varie; nello spazio ci sono vari piani. Analogamente: fissato nel piano un punto O e identificati i vettori con segmenti orientati uscenti da O , si ha che alla retta vettoriale \mathcal{V}^1 corrispondono nel piano vettoriale \mathcal{V}^2 varie rette vettoriali, una per ogni retta passante per O ; rappresentati i vettori dello spazio con segmenti orientati uscenti da un punto O , al piano vettoriale \mathcal{V}^2 corrispondono nello spazio vettoriale \mathcal{V}^3 vari piani vettoriali, uno per ogni piano passante per O .



Osserviamo che per ciascun piano passante per O si ha: (1) per ogni due vettori che stanno sul piano, il parallelogramma da essi individuato sta sul piano, dunque il vettore somma sta sul piano; (2) per ogni vettore sul piano, anche la retta da esso individuata sta sul piano, dunque i vettori multipli reali del vettore stanno sul piano.



Definizione. Un **sottinsieme** $U \subseteq V$ di uno spazio vettoriale V si dice “**sottospazio vettoriale**” di V se U è chiuso rispetto alle operazioni definite in V

- (1) per ogni $u', u'' \in U$, anche $u' + u'' \in U$;
- (2) per ogni $r \in \mathbb{R}$ ed ogni $u \in U$, anche $ru \in U$;

e U non è vuoto

- (3) $U \neq \emptyset$;

equivalentemente, U contiene il vettore nullo di V :

- (3') $\underline{0} \in U$.

(Infatti, se esiste un $\bar{u} \in U$, allora, per la (2), anche $\underline{0} = 0\bar{u} \in U$.)

Osserviamo che in tal caso U , col vettore nullo $\underline{0}$, coi vettori opposti $-u$ per ogni $u \in U$, e con le operazioni ereditate da V è uno spazio vettoriale.

Infatti: per la (3'), $\underline{0} \in U$, per la (2), $-u = (-1)u \in U$ per ogni $u \in U$; questi elementi e le operazioni soddisfano le identità (1), ..., (8). Ad esempio, per la proprietà commutativa: per ogni $u', u'' \in U$ si ha

$$\begin{aligned} u' + u'' \text{ (calcolato in } U) &= u' + u'' \text{ (calcolato in } V) \\ &= u'' + u' \text{ (calcolato in } V) = u'' + u' \text{ (calcolato in } U). \end{aligned}$$

Esempio 1.

Identificati i vettori dello spazio con i segmenti orientati uscenti da un punto O , i sottospazi di \mathcal{V}^3 sono:

- 0- l'insieme ridotto al vettore nullo (il punto O);
- 1- per ciascuna retta passante per O , l'insieme i vettori che stanno sulla retta;
- 2- per ciascun piano passante per O , l'insieme dei vettori che stanno sul piano;
- 3- l'insieme \mathcal{V}^3 di tutti i vettori.

Da una parte, ciascuno di questi insiemi soddisfa le condizioni (1), (2), (3) (lo abbiamo già visto per quelli del tipo 2).

Dall'altra parte, se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}^3$ è un sottospazio, allora:

- se \mathcal{U} contiene solo $\underline{0}$, allora è del tipo 0;
- se \mathcal{U} contiene un vettore $i \neq \underline{0}$, allora per la (2) contiene anche tutti i vettori $x i$, tutti quelli sulla retta per i ; se \mathcal{U} non contiene altri vettori, allora è del tipo 1;
- se \mathcal{U} contiene un vettore j che non sta sulla retta di i , allora per la (1) e (2) contiene anche i vettori combinazioni lineari $x i + y j$, quindi tutti quelli sul piano per i e j ; se \mathcal{U} non contiene altri vettori, allora è del tipo 2;
- se \mathcal{U} contiene un vettore k che non sta sul piano per i, j , allora per la (1) e (2) contiene anche i vettori combinazioni lineari $x i + y j + z k$, quindi tutti quelli dello spazio.

Esempio 2.

Mostriamo algebricamente che l'insieme dei vettori su un piano per O è un sottospazio di \mathcal{V}^3 . Fissiamo un riferimento i, j, k tale che i e j stiano sul piano e tramite di esso identifichiamo \mathcal{V}^3 con \mathbb{R}^3 .

Un vettore sta sul piano se e solo se è del tipo $x i + y j \simeq \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$.

La somma di vettori di questo tipo è di questo tipo: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \\ 0 \end{bmatrix};$

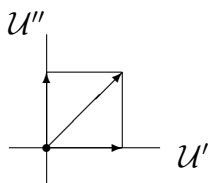
il prodotto di numeri per vettori di questo tipo è di questo tipo: $r \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r x \\ r y \\ 0 \end{bmatrix}.$

Esempio 3.

Identificati i vettori del piano con i segmenti orientati uscenti da un punto O , consideriamo due rette distinte per O , gli insiemi \mathcal{U}' e \mathcal{U}'' dei vettori che stanno sulle rette, e l'insieme unione $\mathcal{U} = \mathcal{U}' \cup \mathcal{U}''$.

\mathcal{U} soddisfa la (2), ma non soddisfa la (1).

Se $u' \in \mathcal{U}'$ e $u'' \in \mathcal{U}''$, con $u' \neq \underline{0} \neq u''$, allora $u', u'' \in \mathcal{U}$ ma $u' + u'' \notin \mathcal{U}$.



Fissato un riferimento i, j con $i \in \mathcal{U}'$ e $j \in \mathcal{U}''$, e identificato \mathcal{V}^2 con \mathbb{R}^2 , si ha:

$$\mathcal{U}' = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\};$$

$$\mathcal{U}'' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}; y \in \mathbb{R} \right\};$$

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; x, y \in \mathbb{R}, x = 0 \text{ o } y = 0 \right\}.$$

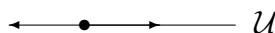
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{U}, \text{ ma } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \mathcal{U}.$$

Esempio 4.

Identificati i vettori della retta con i segmenti orientati uscenti da un punto O , consideriamo una delle due semirette uscenti da O , e l'insieme \mathcal{U} dei vettori che stanno sulla semiretta.

\mathcal{U} soddisfa la (1), ma non soddisfa la (2).

Se $u \in \mathcal{U}$ con $u \neq \underline{0}$, allora $(-1)u = -u \notin \mathcal{U}$.



Fissato un riferimento i con $i \in \mathcal{U}$, e identificato \mathcal{V}^1 con \mathbb{R} , si ha:

$$\mathcal{U} = \{x; x \geq 0\};$$

$$1 \in \mathcal{U}, \text{ ma } (-1)1 = -1 \notin \mathcal{U}.$$

Sottospazi generati da insiemi di vettori.

In analogia con la descrizione dei sottospazi di \mathcal{V}^3 , iniziamo a descrivere i sottospazi di uno spazio vettoriale V . Sia $U \subseteq V$ un sottospazio di V .

$U \ni \underline{0}$. L'insieme $\{\underline{0}\}$ è un sottospazio di V .

Se $U \ni a \neq \underline{0}$, allora per la (2) U contiene anche tutti i multipli reali αa di a . L'insieme

$$\{\alpha a; \alpha \in \mathbb{R}\}$$

è un sottospazio di V . Infatti: per ogni due multipli $\alpha' a, \alpha'' a$ di a , la somma $\alpha' a + \alpha'' a = (\alpha' + \alpha'')a$ è ancora un multiplo di a ; per ogni $r \in \mathbb{R}$ ed ogni multiplo αa di a , anche $r(\alpha a) = (r\alpha)a$ è un multiplo di a .

Osserviamo inoltre che, essendo $a \neq \underline{0}$, a è una base di questo spazio vettoriale; infatti ogni multiplo di a si scrive in un unico modo come multiplo di a : se $\alpha' a = \alpha'' a$, allora $(\alpha' - \alpha'')a = \underline{0}$ ed essendo $a \neq \underline{0}$ si ha $\alpha' - \alpha'' = 0$, da cui $\alpha' = \alpha''$.

Proposizione. Sia a, b, \dots una sequenza finita di vettori di V . L'insieme delle combinazioni lineari di a, b, \dots è un sottospazio di V , il più piccolo sottospazio di V

che contiene a, b, \dots . Lo si dice “sottospazio generato da a, b, \dots ” e lo si indica con $\text{span}\{a, b, \dots\}$:

$$\text{span}\{a, b, \dots\} = \{\alpha a + \beta b + \dots; \alpha, \beta, \dots \in \mathbb{R}\}$$

Dimostrazione parziale.

(1) per ogni due vettori comb. lin. di a, b, \dots , il vettore somma è comb. lin. di a, b, \dots :

$$(\alpha' a + \beta' b + \dots) + (\alpha'' a + \beta'' b + \dots) = (\alpha' + \alpha'')a + (\beta' + \beta'')b + \dots$$

(2) per ogni $r \in \mathbb{R}$ ed ogni vettore comb. lin. di a, b, \dots , il vettore prodotto è comb. lin. di a, b, \dots :

$$r(\alpha a + \beta b + \dots) = (r\alpha)a + (r\beta)b + \dots$$

(3) $0 = 0a + 0b + \dots$ è comb. lin. di a, b, \dots .

Ogni vettore della sequenza a, b, \dots è uguale a una comb. lin. dei vettori della sequenza, quella con coefficienti 1 per sé stesso e 0 per gli altri.

Esempio.

In \mathcal{V}^3 , identificato con \mathbb{R}^3 mediante un riferimento i, j, k , siano

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$\text{Span}\{a, b, c\}$ è l'insieme delle combinazioni lineari di a, b, c

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ -\alpha + \gamma \\ -\beta - \gamma \end{bmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Essendo a, b non multipli uno dell'altro, $\text{Span}\{a, b, c\}$ non è una retta vettoriale, ci chiediamo se è un piano vettoriale o l'intero spazio \mathcal{V}^3 . Rispondiamo fra un po'.

Proprietà.

Diamo alcune proprietà della costruzione che associa ad ogni sequenza di vettori lo spazio da essa generato.

Proposizione. Siano a, \dots, c e d una sequenza finita di vettori e un vettore di V .

(1) $\text{Span}\{a, \dots, c\} \subseteq \text{Span}\{a, \dots, c, d\}$;

(2) $\text{Span}\{a, \dots, c\} = \text{Span}\{a, \dots, c, d\}$ se e solo se d è comb. lin. di a, \dots, c .

Dimostrazione.

(1) ogni comb. lin. di a, \dots, c è anche una comb. lin. di a, \dots, c, d :

$$\alpha a + \dots + \gamma c = \alpha a + \dots + \gamma c + 0d;$$

(2') Se $\text{Span}\{a, \dots, c\} = \text{Span}\{a, \dots, c, d\}$, allora da $d \in \text{Span}\{a, \dots, c, d\}$ segue $d \in \text{Span}\{a, \dots, c\}$, così d è comb. lin. di a, \dots, c .

(2'') Proviamo che, se d comb. lin. di a, \dots, c , allora ogni comb. lin. di a, \dots, c, d si può scrivere come comb. lin. di a, \dots, c . Infatti, se per certi $\bar{\alpha}, \dots, \bar{\gamma} \in \mathbb{R}$

$$d = \bar{\alpha} a + \cdots + \bar{\gamma} c$$

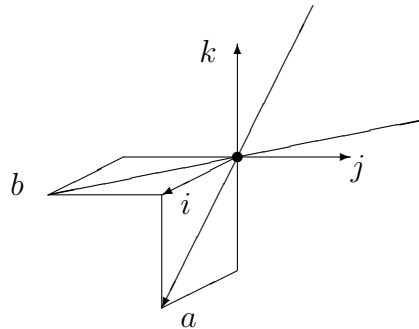
allora per ogni $\alpha, \dots, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\alpha a + \cdots + \gamma c + \delta d = \alpha a + \cdots + \gamma c + \delta (\bar{\alpha} a + \cdots + \bar{\gamma} c) = (\alpha + \delta \bar{\alpha}) a + \cdots + (\gamma + \delta \bar{\gamma}) c.$$

Esempio, ripresa.

$$c \text{ è comb. lin. di } a, b: \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix};$$

quindi $\text{Span}\{a, b, c\} = \text{Span}\{a, b\}$ è un piano vettoriale: l'insieme dei vettori che stanno sul piano di a, b . Osserviamo che a, b è un riferimento, cioè una base di $\text{Span}\{a, b\}$.



Questo esempio suggerisce una procedura per determinare una base e dunque la dimensione di un sottospazio generato da una sequenza (finita) di vettori: se c'è un vettore che è combinazione lineare dei precedenti, allora lo si può cancellare dalla sequenza lasciando invariato il sottospazio, si può proseguire fino a quando si ottiene una sottosequenza nella quale nessun vettore è combinazione lineare dei precedenti; la sequenza finale è linearmente indipendente, ed è una base del sottospazio.

Svilupperemo questo tema prossimamente.