APPL. LINEARI

Intermezzo

Abbiamo visto principalmente i seguenti esempi di spazi vettoriali

$\mathcal{V}^1 \quad \mathcal{V}^2 \quad \mathcal{V}^3$

$\mathbb{R}^1 \quad \mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}^3 \quad \mathbb{R}^4 \quad \ldots \quad \mathbb{R}^n \quad \ldots$

una volta fissato un riferimento, precisamente una base, ciascun spazio vettoriale geometrico $\mathcal{V}^n$ si può identificare, come spazio vettoriale col rispettivo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$. Per ogni intero positivo n si può considerare come analogo $n-$dimensionale degli spazi vettoriali geometrici uno spazio vettoriale $n-$dimensionale astratto; una volta fissata una base, tale spazio vettoriale si può identificare con il corrispondente spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Di regola, le definizioni, le proposizioni, i teoremi e le dimostrazioni sono più naturali per gli spazi vettoriali astratti.

Di seguito vedremo in particolare come le descrizioni della applicazioni lineari fra pazi vettoriali $\mathbb{R}^n$ si possano estendere a descrizioni di applicazioni lineari fra spazi vettoriali astratti.

D'ora innanzi, tranne avviso contrario, ogni spazio vettoriale considerato sarà tacitamente supposto di dimensione finita.

Applicazioni lineari

Siano V, W spazi vettoriali. Cosa possiamo dire delle applicazioni lineari da V a W?

Innanzitutto, l'unico elemento che sicuramente esiste in uno spazio vettoriale è il vettore nullo. Dunque possiamo definire un'applicazione $\mathrm{F} : V \to W$ ponendo $\mathrm{F}(v) = \underline{0} \in W$, per ogni $v \in V$. Questa applicazione è lineare, viene detta "applicazione nulla".

Teorema. Siano dati: uno spazio vettoriale V, una sequenza di vettori $a_1, \ldots, a_n$ base di V, uno spazio vettoriale W, una sequenza di vettori $w_1, \ldots, w_n$ di W. Allora esiste un'unica applicazione lineare $\mathrm{F} : V \to W$ tale che

$$\mathrm{F}(a_1) = w_1, \ldots, \mathrm{F}(a_n) = w_n;$$

esplicitamente, per ogni $v = x_1a_1 + \cdots + x_na_n \in V$,

$$\mathrm{F}(v) = x_1w_1 + \cdots + x_nw_n.$$

dat: $a_1, \ldots, a_n \in V$ e $w_1, \ldots, w_n \in W$

$\exists!\, F : V \to W \mid F(a_i) = w_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$

Commenti:

- Il senso del teorema è che, dato uno spazio vettoriale $n-$dimensionale V, una volta fissata una base in V, si possono identificare le applicazioni lineari da V verso uno spazio vettoriale W con le sequenze di n vettori di W : ogni applicazione lineare $V \to W$ si può rappresentare con un sequenza di n vettori di W, le immagini dei vettori base di V, e ogni sequenza di n vettori di W rappresenta una ed una sola applicazione lineare $V \to W$.

- L'ipotesi che $a_1, \ldots, a_n$ sia una base di V è fondamentale, in quanto assicura per ciascun vettore $v \in V$ l'esistenza e l'unicità della sequenza dei coefficienti $x_1, \ldots, x_n$ che servono per costruire $\mathrm{F}(v)$.

- L'unicità dell'applicazione F, con la sua descrizione esplicita, è ovvia. La parte principale della dimostrazione consiste nel provare che una tale applicazione F è lineare.

Esempio. In $\mathcal{V}^2$, identificato con $\mathbb{R}^2$ mediante un riferimento, consideriamo

una base, ad esempio $a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

due vettori, ad esempio $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

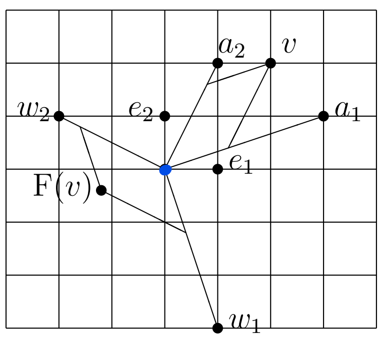
Esiste un'unica applicazione lineare $\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\mathrm{F}(a_1) = w_1$, $\mathrm{F}(a_2) = w_2$.

Calcoliamo il valore di F su un vettore, ad esempio $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ se esolo se } x_1 = \tfrac{2}{5},\ x_2 = \tfrac{4}{5};$$

quindi

$$\mathrm{F}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \tfrac{2}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \tfrac{4}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$



Applicazioni lineari iniettive, suriettive, biiettive

Applicazioni fra insiemi, iniettive, suriettive, biiettive.

Ricordiamo che un'applicazione $\mathrm{F} : D \to C$ fra insiemi si dice

- iniettiva se soddisfa una delle tre condizioni equivalenti

  per ogni $d_1, d_2 \in D$, da $d_1 \neq d_2$ segue $\mathrm{F}(d_1) \neq \mathrm{F}(d_2)$;

  per ogni $d_1, d_2 \in D$, da $\mathrm{F}(d_1) = \mathrm{F}(d_2)$ segue $d_1 = d_2$;

  per ogni $c \in C$, esiste al più un $d \in D$ tale che $\mathrm{F}(d) = c$; ?

- suriettiva se

  per ogni $c \in C$, esiste almeno un $d \in D$ tale che $\mathrm{F}(d) = c$;

- biiettiva se

  per ogni $c \in C$, esiste un'unico $d \in D$ tale che $\mathrm{F}(d) = c$.

Sur $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(L) = W$

$F : D \mapsto C$

$\forall c \in C \ \exists\, d \in D \mid F(d) = c$

In altri termini, l'applicazione è biiettiva se e solo se è sia iniettiva che suriettiva.

Cosa si può dire delle applicazioni lineari iniettive, suriettive, biiettive? Iniziamo con le applicazioni fra spazi vettoriali numerici.

Sia data un'applicazione lineare fra spazi vettoriali numerici

$\mathrm{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ \mathrm{F}(x) = Ax \qquad (A \text{ costante } m \times n).$

Osserviamo che per ogni $b \in \mathbb{R}^m$, l'equazione nell'incognita x su $\mathbb{R}^n$

$\mathrm{F}(x) = b$

equivale all'equazione

$Ax = b,$

$F(v) = Av = b \qquad A\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} = F(v_1, \dots, v_m)$

che è un sistema lineare di m equazioni in n incognite.

Proposizione.

- F è inettiva se e solo se le colonne di A sono linearmente indipendenti, cioè $\mathrm{r}(A) = n$;
- F è suriettiva se e solo se le righe di A sono linearmente indipendenti; cioè $\mathrm{r}(A) = m$;
- F è biiettiva se e solo se $n = \mathrm{r}(A) = m$, cioè A è non singolare. r e c indip

Dimostrazione parziale. Proviamo solo la 1° e la 3° affermazione. Indicate con $f_1, \dots, f_n$ le colonne di A, l'equazione $Ax = b$ si scrive anche come

$x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n = b.$

- Se F è inettiva, allora per ogni $b \in \mathbb{R}^m$ l'equazione $x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n = b$ ha al più una soluzione, allora l'equazione $x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n = \underline{0}$ ha solo la soluzione $x_1 = \ldots = x_n = 0$, allora $f_1, \dots, f_n$ sono linearmente indipendenti. Viceversa, si prova che se $f_1, \dots, f_n$ sono linearmente indipendenti, allora per ogni $b \in \mathbb{R}^m$ l'equazione $x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n = b$ ha al più una soluzione, quindi F è iiettiva.

- F è biiettiva se e solo se per ogni $b \in \mathbb{R}^m$ l'equazione $x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n = b$ ha aun'unica soluzione se e solo se $f_1, \dots, f_n$ è una base di $\mathbb{R}^m$ se e solo se A è non singolare se e solo se $m = \mathrm{r}(A) = n$.

Esempi.

$$\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{F}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ è iniettiva ma non suriettiva.}$$

$$\mathrm{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{G}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ non è iniettiva né suriettiva.}$$

$$\mathrm{H} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{H}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ è suriettiva ma non iniettiva.}$$

$$\mathrm{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{L}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ è biiettiva.}$$

Queste considerazioni e proposizione si possono riformulare in vari modi più o meno forti in termini di spazi vettoriali astratti, ad esempio come segue. Sia data un'applicazione lineare da uno spazio vettoriale V con una base $a_1, \dots, a_n$ verso uno spazio vettoriale W

$\mathrm{F}(x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n) = x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n \qquad (f_i \text{ costanti} \in W).$

$F(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) = \lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_m \omega_m$

F in $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(F) = \{0_V\}$

F sur $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\, F = W$

Proposizione.

- F è iniettiva se e solo se $f_1, \ldots, f_n$ è linearmente indipendente; $w_1, \ldots, w_n$ lin ind
- F è suriettiva se e solo se $\mathrm{Span}\{f_1, \ldots, f_n\} = W$; $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle = W$
- F è biiettiva se e solo se $f_1, \ldots, f_n$ è una base di W.

Commento. La dimostrazione di questa proposizione segue quasi direttamente dalle definizioni. Viene lasciata al lettore.

Spazi nullo e colonna, spazi nucleo e immagine

Ricordiamo che a ciascuna matrice A di tipo $m \times n$ abbiamo associato alcuni spazi vettoriali, in particolare:

- lo spazio nullo di A

$\mathcal{N}(A) =$ insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = \underline{0}$;

- lo spazio colonna di A

$\mathcal{C}(A) = \mathrm{Span}\{f_1, \ldots, f_n\}$ ($f_j \in \mathbb{R}^m$ colonne di A);

e abbiamo visto la relazione fra le loro dimensioni

$\dim(\mathcal{N}(A)) + \dim(\mathcal{C}(A)) = n$.

Indicata con $\mathrm{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'applicazione lineare data da

$\mathrm{F}(x) = Ax$

possiamo descrivere questi spazi come segue:

- $\mathcal{N}(A)$ è l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ che vengono mandati nel vettore nullo di $\mathbb{R}^m$:

$\mathcal{N}(A) = \{x : \ \mathrm{F}(x) = \underline{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$;

- $\mathcal{C}(A)$ è l'insieme delle immagini in $\mathbb{R}^m$ dei vettori di $\mathbb{R}^n$:

$\mathcal{C}(A) = \{\mathrm{F}(x); \ x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

Lo spazio nullo e lo spazio colonna della matrice si dicono rispettivamente anche "spazio nucleo" e "spazio immagine" dell'applicazione F. Più in generale, si ha la

Definizione. Sia $\mathrm{F} : V \to W$ un'applicazione lineare fra due spazi vettoriali V, W;

- il nucleo di F è l'insieme dei vettori che F manda nel vettore nullo di W :

$\mathrm{Ker}(F) = \{x : \ \mathrm{F}(x) = \underline{0}\} \subseteq V$;

- l'immagine di F è l'insieme dei vettori immagine che F crea in W :

$\mathrm{Im}(F) = \{\mathrm{F}(x); \ x \in V\} \subseteq W$.

Si verifica che Ker(F) e Im(F) sono sottospazi, rispettivamente di V e W.

Esempio.

$$\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{F}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 & x_1 = x_2 \\ -x_1 + x_2 = 0 & x_1 = x_2 \end{cases}$$

$x_1 - \cancel{x_2} = 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(F) &= \mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= (\text{ soluzioni di } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \\
&= (\text{ insieme dei } \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ con } x_2 \text{ libera }) \\
&= \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(F) &= \mathcal{C}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\}
\end{aligned}$$

$x - 1$

$$= \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.\}$$

Esempio. Siano date: una base a_1, a_2 di uno spazio vettoriale V, due vettori w_1, w_2 linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale W, l'applicazione lineare $\mathrm{F} : V \to W$ tale che

$$\mathrm{F}(a_1) = w_1, \ \mathrm{F}(a_2) = w_2$$

esplicitamente,

$$\mathrm{F}(xa_1 + ya_2) = xw_1 + yw_2 \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\mathrm{Ker(F)} = \{xa_1 + ya_2 ; xw_1 + yw_2 = \underline{0}\} = \{\underline{0}\};$$

$$\mathrm{Im(F)} = \{xw_1 + yw_2; \ x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Span}\{w_1, w_2\}.$$

Al teorema sulla relazione fra le dimensioni dello spazio nullo e spazio colonna di una matrice corrisponde il seguente teorema sulla relazione fra le dimensioni dello spazio nucleo e spazio immagine di un'applicazione lineare

Teorema. Siano: $\mathrm{F} : V \to W$ un'applicazione lineare, $z_1, \dots, z_p$ una bse di Ker(F), $\mathrm{F}(v_1), \dots, \mathrm{F}(v_q)$ una base di Im(F). Allora $z_1, \dots, z_p, v_1, \dots, v_q$ è una base di V, quindi

$$\dim(\mathrm{KerF}) + \dim(\mathrm{ImF}) = \dim(V).$$

Dimostrazione.

- Consideriamo l'uguaglianza

$$x_1z_1 + \cdots + x_pz_p + y_1v_1 + \cdots + y_qv_q = \underline{0};$$

applicando F ad entranbi i membri, essendo F lineare, si ha

$$x_1\mathrm{F}(z_1) + \cdots + x_p\mathrm{F}(z_p) + y_1\mathrm{F}(v_1) + \cdots + y_q\mathrm{F}(v_q) = \underline{0};$$

essendo $z_1, \ldots, z_n \in \mathrm{Ker}(\mathrm{F})$, si ha

$$y_1\mathrm{F}(v_1) + \cdots + y_q\mathrm{F}(v_q) = \underline{0};$$

essendo $\mathrm{F}(v_1), \ldots, \mathrm{F}(v_q)$ linearemente indipendenti, si ha $y_1 = \cdots = y_q = 0$; quindi

$$x_1z_1 + \cdots + x_pz_p = \underline{0};$$

essendo $z_1, \ldots, z_p$ linearemente indipendenti, si ha $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Quindi $z_1, \ldots, z_p, v_1, \ldots, v_q$ è linearmente indipendente.

- Sia $v \in V$. Poichè $\mathrm{F}(v_1), \ldots, \mathrm{F}(v_q)$ genera $\mathrm{Im}(\mathrm{F})$, esistono dei numeri $y_1, \ldots, y_q$ tali che

$$\mathrm{F}(v) = y_1\mathrm{F}(v_1) + \cdots + y_q\mathrm{F}(v_q);$$

essendo F lineare, si ha

$$\mathrm{F}(v - y_1v_1 - \cdots - y_qv_q) = \underline{0};$$

essendo $z_1, \ldots, z_p$ una base di $\mathrm{Ker}(\mathrm{F})$, esistono dei numeri $x_1, \ldots, x_p$ tali che

$$v - y_1v_1 - \cdots - y_qv_q = x_1z_1 + \cdots + x_pz_p;$$

quindi

$$v = x_1z_1 + \cdots + x_pz_p + y_1v_1 + \cdots + y_qv_q.$$

Quindi $z_1, \ldots, z_p, v_1, \ldots, v_q$ genera V.

DETERMINANTE

Singolarità di matrici e annullamento del determinante

Matrici triangolari

Una matrice quadrata si dice "triangolare superiore" se è del tipo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}, \quad \dots$$

in altri termini, indicati con a_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ gli elementi della generica matrice $n \times n$, una matrice è triangolare superiore se e solo se soddisfa le condizioni

$$\begin{aligned} 0 &= a_{2,1} \\ 0 &= a_{3,1} = a_{3,2} \\ \vdots &= \\ 0 &= a_{n,1} = a_{n,2} = \cdots = a_{n,n-1} = 0; \end{aligned}$$

in sintesi:

$$a_{ij} = 0 \text{ per ogni } n \geq i > j \geq 1.$$

Il determinante di una matrice triangolare superiore è semplice:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = ac, \quad \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = adf, \quad \dots$$

in altri termini, il determinate di una matrice A triangolare superiore $n \times n$ è il prodotto degli elementi diagonali di A :

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Analogamente, si definiscono le matrici triangolari inferiori; il determinante di una matrice triangolare inferiore è il prodotto degli elementi diagonali.

Operazione elementare

L'operazione elementare "sommare a una colonna un multiplo di un'altra colonna" lascia invariato il determinante. Infatti:

$$\begin{aligned} \det[\cdots, a_i, \cdots, a_j + r a_i, \cdots] &= \det[\cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots] + r \det[\cdots, a_i, \cdots, a_i, \cdots] \\ &= \det[\cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots]. \end{aligned}$$

Questa proprietà permette di ricondurre il calcolo del determinante di una matrice al determinante di una matrice triangolare. Ad esempio:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 2(-1)1 = -2$$

(operazioni elementari: $2° - 2 \cdot 1°$, $3° - 2 \cdot 2°$)

Teorema principale

Teorema. Per ogni matrice A quadrata $n \times n$,

(1) se A è singolare allora $\det A = 0$, e

(2) se A è non singolare allora $\det A \neq 0$.

In altri termini,

A è singolare se e solo se $\det(A) = 0$.

Dimostrazione. Sia $A = [a_1, \cdots, a_n]$ $(a_j \in \mathbb{R}^n)$. Per ogni colonna a_j, indichiamo la sua 1°, 2°, ... componente con $(a_j)_1, (a_j)_2, \ldots$

(1) Se A è singolare, allora $a_1, \ldots, a_n$ sono linearmente dipendenti; allora $a_1 = \underline{0}$ oppure esiste una colonna a_i (con $i \geq 2$) che è combinazione lineare delle precedenti,

$$a_i = \sum_{1 \leq j < i} r_j a_j$$

allora nel primo caso $\det(A) = \det[\underline{0}, a_2, \cdots] = 0$ e nel secondo caso

$$\begin{aligned}
\det(A) = \det[a_1, \cdots, a_{i-1}, \sum_{1 \leq j < i} r_j a_j, a_{i+1}, \cdots] \\
&= \sum_{1 \leq j < i} r_j \det[a_1, \cdots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \cdots] \\
&= \sum_{1 \leq j < i} r_j 0 \\
&= 0;
\end{aligned}$$

quindi in ogni caso $\det(A) = 0$.

(2) Indichiamo con a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ gli elementi della generica matrice $n \times n$. Sia data una matrice A' non singolare.

1° passo; le colonne di A' sono linearmente indipendenti, quindi la 1° è $\neq \underline{0}$; supponiamo per semplicità che A' soddisfi la condizione

$$a_{11} \neq 0;$$

sommando alle colonne dalla 2° in poi opportuni multipli della 1°, trasformiamo A' in una A'' che soddisfa (la condizione precedente e) la condizione

$$a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = 0;$$

2° passo; le colonne di A'' sono linearmente indipendenti, quindi la 2° è $\neq \underline{0}$; supponiamo per semplicità che A'' soddisfi la condizione

$$a_{22} \neq 0;$$

sommando alle colonne dalla 3° in poi opportuni multipli della 2°, trasformiamo A'' in una A''' che soddisfa (le condizioni precedenti e) la condizione

$$a_{23} = a_{24} = \cdots = a_{2n} = 0;$$

3° passo; le colonne di A''' sono linearmente indipendenti, quindi la 3° è $\neq \underline{0}$; supponiamo per semplicità che A''' soddisfi la condizione

$$a_{33} \neq 0;$$

...
procedendo in questo modo si giunge ad una matrice $A^{(n)}$ triangolare inferiore con elementi diagonali tutti $\neq 0$.

Durante il processo il determinante della matrice rimane invariato, quindi

$$\det(A') = \det(A^{(n)}) \neq 0.$$

Esempio. $\det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$, quindi la matrice è non singolare.

Esempio. Sia p un parametro $\in \mathbb{R}$.

$$\det \begin{bmatrix} p & -1 & 1 \\ 1 & p & -1 \\ -1 & 1 & p \end{bmatrix} = p^3 + 3p$$

quindi la matrice è singolare se e solo se $p^3 + 3p = 0$, essendo $p^3 + 3p = p(p^2 + 3)$, se e solo se $p = 0$.

Sistemi lineari e determinanti

Teorema. E' dato il sistema lineare di n equazioni in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = p,$$

con $a_1, \ldots, a_n, p$ costanti in $\mathbb{R}^n$.

1) Se $\det[a_1, \cdots, a_n] = 0$, allora il sistema non ha soluzioni oppure ne ha infinite;

2) Se $\det[a_1, \cdots, a_n] \neq 0$, allora il sistema ha una ed una sola soluzione; una formula per la soluzione è

$$x_i = \frac{\det[a_1, \cdots, \overset{i}{p}, \cdots, a_n]}{\det[a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n]} \qquad \text{per ogni } i = 1, \ldots, n.$$

dove il numeratore si ottiene dal denominatore sostituendo alla $i-$ma colonna a_i la colonna p.

Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite x_1, x_2, x_3 associato alla matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|c} p & -1 & 1 & 1 \\ 1 & p & -1 & 1 \\ -1 & 1 & p & 1 \end{array}\right]$$

$$\det \begin{bmatrix} p & -1 & 1 \\ 1 & p & -1 \\ -1 & 1 & p \end{bmatrix} = p^3 + 3p = p(p^2 + 3) = 0 \text{ se e solo se } p = 0.$$

Caso $p \neq 0$. Il sistema ha un'unica soluzione;

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & p & -1 \\ 1 & 1 & p \end{bmatrix}}{p^2 + 3p} = \frac{p^{+}3}{p^3 + 3p} = \frac{1}{p}$$

x_2, x_3 lasciate al lettore;

Caso $p = 0$ lasciato al lettore.

Commento. La formula deriva direttamente dalle proprietà del determinante. Proviamo quella per x_1. Ciascuna delle seguenti uguaglianze implica la successiva:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_j = p,$$

$$\det[\sum_{j=1}^{n} x_j a_j, a_2, \cdots, a_n] = \det[p, a_2, \cdots, a_n],$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \det[a_j, a_2, \cdots, a_n] = \det[p, a_2, \cdots, a_n],$$

$$x_1 \det[a_1, a_2, \cdots, a_n] = \det[p, a_2, \cdots, a_n]$$

$$x_1 = \frac{\det[p, a_2, \cdots, a_n]}{\det[a_1, a_2, \cdots, a_n]}.$$

Volume e determinante

Informalmente, un parallelepipedo è una configurazione che si ottiene da un cubo modificando le lunghezze dei lati e gli angoli fra i lati e conservando parallelismo e congruenza dei lati opposti.

Fatto. Il determinante di una matrice 3×3 ha il seguente significato geometrico:

Fissato un punto O dello spazio, ad ogni terna di vettori $a, b, c \in \mathcal{V}^3$ associamo il parallelepipedo con un vertice in O e tre lati i segmenti orientati uscenti da O che danno a, b, c (gli altri 9 lati sono allora determinati). Identificato $\mathcal{V}^3$ con $\mathbb{R}^3$ mediante un riferimento i, j, k per ogni $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $b = b_i i + b_2 j + b_3 k$, $c = c_i i + c_2 j + c_3 k$, si ha

$$\frac{\text{area del parallepipedo su } a, b, c}{\text{area del parallepipedo su } i, j, k} = |\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}|,$$

dove a destra compare il valore assoluto del determinante.

Prodotto di matrici, singolarità, determinante

Proposizione. Due matrici A, B quadrate $n \times n$ sono non singolari se e solo se il prodotto AB è non singolare.

Dimostrazione parziale. Supponiamo che A e B siano non singolari. Ciascuna delle seguenti uguaglianze implica la successiva

$(AB)x = \underline{0}$ $\qquad$ (x e $\underline{0}$ colonne $n \times 1$)

$A(Bx) = \underline{0}$;

$Bx = \underline{0}$;

$x = \underline{0}$;

ciò prova che le colonne di AB sono linearmente indipendenti, quindi AB è non singolare. (nel 2° e 3° passaggio abbiamo usato le ipotesi che le colonne di A e le colonne di B sono linearmente indipendenti).

Non proviamo che se AB è non singolare allora A e B sono non singolari.

La proposizione si può esprimere nella forma

$$\forall A, B \text{ quadrate moltiplicabili, } \det(AB) \neq 0 \text{ se e solo se } \det(A) \neq 0 \text{ e } \det(B) \neq 0.$$

Vale un risultato più forte:

Teorema Per ogni A, B quadrate moltiplicabili,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Non diamo dimostrazione.

Commento. Una conseguenza:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Infatti, ciascuna delle seguenti uguaglianze implica la successiva

$$AA^{-1} = \mathrm{I}_n, \;\; \det(AA^{-1}) = \det(\mathrm{I}_n), \;\; \det(A)\det(A^{-1}) = 1, \;\; \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

ORTOGONALITÀ E ORTONORM

Lunghezza, proprietà.

Sia V uno spazio vettoriale Euclideo. Ricordiamo che si definisce "lunghezza" di un vettore la radice quadrata del prodotto scalare del vettore con sè stesso

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}.$$

Le proprietà della lunghezza di vettori che abbiamo evidenziato negli spazi vettoriali geometrici valgono in generale:

Teorema. In ogni spazio vettoriale Euclideo V,

$$\begin{array}{l} \|v\| \geq 0; \quad \|v\| = 0 \text{ se e solo se } u = \underline{0}; \\ \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|; \\ \|rv\| = |r|\|v\| \end{array}$$

per ogni $u, v \in V$ e $r \in \mathbb{R}$.

La 1° segue direttamente dalle proprietà del prodotto scalare. La 2°, disuguaglianza triangolare, è la proprietà più profonda. A noi interessa la 3°; segue dalla definizione e dalle proprietà del prodotto scalare:

$$\|rv\| = \sqrt{(rv) \cdot (rv)} = \sqrt{r^2(v \cdot v)} = |r| \sqrt{v \cdot v} = |r| \, \|v\|.$$

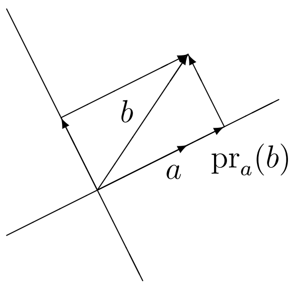
Ricordiamo che un vettore si dice "versore" se ha lunghezza 1. Ogni vettore non nullo $v \neq \underline{0}$, diviso per la sua lunghezza, diviene un versore, infatti

$$\|\frac{1}{\|v\|} v\| = \frac{1}{\|v\|}\|v\| = 1.$$

Terminologia, notazioni.

Abbiamo visto che, per ogni sottospazio 1− dimensionale $U \subseteq V$, ogni vettore b si scrive in un unico modo come somma di un vettore $\in U$, che si dice "proiezione ortogonale" di b su U, e un vettore $\perp U$. In altri termini, per ogni vettore $a \neq \underline{0}$, ogni vettore b si scrive in un unico modo come somma di un vettore multiplo di a, che si dice "proiezione ortogonale" di b su a, e un vettore $\perp a$. La prima formulazione è in linea di principio migliore della seconda, in quanto l'operazione di proiezione ortogonale dipende solo dal sottospazio, ma la seconda formulazione risulta spesso più comoda. Indichiamo la proiezione ortogonale di b su a con $\mathrm{pr}_a(b)$; dunque si ha

$\mathrm{pr}_a(b) = r\,a, \;$ con $r = \frac{a \cdot b}{a \cdot a}$.



Nel seguito, al posto di dire "i vettori ... sono a due a due ortogonali" diremo un po' più in breve "la sequenza dei vettori ... è ortogonale". Inoltre, al posto di dire "i vettori ... sono a due a due ortogonali e di lunghezza 1" diremo un po' più in breve "la sequenza dei vettori ... è ortonormale". Poichè ogni vettore non nullo si può normalizzare, da ogni base ortogonale si può ricavare una base orrtonormale.

Abbiamo anche visto che le coordinate di un vettore v rispetto a una base ortogonale $a_1, \ldots, a_n$ di V, sono i prodotti scalari di v con gli a_i sui quadrati scalari degli a_i :

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i \cdot v}{a_i \cdot a_i} a_i;$$

possiamo anche dire che ogni vettore v si scompone come somma delle sue proiezioni ortogonali sui vettori della base:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{pr}_{a_i}(b).$$

Basi ortogonali.

Fatti.

Ogni spazio vettoriale Euclideo geometrico $\mathcal{V}^n$ $(n = 1, 2, 3)$ possiede qualche base ortogonale, e quindi qualche base ortonormale. Al solito, identifichiamo i vettori con segmenti orientati uscenti da un punto fissato. Più in dettaglio:

$\mathcal{V}^1$: ogni vettore $b \neq \underline{0}$ è una base ortogonale; ci sono esattamente due versori, uno opposto dell'altro; ciscuno dei due versori è una base ortonormale; non ci son altre basi ortonormali.
$\mathbb{R}$: ogni $b \neq 0$ è una base ortogonale; 1 è una base ortonormale, -1 è una base ortonormale, non ce ne sono altre.

$\mathcal{V}^2$: per ogni retta passante per O, esiste un'unica retta per O ad essa ortogonale; comunque scelti due vettori b_1, b_2 diversi da $\underline{0}$ sulle due rette, si ha una base ortogonale; tutte le basi ortogonali si ottengono così; su ciascuna retta si hanno esattamente due versori, dunque a partire da due rette ortogonali si ottengono esattamente 4 basi ortonormali.
$\mathbb{R}^2$: un esempio di base ortogonale:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

normalizzando, si ha una base ortonormale:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{20}} \\ \frac{2}{\sqrt{20}} \end{bmatrix}$$

(si può semplificare).

$\mathcal{V}^3$: per ogni retta passante per O, e per ciascuna delle infinite rette per O ad essa ortogonali, esiste un'unica retta per O ortogonale ad esse; comunque scelti tre vettori b_1, b_2, b_3 diversi da $\underline{0}$ sulle tre rette, si ha una base ortogonale; tutte le basi ortogonali si ottengono così; su ciascuna retta si hanno esattamente due versori, dunque a partire da tre rette a due a due ortogonali si ottengono esattamente 8 basi ortonormali.
$\mathbb{R}^3$: un esempio di base ortogonale:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

normalizzando si ha una base ortonormale ...

Per ogni n intero positivo fissato, nello spazio vettoriale Euclideo $\mathbb{R}^n$ si ha che la sequenza dei vettori unità $e_1, e_2, \dots, e_n$ è una base ortonormale. Infatti,

$$e_i \cdot e_i = \sum_{h=1}^{n} (e_i)_h^2 = (e_i)_i^2 = 1^2 = 1$$

$$e_i \cdot e_j = \sum_{h=1}^{n} (e_i)_h (e_j)_h = (e_i)_i (e_j)_i + (e_i)_j (e_j)_j = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Problemi:

Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle soluzioni dell'equazione $x - y - 2z = 0$. Geometricamente, U è un piano vettoriale, quindi posside basi ortogonali (e ortonormali). Come se ne può costruire una?

Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ costituito dalle soluzioni dell'equazione $x_1 - x_2 - 2\,x_3 - 3\,x_4 = 0$. U posside basi ortogonali?

Un qualsiasi spazio vettoriale Euclideo possiede basi ortogonali? come si possono costruire?

Teorema (Gram-Schmidt). Sia $v_1, v_2, \dots, v_p$ una sequenza lin. indip. in uno spazio vett. Euclideo. Allora: esiste un'unica sequenza $u_1, u_2, \dots, u_p$ ortogonale tale che per ogni $i = 1, 2, \dots, p$

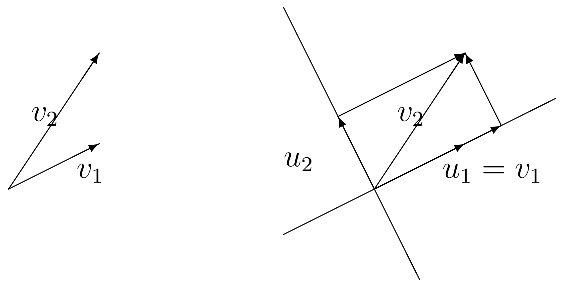
$u_1, \dots, u_i$ è una base di $\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_i\}$ in cui la $i-$ma coord. di v_i è 1;

in particolare:

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1; \\
v_2 &= \mathrm{pr}_{u_1}(v_2) + u_2; \\
v_3 &= \mathrm{pr}_{u_1}(v_3) + \mathrm{pr}_{u_2}(v_3) + u_3; \\
&\vdots \\
v_p &= \sum_{j=1}^{p-1} \mathrm{pr}_{u_j}(v_p) + u_p.
\end{aligned}$$

Esplicitamente, la sequenza $u_1, u_2, \dots, u_p$ è $\quad \mathrm{pr}_a b = \left(\frac{a \cdot a}{a \cdot b} \right) a$

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 \\
u_2 &= v_2 - \mathrm{pr}_{u_1}(v_2) \\
u_3 &= v_3 - \mathrm{pr}_{u_1}(v_3) + \mathrm{pr}_{u_2}(v_3). \\
&\vdots \\
u_p &= v_p - \sum_{j=1}^{p-1} \mathrm{pr}_{u_j}(v_p).
\end{aligned}$$



In particolare, dal Teorema segue che

ogni spazio vett. Euclideo di dim. finita possiede qualche base ortogonale.

Commenti. E' chiaro che una sequenza $u_1, u_2, \ldots, u_p$ soddisfacente le date condizioni, se esiste, deve soddisfare la prima serie di uguaglianze, quindi deve essere data esplicitamente dalle seconda serie di uguaglianze, quindi è unica. In sostanza, bisogna mostrare che queste espressioni sono ben definite (cioè $u_i \neq \underline{0}$ per ogni i) e definiscono una sequenza ortogonale. Non lo facciamo.

Esempio Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle soluzioni dell'equazione

$$x - y - 2\,z = 0.$$

Una base di U è

$$(1, 1, 0),\ (2, 0, 1).$$

A questa sequenza corrisponde la base ortogonale di U

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 1, 0) \\ u_2 &= (2, 0, 1) - \mathrm{pr}_{(1,1,0)}(2, 0, 1) \\ &= (2, 0, 1) - \tfrac{2}{2}(1, 1, 0) \\ &= (1, -1, 1) \end{aligned}$$

Esempio Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ costituito dalle soluzioni dell'equazione

$$x_1 - x_2 - 2\,x_3 - 3\,x_4 = 0$$

Una base di U è

$$(1, 1, 0, 0),\ (2, 0, 1, 0),\ (3, 0, 0, 1).$$

A questa sequenza corrisponde la base ortogonale di U

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 1, 0, 0) \\ u_2 &= (2, 0, 1, 0) - \mathrm{pr}_{(1,1,0,0)}(2, 0, 1, 0) \\ &= (2, 0, 1, 0) - \tfrac{2}{2}\,(1, 1, 0, 0) \\ &= (1, -1, 1, 0) \\ u_3 &= (3, 0, 0, 1) - \mathrm{pr}_{(1,1,0,0)}(3, 0, 0, 1) - \mathrm{pr}_{(1,-1,1,0)}(3, 0, 0, 1) \\ &= (3, 0, 0, 1) - \tfrac{3}{2}\,(1, 1, 0, 0) - \tfrac{3}{3}\,(1, -1, 1, 0) \\ &= (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1, 1). \end{aligned}$$

Matrici ortogonali

Il Teorema secondo il quale le colonne di una matrice quadrata sono lin. indip. se e solo se le righe della matrice sono lin. indip. se e solo se la matrice è invertibile ha il seguente analogo ortogonale:

Teorema. Per ogni matrice quadrata A le seguenti affermazioni sono equivalenti

(1) la sequenza $c_1, \ldots, c_n$ delle n colonne di A è ortonormale;

(2) la sequenza $r_1, \ldots, r_n$ delle n righe di A è ortonormale;

(3) la matrice A è invertibile con inversa la sua trasposta:

$$A^T A = \mathrm{I}_n = AA^T.$$

Esempio.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{20}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{20}} \end{bmatrix}$$

Le colonne sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$, le righe sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$, e la matrice è invertibile con inversa la sua trasposta

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{20}} & \frac{2}{\sqrt{20}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{20}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{20}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{20}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{20}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{20}} & \frac{2}{\sqrt{20}} \end{bmatrix}.$$

Dimostrazione.

La (1) equivale al sistema di uguaglianze

$$c_i^T \cdot c_j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \qquad \text{per ogni } i, j = 1, \ldots, n$$

che equivale all'uguaglianza

$$\begin{bmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \vdots \\ c_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

cioè

$$A^T A = \mathrm{I}_n;$$

la (1) inoltre, implica che (le righe sono lin. indip. e quindi che) A è invertibile; quindi la (1) equivale alla (3).

Analogamente si prova che la (2) equivale alla (3).

Definizione. Una matrice quadrata che soddisfa una (quindi ciascuna) delle condizioni del teorema si dice "matrice ortogonale".

SIST. LINEARI SPAZI NUCLI

Prodotto righe per colonne e operazioni sulle righe/colonne

L'operazione di prodotto di righe per colonne è compatibile con le operazioni vettoriali sulle righe e sulle colonne, specificamente: per ogni tre righe a, a', a'' $(1\times n)$, tre colonne b, b', b'' $(n \times 1)$, e numero reale r, si ha

(1) $\quad (a' + a'')b = a'b + a''b$

(2) $\quad a(b' + b'') = ab' + ab''$

(3) $\quad (r\,a)b = r\,(ab) = a(r\,b)$

(La (1) si prova come segue. Il 1° mebro e il 2° membro, per definizione, sono

$$\sum_{i=1}^{n}(a' + a'')_i b_i = \sum_{i=1}^{n}(a'_i + a''_i)b_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a'_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a''_i b_i;$$

sono uguali per la proprietà commutativa della somma e la proprietà distributiva. Analogamente per la (2). Si lascia al lettore di provare la (3).)

Da queste proprietà segue che più in generale per ogni tre righe a, a', a'' $(1\times m)$, matrice B $(m \times n)$, tre colonne c, c', c'' $(n \times 1)$, e numero reale r, si ha

(1) $\quad (a' + a'')B = a'B + a''B$

(2) $\quad B(c' + c'') = Bc' + Bc''$

(3) $\quad B(r\,c) = r\,(Bc), \quad (r\,a)B = r\,(aB).$

Vederemo un poco più avanti come queste proprietà giochino nello studio dei sottospazi.

Insieme delle soluzioni di un sistema lineare - Esempi

Alcune equazioni lineari in 2 incognite

Consideriamo alcune equazioni lineari in 2 incognite x, y

$$ax + by = c$$

con a, b, c costanti in $\mathbb{R}$; ricordiamo che una soluzione dell'equazione è una coppia di numeri reali che sostituiti ordinatamente ad x e y rende vero l'uguale. Per ciascuna equazione, descriviamo l'insieme delle soluzioni in termini vettoriali. Fissato un riferimento nel piano, identifichiamo coppie ordinate con vettori rappresentati da segmnenti orientati uscenti dall'origine.

(2.1) $\quad x + y = 0;$

per ogni valore di una delle incognite, ad esempio la x, esiste uno ed un solo valore dell'altra, nell'esempio la y, che rende vero l'uguale;

le soluzioni dell'equazione sono date dalla regola

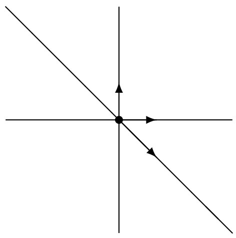
$\quad y = -x$ e x libera;

sono le coppie

$$\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad (x \in \mathbb{R});$$

formano il sottospazio Span$\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\}$, con base $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,

rappresentato da una retta vettoriale per l'origine, con un suo riferimento



(2.1′) $\qquad x = 0;$

le soluzioni dell'equazione sono date dalla regola

$x = 0$ e y libera;

sono le coppie

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (y \in \mathbb{R});$$

formano ...

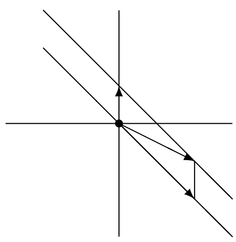
(2.1″) $\qquad x + y = 1;$

le soluzioni sono le coppie

$$\begin{bmatrix} x \\ -x+1 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (x \in \mathbb{R});$$

formano l'insieme Span$\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, che non è un sottospazio,

rappresentato dalla somma di una retta vettoriale e di un vettore fisso.



Un'equazione e un sistema lineari in 3 Incognite

Consideriamo un'equazione lineare e un sistema lineare in 3 incognite x, y, z e descriviamo l'insieme delle soluzioni in termini vettoriali. Fissato un riferimento nello spazio, identifichiamo terne ordinate con vettori rappresentati da segmenti orientati uscenti dall'origine.

(3.1) $\qquad x + y + z = 0;$

per ogni valore di due delle incognite, ad esempio la y e la z, esiste uno ed un solo valore della terza, nell'esempio la x, che rende vero l'uguale; le soluzioni dell'equazione sono date dalla regola

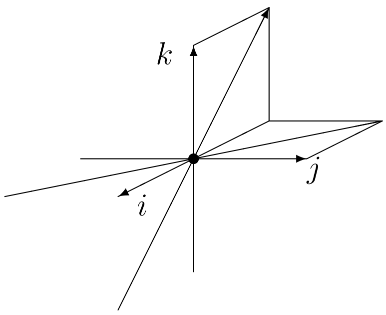
$x = -y - z$ e y, z libere;

sono le terne

$$\begin{bmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (y, z \in \mathbb{R});$$

formano il sottospazio Span$\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$, con base $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

rappresentato da un piano vettoriale per l'origine, con un suo riferimento.



Cambiando la scelta delle due incognite libere, si dà un'altra descrizione dello spazio delle soluzioni, che porta ad un'altra base.

$$(3,2) \qquad \begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

applichiamo la procedura di eliminazione

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x - \ \ z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

le soluzioni del sistema sono date dalla regola

$x = z$, $y = -2z$, e z libera;

sono le terne

$$\begin{bmatrix} z \\ -2z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (z \in \mathbb{R}),$$

formano il sottospazio Span$\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\}$, con base $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, rappresentato da una retta vettoriale per l'origine, con un suo riferimento.

Un sistema lineare in 4 incognite.

Consideriamo li sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

applichiamo la procedura di eliminazione

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 - \ \ x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

le soluzioni del sistema sono date dalla regola

$$\begin{array}{l} x_1 = \quad\ \ x_3 + 2x_4 \\ x_1 = -2x_3 - 3x_4 \\ x_3 \quad \text{libera} \\ x_3 \quad \text{libera} \end{array}$$

sono le quaterne

$$\begin{bmatrix} x_3 + 2x_4 \\ -2x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_3 \bar{s}_3 + x_4 \bar{s}_4 \qquad (x_3, x_4 \in \mathbb{R}),$$

formano il sottospazio $\mathrm{Span}\{\bar{s}_3, \bar{s}_4\}$, con base $\bar{s}_3, \bar{s}_4$,

Sistemi lineari omogenei e sottospazi

Abbiamo visto che l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x+y=1$ nelle incognite x, y non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, ma si può dedurre dall'insieme delle soluzioni di $x+y=0$, che è un sottospazio. Questo fatto particolare è un'istanza di un fatto generale.

Definizione. Un sistema lineare si dice "omogeneo" se tutte le equazioni del sistema hanno termine noto nullo, cioè è del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}, \quad \text{in breve} \quad Ax = \underline{0}.$$

Proposizione. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $Ax = \underline{0}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (A matrice $m \times n$).

Dimostrazione. (1) Se $s', s'' \in \mathbb{R}^n$ sono due soluzioni, allora anche $s' + s''$ è una soluzione. Infatti, da $As' = \underline{0}$ e $As'' = \underline{0}$, sommando termine a termine, si ottiene $As' + As'' = \underline{0} + \underline{0}$, da cui $A(s' + s'') = \underline{0}$. (2) Se $r \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{R}^n$ è una soluzione, allora anche rs è una soluzione. Infatti, da $As = \underline{0}$, moltiplicando entrambi i membri per r, si ottiene $r(As) = r\underline{0}$, da cui $A(rs) = \underline{0}$. (3) $\underline{0}$ è una soluzione. Infatti $A\underline{0} = \underline{0}$.

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo non è mai un sottospazio ma, tranne nel caso in cui sia vuoto, si può sempre identificare, come insieme, con un sottospazio.

Proposizione. Se un sistema lineare $Ax = b$ ha una soluzione s^*, allora le soluzioni di $Ax = b$ sono tutti e soli i vettori del tipo

$$s^* + v,$$

dove v varia fra le soluzioni el sistema lineare omogeneo $Ax = \underline{0}$. In breve, indicati con $\mathcal{S}$ e con $\mathcal{S}_0$ gli insieme delle soluzioni di $Ax = b$ e di $Ax = \underline{0}$:

$$\mathcal{S} = s^* + \mathcal{S}_0.$$

Dimostrazione. (1) Da una parte, se v una soluzione di $Ax = \underline{0}$, allora $s^* + v$ è una soluzione di $Ax = b$. Infatti, da $As^* = b$ e $Av = \underline{0}$, sommando membro a membro, si ha $As^* + Av = b + \underline{0}$, da cui $A(s^* + v) = b$. (2) Dall'altra, se s è una soluzione di $Ax = b$, allora s si può scrivere $s = s^* + (s - s^*)$ e $s - s^*$ è una soluzione di $Ax = \underline{0}$.

Definzione. Diciamo "spazio nullo" di una matrice A, ed indichiamo con $\mathcal{N}(A)$, lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = \underline{0}$; in simboli, indicato con n il numero delle colonne di A,

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax = \underline{0}\}.$$

Dimensione dello spazio nullo di una matrice

Abbiamo visto nei vari esempi che applicando una procedura di eliminazione a un sistema lineare omgeneo si trova una descrizione delle soluzioni che porta ad identificare una base dello spazio delle soluzioni. Un'analisi attenta della procedura porta a stabilire una relazione generale fra le dimensioni dello spazio riga e colonna di una matrice, cioè il rango di una matrice, e la dimensione dello spazio nullo della matrice.

Teorema 1. Data una matrice A con n colonne $c_1, \ldots, c_n$, si consideri il sistema lineare omogeneo $Ax = \underline{0}$ nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$. Se le r colonne $c_{i_1}, \ldots, c_{i_r}$ sono una base di $\mathcal{C}(A)$, allora

(1) ciascuna delle r incognite $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ è funzione delle altre $n - r$ incognite, che sono libere;

(2) le $n - r$ soluzioni ottenute assegnando a una incognita libera 1 e alle altre 0 sono una base dello spazio delle soluzioni.

(3) $\quad \dim(\mathcal{N}(A)) = n - \mathrm{r}(A)$. $\longrightarrow$ numero soluzioni = numero incognite − numero righe indipendenti

Dimostrazione, qualche aspetto.

(1) Il sistema lineare omogeneo si scrive

$$x_1c_1 + \cdots + x_nc_n = \underline{0}.$$

equivalentemente, posto $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$,

$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ $x_4 = -x_1 - x_3 = -x_2 - 2x_3$

$x_1 + x_3 = x_2 + 2x_3$ $x_3 = x_1 - x_2$

$$\sum_{i \in I} x_i c_i = -\sum_{j \notin I} x_j c_j;$$

essendo c_i $(i \in I)$ una base di $\mathcal{C}(A)$, per ogni sequenza di valori delle x_j $(j \notin I)$, esiste un'unica sequenza di valori delle x_i $(i \in I)$ che assieme alla prima sequenza dà una soluzione dell'equazione.

(3) Per la (2) si ha

$$\dim(\mathcal{N}(A)) = n - r = n - \dim(\mathcal{C}(A)) = n - \mathrm{r}(A).$$

Il teorema descrive teoricamente come la procedura di eliminazione, applicata a una sequenza di colonne base di $\mathcal{C}(A)$, porta ad identificare una base di $\mathcal{N}(A)$ e trae una conseguenza dulla dimensione. L'utilità pratica del Teorema consiste nel permettere di calcolare la dimensione di $\mathcal{N}(A)$ senza doverne determinare una base. (Esistono forme più fini del Teorema che hanno anche altre utilità).

Esempio (1).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

le 2 righe di A sono indipendenti, $\mathrm{r}(A) = \dim(\mathcal{R}(A)) = 2$, quindi

$$\dim(\mathcal{N}(A)) = 5 - 2 = 3;$$

Esempio (2).

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$2 - 1$ $3 - 2, 1$ $5 - 3 = 2$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{matrix} \quad R_4 - R_3$$

Abbiamo trovato (cfr. es. p.49) che $\mathrm{r}(A) = 3$, quindi

$$\dim(\mathcal{N}(A)) = 5 - 3 = 2.$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix} \quad R_3 - R_2$$

Per la matrice trasposta

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

si ha $\mathrm{r}(A^T) = \mathrm{r}(A) = 3$, quindi

$$\dim(\mathcal{N}(A^T)) = 4 - 3 = 1.$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \end{matrix}\right.$$

$x_1 + x_3 + x_4 + \cancel{x_5} = 0$

$x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$

$-x_5 = 0$

$x_1 = s$ $x_2 = t$ $x_4 = v$

$x_3 = x_1 - x_2$

$x_5 = 0$

$(s, t, s-t, v, 0) = s(1,0,1,0,0) + t(0,1,-1,0,0) + e_4 t 0$

SPAZI VETTORIALI EUCLIDEI

3 Spazi vettoriali Euclidei

3.1 Esempi, Definizioni

$\mathcal{V}^n$ $(n \leq 3)$, lunghezza, ortogonalità

Fino ad avviso contrario, l'ambito del nostro discorso è uno qulasiasi fra retta piano, spazio, coi suoi vettori.

In geometria Euclidea è data una relazione primitiva di congruenza fra segmenti, che soddisfa certi assiomi che permettono di associare a ciascun segmento un numero reale, la lunghezza del segmento rispetto ad un segmento unità fissato.

Definiamo la lunghezza di un vettore come la lunghezza del segmento associato a un segmento orientato che dà il vettore,

$$(\text{lunghezza del vettore } AB) = (\text{lunghezza del segmento } AB);$$

questa definzione ha senso: un stesso vettore è dato da vari segmenti orientati, ma tutti questi segmenti orientati come segmenti hanno la stessa lunghezza.

Per ogni vettore v, poniamo

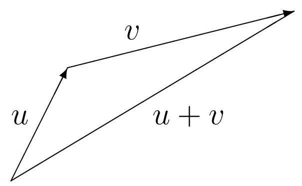
$$\|v\| = (\text{lunghezza di } v).$$

La funzione "lunghezza" da vettori a numeri reali è legate alle operazioni sui vettori dalle seguenti proprietà

$$\|v\| \geq 0; \quad \|v\| = 0 \text{ se e solo se } u = \underline{0}; \tag{1}$$
$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|; \tag{2}$$
$$\|rv\| = |r|\|v\| \tag{3}$$

per ogni $u, v \in V^n$ e $r \in \mathbb{R}$.

La seconda proprietà si può visualizzare come



E' equivalente all'affermazione "la lunghezza di un lato di un triangolo è minore o uguale alla somma delle lunghezze degli altri due lati"; per questo motivo si dice "disuguaglianza triangolare".

In gemetria Euclidea del piano si hanno una nozione primitiva di angolo fra due semirette ed una relazione primitiva di congruenza di angoli che soddisfano certi assiomi che permettono in particolare di definire la relazione di ortogonalità fra rette. Per indicare che due rette r ed s sono ortogonali, scriviamo $r \perp s$ e/o $s \perp r$.

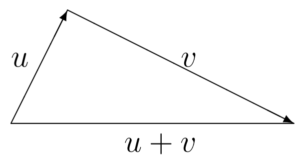
Queste nozioni e relazioni si trasferiscono allo spazio; in particolare, si dice che due rette r ed s dello spazio (eventualmente sghembe) sono ortogonali se e solo se, le rette r' ed s' ad esse parallele passanti per un punto T sono ortogonali nel piano che le contiene: $r \perp s$ se e solo se $r' \perp s'$.

Diciamo che due vettori non nulli u, v sono fra loro "ortogonali" e scriviamo $u \perp v$ se e solo se sono dati da segmenti orientati che stanno su rette fra loro ortogonali; per convenzione, diciamo inoltre che il vettore nullo è ortogonale ad ogni vettore:

$\underline{0} \perp v$ per ogni v.

La funzione lunghezza, la relazione di ortogonalità e l'operazione di somma di vettori sono legate dal teorema di Pitagora e dal suo inverso

$$u \perp v \quad \text{se e solo se} \quad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$



$\mathcal{V}^n$ $(n \leq 3)$, prodotto scalare

Fatto. Esiste uno ed un solo prodotto, detto "prodotto scalare" ed indicato con $\cdot$, che a coppie di vettori associa numeri reali, che è compatibile con le operazioni sui vettori, commutativo, e tale che il prodotto di un vettore con sé stesso è il quadrato della sua lunghezza

$$\begin{array}{ll} (u' + u'') \cdot v = u' \cdot v + u'' \cdot v, & \text{e analoga sul secondo fattore} \\ (r\, u) \cdot v = r\,(u \cdot v), & \text{e analoga sul secondo fattore} \\ u \cdot v = v \cdot u & \\ v \cdot v = \|v\|^2 & \end{array}$$

per ogni $u, v, u', u'', \ldots \in V^n$ e $r \in \mathbb{R}$.

Conseguenze. La lunghezza di un vettore si può ottenere come la radice quadrata del prodotto scalare del vettore con sè stesso, e due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è 0:

$$\begin{array}{l} \|v\| = \sqrt{v \cdot v}; \\ u \perp v \quad \text{se e solo se} \quad u \cdot v = 0 \end{array}$$

per ogni $u, v \in V^n$. La prima affermazione segue direttamente dalla definzione di prodotto scalare; la seconda affermazione si può provare come segue. Vale l'identità

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= (u+v)\cdot(u+v) \\ &= u\cdot u + u\cdot v + v\cdot u + v\cdot v \\ &= \|u\|^2 + 2\, u\cdot v + \|v\|^2 \end{aligned}$$

in breve

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,u\cdot v + \|v\|^2;$$

le seguenti affermazioni sono equivalenti

$u \cdot v = 0;$

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2;$

$u \perp v.$

(la 1° equivalenza segue dall'identità e la seconda è il th di Pitagora e suo inverso); dunque $u \cdot v = 0$ se e solo se $u \perp v$.

Un vettore di lunghezza 1 si dice "versore":

$$u \text{ versore} \quad \text{se e solo se} \quad \|u\| = 1 \quad \text{se e solo se} \quad u \cdot u = 1.$$

$\mathcal{V}^2$, formule

Siano i, j due versori ortogonali in $\mathcal{V}^2$, in termini di prodotto scalare tali che

$$i\cdot i = j\cdot j = 1, \quad i\cdot j = 0.$$

Le proprietà del prodotto scalare permettono di esprimere il prodotto scalare di due combinazioni lineari di i, j in funzione dei prodotti scalari di i e j e quindi di calcolarlo. Ad esempio

$$\begin{aligned}(2\,i + 3\,j)\cdot(4\,i + 5\,j) &= (2\,i)\cdot(4\,i) + (2\,i)\cdot(5\,j) + (3\,j)\cdot(4\,i) + (3\,j)\cdot(5\,j) \\ &= (2\cdot 4)\,1 + (2\cdot 5)\,0 + (3\cdot 4)\,0 + (3\cdot 5)\,1 \\ &= (2\cdot 4) + (3\cdot 5) = 23\end{aligned}$$

In generale, il prodotto scalare di due vettori è la somma dei prodotti delle coordinate dell'uno per le corrispondenti coordinate dell'altro: per ogni due vettori $u, v \in \mathcal{V}^2$, posto

$$u = u_1\,i + u_2\,j, \quad v = v_1\,i + v_2\,j,$$

si ha

$$u\cdot v = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Dunque, la lunghezza di un vettore e la condizione di ortogonalità in coordinate divengono

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$u \perp v \quad \text{se e solo se} \quad u_1v_1 + u_2v_2 = 0.$$

$\mathcal{V}^3$, formule

Siano i, j, k versori a due a due ortogonali in $\mathcal{V}^3$, in termini di prodotto scalare tali che

$$i\cdot i = j\cdot j = k\cdot k = 1, \quad i\cdot j = i\cdot k = j\cdot k = 0.$$

Le proprietà del prodotto scalare permettono di esprimere il prodotto scalare di due combinazioni lineari di i, j, k in funzione dei prodotti scalari di i, j, k e quindi di calcolarlo. Il prodotto scalare di due vettori risulta essere la somma dei prodotti delle coordinate dell'uno per le corrispondenti coordinate dell'altro: per ogni due vettori $u, v \in V^3$, posto

$$u = u_1\, i + u_2\, j + u_3\, k, \quad v = v_1\, i + v_2\, j + v_3\, k,$$

si ha

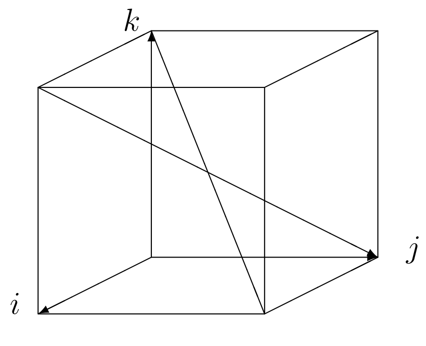
$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Dunque, la lunghezza di un vettore e la condizione di ortogonalità in coordinate divengono

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$u \perp v \quad \text{se e solo se} \quad u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0.$$

Esempio. In un cubo unitario, ogni diagonale lunga ha lunghezza $\sqrt{3}$ e ogni due diagonali lunghe non sono ortogonali.



Ad esempio, per le diagonali lunghe uscenti dai punti finali di k e di j,

$$d_1 = i + j - k, \quad d_2 = i - j + k,$$

si ha

$$\|d_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

e analogamente per d_2; e

$$d_1 \cdot d_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0, \quad \text{cioè} \quad d_1 \not\perp d_2.$$

Spazi vettoriali Euclidei

Definizione. Uno "spazio vettoriale Euclideo" è uno spazio vettoriale V con un'operazione, detta "prodotto scalare" e denotata con $\cdot$, che ad ogni $u, v \in V$ associa un numero

$u \cdot v \in \mathbb{R}$ che è compatibile con le operazioni vettoriali, commutativa, e tale che il quadrato scalare di un vettore $\neq \underline{0}$ sia positivo:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & (u' + u'') \cdot v = u' \cdot v + u'' \cdot v, & \text{analoga sul secondo fattore} \\
(2) & (r\,u) \cdot v = r\,(u \cdot v), & \text{analoga sul secondo fattore} \\
(3) & u \cdot v = v \cdot u & \\
(4) & v \cdot v \geq 0, \quad \text{con } v \cdot v = 0 \;\text{ solo per } v = \underline{0} &
\end{array}
$$

per ogni $u, v, u', u'', \ldots \in V$ e $r \in \mathbb{R}$.
Si definisce "lunghezza" di un vettore la radice quadrata del quadrato scalare del vettore, e due vettori si dicono "ortogonali" se e solo se il loro prodotto scalare è 0:

$$
\begin{array}{l}
\|v\| = \sqrt{v \cdot v}; \\
u \perp v \quad \text{se e solo se} \quad u \cdot v = 0
\end{array}
$$

Spazio vettoriale Euclideo $\mathbb{R}^n$

Sia n un intero positivo fissato. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ consideriamo il prodotto che associa a due $n-$ple un numero reale dato da

$$u \cdot v = u^T v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

(u e v sono identificati con vettori colonna $n \times 1$). Questo prodotto soddisfa le condizioni (1), (2) per le proprietà del prodotto di righe per colonne rispetto alle operazioni vettoriali e soddisfa la (3) per la proprietà commutativa del prodotto di numeri reali. Inoltre,

$$v \cdot v = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geq 0, \qquad \text{ed è} = 0 \;\text{ solo per } v = \underline{0},$$

in quanto in $\mathbb{R}$ i quadrati sono ≥ 0, solo 0 ha quadrato 0, le somme di sequenze di numeri ≥ 0 sono ≥ 0, e fra queste solo le somme di sequenze di 0 sono 0.

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, con questo prodotto scalare, si dice "spazio vettoriale Euclideo $n-$dimensionale standard".

Per definizione, la lunghezza di un vettore e la relazione di ortogonalità fra due vettori sono date da

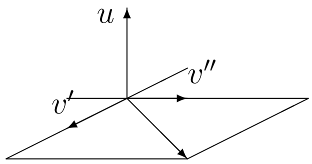
$$
\begin{cases}
\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1,\cdots,n} v_i^2} \\
u \perp v \quad \text{se e solo se} \quad \sum_{i=1,\cdots,n} u_i v_i = 0.
\end{cases}
$$

3.2 Ortogonalità

Di regola, nel seguito identifichiamo i vettori geometrici con segmenti orientati uscenti da un punto fissato. Mostriamo come alcune proprietà e costruzioni sui vettori geometrici si estendono a proprietà e costruzioni in spazi vettoriali euclidei qualsiasi.

Proprietà.

Negli spazi vettoriale Euclidei geometrici, la relazione di ortogonalità possiede le seguenti proprietà: se un vettore è ortogonale a un secondo vettore, allora il secondo è ortogonale al primo; se un vettore è ortogonale a due vettori in direzioni diverse, allora il vettore è ortogonale a tutti i vettori sul piano dei due vettori.



Queste proprietà valgno in generale, specificamente:

Proposizione. Sia V uno spazio vettoriale Euclideo. Allora

$$\text{se} \quad u \perp v \quad \text{allora} \quad v \perp u$$

$$\text{se} \quad u \perp v', v'' \quad \text{allora} \quad u \perp (\alpha' v' + \alpha'' v'')$$

per ogni $u, v, v', v'' \in V$ e $\alpha', \alpha'' \in \mathbb{R}$.

Infatti:

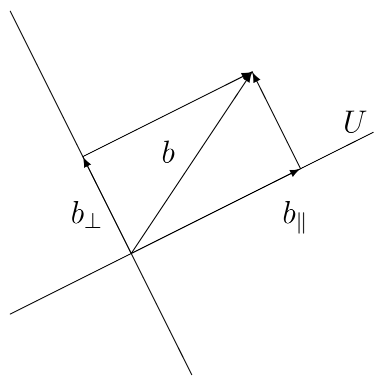
$u \perp v$ significa $u \cdot v = 0$ implica (per la (3)) $v \cdot u = 0$ significa $v \perp u$.

$u \perp v', v''$ significa $u \cdot v' = u \cdot v'' = 0$ implica (per le (1),(2)) $u \cdot (\alpha' v' + \alpha'' v'') = \alpha'(u \cdot v') + \alpha''(u \cdot v'') = \alpha' 0 + \alpha'' 0 = 0$, significa $u \perp (\alpha' v' + \alpha'' v'')$.

Proiezioni ortogonali.

Negli spazi vettoriali geometrici, si può effettuare la proiezione ortogonale di un vettore su una retta vettoriale.

Fatto. Siano U una retta vettoriale in uno spazio vettoriale Euclideo $\mathcal{V}^n$ $(n = 2, 3)$. Ogni vettore b si scompone in un unico modo come somma di un vettore $b_\parallel$ in U ed un vettore $b_\perp$ ortogonale a U; la componente $b_\parallel$ si dice "proiezione ortogonale" di b su U.

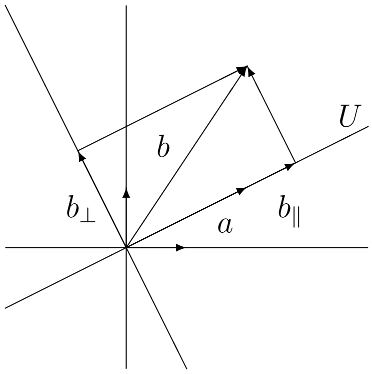


Di seguito mostriamo come questo fatto possa essere dedotto, e una formula esplicita possa essere ricavata, usando solo il prodotto scalare.

Per fissare le idee, identificato $\mathcal{V}^2$ con $\mathbb{R}^2$ mediante un riferimento di versori ortogonali, condideriamo

il sottospazio U delle soluzioni di $x - 2y = 0$, che ha una base $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

il vettore $\qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.



Consideriamo le condizioni

$$\begin{cases} b = b_\parallel + b_\perp \\ b_\parallel \in U \\ b_\perp \perp U \end{cases};$$

essendo a una base di U, le condizioni si possono riscrivere

$$\begin{cases} b = b_\parallel + b_\perp \\ b_\parallel = r\,a \\ b_\perp \cdot a = 0 \end{cases}, \text{ dove } r \text{ è un'incognita in } \mathbb{R};$$

inserendo la 2° uguaglianza nella 1° si ha

$$b = r\,a + b_\perp;$$

moltiplicando a per entrambi i membri ed usando la 3° condizione si ha

$$a \cdot b = a \cdot (r\,a + b_\perp)$$

$$a \cdot b = r\,(a \cdot a) + a \cdot b_\perp$$

$$a \cdot b = r\,(a \cdot a);$$

essendo $a \neq \underline{0}$, l'equazione ha l'unica soluzione

$$r = \frac{a \cdot b}{a \cdot a}.$$

Abbiamo che il sistema di condizioni ha un'unica soluzione, data da

$$b_\parallel = r\,a, \text{ con } r = \frac{a \cdot b}{a \cdot a},$$

$$b_\perp = b - b_\parallel,$$

dove a è una base di U.

Si lascia al lettore di verificare che il valore dell'espressione trovata per $b_\parallel$ non dipende dalla base a e che $b_\perp = b - b_\parallel$ è ortogonale ad U.

Nell'esempio, $a \cdot b = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 7$ e $a \cdot a = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5$, quindi

$$b_\parallel = \tfrac{7}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poiché abbiamo usato solo le proprietà del prodotto scalare, abbiamo provato una proposizione valida in ogni spazio vettoriale Euclideo, che permette di dare una defnzione di proiezione ortogonnale e una relativa formula. Precisamente:

Proposizione. Siano V uno spazio vettoriale Euclideo, U un sottospazio 1-dimensionale di V e $b \in V$. Allora:

(1) b si scompone in un unico modo come somma di un vettore $b_\parallel \in U$ ed un vettore $b_\perp$ ortogonale a U;

(2) se $a \in U$ è una base di U, allora $b_\parallel = r\,a$, con $r = \dfrac{a \cdot b}{a \cdot a}$.

La componente $b_\parallel$ di b in U si dice "proiezione ortogonale" di b su U.

Indipendenza lineare, Basi, coordinate

Negli spazi vettoriali geometrici, due vettori non nulli fra loro ortogonali hanno direzioni diverse e così sono linearmente indipendenti e tre vettori non nulli a due a due ortogonali non sono complanari e così sono linearmente indipendenti. In generale, si ha

Proposizione. In uno spazio vettoriale Euclideo, ogni sequenza di vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a due a due ortogonali, non nulli, è linearmente indipendente.

Dimostrazione. Consideriamo un'uguaglianza

$$(*) \qquad x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = \underline{0}$$

con $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$; moltiplicando v_1 per entrambi i membri e usando l'ipotesi che v_1 sia ortogonale a tutti gli altri si ha

$$\begin{aligned} &v_1 \cdot (x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n) = v_1 \cdot \underline{0} \\ &x_1(v_1 \cdot v_1) + x_2(\underbrace{\cancel{v_1 \cdot v_2}}_{0}) + \cdots + x_n(\underbrace{\cancel{v_1 \cdot v_n}}_{0}) = 0 \\ &x_1(v_1 \cdot v_1) = 0; \end{aligned}$$

usando l'ipotesi che $v_1 \neq \underline{0}$, si trova $x_1 = 0$. Allo stesso modo, moltiplicando i vari v_i per entrambi i membri della $(*)$ si trova che i vari x_i sono $= 0$.

In generale, calcolare le coordinate rispetto ad una base è complicato, richiede di risolvere un sistema lineare (con tante equazioni quante incognite). Invece, calcolare le coordinate rispetto ad una base di vettori fra loro ortrogonali è semplice:

Proposizione. Sia $v_1, v_2, \ldots, v_n$ una sequenza di n vettori a due a due ortogonali, non nulli, in uno spazio vettoriale Euclideo V di dimensione n. Allora $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una base di V e le coordinate di un $b \in V$ rspetto ad essa sono date da

$$\frac{b \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dimostrazione. Per la Proposizione precedente, gli n vettori sono linearmente indipendenti e, essendo in uno spazio vettoriale V di dimensione n, sono una base di V. Condideriamo l'uguaglianza

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = b$$

moltiplicando v_i per entrambi i membri e usando l'ipotesi di mutua ortogonalità, si ha

$$v_i \cdot (x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n) = v_i \cdot b$$

$$x_1(v_i \cdot v_1) + x_2(\underset{0}{\cancel{v_i \cdot v_2}}) + \cdots + x_n(\underset{0}{\cancel{v_i \cdot v_n}}) = v_i \cdot b$$

$$x_i(v_i \cdot v_i) = v_i \cdot b;$$

essendo $v_i \neq \underline{0}$, si ricava $x_i = \dfrac{v_i \cdot b}{v_i \cdot v_i}$.

Esempio. In $\mathcal{V}^2$, identificato con $\mathbb{R}^2$ mediante un riferimento di due versori ortogonali,

$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, sono fra loro ortogonali, quindi una base di $\mathcal{V}^2$;

le coordinate di $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$ rispetto alla base sono $\quad \dfrac{v_1 \cdot b}{v_1 \cdot v_1} = \dfrac{40}{13}$ e $\dfrac{v_2 \cdot b}{v_2 \cdot v_2} = \dfrac{8}{13}$;

quindi $\quad \frac{40}{13}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{8}{13}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$.