3 Spazi vettoriali Euclidei

3.1 Esempi, Definizioni

$\mathcal{V}^n$ ($n \leq 3$), lunghezza, ortogonalità

Fino ad avviso contrario, l'ambito del nostro discorso è uno qulasiasi fra retta piano, spazio, coi suoi vettori.

In geometria Euclidea è data una relazione primitiva di congruenza fra segmenti, che soddisfa certi assiomi che permettono di associare a ciascun segmento un numero reale, la lunghezza del segmento rispetto ad un segmento unità fissato.

Definiamo la lunghezza di un vettore come la lunghezza del segmento associato a un segmento orientato che dà il vettore,

$$(\text{lunghezza del vettore } AB) = (\text{lunghezza del segmento } AB);$$

questa definzione ha senso: un stesso vettore è dato da vari segmenti orientati, ma tutti questi segmenti orientati come segmenti hanno la stessa lunghezza.

Per ogni vettore v, poniamo

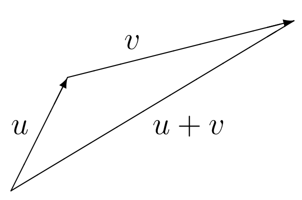
$$\|v\| = (\text{lunghezza di } v).$$

La funzione "lunghezza" da vettori a numeri reali è legate alle operazioni sui vettori dalle seguenti proprietà

$$\|v\| \geq 0; \quad \|v\| = 0 \text{ se e solo se } u = \underline{0}; \tag{1}$$
$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|; \tag{2}$$
$$\|rv\| = |r|\|v\| \tag{3}$$

per ogni $u, v \in V^n$ e $r \in \mathbb{R}$.

La seconda proprietà si può visualizzare come



E' equivalente all'affermazione "la lunghezza di un lato di un triangolo è minore o uguale alla somma delle lunghezze degli altri due lati"; per questo motivo si dice "disuguaglianza triangolare".

In gemetria Euclidea del piano si hanno una nozione primitiva di angolo fra due semirette ed una relazione primitiva di congruenza di angoli che soddisfano certi assiomi che permettono in particolare di definire la relazione di ortogonalità fra rette. Per indicare che due rette r ed s sono ortogonali, scriviamo $r \perp s$ e/o $s \perp r$.

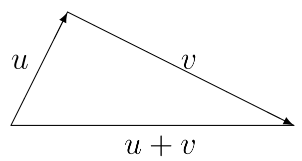
Queste nozioni e relazioni si trasferiscono allo spazio; in particolare, si dice che due rette r ed s dello spazio (eventualmente sghembe) sono ortogonali se e solo se, le rette r' ed s' ad esse parallele passanti per un punto T sono ortogonali nel piano che le contiene: $r \perp s$ se e solo se $r' \perp s'$.

Diciamo che due vettori non nulli u, v sono fra loro "ortogonali" e scriviamo $u \perp v$ se e solo se sono dati da segmenti orientati che stanno su rette fra loro ortogonali; per convenzione, diciamo inoltre che il vettore nullo è ortogonale ad ogni vettore:

$\underline{0} \perp v$ per ogni v.

La funzione lunghezza, la relazione di ortogonalità e l'operazione di somma di vettori sono legate dal teorema di Pitagora e dal suo inverso

$$u \perp v \quad \text{se e solo se} \quad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$



$\mathcal{V}^n$ $(n \leq 3)$, prodotto scalare

Fatto. Esiste uno ed un solo prodotto, detto "prodotto scalare" ed indicato con $\cdot$, che a coppie di vettori associa numeri reali, che è compatibile con le operazioni sui vettori, commutativo, e tale che il prodotto di un vettore con sé stesso è il quadrato della sua lunghezza

$$\begin{aligned}
&(u' + u'') \cdot v = u' \cdot v + u'' \cdot v, \qquad \text{e analoga sul secondo fattore} \\
&(r\,u) \cdot v = r\,(u \cdot v), \qquad \text{e analoga sul secondo fattore} \\
&u \cdot v = v \cdot u \\
&v \cdot v = \|v\|^2
\end{aligned}$$

per ogni $u, v, u', u'', \ldots \in V^n$ e $r \in \mathbb{R}$.

Conseguenze. La lunghezza di un vettore si può ottenere come la radice quadrata del prodotto scalare del vettore con sè stesso, e due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è 0:

$$\begin{aligned}
&\|v\| = \sqrt{v \cdot v}; \\
&u \perp v \quad \text{se e solo se} \quad u \cdot v = 0
\end{aligned}$$

per ogni $u, v \in V^n$. La prima affermazione segue direttamente dalla defìnzione di prodotto scalare; la seconda affermazione si può provare come segue. Vale l'identità

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= (u+v) \cdot (u+v) \\
&= u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v \\
&= \|u\|^2 + 2\,u \cdot v + \|v\|^2
\end{aligned}$$

in breve
$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\, u \cdot v + \|v\|^2;$$
le seguenti affermazioni sono equivalenti

$u \cdot v = 0;$

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2;$

$u \perp v.$

(la 1° equivalenza segue dall'identità e la seconda è il th di Pitagora e suo inverso); dunque $u \cdot v = 0$ se e solo se $u \perp v$.

Un vettore di lunghezza 1 si dice "versore":
$$u \text{ versore} \quad \text{se e solo se} \quad \|u\| = 1 \quad \text{se e solo se} \quad u \cdot u = 1.$$

$\mathcal{V}^2$, **formule**

Siano i, j due versori ortogonali in $\mathcal{V}^2$, in termini di prodotto scalare tali che
$$i \cdot i = j \cdot j = 1, \quad i \cdot j = 0.$$

Le proprietà del prodotto scalare permettono di esprimere il prodotto scalare di due combinazioni lineari di i, j in funzione dei prodotti scalari di i e j e quindi di calcolarlo. Ad esempio
$$\begin{aligned}(2\,i + 3\,j) \cdot (4\,i + 5\,j) &= (2\,i) \cdot (4\,i) + (2\,i) \cdot (5\,j) + (3\,j) \cdot (4\,i) + (3\,j) \cdot (5\,j) \\ &= (2 \cdot 4)\, 1 + (2 \cdot 5)\, 0 + (3 \cdot 4)\, 0 + (3 \cdot 5)\, 1 \\ &= (2 \cdot 4) + (3 \cdot 5) = 23\end{aligned}$$

In generale, il prodotto scalare di due vettori è la somma dei prodotti delle coordinate dell'uno per le corrispondenti coordinate dell'altro: per ogni due vettori $u, v \in \mathcal{V}^2$, posto
$$u = u_1\, i + u_2\, j, \quad v = v_1\, i + v_2\, j,$$
si ha
$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$
Dunque, la lunghezza di un vettore e la condizione di ortogonalità in coordinate divengono
$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$
$$u \perp v \quad \text{se e solo se} \quad u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0.$$

$\mathcal{V}^3$, **formule**

Siano i, j, k versori a due a due ortogonali in $\mathcal{V}^3$, in termini di prodotto scalare tali che
$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1, \quad i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0.$$

Le proprietà del prodotto scalare permettono di esprimere il prodotto scalare di due combinazioni lineari di i, j, k in funzione dei prodotti scalari di i, j, k e quindi di calcolarlo. Il prodotto scalare di due vettori risulta essere la somma dei prodotti delle coordinate dell'uno per le corrispondenti coordinate dell'altro: per ogni due vettori $u, v \in V^3$, posto

$$u = u_1\, i + u_2\, j + u_3\, k, \quad v = v_1\, i + v_2\, j + v_3\, k,$$

si ha

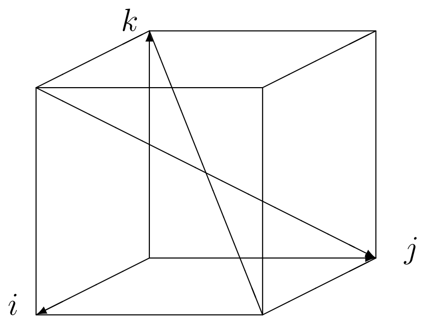
$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Dunque, la lunghezza di un vettore e la condizione di ortogonalità in coordinate divengono

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$u \perp v \quad \text{se e solo se} \quad u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0.$$

Esempio. In un cubo unitario, ogni diagonale lunga ha lunghezza $\sqrt{3}$ e ogni due diagonali lunghe non sono ortogonali.



Ad esempio, per le diagonali lunghe uscenti dai punti finali di k e di j,

$$d_1 = i + j - k, \quad d_2 = i - j + k,$$

si ha

$$\|d_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

e analogamente per d_2; e

$$d_1 \cdot d_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0, \quad \text{cioè} \quad d_1 \not\perp d_2.$$

Spazi vettoriali Euclidei

Definizione. Uno "spazio vettoriale Euclideo" è uno spazio vettoriale V con un'operazione, detta "prodotto scalare" e denotata con $\cdot$, che ad ogni $u, v \in V$ associa un numero

$u \cdot v \in \mathbb{R}$ che è compatibile con le operazioni vettoriali, commutativa, e tale che il quadrato scalare di un vettore $\neq \underline{0}$ sia positivo:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & (u' + u'') \cdot v = u' \cdot v + u'' \cdot v, & \text{analoga sul secondo fattore} \\
(2) & (r\,u) \cdot v = r\,(u \cdot v), & \text{analoga sul secondo fattore} \\
(3) & u \cdot v = v \cdot u & \\
(4) & v \cdot v \geq 0, & \text{con } v \cdot v = 0 \ \text{ solo per } v = \underline{0}
\end{array}
$$

per ogni $u, v, u', u'', \ldots \in V$ e $r \in \mathbb{R}$.
Si definisce "lunghezza" di un vettore la radice quadrata del quadrato scalare del vettore, e due vettori si dicono "ortogonali" se e solo se il loro prodotto scalare è 0:

$$
\begin{array}{l}
\|v\| = \sqrt{v \cdot v}; \\
u \perp v \quad \text{se e solo se} \quad u \cdot v = 0
\end{array}
$$

Spazio vettoriale Euclideo $\mathbb{R}^n$

Sia n un intero positivo fissato. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ consideriamo il prodotto che associa a due $n-$ple un numero reale dato da

$$u \cdot v = u^T v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

(u e v sono identificati con vettori colonna $n \times 1$). Questo prodotto soddisfa le condizioni (1), (2) per le proprietà del prodotto di righe per colonne rispetto alle operazioni vettoriali e soddisfa la (3) per la proprietà commutativa del prodotto di numeri reali. Inoltre,

$$v \cdot v = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geq 0, \qquad \text{ed è} = 0 \ \text{ solo per } v = \underline{0},$$

in quanto in $\mathbb{R}$ i quadrati sono ≥ 0, solo 0 ha quadrato 0, le somme di sequenze di numeri ≥ 0 sono ≥ 0, e fra queste solo le somme di sequenze di 0 sono 0.

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, con questo prodotto scalare, si dice "spazio vettoriale Euclideo $n-$dimensionale standard".

Per definizione, la lunghezza di un vettore e la relazione di ortogonalità fra due vettori sono date da

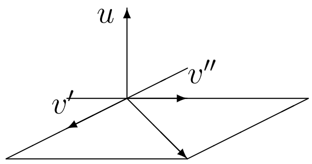
$$
\begin{cases}
\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1,\cdots,n} v_i^2} \\
u \perp v \quad \text{se e solo se} \quad \sum_{i=1,\cdots,n} u_i v_i = 0.
\end{cases}
$$

3.2 Ortogonalità

Di regola, nel seguito identifichiamo i vettori geometrici con segmenti orientati uscenti da un punto fissato. Mostriamo come alcune proprietà e costruzioni sui vettori geometrici si estendono a proprietà e costruzioni in spazi vettoriali euclidei qualsiasi.

Proprietà.

Negli spazi vettoriale Euclidei geometrici, la relazione di ortogonalità possiede le seguenti proprietà: se un vettore è ortogonale a un secondo vettore, allora il secondo è ortogonale al primo; se un vettore è ortogonale a due vettori in direzioni diverse, allora il vettore è ortogonale a tutti i vettori sul piano dei due vettori.



Queste proprietà valgno in generale, specificamente:

Proposizione. Sia V uno spazio vettoriale Euclideo. Allora

$$\text{se} \quad u \perp v \quad \text{allora} \quad v \perp u$$

$$\text{se} \quad u \perp v', v'' \quad \text{allora} \quad u \perp (\alpha' v' + \alpha'' v'')$$

per ogni $u, v, v', v'' \in V$ e $\alpha', \alpha'' \in \mathbb{R}$.

Infatti:

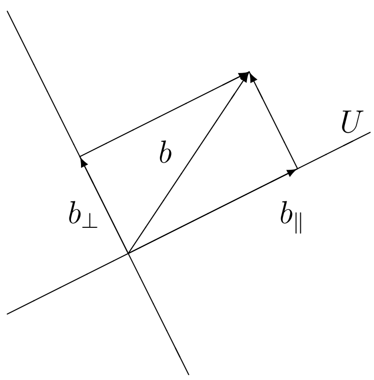
$u \perp v$ significa $u \cdot v = 0$ implica (per la (3)) $v \cdot u = 0$ significa $v \perp u$.

$u \perp v', v''$ significa $u \cdot v' = u \cdot v'' = 0$ implica (per le (1),(2)) $u \cdot (\alpha' v' + \alpha'' v'') = \alpha'(u \cdot v') + \alpha''(u \cdot v'') = \alpha' 0 + \alpha'' 0 = 0$, significa $u \perp (\alpha' v' + \alpha'' v'')$.

Proiezioni ortogonali.

Negli spazi vettoriali geometrici, si può effettuare la proiezione ortogonale di un vettore su una retta vettoriale.

Fatto. Siano U una retta vettoriale in uno spazio vettoriale Euclideo $\mathcal{V}^n$ $(n = 2, 3)$. Ogni vettore b si scompone in un unico modo come somma di un vettore $b_{\parallel}$ in U ed un vettore $b_{\perp}$ ortogonale a U; la componente $b_{\parallel}$ si dice "proiezione ortogonale" di b su U.

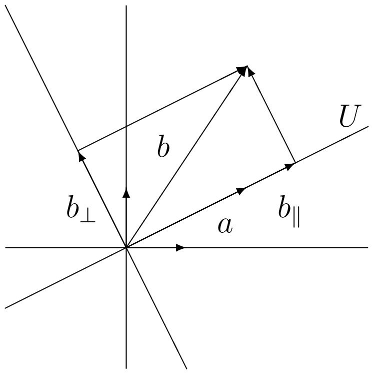


Di seguito mostriamo come questo fatto possa essere dedotto, e una formula esplicita possa essere ricavata, usando solo il prodotto scalare.

Per fissare le idee, identificato $\mathcal{V}^2$ con $\mathbb{R}^2$ mediante un riferimento di versori ortogonali, condideriamo

il sottospazio U delle soluzioni di $x - 2y = 0$, che ha una base $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

il vettore $\qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.



Consideriamo le condizioni

$$\begin{cases} b = b_\parallel + b_\perp \\ b_\parallel \in U \\ b_\perp \perp U \end{cases};$$

essendo a una base di U, le condizioni si possono riscrivere

$$\begin{cases} b = b_\parallel + b_\perp \\ b_\parallel = r\,a \\ b_\perp \cdot a = 0 \end{cases}, \text{ dove } r \text{ è un'incognita in } \mathbb{R};$$

inserendo la 2° uguaglianza nella 1° si ha

$$b = r\,a + b_\perp;$$

moltiplicando a per entrambi i membri ed usando la 3° condizione si ha

$$a \cdot b = a \cdot (r\,a + b_\perp)$$

$$a \cdot b = r\,(a \cdot a) + a \cdot b_\perp$$

$$a \cdot b = r\,(a \cdot a);$$

essendo $a \neq \underline{0}$, l'equazione ha l'unica soluzione

$$r = \frac{a \cdot b}{a \cdot a}.$$

Abbiamo che il sistema di condizioni ha un'unica soluzione, data da

$$b_\parallel = r\,a, \text{ con } r = \frac{a \cdot b}{a \cdot a},$$

$$b_\perp = b - b_\parallel,$$

dove a è una base di U.

Si lascia al lettore di verificare che il valore dell'espressione trovata per $b_\parallel$ non dipende dalla base a e che $b_\perp = b - b_\parallel$ è ortogonale ad U.

Nell'esempio, $a \cdot b = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 7$ e $a \cdot a = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5$, quindi

$$b_\parallel = \tfrac{7}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poiché abbiamo usato solo le proprietà del prodotto scalare, abbiamo provato una proposizione valida in ogni spazio vettoriale Euclideo, che permette di dare una definzione di proiezione ortogonnale e una relativa formula. Precisamente:

Proposizione. Siano V uno spazio vettoriale Euclideo, U un sottospazio 1-dimensionale di V e $b \in V$. Allora:

(1) b si scompone in un unico modo come somma di un vettore $b_\parallel \in U$ ed un vettore $b_\perp$ ortogonale a U;

(2) se $a \in U$ è una base di U, allora $b_\parallel = r\, a$, con $r = \dfrac{a \cdot b}{a \cdot a}$.

La componente $b_\parallel$ di b in U si dice "proiezione ortogonale" di b su U.

Indipendenza lineare, Basi, coordinate

Negli spazi vettoriali geometrici, due vettori non nulli fra loro ortogonali hanno direzioni diverse e così sono linearmente indipendenti e tre vettori non nulli a due a due ortogonali non sono complanari e così sono linearmente indipendenti. In generale, si ha

Proposizione. In uno spazio vettoriale Euclideo, ogni sequenza di vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a due a due ortogonali, non nulli, è linearmente indipendente.

Dimostrazione. Consideriamo un'uguaglianza

$$(*) \qquad x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = \underline{0}$$

con $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$; moltiplicando v_1 per entrambi i membri e usando l'ipotesi che v_1 sia ortogonale a tutti gli altri si ha

$$\begin{aligned} & v_1 \cdot (x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n) = v_1 \cdot \underline{0} \\ & x_1 (v_1 \cdot v_1) + x_2 \underbrace{\cancel{(v_1 \cdot v_2)}}_{0} + \cdots + x_n \underbrace{\cancel{(v_1 \cdot v_n)}}_{0} = 0 \\ & x_1 (v_1 \cdot v_1) = 0; \end{aligned}$$

usando l'ipotesi che $v_1 \neq \underline{0}$, si trova $x_1 = 0$. Allo stesso modo, moltiplicando i vari v_i per entrambi i membri della $(*)$ si trova che i vari x_i sono $= 0$.

In generale, calcolare le coordinate rispetto ad una base è complicato, richiede di risolvere un sistema lineare (con tante equazioni quante incognite). Invece, calcolare le coordinate rispetto ad una base di vettori fra loro ortrogonali è semplice:

Proposizione. Sia $v_1, v_2, \ldots, v_n$ una sequenza di n vettori a due a due ortogonali, non nulli, in uno spazio vettoriale Euclideo V di dimensione n. Allora $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una base di V e le coordinate di un $b \in V$ rispetto ad essa sono date da

$$\frac{b \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dimostrazione. Per la Proposizione precedente, gli n vettori sono linearmente indipendenti e, essendo in uno spazio vettoriale V di dimensione n, sono una base di V. Condideriamo l'uguaglianza

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = b$$

moltiplicando v_i per entrambi i membri e usando l'ipotesi di mutua ortogonalità, si ha

$$v_i \cdot (x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n) = v_i \cdot b$$
$$x_1(v_i \cdot v_1) + x_2(\underbrace{\cancel{v_i \cdot v_2}}_{0}) + \cdots + x_n(\underbrace{\cancel{v_i \cdot v_n}}_{0}) = v_i \cdot b$$
$$x_i(v_i \cdot v_i) = v_i \cdot b;$$

essendo $v_i \neq \underline{0}$, si ricava $x_i = \dfrac{v_i \cdot b}{v_i \cdot v_i}$.

Esempio. In $\mathcal{V}^2$, identificato con $\mathbb{R}^2$ mediante un riferimento di due versori ortogonali,

$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, sono fra loro ortogonali, quindi una base di $\mathcal{V}^2$;

le coordinate di $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$ rispetto alla base sono $\dfrac{v_1 \cdot b}{v_1 \cdot v_1} = \dfrac{40}{13}$ e $\dfrac{v_2 \cdot b}{v_2 \cdot v_2} = \dfrac{8}{13}$;

quindi $\frac{40}{13}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{8}{13}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$.