$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

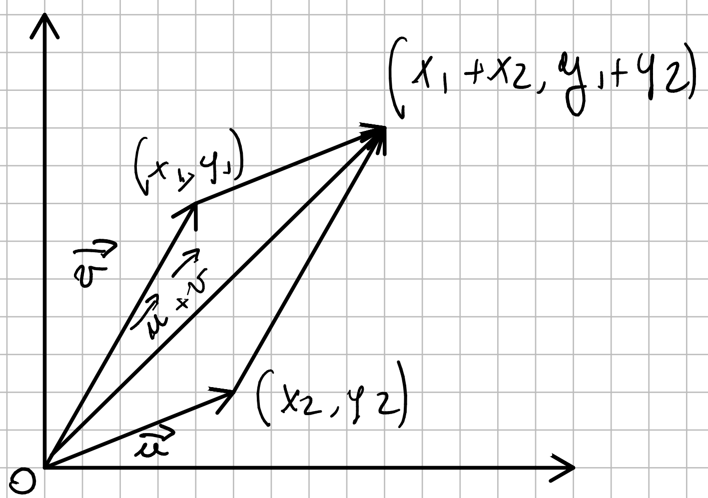
$\hookrightarrow$ insieme di coppie ordinate $((1,2) \neq (2,1))$

Somma

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

Prodotto ($\lambda \in \mathbb{R}$)

$$\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$



La somma di elementi in $\mathbb{R}^2$ gode delle seguenti proprietà:

- Commutativa
- Associativa
- Esistenza dell'elemento neutro
- Esistenza dell'opposto

- $\lambda((x,y)+(x',y')) = \lambda(x,y) + \lambda(x',y')$: distributive
- $(\lambda+\mu)(x,y) = \lambda(x,y) + \mu(x,y)$
- $\lambda\mu(x,y) = \lambda(\mu(x,y))$
- $1(x,y) = (x,y)$

Somma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

l'elemento neutro rispetto alla somma è la matrice nulla $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

SPAZI VETTORIALI

Si dice spazio vettoriale reale un insieme V munito di due operazioni dette somma e prodotto per scalari.

$$+ : V \times V \to V \qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \to V$$
$$(u, v) \to u+v \qquad (\lambda, u) \to \lambda u$$

che soddisfino le seguenti proprietà.

la somma è

commutativa, associativa, ammette un elemento neutro, ogni elemento di V ha un'opposto

Per il prodotto:

$1u = u$

$(\lambda \mu) u = \lambda (\mu u), \forall u \in V$

$\lambda (u+v) = \lambda u + \lambda v, \forall u, v \in V$

$(\lambda + \mu) u = \lambda u + \mu u \ \forall u \in V$

Gli elementi di uno spazio vettoriale si dicono vettori, mentre i numeri reali si dicono scalari.

Sia V uno spazio vettoriale, Allora valgono le seguenti proprietà:

- Il vettore nullo è unico (0_V)
- Se u è un vettore di V il suo opposto è unico e verrà indicato con $-u$
- $\lambda 0_V = 0_V \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $0u = 0_V \ \forall u \in V$
- $\lambda u = 0_V \to \lambda = 0 \vee u = 0_V$
- $(-\lambda) u = -\lambda u$

Si chiama spazio vettoriale banale lo spazio vettoriale costituito dal solo vettore nullo. Si indica con $\{0_V\}$

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Sia W un sottoinsieme di V. W è sottospazio di V se

- $W \neq \emptyset$
- W è chiuso rispetto alle somme: $\forall\, u, v \in W,\ u+v \in W$
- W è chiuso rispetto al prodotto per scalari: $\forall\, u \in W,\ \lambda u \in W$

Ogni spazio vettoriale V possiede sempre almeno due sottospazi: V stesso e il sottospazio banale

→ L'unione di due sottospazi di uno spazio vettoriale V non è sottospazio di V.

Siano W_1, W_2 due sottospazi di uno spazio vettoriale V. Allora $W_1 \cup W_2$ è uno sottospazio di $V \Leftrightarrow W_1 \subseteq W_2 \vee W_2 \subseteq W_1$

→ L'intersezione di due sottospazi di V è un sottospazio di V

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b = -c \right\}$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a+b+c+d = 0 \right\}$$

$$S \cap T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a+b+c+d = 0,\ b = -c \right\}$$

$$\begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ b = -c \end{cases} \Longrightarrow a+b-b+d = 0 \quad a = -d$$

$$S \cap T = \left\{ \begin{pmatrix} a & -c \\ c & -a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right.$$

$$v_1 = a_1x_1 - c_1x_2 + c_1x_3 - a_1x_4 = 0 \quad 0_V \in V$$

$$v_2 = a_2x_1 - c_2x_2 + c_2x_3 - a_2x_4$$

$$v_1 + v_2 = (a_1+a_2)x_1 - (c_1+c_2)x_2 + (c_1+c_2)x_3 - (a_1+a_2)x_4$$

$\in V$

$$\lambda v_1 = \lambda(a_1x_1 - c_1x_1 + c_1x_1 - a_1x_1) = \lambda a_1x_1 - \lambda c_1x_1 + c_1x_1 - \lambda a_1x$$

Uno spazio vettoriale è un insieme V di vettori, con un

- vettore nullo $\underline{0}$ e $\forall v$ un vettore opposto $(-v)$
- operazione di somma di vettori che soddisfa le proprietà della somma
- operazione di prodotto scalare che soddisfa le proprietà del prodotto scalare

(prodotto scalare)

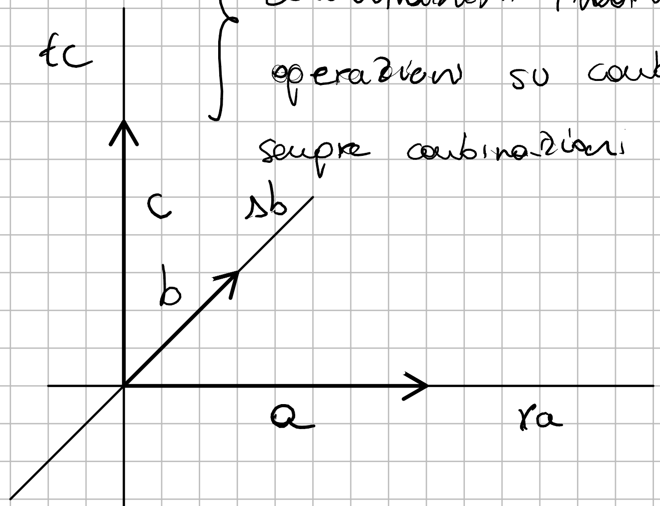
ra

$ra + sb$

$\underbrace{ra + sb + tc}_{R^3}$

combinazioni lineari

operazioni su combinazioni lineari sono sempre combinazioni lineari



Negli spazi vettoriali non è previsto il prodotto tra scalari e quello tra vettori

$a = (a_1, a_2, \dots a_n)$ fila ordinata di numeri reali

$a = b \Leftrightarrow a_i = b_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\underline{0} = \underline{0}_i = 0 \; \forall i = 1, \dots, n$

$-a = -a_i \; \forall i = 1, \dots, n$

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

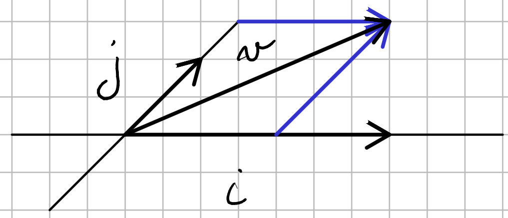
$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$

$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$

$a, b \in R^n \quad a+b \in R^n \quad (a+b)_i = a_i + b_i \; \forall i$

$r \in R, \; a \in R^n \quad ra \in R^n \quad (ra)_i = ra_i \; \forall i$

$a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$



$i, j \in V^2 \quad i \neq 0, j \not\parallel i$

$v = 0{,}7i + 1{,}3j$

Ogni $v \in V^2$ si scrive in un'unico modo come $v = \underbrace{v_1 i + v_2 j}_{\text{Coordinate di } v \text{ rispetto a } i, j}$

$V^2 \to R^2$

$v \mapsto e(v)$

Biiezione compatibile con le operazioni

$V^2 \simeq R^2$

$v \quad v$

$v^1 + v^2 = v$ in $V^2 \iff v^1 + v^2 = v$ in R^2

$rv^1 = v$ in $V^2 \iff rv^1 = v$ in R^2

$$v' = v_1' i + v_2' j = (v_1', v_2')$$
$$+$$
$$v'' = v_1'' i + v_2'' j = (v_1'', v_2'')$$
$$=$$
$$v = v_1 i + v_2 j = (v_1, v_2) = (v_1' + v_1'', v_2' + v_2'')$$

$a = (3, 1)$

$b = (1, 2)$

$c = (2, 2)$ c è comb lin di a e b?

$a + b = (2\gamma, 2\alpha) = 4, 3$ impossibil

$x(3,1) + y(1,2) = (2,2)$

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 3(2-2y) + y = 2 \\ x = 2 - 2y \end{matrix} \quad 6 - 6y + y = 2 \quad 4 = 5y \quad y = \frac{4}{5}$$

$$x = 2 - \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{10-2}{5} = \frac{8}{5}$$

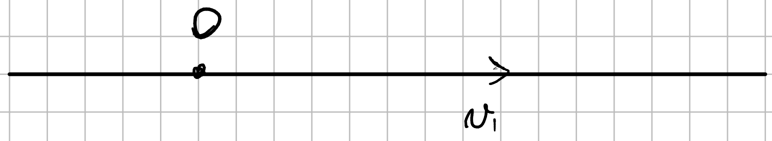
$$\frac{8}{5}(3,1) + \frac{4}{5}(1,2) = \left(\frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right) = \left(\frac{28}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

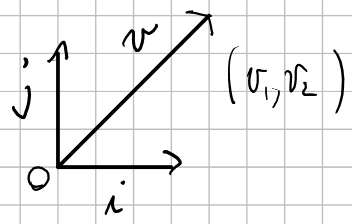
V^n $n = 1,2,3$

R^n $n \in \mathbb{N}$

V spazio vettoriale

$V^n = R^n$ per $n = 1,2,3$





$$(1,2)+(3,4) = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}$$

Negli spazi vettoriali

- Vale la legge di cancellazione: $a+b = b+c \Leftrightarrow a=b$

in qualsiasi spazio dove esiste l'elemento opposto, vale la legge di cancellazione

$$a+b+(-b) = c+b+(-b)$$
$$a = c$$

- legge di cancellazione del prodotto

$0 \cdot a = \underline{0}$, $r\underline{0} = \underline{0}$ $\quad ra = \underline{0} \rightarrow r=0 \vee a = \underline{0}$

$$0a + \cancel{0a} = (0+0)a = 0a$$
$$\underline{0} + \cancel{0a} = 0a$$

Se $r=0$ Fine

$r \neq 0$ $\exists \frac{1}{r}$: moltiplico entrambi per $\frac{1}{r}$

$$\frac{1}{r}(ra) = \frac{1}{r}\underline{0} \qquad 1a = \underline{0} \qquad a = \underline{0}$$