BASI

Con base si intende uno spazio vettoriale che racchiude tutte le informazioni necessarie a ricostruire lo spazio vettoriale stesso a partire da pochi vettori.
(base = sistema minimale di generatori)

Sia $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \neq \{0\}$, allora esiste un sottoinsieme di vettori linearmente indipendenti di $\{v_1, \dots, v_n\}$ che genera V.

Sia V sp. vett, $\{v_1, \dots, v_n\}$ si dice base se

- I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono lin ind.
- I vettori $v_1, \dots, v_n$ generano V.
- V è finitamente generato se esiste un insieme di generatori di V finito, cioè $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di $V \iff$ è un insieme minimale di generatori di V

$\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di $V \iff$ è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti

Se uno spazio vettoriale $V \neq \{\emptyset\}$ è generato da un numero finito di vettori $v_1, \dots, v_n$ allora esiste una base di V

Teorema del completamento

Sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ è una base di V (sappiamo che ne esiste sempre almeno una), allora $m \leq n$ e possiamo sempre aggiungere a $v_1, \dots, v_m$ $n-m$ vettori di B, in modo da ottenere una base di V.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia W un sottospazio vettoriale di V. Allora

- $\dim(W) \leq \dim(V)$
- $\dim(W) = \dim(V) \Leftrightarrow V = W$

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di n e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di n vettori di V. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V
- $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.
- $v_1, \dots, v_n$ generano V

Sia V sp. vett $\dim(V) = n$ se n è il max della lunghezza di una sequenza indipendente in V. $\rightarrow$ $e_1, \ldots, e_n$ (n finito)

$\dim(V^n) = n$

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Spazio vettoriale costituito solo da $\{\underline{0}\}$

$\underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$

$-\underline{0} = \underline{0}$

$r\underline{0} = \underline{0}$

$\hookrightarrow$ con queste def sono soddisfatte anche le altre proprietà di sp. vett

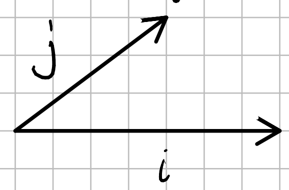
$\underline{0}$ dipendente

$\dim\{\underline{0}\} = 0$ $\hookrightarrow$ ha senso dal momento che V^0 è un punto.

V^0

Base:

sistema di riferimento per spazi vettoriali (vettori del piano/spazio), lo si usa x assegnare le coordinate



$\underbrace{i, j}_{\text{indipendenti}} \mid \forall v \in V^2 \rightarrow v = v_1 i + v_2 j$

modo unico x descrivere v usando solo vettori e scalari. $v = (v_1, v_2)$

Def

$b_1, b_2, \ldots, b_n \in V$ Base di V se $\forall v \in V$

$v = v_1 b_1 + v_2 b_2 + \cdots + v_n b_n$ è l'unico modo per descrivere un vettore v $(v_1, \ldots, v_n)$ coordinate di V

$\hookrightarrow$ I vettori unità formano una base $(2,3,4) =$

$(2,0,0) + (0,3,0) + (0,0,4) = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3$

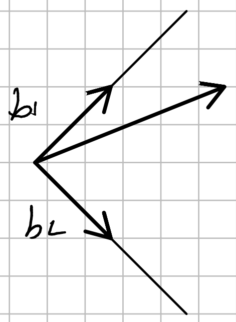
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

$\mathbb{R}^n$ $e_1, e_2, \dots, e_n$ base canonica

$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ vettore generico con base canonica in $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^2$ $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ -y \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x + y = v_1 \\ x - y = v_2 \end{cases} \qquad x = \frac{v_1 + v_2}{2} \qquad y = \frac{v_1 - v_2}{2}$$



$v(2,1) \longrightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

V^0 $\underline{0} = n\underline{0}$

Scrittura non unica, non ci sarebbe una sola coord.

$\{\underline{0}\}$ ha base di sequenza nulla $\emptyset$

Dimensione $\Longleftrightarrow$ Base

Teorema

Sia V uno sp. vett con $\dim(V) = n$, sia $b_1, \dots, b_n \in V$ indip, allora la stessa sequenza è una base di V

Dim

Sia $v \in V$, allora $b_1, \dots, b_n, v$ è dipendente. v è combinaz. lineare dei vettori precedenti.

$v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$. Dobbiamo considerare due possibili scritture di v e verificare che coincidono.

$$v = \begin{cases} \sum_{1}^{n} \beta_i' v_i \\ \sum_{1}^{n} \beta_i'' v_i \end{cases} \qquad \begin{aligned} n &= 2 \\ v &= \beta_1' v_1 + \beta_2' v_2 \\ v &= \beta_1'' v_1 + \beta_2'' v_2 \end{aligned}$$

$$\underline{0} = v - v = \beta_1' v_1 + \beta_2 v_2 - (\beta_1'' v_1 + \beta_2'' v_2) =$$
$$(\beta_1' - \beta_1'') b_1 + (\beta_2' - \beta_2'') b_2 = 0$$

$$(\beta_1' - \beta_1'')\, b_1 + (\beta_2' - \beta_2'')\, b_2 = 0$$

$\underbrace{(\beta_1'-\beta_1'')}_{=0}$ perché lin dip $\underbrace{(\beta_2'-\beta_2'')}_{=0}$

$$\begin{cases} \beta_1' - \beta_1'' = 0 \\ \beta_2' - \beta_2'' = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} \beta_1' = \beta_1'' \\ \beta_2' = \beta_2'' \end{matrix}$$

Th

Sia V sp. Vett, $b_1, \dots, b_n$ base di V $\rightarrow$ $\dim(V) = n$

(scambiate le ipotesi e la tesi)

$$b_1, \dots, b_n \text{ base di } V \Longleftrightarrow \dim(V) = n$$

$a, b \in \mathbb{R}^2$ (indipendenti)

$xa + yb = p$ $\longleftarrow$

a	b	p
a_1	b_1	p_1
a_2	b_2	p_2

Calcolare le coord di un vettore date la base

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = p_1 \\ a_2 x + b_2 y = p_2 \end{cases}$$

base $\begin{cases} a(2,3) \\ b(4,5) \end{cases}$

$p(8,9)$

a	b	p
2	4	8
3	5	9

$xa + yb = p$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ 3x + 5y = 9 \end{cases}$$

$x(2,3) + y(4,5) = 8, 9$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ 3x + 5y = 9 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 9 \end{array}\right) \quad R_2 - \tfrac{3}{2} R_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{array}\right) \quad R_2 - 3R_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} x + 2y = 4 \\ y = 3 \end{matrix} \quad x = -2$$