Diagonalizzazione ortogonale, teorema spettrale

Matrici simmetriche.

Le matrici simmetriche sono le matrici quadrate del tipo

$$[a], \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}, \dots$$

in altri termini, A quadrata $n \times n$ è diagonale se e solo se gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale discendente sono uguali:

$$A_{ij} = A_{ji} \qquad \forall i, j,$$

in breve, se e solo se la matrice A coincide con la sua trasposta:

$$A^T = A.$$

Osservazione. Ogni matrice diagonale è simmetrica.

Diagonalizzazione ortogonale. Teorema spettrale.

Fino ad avviso contrario, sia F un'applicazione lineare dello spazio vettoriale Euclideo $\mathbb{R}^n$ in sé, data esplicitamente come $\mathrm{F}(x) = Ax$ con A matrice costante.

Diciamo che F è "ortogonalmente diagonalizzabile" se esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$ tale che la matrice di F rispetto ad essa sia diagonale, equivalentemente, se esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$ di autovettori di F. In tal caso, normalizzando i vettori della base si ha una base ortonormale $\mathcal{A} : a_1, \dots, a_n$; dunque la matrice di questa base ha per inversa la sua trasposta (cfr. p.70-71), specificamente

$$[a_1 \cdots a_n]^{-1} = [a_1 \cdots a_n]^T.$$

La matrice di F rispetto alla base canonica è legata alla matrice diagonale rispetto alla base $\mathcal{A}$ dalla relazione

$$\begin{aligned} [\mathrm{F}]_{\mathcal{E}\mathcal{E}} &= [\mathrm{id}]_{\mathcal{E}\mathcal{A}}[\mathrm{F}]_{\mathcal{A}\mathcal{A}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{A}\mathcal{E}} \\ &= [a_1 \cdots a_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [a_1 \cdots a_n]^{-1} \\ &= [a_1 \cdots a_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [a_1 \cdots a_n]^T. \end{aligned}$$

Possiamo sintetizzare questa relazione con

$$A = PDP^T.$$

D è simmetrica

Osserviamo che

$$A^T = (PDP^T)^T = P^{T^T} D^T P^T = PDP^T = A.$$

In sintesi:

Se $\mathrm{F} \circlearrowleft \mathbb{R}^n$, $\mathrm{F}(x) = Ax$ *è ortogonalmente diagonalizzabile, allora* A *è simmetrica.*

Vale il viceversa:

Teorema spettrale. Se $\mathrm{F} \circlearrowleft \mathbb{R}^n$, $\mathrm{F}(x) = Ax$ con A è simmetrica, allora F è ortogonalmente diagonalizzabile.

Di seguito illustriamo questo teorema su un paio di esempi, diamo un frammento della dimostrazione, e diamo un'applicazione del teorema. In ciascuno degli esempi consideriamo un'applicazione lineare data da una matrice simmetrica e descriviamo le basi ortogonali e le basi ortonormali di autovettori.

Esempio 1.

$$\mathrm{F}(x) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x, \qquad (x \in \mathbb{R}^2)$$

Equazione degli autovettori ed autovalori:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

equazione caratteristica degli autovalori:

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 3\,\lambda - 4 = 0, \quad \lambda = 4, -1.$$

Ci sono 2 autovalori distinti; 2 autovettori ad essi associati, comunque scelti, sono linearmente indipendenti, quindi sono una base di $\mathbb{R}^2$. F è diagonalizzabile. Rispetto a ciascuna base di autovettori, il 1° in V_4 e il 2° in V_{-1}, la matrice di F è

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il teorema spettrale afferma che esiste qualche base ortogonale, e qualche anche ortonormale, di autovettori.

Autospazio V_4 : spazio delle soluzioni di

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} x = \underline{0}, \longrightarrow \{(2,1)\} \text{ base}$$

che equivale all'unica equazione

$$-x_1 + 2\,x_2 = 0; \text{ con soluzioni } \begin{bmatrix} 2\,x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} (x_2 \text{ libera}); \text{ una retta vettoriale.}$$

Autospazio V_{-1} : spazio delle soluzioni di

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x = \underline{0}, \longrightarrow \{(1,-2)\} \text{ base}$$

che equivale all'unica equazione

$$2\,x_1 + x_2 = 0; \text{ con soluzioni } \begin{bmatrix} x_1 \\ -2\,x_1 \end{bmatrix} (x_1 \text{ libera}); \text{ una retta vettoriale.}$$

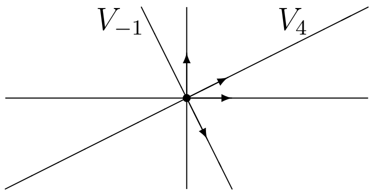
Osservazione. Ogni due vettori, uno in V_4 e uno in V_{-1}, sono fra loro ortogonali

$$\begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix} = 2x_2x_1 - x_2 2x_1 = 0.$$

Quindi: ogni base di $\mathbb{R}^2$ di autovettori è ortogonale. Per ottenere una base ortonormale, scegliamo una base ortogonale e la normalizziamo. Una delle possibili base ortonormali è

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2+-2^2}}$$

Questione per il lettore: quante sono le basi ortonormali di autovettori?



Esempio 2.

$$\mathrm{P}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} x, \qquad (x \in \mathbb{R}^3)$$

Equazione degli autovettori ed autovalori:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

equazione caratteristica degli autovalori:

$$\det(matrice) = 0, \;\; -\lambda^2(\lambda - 1) = 0, \;\; \lambda = 0, 1.$$

Autospazio V_1 : spazio delle soluzioni di

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

$$\dim(V_1) = 3 - \mathrm{rango}(matrice) = 3 - 2 = 1;$$

Autospazio V_0 : spazio delle soluzioni di

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} x = \underline{0};$$

$$\dim(V_0) = 3 - \mathrm{rango}(matrice) = 3 - 1 = 2;$$

Si ha

$$\dim(V_1) + \dim(V_0) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3),$$

quindi P è diagonalizzabile. Un qualsiasi autovettore in V_1 e due qualsiasi autovettori linermente indipendenti in V_0 formano una base di $\mathbb{R}^3$, rispetto a questa base la matrice di P è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il teorema spettrale afferma che esiste qualche base ortogonale, e qualche anche ortonormale, di autovettori.

Risolvendo le equazioni degli autospazi, si trova:

V_1 è l'insieme dei $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (x_3 libera); una base è $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

V_0 è l'insieme dei $\begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (x_2, x_3 libere); una base è $b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Si verifica che ogni due vettori, uno in V_1 e uno in V_0 sono fra loro ortogonali. Normalizzando a, applicando la procedura di Gram-Schmidt a b_1, b_2 e normalizzando si ottiene una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di P.

Frammenti di dimostrazione.

Fatto. Ogni applicazione lineare F $:\circlearrowleft \mathbb{R}^2$ con matrice canonica simmetrica

$$\mathrm{F}(x) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} x \qquad (x \in \mathbb{R}^2)$$

ha due autovalori $\in \mathbb{R}$, distinti o coincidenti; e' sempre diagonalizzabile.

Proviamo l'affermazione sull'esistenza degli autovalori reali. L'equazione caratteristica degli autovalori è

$$\det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{bmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0.$$

Il discriminante del trinomio è

$$\Delta = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0 \text{ sempre.}$$

Teorema. Sia F $:\circlearrowleft \mathbb{R}^n$, $\mathrm{F}(x) = Ax$, con A simmetrica. Ogni due autovettori a, b di F con autovalori associati α, β distinti sono fra loro ortogonali.

Dimostrazione. Moltiplicando la riga $(1 \times n)$ associata al vettore a per la matrice A per la colonna $(n \times 1)$ associata al vettore b si ottiene una matrice 1×1, un numero, che coincide col suo trasposto; tenendo conto della simmetria di A si ottiene

$$a^T A\ b = (a^T A\ b)^T = b^T A^T a^{T^T} = b^T A\ a.$$

Da una parte si ha

$$a^T (A\ b) = a^T (\beta b) = \beta (a^T b)$$

Dall'altra parte si ha

$$b^T (A\ a) = b^T (\alpha a) = \alpha (b^T a)$$

Quindi

$\beta(a^T b) = \alpha(b^T a)$

Si ha $a^T b = a \cdot b = b \cdot a = b^T a$ ed essendo $\beta \neq \alpha$ si ricava $a \cdot b = 0$, cioè $a \perp b$.

Esempio 2, ripresa.

$$\mathrm{P}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} x, \qquad (x \in \mathbb{R}^3)$$

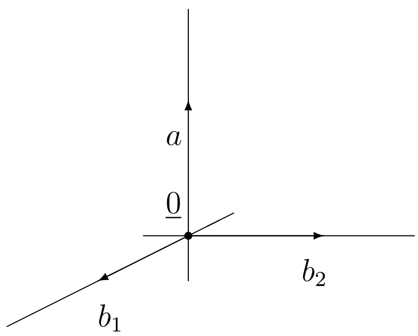
Osservazione:

P manda la base a, b_1, b_2 (con $a \perp b_1, b_2$) nella sequenza $a, \underline{0}, \underline{0}$;

Pr_a, proiezione ortogonale su a, manda la base a, b_1, b_2 nella sequenza $a, \underline{0}, \underline{0}$;

assumendo gli stessi valori su una base, le due applicazioni sono uguali:

$\mathrm{P} = \mathrm{Pr}_a$.



Usando autovettori ed autovalori abbiamo "capito" l'applicazione.

Si lascia al lettore di verificare direttamente l'uguaglianza delle due applicazioni, usando la formula per la proiezione ortogonale di un vettore su una retta vettoriale in uno spazio Euclideo (cfr. p.63 e seguenti).