APPL. LINEARI

Intermezzo

Abbiamo visto principalmente i seguenti esempi di spazi vettoriali

$\mathcal{V}^1 \quad \mathcal{V}^2 \quad \mathcal{V}^3$

$\mathbb{R}^1 \quad \mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}^3 \quad \mathbb{R}^4 \quad \ldots \quad \mathbb{R}^n \quad \ldots$

una volta fissato un riferimento, precisamente una base, ciascun spazio vettoriale geometrico $\mathcal{V}^n$ si può identificare, come spazio vettoriale col rispettivo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$. Per ogni intero positivo n si può considerare come analogo $n-$dimensionale degli spazi vettoriali geometrici uno spazio vettoriale $n-$dimensionale astratto; una volta fissata una base, tale spazio vettoriale si può identificare con il corrispondente spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Di regola, le definizioni, le proposizioni, i teoremi e le dimostrazioni sono più naturali per gli spazi vettoriali astratti.

Di seguito vedremo in particolare come le descrizioni della applicazioni lineari fra pazi vettoriali $\mathbb{R}^n$ si possano estendere a descrizioni di applicazioni lineari fra spazi vettoriali astratti.

D'ora innanzi, tranne avviso contrario, ogni spazio vettoriale considerato sarà tacitamente supposto di dimensione finita.

Applicazioni lineari

Siano V, W spazi vettoriali. Cosa possiamo dire delle applicazioni lineari da V a W?

Innanzitutto, l'unico elemento che sicuramente esiste in uno spazio vettoriale è il vettore nullo. Dunque possiamo definire un'applicazione $\mathrm{F} : V \to W$ ponendo $\mathrm{F}(v) = \underline{0} \in W$, per ogni $v \in V$. Questa applicazione è lineare, viene detta "applicazione nulla".

Teorema. Siano dati: uno spazio vettoriale V, una sequenza di vettori $a_1, \ldots, a_n$ base di V, uno spazio vettoriale W, una sequenza di vettori $w_1, \ldots, w_n$ di W. Allora esiste un'unica applicazione lineare $\mathrm{F} : V \to W$ tale che

$$\mathrm{F}(a_1) = w_1, \ldots, \mathrm{F}(a_n) = w_n;$$

esplicitamente, per ogni $v = x_1a_1 + \cdots + x_na_n \in V$,

$$\mathrm{F}(v) = x_1w_1 + \cdots + x_nw_n.$$

dat: $a_1, \ldots, a_n \in V$ e $w_1, \ldots, w_n \in W$

$\exists!\ F : V \to W \mid F(a_i) = w_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$

Commenti:

- Il senso del teorema è che, dato uno spazio vettoriale $n-$dimensionale V, una volta fissata una base in V, si possono identificare le applicazioni lineari da V verso uno spazio vettoriale W con le sequenze di n vettori di W : ogni applicazione lineare $V \to W$ si può rappresentare con un sequenza di n vettori di W, le immagini dei vettori base di V, e ogni sequenza di n vettori di W rappresenta una ed una sola applicazione lineare $V \to W$.

- L'ipotesi che $a_1, \ldots, a_n$ sia una base di V è fondamentale, in quanto assicura per ciascun vettore $v \in V$ l'esistenza e l'unicità della sequenza dei coefficienti $x_1, \ldots, x_n$ che servono per costruire $\mathrm{F}(v)$.

- L'unicità dell'applicazione F, con la sua descrizione esplicita, è ovvia. La parte principale della dimostrazione consiste nel provare che una tale applicazione F è lineare.

Esempio. In $\mathcal{V}^2$, identificato con $\mathbb{R}^2$ mediante un riferimento, consideriamo

una base, ad esempio $a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

due vettori, ad esempio $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

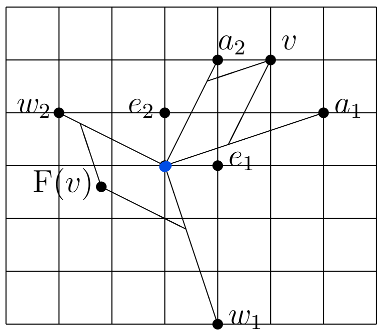
Esiste un'unica applicazione lineare $\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\mathrm{F}(a_1) = w_1$, $\mathrm{F}(a_2) = w_2$.

Calcoliamo il valore di F su un vettore, ad esempio $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ se esolo se } x_1 = \tfrac{2}{5},\ x_2 = \tfrac{4}{5};$$

quindi

$$\mathrm{F} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \tfrac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \tfrac{4}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$



Applicazioni lineari iniettive, suriettive, biiettive

Applicazioni fra insiemi, iniettive, suriettive, biiettive.

Ricordiamo che un'applicazione $\mathrm{F} : D \to C$ fra insiemi si dice

- iniettiva se soddisfa una delle tre condizioni equivalenti

  per ogni $d_1, d_2 \in D$, da $d_1 \neq d_2$ segue $\mathrm{F}(d_1) \neq \mathrm{F}(d_2)$; Sur $\Longleftrightarrow$ Im(L) = W

  per ogni $d_1, d_2 \in D$, da $\mathrm{F}(d_1) = \mathrm{F}(d_2)$ segue $d_1 = d_2$;

  per ogni $c \in C$, esiste al più un $d \in D$ tale che $\mathrm{F}(d) = c$; ? $F : D \mapsto C$

- suriettiva se

  per ogni $c \in C$, esiste almeno un $d \in D$ tale che $\mathrm{F}(d) = c$; $\forall c \in C \ \exists \ d \in D$

- biiettiva se $\mid F(d) = c$

  per ogni $c \in C$, esiste un'unico $d \in D$ tale che $\mathrm{F}(d) = c$.

In altri termini, l'applicazione è biiettiva se e solo se è sia iniettiva che suriettiva.

Cosa si può dire delle applicazioni lineari iniettive, suriettive, biiettive? Iniziamo con le applicazioni fra spazi vettoriali numerici.

Sia data un'applicazione lineare fra spazi vettoriali numerici

$$\mathrm{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ \mathrm{F}(x) = Ax \qquad (A \text{ costante } m \times n).$$

Osserviamo che per ogni $b \in \mathbb{R}^m$, l'equazione nell'incognita x su $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{F}(x) = b$$

equivale all'equazione

$$F(v) = Av = b \qquad A\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} = F(v_1, \dots, v_m)$$

$$Ax = b,$$

che è un sistema lineare di m equazioni in n incognite.

Proposizione.

- F è inettiva se e solo se le colonne di A sono linearmente indipendenti, cioè $\mathrm{r}(A) = n$;
- F è suriettiva se e solo se le righe di A sono linearmente indipendenti; cioè $\mathrm{r}(A) = m$;
- F è biiettiva se e solo se $n = \mathrm{r}(A) = m$, cioè A è non singolare. r e c indip

Dimostrazione parziale. Proviamo solo la 1° e la 3° affermazione. Indicate con $f_1, \dots, f_n$ le colonne di A, l'equazione $Ax = b$ si scrive anche come

$$x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n = b.$$

- Se F è inettiva, allora per ogni $b \in \mathbb{R}^m$ l'equazione $x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n = b$ ha al più una soluzione, allora l'equazione $x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n = \underline{0}$ ha solo la soluzione $x_1 = \ldots = x_n = 0$, allora $f_1, \dots, f_n$ sono linearmente indipendenti. Viceversa, si prova che se $f_1, \dots, f_n$ sono linearmente indipendenti, allora per ogni $b \in \mathbb{R}^m$ l'equazione $x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n = b$ ha al più una soluzione, quindi F è iiettiva.

- F è biiettiva se e solo se per ogni $b \in \mathbb{R}^m$ l'equazione $x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n = b$ ha aun'unica soluzione se e solo se $f_1, \dots, f_n$ è una base di $\mathbb{R}^m$ se e solo se A è non singolare se e solo se $m = \mathrm{r}(A) = n$.

Esempi.

$$\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{F}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ è iniettiva ma non suriettiva.}$$

$$\mathrm{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{G}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ non è iniettiva né suriettiva.}$$

$$\mathrm{H} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{H}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ è suriettiva ma non iniettiva.}$$

$$\mathrm{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{L}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ è biiettiva.}$$

Queste considerazioni e proposizione si possono riformulare in vari modi più o meno forti in termini di spazi vettoriali astratti, ad esempio come segue. Sia data un'applicazione lineare da uno spazio vettoriale V con una base $a_1, \dots, a_n$ verso uno spazio vettoriale W

$$\mathrm{F}(x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n) = x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n \qquad (f_i \text{ costanti} \in W).$$

$$F(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) = \lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_m \omega_n$$

F in $\Leftrightarrow$ Ker(F) = $\{0_V\}$

F sur $\Leftrightarrow$ Im F = W

Proposizione.

- F è iniettiva se e solo se $f_1, \ldots, f_n$ è linearmente indipendente; $w_1, \ldots, w_n$ lin ind
- F è suriettiva se e solo se $\text{Span}\{f_1, \ldots, f_n\} = W$; $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle = W$
- F è biiettiva se e solo se $f_1, \ldots, f_n$ è una base di W.

Commento. La dimostrazione di questa proposizione segue quasi direttamente dalle definizioni. Viene lasciata al lettore.

Spazi nullo e colonna, spazi nucleo e immagine

Ricordiamo che a ciascuna matrice A di tipo $m \times n$ abbiamo associato alcuni spazi vettoriali, in particolare:

- lo spazio nullo di A

$\mathcal{N}(A) =$ insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = \underline{0}$;

- lo spazio colonna di A

$\mathcal{C}(A) = \text{Span}\{f_1, \ldots, f_n\}$ ($f_j \in \mathbb{R}^m$ colonne di A);

e abbiamo visto la relazione fra le loro dimensioni

$\dim(\mathcal{N}(A)) + \dim(\mathcal{C}(A)) = n$.

Indicata con $\text{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'applicazione lineare data da

$\text{F}(x) = Ax$

possiamo descrivere questi spazi come segue:

- $\mathcal{N}(A)$ è l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ che vengono mandati nel vettore nullo di $\mathbb{R}^m$:

$\mathcal{N}(A) = \{x : \ \text{F}(x) = \underline{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$;

- $\mathcal{C}(A)$ è l'insieme delle immagini in $\mathbb{R}^m$ dei vettori di $\mathbb{R}^n$:

$\mathcal{C}(A) = \{\text{F}(x); \ x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

Lo spazio nullo e lo spazio colonna della matrice si dicono rispettivamente anche "spazio nucleo" e "spazio immagine" dell'applicazione F. Più in generale, si ha la

Definizione. Sia $\text{F} : V \to W$ un'applicazione lineare fra due spazi vettoriali V, W;

- il nucleo di F è l'insieme dei vettori che F manda nel vettore nullo di W :

$\text{Ker}(F) = \{x : \ \text{F}(x) = \underline{0}\} \subseteq V$;

- l'immagine di F è l'insieme dei vettori immagine che F crea in W :

$\text{Im}(F) = \{\text{F}(x); \ x \in V\} \subseteq W$.

Si verifica che Ker(F) e Im(F) sono sottospazi, rispettivamente di V e W.

Esempio.

$$\text{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \text{F}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 & x_1 = x_2 \\ -x_1 + x_2 = 0 & x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$x_1 - \cancel{x_2} = 0$$

$$\mathrm{Ker}(F) = \mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= (\text{ soluzioni di } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})$$

$$= (\text{ insieme dei } \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ con } x_2 \text{ libera })$$

$$= \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.\}$$

$$\mathrm{Im}(F) = \mathcal{C}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\}$$

$\times -1$

$$= \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.\}$$

Esempio. Siano date: una base a_1, a_2 di uno spazio vettoriale V, due vettori w_1, w_2 linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale W, l'applicazione lineare $\mathrm{F} : V \to W$ tale che

$$\mathrm{F}(a_1) = w_1, \ \mathrm{F}(a_2) = w_2$$

esplicitamente,

$$\mathrm{F}(xa_1 + ya_2) = xw_1 + yw_2 \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\mathrm{Ker(F)} = \{xa_1 + ya_2;\ xw_1 + yw_2 = \underline{0}\} = \{\underline{0}\};$$

$$\mathrm{Im(F)} = \{xw_1 + yw_2;\ x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Span}\{w_1, w_2\}.$$

Al teorema sulla relazione fra le dimensioni dello spazio nullo e spazio colonna di una matrice corrisponde il seguente teorema sulla relazione fra le dimensioni dello spazio nucleo e spazio immagine di un'applicazione lineare

Teorema. Siano: $\mathrm{F} : V \to W$ un'applicazione lineare, $z_1, \ldots, z_p$ una bse di Ker(F), $\mathrm{F}(v_1), \ldots, \mathrm{F}(v_q)$ una base di Im(F). Allora $z_1, \ldots, z_p, v_1, \ldots, v_q$ è una base di V, quindi

$$\dim(\mathrm{KerF}) + \dim(\mathrm{ImF}) = \dim(V).$$

Dimostrazione.

- Consideriamo l'uguaglianza

$$x_1z_1 + \cdots + x_pz_p + y_1v_1 + \cdots + y_qv_q = \underline{0};$$

applicando F ad entranmbi i membri, essendo F lineare, si ha

$$x_1\mathrm{F}(z_1) + \cdots + x_p\mathrm{F}(z_p) + y_1\mathrm{F}(v_1) + \cdots + y_q\mathrm{F}(v_q) = \underline{0};$$

essendo $z_1, \ldots, z_n \in \mathrm{Ker}(\mathrm{F})$, si ha

$$y_1\mathrm{F}(v_1) + \cdots + y_q\mathrm{F}(v_q) = \underline{0};$$

essendo $\mathrm{F}(v_1), \ldots, \mathrm{F}(v_q)$ linearemente indipendenti, si ha $y_1 = \cdots = y_q = 0$; quindi

$$x_1z_1 + \cdots + x_pz_p = \underline{0};$$

essendo $z_1, \ldots, z_p$ linearemente indipendenti, si ha $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Quindi $z_1, \ldots, z_p, v_1, \ldots, v_q$ è linearmente indipendente.

- Sia $v \in V$. Poichè $\mathrm{F}(v_1), \ldots, \mathrm{F}(v_q)$ genera $\mathrm{Im}(\mathrm{F})$, esistono dei numeri $y_1, \ldots, y_q$ tali che

$$\mathrm{F}(v) = y_1\mathrm{F}(v_1) + \cdots + y_q\mathrm{F}(v_q);$$

essendo F lineare, si ha

$$\mathrm{F}(v - y_1v_1 - \cdots - y_qv_q) = \underline{0};$$

essendo $z_1, \ldots, z_p$ una base di $\mathrm{Ker}(\mathrm{F})$, esistono dei numeri $x_1, \ldots, x_p$ tali che

$$v - y_1v_1 - \cdots - y_qv_q = x_1z_1 + \cdots + x_pz_p;$$

quindi

$$v = x_1z_1 + \cdots + x_pz_p + y_1v_1 + \cdots + y_qv_q.$$

Quindi $z_1, \ldots, z_p, v_1, \ldots, v_q$ genera V.