$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} = b_1 \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} = b_2 \end{cases} \longrightarrow \text{Sistema lineare}$$

$a_1, \dots, a_n$ sono coefficenti
$b_1, \dots, b_m$ sono termini noti

Un sistema si dice compatibile se ammette soluzioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases} \Longrightarrow$$ condizioni che non si contraddicono e non possono essere ottenute una dall'altra

Due sistemi lineari si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni

Matrice $m \times n$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

m righe e n colonne

Matrice RC . l'elemento $(1,3)$ è a riga 1 e colonna 3

Somme tra matrici

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

Prodotto tra matrici $A \cdot B = C$
numero di righe di A deve essere uguale al numero di colonne di B

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & c & \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} r \quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} r$$

$A_{3\times4}$

$B_{4\times2}$

$A \times B \to 3 \times 2$

$$r_{1,2} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + -1 \cdot -1 = 2$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \dots & 2 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Il prodotto non gode della proprietà commutativa

Matrici e sistemi lineari

$$\begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \underset{\underline{x}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{\underline{b}}{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}$$

$A \underline{x} = \underline{b} \to$ vettore colonne termini noti

A è la matrice $m \times n$ dei coefficienti delle incognite, x è la colonne delle incognite e b è la colonne dei termini noti

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \to \text{matrice completa associata al sistema}$$

Definizione matrice a scala

- eventuali righe nulle si trovano in fondo alla matrice
- il primo elemento di ogni riga non nulla si trova più a destra del primo elemento non nullo della riga precedente

Esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è a scala

rr (rango righe): numero di righe non nulle

Il SL $A\underline{x} = \underline{b}$ si dice a scala se A è in forma a scala

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare a scala nelle n incognite $x_1, \dots, x_n$, allora:

- Il sistema ammette soluzioni $\iff rr(A) = rr(A|\underline{b})$
- Se $rr(A) = rr(B) = n$, il sistema lineare ammette una sola soluzione
- Se $rr(A) = rr(A|b) = k < n$ il sistema ammette infinite soluzioni, che dipendono da $n-k$ variabili libere

Algoritmo di Gauss

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} R_3 - 2R_1$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} R_3 + 5R_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema ridotto con algoritmo di Gauss può

- non avere soluzioni
- avere 1 sola soluzione
- avere ∞ soluzioni

$\sqrt{2} = 1,414...$ può essere visto come un limite di successioni che tende a $\sqrt{2}$

$$n(a+b) = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_n + b_n$$
$$= a_1 + a_2 + \dots + a_n + b_1 + b_2 + \dots + b_n$$