1. Si verifichi se l'applicazione è lineare, usando solo la definizione.

   $\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x, y) = 2\,x + 3\,y;$

   $\mathrm{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \mathrm{G}(x) = (2\,x, 3\,y);$

   $\mathrm{H} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{H}(x) = |x|.$

2. Ciascuna delle seguenti applicazioni lineari è descritta in uno di tre principali modi, la si descriva in ciascuno degli altri due modi.

   $\mathrm{L}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3, x_3 + 4x_4);$

   $$\mathrm{M}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathrm{M}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

   R associata alla matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

   S associata alla matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Per ciascuna delle applicazioni del punto precedente:
   a) si stabilisca se è iniettiva, suriettiva, biiettiva;
   b) si determinino le dimensioni del nucleo e dell'immagine.

4. Siano identificati i vettori del piano con segmenti orientati uscenti da un punto fissato e sia identificato $\mathcal{V}^2$ con $\mathbb{R}^2$ mediante un riferimento di due versori ortogonali. Sapendo che le applicazioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di riflessione rispetto a una retta per O sono lineari e sapendo che la riflessione R rispetto alla retta di equazione $x - 2y = 0$ è tale che

   $$\mathrm{R}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \mathrm{R}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

   si calcoli $\mathrm{R}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

5. Sono dati:
   - due spazi vettoriali V, W;
   - una base b_1, b_2, b_3 di V;
   - tre vettori c_1, c_2, c_3 di W, con c_1, c_2 linearmente indipendenti e $c_3 = c_1 + c_2$;
   - l'applicazione lineare $\mathrm{L} : V \to W$ che manda b_1, b_2, b_3 in c_1, c_2, c_3.

   Si determinino una base di Ker(L) e una di Im(L).