Lunghezza, proprietà.

Sia V uno spazio vettoriale Euclideo. Ricordiamo che si definisce "lunghezza" di un vettore la radice quadrata del prodotto scalare del vettore con sè stesso

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}.$$

Le proprietà della lunghezza di vettori che abbiamo evidenziato negli spazi vettoriali geometrici valgono in generale:

Teorema. In ogni spazio vettoriale Euclideo V,

$$\begin{array}{l} \|v\| \geq 0; \quad \|v\| = 0 \text{ se e solo se } u = \underline{0}; \\ \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|; \\ \|rv\| = |r|\|v\| \end{array}$$

per ogni $u, v \in V$ e $r \in \mathbb{R}$.

La 1° segue direttamente dalle proprietà del prodotto scalare. La 2°, disuguaglianza triangolare, è la proprietà più profonda. A noi interessa la 3°; segue dalla definizione e dalle proprietà del prodotto scalare:

$$\|rv\| = \sqrt{(rv) \cdot (rv)} = \sqrt{r^2(v \cdot v)} = |r| \sqrt{v \cdot v} = |r| \, \|v\|.$$

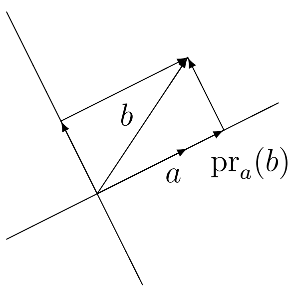
Ricordiamo che un vettore si dice "versore" se ha lunghezza 1. Ogni vettore non nullo $v \neq \underline{0}$, diviso per la sua lunghezza, diviene un versore, infatti

$$\| \frac{1}{\|v\|} v \| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1.$$

Terminologia, notazioni.

Abbiamo visto che, per ogni sottospazio $1-$ dimensionale $U \subseteq V$, ogni vettore b si scrive in un unico modo come somma di un vettore $\in U$, che si dice "proiezione ortogonale" di b su U, e un vettore $\perp U$. In altri termini, per ogni vettore $a \neq \underline{0}$, ogni vettore b si scrive in un unico modo come somma di un vettore multiplo di a, che si dice "proiezione ortogonale" di b su a, e un vettore $\perp a$. La prima formulazione è in linea di principio migliore della seconda, in quanto l'operazione di proiezione ortogonale dipende solo dal sottospazio, ma la seconda formulazione risulta spesso più comoda. Indichiamo la proiezione ortogonale di b su a con $\mathrm{pr}_a(b)$; dunque si ha

$\mathrm{pr}_a(b) = r\,a, \;$ con $r = \frac{a \cdot b}{a \cdot a}.$



Nel seguito, al posto di dire "i vettori ... sono a due a due ortogonali" diremo un po' più in breve "la sequenza dei vettori ... è ortogonale". Inoltre, al posto di dire "i vettori ... sono a due a due ortogonali e di lunghezza 1" diremo un po' più in breve "la sequenza dei vettori ... è ortonormale". Poichè ogni vettore non nullo si può normalizzare, da ogni base ortogonale si può ricavare una base orrtonormale.

Abbiamo anche visto che le coordinate di un vettore v rispetto a una base ortogonale $a_1, \ldots, a_n$ di V, sono i prodotti scalari di v con gli a_i sui quadrati scalari degli a_i :

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i \cdot v}{a_i \cdot a_i} a_i;$$

possiamo anche dire che ogni vettore v si scompone come somma delle sue proiezioni ortogonali sui vettori della base:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{pr}_{a_i}(b).$$

Basi ortogonali.

Fatti.

Ogni spazio vettoriale Euclideo geometrico $\mathcal{V}^n$ $(n = 1, 2, 3)$ possiede qualche base ortogonale, e quindi qualche base ortonormale. Al solito, identifichiamo i vettori con segmenti orientati uscenti da un punto fissato. Più in dettaglio:

$\mathcal{V}^1$: ogni vettore $b \neq \underline{0}$ è una base ortogonale; ci sono esattamente due versori, uno opposto dell'altro; ciscuno dei due versori è una base ortonormale; non ci son altre basi ortonormali.
$\mathbb{R}$: ogni $b \neq 0$ è una base ortogonale; 1 è una base ortonormale, -1 è una base ortonormale, non ce ne sono altre.

$\mathcal{V}^2$: per ogni retta passante per O, esiste un'unica retta per O ad essa ortogonale; comunque scelti due vettori b_1, b_2 diversi da $\underline{0}$ sulle due rette, si ha una base ortogonale; tutte le basi ortogonali si ottengono così; su ciascuna retta si hanno esattamente due versori, dunque a partire da due rette ortogonali si ottengono esattamente 4 basi ortonormali.
$\mathbb{R}^2$: un esempio di base ortogonale:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

normalizzando, si ha una base ortonormale:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{20}} \\ \frac{2}{\sqrt{20}} \end{bmatrix}$$

(si può semplificare).

$\mathcal{V}^3$: per ogni retta passante per O, e per ciascuna delle infinite rette per O ad essa ortogonali, esiste un'unica retta per O ortogonale ad esse; comunque scelti tre vettori b_1, b_2, b_3 diversi da $\underline{0}$ sulle tre rette, si ha una base ortogonale; tutte le basi ortogonali si ottengono così; su ciascuna retta si hanno esattamente due versori, dunque a partire da tre rette a due a due ortogonali si ottengono esattamente 8 basi ortonormali.
$\mathbb{R}^3$: un esempio di base ortogonale:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

normalizzando si ha una base ortonormale ...

Per ogni n intero positivo fissato, nello spazio vettoriale Euclideo $\mathbb{R}^n$ si ha che la sequenza dei vettori unità $e_1, e_2, \ldots, e_n$ è una base ortonormale. Infatti,

$$e_i \cdot e_i = \sum_{h=1}^{n} (e_i)_h^2 = (e_i)_i^2 = 1^2 = 1$$

$$e_i \cdot e_j = \sum_{h=1}^{n} (e_i)_h (e_j)_h = (e_i)_i (e_j)_i + (e_i)_j (e_j)_j = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Problemi:

Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle soluzioni dell'equazione $x - y - 2z = 0$. Geometricamente, U è un piano vettoriale, quindi posside basi ortogonali (e ortonormali). Come se ne può costruire una?

Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ costituito dalle soluzioni dell'equazione $x_1 - x_2 - 2\,x_3 - 3\,x_4 = 0$. U posside basi ortogonali?

Un qualsiasi spazio vettoriale Euclideo possiede basi ortogonali? come si possono costruire?

Teorema (Gram-Schmidt). Sia $v_1, v_2, \ldots, v_p$ una sequenza lin. indip. in uno spazio vett. Euclideo. Allora: esiste un'unica sequenza $u_1, u_2, \ldots, u_p$ ortogonale tale che per ogni $i = 1, 2, \ldots, p$

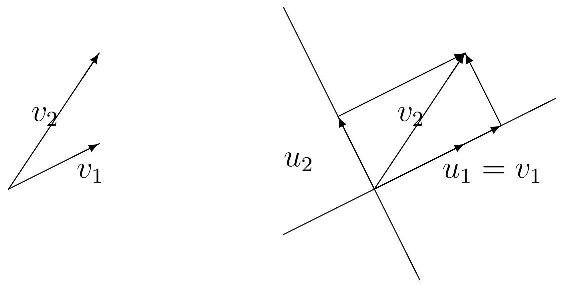
$u_1, \ldots, u_i$ è una base di $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_i\}$ in cui la $i-$ma coord. di v_i è 1;

in particolare:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1; \\ v_2 &= \mathrm{pr}_{u_1}(v_2) + u_2; \\ v_3 &= \mathrm{pr}_{u_1}(v_3) + \mathrm{pr}_{u_2}(v_3) + u_3; \\ &\vdots \\ v_p &= \sum_{j=1}^{p-1} \mathrm{pr}_{u_j}(v_p) + u_p. \end{aligned}$$

Esplicitamente, la sequenza $u_1, u_2, \ldots, u_p$ è

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \mathrm{pr}_{u_1}(v_2) \\ u_3 &= v_3 - \mathrm{pr}_{u_1}(v_3) + \mathrm{pr}_{u_2}(v_3). \\ &\vdots \\ u_p &= v_p - \sum_{j=1}^{p-1} \mathrm{pr}_{u_j}(v_p). \end{aligned}$$



In particolare, dal Teorema segue che

ogni spazio vett. Euclideo di dim. finita possiede qualche base ortogonale.

Commenti. E' chiaro che una sequenza $u_1, u_2, \ldots, u_p$ soddisfacente le date condizioni, se esiste, deve soddisfare la prima serie di uguaglianze, quindi deve essere data esplicitamente dalle seconda serie di uguaglianze, quindi è unica. In sostanza, bisogna mostrare che queste espressioni sono ben definite (cioè $u_i \neq \underline{0}$ per ogni i) e definiscono una sequenza ortogonale. Non lo facciamo.

Esempio Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle soluzioni dell'equazione

$$x - y - 2\,z = 0.$$

Una base di U è

$$(1, 1, 0),\ (2, 0, 1).$$

A questa sequenza corrisponde la base ortogonale di U

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 1, 0) \\ u_2 &= (2, 0, 1) - \mathrm{pr}_{(1,1,0)}(2, 0, 1) \\ &= (2, 0, 1) - \tfrac{2}{2}(1, 1, 0) \\ &= (1, -1, 1) \end{aligned}$$

Esempio Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ costituito dalle soluzioni dell'equazione

$$x_1 - x_2 - 2\,x_3 - 3\,x_4 = 0$$

Una base di U è

$$(1, 1, 0, 0),\ (2, 0, 1, 0),\ (3, 0, 0, 1).$$

A questa sequenza corrisponde la base ortogonale di U

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 1, 0, 0) \\ u_2 &= (2, 0, 1, 0) - \mathrm{pr}_{(1,1,0,0)}(2, 0, 1, 0) \\ &= (2, 0, 1, 0) - \tfrac{2}{2}\,(1, 1, 0, 0) \\ &= (1, -1, 1, 0) \\ u_3 &= (3, 0, 0, 1) - \mathrm{pr}_{(1,1,0,0)}(3, 0, 0, 1) - \mathrm{pr}_{(1,-1,1,0)}(3, 0, 0, 1) \\ &= (3, 0, 0, 1) - \tfrac{3}{2}\,(1, 1, 0, 0) - \tfrac{3}{3}\,(1, -1, 1, 0) \\ &= (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1, 1). \end{aligned}$$

Matrici ortogonali

Il Teorema secondo il quale le colonne di una matrice quadrata sono lin. indip. se e solo se le righe della matrice sono lin. indip. se e solo se la matrice è invertibile ha il seguente analogo ortogonale:

Teorema. Per ogni matrice quadrata A le seguenti affermazioni sono equivalenti

(1) la sequenza $c_1, \ldots, c_n$ delle n colonne di A è ortonormale;

(2) la sequenza $r_1, \ldots, r_n$ delle n righe di A è ortonormale;

(3) la matrice A è invertibile con inversa la sua trasposta:

$$A^T A = \mathrm{I}_n = A A^T.$$

Esempio.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{20}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{20}} \end{bmatrix}$$

Le colonne sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$, le righe sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$, e la matrice è invertibile con inversa la sua trasposta

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{20}} & \frac{2}{\sqrt{20}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{20}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{20}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{20}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{20}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{20}} & \frac{2}{\sqrt{20}} \end{bmatrix}.$$

Dimostrazione.

La (1) equivale al sistema di uguaglianze

$$c_i^T \cdot c_j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \qquad \text{per ogni } i, j = 1, \ldots, n$$

che equivale all'uguaglianza

$$\begin{bmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \vdots \\ c_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

cioè

$$A^T A = \mathrm{I}_n;$$

la (1) inoltre, implica che (le righe sono lin. indip. e quindi che) A è invertibile; quindi la (1) equivale alla (3).

Analogamente si prova che la (2) equivale alla (3).

Definizione. Una matrice quadrata che soddisfa una (quindi ciascuna) delle condizioni del teorema si dice "matrice ortogonale".