

第四次作业

PB18000029 舒文炫

目录

3.13 题	1
3.16 题	2
3.21 题	3
3.23 题	5

3.13 题

(1)

解: 缺陷数服从泊松分布 $f(x|\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ 如果 λ 的先验服从 $\Gamma(3, 1)$, 也即密度函数为

$$\pi(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(3)}\lambda^2e^{-\lambda}$$

从而后验分布为

$$\begin{aligned}\pi(\lambda|X) &\propto \pi(\lambda)f(X|\lambda) \\ &\propto \pi(\lambda) \prod_{i=1}^5 f(x_i|\lambda) \\ &\propto \frac{1}{\Gamma(3)}\lambda^2e^{-\lambda} \prod_{i=1}^5 \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda} \\ &\propto \lambda^{2+\sum_{i=1}^5 x_i}e^{-6\lambda}\end{aligned}$$

代入数据得到, λ 的后验分布为 $\Gamma(16, 6)$

(2)

解: 泊松分布参数的 Jeffreys 先验为 $\pi(\lambda) = \lambda^{-\frac{1}{2}}$, 这在习题 2.13 已经算过, 故不再赘述过程, 从而后验分布为

$$\begin{aligned}\pi(\lambda|X) &\propto \pi(\lambda)f(X|\lambda) \\ &\propto \pi(\lambda) \prod_{i=1}^5 f(x_i|\lambda) \\ &\propto \lambda^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^5 \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \\ &\propto \lambda^{-\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^5 x_i} e^{-5\lambda}\end{aligned}$$

从而代入数据得到 λ 的后验分布为 $\Gamma(13.5, 5)$

3.16 题

(1)

解: 假设先验分布为 $\Gamma(r, \alpha)$, 由题, 其均值为 0.0002, 标准差为 0.0001 从而我们有

$$\begin{aligned}\frac{r}{\alpha} &= 0.0002 \\ \sqrt{\frac{r}{\alpha^2}} &= 0.0001\end{aligned}$$

解得

$$r = 4$$

$$\alpha = 20000$$

所以先验分布为 $\Gamma(4, 20000)$

(2)

解: 对指数函数, 密度函数为 $p(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$ 先验分布如 (1) 所求, 从而后验分布为

$$\begin{aligned}\pi(\lambda|X) &\propto \pi(\lambda)p(X|\lambda) \\ &\propto \pi(\lambda) \prod_{i=1}^n p(x_i|\lambda) \\ &\propto \frac{20000^4}{\Gamma(4)} \lambda^3 e^{-20000\lambda} \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} \\ &\propto \lambda^{3+n} e^{-20000 - \sum_{i=1}^n x_i}\end{aligned}$$

从而后验分布为 $\Gamma(4+n, 20000 + \sum_{i=1}^n x_i)$

3.21 题

(1)

证明: (θ, σ^2) 的先验密度 $\pi(\theta, \sigma^2) = \pi_1(\theta|\sigma^2)\pi_2(\sigma^2)$, $\pi(\theta, \sigma^2)$ 为 $N(\mu, \sigma^2/k)$ 的密度, $\pi_2(\sigma^2) = \sigma^{-2}I_{(0,\infty)}(\sigma^2)$ X 是从正态分布总体 $N(\theta, \sigma^2)$ 抽取的 i.i.d. 样本, 密度函数为 $f(x|\theta, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$

从而后验分布为

$$\begin{aligned}p(\theta, \sigma^2|x) &= f(x|\theta, \sigma^2)\pi(\theta, \sigma^2) \\ &= f(x|\theta, \sigma^2)\pi_1(\theta|\sigma^2)\pi_2(\sigma^2) \\ &= \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/k}} e^{-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma^2/k}} \sigma^{-2} I_{(0,\infty)}(\sigma^2) \\ &\propto e^{-\frac{m\theta^2 - 2m\bar{x}\theta + \sum_{i=1}^m x_i^2 + k\theta^2 - 2k\mu\theta + k\mu^2}{2\sigma^2}} (\sigma^2)^{-1-(m+1)/2} \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(m+k)}} e^{-\frac{(\theta - \frac{m\bar{x} + k\mu}{m+k})^2}{2\sigma^2/(m+k)}} (\sigma^2)^{-1-m/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 + k\mu^2 - (\frac{m\bar{x} + k\mu}{m+k})^2 (k+m)}{2\sigma^2}}\end{aligned}$$

其中

$$\sum_{i=1}^m x_i^2 + k\mu^2 - (\frac{m\bar{x} + k\mu}{m+k})^2 (k+m) = \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 + mk(\bar{x} - \mu^2)/(m+k)$$

从而我们得到了可以将后验密度表示为

$$\pi(\theta, \sigma^2 | x) = \pi_1(\theta | \sigma^2, x) \pi_2(\sigma^2 | x)$$

其中 $\pi_1(\theta | \sigma^2, x)$ 为正态分布 $N(\frac{m\bar{x}+k\mu}{m+k}, \sigma^2/(m+k))$ $\pi_2(\sigma^2 | x)$ 为逆伽马分布 $\Gamma^{-1}(m/2, B_m/2)$, $B_m = \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 + mk(\bar{x} - \mu^2)/(m+k)$

(2)

证明: 求 σ^2 的边缘分布, 即将后验密度对 θ 积分

$$\begin{aligned} \pi(\sigma^2 | x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta, \sigma^2 | x) d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi_1(\theta | \sigma^2, x) \pi_2(\sigma^2 | x) d\theta \\ &= \pi_2(\sigma^2 | x) \int_{-\infty}^{\infty} \pi_1(\theta | \sigma^2, x) d\theta \\ &= \pi_2(\sigma^2 | x) \end{aligned}$$

从而由 (1) 知 σ^2 的边缘密度 $\pi(\sigma^2 | x)$ 为逆伽马分布 $\Gamma^{-1}(m/2, B_m/2)$

(3)

证明: 要证明 θ 的边缘后验密度, 将后验密度对 σ^2 积分, 可以得到

$$\begin{aligned} \pi(\sigma^2 | x) &= \int_0^{\infty} \pi(\theta, \sigma^2 | x) d\sigma^2 \\ &= \int_0^{\infty} \pi_1(\theta | \sigma^2, x) \pi_2(\sigma^2 | x) d\sigma^2 \\ &\propto \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(m+k)}} e^{-\frac{(\theta - \frac{m\bar{x}+k\mu}{m+k})^2}{2\sigma^2/(m+k)}} (\sigma^2)^{-1-m/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 + k\mu^2 - (\frac{m\bar{x}+k\mu}{m+k})^2 (k+m)}{2\sigma^2}} d\sigma^2 \end{aligned}$$

到这里, 我们可以注意到如果将 θ 视为常数, 这里积分的核就是逆伽马分布 $\Gamma^{-1}((m+1)/2, ((\theta - \frac{m\bar{x}+k\mu}{m+k})^2(m+k)/2 + B_m/2)$ 那么积分可以得到这个核

前面系数的倒数，也就是

$$\begin{aligned}\pi(\theta|x) &\propto ((\theta - \frac{m\bar{x} + k\mu}{m+k})^2(m+k)/2 + B_m/2)^{-(m+1)/2} \\ &\propto (1 + \frac{1}{m}(\frac{\theta - \frac{m\bar{x} + k\mu}{m+k}}{\sqrt{\frac{B_m}{m(m+k)}}})^2)^{-(m+1)/2}\end{aligned}$$

从而我们得到了 θ 的边缘分布为广义一元 t 分布 $\mathcal{T}(m, \frac{m\bar{x} + k\mu}{m+k}, \frac{B_m}{m(m+k)})$ 即为所求

3.23 题

(1)

证明: (θ, σ^2) 的先验密度 $\pi(\theta, \sigma^2) = \pi_1(\theta|\sigma^2)\pi_2(\sigma^2)$, $\pi(\theta, \sigma^2)$ 为 $N(\mu, \tau\sigma^2)$ 的密度, $\pi_2(\sigma^2)$ 为逆伽马分布 $\Gamma^{-1}(\alpha, \beta)$ 的密度即为

$$\pi_2(\sigma^2) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(\sigma^2)^{-(\alpha+1)}e^{-\frac{\beta}{\sigma^2}}$$

X 是从正态分布总体 $N(\theta, \sigma^2)$ 抽取的 i.i.d. 样本, 密度函数为 $f(x|\theta, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$

从而后验分布为

$$\begin{aligned}p_i(\theta, \sigma^2|x) &= f(x|\theta, \sigma^2)\pi(\theta, \sigma^2) \\ &= f(x|\theta, \sigma^2)\pi_1(\theta|\sigma^2)\pi_2(\sigma^2) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma^2}}e^{-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\tau\sigma^2}} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(\sigma^2)^{-(\alpha+1)}e^{-\frac{\beta}{\sigma^2}} \\ &\propto e^{-\frac{\tau n\theta^2 - 2\tau n\bar{x}\theta + \tau \sum_{i=1}^n x_i^2 + \theta^2 - 2\mu\theta + \mu^2 + 2\beta}{2\tau\sigma^2}} (\sigma^2)^{-(\alpha+1)-(n+1)/2} \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma^2/(n\tau+1)}} e^{-\frac{(\theta - \frac{n\tau\bar{x} + \mu}{n\tau+1})^2}{2\tau\sigma^2/(n\tau+1)}} (\sigma^2)^{-(\alpha+1)-n/2} e^{-\frac{\tau \sum_{i=1}^n x_i^2 + \mu^2 - (\frac{n\tau\bar{x} + \mu}{n\tau+1})^2 (n\tau+1) + 2\beta}{2\tau\sigma^2}}\end{aligned}$$

其中

$$\tau \sum_{i=1}^m x_i^2 + \mu^2 - (\frac{n\tau\bar{x} + \mu}{n\tau+1})^2 (n\tau+1) + 2\beta = 2\tau (\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu^2)/2(1+n\tau) + \beta)$$

从而我们得到了可以将后验密度表示为

$$\pi(\theta, \sigma^2 | x) = \pi_1(\theta | \sigma^2, x) \pi_2(\sigma^2 | x)$$

其中 $\pi_1(\theta | \sigma^2, x)$ 为正态分布 $N(\frac{n\tau\bar{x}+\mu}{n\tau+1}, \tau\sigma^2/(n\tau+1))$ $\pi_2(\sigma^2 | x)$ 为逆伽马分布 $\Gamma^{-1}(\alpha + n/2, \bar{\beta})$, $\bar{\beta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 + \frac{n(\bar{x}-\mu^2)}{2(1+n\tau)} + \beta$

(2)

证明: 求 σ^2 的边缘分布, 即将后验密度对 θ 积分

$$\begin{aligned} \pi(\sigma^2 | x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta, \sigma^2 | x) d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi_1(\theta | \sigma^2, x) \pi_2(\sigma^2 | x) d\theta \\ &= \pi_2(\sigma^2 | x) \int_{-\infty}^{\infty} \pi_1(\theta | \sigma^2, x) d\theta \\ &= \pi_2(\sigma^2 | x) \end{aligned}$$

从而由 (1) 知 σ^2 的边缘密度 $\pi(\sigma^2 | x)$ 为逆伽马分布 $\Gamma^{-1}(\alpha + n/2, \bar{\beta})$

(3)

证明: 要证明 θ 的边缘后验密度, 将后验密度对 σ^2 积分, 可以得到

$$\begin{aligned} \pi(\sigma^2 | x) &= \int_0^{\infty} \pi(\theta, \sigma^2 | x) d\sigma^2 \\ &= \int_0^{\infty} \pi_1(\theta | \sigma^2, x) \pi_2(\sigma^2 | x) d\sigma^2 \\ &\propto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma^2/(n\tau+1)}} e^{-\frac{(\theta - \frac{n\tau\bar{x}+\mu}{n\tau+1})^2}{2\tau\sigma^2/(n\tau+1)}} (\sigma^2)^{-(\alpha+1)-n/2} e^{-\frac{\tau \sum_{i=1}^m x_i^2 + \mu^2 - (\frac{n\tau\bar{x}+\mu}{n\tau+1})^2 (n\tau+1) + 2\beta}{2\tau\sigma^2}} d\sigma^2 \end{aligned}$$

到这里, 我们可以注意到如果将 θ 视为常数, 这里积分的核就是逆伽马分布 $\Gamma^{-1}((n+1)/2 + \alpha, (\frac{n\tau\bar{x}+\mu}{n\tau+1})^2 (n\tau+1)/2\tau + \bar{\beta})$ 那么积分可以得到这个核前面

系数的倒数，也就是

$$\begin{aligned}\pi(\theta|x) &\propto \left(\theta - \frac{n\tau\bar{x} + \mu}{n\tau + 1}\right)^2 (n\tau + 1)/2\tau + \bar{\beta})^{-(n+1)/2+\alpha} \\ &\propto \left(1 + \frac{1}{2\alpha + n} \left(\frac{\theta - \frac{n\tau\bar{x} + \mu}{n\tau + 1}}{\sqrt{\frac{\tau\bar{\beta}}{(1+n\tau)(\alpha+n/2)}}}\right)^2\right)^{-(n+1)/2+\alpha}\end{aligned}$$

从而我们得到了 σ^2 的边缘分布为广义一元 t 分布 $\mathcal{T}(2\alpha+n, \frac{n\tau\bar{x}+\mu}{n\tau+1}, \frac{\tau\bar{\beta}}{(1+n\tau)(\alpha+n/2)})$ 即为所求