第五次作业

舒文炫 PB18000029

目录

5.8 题

解: 平方损失 $L(p,a)=(p-a)^2$ 下，p 的贝叶斯估计为其后验期望 $E(p|x)$, 我们知道 $p=\frac{M}{N}$, 其中，N 已知，M 未知，也就相当于求 $E(\frac{M}{N}|x)=E(M|x)/N$ 下面我们只要求 $E(M|x)$ 即可.

M 的先验分布 $p(M=k)=\frac{1}{N+1}, k=0,1,...,N$ 在已知废品数时，x 的分布是超几何分布从而后验分布为

$$\begin{aligned} p(M=k|x) &= \frac{p(M=k)p(x|M=k)}{p(x)} \\ &= \frac{1}{N+1}\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{p(x)\binom{N}{k}} \end{aligned}$$

其中对任意 x 都有

$$\begin{aligned} p(x)\binom{N}{k} &= \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x} \\ &= \frac{1}{N+1}\binom{N+1}{n+1} \end{aligned}$$

从而后验分布为

$$\begin{aligned} p(M=k|x) &= \frac{1}{N+1}\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\frac{1}{N+1}\binom{N+1}{n+1}} \\ &= \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N+1}{n+1}} \end{aligned}$$

那么后验期望为

$$\begin{aligned} E(M|x) &= \sum_{k=0}^{N} kp(M=k|x) \\ &= \sum_{k=0}^{N} k\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N+1}{n+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{N}(k+1-1)\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N+1}{n+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{N}(x+1)\frac{\binom{k+1}{x+1}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N+1}{n+1}}-1 \\ &= (x+1)\frac{\binom{N+2}{n+2}}{\binom{N+1}{n+1}}-1 \\ &= (x+1)\frac{N+2}{n+2}-1 \end{aligned}$$

从而 p 的贝叶斯估计为 $\hat{p}_B = \frac{(x+1)\frac{N+2}{n+2}-1}{N} = \frac{(x+1)(N+2)}{N(n+2)} - \frac{1}{N}$

5.19 题

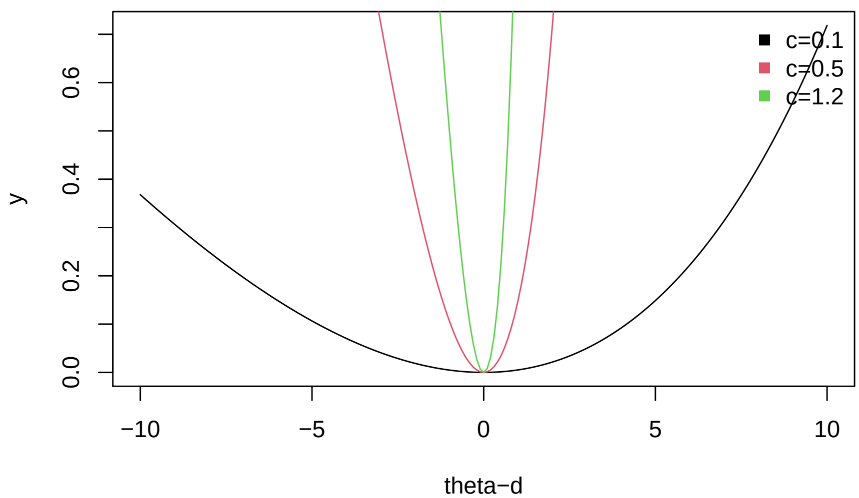
(1)

证明: 观察式子 $L(\theta,d) = e^{c(\theta-d)} - c(\theta-d) - 1$ 其值完全由 $c(\theta-d)$ 的值决定，令 $x = c(\theta-d)$, 考虑 $f(x) = e^x - x - 1$ $f'(x) = (e^x - 1)$,$x < 0$ 递减，$x > 0$ 递增，从而 $x = 0$ 取最小值 $f(0) = 0$ 从而可知 $L(\theta,d) \geq 0$

(2)

下面我们画图，区间在 (-10,10), 每隔 0.1 画一个点，对 c 的三种取值，绘制三条曲线

```r
thetad<-c(seq(-10,10,0.1))
y1<-exp(0.1*thetad)-0.1*thetad-1
y2<-exp(0.5*thetad)-0.5*thetad-1
y3<-exp(1.2*thetad)-1.2*thetad-1
plot(thetad,y1,col=1,type="l",xlab="theta-d",ylab="y")
lines(thetad,y2,col=2,type="l")
lines(thetad,y3,col=3,type="l")
legend("topright",pch=c(15,15),legend=c("c=0.1","c=0.5","c=1.2"),col=c(1,2,3),bty="n")
```



(3)

设 $\pi(\theta|x)$ 为 θ 的后验密度，则决策函数 $d=d(x)$ 的后验风险为

$$\begin{aligned}R(d|x) &= E(L(\theta,d)|x)\\ &= E(e^{c(\theta-d)}-c(\theta-d)-1|x)\\ &= \int_{\Theta}(e^{c(\theta-d)}-c(\theta-d)-1)\pi(\theta|x)d\theta\end{aligned}$$

贝叶斯解是使后验分布最小的决策函数，从而将上式对 d 求导得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}R(d/x)}{\mathrm{d}d} &= \int_{\Theta} -c(e^{c(\theta-d)}-1)\pi(\theta|x)d\theta \\ &= -c(\frac{E(e^{c\theta}|x)}{e^{cd}}-1)\end{aligned}$$

再令上式为 0，求得极值点满足 $e^{cd}=E(e^{c\theta}|x)$ 也即 $d=\frac{ln(E(e^{c\theta}|x))}{c}$ 同时我们有

$$\frac{\mathrm{d}^2R(d/x)}{\mathrm{d}d^2} = \int_{\Theta} c^2 e^{c(\theta-d)}\pi(\theta|x)d\theta \geq 0$$

从而该极值点为极小值点，由 (1),$d=\theta$, 时损失函数最小，从而我们得到 $\hat{\theta}_B$ 满足 $\hat{\theta}_B=\frac{ln(E(e^{c\theta}|x))}{c}$

(4)

$X_1,...,X_n$ 是正态总体 $N(\theta,1)$ 的样本，θ 先验分布为 $\pi(\theta)=1$ 从而 θ 后验分布为 $N(\bar{x},\frac{1}{n})$ 那么代入上面的表达式 $\hat{\theta}_B$ 满足 $\hat{\theta}_B=\frac{ln(E(e^{c\theta}|x))}{c}$ 其中

$$\begin{aligned}E(e^{c\theta}|x) &= \int_{\Theta} e^{c\theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi/n}}e^{-\frac{(\theta-\bar{x})^2}{2/n}}d\theta \\ &= \int_{\Theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi/n}}e^{-\frac{(\theta-\bar{x}-c/n)^2-\frac{c}{n}(2\bar{x}+\frac{c}{n})}{2/n}}d\theta \\ &= e^{\frac{c(2\bar{x}+\frac{c}{n})}{2}}\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_B &= \frac{lne^{\frac{c(2\bar{x}+\frac{c}{n})}{2}}}{c} \\ &= \bar{x}+\frac{c}{2n}\end{aligned}$$

即为所求.

5.20 题

(1)

证明： 由题 $X \sim N(\theta,1)$，从而 $p(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$，同理 $p(x|a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}$ 从而熵的距离

$$\begin{aligned}
L_e(\theta,a) &= E^{X|\theta}\Big[ln\frac{p(x|\theta)}{p(x|a)}\Big] \\
&= E^{X|\theta}\Big[ln\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}}\Big] \\
&= E^{X|\theta}\Big[lne^{-(a-\theta)(2x-\theta-a)/2}\Big] \\
&= E^{X|\theta}\Big[-(a-\theta)(2x-\theta-a)/2\Big] \\
&= E^{X|\theta}\Big[(\theta-a)x\Big] + (a^2-\theta^2)/2 \\
&= \theta(\theta-a) + (a^2-\theta^2)/2 \\
&= \frac{1}{2}(\theta-a)^2
\end{aligned}$$

即得所求

(2)

证明： 密度函数与 (1) 相同，从而我们直接计算这个距离

$$\begin{aligned}
L_H(\theta,a) &= \frac{1}{2}E^{X|\theta}\Big\{\Big[\sqrt{\frac{p(x|a)}{p(x|\theta)}}-1\Big]^2\Big\} \\
&= \frac{1}{2}E^{X|\theta}\Big\{\Big[\sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}}}-1\Big]^2\Big\} \\
&= \frac{1}{2}E^{X|\theta}\Big\{\Big[e^{(a-\theta)(2x-\theta-a)/4}-1\Big]^2\Big\} \\
&= \frac{1}{2}E^{X|\theta}\Big[e^{(a-\theta)(2x-\theta-a)/2} - 2e^{(a-\theta)(2x-\theta-a)/4}+1\Big] \\
&= \frac{1}{2}E^{X|\theta}\Big[e^{(a-\theta)x}\Big]e^{(\theta^2-a^2)/2} - E^{X|\theta}\Big[e^{(a-\theta)x/2}\Big]e^{(\theta^2-a^2)/4} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

那么主要需要计算对 c 为常数的下面这个量

$$\begin{aligned}E(e^{cx}|\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{cx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta-c)^2-c(2\theta+c)}{2}}dx\\ &= e^{\frac{c(2\theta+c)}{2}}\end{aligned}$$

分别取 $c=\theta-a$ 以及 $c=(\theta-a)/2$ 代入上式可得

$$\begin{aligned}L_H(\theta,a) &= \frac{1}{2}E^{X|\theta}\left[e^{(a-\theta)x}\right]e^{(\theta^2-a^2)/2} - E^{X|\theta}\left[e^{(a-\theta)x/2}\right]e^{(\theta^2-a^2)/4} + \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}e^{(a-\theta)(\theta+a)/2}e^{(\theta^2-a^2)/2} - e^{(a-\theta)(\frac{a+3\theta}{2})/4}e^{(\theta^2-a^2)/4} + \frac{1}{2}\\ &= 1-e^{-\frac{(\theta-a)^2}{8}}\end{aligned}$$

即得结果