第三次作业

舒文炫 PB18000029

目录

2.12 题

(1)

解: 该分布是区间 $(\theta-1,\theta+1)$ 上的均匀分布，θ 是位置参数族，从而 θ 的无信息先验为 $\pi(\theta)\equiv 1$

(2)

解: 该分布的密度函数为

$$\begin{aligned}p(x|\beta) &= \frac{\beta}{\pi(x^2+\beta^2)} \\ &= \frac{1}{\pi\beta[(\frac{x}{\beta})^2+1]} \\ &= \beta^{-1}\varphi(\frac{x}{\beta})\end{aligned}$$

β 是刻度参数，从而无信息先验为 $\pi(\beta)=\frac{1}{\beta}$

(3)

解: 考虑 (μ,σ^2) 整体，既不是位置参数，也不是刻度参数，如果考虑两个参数独立的情况，此时无信息先验为 $\pi(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma^2}$

(4)

解: 帕累托分布 $P(x_0,\alpha)$ 的密度函数为

$$\pi(x|x_0)=\begin{cases}0 & x<x_0\\ \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & x\geq x_0\end{cases}$$

也即

$$\pi(x|x_0)=\begin{cases}0 & \frac{x}{x_0}<1\\ \frac{\alpha}{x_0(\frac{x}{x_0})^{\alpha+1}} & \frac{x}{x_0}\geq 1\end{cases}$$

可以看出 x_0 为刻度参数，从而无信息先验为 $\pi(x_0)=\frac{1}{x_0}$

2.13 题

(1)

解: 泊松分布 $P(\lambda)$ 的密度函数 $f(x,\lambda)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ 使用 Jeffreys 方法写出对数似然函数

$$\begin{aligned}l(\lambda|x)&=ln[f(x|\lambda)]\\&=-\lambda+xln\lambda-ln(x!)\end{aligned}$$

求二阶导 $\frac{\partial^2 l}{\partial\lambda^2}=-\frac{x}{\lambda^2}$

求费希尔信息量

$$I(\lambda)=E_{X|\lambda}(\frac{X}{\lambda^2})=\frac{\lambda}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda}$$

从而 Jeffrey 先验为 $\pi(\lambda)=\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$ 这是一个广义先验分布

(2)

解: 负二项分布 $Nb(r,\theta)$ 的密度函数 $f(x,\theta)=\binom{x-1}{r-1}\theta^r(1-\theta)^{x-r}$ 则对数似然函数为

$$\begin{aligned} l(\theta|x) &= ln[f(x|\theta)] \\ &= ln\binom{x-1}{r-1} + rln\theta + (x-r)ln(1-\theta) \end{aligned}$$

求二阶导 $\frac{\partial^2 l}{\partial\theta^2} = -\frac{r}{\theta^2} - \frac{x-r}{(1-\theta)^2}$

求费希尔信息量

$$\begin{aligned} I(\theta) &= E_{X|\theta}(\frac{r}{\theta^2} + \frac{x-r}{(1-\theta)^2}) \\ &= \frac{r}{\theta^2} + \frac{\frac{r}{\theta}-r}{(1-\theta)^2} \\ &= \frac{r}{\theta^2(1-\theta)} \end{aligned}$$

θ 的先验分布 $\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta(1-\theta)^{\frac{1}{2}}}(0<\theta<1)$

(3)

解: 指数分布 $Exp(\frac{1}{\lambda})$ 的密度函数 $f(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}$ 从而对数似然函数为

$$\begin{aligned} l(\lambda|x) &= ln[f(x|\lambda)] \\ &= -ln\lambda - \frac{x}{\lambda} \end{aligned}$$

求二阶导 $\frac{\partial^2 l}{\partial\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} - 2\frac{x}{\lambda^3}$

求费希尔信息量

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= E_{X|\lambda}(-\frac{1}{\lambda^2} + 2\frac{x}{\lambda^3}) \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} + 2\frac{\lambda}{\lambda^3} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

从而 λ 的先验分布为 $\pi(\lambda)=\frac{1}{\lambda}, \lambda>0$ 这是一个广义先验

(4)

解: 伽马分布 $\Gamma(\alpha,\lambda)$ 密度函数为 $f(x|\lambda)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$ 对数似然为

$$\begin{aligned} l(\lambda|x) &= ln[f(x|\lambda)] \\ &= \alpha ln\lambda - \lambda x - ln(\Gamma(\alpha)) + (\alpha-1)lnx \end{aligned}$$

求二阶导为 $\frac{\partial^2 l}{\partial\lambda^2}=-\frac{\alpha}{\lambda^2}$ 从而

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= E_{X|\lambda}(\frac{\alpha}{\lambda^2}) \\ &= \frac{\alpha}{\lambda^2} \end{aligned}$$

从而 λ 的先验分布为 $\pi(\lambda)=\frac{1}{\lambda},\lambda>0$ 这是一个广义先验

(5)

解: 多项分布 $M(n,p)$ 密度函数为 $f(x|p)=\frac{n!}{x_1!...x_k!}p_1^{x_1}...p_k^{x_k}$ 其中 $\sum_{i=1}^k x_i = n, \sum_{i=1}^k p_k = 1$ 对数似然函数为

$$\begin{aligned} l(p|x) &= ln[f(x|p)] \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} x_i ln p_i + x_k ln(1-\sum_{i=1}^{k-1} p_i) + ln(\frac{n!}{x_1!...x_k!}) \end{aligned}$$

对每个 i,j 求偏导导结果为

$$\frac{\partial^2 l}{\partial p_i \partial p_j} = \begin{cases} -\frac{x_k}{p_k^2} & i \neq j \\ -\frac{x_i}{p_i^2} - \frac{x_k}{p_k^2} & i = j \end{cases}$$

从而有

$$I_{ij}(p) = \begin{cases} \frac{n}{p_i}+\frac{n}{p_k}, i=j \\ \frac{n}{p_k}, i \neq j \end{cases}$$

其中 i,j 在 1,...k-1 中取值算得 $det(I)=n^{k-1}\prod_{i=1}^k \frac{1}{p_i}$ 从而 p 的先验分布密度为 $\pi(p)\propto\sqrt{\prod_{i=1}^k \frac{1}{p_i}}$ 为迪利克雷分布 $D(\frac{1}{2},...,\frac{1}{2})$ 这里有 k 项。

2.20 题

证明: 考虑先验分布取 $h(\theta)$ 的后验分布

$$\begin{aligned}\pi(\theta|x) &\propto h(\theta)f(x|\theta)\\ &\propto Ae^{k_1 a(\theta)+k_2 c(\theta)}e^{a(\theta)b(x)+c(\theta)+d(x)}\\ &\propto e^{(k_1+b(x))a(\theta)+(k_2+1)c(\theta)+d(x)}\end{aligned}$$

其中 $k_1+b(x), d(x)$ 为 x 的函数 $a(\theta), (k_2+1)c(\theta)$ 是 θ 的函数，其后验仍在原来的分布族中，从而 $h(\theta)$ 为 θ 的共轭先验分布。

2.24 题

证明: 考虑分成两段, 在 $a<\theta<z$ 上, 令 $g_1(\theta)=1$, 有 $E^{\pi}(g_1(\theta))=\frac{1}{2}$ 从而

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(\theta) &= \frac{\pi_0(\theta)e^{\lambda_1 g_1(\theta)}}{\int_{\Theta}\pi_0(\theta)e^{\lambda_1 g_1(\theta)}d\theta}\\ &= \frac{\frac{1}{\theta}e^{\lambda_1}}{\int_{\Theta}\frac{1}{\theta}e^{\lambda_1}d\theta}\\ &= a_1\frac{\frac{1}{\theta}}{\int_a^z\frac{1}{\theta}d\theta}\\ &= a_1\frac{1}{\theta}ln(\frac{z}{a})^{-1}\end{aligned}$$

其中 a_1 需要满足

$$\int_a^z a_1\frac{1}{\theta}ln(\frac{z}{a})^{-1}d\theta=\frac{1}{2}$$

从而 $a_1=\frac{1}{2}$ 从而 $a<\theta<z$ 时, 最大熵先验为 $\pi(\theta)=\frac{1}{\theta}(2ln\frac{z}{a})^{-1}$ 同理考虑 $z<\theta<b$ 在其上令 $g_2(\theta)=1$, 有 $E^{\pi}(g_2(\theta))=\frac{1}{2}$ 相同的步骤得到 $z<\theta<b$ 时，最大熵先验为 $\pi(\theta)=\frac{1}{\theta}(2ln\frac{b}{z})^{-1}$ 综上

$$\pi(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}(2ln\frac{z}{a})^{-1} & 0<a<\theta<z\\ \frac{1}{\theta}(2ln\frac{b}{z})^{-1} & z<\theta<b\end{cases}$$

2.25 题

证明: 由 $\varphi_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \varphi_2 = \mu_1\mu_2$ 解出 $\mu_1 = \sqrt{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}}, \mu 2 = \sqrt{\varphi_1\varphi_2}$ 变换的雅各比矩阵为

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(\mu_1,\mu_2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\varphi_1^{-\frac{3}{2}}\varphi_2^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\varphi_1^{-\frac{1}{2}}\varphi_2^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}\varphi_1^{-\frac{1}{2}}\varphi_2^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\varphi_1^{\frac{1}{2}}\varphi_2^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

从而对数似然

$$\begin{aligned} l(\varphi_1,\varphi_2|x) &= ln(f(\varphi_1,\varphi_2|x)|det(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(\mu_1,\mu_2)})|) \\ &= -ln\mu_1\mu_2 - \frac{x_1}{\mu_1} - \frac{x_2}{\mu_2} + ln(\frac{1}{2}\varphi_1^{-1}) \\ &= -ln\varphi_1 - ln\varphi_2 - \frac{x_1}{\sqrt{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}}} - \frac{x_2}{\sqrt{\varphi_1\varphi_2}} - ln2 \end{aligned}$$

φ_2 为多余参数, 求偏导得到

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\varphi_1^2} = \varphi_1^{-2} + \frac{1}{4}x_1\varphi_1^{-\frac{3}{2}}\varphi_2^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}x_2\varphi_1^{-\frac{5}{2}}\varphi_2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\varphi_2^2} = \varphi_2^{-2} - \frac{3}{4}(x_1\varphi_1^{\frac{1}{2}} + x_2\varphi_1^{-\frac{1}{2}})\varphi_2^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\varphi_2\partial\varphi_1} = \frac{1}{4}(x_1\varphi_1^{-\frac{1}{2}} - x_2\varphi_1^{-\frac{3}{2}})\varphi_2^{-\frac{5}{2}}$$

所以

$$E^{X|\varphi}(-\frac{\partial^2 l}{\partial\varphi_2^2}) = \frac{1}{2}\varphi_2^{-2}$$

$$E^{X|\varphi}(-\frac{\partial^2 l}{\partial\varphi_1^2}) = -\frac{1}{2}\varphi_1^{-2}$$

$$E^{X|\varphi}(-\frac{\partial^2 l}{\partial\varphi_2\partial\varphi_1}) = 0$$

可得到费希尔信息阵是对角阵

$$I(\varphi_1,\varphi_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\varphi_1^{-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\varphi_2^{-2} \end{pmatrix}$$

从而可以得到条件 reference 先验为 $\pi(\varphi_2|\varphi_1) \propto \sqrt{\varphi_2^{-2}} = \varphi_2^{-1}$ 这是一个广义先验

选择参数空间 $\Phi = R_+ \times R_+$ 上的单调增子集 $\Omega_i = L_i \times S_i$ 则 $\Omega_{i,\varphi_1} = L_I = [l_{i1}, l_{i2}]$

$$K_i(\varphi_1) = \frac{1}{\int_{\Omega_{i,\varphi_1}} \pi(\varphi_2|\varphi_1) d\varphi_2} = \frac{1}{lnl_{i2} - lnl_{i1}}$$

$$\pi_i(\varphi_2|\varphi_1) = K_i(\varphi_1)\pi(\varphi_2|\varphi_1) I_{[l_{i1}, l_{i2}]} = \frac{1}{(lnl_{i2} - lnl_{i1})\varphi_2}$$

求边缘 reference 先验

$$\begin{aligned}\pi_i(\varphi_1) &= exp(\frac{1}{2}\int_{\Omega_{i,\varphi_1}} \pi_i(\varphi_2|\varphi_1) ln \frac{|I(\varphi_1, \varphi_2)|}{|I_{22}(\varphi_1, \varphi_2)|} d\varphi_2) \\ &= exp(\frac{1}{2}\int_{\Omega_{i,\varphi_1}} \frac{1}{(lnl_{i2} - lnl_{i1})\varphi_2} ln \frac{1}{2}\varphi_1^{-2} d\varphi_2) \\ &= A\varphi_1^{-1}\end{aligned}$$

其中 A 为常数, 下面取 $\varphi_{10} = 1$, 求极限可得

$$\begin{aligned}\pi(\varphi_1, \varphi_2) &= \lim_{i\to\infty} \frac{K_i(\varphi_1)\pi_i(\varphi_1)}{K_i(\varphi_{10})\pi_i(\varphi_{10})} \pi(\varphi_2, \varphi_1) \\ &= \lim_{i\to\infty} \frac{\frac{1}{lnl_{i2} - lnl_{i1}} A\varphi_1^{-1}}{\frac{1}{lnl_{i2} - lnl_{i1}} A} \varphi_2^{-1} \\ &= (\varphi_1\varphi_2)^{-1}\end{aligned}$$

从而我们得到参数 (φ_1, φ_2) 的 reference 先验为 $\pi(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1\varphi_2)^{-1}$