第四次作业

PB18000029 舒文炫

目录

3.13 题

(1)

解: 缺陷数服从泊松分布 $f(x|\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ 如果 λ 的先验服从 $\Gamma(3,1)$, 也即密度函数为

$$\pi(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(3)}\lambda^2 e^{-\lambda}$$

从而后验分布为

$$\begin{aligned}
\pi(\lambda|X) &\propto \pi(\lambda)f(X|\lambda) \\
&\propto \pi(\lambda)\prod_{i=1}^{5} f(x_i|\lambda) \\
&\propto \frac{1}{\Gamma(3)}\lambda^2 e^{-\lambda}\prod_{i=1}^{5}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda} \\
&\propto \lambda^{2+\sum_{i=1}^{5} x_i} e^{-6\lambda}
\end{aligned}$$

代入数据得到，λ 的后验分布为 $\Gamma(16,6)$

(2)

解: 泊松分布参数的 Jeffreys 先验为 $\pi(\lambda)=\lambda^{-\frac{1}{2}}$，这在习题 2.13 已经算过，故不再赘述过程, 从而后验分布为

$$\begin{aligned}\pi(\lambda|X) &\propto \pi(\lambda)f(X|\lambda)\\ &\propto \pi(\lambda)\prod_{i=1}^{5}f(x_i|\lambda)\\ &\propto \lambda^{-\frac{1}{2}}\prod_{i=1}^{5}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}\\ &\propto \lambda^{-\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{5}x_i}e^{-5\lambda}\end{aligned}$$

从而代入数据得到 λ 的后验分布为 $\Gamma(13.5,5)$

3.16 题

(1)

解: 假设先验分布为 $\Gamma(r,\alpha)$, 由题，其均值为 0.0002，标准差为 0.0001 从而我们有

$$\begin{aligned}\frac{r}{\alpha} &= 0.0002\\ \sqrt{\frac{r}{\alpha^2}} &= 0.0001\end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned}r &= 4\\ \alpha &= 20000\end{aligned}$$

所以先验分布为 $\Gamma(4,20000)$

(2)

解: 对指数函数，密度函数为 $p(x|\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}, x>0$ 先验分布如 (1) 所求，从而后验分布为

$$\begin{aligned}\pi(\lambda|X)&\propto\pi(\lambda)p(X|\lambda)\\&\propto\pi(\lambda)\prod_{i=1}^{n}p(x_i|\lambda)\\&\propto\frac{20000^4}{\Gamma(4)}\lambda^3e^{-20000\lambda}\prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x_i}\\&\propto\lambda^{3+n}e^{-20000-\sum_{i=1}^{n}x_i}\end{aligned}$$

从而后验分布为 $\Gamma(4+n,20000+\sum_{i=1}^{n}x_i)$

3.21 题

(1)

证明: (θ,σ^2) 的先验密度 $\pi(\theta,\sigma^2)=\pi_1(\theta|\sigma^2)\pi_2(\sigma^2)$,$\pi(\theta,\sigma^2)$ 为 $N(\mu,\sigma^2/k)$ 的密度,$\pi_2(\sigma^2)=\sigma^{-2}I_{(0,\infty)}(\sigma^2)$ X 是从正态分布总体 $N(\theta,\sigma^2)$ 抽取的 i.i.d. 样本, 密度函数为 $f(x|\theta,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$

从而后验分布为

$$\begin{aligned}pi(\theta,\alpha^2|x)&=f(x|\theta,\sigma^2)\pi(\theta,\alpha^2)\\&=f(x|\theta,\sigma^2)\pi_1(\theta|\sigma^2)\pi_2(\sigma^2)\\&=\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/k}}e^{-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma^2/k}}\sigma^{-2}I_{(0,\infty)}(\sigma^2)\\&\propto e^{-\frac{m\theta^2-2m\bar{x}\theta+\sum_{i=1}^{m}x_i^2+k\theta^2-2k\mu\theta+k\mu^2}{2\sigma^2}}(\sigma^2)^{-1-(m+1)/2}\\&\propto\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(m+k)}}e^{-\frac{(\theta-\frac{m\bar{x}+k\mu}{m+k})^2}{2\sigma^2/(m+k)}}(\sigma^2)^{-1-m/2}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{m}x_i^2+k\mu^2-(\frac{m\bar{x}+k\mu}{m+k})^2(k+m)}{2\sigma^2}}\end{aligned}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{m}x_i^2+k\mu^2-(\frac{m\bar{x}+k\mu}{m+k})^2(k+m)=\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2+mk(\bar{x}-\mu^2)/(m+k)$$

从而我们得到了可以将后验密度表示为

$$\pi(\theta,\sigma^2|x)=\pi_1(\theta|\sigma^2,x)\pi_2(\sigma^2|x)$$

其中 $\pi_1(\theta|\sigma^2,x)$ 为正态分布 $N(\frac{m\bar{x}+k\mu}{m+k},\sigma^2/(m+k))$ $\pi_2(\sigma^2|x)$ 为逆伽马分布 $\Gamma^{-1}(m/2,B_m/2)$, $B_m=\sum_{i=1}^m(x_i-\bar{x})^2+mk(\bar{x}-\mu^2)/(m+k)$

(2)

证明: 求 σ^2 的边缘分布，即将后验密度对 θ 积分

$$\begin{aligned}\pi(\sigma^2|x)&=\int_{-\infty}^{\infty}\pi(\theta,\sigma^2|x)d\theta\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\pi_1(\theta|\sigma^2,x)\pi_2(\sigma^2|x)d\theta\\&=\pi_2(\sigma^2|x)\int_{-\infty}^{\infty}\pi_1(\theta|\sigma^2,x)d\theta\\&=\pi_2(\sigma^2|x)\end{aligned}$$

从而由 (1) 知 σ^2 的边缘密度 $\pi(\sigma^2|x)$ 为逆伽马分布 $\Gamma^{-1}(m/2,B_m/2)$

(3)

证明: 要证明 θ 的边缘后验密度，将后验密度对 σ^2 积分，可以得到

$$\begin{aligned}\pi(\sigma^2|x)&=\int_0^{\infty}\pi(\theta,\sigma^2|x)d\sigma^2\\&=\int_0^{\infty}\pi_1(\theta|\sigma^2,x)\pi_2(\sigma^2|x)d\sigma^2\\&\propto\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(m+k)}}e^{-\frac{(\theta-\frac{m\bar{x}+k\mu}{m+k})^2}{2\sigma^2/(m+k)}}(\sigma^2)^{-1-m/2}e^{-\frac{\sum_{i=1}^m x_i^2+k\mu^2-(\frac{m\bar{x}+k\mu}{m+k})^2(k+m)}{2\sigma^2}}d\sigma^2\end{aligned}$$

到这里，我们可以注意到如果将 θ 视为常数，这里积分的核就是逆伽马分布 $\Gamma^{-1}((m+1)/2,((\theta-\frac{m\bar{x}+k\mu}{m+k})^2(m+k)/2+B_m/2)$ 那么积分可以得到这个核

前面系数的倒数，也就是

$$\pi(\theta|x) \propto ((\theta - \frac{m\bar{x}+k\mu}{m+k})^2(m+k)/2 + B_m/2)^{-(m+1)/2}$$
$$\propto (1+\frac{1}{m}(\frac{\theta-\frac{m\bar{x}+k\mu}{m+k}}{\sqrt{\frac{B_m}{m(m+k)}}})^2)^{-(m+1)/2}$$

从而我们得到了 θ 的边缘分布为广义一元 t 分布 $\mathcal{T}(m, \frac{m\bar{x}+k\mu}{m+k}, \frac{B_m}{m(m+k)})$ 即为所求

3.23 题

(1)

证明: (θ,σ^2) 的先验密度 $\pi(\theta,\sigma^2) = \pi_1(\theta|\sigma^2)\pi_2(\sigma^2)$,$\pi(\theta,\sigma^2)$ 为 $N(\mu,\tau\sigma^2)$ 的密度,$\pi_2(\sigma^2)$ 为逆伽马分布 $\Gamma^{-1}(\alpha,\beta)$ 的密度即为

$$\pi_2(\sigma^2) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(\sigma^2)^{-(\alpha+1)}e^{-\frac{\beta}{\sigma^2}}$$

X 是从正态分布总体 $N(\theta,\sigma^2)$ 抽取的 i.i.d. 样本, 密度函数为 $f(x|\theta,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$

从而后验分布为

$$\begin{aligned}
pi(\theta,\alpha^2|x) &= f(x|\theta,\sigma^2)\pi(\theta,\alpha^2) \\
&= f(x|\theta,\sigma^2)\pi_1(\theta|\sigma^2)\pi_2(\sigma^2) \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma^2}}e^{-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\tau\sigma^2}}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(\sigma^2)^{-(\alpha+1)}e^{-\frac{\beta}{\sigma^2}} \\
&\propto e^{-\frac{\tau n\theta^2-2\tau n\bar{x}\theta+\tau\sum_{i=1}^n x_i^2+\theta^2-2\mu\theta+\mu^2+2\beta}{2\tau\sigma^2}}(\sigma^2)^{-(\alpha+1)-(n+1)/2} \\
&\propto \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma^2/(n\tau+1)}}e^{-\frac{(\theta-\frac{n\tau\bar{x}+\mu}{n\tau+1})^2}{2\tau\sigma^2/(n\tau+1)}}(\sigma^2)^{-(\alpha+1)-n/2}e^{-\frac{\tau\sum_{i=1}^m x_i^2+\mu^2-(\frac{n\tau\bar{x}+\mu}{n\tau+1})^2(n\tau+1)+2\beta}{2\tau\sigma^2}}
\end{aligned}$$

其中

$$\tau\sum_{i=1}^m x_i^2+\mu^2-(\frac{n\tau\bar{x}+\mu}{n\tau+1})^2(n\tau+1)+2\beta = 2\tau(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu^2)/2(1+n\tau)+\beta)$$

从而我们得到了可以将后验密度表示为

$$\pi(\theta,\sigma^2|x)=\pi_1(\theta|\sigma^2,x)\pi_2(\sigma^2|x)$$

其中 $\pi_1(\theta|\sigma^2,x)$ 为正态分布 $N(\frac{n\tau\bar{x}+\mu}{n\tau+1},\tau\sigma^2/(n\tau+1))$ $\pi_2(\sigma^2|x)$ 为逆伽马分布 $\Gamma^{-1}(\alpha+n/2,\bar{\beta})$, $\bar{\beta}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m(x_i-\bar{x})^2+\frac{n(\bar{x}-\mu^2)}{2(1+n\tau)}+\beta$

(2)

证明: 求 σ^2 的边缘分布，即将后验密度对 θ 积分

$$\begin{aligned}\pi(\sigma^2|x)&=\int_{-\infty}^{\infty}\pi(\theta,\sigma^2|x)d\theta\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\pi_1(\theta|\sigma^2,x)\pi_2(\sigma^2|x)d\theta\\&=\pi_2(\sigma^2|x)\int_{-\infty}^{\infty}\pi_1(\theta|\sigma^2,x)d\theta\\&=\pi_2(\sigma^2|x)\end{aligned}$$

从而由 (1) 知 σ^2 的边缘密度 $\pi(\sigma^2|x)$ 为逆伽马分布 $\Gamma^{-1}(\alpha+n/2,\bar{\beta})$

(3)

证明: 要证明 θ 的边缘后验密度，将后验密度对 σ^2 积分，可以得到

$$\begin{aligned}\pi(\sigma^2|x)&=\int_0^{\infty}\pi(\theta,\sigma^2|x)d\sigma^2\\&=\int_0^{\infty}\pi_1(\theta|\sigma^2,x)\pi_2(\sigma^2|x)d\sigma^2\\&\propto\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma^2/(n\tau+1)}}e^{-\frac{(\theta-\frac{n\tau\bar{x}+\mu}{n\tau+1})^2}{2\tau\sigma^2/(n\tau+1)}}(\sigma^2)^{-(\alpha+1)-n/2}e^{-\frac{\tau\sum_{i=1}^m x_i^2+\mu^2-(\frac{n\tau\bar{x}+\mu}{n\tau+1})^2(n\tau+1)+2\beta}{2\tau\sigma^2}}d\sigma^2\end{aligned}$$

到这里，我们可以注意到如果将 θ 视为常数，这里积分的核就是逆伽马分布 $\Gamma^{-1}((n+1)/2+\alpha,(\frac{n\tau\bar{x}+\mu}{n\tau+1})^2(n\tau+1)/2\tau+\bar{\beta})$ 那么积分可以得到这个核前面

系数的倒数，也就是

$$\begin{aligned}\pi(\theta|x) &\propto ((\theta-\frac{n\tau\bar{x}+\mu}{n\tau+1})^2(n\tau+1)/2\tau+\bar{\beta})^{-(n+1)/2+\alpha}\\ &\propto (1+\frac{1}{2\alpha+n}(\frac{\theta-\frac{n\tau\bar{x}+\mu}{n\tau+1}}{\sqrt{\frac{\tau\bar{\beta}}{(1+n\tau)(\alpha+n/2)}}})^2)^{-(n+1)/2+\alpha}\end{aligned}$$

从而我们得到了 σ^2 的边缘分布为广义一元 t 分布 $\mathcal{T}(2\alpha+n,\frac{n\tau\bar{x}+\mu}{n\tau+1},\frac{\tau\bar{\beta}}{(1+n\tau)(\alpha+n/2)})$ 即为所求