

Programa del curso MA-2104
Cálculo Superior

Escuela a cargo del curso: Matemática.

Carreras a las que pertenece el curso:

- **Grupo A:** Licenciatura en Ingeniería Electrónica, Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica, Licenciatura Ingeniería en Computadores.
- **Grupo B:** Licenciatura en Ingeniería Ambiental, Licenciatura en Ingeniería en Construcción, Licenciatura en Ingeniería en Producción Industrial, Licenciatura en Mantenimiento Industrial.
- **Grupo C:** Licenciatura en Ingeniería Física.

I parte: Aspectos relativos al plan de estudios

1 Datos generales

Nombre del curso: Cálculo Superior

Código: MA-2104

Tipo de curso: Teórico

Electivo o no: No

N° de créditos: 4

N° horas de clase por semana: 4

N° horas extraclase por semana: 8

% de las áreas curriculares: No aplica

Ubicación en el plan de estudios: Tercer semestre (grupo A), cuarto semestre (grupo B) y quinto semestre (grupo C)

Requisitos: MA-1103

Correquisitos: No tiene

El curso es requisito de: Ninguno

Asistencia: Libre

Suficiencia: Sí

Posibilidad de reconocimiento: Sí

Vigencia del programa: II Semestre del 2022

2 Descripción general

El curso Cálculo Superior es el cuarto de la secuencia de cursos diseñados para brindar la formación matemática de las carreras de ingeniería que imparte el Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Es un curso teórico-práctico y en él se pretende dar una visión sobre el cálculo en varias variables. En la parte gráfica se hace un análisis de las secciones cónicas, la graficación de superficies y sólidos, el análisis y graficación del dominio de funciones en dos variables.

Luego, se trabaja con el cálculo diferencial y algunas de sus aplicaciones (plano y recta tangente, derivada direccional y optimización). En la parte de integración se aborda el cálculo de áreas y volúmenes. Y, finalmente, se introduce el cálculo vectorial con los temas de integral de línea, integral de superficie y algunas de sus aplicaciones.

3 Objetivos

Generales:

1. Lograr que el estudiante adquiriera conceptos del Cálculo Diferencial e Integral de funciones en varias variables.
2. Lograr que el estudiante domine las técnicas fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral, en varias variables.
3. Lograr que el estudiante domine las técnicas fundamentales del cálculo vectorial.
4. Lograr que el estudiante adquiriera destrezas y habilidades en la resolución de ejercicios y problemas.
5. Fomentar en el estudiante una actitud crítica y creativa.
6. Lograr que el estudiante analice, interprete, explique, modele y resuelva problemas usando conceptos del Cálculo Diferencial e Integral en varias variables.
7. Lograr que el estudiante comprenda modelos matemáticos que respondan a problemas vinculados a la ciencia y la tecnología.
8. Fomentar en el estudiante el interés por la obtención de nuevos conocimientos.

Específicos por tema:

1. Secciones cónicas:
 - 1.1) Comprender el concepto de lugar geométrico del plano.
 - 1.2) Dada la ecuación general $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, identificar y graficar la sección cónica que representa.
2. Cálculo diferencial de funciones de varias variables.
 - 2.1) Conocer y comprender el concepto de función de varias variables.

- 2.2) Reconocer las ecuaciones de las superficies cilíndricas, de revolución y graficar dichas superficies.
 - 2.3) Reconocer las ecuaciones de las superficies cuádricas, identificar al tipo de superficie que corresponde y graficarla usando curvas de nivel y trazas sobre los planos coordenados.
 - 2.4) Graficar superficies de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$ usando curvas de nivel y trazos sobre los planos coordenados.
 - 2.5) Representar sólidos limitados por superficies.
 - 2.6) Conocer y comprender el concepto de derivadas parciales de funciones de varias variables.
 - 2.7) Calcular las derivadas parciales, de primer orden u orden superior, de funciones de varias variables, usando los teoremas correspondientes.
 - 2.8) Calcular las derivadas parciales en la resolución de problemas sobre rectas tangentes, plano tangente y recta normal a una superficie.
 - 2.9) Aplicar el concepto de derivadas parciales en la resolución de problemas sobre rectas tangentes, plano tangente y recta normal a una superficie.
 - 2.10) Aplicar la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales de funciones compuestas.
 - 2.11) Aplicar el concepto de derivadas parciales en problemas que involucren razones de cambio.
 - 2.12) Determinar el gradiente y la derivada direccional.
 - 2.13) Determinar la máxima razón de cambio de funciones de varias variables.
 - 2.14) Determinar los máximos y los mínimos de una función de dos variables utilizando el criterio de las segundas derivadas.
 - 2.15) Determine los máximos y mínimos de funciones de varias variables sujetas a condiciones, utilizando multiplicadores de Lagrange.
 - 2.16) Resolver problemas que involucren los conceptos de máximos y mínimos de funciones de varias variables.
3. Integrales Dobles y Triples
 - 3.1) Calcular integrales dobles con coordenadas rectangulares por medio de integración iterada.
 - 3.2) Calcular áreas y volúmenes de regiones de sólidos mediante integrales dobles.
 - 3.3) Calcular integrales dobles en coordenadas polares.
 - 3.4) Calcular integrales triples mediante integración iterada.
 - 3.5) Calcular volúmenes, centros de masa y momentos de inercia usando integrales triples.
 4. Integral de línea e integral de superficie.
 - 4.1) Conocer y comprender el concepto de campo vertical.

- 4.2) Conocer y comprender el concepto de ecuación paramétrica de una curva.
- 4.3) Conocer y comprender el concepto de integral de línea.
- 4.4) Calcular integrales de línea.
- 4.5) Aplicar las integrales de línea a problemas que involucren los conceptos de masa de un alambre de densidad variable, trabajo realizado por una fuerza y longitud en un arco de curva.
- 4.6) Determinar si una integral de línea dada es independiente de la trayectoria de integración y aplicar este resultado para calcular integrales.
- 4.7) Conocer y aplicar el teorema de Green.
- 4.8) Conocer y comprender el concepto de integral de superficies.
- 4.9) Calcular integrales de superficie.
- 4.10) Aplicar la integral de superficie a problemas que involucren el flujo de un campo vectorial a través de una superficie y al cálculo del área de una de una superficie.
- 4.11) Conocer y comprender los conceptos de divergencia y rotación.
- 4.12) Conocer y aplicar el teorema de la divergencia.
- 4.13) Conocer y aplicar el teorema de Stokes.

Relación de los objetivos con los atributos de graduados

Nota: *Simbología de los atributos* → **CI**: Conocimiento de ingeniería, **TIE**: Trabajo individual y en equipo, **AC**: Aprendizaje continuo. *Simbología en el nivel de desarrollo* → **I**: Inicial, **M**: Intermedio, **A**: Avanzado.

Objetivos del curso	Atributos	Nivel de desarrollo por alcanzar
1. Lograr que el estudiante adquiriera conceptos del Cálculo Diferencial e Integral de funciones en varias variables.	TIE-AC	I
2. Lograr que el estudiante domine las técnicas fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral, en varias variables.	TIE-AC	I
3. Lograr que el estudiante domine las técnicas fundamentales del cálculo vectorial.	TIE-AC	I
4. Lograr que el estudiante adquiriera destrezas y habilidades en la resolución de ejercicios y problemas.	TIE-CI-AC	I
5. Fomentar en el estudiante una actitud crítica y creativa.	TIE-AC	I
6. Lograr que el estudiante analice, interprete, explique, modele y resuelva problemas usando conceptos del Cálculo Diferencial e Integral en varias variables.	TIE-CI-AC	I
7. Lograr que el estudiante comprenda modelos matemáticos que respondan a problemas vinculados a la ciencia y la tecnología.	CI	I
8. Fomentar en el estudiante el interés por la obtención de nuevos conocimientos.	AC	I

4 Contenidos

1. Secciones Cónicas (6 horas¹)

- 1.1) Lugar geométrico del plano.
- 1.2) Ecuación general y gráfico de:
 - 1.2.a) Círculo.
 - 1.2.b) Elipse.
 - 1.2.c) Parábola.
 - 1.2.d) Hipérbola.

2. Cálculo diferencial de funciones de varias variables (24 horas)

- 2.1) Definición de una función de dos o más variables.
- 2.2) Representación de superficies.
 - 2.2.a) De revolución.
 - 2.2.b) Cilíndricas.
 - 2.2.c) Cuádricas.
 - 2.2.d) Planos.
- 2.3) Representación de sólidos limitados por superficies.
- 2.4) Límite y continuidad de una función de dos variables.
- 2.5) Derivadas parciales de funciones de varias variables.
- 2.6) Interpretación geométrica de las derivadas parciales de una función de dos variables.
- 2.7) Derivadas parciales de funciones definidas implícitamente.
- 2.8) Rectas tangentes a una superficie en \mathbb{R}^3 .
- 2.9) Plano tangente a una superficie en \mathbb{R}^3 .
- 2.10) Recta normal a una superficie en \mathbb{R}^3 .
- 2.11) Derivadas parciales de orden superior.
- 2.12) Derivadas parciales de funciones compuestas.
- 2.13) Derivada direccional. Gradiente.
- 2.14) Máximos y mínimos de funciones de 2 o 3 variables.
 - 2.14.a) Criterio de las segundas derivadas parciales para determinar máximos o mínimos de funciones de dos variables.
 - 2.14.b) Método de los multiplicadores de Lagrange para obtener máximos o mínimos.

3. Integrales Dobles y Triples (14 horas)

- 3.1) Integrales dobles en coordenadas rectangulares.
- 3.2) Integrales iteradas.

¹El número de horas que se enuncia en cada contenido es aproximado.

- 3.3) Integrales dobles en coordenadas polares.
- 3.4) Área de una región plana.
- 3.5) Integral triple en coordenadas rectangulares.
- 3.6) Aplicaciones de integral doble en:
 - 3.6.a) Cálculo de áreas.
 - 3.6.b) Cálculo de volúmenes.
- 3.7) Aplicaciones de la integral triple en:
 - 3.7.a) Cálculo de volúmenes.
 - 3.7.b) Masa de un sólido.
 - 3.7.c) Momentos de inercia.
- 4. **Integral de línea e integral de superficie** (20 horas)
 - 4.1) Definición de campo vectorial y de campo escalar.
 - 4.2) Ecuación paramétrica de una curva:
 - 4.2.a) en el plano.
 - 4.2.b) en el espacio.
 - 4.3) Integral de línea
 - 4.3.a) a lo largo de una curva.
 - 4.3.b) respecto a la longitud de arco.
 - 4.4) Propiedades de las integrales de línea.
 - 4.5) Aplicaciones:
 - 4.5.a) Masa de un alambre de densidad variable.
 - 4.5.b) Trabajo realizado por una fuerza variable.
 - 4.6) Condición necesaria y suficiente para que una integral de línea sea independiente del camino de integración.
 - 4.7) Teorema de Green.
 - 4.8) Integral de superficie para un campo vectorial y para un campo escalar.
 - 4.9) Aplicaciones
 - 4.9.a) flujo de un campo vectorial a través de una superficie.
 - 4.9.b) área de una porción de superficie.
 - 4.10) Divergencia y rotacional.
 - 4.11) Teorema de la divergencia.
 - 4.12) Teorema de Stokes.

II parte: Aspectos operativos

5 Metodología de enseñanza y aprendizaje

Para el desarrollo del curso el profesor hará una exposición teórica de los temas y presentará ejemplos ilustrativos para complementar la teoría. Durante las clases debe buscarse la participación activa de los estudiantes. Adicionalmente, el docente debe estimular el uso de programas computacionales como Geogebra o sitios en línea de interés como Wolfram Alpha, con el objetivo de que con dicho apoyo se logre que los estudiantes comprendan mejor los conceptos, y no solo enfocarse en aspectos meramente prácticos.

De los estudiantes se espera una participación activa durante cada una de las clases, formulando preguntas y participando constantemente. El estudiante deberá dedicar tiempo extraclasses al estudio y solución de ejercicios de la práctica, así como el desarrollo de cada una de las guías semanales que la Cátedra diseñó para el trabajo asincrónico.

6 Evaluación

El curso se evaluará de la siguiente manera:

- Tres exámenes parciales con un valor del 20 % cada uno, para un total de 60 % para este rubro.
- Dos tareas a nivel de cátedra, con un valor del 10 % cada una, para un total de 20 % para este rubro.
- Quices, tareas, proyectos o cualquier otra actividad que su profesor(a) le indique, con un valor del 20 %. Se deben realizar al menos 5 evaluaciones en total en este rubro.

Las evaluaciones serán desarrolladas de acuerdo con el siguiente cronograma:

1. El parcial 1 en la semana 7 (tentativamente el sábado 10 de setiembre del 2022), el parcial 2 en semana 12 (tentativamente el sábado 15 de octubre del 2022), y el tercer parcial en la semana 18 (tentativamente el martes 22 de noviembre del 2022). Las fechas y horas definitivas serán publicadas en la Comunidad de Cálculo Superior, cuando se tenga la publicación oficial del calendario de exámenes de la Escuela de Matemática. Las fechas de las pruebas extraordinarias también serán publicadas oportunamente en la Comunidad de Cálculo Superior.
2. La tarea de cátedra #1 será **individual** y será asignada el viernes 16 de setiembre del 2022 (viernes de la semana 8). Los detalles específicos de esta evaluación le serán comunicados con suficiente anticipación.
3. La tarea de cátedra #2 será **grupal** y será asignada el viernes 28 de octubre del 2022 (viernes de la semana 14). Los detalles específicos de esta evaluación le serán comunicados con suficiente anticipación.

El curso se aprueba con una nota final mayor o igual que 70. El estudiante con nota final menor o igual que 55 reprueba el curso. El estudiante con nota final igual que 60

o 65 tiene derecho a presentar un examen de reposición (en el que se puede evaluar cualquier contenido del curso). Si el estudiante aprueba el examen (con nota mayor o igual a 70), entonces aprueba el curso con una nota final igual a 70; en caso contrario, la nota final será igual a la que tenía antes de realizar el examen de reposición.

Adicionalmente, deben ser tomadas en cuenta las siguientes consideraciones:

- Las fechas de las pruebas parciales, de las pruebas extraordinarias y del examen de reposición, en conjunto con el periodo en que estas serán aplicadas, estarán disponibles con suficiente anticipación en la Comunidad de Cálculo Superior, en el TEC-Digital. La Coordinación procurará siempre recordar, mediante una noticia en el TEC-Digital, sobre cada una de dichas pruebas; sin embargo, es responsabilidad de cada estudiante revisar con anticipación la información publicada en la Comunidad de Cálculo Superior.
- El reclamo de resultados de una prueba ante el profesor, según lo dispuesto en el artículo 72 del Reglamento del Régimen Enseñanza-Aprendizaje del Tecnológico de Costa Rica y sus reformas, deberá ser presentado dentro de los tres días hábiles posteriores a la entrega de los resultados al grupo. Los otros recursos deberán respetar los plazos definidos en el mismo artículo. Toda apelación sobre los resultados de una prueba debe realizarse en los plazos y mediante los procedimientos establecidos en la reglamentación institucional vigente.
- Las fechas y hora de aplicación de los exámenes parciales, así como la metodología de cómo será aplicadas las pruebas, les serán comunicadas oportunamente. Según lo dispuesto en el artículo 10 del Reglamento del Régimen Enseñanza-Aprendizaje del Tecnológico de Costa Rica y sus reformas, los representantes estudiantiles deben velar por el cumplimiento de sus responsabilidades académicas por sobre otro tipo de actividad.
- Toda comunicación vía TEC-Digital o correo electrónico, es de carácter oficial.
- Para conocer aspectos específicos de los derechos y deberes de los estudiantes se recomienda consultar el Reglamento del Régimen Enseñanza-Aprendizaje del Tecnológico de Costa Rica y sus reformas.

Sobre EMERGENCIAS en el TEC

Al reportar una emergencia debe: indicar la dirección exacta donde se está presentando dicha emergencia, especificar la naturaleza de la emergencia, e indicar su nombre completo y número telefónico. Dependiendo de las instalaciones en que se encuentre (Cartago, San Carlos, Alajuela, San José o Limón) se tiene un número telefónico distinto y horarios específicos (de lunes a viernes), los cuales se le detallarán a continuación. En todos los casos, fuera del horario indicado deberá reportar la emergencia al 911.

- **Cartago:** de 07:30 a 19:30, llamar al 2550-9111 (o bien, a alguna de las extensiones: 9111 o 39111).

- **San Carlos:** de 07:00 a 16:00, llamar al número 2401-3090.
- **San José:** lunes, miércoles y viernes de 07:30 a 15:30, martes y jueves de 07:30 a 19:30, llamar al número 2550-9082.
- **Limón:** de 07:30 a 16:30, llamar al número 2550-9393.
- **Alajuela:** lunes y viernes de 13:00 a 17:00, martes y jueves de 08:00 a 17:00, llamar al número 2430-5730.

7 Bibliografía

Obligatoria

- Mora, W. (2020). *Cálculo en Varias Variables. Visualización Interactiva* (2° ed.). Revista digital Matemática, Educación e Internet. Disponible aquí.
- Mora, W. et al (2021). *Práctica del curso Cálculo Superior. Selección de ejercicios*. Revista digital Matemática, Educación e Internet. Disponible aquí.

Complementaria

- Larson, R, Hostetler, R. y Edwards, B. (2005). *Cálculo II* (8° Ed.). McGraw-Hill Interamericana.
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables* (7° Ed.). Cengage Learning.
- Thomas, G. (2005). *Cálculo varias variables* (11° Ed.). Pearson.

Software y sitios de interés

- Geogebra: <http://www.geogebra.org/>
- Wolfram Alpha: <http://www.wolframalpha.com/>
- Symbolab: <https://es.symbolab.com/solver>

8 Profesores

Grupos	Profesor y correo	Sede	Ofici / ext ²	Consulta ³
2	Alejandra Jiménez Romero ajimenez@itcr.ac.cr	Cartago	I-22 / 2721 virtual →	M: 9:30-11:30 J: 10:00-12:00
4	Félix Núñez Vanegas fnunez@itcr.ac.cr	Cartago	II-38 / 2231 virtual →	K-J: 13:00-14:30 J: 18:00-19:00
3(v) y 5	Norberto Oviedo Ugalde noviedo@itcr.ac.cr	Cartago	II-30 / 2007 virtual →	K: 7:30-9:30 J: 7:30-9:30
6	Juan José Fallas (Coord) jfallas@itcr.ac.cr	Cartago	II-33 / 2034	K-J: 7:30-9:30
7	Gilberto Vargas Mathey givargas@itcr.ac.cr	Cartago	I-07 / 2016 virtual →	K: 17:00-18:30 M: 15:30-16:00 M-V: 14:00-15:00
50 y 51(v)	Carlos E. Guillén Pérez ceguillen@itcr.ac.cr	San Carlos CNESC-07	3036	V: 8:30-9:30 V: 12:30-15:30
60	Verónica López Mora vlopez@itcr.ac.cr	Limón Matemática	9229	K-J: 10:00-12:00
90	Melvin Ramírez Bogantes meramirez@itcr.ac.cr	Alajuela	I-02 / 2435 Alajuela →	M-V: 16:00-17:00 K: 10:00-12:00

²En Cartago y en Limón para llamar debe marcar 2550 seguido de la extensión indicada. En San Carlos debe marcar 2401 seguido de la extensión indicada.

³Para los horarios etiquetados con “virtual →”, el estudiante debe coordinar con tiempo con el profesor(a) respectivo mediante correo electrónico, para que este(a) le indique el medio por el cual le atenderá virtualmente (Zoom, Teams, etc.). Los demás horarios son presenciales.