Mathematische Grundlagen KE1 Einsendeaufgaben

Alexander Seidmann

October 16, 2022

1.1

1.1.1

Behauptung: $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ und $(A \wedge B) \Rightarrow C$ sind logisch äquivalent.

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$
w	w	w	w	w
w	w	f	f	f
w	f	w	w	w
w	f	f	w	w
f	w	w	w	w
f	w	f	f	w
f	f	w	w	w
f	f	f	w	w

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \Rightarrow C$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	f
w	f	w	f	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	w	f	f	w
f	f	w	f	w
f	f	f	f	w

$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ und $(A \wedge B) \Rightarrow C$ sind logisch äquivalent. $\square$

1.1.2

Behauptung: $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ und $((\neg A) \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$ sind logisch äquivalent.

A	B	C	$(\neg A) \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$((\neg A) \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f
w	f	w	w	w	w
w	f	f	w	w	w
f	w	w	w	w	w
f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	w	w
f	f	f	f	w	f

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	f
w	f	w	f	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	w
f	w	f	w	f
f	f	w	w	w
f	f	f	w	f

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ und $((\neg A) \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$ sind logisch äquivalent. $\square$

1.2

1.2.1

Behauptung: Es gilt $n^2 > n + 1$ für alle $n \geq 2$.
Induktionsanfang:

$$n = 2$$
$$2^2 > 2 + 1$$
$$4 > 3$$

Es gilt der Induktionsanfang.
Induktionsbehauptung:

$$(n + 1)^2 > (n + 1) + 1$$

Beweis:

$$(n + 1)^2 > n + 1 + (((n + 1) + 1) - (n + 1))$$
$$(n + 1)^2 > n + 1 + 1$$
$$(n + 1)^2 > (n + 1) + 1$$

Mit dem Prinzip der Vollständigen Induktion folgt für alle $n \in \mathbf{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $n^2 > n + 1$. $\square$

1.2.2

Behauptung: Es gilt $n^2 \geq 2n+3$ für alle $n \geq 3$.
Induktionsanfang:

$$n = 3$$
$$3^2 \geq 2 * 3 + 3$$
$$9 \geq 9$$

Es gilt der Induktionsanfang.
Induktionsschritt:

$$(n+1)^2 \geq 2(n+1)+3$$

Beweis:

$$(n+1)^2 \geq 2n+3+((2(n+1)+3)-(2n+3))$$
$$(n+1)^2 \geq 2n+3+2$$
$$(n+1)^2 \geq 2n+2+3$$
$$(n+1)^2 \geq 2(n+1)+3$$

Mit dem Prinzip der Vollständigen Induktion folgt: für alle $n \in \mathbf{N}$ mit $n \geq 3$ gilt $n^2 \geq 2n+3$. $\square$

1.3

1.3.1

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.3.2

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$$

1.4

1.4.1

$$f : N \to N$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{wenn } x \text{ ungerade} \\ \frac{x}{2}, \text{wenn } x \text{ gerade} \end{cases}$$

(a) ist erfüllt, da $\frac{x}{2}$ alle Zahlen $\mathbf{N}$ abbildet.
(b) ist erfüllt, da die Urbilder von $f(1)$ alle ungeraden Zahlen in $\mathbf{N}$ sind.

1.4.2

$$g : N \to N$$

$$g(x) = 2x$$

(a) ist erfüllt, da es für jedes Element $g(x)$ genau ein Urbild $x \in \mathbf{N}$ gibt.
(b) ist erfüllt, da $Bild(g)$ alle geraden Zahlen in $\mathbf{N}$ sind, und dadurch $\mathbf{N} \not Bild(g)$ alle ungeraden Zahlen sind, also eine unendlich große Menge.

1.5

Sei $A \in M_{mn}(\mathbf{K})$ eine Matrix, sodass $XA = 0 \in M_{mn}(\mathbf{K})$ für alle Matrizen $X \in M_{mm}(K)$ gilt. Beweisen Sie, dass A die Nullmatrix in $M_{mn}(K)$ ist.
Annahme: A ist die Nullmatrix in $M_{mn}(K)$. Sei $m = 2$ und $n = 3$ und X somit eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und A eine Matrix $\begin{pmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix}$.

Dann ist $XA = \begin{pmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ae+bh} & \text{af+bi} & \text{ag+bj} \\ \text{ce+dh} & \text{cf+di} & \text{cg+dj} \end{pmatrix}$.

Da XA die Nullmatrix in $M_{mn}(K)$ ist, muss

$$\begin{pmatrix} \text{ae+bh=0} & \text{af+bi=0} & \text{ag+bj=0} \\ \text{ce+dh=0} & \text{cf+di=0} & \text{cg+dj=0} \end{pmatrix}$$

gelten.
Sei nun $XA = (z_{ij})$, so muss sowohl der linke als auch der rechte Summand in Berechnung von z_{ij} immer 0 sein, oder die Summanden invers zueinander sein. Da es keine Zahlen $m, n \in K \setminus 0$ gibt, sodass für jede Zahlenkombination $x, y \in K \setminus 0$ $mx + ny = 0$ ist, muss A die Nullmatrix sein. $\square$