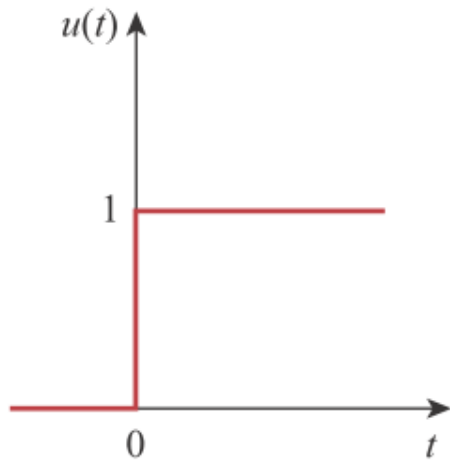


Tekillik Fonksiyonları

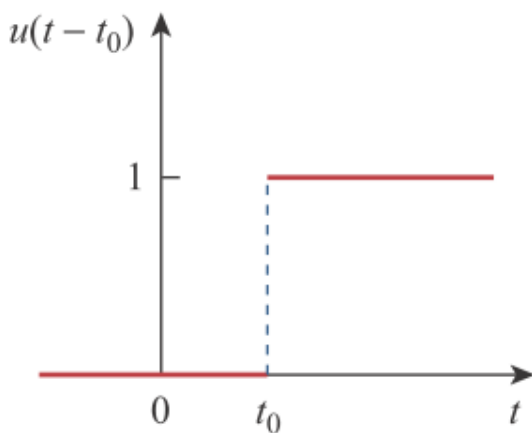
Tekillik fonksiyonları, süreksiz veya türevleri süreksiz olan fonksiyonlardır.



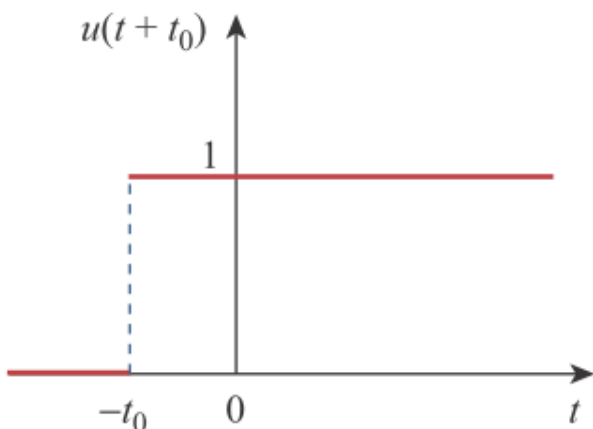
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

1/67

Birim Basamak Fonksiyonu



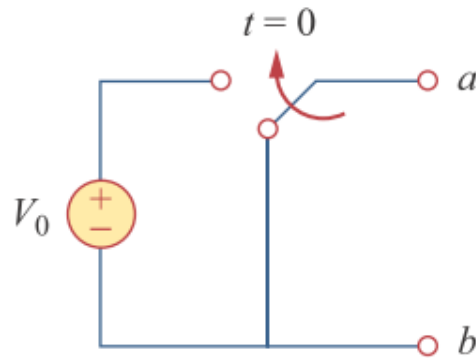
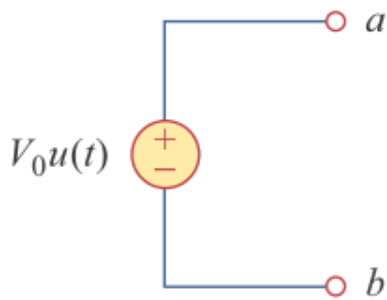
$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}$$



$$u(t + t_0) = \begin{cases} 0, & t < -t_0 \\ 1, & t > -t_0 \end{cases}$$

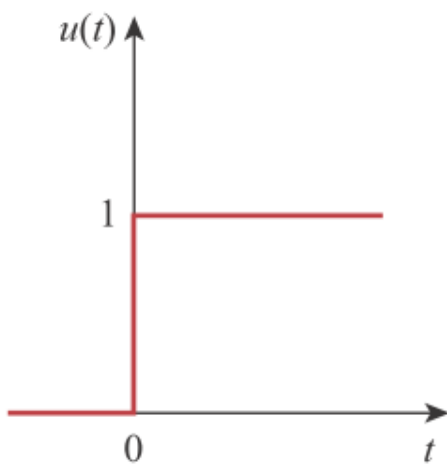
2/67

Birim Basamak Fonksiyonu

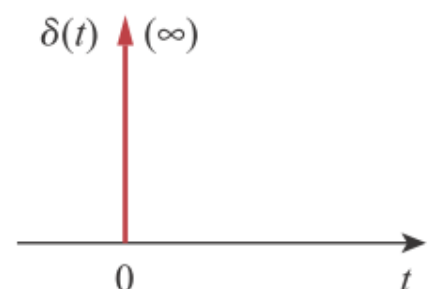


3/67

Birim Darbe (Impulse) Fonksiyonu



$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \text{Undefined}, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

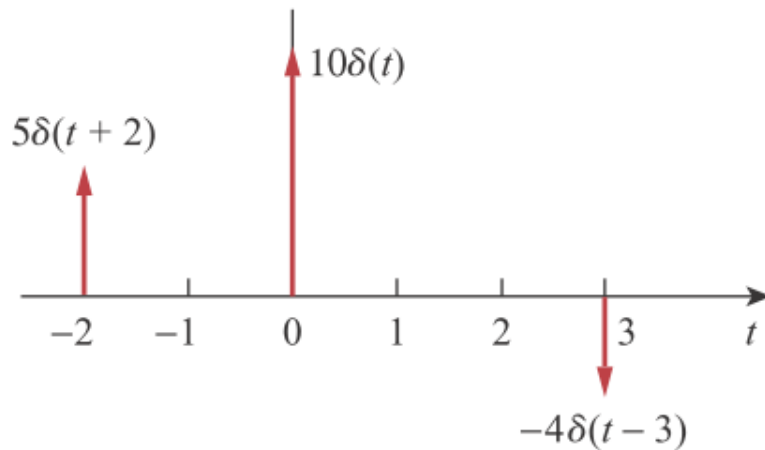


4/67

Birim Darbe (Impulse) Fonksiyonu

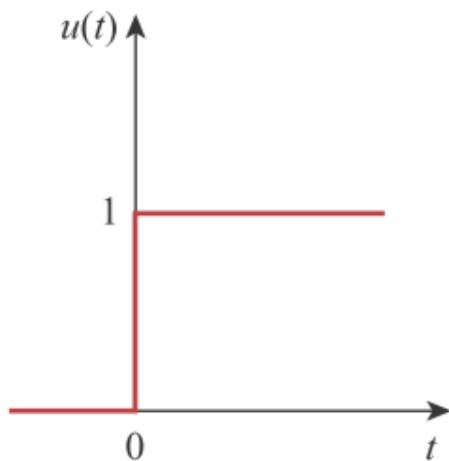
Birim darbe fonksiyonu $\delta(t)$, $t = 0$ haricinde her yerde 0'dır. $t = 0$ anında ise tanımsızdır

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

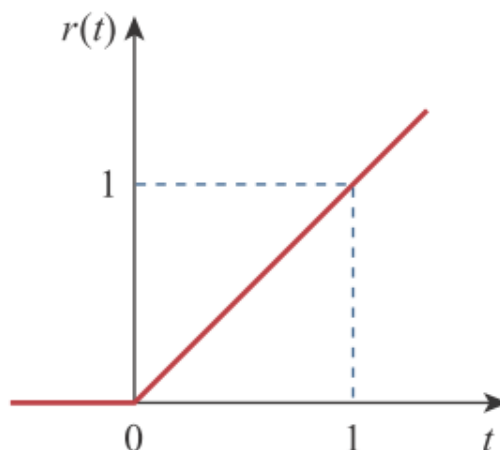


5/67

Birim Rampa Fonksiyonu



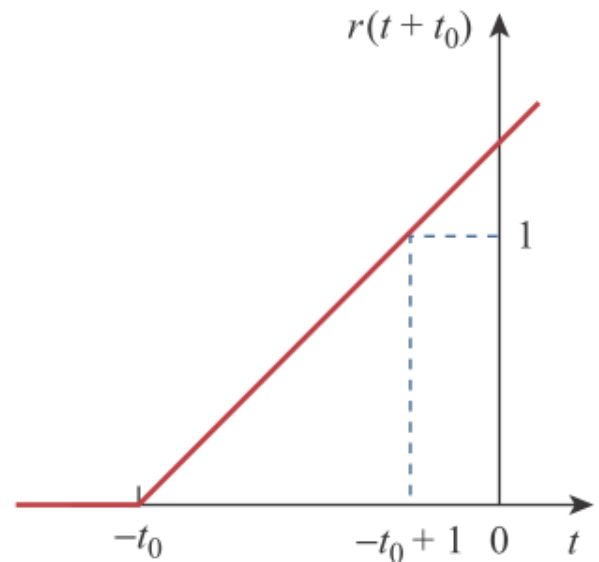
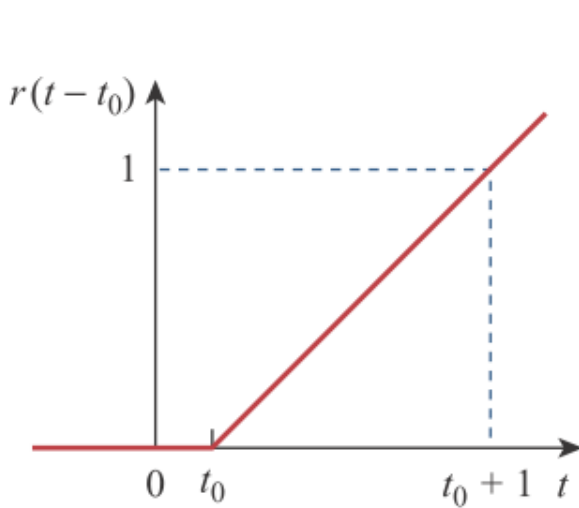
$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(t) dt = tu(t)$$



$$r(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$

6/67

Birim Rampa Fonksiyonu



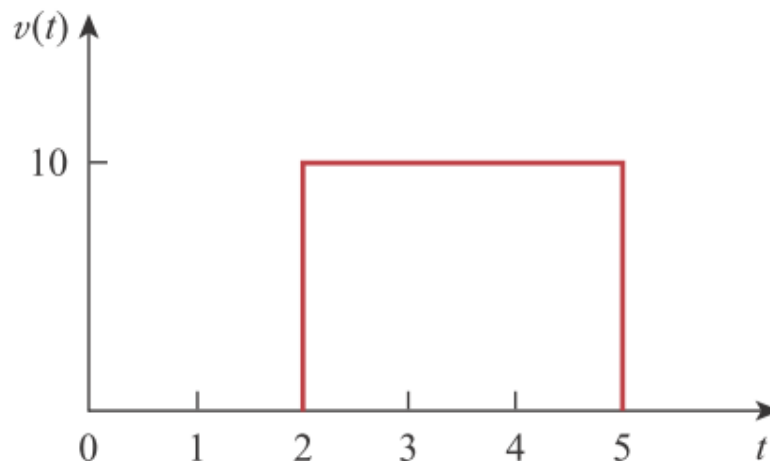
$$r(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0 \\ t - t_0, & t \geq t_0 \end{cases}$$

$$r(t + t_0) = \begin{cases} 0, & t \leq -t_0 \\ t + t_0, & t \geq -t_0 \end{cases}$$

7/67

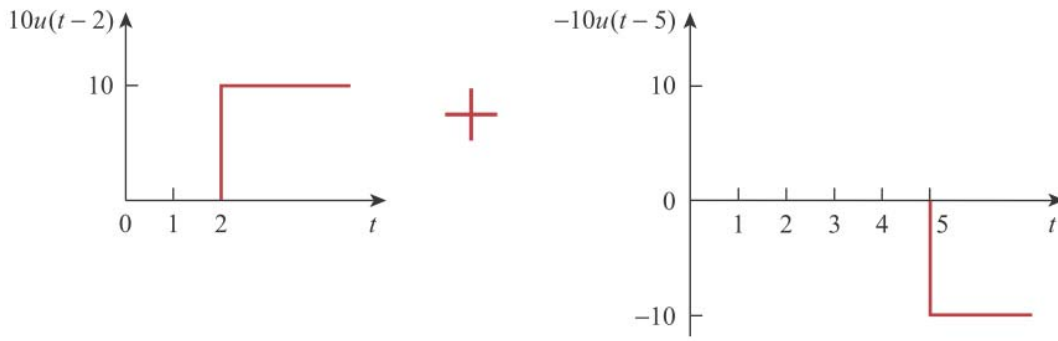
Tekillik Fonksiyonları

Soru: Grafikte verilen voltaj sinyalini birim basamak fonksiyonu ile ifade ediniz. Bulduğunuz fonksiyonun türevini alınız ve grafiğini çiziniz.



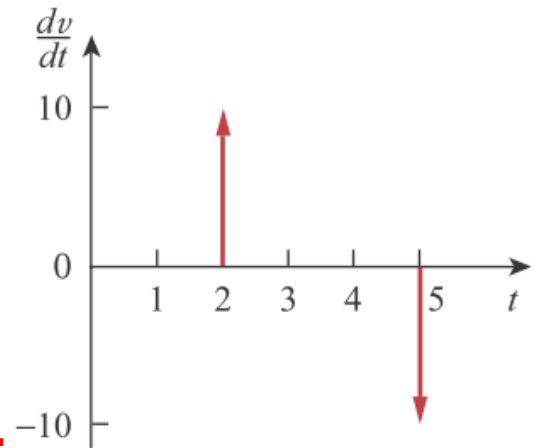
8/67

Tekillik Fonksiyonları



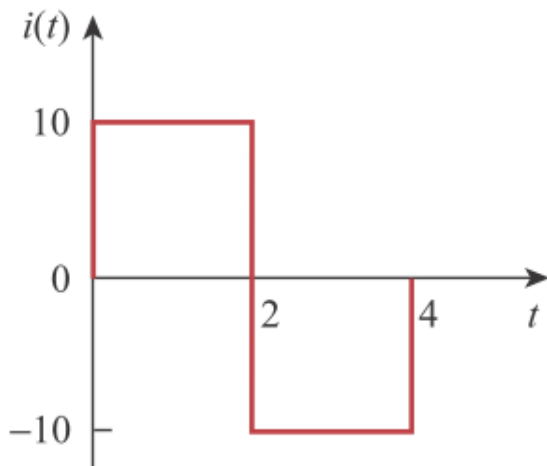
$$v(t) = 10u(t-2) - 10u(t-5) = 10[u(t-2) - u(t-5)]$$

$$\frac{dv}{dt} = 10[\delta(t-2) - \delta(t-5)]$$



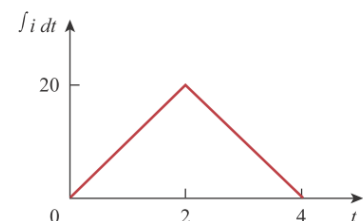
Tekillik Fonksiyonları

Ödev: Grafikte verilen voltaj sinyalini birim basamak fonksiyonu ile ifade ediniz. Bulduğunuz fonksiyonun integralini alınız ve grafiğini çiziniz.



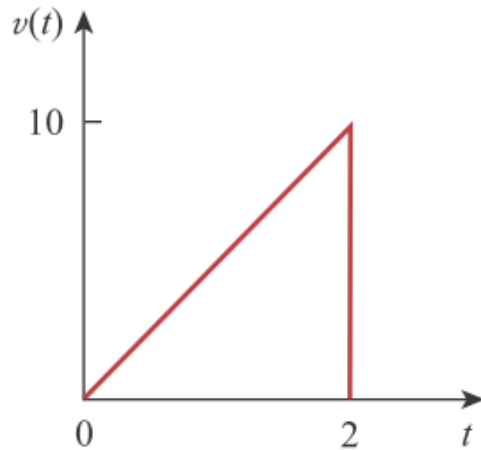
$$10[u(t) - 2u(t-2) + u(t-4)]$$

$$10[r(t) - 2r(t-2) + r(t-4)]$$



Tekillik Fonksiyonları

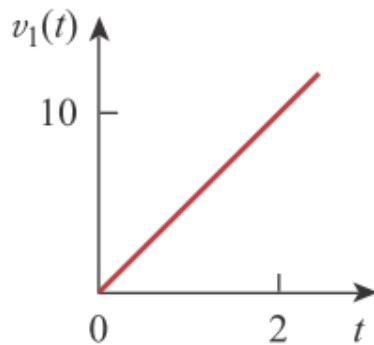
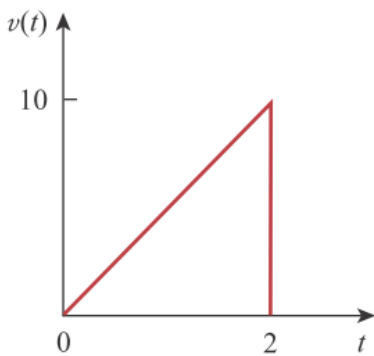
Soru: Verilen testere dişi fonksiyonunu tekillik fonksiyonları ile ifade ediniz.



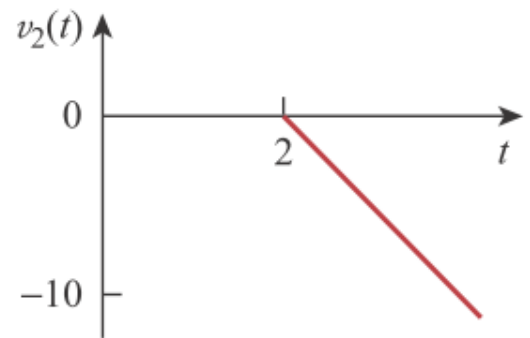
$$\begin{aligned}v(t) &= 5t[u(t) - u(t - 2)] \\&= 5tu(t) - 5tu(t - 2) \\&= 5r(t) - 5(t - 2 + 2)u(t - 2) \\&= 5r(t) - 5(t - 2)u(t - 2) - 10u(t - 2) \\&= 5r(t) - 5r(t - 2) - 10u(t - 2)\end{aligned}$$

11/67

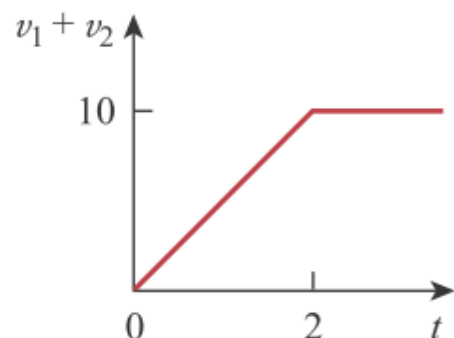
Tekillik Fonksiyonları



+

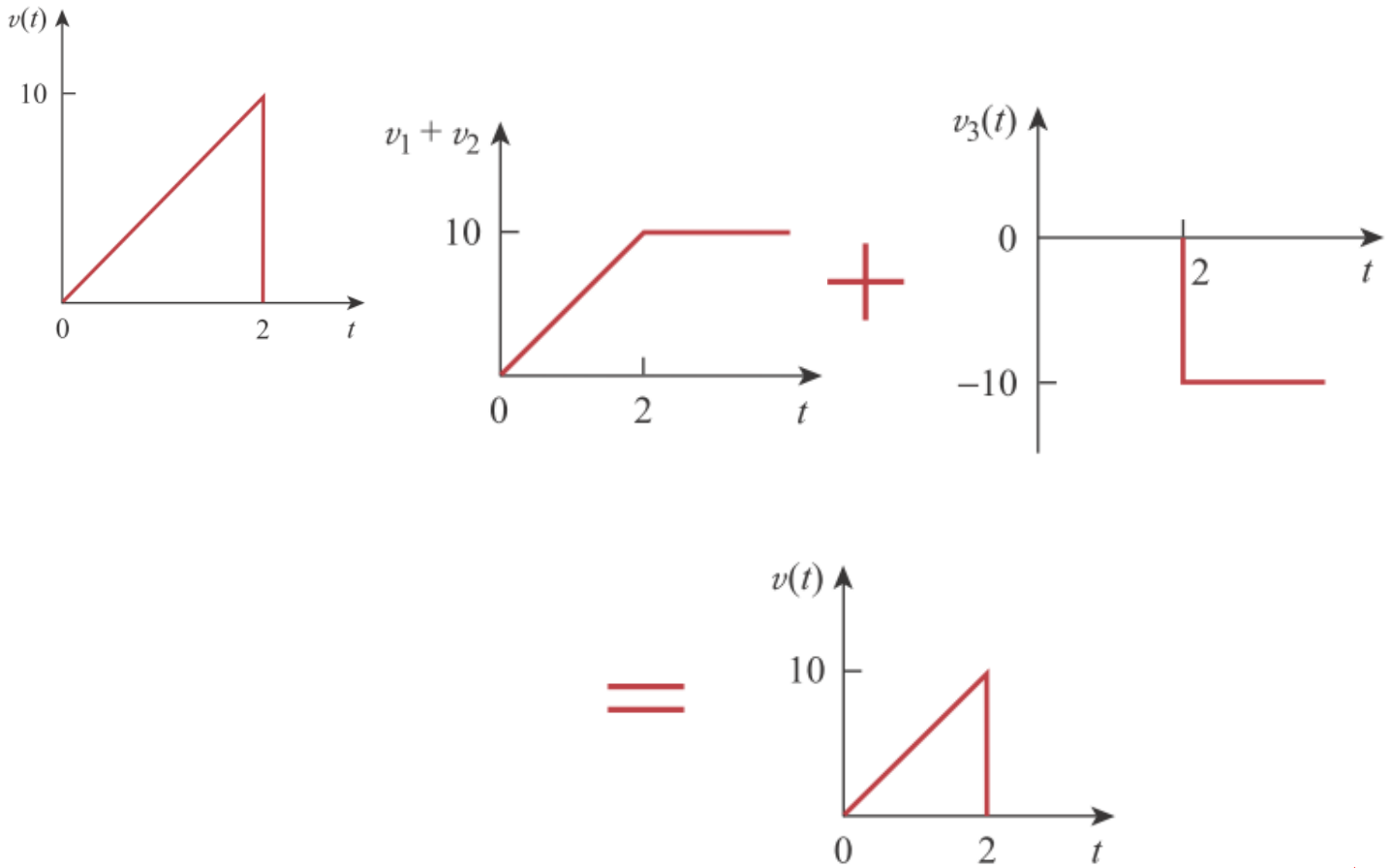


=



12/67

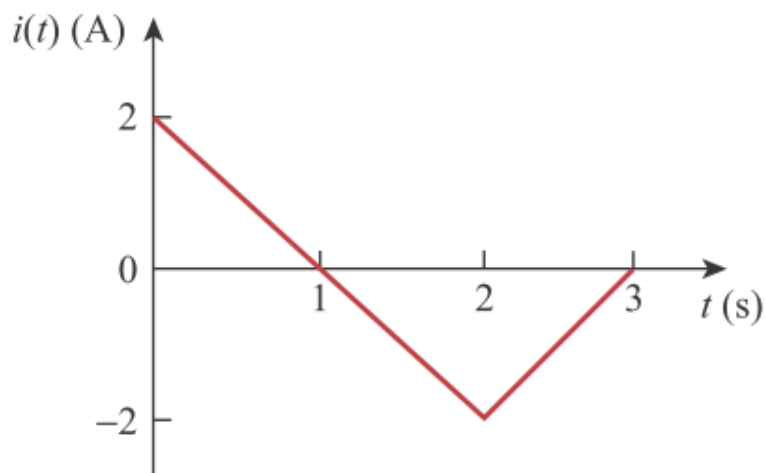
Tekillik Fonksiyonları



13/67

Tekillik Fonksiyonları

Ödev: Verilen testere dişi fonksiyonunu tekillik fonksiyonları ile ifade ediniz.



$$2u(t) - 2r(t) + 4r(t - 2) - 2r(t - 3).$$

14/67

Tekillik Fonksiyonları

Soru: Verilen fonksiyonu basamak ve rampa fonksiyonları ile ifade ediniz.

$$g(t) = \begin{cases} 3, & t < 0 \\ -2, & 0 < t < 1 \\ 2t - 4, & t > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= 3u(-t) - 2[u(t) - u(t - 1)] + (2t - 4)u(t - 1) \\ &= 3u(-t) - 2u(t) + (2t - 4 + 2)u(t - 1) \\ &= 3u(-t) - 2u(t) + 2(t - 1)u(t - 1) \\ &= 3u(-t) - 2u(t) + 2r(t - 1) \end{aligned}$$

15/67

Tekillik Fonksiyonları

Ödev: Verilen fonksiyonu basamak ve rampa fonksiyonları ile ifade ediniz.

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 8, & 0 < t < 2 \\ 2t + 6, & 2 < t < 6 \\ 0, & t > 6 \end{cases}$$

$$8u(t) + 2u(t - 2) + 2r(t - 2) - 18u(t - 6) - 2r(t - 6).$$

16/67

Tekillik Fonksiyonları

Soru: Darbe fonksiyonları içeren aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$\int_0^{10} (t^2 + 4t - 2)\delta(t - 2)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t - 1)e^{-t} \cos t + \delta(t + 1)e^{-t} \sin t]dt$$

$$\int_0^{10} (t^2 + 4t - 2)\delta(t - 2)dt = (t^2 + 4t - 2)|_{t=2} = 4 + 8 - 2 = 10$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t - 1)e^{-t} \cos t + \delta(t + 1)e^{-t} \sin t]dt$$

$$= e^{-t} \cos t|_{t=1} + e^{-t} \sin t|_{t=-1}$$

$$= e^{-1} \cos 1 + e^1 \sin(-1) = 0.1988 - 2.2873 = -2.0885$$

17/67

Tekillik Fonksiyonları

Ödev: Darbe fonksiyonları içeren aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t^3 + 5t^2 + 10)\delta(t + 3)dt, \quad \int_0^{10} \delta(t - \pi) \cos 3t dt$$

$$28, -1$$

Laplace Dönüşümü

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad s = \sigma + j\omega$$

Laplace dönüşümü, $f(t)$ fonksiyonunun zaman uzayından $F(s)$ fonksiyonunu veren kompleks s uzayına integral dönüşümüdür.

19/67

Laplace Dönüşümü

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Soru: Verilen fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulunuz.

(a) $u(t)$, (b) $e^{-at}u(t)$, $a \geq 0$, and (c) $\delta(t)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} 1e^{-st} dt = -\frac{1}{s}e^{-st} \Big|_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{s}(0) + \frac{1}{s}(1) = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta(t)] &= \\ \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt &= e^{-0} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-at}u(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-at}e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

20/67

Laplace Dönüşümü

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Ödev: Verilen fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulunuz.

$$r(t) = tu(t) \quad e^{-at}u(t) \quad e^{-j\omega t}u(t)$$

$$1/s^2, 1/(s + a), 1/(s + j\omega).$$

21/67

Laplace Dönüşümü

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Soru: Verilen fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulunuz.

$$f(t) = \sin \omega t u(t)$$

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[\sin \omega t] &= \int_0^{\infty} (\sin \omega t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}) dt \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

22/67

Laplace Dönüşümü

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Ödev: Verilen fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulunuz.

$$f(t) = 10 \cos \omega t u(t)$$

$$10s/(s^2 + \omega^2)$$

23/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Doğrusallık $\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$

Ölçeklendirme $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_{0^-}^{\infty} f(at)e^{-st} dt \quad x = at, dx = a dt,$$

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_{0^-}^{\infty} f(x)e^{-x(s/a)} \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} \int_{0^-}^{\infty} f(x)e^{-x(s/a)} dx$$

24/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Soru: $\mathcal{L}[\sin(\omega t)u(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ ise $\mathcal{L}[\sin(2\omega t)u(t)]$ değerini bulunuz

$$\mathcal{L}[\sin 2\omega t u(t)] = \frac{1}{2} \frac{\omega}{(s/2)^2 + \omega^2} = \frac{2\omega}{s^2 + 4\omega^2}$$

25/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Zaman ekseninde kayma $\mathcal{L}[f(t - a)u(t - a)] = e^{-as}F(s)$

Soru: Verilen fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}[\cos \omega(t - a)u(t - a)] \qquad \mathcal{L}[\cos \omega t u(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega(t - a)u(t - a)] = e^{-as} \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

26/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Frekans Ekseninde Kayma $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)u(t)] = F(s + a)$

Soru: Verilen fonksiyonların Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t u(t)] \quad \mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t u(t)]$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t u(t)] = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t u(t)] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2} \quad \sin \omega t u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\cos \omega t u(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

27/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Zamana Göre Türev

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}u(t)\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt \quad u = e^{-st}, du = -se^{-st} dt$$
$$dv = (df/dt) dt = df(t), v = f(t).$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}u(t)\right] = f(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t)[-se^{-st}] dt$$
$$= 0 - f(0^-) + s \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0^-)$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^-)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

28/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Zamana Göre Türev

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^-)$$

Soru: \cos fonksiyonunu kullanarak \sin fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$f(t) = \cos \omega t u(t)$$

$$f'(t) = -\omega \sin \omega t u(t)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin \omega t u(t)] &= -\frac{1}{\omega} \mathcal{L}[f'(t)] = -\frac{1}{\omega} [sF(s) - f(0^-)] \\ &= -\frac{1}{\omega} \left(s \frac{s}{s^2 + \omega^2} - 1 \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

29/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Zamana Göre İntegral

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_0^t f(x) dx\right] e^{-st} dt$$

$$u = \int_0^t f(x) dx, \quad du = f(t) dt \quad dv = e^{-st} dt, \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] &= \left[\int_0^t f(x) dx\right] \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) \Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-st} f(t) dt \\ &\quad \begin{array}{l} t = \infty \quad e^{-s\infty} \\ t = 0 \\ \frac{1}{s} \int_0^0 f(x) dx = 0 \end{array}\end{aligned}$$

30/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Zamana Göre İntegral

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \frac{1}{s}F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

Soru: $f(t) = u(t)$ ise $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right]$ nedir?

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$

31/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Frekans Türevi

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

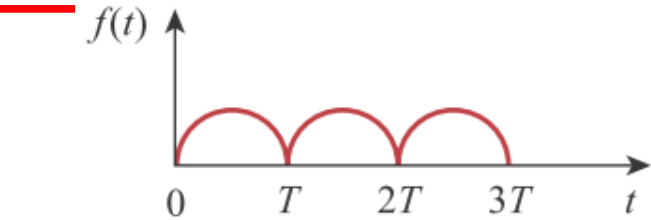
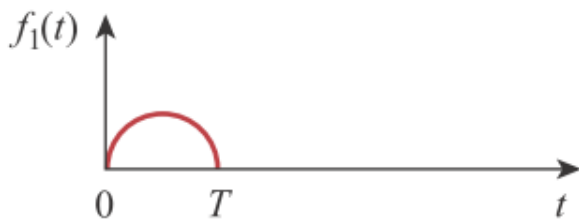
$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)(-te^{-st}) dt = \int_{0^-}^{\infty} (-tf(t))e^{-st} dt = \mathcal{L}[-tf(t)]$$

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

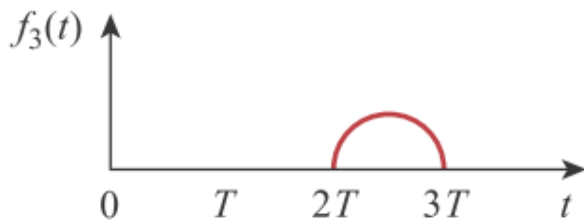
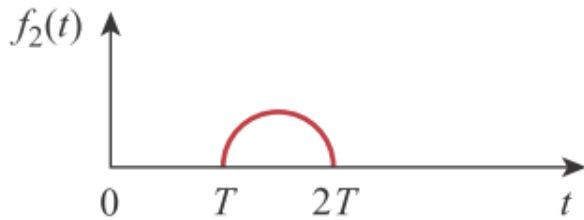
32/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Periyodiklik



$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots \\ &= f_1(t) + f_1(t - T)u(t - T) \\ &\quad + f_1(t - 2T)u(t - 2T) + \dots \end{aligned}$$

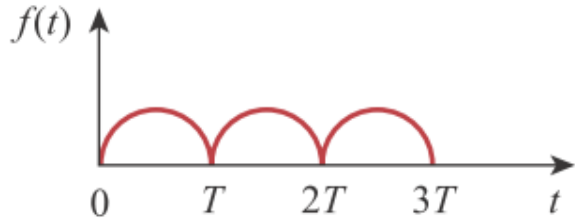


$$f_1(t) = f(t)[u(t) - u(t - T)]$$

33/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Periyodiklik



$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots \\ &= f_1(t) + f_1(t - T)u(t - T) \\ &\quad + f_1(t - 2T)u(t - 2T) + \dots \end{aligned}$$

$$f_1(t) = f(t)[u(t) - u(t - T)]$$

$$\begin{aligned} F(s) &= F_1(s) + F_1(s)e^{-Ts} + F_1(s)e^{-2Ts} + F_1(s)e^{-3Ts} + \dots \\ &= F_1(s)[1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} + \dots] \end{aligned}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x} \quad \text{if } |x| < 1.$$

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}}$$

34/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

İlk ve Son değer teoremi

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Soru: İlk değer teoremini kullanarak $f(0)$ değerini bulunuz.

$$f(t) = e^{-2t} \cos 10t$$

$$f(t) = e^{-2t} \cos 10t \quad \Leftrightarrow \quad F(s) = \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 10^2}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 4s + 104} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1 + 2/s}{1 + 4/s + 104/s^2} = 1 \end{aligned}$$

35/67

$f(t)$	$F(s)$
$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
$\frac{d^2 f}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
$\frac{d^3 f}{dt^3}$	$s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$
$\frac{d^n f}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$

36/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

$f(t)$	$F(s)$
$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{1}{s}F(s)$
$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)ds$
$f(t) = f(t + nT)$	$\frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}$
$f(0)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
$f(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$

37/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s + a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$

38/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

$f(t)$	$F(s)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$

39/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Soru: Verilen fonsksiyonun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$f(t) = \delta(t) + 2u(t) - 3e^{-2t}u(t)$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[\delta(t)] + 2\mathcal{L}[u(t)] - 3\mathcal{L}[e^{-2t}u(t)] \\ &= 1 + 2\frac{1}{s} - 3\frac{1}{s+2} = \frac{s^2 + s + 4}{s(s+2)} \end{aligned}$$

40/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Ödev: Verilen fonsksiyonun Laplace dönüşümünü bulunuz.

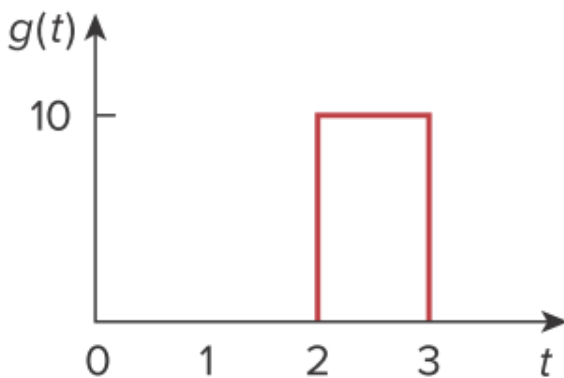
$$f(t) = (\cos(3t) + e^{-5t})u(t)$$

$$\frac{2s^2 + 5s + 9}{(s + 5)(s^2 + 9)}$$

41/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Soru: Grafiği verilen fonsksiyonun Laplace dönüşümünü bulunuz.



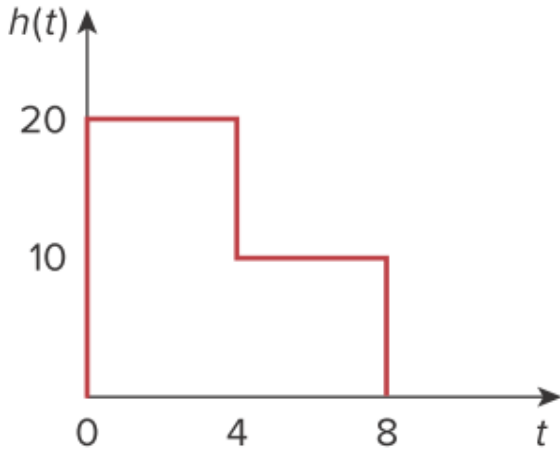
$$g(t) = 10[u(t - 2) - u(t - 3)]$$

$$G(s) = 10 \left(\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} \right) = \frac{10}{s} (e^{-2s} - e^{-3s})$$

42/67

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Ödev: Grafiği verilen fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulunuz.



$$\frac{10}{s}(2 - e^{-4s} - e^{-8s}).$$

43/67

Ters Laplace Dönüşümü

Verilen bir $F(s)$ fonksiyonunun tekrar zaman uzayındaki eşleniğini ($f(t)$) bulmaya ters Laplace dönüşümü denir.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$N(s)$ ve $D(s)$ birer polinomdur.

$N(s) = 0$ eşitliğinin köklerine $F(s)$ 'in 0'ları

$D(s) = 0$ eşitliğinin köklerine $F(s)$ 'in kutupları denir.

Bir Laplace dönüşümünün ters Laplace dönüşümünü elde etmek için:

1. $F(s)$ kısmi kesirlere dönüşecek şekilde sadeleştirilir.
2. Her bir terimin tersi bulunur.

44/67

Ters Laplace Dönüşümü

Basit Kutuplar:

Soru: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$F(s) = \frac{3}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{6}{s^2+4}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s^2+4}\right) \\ &= (3 - 5e^{-t} + 3 \sin 2t)u(t), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

45/67

Ters Laplace Dönüşümü

Ödev: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$F(s) = 1 + \frac{3}{s+4} - \frac{5s}{s^2+25}$$

$$\delta(t) + (4e^{-4t} - 5 \cos(5t))u(t).$$

46/67

Ters Laplace Dönüşümü

Soru: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$F(s) = \frac{s^2 + 12}{s(s + 2)(s + 3)}$$

$$\frac{s^2 + 12}{s(s + 2)(s + 3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{s + 3}$$

$s = 0$ olmak üzere eşitliğin her iki tarafı s ile çarpılırsa

$$A = sF(s) \big|_{s=0} = \frac{s^2 + 12}{(s + 2)(s + 3)} \bigg|_{s=0} = \frac{12}{(2)(3)} = 2$$

47/67

Ters Laplace Dönüşümü

Soru: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$F(s) = \frac{s^2 + 12}{s(s + 2)(s + 3)}$$

$$\frac{s^2 + 12}{s(s + 2)(s + 3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{s + 3}$$

$s = -2$ olmak üzere eşitliğin her iki tarafı $s + 2$ ile çarpılırsa

$$B = (s + 2)F(s) \big|_{s=-2} = \frac{s^2 + 12}{s(s + 3)} \bigg|_{s=-2} = \frac{4 + 12}{(-2)(1)} = -8$$

48/67

Ters Laplace Dönüşümü

Soru: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$F(s) = \frac{s^2 + 12}{s(s + 2)(s + 3)}$$

$$\frac{s^2 + 12}{s(s + 2)(s + 3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{s + 3}$$

$s = -3$ olmak üzere eşitliğin her iki tarafı $s + 3$ ile çarpılırsa

$$C = (s + 3)F(s) \big|_{s=-3} = \frac{s^2 + 12}{s(s + 2)} \bigg|_{s=-3} = \frac{9 + 12}{(-3)(-1)} = 7$$

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{8}{s + 2} + \frac{7}{s + 3} \quad f(t) = (2 - 8e^{-2t} + 7e^{-3t})u(t)$$

49/67

Ters Laplace Dönüşümü

Ödev: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$F(s) = \frac{6(s + 2)}{(s + 1)(s + 3)(s + 4)}$$

$$f(t) = (e^{-t} + 3e^{-3t} - 4e^{-4t})u(t).$$

50/67

Ters Laplace Dönüşümü

Ödev: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$F(s) = \frac{48(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

$$f(t) = (8e^{-t} + 24e^{-3t} - 32e^{-4t})u(t).$$

51/67

Ters Laplace Dönüşümü

Tekrar eden (katlı) kutuplar:

Soru: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$V(s) = \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2}$$

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{s+2} \end{aligned}$$

52/67

Ters Laplace Dönüşümü

$$V(s) = \frac{10s^2 + 4}{s(s + 1)(s + 2)^2}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{(s + 2)^2} + \frac{D}{s + 2}$$

$$A = sV(s) \big|_{s=0} = \frac{10s^2 + 4}{(s + 1)(s + 2)^2} \bigg|_{s=0} = \frac{4}{(1)(2)^2} = 1$$

$$B = (s + 1)V(s) \big|_{s=-1} = \frac{10s^2 + 4}{s(s + 2)^2} \bigg|_{s=-1} = \frac{14}{(-1)(1)^2} = -14$$

53/67

Ters Laplace Dönüşümü

$$V(s) = \frac{10s^2 + 4}{s(s + 1)(s + 2)^2}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{(s + 2)^2} + \frac{D}{s + 2}$$

$$C = (s + 2)^2 V(s) \big|_{s=-2} = \frac{10s^2 + 4}{s(s + 1)} \bigg|_{s=-2} = \frac{44}{(-2)(-1)} = 22$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{d}{ds}[(s + 2)^2 V(s)] \bigg|_{s=-2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{10s^2 + 4}{s^2 + s} \right) \bigg|_{s=-2} \\ &= \frac{(s^2 + s)(20s) - (10s^2 + 4)(2s + 1)}{(s^2 + s)^2} \bigg|_{s=-2} = \frac{52}{4} = 13 \end{aligned}$$

$$V(s) = \frac{1}{s} - \frac{14}{s + 1} + \frac{13}{s + 2} + \frac{22}{(s + 2)^2}$$

$$v(t) = (1 - 14e^{-t} + 13e^{-2t} + 22te^{-2t})u(t)$$

54/67

Ters Laplace Dönüşümü

Ödev: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$G(s) = \frac{s^3 + 2s + 6}{s(s + 1)^2(s + 3)}$$

$$(2 - 3.25e^{-t} - 1.5te^{-t} + 2.25e^{-3t})u(t).$$

55/67

Ters Laplace Dönüşümü

Kompleks (karmaşık) kutuplar:

Soru: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$H(s) = \frac{20}{(s + 3)(s^2 + 8s + 25)}$$

$$H(s) = \frac{20}{(s + 3)(s^2 + 8s + 25)} = \frac{A}{s + 3} + \frac{Bs + C}{s^2 + 8s + 25}$$

$$A = (s + 3)H(s) \Big|_{s=-3} = \frac{20}{s^2 + 8s + 25} \Big|_{s=-3} = \frac{20}{10} = 2$$

$$s = 0 \quad \frac{20}{75} = \frac{A}{3} + \frac{C}{25} \quad A = 2 \quad C = -10$$

56/67

Ters Laplace Dönüşümü

Soru: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$H(s) = \frac{20}{(s+3)(s^2+8s+25)}$$

$$H(s) = \frac{20}{(s+3)(s^2+8s+25)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{(s^2+8s+25)}$$

$$s = 1 \quad \frac{20}{(4)(34)} = \frac{A}{4} + \frac{B+C}{34}$$

$$A = 2, C = -10$$

$$20 = 34A + 4B + 4C \quad B = -2.$$

57/67

Ters Laplace Dönüşümü

Soru: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$H(s) = \frac{20}{(s+3)(s^2+8s+25)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{(s^2+8s+25)}$$

$$A = 2, C = -10 \quad B = -2.$$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{2}{s+3} - \frac{2s+10}{(s^2+8s+25)} = \frac{2}{s+3} - \frac{2(s+4)+2}{(s+4)^2+9} \\ &= \frac{2}{s+3} - \frac{2(s+4)}{(s+4)^2+9} - \frac{2}{3} \frac{3}{(s+4)^2+9} \end{aligned}$$

$$h(t) = \left(2e^{-3t} - 2e^{-4t} \cos 3t - \frac{2}{3}e^{-4t} \sin 3t \right) u(t)$$

58/67

Ters Laplace Dönüşümü

$$h(t) = \left(2e^{-3t} - 2e^{-4t} \cos 3t - \frac{2}{3}e^{-4t} \sin 3t \right) u(t)$$

$$h(t) = (2e^{-3t} - Re^{-4t} \cos(3t - \theta))u(t)$$

$$R = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 2.108, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\frac{2}{3}}{2} = 18.43^\circ$$

$$h(t) = (2e^{-3t} - 2.108e^{-4t} \cos(3t - 18.43^\circ))u(t)$$

59/67

Ters Laplace Dönüşümü

Ödev: Verilen fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$G(s) = \frac{10}{(s + 1)(s^2 + 4s + 13)}$$

$$e^{-t} - e^{-2t} \cos 3t - \frac{1}{3}e^{-2t} \sin 3t, \quad t \geq 0.$$

60/67

Laplace ile İntegrodiferansiyel Denklem Çözümü

Soru: $v(0)=1$ ve $v'(0)=-2$ ise verilen denklemi çözünüz.

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 6\frac{dv(t)}{dt} + 8v(t) = 2u(t)$$

$$[s^2V(s) - sv(0) - v'(0)] + 6[sV(s) - v(0)] + 8V(s) = \frac{2}{s}$$

$$v(0) = 1, v'(0) = -2,$$

$$s^2V(s) - s + 2 + 6sV(s) - 6 + 8V(s) = \frac{2}{s}$$

$$(s^2 + 6s + 8)V(s) = s + 4 + \frac{2}{s} = \frac{s^2 + 4s + 2}{s}$$

61/67

Laplace ile İntegrodiferansiyel Denklem Çözümü

$$(s^2 + 6s + 8)V(s) = s + 4 + \frac{2}{s} = \frac{s^2 + 4s + 2}{s}$$

$$V(s) = \frac{s^2 + 4s + 2}{s(s + 2)(s + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{s + 4}$$

$$A = sV(s) \big|_{s=0} = \frac{s^2 + 4s + 2}{(s + 2)(s + 4)} \bigg|_{s=0} = \frac{2}{(2)(4)} = \frac{1}{4}$$

$$B = (s + 2)V(s) \big|_{s=-2} = \frac{s^2 + 4s + 2}{s(s + 4)} \bigg|_{s=-2} = \frac{-2}{(-2)(2)} = \frac{1}{2}$$

$$C = (s + 4)V(s) \big|_{s=-4} = \frac{s^2 + 4s + 2}{s(s + 2)} \bigg|_{s=-4} = \frac{2}{(-4)(-2)} = \frac{1}{4}$$

62/67

Laplace ile İntegrodiferansiyel Denklem Çözümü

$$V(s) = \frac{\frac{1}{4}}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2} + \frac{\frac{1}{4}}{s+4}$$

$$v(t) = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-2t} + e^{-4t})u(t)$$

63/67

Laplace ile İntegrodiferansiyel Denklem Çözümü

Ödev: $v(0)=v'(0)=-2$ ise verilen denklemi çözünüz.

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 4\frac{dv(t)}{dt} + 4v(t) = e^{-t}$$

$$(2e^{-t} + 4te^{-2t})u(t).$$

64/67

Laplace ile İntegrodiferansiyel Denklem Çözümü

Soru: $y(0)=2$ ise verilen denklemi çözünüz.

$$\frac{dy}{dt} + 5y(t) + 6 \int_0^t y(\tau) d\tau = u(t), \quad y(0) = 2$$

$$[sY(s) - y(0)] + 5Y(s) + \frac{6}{s}Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) = 1 + 2s$$

$$Y(s) = \frac{2s + 1}{(s + 2)(s + 3)} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s + 3}$$

65/67

Laplace ile İntegrodiferansiyel Denklem Çözümü

Soru: $y(0)=2$ ise verilen denklemi çözünüz.

$$Y(s) = \frac{2s + 1}{(s + 2)(s + 3)} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s + 3}$$

$$A = (s + 2)Y(s) \big|_{s=-2} = \frac{2s + 1}{s + 3} \bigg|_{s=-2} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$B = (s + 3)Y(s) \big|_{s=-3} = \frac{2s + 1}{s + 2} \bigg|_{s=-3} = \frac{-5}{-1} = 5$$

$$Y(s) = \frac{-3}{s + 2} + \frac{5}{s + 3} \quad y(t) = (-3e^{-2t} + 5e^{-3t})u(t)$$

66/67

Laplace ile İntegrodiferansiyel Denklem Çözümü

Ödev: $y(0)=0$ ise verilen denklemi çözünüz.

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) + 2 \int_0^t y(\tau) d\tau = 2e^{-3t},$$

$$(-e^{-t} + 4e^{-2t} - 3e^{-3t})u(t).$$