Departemen Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor

PEMODELAN KLASIFIKASI

PERTEMUAN #5

ANALISIS DISKRIMINAN

Bagus Sartono
bagusco@ipb.ac.id bagusco@gmail.com

Konsep Dasar

Andaikan ada vektor peubah acak X, dan variabel kelas Y yang berisi m buah label kelas: 1, …, m

Analisis diskriminan bekerja dengan menentukan fungsi kepekatan dari masing-masing kelas, yang kemudian digabungkan dengan informasi prior untuk menghasilkan peluang bersyarat kelas terhadap X atau $P(Y = k \mid X)$

Suatu amatan akan dikelaskan ke dalam kelas ke-k jika nilai peluang bersyaratnya adalah yang terbesar diantara kelas-kelas lainnya

Konsep Dasar

Andaikan π_k adalah peluang prior dari kelas *k, k = 1, …, m* yang memenuhi kendala

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_i = 1$$

Secara sederhana, nilai π_k dapat diduga sebagai

$$\pi_k = \frac{\text{banyaknya amatan dari kelas } k}{\text{banyaknya seluruh amatan}}$$

Konsep Dasar

Andaikan $f_k(\boldsymbol{x})$ adalah fungsi sebaran bersyarat **X** pada kelas *k*

Sedangkan kita tertarik pada peluang kelas *k* bersyarat terhadap vektor **X**, yang menggunakan kaidah Bayes dapat dituliskan sebagai

$$P(Y = k \mid x) = \frac{f_k(x)\pi_k}{\sum_{i=1}^{m} f_i(x)\pi_i}$$

Berdasarkan konsep maximum a posteriori,

$$\hat{Y} = \arg\max P(Y = k \mid x) = \arg\max \; f_k(x)\pi_k$$

Konsep Dasar

Berdasarkan konsep maximum a posteriori

$$\hat{Y} = \arg\max P(Y = k \mid x) = \arg\max\ f_k(x)\pi_k$$

Untuk kasus dua kelas, misalnya kelas 0 dan kelas satu, maka

$$\hat{Y} = 0 \text{ jika } P(Y = 0 \mid x) > P(Y = 1 \mid x)$$

dan

$$\hat{Y} = 1 \text{ jika } P(Y = 1 \mid x) > P(Y = 0 \mid x)$$

Konsep Dasar

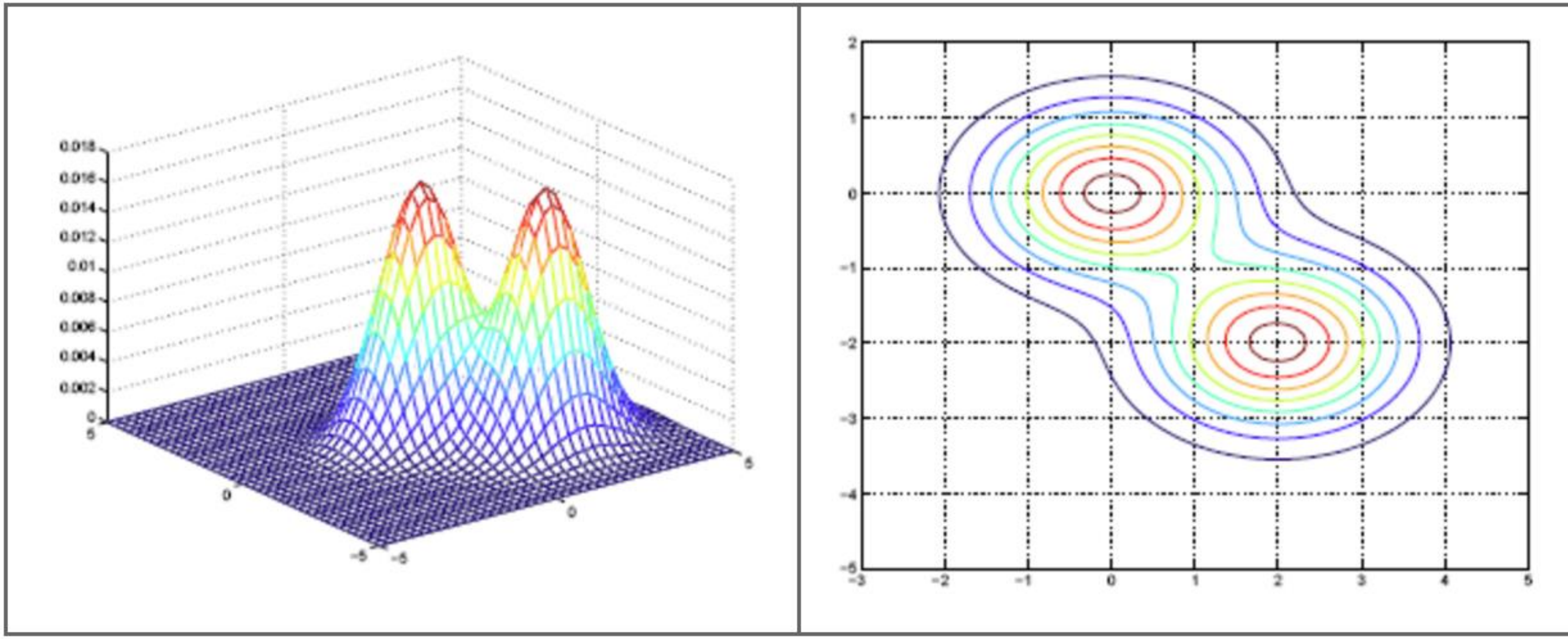
Pada teknik linear discriminant analysis, $f_k(\boldsymbol{x})$ diasumsikan berupa sebaran multivariate normal

$$f_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma_k|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_k)^T \Sigma_k^{-1}(x-\mu_k)}$$

dengan p adalah dimensi (banyaknya peubah), $\boldsymbol{\mu}_k$ adalah vektor rataan, dan $\boldsymbol{\Sigma}_k$ adalah matriks ragam-peragam

serta $\boldsymbol{\Sigma}_k = \boldsymbol{\Sigma}$ untuk semua $k = 1, \ldots, m$, atau dengan kata lain antar kelas memiliki matriks ragam-peragam yang homogen

Konsep Dasar



```
a <- seq(10, 30,length.out=50)
b <- seq(10, 30,length.out=50)
grid <- NULL

for (i in a) {
  for (j in b) {
  grid <- rbind(grid, c(i, j))
  }
}

mean1 <- c(15, 15)
mean2 <- c(22, 22)
sigma <- matrix(c(5, 3, 3, 5), 2, 2)

require(mvtnorm)
y = 0.5*dmvnorm(grid, mean1, sigma, log=FALSE) + 0.5*dmvnorm(grid, mean2, sigma, log=FALSE)


z <- matrix(y, length(a), length(b), byrow=TRUE)

persp(a, b, z, phi=45, theta=-10)
contour(a, b, z)
```

Konsep Dasar

Kembali ke konsep maximum a posteriori

$$\hat{Y} = \arg\max P(Y = k \mid x) = \arg\max\ f_k(x)\pi_k$$

Karena logaritma adalah fungsi yang bersifat monoton naik maka dapat juga kita tuliskan

$$\hat{Y} = \arg\max \log(f_k(x)\pi_k)$$

Jika kita gunakan sebaran normal ganda yang dibicarakan sebelumnya akan diperoleh

$$= \arg\max_k \left[-\log((2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}) - \frac{1}{2}(x-\mu_k)^T\Sigma^{-1}(x-\mu_k) + \log(\pi_k) \right]$$
$$= \arg\max_k \left[-\frac{1}{2}(x-\mu_k)^T\Sigma^{-1}(x-\mu_k) + \log(\pi_k) \right]$$

Konsep Dasar

$$-\frac{1}{2}(x-\mu_k)^T\Sigma^{-1}(x-\mu_k) = x^T\Sigma^{-1}\mu_k - \frac{1}{2}\mu_k^T\Sigma^{-1}\mu_k - \frac{1}{2}x^T\Sigma^{-1}x$$

maka akan diperoleh

$$\hat{Y} = \arg\max_k \left[x^T\Sigma^{-1}\mu_k - \frac{1}{2}\mu_k^T\Sigma^{-1}\mu_k + log(\pi_k)\right]$$

Untuk kasus dua kelas, yaitu kelas l dan k

The decision boundary between class *k* and *l* is:

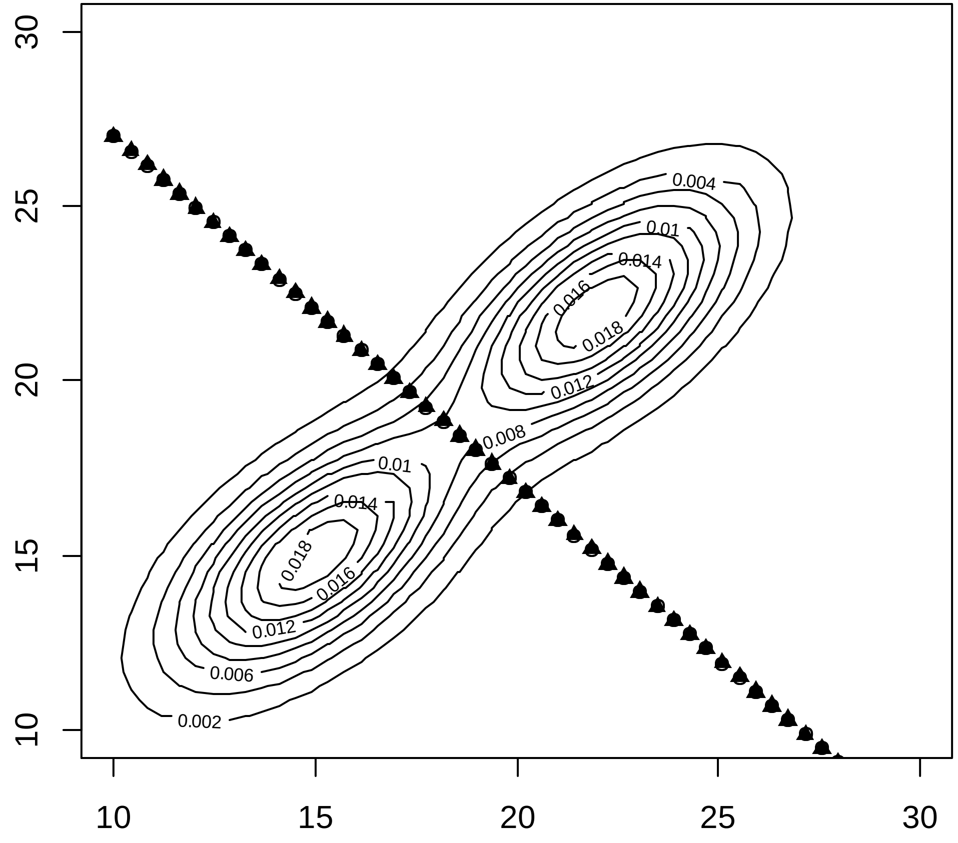
$$\{x : \delta_k(x) = \delta_l(x)\}$$

Or equivalently the following holds

$$log\frac{\pi_k}{\pi_l} - \frac{1}{2}(\mu_k+\mu_l)^T\Sigma^{-1}(\mu_k-\mu_l) + x^T\Sigma^{-1}(\mu_k-\mu_l) = 0$$

Ilustrasi Garis Diskriminan

```
> 0.5 * t(c(37,37)) %*% solve(sigma) %*% c(-7,-7)
       [,1]
[1,] -32.375
> solve(sigma) %*% c(-7, -7)
      [,1]
[1,] -0.875
[2,] -0.875
> garis = (32.375 - 0.875 * a) / (0.875)
> > contour(a, b, z)
> points(a, garis, pch=17)
```



Menduga Parameter Sebaran

$$\hat{\pi}_k = N_k / N$$

$$\hat{\mu}_k = \sum_{g_i = k} x^{(i)} / N_k$$

$$\hat{\Sigma} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{g_i = k} \left(x^{(i)} - \hat{\mu}_k \right) \left(x^{(i)} - \hat{\mu}_k \right)^T / (N - K)$$

Ilustrasi menggunakan Data White_wine2.csv