

UNIVERSIDAD EAFIT

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
CM0422

Trabajo Final

Estudiantes:
Abelino Sepúlveda
Juliana Restrepo

August 31, 2022



1 Grupo de ejercicios 1

a. Exponga de la forma más detallada posible el método de Adams–Bashforth de tres pasos y Adams–Moulton de cuatro pasos, esto es explicar los fundamentos analíticos e interpretación geométrica.

Sea una partición de $I = [a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

los $n+1$ puntos definen n subintervalos $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, donde si la partición es uniforme la longitud de dicho intervalo es

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1} = h$$

Ahora consideremos el siguiente PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

cuya solución en el intervalo $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ a partir del **Teorema Fundamental del Cálculo** es:

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} y'(x) dx &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx \\ y_{j+1} - y_j &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx \\ y_{j+1} &= y_j + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx \end{aligned} \quad (1)$$

I. Adams-Bashford de tres pasos:

Ahora, aproximaremos $f(x, y(x))$ mediante el **Polinomio de Interpolación** que pasa por los puntos: (x_{j-2}, f_{j-2}) , (x_{j-1}, f_{j-1}) , (x_j, f_j) donde $f_{j-2} = f(x_{j-2}, y(x_{j-2}))$; $f_{j-1} = f(x_{j-1}, y(x_{j-1}))$; $f_j = f(x_j, y(x_j))$

Donde el polinomio interpolante está dado de la forma:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x)$$

donde

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

de esta manera, el polinomio de interpolación resultante es:

$$P(x) = f_{j-2} \frac{(x - x_{j-1})(x - x_j)}{(x_{j-2} - x_{j-1})(x_{j-2} - x_j)} + f_{j-1} \frac{(x - x_{j-2})(x - x_j)}{(x_{j-1} - x_{j-2})(x_{j-1} - x_j)} + f_j \frac{(x - x_{j-2})(x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-2})(x_j - x_{j-1})}$$

como mencionamos anteriormente, consideramos las particiones uniformes, por lo cual, el este polinomio puede ser reescrito por

$$P(x) = f_{j-2} \frac{(x - x_{j-1})(x - x_j)}{2h^2} - f_{j-1} \frac{(x - x_{j-2})(x - x_j)}{h^2} + f_j \frac{(x - x_{j-2})(x - x_{j-1})}{2h^2}$$

Reemplazando el polinomio resultante en la expresión (1):

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + \int_{x_j}^{x_{j+1}} P(x) dx \\ y_{j+1} &= y_j + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[f_{j-2} \frac{(x - x_{j-1})(x - x_j)}{2h^2} - f_{j-1} \frac{(x - x_{j-2})(x - x_j)}{h^2} + f_j \frac{(x - x_{j-2})(x - x_{j-1})}{2h^2} \right] dx \end{aligned}$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{f_{j-2}}{2h^2} \int_{x_j}^{x_j+h} (x-(x_j-h))(x-x_j) - \frac{f_{j-1}}{h^2} \int_{x_j}^{x_j+h} (x-(x_j-2h))(x-x_j) + \frac{f_j}{2h^2} \int_{x_j}^{x_j+h} (x-(x_j-2h))(x-(x_j-h)) dx$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{f_{j-2}}{2h^2} \left(\frac{5h^3}{6} \right) - \frac{f_{j-1}}{h^2} \left(\frac{4h^3}{3} \right) + \frac{f_j}{2h^2} \left(\frac{23h^3}{6} \right)$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{5hf_{j-2}}{12} - \frac{4hf_{j-1}}{3} + \frac{23hf_j}{12}$$

Finalmente la ecuación de Adams-Bashford de 3 pasos queda:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{12} (23f(x_j, y(x_j)) - 16f(x_{j-1}, y(x_{j-1})) + 5f(x_{j-2}, y(x_{j-2}))) \quad (2)$$

II. Adams-Moulton de cuatro pasos

Aproximemos $f(x, y(x))$ mediante el polinomio de interpolación que pasa por los puntos: (x_{j-3}, f_{j-3}) , (x_{j-2}, f_{j-2}) , (x_{j-1}, f_{j-1}) , (x_j, f_j) , (x_{j+1}, f_{j+1}) .

$$P(x) = f_{j-3} \frac{(x-x_{j-2})(x-x_{j-1})(x-x_j)(x-x_{j+1})}{(x_{j-3}-x_{j-2})(x_{j-3}-x_{j-1})(x_{j-3}-x_j)(x_{j-3}-x_{j+1})} +$$

$$f_{j-2} \frac{(x-x_{j-3})(x-x_{j-1})(x-x_j)(x-x_{j+1})}{(x_{j-2}-x_{j-3})(x_{j-2}-x_{j-1})(x_{j-2}-x_j)(x_{j-2}-x_{j+1})} + f_{j-1} \frac{(x-x_{j-3})(x-x_{j-2})(x-x_j)(x-x_{j+1})}{(x_{j-1}-x_{j-3})(x_{j-1}-x_{j-2})(x_{j-1}-x_j)(x_{j-1}-x_{j+1})}$$

$$+ f_j \frac{(x-x_{j-3})(x-x_{j-2})(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})}{(x_j-x_{j-3})(x_j-x_{j-2})(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})} + f_{j+1} \frac{(x-x_{j-3})(x-x_{j-2})(x-x_{j-1})(x-x_j)}{(x_{j+1}-x_{j-3})(x_{j+1}-x_{j-2})(x_{j+1}-x_{j-1})(x_{j+1}-x_j)}$$

Considerando las particiones uniformes el polinomio queda expresado:

$$P(x) = f_{j-3} \frac{(x-x_{j-2})(x-x_{j-1})(x-x_j)(x-x_{j+1})}{24h^4} - f_{j-2} \frac{(x-x_{j-3})(x-x_{j-1})(x-x_j)(x-x_{j+1})}{6h^4} +$$

$$f_{j-1} \frac{(x-x_{j-3})(x-x_{j-2})(x-x_j)(x-x_{j+1})}{4h^4} - f_j \frac{(x-x_{j-3})(x-x_{j-2})(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})}{6h^4} +$$

$$f_{j+1} \frac{(x-x_{j-3})(x-x_{j-2})(x-x_{j-1})(x-x_j)}{24h^4}$$

Si reemplazamos este polinomio en la expresión (1) obtenemos:

$$y_{j+1} = y_j + \int_{x_j}^{x_j+h} P(x) dx$$

$$y_{j+1} = y_j + \int_{x_j}^{x_j+h} f_{j-3} \frac{(x-x_j+2h)(x-x_j+h)(x-x_j)(x-x_j-h)}{24h^4} -$$

$$\int_{x_j}^{x_j+h} f_{j-2} \frac{(x-x_j+3h)(x-x_j+h)(x-x_j)(x-x_j-h)}{6h^4} + \int_{x_j}^{x_j+h} f_{j-1} \frac{(x-x_j+3h)(x-x_j+2h)(x-x_j)(x-x_j-h)}{4h^4} -$$

$$\int_{x_j}^{x_j+h} f_j \frac{(x-x_j+3h)(x-x_j+2h)(x-x_j+h)(x-x_j-h)}{6h^4} + \int_{x_j}^{x_j+h} f_{j+1} \frac{(x-x_j+3h)(x-x_j+2h)(x-x_j+h)(x-x_j)}{24h^4}$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{f_{j-3}}{24h^4} \left(\frac{-19h^5}{30} \right) - \frac{f_{j-2}}{6h^4} \left(\frac{-53h^5}{60} \right) + \frac{f_{j-1}}{4h^4} \left(\frac{-22h^5}{15} \right) - \frac{f_j}{6h^4} \left(\frac{-323h^5}{60} \right) + \frac{f_{j+1}}{24h^4} \left(\frac{251h^5}{30} \right)$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{-19hf_{j-3}}{720} + \frac{53hf_{j-2}}{360} + \frac{-11hf_{j-1}}{30} + \frac{323hf_j}{360} + \frac{251hf_{j+1}}{30}$$

Finalmente, el método Adams-Moulton de cuatro pasos queda:

$$Y_{j+1} = Y_j + \frac{h}{720} (-19f(x_{j-3}, y(x_{j-3})) + 106f(x_{j-2}, y(x_{j-2})) - 264f(x_{j-1}, y(x_{j-1})) + 646f(x_j, y(x_j)) + 251f(x_{j+1}, y(x_{j+1}))) \quad (3)$$

Nota

La diferencia esencial entre el métodos de Adams-Bashford y el método de Adams-Moulton es que mientras el primero es explícito, el segundo es implícito.

b. Obtenga el factor de amplificación del método a partir del problema autónomo de autovalores $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0$, $\lambda \in C$

Como ambos son métodos multipasos, el factor de amplificación de éstos no puede ser hallado por los métodos vistos en clase, para esto consideramos el polinomio de estabilidad que puede ser expresado en términos de los polinomios característicos como:

$$\pi(\zeta; z) = \rho(\zeta) - z\sigma(\zeta) \quad (4)$$

Donde los polinomios se pueden expresar como:

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^r \alpha_j \cdot \zeta^j$$

Donde ζ^j son las raíces del polinomio

I. Polinomio de estabilidad para Adams-Bashford de tres pasos:

A partir del PVI autónomo empezamos a hallar el polinomio de estabilidad

$$Y_{j+1} = Y_j + \frac{h}{12} (23\lambda Y_j - 16\lambda Y_{j-1} + 5\lambda Y_{j-2})$$

Reescribiendo el esquema:

$$Y_{j+3} = Y_{j+2} + \frac{h}{12} (23\lambda Y_{j+2} - 16\lambda Y_{j+1} + 5\lambda Y_j)$$

$$Y_{j+3} - Y_{j+2} - \frac{h}{12} (23\lambda Y_{j+2} - 16\lambda Y_{j+1} + 5\lambda Y_j) = 0$$

$$Y_{j+3} - Y_{j+2} - \frac{h\lambda}{12} (23Y_{j+2} - 16Y_{j+1} + 5Y_j) = 0$$

Sea $z = h\lambda = a+bi$

$$Y_{j+3} - Y_{j+2} - \frac{z}{12} (23Y_{j+2} - 16Y_{j+1} + 5Y_j) = 0$$

El esquema anterior representa una ecuación diferencial lineal homogénea, presentado en la sección 6.4.1 del libro Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations de Randall J. LeVeque, nos enseñan a resolver dichas ecuaciones

Nota

Esquema ecuaciones diferenciales homogéneas: $\sum_{j=0}^r \zeta^{n+j}$

Finalmente el factor de amplificación de Adams-Bashford de tres pasos queda:

$$\pi(\zeta; z) = \zeta^3 - \zeta^2 - \frac{z}{12}(23\zeta^2 - 16\zeta + 5) = 0$$

$$z = \frac{12(\zeta^3 - \zeta^2)}{23\zeta^2 - 16\zeta + 5}$$

Análogamente resolvemos hallamos el factor de amplificación para Adams-Moulton

II. Polinomio de estabilidad para Adams-Moulton de cuatro pasos:

A partir de PVI autónomo empezamos a hallar el polinomio de estabilidad

$$Y_{j+1} = Y_j + \frac{h}{20}(-19\lambda Y_{j-3} + 106\lambda Y_{j-2} - 264\lambda Y_{j-1} + 646\lambda Y_j + 251\lambda Y_{j+1})$$

Reescribimos el esquema:

$$Y_{j+4} = Y_{j+3} + \frac{h}{20}(-19\lambda Y_j + 106\lambda Y_{j+1} - 264\lambda Y_{j+2} + 646\lambda Y_{j+3} + 251\lambda Y_{j+4})$$

$$Y_{j+4} - Y_{j+3} - \frac{h\lambda}{20}(-19Y_j + 106Y_{j+1} - 264Y_{j+2} + 646Y_{j+3} + 251Y_{j+4}) = 0$$

Sea $z=h\lambda=a+bi$

$$Y_{j+4} - Y_{j+3} - \frac{z}{20}(-19Y_j + 106Y_{j+1} - 264Y_{j+2} + 646Y_{j+3} + 251Y_{j+4}) = 0$$

Análogo al proceso de Adams-Bashford, el polinomio de estabilidad resultante para Adams-Moulton es el siguiente:

$$\pi(\zeta; z) = \zeta^4 - \zeta^3 - \frac{z}{20}(-19 + 106\zeta - 264\zeta^2 + 646\zeta^3 + 251\zeta^4)$$

$$z = \frac{20(\zeta^4 - \zeta^3)}{-19 + 106\zeta - 264\zeta^2 + 646\zeta^3 + 251\zeta^4}$$

c. A partir de item anterior obtenga y grafique la región de estabilidad de los métodos

Revisando la literatura, la región de estabilidad para los métodos multipasos son cero-estable si las raíces del polinomio de estabilidad cumple las siguientes condiciones:

$$|\zeta_j| \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, k$$

si ζ_j es una raíz repetida entonces $|\zeta_j| < 1$

I. Región de estabilidad para Adams-Bashford de cuatro pasos:

Recordemos el polinomio de estabilidad de Adam-Bashford:

$$\pi(\zeta; z) = \zeta^3 - \zeta^2 - \frac{z}{12}(23\zeta^2 - 16\zeta + 5) = 0$$

y si recordamos el esquema del polinomio de estabilidad:

$$\pi(\zeta; z) = \rho(\zeta) - z\sigma(\zeta)$$

podemos obtener las raíces $\rho(\zeta) = \zeta^3 - \zeta^2$ y $\sigma(\zeta) = 23\zeta^2 - 16\zeta + 5$

Luego, $\rho(\zeta) = \zeta^3 - \zeta^2 = \zeta^2(\zeta - 1)$, es decir, las raíces son $\zeta_1 = 1$ con multiplicidad uno y $\zeta_2 = 0$ con multiplicidad 2. Ahora, como se pudo observar, se cumplieron las dos condiciones anteriores, por lo que podemos concluir que Adams-Bashford es cero estable.

Ahora, para graficar la región de estabilidad tomamos en cuenta lo siguiente:

$$\zeta_j = e^{i\theta}$$

Ahora, el polinomio de estabilidad queda de la forma:

$$\pi(e^{i\theta}; z) = \rho(e^{i\theta}) - z\sigma(e^{i\theta})$$

de tal forma:

$$z = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}$$

si lo aplicamos a Adams-Bashford:

$$\pi(e^{i\theta}; z) = e^{2i\theta} - e^{i\theta} - \frac{z}{12}(23e^{2i\theta} - 16e^{i\theta} + 5) = 0$$

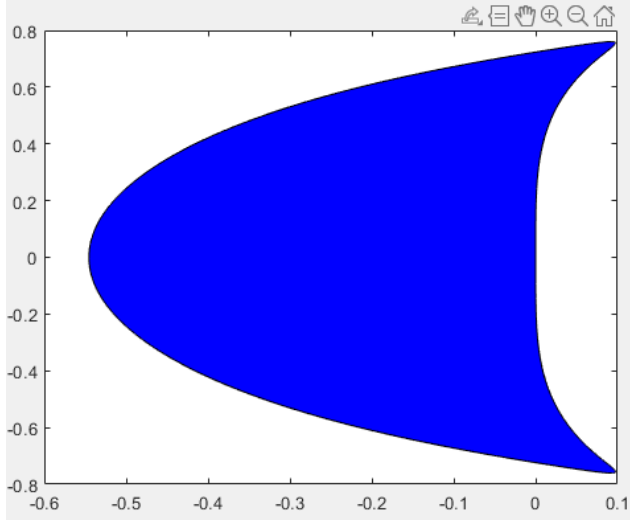


Figure 1: Región de estabilidad de Adams-Bashford de 3 pasos

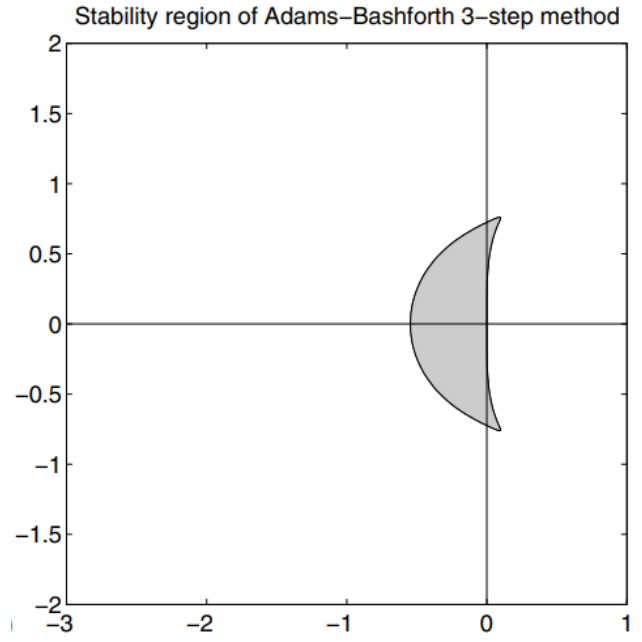


Figure 2: Region de estabilidad de Adams-Bashford teórica

I. Región de estabilidad para Adams-Moulton de cuatro pasos:

Recordemos el polinomio de estabilidad de Adams-Moulton

$$\pi(\zeta; z) = \zeta^4 - \zeta^3 - \frac{z}{20}(-19 + 106\zeta - 264\zeta^2 + 646\zeta^3 + 251\zeta^4)$$

Ahora, las raíces del polinomio son: $\rho(\zeta) = \zeta^4 - \zeta^3 = \zeta^3(\zeta - 1)$, así las raíces son: $\zeta_1 = 1$ con multiplicidad 1 y $\zeta_2 = 0$ con multiplicidad tres, por lo que observamos que se cumplen las condiciones para garantizar cero estabilidad

Ahora procedemos a graficar tomando en cuenta la literatura:

$$\pi(e^{i\theta}; z) = e^{4i\theta} - e^{3i\theta} - \frac{z}{20}(-19 + 106e^{i\theta} - 264e^{2i\theta} + 646e^{3i\theta} + 251e^{4i\theta})$$

$$z = \frac{20(e^{4i\theta} - e^{3i\theta})}{-19 + 106e^{i\theta} - 264e^{2i\theta} + 646e^{3i\theta} + 251e^{4i\theta}}$$

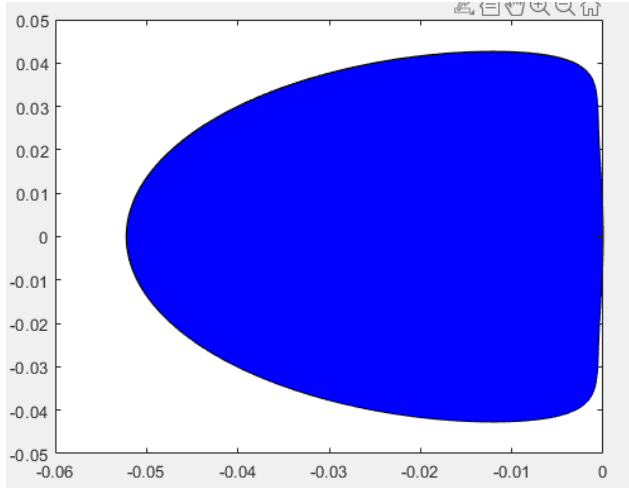


Figure 3: Región de estabilidad de Adams-Moulton de 4 pasos

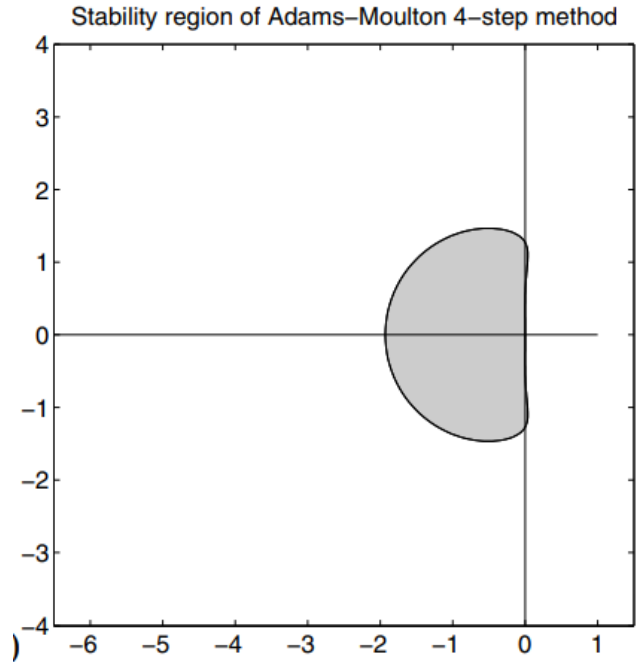


Figure 4: Region de estabilidad de Adams-Moulton teórica

d. Determine si el método es consistente. Calcule el orden

Recordemos la fórmula de la serie de Taylor truncada:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \frac{f^i(x_0)}{i!} (x - x_i) + \frac{f^{N+1}(\zeta)}{(N+1)!} (x - x_i)$$

I. Consistencia de Adams-Bashford

Tenemos un error al calcular la aproximación de $f(x, y(x))$ en Adams-Bashford que está dado según la fórmula anterior del error de truncamiento por:

$$\frac{f^{(3)}(\zeta_j, y(\zeta_j))}{3!} (x - x_j)(x - x_{j-1})(x - x_j - 2) \quad x_{j-2} < \zeta_j < x_{j+1}$$

Ahora, tenemos que

$$\epsilon_{j+1} = \frac{f^{(3)}(\zeta_j, y(\zeta_j))}{3!} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x - x_j)(x - x_{j-1})(x - x_j - 2) dx = \frac{f^{(3)}(\zeta_j, y(\zeta_j))}{3!} \frac{9h^4}{4} = \frac{3h^4 f^{(3)}(\zeta_j, y(\zeta_j))}{8}$$

Pues bien, como sabemos que $y' = f(x, y)$, podemos escribir $\frac{3h^4 f^{(3)}(\zeta_j, y(\zeta_j))}{8}$ como $\frac{3h^4 y^{(4)}(\zeta_j)}{8}$
De este modo,

$$T_{j+1}(h) = \frac{\epsilon_{j+1}}{h} = \frac{3h^3 y^{(4)}(\zeta_j)}{8} = \Theta(h^3) \quad x_{j-2} < \zeta_j < x_{j+1}$$

El método es consistente puesto que el límite cuando h tiende a 0 de T_{j+1} es 0. y es de orden $\Theta(h^3)$

I. Consistencia de Adams-Moulton

Tenemos un error al calcular la aproximación de $f(x, y(x))$ en Adams-Moulton que está dado según la fórmula anterior del error de truncamiento por:

$$\frac{f^{(5)}(\zeta_j, y(\zeta_j))}{5!} (x - x_{j-3})(x - x_{j-2})(x - x_{j-1})(x - x_j)(x - x_{j+1}) \quad x_{j-2} < \zeta_j < x_{j+1}$$

$$\epsilon_{j+1} = \frac{f^{(5)}(\zeta_j, y(\zeta_j))}{5!} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x - x_j)(x - x_{j-1})(x - x_j - 2)dx = \frac{f^{(5)}(\zeta_j, y(\zeta_j))}{5!} \frac{-9h^6}{4} = \frac{-3h^6 f^{(5)}(\zeta_j, y(\zeta_j))}{160}$$

Pues bien, como sabemos que $y' = f(x, y)$, podemos escribir $\frac{-3h^6 f^{(5)}(\zeta_j, y(\zeta_j))}{160}$ como $\frac{3h^6 y^{(6)}(\zeta_j)}{8}$
De este modo

$$T_{j+1}(h) = \frac{\epsilon_{j+1}}{h} = \frac{-3h^6 y^{(6)}(\zeta_j)}{160} = \Theta(h^5) \quad x_{j-3} < \zeta_j < x_{j+1}$$

El método es consistente puesto que el límite cuando h tiende a 0 de T_{j+1} es 0. y es de orden $\Theta(h^5)$
e. Considere el PVI

$$\begin{cases} y_1' = 9y_1 + 24y_2 + 5\cos t - \frac{1}{3}\sin t & t \in [0, 1] \\ y_2' = -24y_1 - 51y_2 - 9\cos t + \frac{1}{3}\sin t & t \in [0, 1] \\ y_1(0) = \frac{4}{3}, \quad y_2(0) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

I. Verifique que

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 2e^{-3t} - e^{-39t} + \frac{1}{3}\cos t \\ y_2(t) &= -e^{-3t} + 2e^{-39t} - \frac{1}{3}\cos t \end{aligned}$$

es la solución del PVI.

Sea

$$y_1'(t) = -6e^{-3t} + 39e^{-39t} - \frac{1}{3}\sin t$$

reemplazando $y_1(t)$ y $y_2(t)$ en el PVI por las soluciones que deseamos verificar, queremos ver si

$$-6e^{-3t} + 39e^{-39t} - \frac{1}{3}\sin t = 9(2e^{-3t} - e^{-39t} + \frac{1}{3}\cos t) + 24(-e^{-3t} + 2e^{-39t} - \frac{1}{3}\cos t) + 5\cos t - \frac{1}{3}\sin t$$

Ahora, distribuyendo en el lado derecho obtenemos

$$-6e^{-3t} + 39e^{-39t} - \frac{1}{3}\sin t = 18e^{-3t} - 9e^{-39t} + 3\cos t - 24e^{-3t} + 48e^{-39t} - 8\cos t + 5\cos t - \frac{1}{3}\sin t$$

Por medio de operaciones elementales en el lado derecho quedamos con

$$-6e^{-3t} + 39e^{-39t} - \frac{1}{3}\sin t = -6e^{-3t} + 39e^{-39t} - \frac{1}{3}\sin t$$

Es claro que ambas expresiones son iguales. Ahora veamos si cumple la condición inicial, es decir,

$$y_1(0) = 2e^{-3(0)} - e^{-39(0)} + \frac{1}{3}\cos(0) = 2 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Es evidente que se cumple.

Análogamente lo resolvemos para $y_2(t)$, sea

$$y_2'(t) = 3e^{-3t} - 78e^{-39t} + \frac{1}{3}\sin t$$

queremos comprobar si

$$3e^{-3t} - 78e^{-39t} + \frac{1}{3}\sin t = -24(2e^{-3t} - e^{-39t} + \frac{1}{3}\cos t) - 51(-e^{-3t} + 2e^{-39t} - \frac{1}{3}\cos t) - 9\cos t + \frac{1}{3}\sin t$$

Resolviendo para el lado derecho obtenemos,

$$3e^{-3t} - 78e^{-39t} + \frac{1}{3}\sin t = -48e^{-3t} + 24e^{-39t} - 8\cos t + 51e^{-3t} - 102e^{-39t} + 17\cos t - 9\cos t + \frac{1}{3}\sin t$$

$$3e^{-3t} - 78e^{-39t} + \frac{1}{3}\sin t = 3e^{-3t} - 78e^{-39t} + \frac{1}{3}\sin t$$

Ahora, veamos si se cumple la condición inicial:

$$y_2(0) = -e^{-3(0)} + 2e^{-39(0)} - \frac{1}{3}\cos(0) = -1 + 2 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Es claro que ambas expresiones son iguales y además que las condiciones iniciales se cumplen. Por lo tanto, se verifica que $y_1(t) = 2e^{-3t} - e^{-39t} + \frac{1}{3}\cos t$ y $y_2(t) = -e^{-3t} + 2e^{-39t} - \frac{1}{3}\cos t$ son la solución al PVI.

II. Para solucionar el PVI, aplique el método de Backward Euler, Forward Euler, Crank-Nicolson, Runge-Kutta-Fehlberg 45 de quinto orden, Adams-Bashforth de tres pasos y Adams-Moulton de cuatro pasos. Inserte SU código en el documento.

Código en: https://github.com/jrestrepot/EDP/blob/main/Trabajo%20Final/edp_m%C3%A9todos.py

III. Para cada caso realice una gráfica de las componentes $y_1(t)$ y $y_2(t)$ de la solución exacta y de sus respectivas soluciones aproximadas.

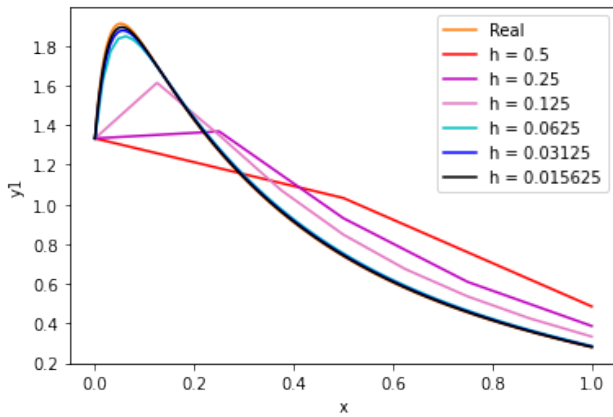


Figure 5: Aproximaciones a y_1 con Backward Euler

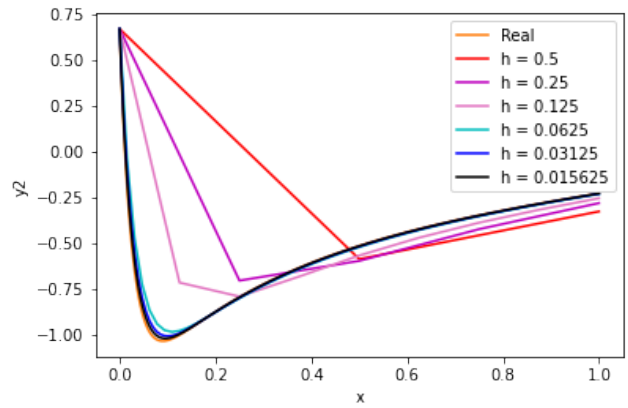


Figure 6: Aproximaciones a y_2 con Backward Euler

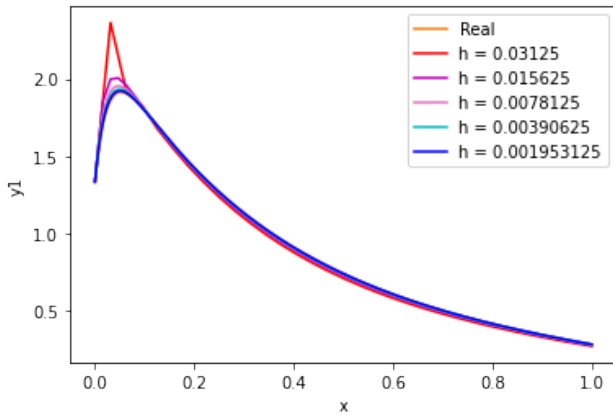


Figure 7: Aproximaciones a y_1 con Forward Euler

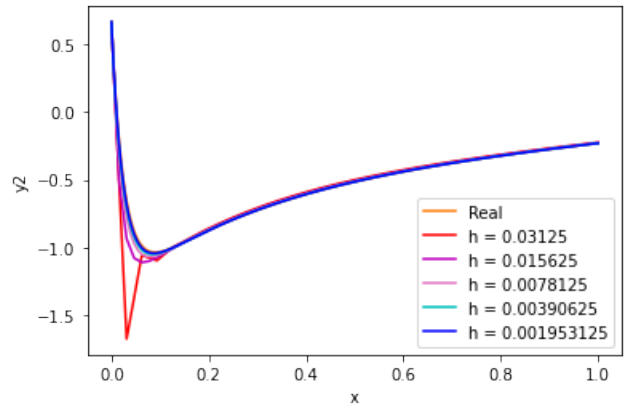


Figure 8: Aproximaciones a y_2 con Forward Euler

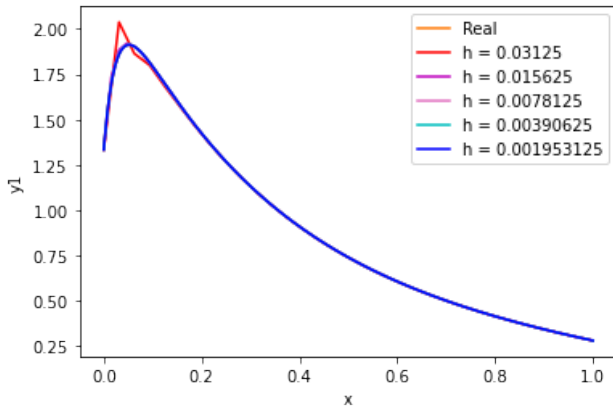


Figure 9: Aproximaciones a y_1 con Crank-Nicolson

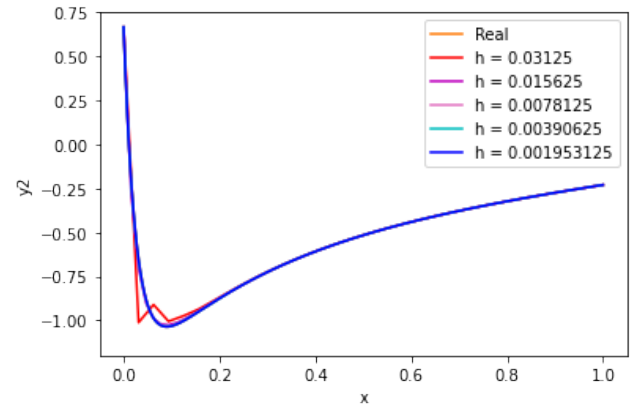


Figure 10: Aproximaciones a y_2 con Crank-Nicolson

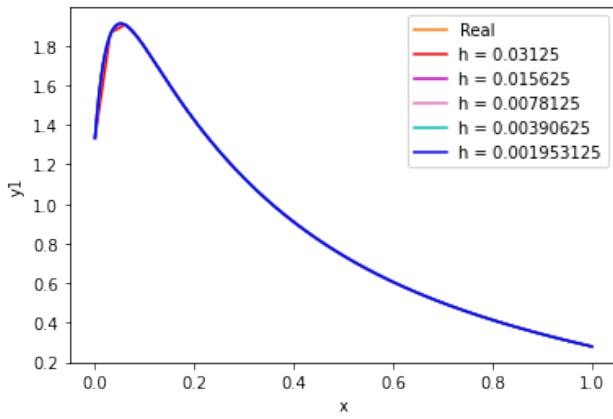


Figure 11: Aproximaciones a y_1 con RK45 cuarto orden

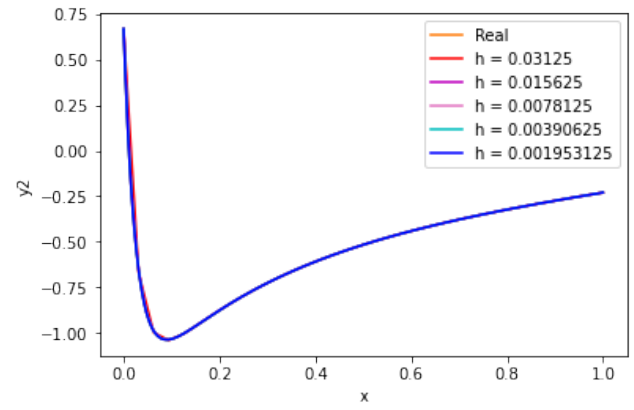


Figure 12: Aproximaciones a y_2 con RK45 cuarto orden

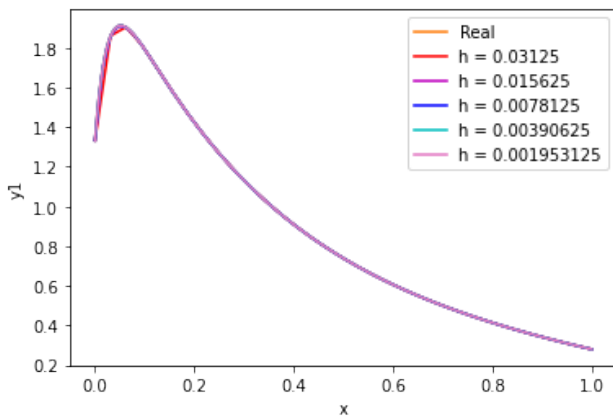


Figure 13: Aproximaciones a y_1 con RK45 quinto orden

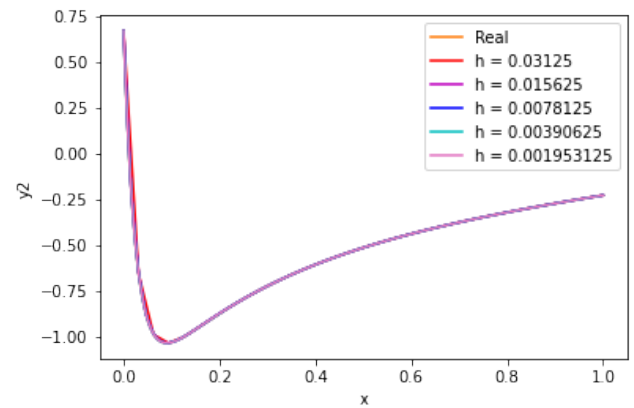


Figure 14: Aproximaciones a y_2 con RK45 quinto orden

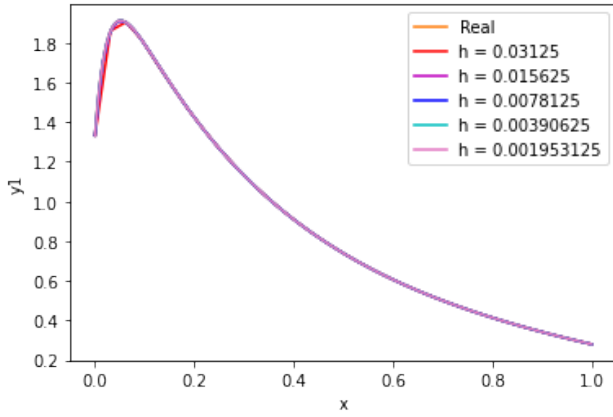


Figure 15: Aproximaciones a y_1 con Adams-Moulton de 4 pasos

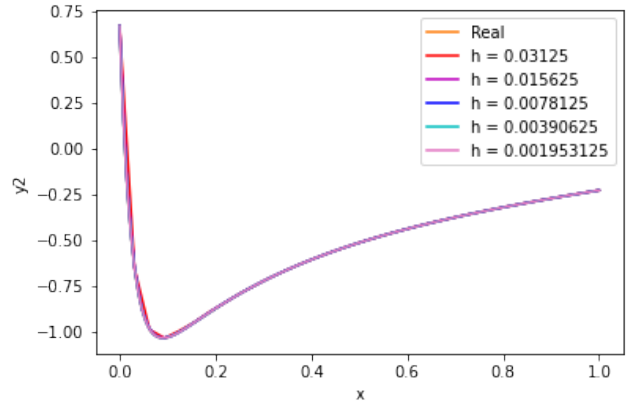


Figure 16: Aproximaciones a y_2 con Adams-Moulton de 4 pasos

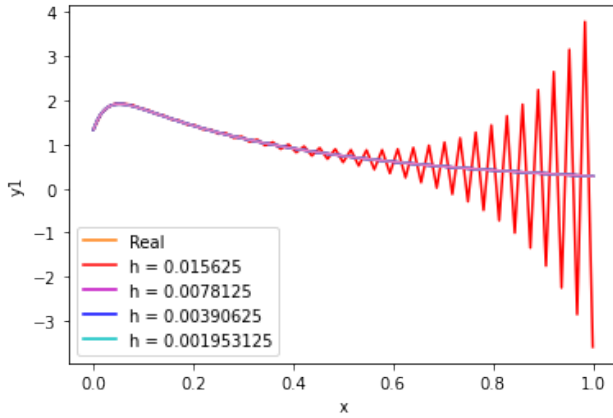


Figure 17: Aproximaciones a y_1 con Adams-Bashford de 3 pasos

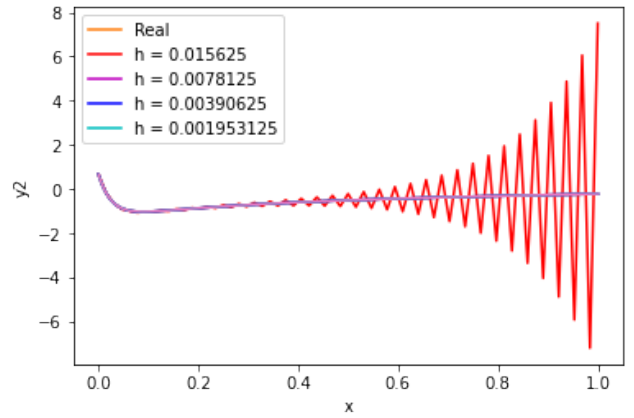


Figure 18: Aproximaciones a y_2 con Adams-Bashford de 3 pasos

Nota

Observe que no se usan los mismos h en todas las gráficas. El h más grande que se usa en cada gráfica es el h con el que el método empieza a converger.

IV. Si $\Phi_h(x)$ es la aproximación (obtenida al aplicar cada método) de la solución $U(x) = [y_1(t), y_2(t)]^T$ en $[0, 1]$, para cada $h = 2^{-j}, j = \{1, \dots, 6\}$. Obtenga una sucesión de errores de la forma:

$$E_h = \left(\int_0^1 |U(x) - \Phi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Usando la tabla de valores de h y E_h

(*) Calcule el orden de convergencia experimental α_h

h	Eh	α
0.5	354.566116	nan
0.25	4913.206510	-3.79254
0.125	39881.848462	-3.021
0.062500	418.934425	6.57286
0.031250	0.493940	9.72817
0.015625	0.177749	1.47449

Table 1: Orden de convergencia experimental Forward Euler

h	Eh	α
0.5	1.648463	nan
0.25	1.253517	0.39514
0.125	0.886243	0.500208
0.062500	0.567733	0.64249
0.031250	0.330886	0.778878
0.015625	0.180772	0.872161

Table 2: Orden de convergencia experimental Back-Ward Euler

h	Eh	α
0.5	177.574476	nan
0.25	2456.682279	-3.79022
0.125	19940.945301	-3.02095
0.062500	209.471625	6.57284
0.031250	0.366511	9.15868
0.015625	0.166795	1.13578

Table 3: Orden de convergencia experimental Crank-Nicolson

h	Eh	α
0.5	5.684443e+07	nan
0.25	9.198517e+06	2.62755
0.125	8.375705e+04	6.77905
0.062500	0.6484784	16.9788
0.031250	0.3318969	0.966323
0.015625	0.1680308	0.98201

Table 4: Orden de convergencia experimental Runge-Kutta 45

h	Eh	α
0.5	4.482827e+08	nan
0.25	8.238821e+07	2.4439
0.125	6.480825e+07	0.34626
0.062500	2.473027e+08	-1.93203
0.031250	4.226911e+08	-0.773326
0.015625	4.854262e+00	26.3758

Table 5: Orden de convergencia experimental Adams-Bashford

h	Eh	α
0.5	5.684443e+07	nan
0.25	6.512765e+05	6.4476
0.125	1.416991e+03	8.8443
0.062500	0.7724028	10.8412
0.031250	0.3317753	1.21915
0.015625	0.1680223	0.981553

Table 6: Orden de convergencia experimental Adams-Moulton

(*) Realice una gráfica loglog de Eh vs h. Analice la gráfica

Gráficas loglog de Eh vs

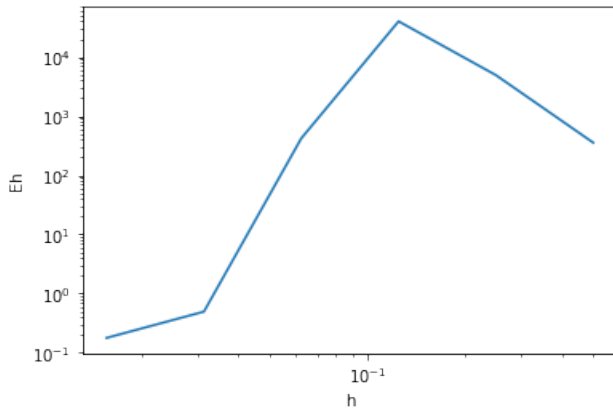


Figure 19: Gráfica loglog Forward Euler con $h = 2^{-j}$ con $j = \{1...6\}$. Se observa que el menor error se da cuando h es más pequeña. Sin embargo, hay un pico en la gráfica cuando h apenas empieza a decrecer, lo cual indica que no siempre un menor h garantiza menor error.

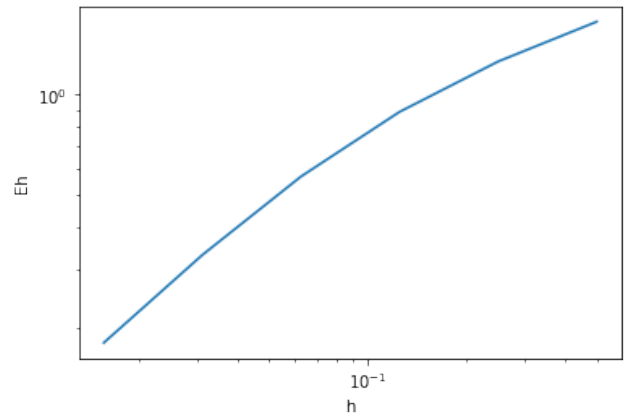


Figure 20: Gráfica loglog Backward Euler con $h = 2^{-j}$. El error tiene un comportamiento casi lineal, entre más pequeña h es menor el error (dentro de este conjunto de h s específicas). Podemos concluir que aquí disminuye el error de truncamiento, y no hemos llegado al caso en el que escogemos un h lo suficientemente pequeña para que el error de redondeo sea mayor al de truncamiento.

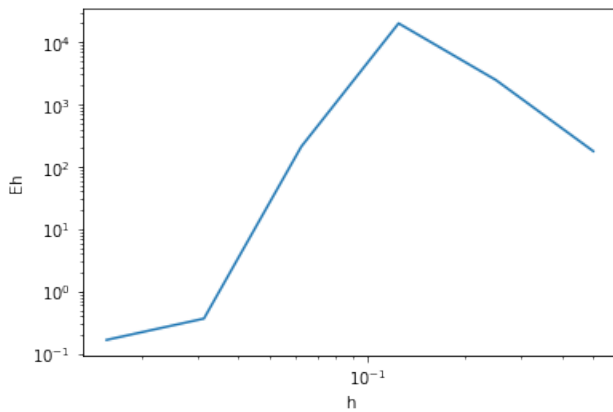


Figure 21: Gráfica loglog Crank Nicolson con $h = 2^{-j}$ con $j = \{1...6\}$. Podemos ver que tiene un comportamiento muy parecido al método de Forward Euler, lo cual podría considerarse esperado, ya que este método funciona como un "promedio" entre Forward y Backward Euler.

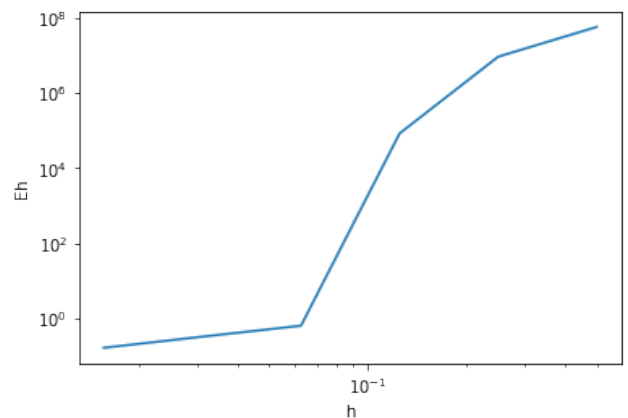


Figure 22: Gráfica loglog RK45 con $h = 2^{-j}$ con $j = \{1...6\}$. El error se comporta como es esperado, entre más pequeña h es menor el error. Aunque debemos estar cautos a no elegir una h tan pequeña que el error de redondeo comience a crecer.

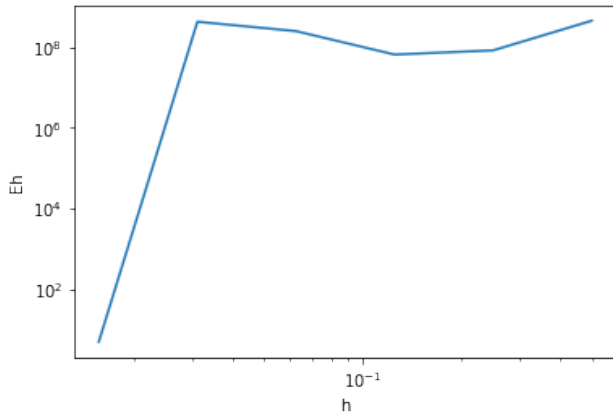


Figure 23: Gráfica loglog Adam-Bashford con $h = 2^{-j}$ con $j = \{1...6\}$. Se evidencia en la gráfica que para lograr que el error comience a disminuir (y por ende, este método a converger), se necesita de un h muy pequeño, que como vimos en la figura 14 debe de ser aproximadamente de 0.01562.

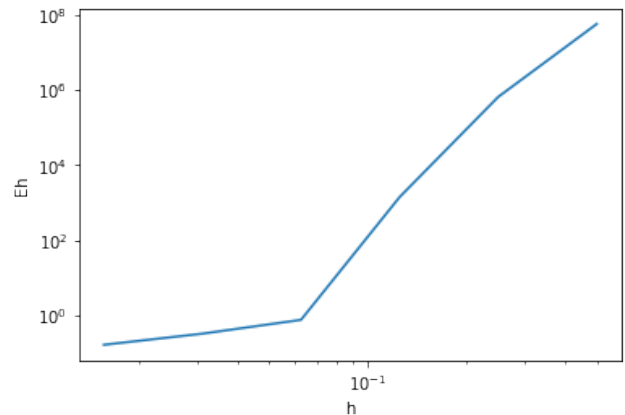


Figure 24: Gráfica loglog Adams-Moulton con $h = 2^{-j}$ con $j = \{1...6\}$. El error disminuye a medida que h disminuye, pero en este caso disminuye muy rápidamente.

(*) Compare y analice los resultados obtenidos para cada método.

Podemos observar que el α de ningún método se aproxima a su orden de convergencia teórico. Esto es debido a que se han elegido h s muy grandes, pues con h s más pequeñas el α comienza a asemejarse al real. El método más estable y con menor error es el Backward Euler, mientras que el tiene errores más grandes y más variación en sus ordenes de convergencia experimental es el de Adams-Bashford.

En los métodos Forward Euler, Crank-Nicolson y Adams-Bashford existe una región en el dominio de la gráfica en la cual el error comienza a disminuir cuando h disminuye, pero luego crece de nuevo con un h incluso más pequeño. Esto indica que pueden ser más inestables que el resto de los métodos.

2 Grupo de ejercicios 2

Considere el PVF

$$\begin{cases} \epsilon u'' - u' = -1, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 1, & u(1) = 3 \end{cases}$$

a. Verifique que la solución exacta está dada por

$$u(x) = 1 + x + \frac{e^{\frac{x}{\epsilon}} - 1}{e^{\frac{1}{\epsilon}} - 1}$$

Sean

$$u'(x) = 1 + \frac{e^{\frac{x}{\epsilon}}}{\epsilon(e^{\frac{1}{\epsilon}} - 1)}$$

$$u''(x) = \frac{e^{\frac{x}{\epsilon}}}{\epsilon^2(e^{\frac{1}{\epsilon}} - 1)}$$

queremos ver que

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{e^{\frac{x}{\epsilon}}}{\epsilon^2(e^{\frac{1}{\epsilon}} - 1)} - \left(1 + \frac{e^{\frac{x}{\epsilon}}}{\epsilon(e^{\frac{1}{\epsilon}} - 1)}\right) &= -1 \\ \frac{e^{\frac{x}{\epsilon}}}{\epsilon(e^{\frac{1}{\epsilon}} - 1)} - 1 - \frac{e^{\frac{x}{\epsilon}}}{\epsilon(e^{\frac{1}{\epsilon}} - 1)} &= -1 \\ -1 &= -1 \end{aligned}$$

Es claro que ambas expresiones son iguales.

Además, debemos verificar que se cumplan las condiciones iniciales

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 3$$

$$u(0) = 1 + 0 + \frac{e^{\frac{0}{\epsilon}} - 1}{e^{\frac{1}{\epsilon}} - 1} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$u(1) = 1 + 1 + \frac{e^{\frac{1}{\epsilon}} - 1}{e^{\frac{1}{\epsilon}} - 1} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Por lo tanto, se comprueba que $u(x) = 1 + x + \frac{e^{\frac{x}{\epsilon}} - 1}{e^{\frac{1}{\epsilon}} - 1}$ es la solución exacta al PVF.

b. Expresa de la forma más detallada posible el análisis para obtener el sistema de ecuaciones lineales que resuelve el PVF a partir del método de diferencias finitas.

Recordemos la discretización de los operadores diferenciales con diferencias centradas:

$$u'_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$u''_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Si dividimos por ϵ nuestra ecuación:

$$u'' - \frac{1}{\epsilon} u' = -\frac{1}{\epsilon}$$

$$u''_n - \frac{1}{\epsilon} u'_n = -\frac{1}{\epsilon}$$

Analizando en $x = x_j$:

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} - \frac{1}{\epsilon} \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = -\frac{1}{\epsilon}$$

$$u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} - \frac{h}{2\epsilon} u_{j+1} + \frac{h}{2\epsilon} u_{j-1} = -\frac{h^2}{\epsilon}$$

$$u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} - \frac{h}{2\epsilon} u_{j+1} + \frac{h}{2\epsilon} u_{j-1} = -\frac{h^2}{\epsilon}$$

$$(1 - \frac{h}{2\epsilon})u_{j+1} - 2u_j + (1 + \frac{h}{2\epsilon})u_{j-1} = -\frac{h^2}{\epsilon}$$

si $j=1$

$$(1 - \frac{h}{2\epsilon})u_2 - 2u_1 + (1 + \frac{h}{2\epsilon})u_0 = -\frac{h^2}{\epsilon}$$

pero, $u_0 = 1$, por lo que el esquema se reescribe como:

$$(1 - \frac{h}{2\epsilon})u_2 - 2u_1 + (1 + \frac{h}{2\epsilon}) = -\frac{h^2}{\epsilon}$$

$$(1 - \frac{h}{2\epsilon})u_2 - 2u_1 = -\frac{h^2}{\epsilon} - (1 + \frac{h}{2\epsilon})$$

si $j=n-1$

$$(1 - \frac{h}{2\epsilon})u_n - 2u_{n-1} + (1 + \frac{h}{2\epsilon})u_{n-2} = -\frac{h^2}{\epsilon}$$

pero $u_n = 3$

$$3(1 - \frac{h}{2\epsilon}) - 2u_{n-1} + (1 + \frac{h}{2\epsilon})u_{n-2} = -\frac{h^2}{\epsilon}$$

$$-2u_{n-1} + (1 + \frac{h}{2\epsilon})u_{n-2} = -\frac{h^2}{\epsilon} - 3(1 - \frac{h}{2\epsilon})$$

Ahora, veamos si $2 \leq j \leq n-2$

$$(1 - \frac{h}{2\epsilon})u_{j+1} - 2u_j + (1 + \frac{h}{2\epsilon})u_{j-1} = -\frac{h^2}{\epsilon}$$

Ahora, formemos el sistema de ecuaciones (matriz tridiagonal)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 - \frac{h}{2\epsilon} & & & \\ 1 + \frac{h}{2\epsilon} & -2 & 1 - \frac{h}{2\epsilon} & & \\ & 1 + \frac{h}{2\epsilon} & -2 & 1 - \frac{h}{2\epsilon} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 + \frac{h}{2\epsilon} & -2 & 1 - \frac{h}{2\epsilon} \\ & & & & 1 + \frac{h}{2\epsilon} & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{h^2}{\epsilon} - (1 + \frac{1}{2\epsilon}) \\ -\frac{h^2}{\epsilon} \\ -\frac{h^2}{\epsilon} \\ \vdots \\ -\frac{h^2}{\epsilon} - 3(1 - \frac{1}{2\epsilon}) \end{pmatrix}$$

c. Utilizando el esquema de diferencias centrada para $\varphi = 0.1, 0.01, 0.001$ y 0.0001

I. Consigne SU código para resolver el problema y aproxime la solución de este PVF

Código en: https://github.com/jrestrepot/EDP/blob/main/Trabajo%20Final/edp_m%C3%A9todos.py Métodos: Dfinitas, errorDiff.

Nota

Para ϵ de 0.001 y 0.0001 el algoritmo no corre pues caemos en el overflow. Por lo tanto, no pudimos analizar estos casos.

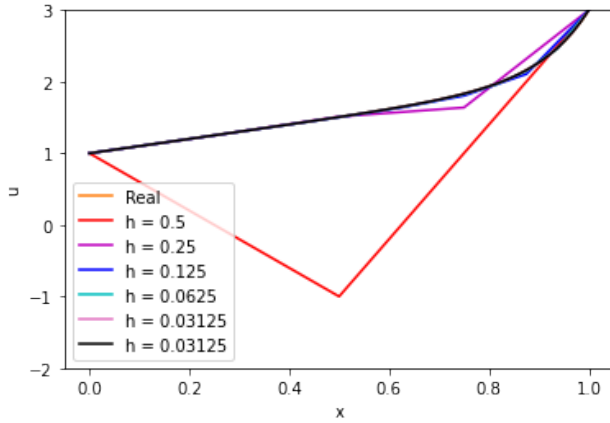


Figure 25: Aproximaciones a U con $\epsilon = 0.1$

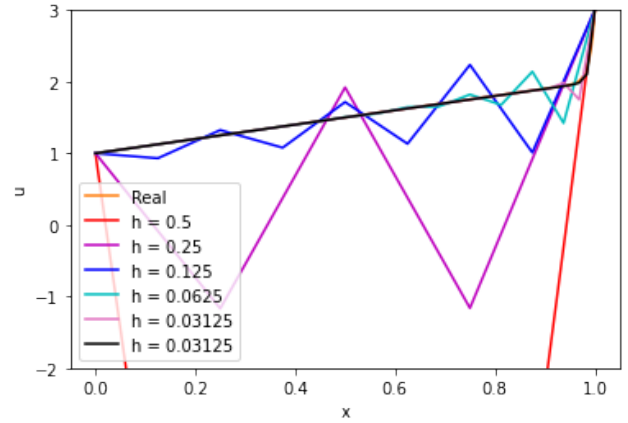


Figure 26: Aproximaciones a U con $\epsilon = 0.01$

x	U aprox	U exacta	Error absoluto
0.0	1.0	1.0000	0.0000
0.5	-1.0	1.5067	2.5067
1.0	3.0	3.0000	0.0000

Table 7: Error absoluto de diferencias finitas para $h = 0.5, \epsilon = 0.1$

x	U aprox	U exacta	Error absoluto
0.0	1.0000	1.0000	0.0000
0.25	1.2485	1.2505	0.00203
0.5	1.5122	1.5067	0.00550
0.75	1.6387	1.8320	0.19332
1.0	3.0000	3.0000	0.0000

Table 8: Error absoluto de diferencias finitas para $h = 0.25, \epsilon = 0.1$

x	U aprox	U exacta	Error absoluto
0.0	1.0	1.0000	0.0000
0.015625	1.015633	1.015633	1.386111e-07
0.031250	1.031266	1.031267	2.978509e-07
0.046875	1.046902	1.046902	4.807315e-07
...
0.953125	2.578294	2.578892	5.983859e-04
0.968750	2.699887	2.700353	4.664851e-04
0.984375	2.839441	2.839714	2.727429e-04
1.0	3.0	3.0000	0.0000

Table 9: Error absoluto de diferencias finitas para $h = 0.0156$, $\epsilon = 0.1$

x	U aprox	U exacta	Error absoluto
0.0	1.0	1.0000	0.0000
0.007812	1.007816	1.007816	1.679227e-08
0.015625	1.015633	1.015633	3.479111e-08
0.023438	1.023449	1.023449	5.408172e-08
...
0.976562	2.767524	2.767618	9.433920e-05
0.984375	2.839646	2.839714	6.800606e-05
0.992188	2.916996	2.917033	3.676748e-05
1.0	3.0	3.0000	0.0000

Table 10: Error absoluto de diferencias finitas para $h = 0.0078$, $\epsilon = 0.1$

x	U aprox	U exacta	Error absoluto
0.0	1.0	1.0000	0.0000
0.5	-23.5	1.5	25.0
1.0	3.0	3.0000	0.0000

Table 11: Error absoluto de diferencias finitas para $h = 0.5$, $\epsilon = 0.01$

x	U aprox	U exacta	Error absoluto
0.0	1.0000	1.0000	0.0000
0.25	-1.167925	1.25	2.417925
0.5	1.920509	1.50	0.420509
0.75	-1.161566	1.75	2.911566
1.0	3.0000	3.0000	0.0000

Table 12: Error absoluto de diferencias finitas para $h = 0.25$, $\epsilon = 0.01$

x	U aprox	U exacta	Error absoluto
0.0	1.0	1.0000	0.0000
0.015625	1.015625	1.015625	0.0000
0.031250	1.031250	1.031250	0.0000
0.046875	1.046902	1.046875	0.0000
...
0.953125	1.954977	1.962335	0.007358
0.968750	1.983832	2.012687	0.028855
0.984375	2.107182	2.193986	0.086804
1.0	3.0	3.0000	0.0000

Table 13: Error absoluto de diferencias finitas para $h = 0.0156$, $\epsilon = 0.01$

x	U aprox	U exacta	Error absoluto
0.0	1.0	1.0000	0.0000
0.007812	1.007812	1.007816	0.0000
0.015625	1.015625	1.015625	2.220446e-16
0.023438	1.023437	1.023438	4.440892e-16
...
0.976562	2.060707	2.072530	1.182296e-02
0.984375	2.176396	2.193986	1.759018e-02
0.992188	2.430390	2.450021	1.963111e-02
1.0	3.0	3.0000	0.0000

Table 14: Error absoluto de diferencias finitas para $h = 0.0078$, $\epsilon = 0.01$

II. Si $h_h(x)$ es la aproximación (obtenida al aplicar cada método) de la solución $u(x)$ en $[0, 1]$, para cada $h = 2^{-j}$, $j = \{1, \dots, 6\}$. Obtenga una sucesión de errores de la forma:

$$E_h = \left(\int_0^1 |u(x) - h_h(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Usando la tabla de valores de h y E_h

(*) Calcule el orden de convergencia experimental α_h

h	Eh	α
0.5	1.349675	nan
0.25	0.083071	4.02212
0.125	0.023282	1.83513
0.062500	0.006018	1.9519
0.031250	0.001518	1.98745
0.015625	0.000380	1.99683

Table 15: Orden de convergencia experimental de diferencias finitas para $\epsilon = 0.1$

h	Eh	α
0.5	14.294360	nan
0.25	1.434855	3.31647
0.125	0.273149	2.39314
0.062500	0.105409	1.37369
0.031250	0.038206	1.46413
0.015625	0.011237	1.76552

Table 16: Orden de convergencia experimental de diferencias finitas para $\epsilon = 0.01$

Podemos observar que el α en ambas tablas empieza a acercarse a 2, el orden real del método.

(*) Realice una gráfica loglog de E_h vs h . Analice la gráfica

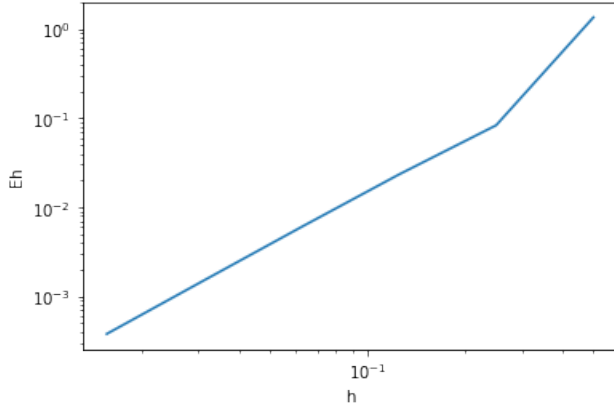


Figure 27: Loglog Eh vs h para $\epsilon = 0.1$

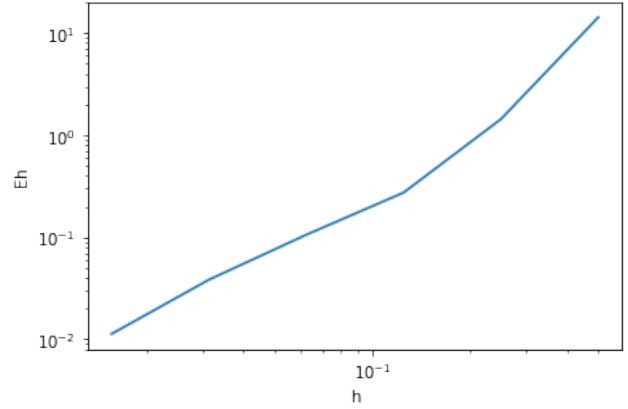


Figure 28: Loglog Eh vs h para $\epsilon = 0.01$

Podemos ver que tanto en la figura 23 como en la figura 24 que ambos errores disminuyen rápidamente, de forma casi lineal. No obstante, el error con $\epsilon = 0.01$ siempre es casi 10 veces mayor que el error con $\epsilon = 0.1$. Esto puede deberse a que ya empiezan a haber errores pues los números son muy grandes y estamos cerca del overflow.

III. ¿Qué observa en los resultados numéricos con respecto a ϵ ?

A medida que ϵ disminuye, los errores aumentan. Si

3 Grupo de ejercicios 3

a. Haga un resumen de la sección 8.2 pp 393-398 del texto Timothy Sauer. 2011. Numerical Analysis (2nd. ed.). Pearson. Realice un análisis detallado de la teoría, en especial de la aplicación del esquema de diferencia finita para problemas hiperbólicos y de la condición CFL.

Consideremos la siguiente ecuación de onda, con velocidad de onda c :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0$$

Cuyo discriminante es $4c^2 \geq 0$, por lo que la ecuación es hiperbólica; y sus condiciones de frontera e iniciales son las siguientes:

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) & \text{para todo } a \leq x \leq b \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{para todo } a \leq x \leq b \\ u(a, t) = l(t) & \text{para todo } t \geq 0 \\ u(b, t) = r(t) & \text{para todo } t \geq 0 \end{cases}$$

Aplicamos el método de diferencias centradas en la ecuación y analizamos su estabilidad. Los puntos que usaremos son (x_i, t_j) , donde $x_i = a + ih$ y $t_j = jk$, para los tamaños de paso h y k . Asimismo, la aproximación de la solución será representada por w_{ij} .

$$\frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{k^2} - c^2 \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h^2} = 0$$

Multiplicando a cada lado por k^2 , definiendo $\sigma = \frac{ck}{h}$ y despejando $w_{i,j+1}$, tenemos:

$$w_{i,j+1} = (2 - 2\sigma^2)w_{i,j} + \sigma^2 w_{i-1,j} + \sigma^2 w_{i+1,j} - w_{i,j-1} \quad (5)$$

Esta última ecuación no se puede usar para el primer paso temporal porque necesitan los valores en los tiempos j y $j-1$. Para resolver este problema introducimos la formula de diferencias centradas para aproximar la primera derivada temporal de u .

$$u_t(x_i, t_j) \approx \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2k}$$

Si sustituimos los datos iniciales en el primer paso (x_i, t_1) obtenemos:

$$g(x_i) = u_t(x_i, t_0) \approx \frac{w_{i,1} - w_{i,-1}}{2k}$$

$$w_{i,-1} \approx w_{i1} - 2kg(x_i)$$

Sustituyendo el resultado anterior en (5) y haciendo $j=0$ obtenemos la fórmula que usaremos en el primer paso temporal:

$$w_{i1} = (2 - 2\sigma^2)w_{i0} + \sigma^2 w_{i-1,0} + \sigma^2 w_{i+1,0} - w_{i1} + 2kg(x_i) = (1 - \sigma^2)w_{i0} + kg(x_i) + \frac{\sigma^2}{2}(w_{i-1,0} + w_{i+1,0})$$

Para el resto de los pasos usamos la ecuación (5). El error de este método de diferencias finitas es de $O(h^2) + O(k^2)$.

El esquema en forma matricial es el siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 - 2\sigma^2 & \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma^2 & 2 - 2\sigma^2 & \sigma^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \sigma^2 & 2 - 2\sigma^2 & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \sigma^2 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma^2 & 2 - 2\sigma^2 \end{bmatrix}$$

La ecuación para el primer paso temporal se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{m1} \end{bmatrix} = \frac{A}{2} \begin{bmatrix} w_{10} \\ \vdots \\ w_{m0} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_m) \end{bmatrix} + \frac{\sigma^2}{2} \begin{bmatrix} w_{00} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{m+1,0} \end{bmatrix}$$

Y los pasos subsiguientes de la ecuación (5) están dados por

$$\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ \vdots \\ w_{m,j+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} w_{1j} \\ \vdots \\ w_{mj} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ \vdots \\ w_{m,j-1} \end{bmatrix} + \sigma^2 \begin{bmatrix} w_{0j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{m+1,j} \end{bmatrix}$$

Insertando los datos extra, las dos ecuaciones se escriben

$$\begin{bmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{m1} \end{bmatrix} = \frac{A}{2} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_m) \end{bmatrix} + \frac{\sigma^2}{2} \begin{bmatrix} l(t_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(t_0) \end{bmatrix}$$

Y los pasos subsiguientes de la ecuación (5) están dados por

$$\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ \vdots \\ w_{m,j+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} w_{1j} \\ \vdots \\ w_{mj} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ \vdots \\ w_{m,j-1} \end{bmatrix} + \sigma^2 \begin{bmatrix} l(t_j) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(t_j) \end{bmatrix}$$

Teorema

El método de diferencias finitas aplicado a la ecuación de onda con la velocidad $c > 0$ es estable si $\sigma = \frac{ck}{h} \leq 1$

La cantidad $\frac{ck}{h}$ se llama el número CFL del método, en general el CFL debe ser máximo 1 para que el orden del método que da solución a la EDP sea estable. Dado que c es la velocidad de la onda, esto significa que la distancia ck que recorre la solución en un paso temporal no puede exceder el paso espacial h . Esta condición ($ck \leq h$) se llama la condición CFL para la ecuación de onda.

Para ecuaciones hiperbólicas más generales, la condición CFL es necesaria mas no suficiente para asegurar estabilidad.

b. Consigne el código de SU programa que permite aproximar la solución de este PVF con $h = 2^{-j}, j = \{1, , 6\}$, y obtenga la solución aproximada de alguno de los ejercicios de los grupos 1 o 2 que están en la sección de ejercicios 8.2. Calcule el error cometido en cada caso y grafique la solución aproximada y la solución exacta.

Código en: <https://github.com/jrestrepot/EDP/blob/main/Trabajo%20Final/Punto3b.m>

Considerar la ecuación de onda del punto 1b del libro:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} \\ u(x, 0) = e^{-x} \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) = -2e^{-x} \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = e^{-2t} \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1 \\ u(1, t) = e^{-1-2t} \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Cuya solución exacta está dada por $u(x, t) = e^{-x-2t}$

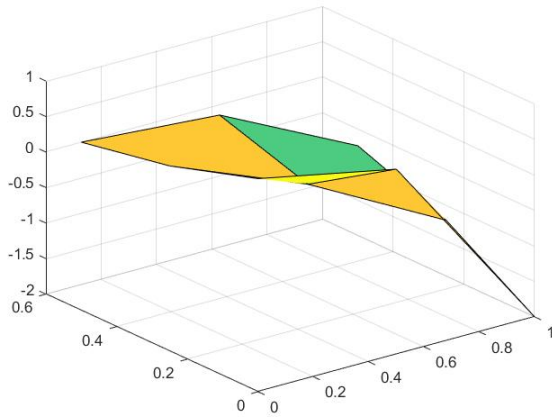


Figure 29: Solución aproximada con $h = 0.5$

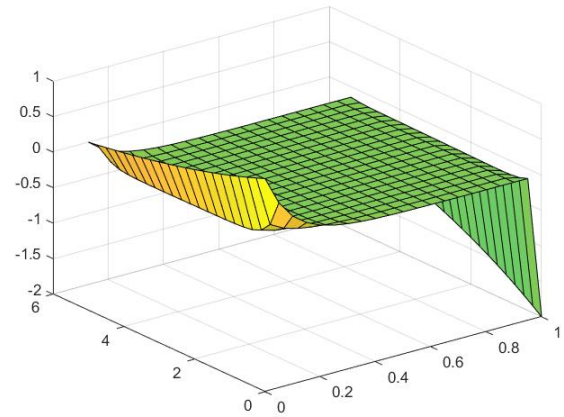


Figure 30: Solución aproximada con $h = 0.0625$

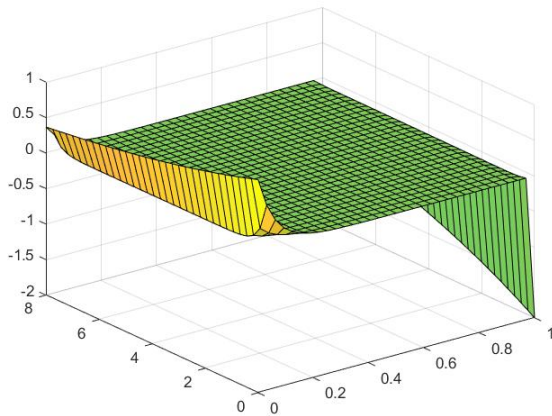


Figure 31: Solución aproximada con $h = 0.03125$

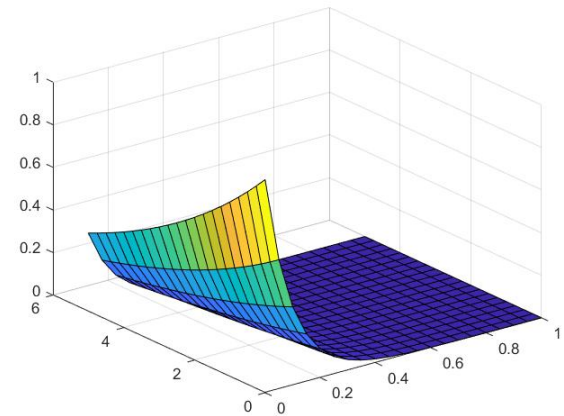


Figure 32: Solución real

References

- [1] , LeVeque, Randall J (2007) *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*, SIAM
- [2] , Molero Aparicio, Mari´a, Adela Salvador Alcaide, Maria Trinidad Mena ´rguez Palacia and Luis Garmendia Salvia (2007) *An´alisis matematico para la ingenieria*, Pearson Prentice Hall