

Estimación de parámetros en Modelo de transmisión del dengue

Abelino Sepúlveda
asepulvede@eafit.edu.co

Sofia Vega
svegal@eafit.edu.co

Andrés Gómez
agomeza10@eafit.edu.co

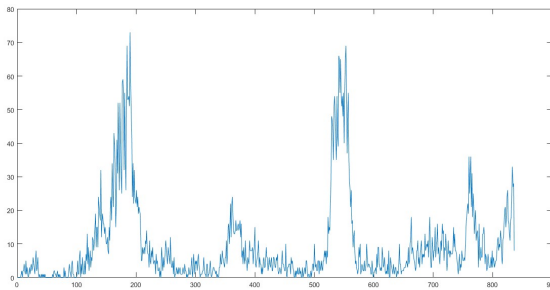
October 31, 2022

1 Introduction

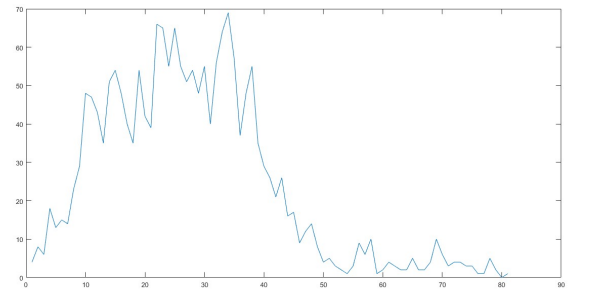
Estamos trabajando con un modelo de ocho ecuaciones que describen el comportamiento de población de humanos y mosquitos. Las ecuaciones del modelo son las mostradas a continuación:

$$\begin{aligned}\frac{dM_s}{dt} &= \Lambda - \beta_m \frac{H_i}{H} M_s - \mu_m M_s \\ \frac{dM_e}{dt} &= \beta_m \frac{H_i}{H} M_s - (\theta_m + \mu_m) M_e \\ \frac{dM_i}{dt} &= \theta_m M_e - \mu_m M_i \\ \frac{dH_s}{dt} &= \mu_h H - \beta_h \frac{M_i}{M} H_s - \mu_h H_s \\ \frac{dH_e}{dt} &= \beta_h \frac{M_i}{M} H_s - (\theta_h + \mu_h) H_e \\ \frac{dH_i}{dt} &= \theta_h H_e - (\gamma_h + \mu_h) H_i \\ \frac{dH_r}{dt} &= \gamma_h H_i - \mu_h H_r\end{aligned}$$

Ahora, con este modelo, queremos hacer un proceso de estimación de los parámetros. Estos, siendo ajustados a una serie de tiempo que contiene los registros de nuevos casos de infección por esta enfermedad en el municipio de Bello - Antioquia, Colombia.



(a) Todos los periodos



(b) Periodo de muestreo elegido

Figure 1: Serie de tiempo casos nuevos dengue

Como se puede observar en la figura 1b el periodo de muestreo elegido para esta estimación fue entre la semana 520 y la semana 600. Periodo en cual observamos una curva de contagio y a demás un lapso endémico que ocurre después de la curva.

Adicional a esto, también contamos con una matriz llamada *Range*, la cual contiene los rangos en los cuales oscilan cada uno de los parámetros.

Parámetro	Rango		Parámetro	Rango	
Hit0	8	8	betah	0	4
Hi0	8	8	betam	0	4
Me0	0	100	gammah	0.5000	1.7500
Hr0	81405	158809	lambda	1881	42694
Hs0	244402	321734	muh	4.0000e-0.4	4.0000e-0.4
He0	18	72	mum	0.1600	0.2000
Ms0	0	1200000	thetah	0.7000	1.7500
Mi0	0	100	thetam	0.5800	0.8800

Table 1: Tabla de rangos de los parámetros

2 Análisis de Sensibilidad

Como primer paso, decidimos realizar un análisis de sensibilidad para determinar qué parámetros no eran sensibles. Esto con el fin de fijarlos antes de empezar el proceso de estimación ya que nos ahorraría tiempo de ejecución. Con un **Índice de Confiabilidad** de 0.9963 se obtuvo el siguiente diagrama de barras

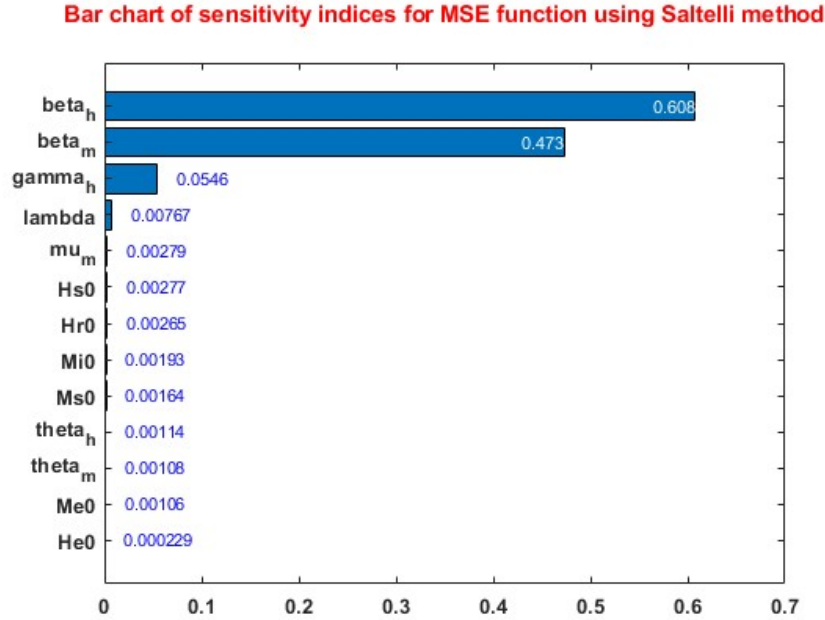


Figure 2: Diagrama de sensibilidad

De acuerdo con los resultados obtenidos en la figura 2 y gracias al índice de confiabilidad, decidimos fijar las siguientes parámetros: θ_{tah} , θ_{tam} , Me0 , He0 , ya que son los que menor índice tienen. Estos son fijados con sus valores nominales (obtenidos de la matriz Range).

La tabla 2 muestra los valores con los que son fijados los parámetros anteriormente mencionados.

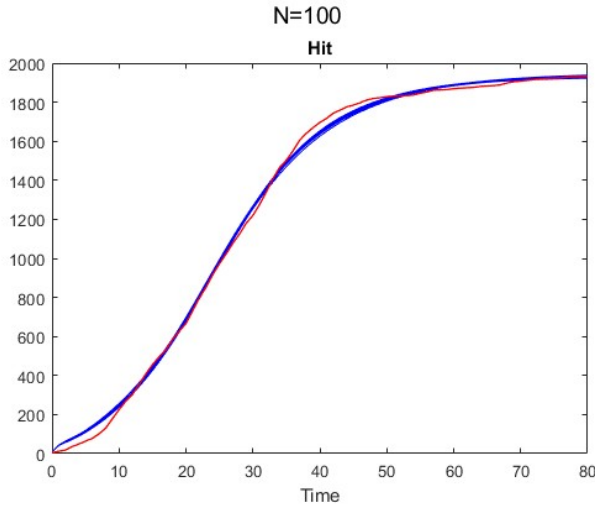
Parámetro	Valor
θ_{tah}	1.2250
θ_{tam}	0.7300
Me0	50
He0	45

Table 2: Valores con los que se fijan los parámetros

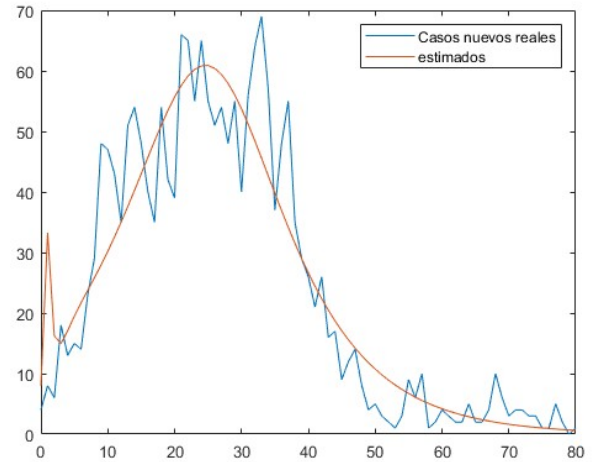
3 Estimación

3.1 Primera ronda de estimación

Se realizó la estimación de los parámetros. Sin embargo, esta primera estimación es más que todo para determinar si algún tipo de correlación entre los parámetros que esté afectando a los demás y también, para determinar si el rango de oscilación de cada uno es adecuado, si no, se amplían en un 20%.



(a) Familia de Curvas



(b) Estimación nuevos casos

Figure 3: Modelo con primera estimación de parámetros

En la figura 3a se puede observar cómo tenemos una única familia de curvas y cómo se ajustan perfectamente a nuestra variable observada (Hit). También, en la figura 3 vemos la comparación entre los casos nuevos reales y los estimados. Es interesante notar en esta gráfica que el comportamiento de ambos es muy similar.

3.1.1 Análisis de identificabilidad

Ahora, realizamos un análisis de identificabilidad, para determinar si hay algún tipo de correlación entre los parámetros y también para validar el espacio de búsqueda.

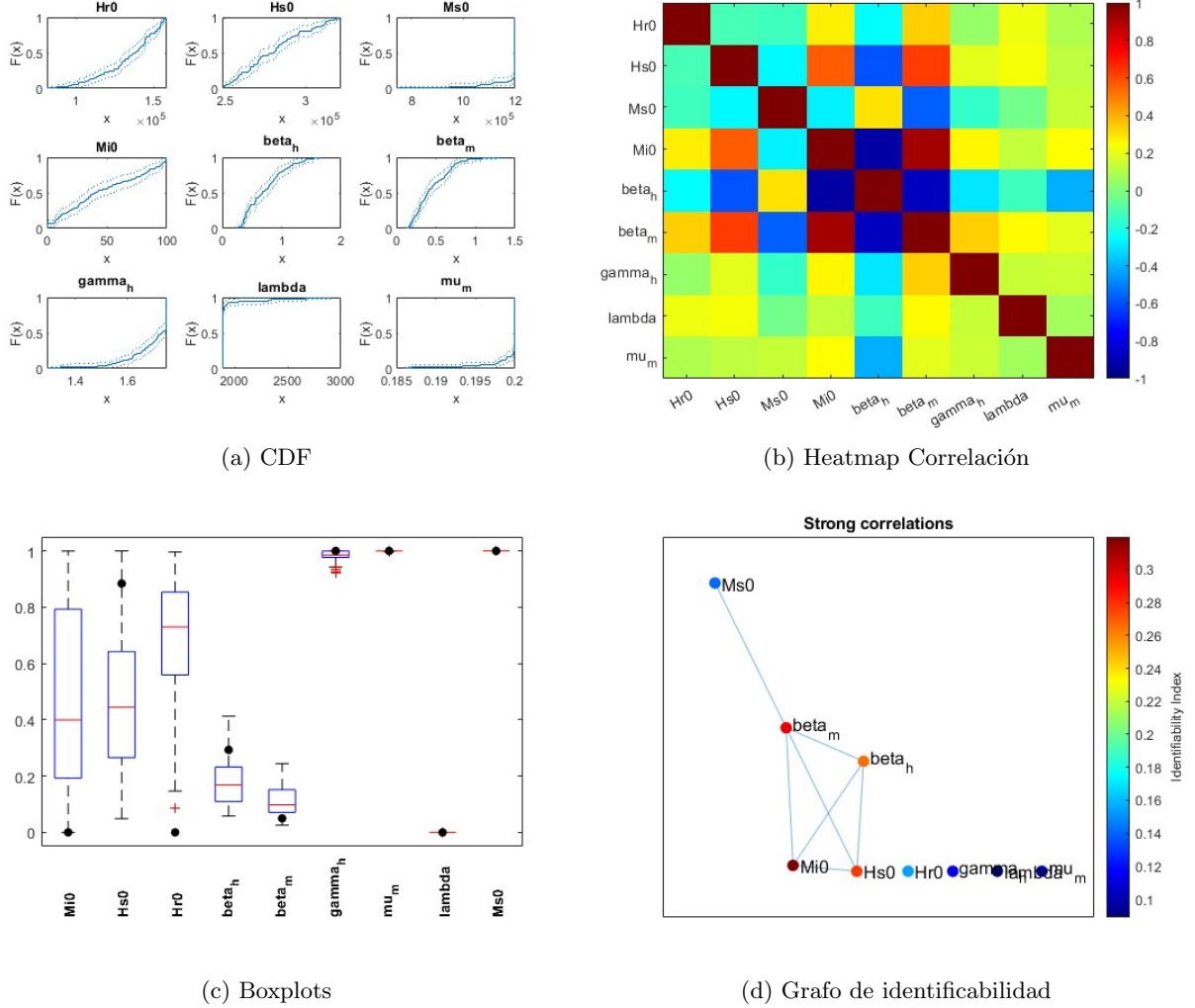


Figure 4: Análisis de identificabilidad

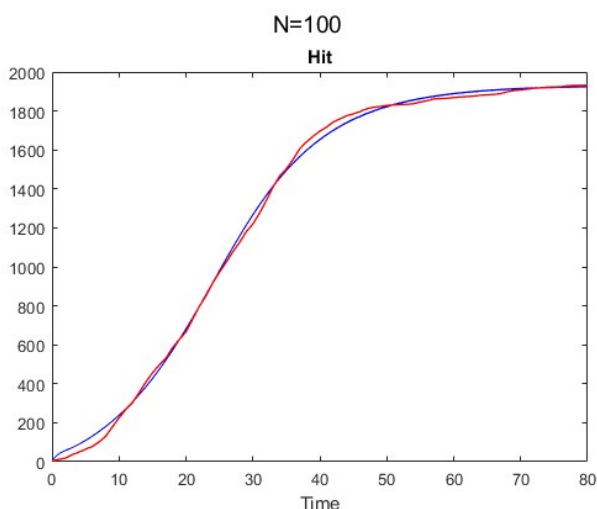
De la figura 4 podemos sacar varias conclusiones, verbigracia, en 4c podemos evidenciar que se necesita ampliar el rango de los parámetros: $Mi0$, $Hr0$, $gamma_h$, mu_m , $lambda$, $Ms0$. Adicional a esto, en 4d observamos que hay un fuerte correlación entre $beta_m$ y otros cuatro parámetros, por lo cual, se decide fijar este con el valor que se obtuvo en la estimación. Además, decidimos fijar también las estimaciones de los otros parámetros (los cuales sus estimaciones estaban dentro de sus rangos).

Parámetro	Valor
Hs0	3.1279e+05
betah	1.1728
betam	0.1980

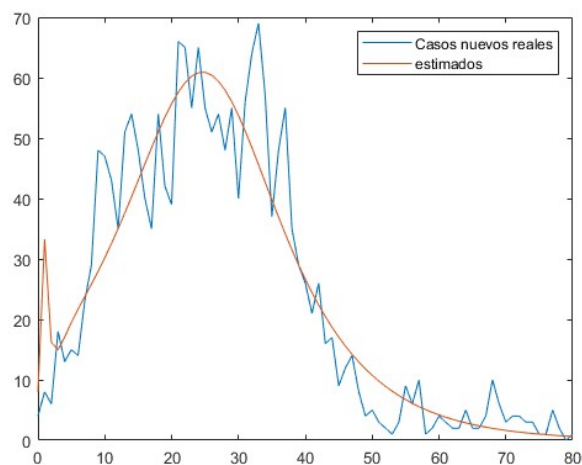
Table 3: Parámetros fijados después de primera estimación

3.2 Segunda Ronda de estimación

Para esta segunda ronda de estimación se fijan los parámetros ilustrado en la tabla 3. Pero sin ampliar el rango de las variables que lo requerían. Esto para observar el comportamiento y ver si se notaba mejor ajuste.



(a) Familia de Curvas



(b) Estimación nuevos casos

Figure 5: Modelo con segunda estimación de parámetros

En la figura 5a observamos que hay un mejor ajuste de la familia de curvas lo cual era lo que se debía esperar dado que se iban fijando los parámetros (la estimación debería ser mejor). Esto mismo, nos da noción de ir por buen camino.

3.2.1 Análisis de Identificabilidad

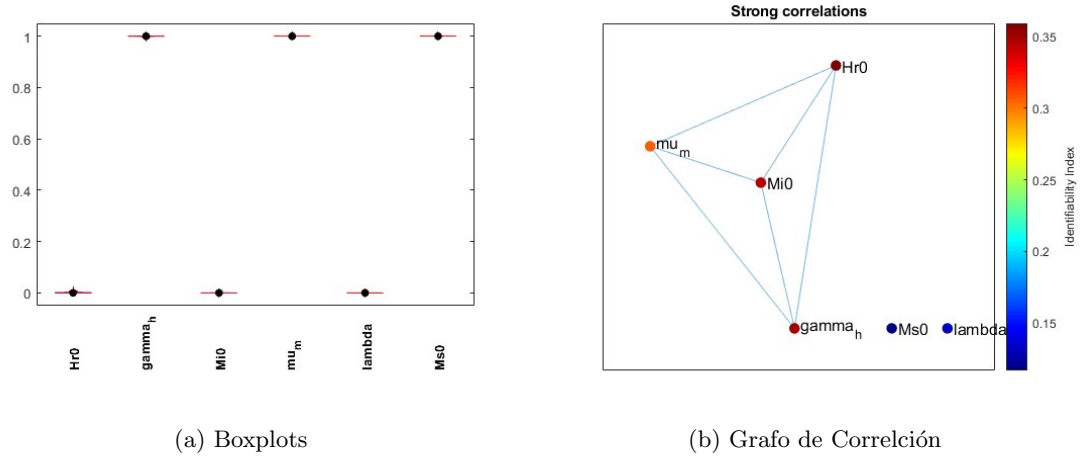


Figure 6: Analisis de identificabilidad

Como era de esperarse, en la figura 6a podemos ver que se necesita ampliar el espacio de búsqueda de los parámetros, los cuales concuerdan con los mostrados en la figura 4c. Por lo cual, como siguiente paso es ampliarlos.

3.3 Tercera ronda de estimación

Para esta ronda, decidimos aumentar en un 20% la amplitud del rango inferior o superiormente, dependiendo de cuál era el que se debía implementar.

Parámetro	Rango original		Rango ampliado	
	Rango		Rango	
Hr0	81405	158809	65924.2	158809
Ms0	0	1200000	0	1440000
Mi0	0	100	-20	100
gammah	0.5000	1.7500	0.5000	2
lambda	1881	42694	-6281.6	42694
mum	0.1600	0.2000	0.1600	0.2080

Table 4: Ampliación de los rangos a un 20%

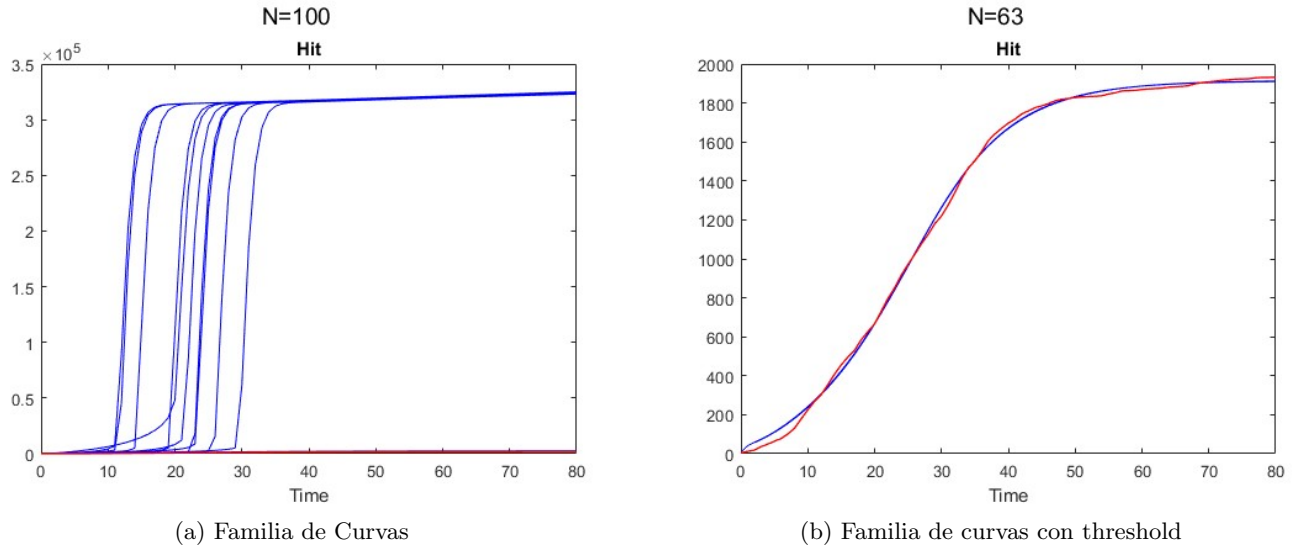


Figure 7: Modelo con tercera estimación de parámetros

Como observamos en la figura 7a se evidencian otras familias de curvas cuyo ajuste era demasiado malo. Por este motivo, se consideró un threshold con el cual se obtuvo la figure 7b y vemos que ese ajuste es mucho mejor. Por lo que se consideraron las estimaciones hasta ese threshold. Adicional a esto, calculamos la curva de de casos nuevos reales y la estimada, la cual se muestra en la siguiente figura.

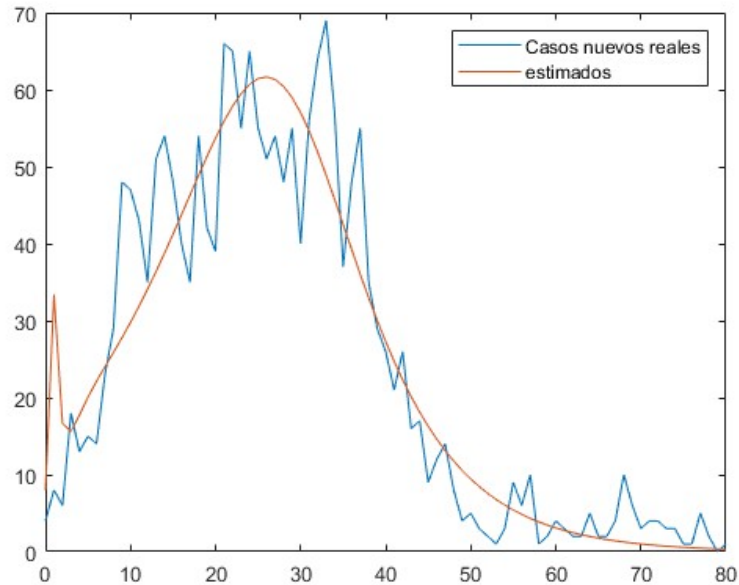


Figure 8: Estimación de nuevos casos

3.3.1 Análisis de identificabilidad

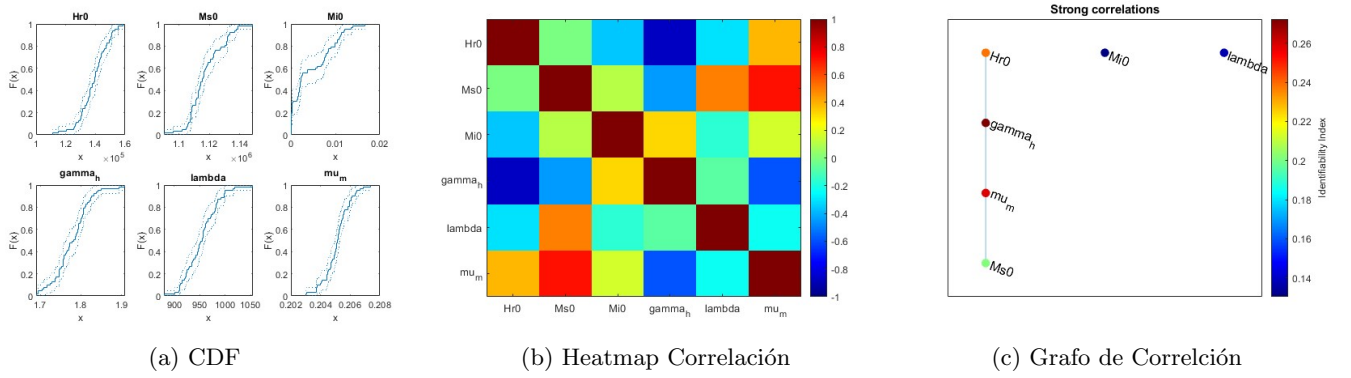


Figure 9: Analisis de identificabilidad

Finalmente, en la figura 9 observamos el análisis de identificabilidad de la última ronda de identificación. Asi concluimos que los valores estimados de los parámetros son los siguientes:

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
Hit0	8	betah	1.1728
Hi0	8	betam	0.1980
Me0	50	gammah	1.7585
He0	45	lambda	880.16
Hs0	3.1279e+05	muh	4.0000e-04
Hr0	1.5563e+05	mum	0.2051
Ms0	1.0964e+06	thetah	1.2250
Mi0	0.001651	thetam	0.7300

Table 5: Estimación de los parámetros

Con la tabla 5 y la figuras 8 y 7b podemos concluir que la estimación de parámetros puede ser buena, dado que se muestra un ajuste y un comportamiento muy parecido a nuestra variable observada.