

Modelación de Dinámica de Meta-poblaciones en Competencia por Territorio

Juliana Restrepo Tobar
jrestrepot@eafit.edu.co

Abelino Sepulveda Estrada
asepulvede@eafit.edu.co

May 2022

1. Introducción

Muchas especies existen en meta-poblaciones, es decir, en un conjunto de poblaciones susceptibles a la extinción en tiempo ecológico, e interconectadas por fenómenos ocasionales de emigración e inmigración [Gutiérrez, 2002] éstas enfrentan una inevitable extinción en cualquier región ocupada, pero persisten dispersándose a regiones desocupadas [Nee & May, 1992]. En las últimas décadas, ha ido aumentando la atención al estudio de modelos de sistemas dinámicos derivados de sistemas biológicos. En particular, el foco de interés ha estado en los tres principales tipos de interacciones entre especies: depredación, competición y mutualismo [Chen, 2001].

Uno de los propósitos de este trabajo es la simulación de la competencia entre especies. En este tipo de sistemas existen varios competidores, con diferentes características de comportamiento, que interactúan buscando tener un beneficio mayor sobre el recurso por el que se disputan. En particular, el sistema que se simula consta de dos competidores y una cantidad de territorios habitables en disputa. Se busca analizar la influencia de los parámetros que componen el modelo y su comportamiento frente a diferentes entradas.

El artículo consiste de cinco secciones principales: Introducción, Métodos, Resultados, Discusión y Referencias. En la introducción se presenta a grandes rasgos el tema; en los métodos se presentan los modelos lineales y no lineales con sus respectivas ecuaciones, y el control SISO y MIMO de los modelos y finalmente un análisis de incertidumbre para el modelo lineal y el controlado por un controlador tipo MIMO; en los resultados están las gráficas obtenidas con diferentes parámetros y entradas; en la discusión se analizan los resultados y se realiza la verificación del modelo; y por último se encuentra la bibliografía.

2. Métodos

En esta sección se describe y explica el planteamiento del modelo matemático, su implementación en torno al lenguaje de programación usado y la validación del mismo.

2.1. Descripción y explicación del modelo

El modelo de dinámica de meta-poblaciones propuesto por [Nee & May, 1992] describe la dinámica de sistemas ecológicos en los que interactúan dos especies en competencia por un territorio o por el mismo recurso, donde tales especies existen como meta-poblaciones. Dichas especies se clasifican como competidor superior A la cual se dispersa (invade el espacio) con mayor efectividad o tiene una tasa de extinción menor que la de la especie B , que será denotada como competidor inferior. Como simplificación del sistema se asume que:

- Solo existen dos especies: el competidor superior A y el competido inferior B .
- La especie inferior B es incapaz de invadir el territorio ocupado por la especie superior A .

- Si la especie A invade una zona ocupada por la especie B , esta última inmediatamente se extingue de ese territorio.

El modelo de dinámica de meta-poblaciones se puede describir por medio de ecuaciones diferenciales de primer orden de la siguiente manera:

2.2. Variables de estado

$$X = \begin{cases} x_1 = p_a \\ x_2 = p_b \\ x_3 = v \end{cases}$$

Donde las variables de estado x_1, x_2 y x_3 corresponden respectivamente a las unidades de espacio ocupadas por la especie A , las unidades de espacio ocupadas por la especie B y las unidades de espacio sin ocupar. Adicionalmente, también contamos con una variable $h = x_1 + x_2 + x_3$ que representa la cantidad de zonas habitables.

2.3. Ecuaciones:

Las ecuaciones diferenciales del modelo no lineal son:

$$\dot{X} = \begin{cases} \dot{x}_1 = c_a x_1 x_3 - e_a x_1 + c_a x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = c_b x_2 x_3 - e_b x_2 - c_a x_1 x_2 \\ \dot{x}_3 = -c_a x_1 x_3 - c_b x_2 x_3 + e_a x_1 + e_b x_2 \end{cases}$$

Tomando en cuenta el significado de las variables de estado x_1, x_2 y x_3 , las variables \dot{x}_1, \dot{x}_2 y \dot{x}_3 corresponden respectivamente a la variación de las unidades de territorio ocupadas por las especies A, B y la variación de la cantidad de territorio que no ha sido conquistado por ninguna especie.

En cuanto a los parámetros de las ecuaciones, contamos con:

- c_a es la tasa de colonización de la especie superior A .
- c_b es la tasa de colonización de la especie inferior B .
- e_a tasa de extinción de una zona de la especie superior A .
- e_b tasa de extinción de una zona de la especie inferior B .

Nótese que los parámetros e_a y e_b miden características propias de las especies A y B respectivamente, características como la extinción de dicha especie. Alternativamente, los parámetros c_a y c_b miden características propias de las unidades de espacio que se conquistan por la especie A y B , respectivamente. Los términos $c_a x_1 x_2$ y $c_a x_1 x_3$ implican que con cierta tasa, la especie superior puede conquistar un espacio ocupado por la especie inferior y unidades de espacio conquistados por ninguna especie, mientras que el término $c_b x_2 x_3$ indica que la especie inferior B únicamente puede conquistar espacio que no ha conquistado por ninguna especie.

2.3.1. Particularidades de la dinámica de meta-poblaciones

- **Condición necesaria para la persistencia de la especie inferior B en el sistema**

Dado que la especie inferior B sólo puede conquistar espacio que no ha sido conquistado, se debe cumplir una condición necesaria si se quiere que la especie B persista en el sistema, dicha condición es:

$$\frac{c_b}{e_b} > \frac{c_a}{e_a}$$

Esta condición se debe cumplir, ya que si la especie inferior B cuenta con una tasa de colonización alta y la especie superior A cuenta con una tasa de extinción también un poco elevada, el competidor B contaría con más oportunidades de conquistar espacios no conquistados, garantizando así una supervivencia de ambos competidores.

■ Extinción de los competidores

En la dinámica de meta-poblaciones descrito por [Nee & May, 1992] ocurre una extinción de ambos competidores en el sistema, si se tiene valores críticos para h , es decir, si:

$$h < \frac{e_a}{c_a} \quad \text{o} \quad h * c_a < e_a$$

La especie A se extingue del sistema y si:

$$h < \frac{e_b}{c_b} \quad \text{o} \quad h * c_b < e_b$$

La especie B se extingue del sistema

Esto es debido a la tasa de extinción de los competidores es mayor a la variación de unidades de territorio conquistados por el competidor, por lo que tienden a no persistir en el sistema, es decir se extinguen.

2.4. Ecuaciones de dinámica de meta-poblaciones considerando entradas

$$\dot{X} = \begin{cases} \dot{x}_1 = c_a x_1 x_3 - (e_a + U)x_1 + c_a x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = c_b x_2 x_3 - e_b x_2 - c_a x_1 x_2 \\ \dot{x}_3 = -c_a x_1 x_3 - c_b x_2 x_3 + (e_a + U)x_1 + e_b x_2 \end{cases}$$

En general, la entrada U que se le agrega al sistema, representa un impacto (ya sea negativo o positivo) sobre la tasa de extinción de una zona de la especie superior A . Al considerar esta entrada, se puede observar la alteración de la proporción de territorios conquistados por la especie A adicional a la proporción de territorios conquistados por ninguna especie, puesto que dependiendo de la entrada se vería afectada la proporción de espacios ocupados por esta especie.

2.5. Verificación y validación

Para el proceso de validación, se decidió hacer un análisis de dimensionalidad para corroborar el buen planteamiento del modelo a demás de, una validación por medio de la bibliografía.

2.5.1. Análisis de dimensionalidad

Teniendo en cuenta las variables del modelo, sabemos que sus unidades son:

| variable | unidades |
|-------------|-------------------------------|
| x_1 | unidades de territorio |
| x_2 | unidades de territorio |
| x_3 | unidades de territorio |
| \dot{x}_1 | unidades de territorio/tiempo |
| \dot{x}_2 | unidades de territorio/tiempo |
| | unidades de territorio/tiempo |

Tabla 1. unidades variables del modelo

Ahora, para realizar en análisis de dimensionalidad, hay que considerar las ecuaciones de dinámica de meta-poblaciones con entradas. Al deducir las unidades de los parámetros y entradas se obtiene que:

| parámetro | unidades |
|-----------|-----------------------|
| c_a | 1/(tiempo*territorio) |
| c_b | 1/(tiempo*territorio) |
| e_a | 1/tiempo |
| e_b | 1/tiempo |
| U | 1/tiempo |

Tabla 2. unidades parámetros del modelo

2.5.2. Validación con bibliografía

Las ecuaciones se validaron con las que plantearon [Nee & May, 1992] en su artículo sobre la destrucción de hábitat y coexistencia competitiva. En la sección de resultados está la verificación del comportamiento del sistema.

2.6. Análisis de Incertidumbre

Se hace un análisis de incertidumbre del modelo para verificar y analizar el comportamiento del modelo bajo distintos valores de los parámetros del modelo, este análisis se hace para cada comportamiento del sistema, es decir, cuando hay extinción por parte del competidor B , cuando hay persistencia de la especie B y por último, cuando hay extinción por ambos competidores, los rangos y nominales para cada parámetro pueden ser observados en las tablas 3,4 y 5 respectivamente. Adicionalmente, se puede observar mediante los filtros de *montecarlo* cuáles son los parámetros que más afectan al modelo.

2.7. Linealización

Para Linealizar el modelo se hace lo siguiente:

Curva de Linealidad: Se realiza la curva de linealidad. Esta curva se obtiene con los puntos de equilibrio a múltiples entrada U , y por medio de la simulación del sistema no lineal, donde se obtiene una gráfica por cada variable respecto a las diferentes entradas U en un mismo punto inicial y con mismos parámetros.

Puntos de operación: Con estas gráficas se determina el punto de operación x_0 (donde se tenga un comportamiento "lineal" de las variables). Adicionalmente, también es posible obtener este punto operación por medio de los puntos de equilibrio del sistema.

Puntos de equilibrio: Obtenemos nuestros puntos de equilibrio igualando nuestras ecuaciones a cero, posteriormente, evaluamos que los puntos de equilibrio concuerden con los de operación.

Linealización Analítica: Para este proceso tomamos en cuenta el modelo lineal en la forma de espacio de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_3) = \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} \Delta x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_3) = \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_n} \Delta x_n \end{aligned}$$

Que de manera simplificada puede ser expresado como:

$$\Delta \frac{\partial x}{\partial t} = A \Delta x + B \Delta U$$

Donde A y B son Jacobianos evaluados en el punto de operación. Es decir

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_0, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial U} \right|_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U} \\ \frac{\partial f_2}{\partial U} \\ \frac{\partial f_3}{\partial U} \end{bmatrix}_0$$

Linealización con Matlab: Para obtener la linealización con Matlab, se hace uso de la función `linmod()` en los puntos de equilibrio seleccionados y con una entrada específica.

Posteriormente se hace una comparación si los valores obtenidos con la función `linmod()` son los mismo a los obtenidos con los jacobianos.

Estabilidad del Modelo: Después de obtener la matriz A se calculan sus autovalores para analizar si el sistema es o no estable.

Implementación Linealización: Posteriormente se hace la implementación de linealización del modelo en Simulink.

Comparar Modelos: Una vez obtenida la linealización, se comparan los resultados con del modelo lineal con el no lineal con diferentes entradas. Estas comparaciones se hacen con las simulaciones 1,2, y 3, para comprobar que haya equivalencia en el modelo lineal y no lineal.

2.8. Control

2.8.1. Control SISO

El control se define por alterar el comportamiento de un sistema para que sea de una forma determinada. Un sistema SISO (single output single input) como dice su nombre, trata de controlar sistemas con una única entrada y salida.

Función de transferencia de un sistema SISO:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B$$

Teniendo en cuenta la función de transferencia de un sistema SISO, podemos ahora expresar la función de transferencia de un sistema de control como:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{KP_n(s)}{P_d(s) + KP_n(s)}$$

Donde $P_n(s)$ y $P_d(s)$ son respectivamente los polinomios del numerador y denominador de la función de transferencia y K hace referencia al controlador del sistema (ganancia variable del sistema). Finalmente, los resultados obtenidos quedarán en términos de K , lo cual nos indica, a partir de qué valores de éste el sistema puede ser estable o inestable.

Luego de obtener la función de transferencia del sistema aplicamos el criterio de estabilidad de *Routh-Hurwitz* el cual nos proporciona en cuál semiplano del plano imaginario se encuentran las raíces de la función de transferencia, para conocer si es o no estable.

2.8.2. Control MIMO

El sistema MIMO (multiple output multiple input) como dice su nombre, trata de controlar sistemas de múltiples entradas y salidas.

Según [Troncoso, 2002], se dice que un sistema es completamente controlable si existe una señal $u(t)$ que permite transferir los estados iniciales del sistema $x_0 = x(t_0)$ a cualquier otro estado $x_{tf} = x(tf)$ en un tiempo finito $T = tf - t_0$. Históricamente, este concepto fue introducido por Kalman y le permitió demostrar la imposibilidad de controlar un sistema inestable por cancelación de polos con ceros, mas allá de la exactitud de la cancelación.

Para esto tomamos en cuenta la matriz de contrabilidad, la cual viene dada de la forma:

$$M_c = [BAB \dots A^{n-1}B]$$

Donde n es el número de salidas del modelo. Adicionalmente podemos aplicar control MIMO si se puede encontrar la inversa de la matriz de controlabilidad, lo que es equivalente a decir que la matriz de controlabilidad sea no singular.

2.9. Análisis de Sensibilidad

Primero podemos empezar a definir **Sensibilidad** como una cuantificación de la propagación de la incertidumbre. Teniendo esto en mente, el análisis de sensibilidad lo podemos considerar como el estudio de la contribución de cada parámetro a la propagación de incertidumbre. El objetivo con este análisis determinar los índices de sensibilidad, con esto observamos cómo se determina el comportamiento del sistema si algunos parámetros son sensibles. Con esto se realiza unos gráficos de Pie, para determinar qué tan sensible es el modelo a ciertos parámetros, calculando los índices de sensibilidad local y global.

3. Resultados

3.1. Implementación

La implementación fue realizada en el entorno de programación visual Simulink. A continuación se muestran en la Figura 1. y Figura 2. se muestran el modelo enmascarado y el subsistema del modelo respectivamente.

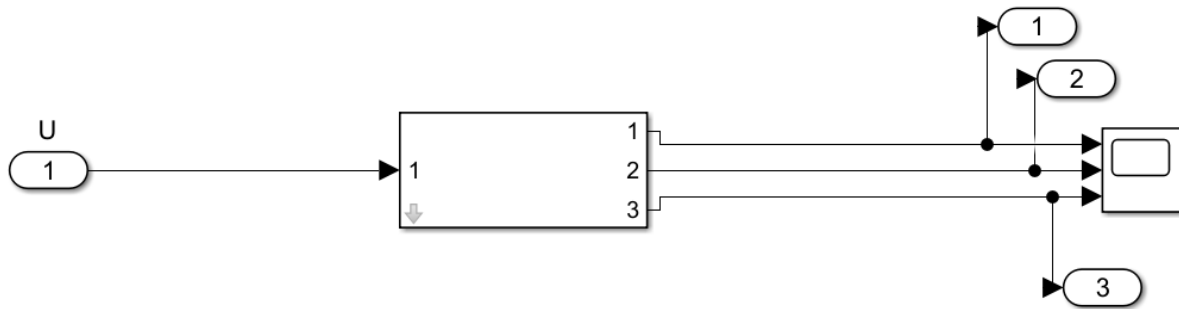


Figura 1: Diagrama del modelo enmascarado

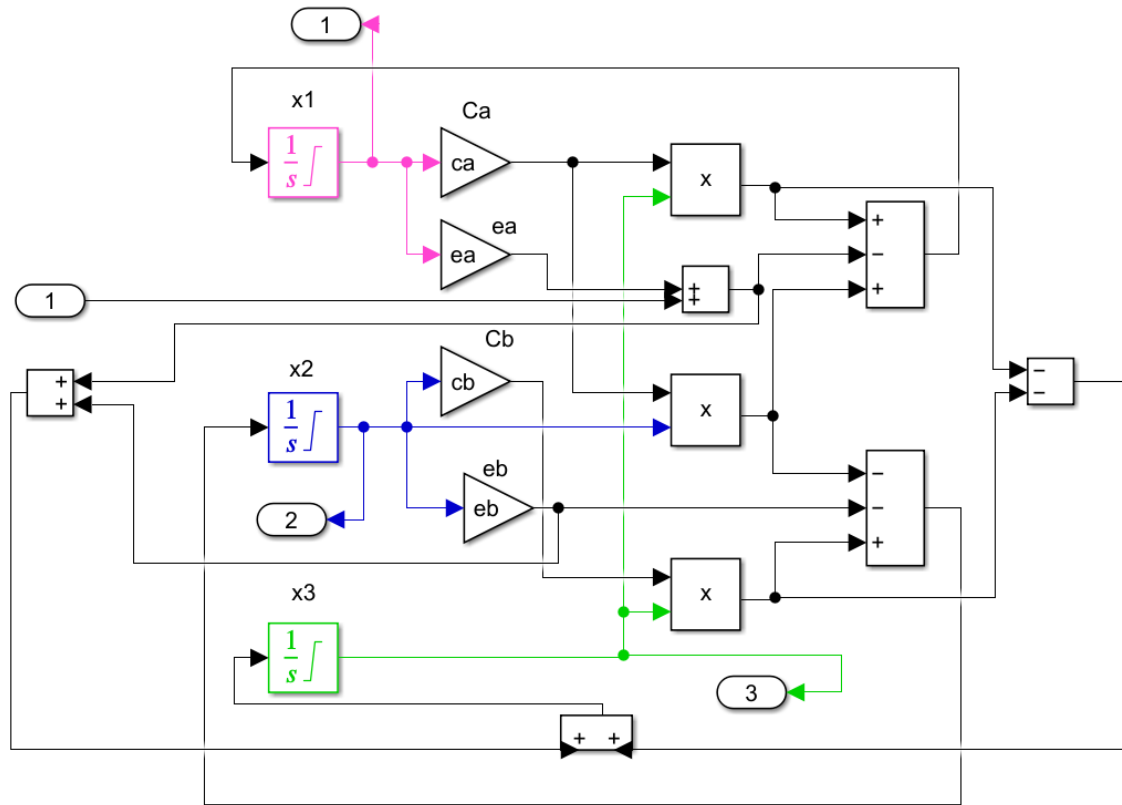


Figura 2: Diagrama de Bloques del modelo.

En la Figura 2. podemos observar que se implementaron bloques de integradores limitados tanto para las unidades de espacio ocupadas por las especies A y B como para las unidades de espacio ocupadas por ninguna especie. Esto se debe ya que al tratarse de unidades de espacio, no tendría sentido que tomen valores negativos, por este motivo, se toma como limite inferior 0.

Adicionalmente se definen las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1(0) = 3, x_2(0) = 3, x_3(0) = 4$$

Ahora, para la sección de resultados se hicieron simulaciones con distintos parámetros de entrada.

Simulación 1: Modelo $\frac{c_b}{e_b} < \frac{c_a}{e_a}$

Las siguientes gráficas corresponden a los resultados obtenidos aplicándole al modelo los parámetros descritos en la Tabla 3.

| Parámetro | Rango | | Nominal |
|-----------|-------|-----|---------|
| e_a | 0.001 | 0.2 | 0.1005 |
| e_b | 0.01 | 0.2 | 0.105 |
| c_a | 0.05 | 0.5 | 0.275 |
| c_b | 0.05 | 0.5 | 0.275 |

Tabla 3. Rangos y nominales de los parámetros en la simulación 1.

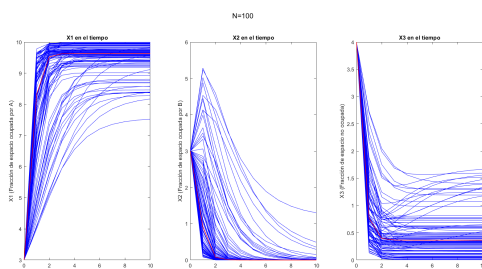


Figura 3.1: Análisis de Incertidumbre de las variables x_1, x_2, x_3

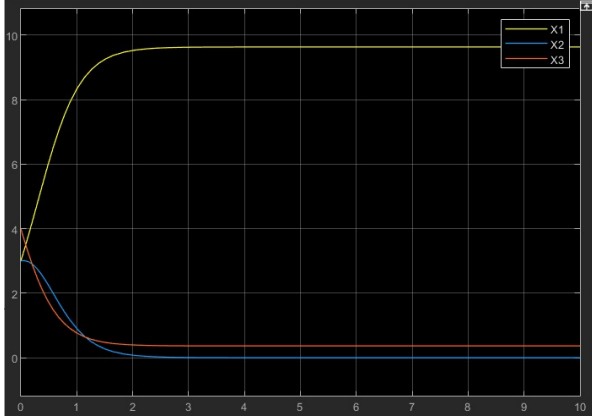


Figura 3.2: Nominales de x_1 , x_2 , x_3 en el tiempo.

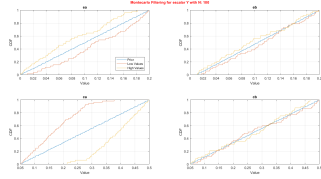


Figura 3.3: Filtro MonteCarlo para x_1 .

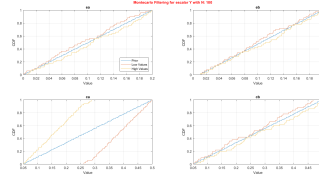


Figura 3.4: Filtro MonteCarlo para x_2 .

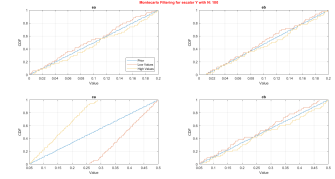


Figura 3.5: Filtro MonteCarlo para x_3 .

Figura 3: Resultados simulación 1

Simulación 2: Modelo $\frac{c_b}{e_b} > \frac{c_a}{e_a}$

| Parámetro | Rango | Nominal |
|-----------|--------|---------|
| e_a | 0 0.12 | 0.06 |
| e_b | 0 0.04 | 0.02 |
| c_a | 0 0.04 | 0.02 |
| c_b | 0 0.4 | 0.2 |
| U | 0 0.14 | 0.07 |

Tabla 4. Rangos y nominales de los parámetros en la simulación 2.

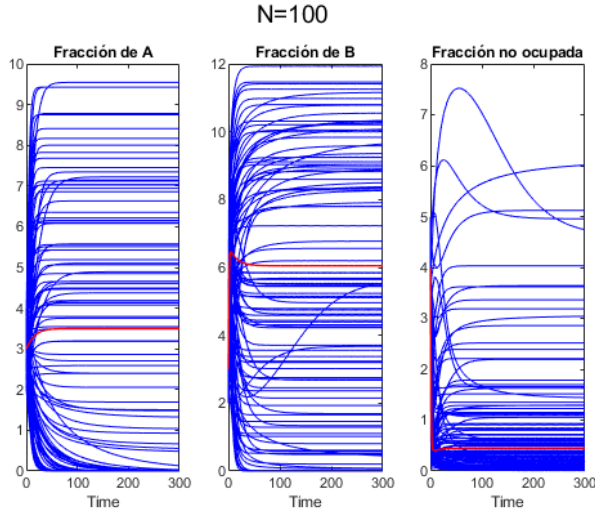


Figura 4.1: Análisis de Incertidumbre de las variables x_1, x_2, x_3

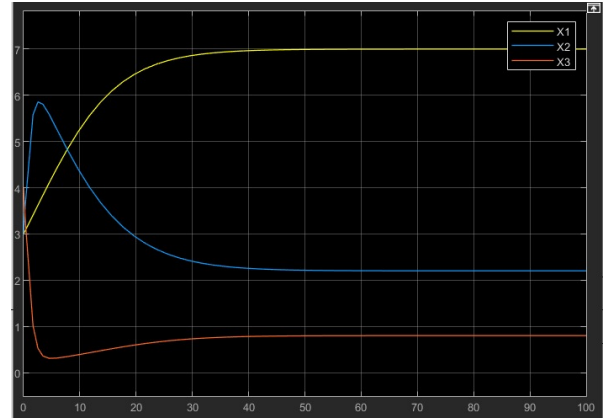


Figura 4.2: Nominales de x_1, x_2, x_3 en el tiempo.

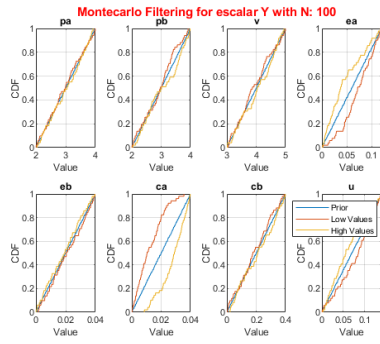


Figura 4.3: Filtro MonteCarlo para x_1 .

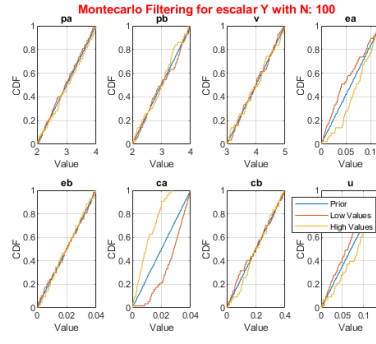


Figura 4.4: Filtro MonteCarlo para x_2 .

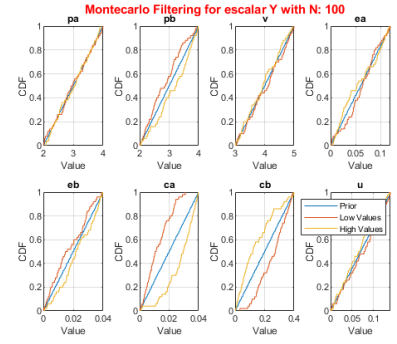


Figura 4.5: Filtro MonteCarlo para x_3 .

Figura 4. Resultados simulación 2

Simulación 3: Modelo $h < \frac{e_a}{c_a} < \frac{e_b}{c_b}$

| Parámetro | Rango | | Nominal |
|-----------|-------|------|---------|
| e_a | 0.01 | 0.41 | 0.2 |
| e_b | 0.01 | 0.61 | 0.3 |
| c_a | 0 | 0.02 | 0.01 |
| c_b | 0 | 0.02 | 0.01 |

Tabla 5. Rangos y nominales de los parámetros en la simulación 3.

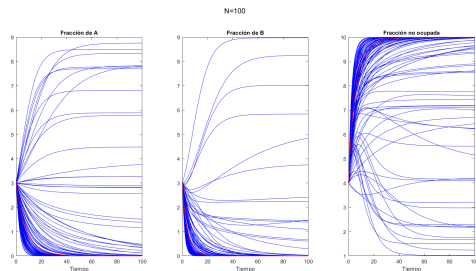


Figura 5.1: Análisis de Incertidumbre de las variables x_1, x_2, x_3

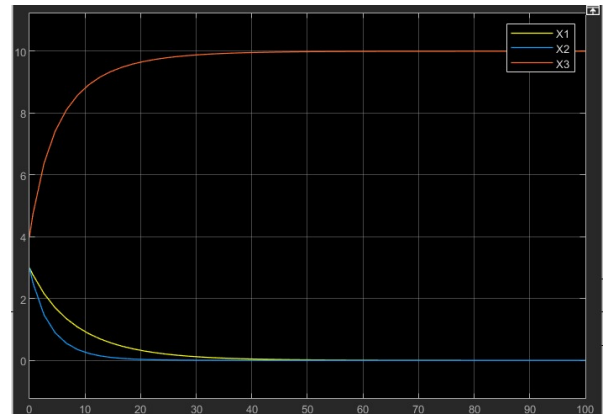


Figura 5.2: Nominales de x_1, x_2, x_3 en el tiempo.

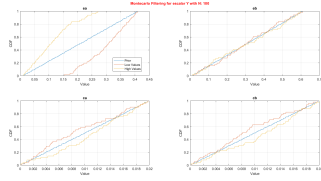


Figura 5.3: Filtro MonteCarlo para x_1 .

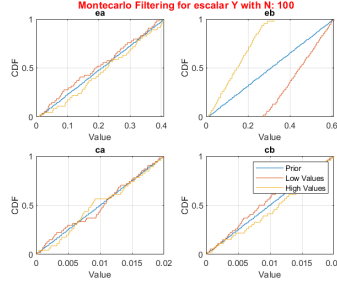


Figura 5.4: Filtro MonteCarlo para x_2 .

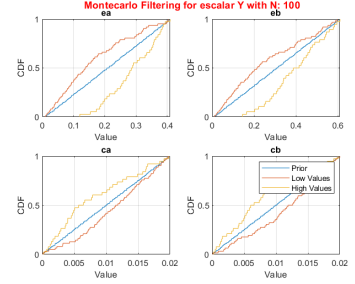


Figura 5.5: Filtro MonteCarlo para x_3 .

Figura 5. Resultados simulación 3

Para las siguientes secciones se toman en cuenta el modelo cuando en el sistema se cumple la condición necesaria para la persistencia de la especie B ($\frac{c_b}{e_b} > \frac{c_a}{e_a}$), usando los nominales de los parámetros de la Tabla 4.

3.2. Entradas del modelo

A continuación se presentan los resultados de la simulación usando diferentes valores para la entrada U . Para esto se consideran distintos tipos de entradas: constantes, escalón y senosoidales. Las diferentes entradas aplicadas se ven reflejadas en las siguientes Figuras:

Entradas Constantes:

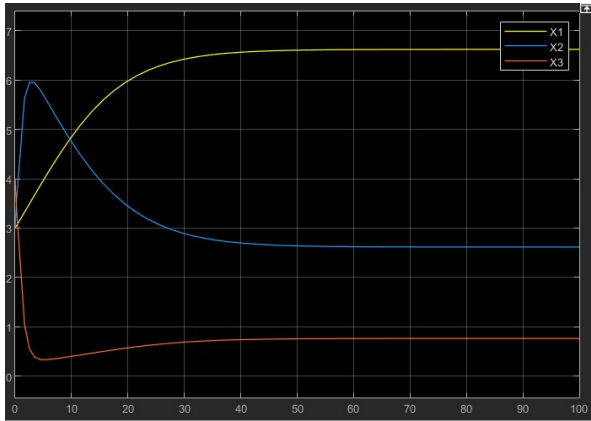


Figura 6.1: Entrada $U = 0,05$

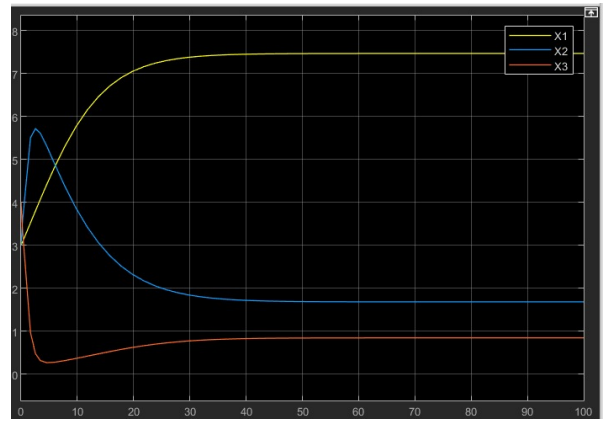


Figura 6.2: Entrada $U = -0.07$

Entrada Senosoidal:

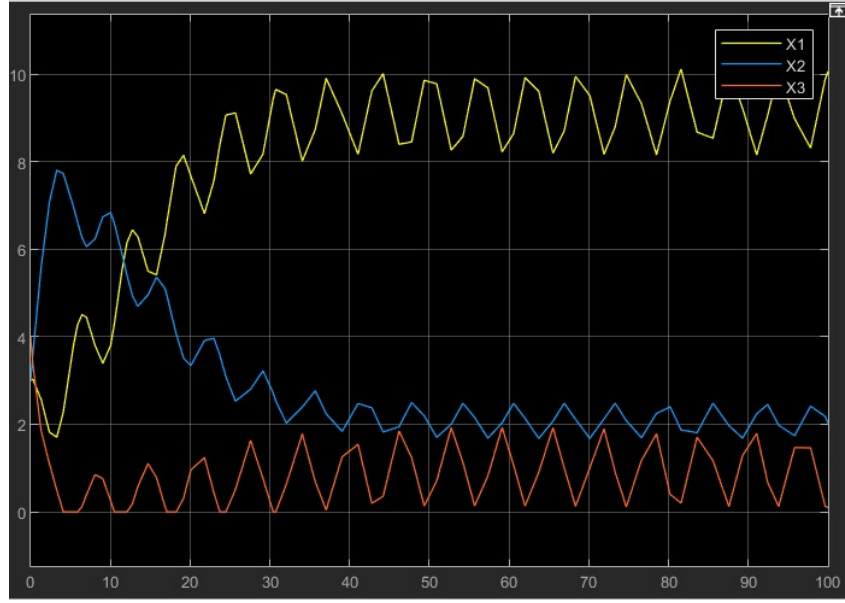


Figura 7: Entrada Senosoidal

Entrada Escalón

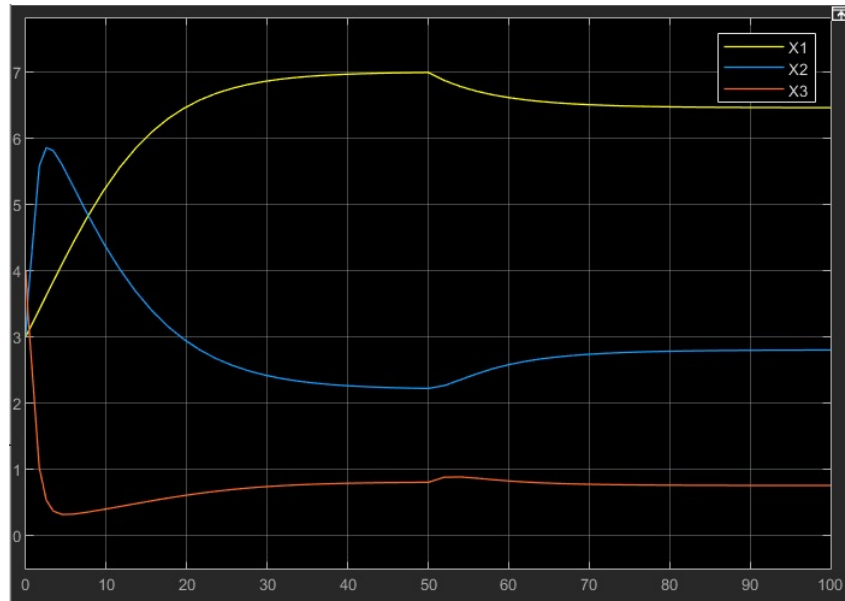


Figura 8: Entrada Escalón 0.07 en el tiempo 50

3.3. Variación de los parámetros

La selección de los parámetros a variar se hizo mediante el análisis de los filtros de MonteCarlo. Se analizaron cada uno de los parámetros y se escogieron los dos que más afectaban a las variables. Dicha explicación se encuentra en la sección de discusión.

Los parámetros que se escogieron fueron: Tasa de colonización de la especie A , c_a y la tasa de extinción de la especie A , e_a . Los resultados de los cambios de estos parámetros se pueden apreciar en las siguientes figuras.

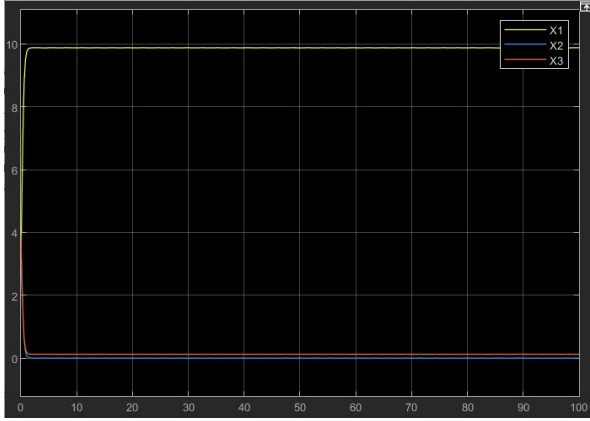


Figura 9.1: Parámetro $c_a = 0,5$

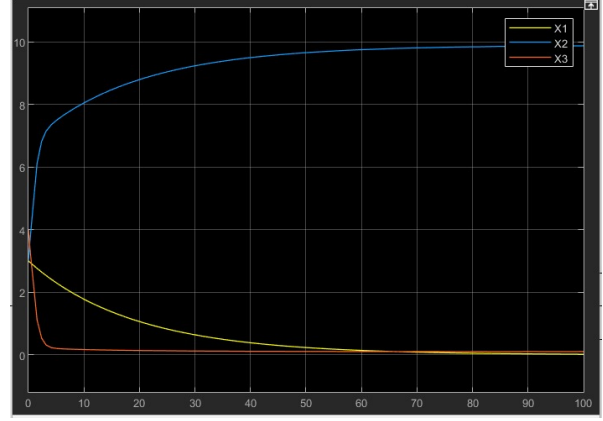


Figura 9.2: Parámetro $c_a = 0,001$

Figura 9. Variación parámetro tasa colonización de la especie A

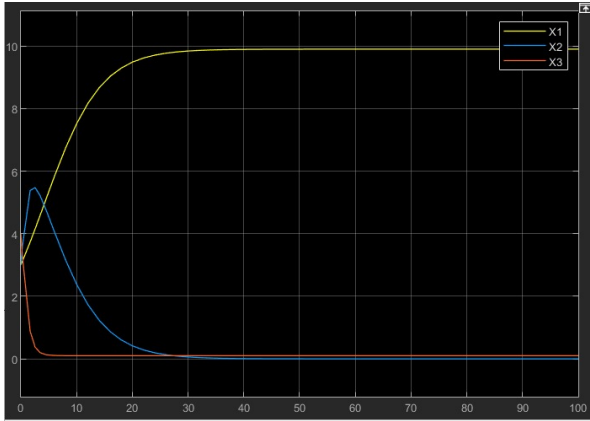


Figura 10.1: Parámetro $e_a = 0,002$

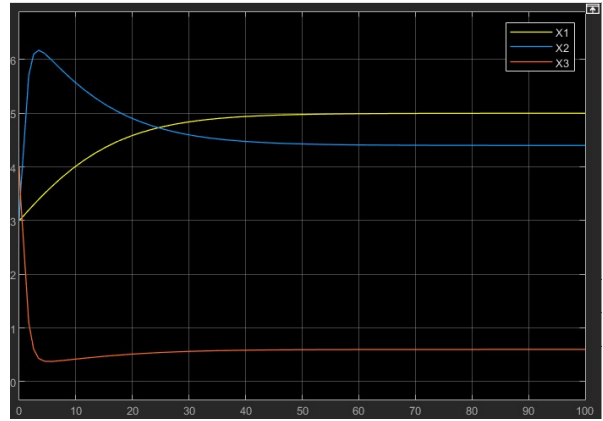


Figura 10.2: Parámetro $e_a = 0,1$

Figura 10. Variación parámetro tasa extinción de la especie A

3.4. Linealización

Para realizar la linealización del modelo, tomamos los rangos y valores nominales de la Tabla 4, que corresponden al modelo de persistencia de ambas especies, es decir:

| Parámetro | Rango | Nominal |
|-----------|--------|---------|
| e_a | 0 0.12 | 0.06 |
| e_b | 0 0.04 | 0.02 |
| c_a | 0 0.04 | 0.02 |
| c_b | 0 0.4 | 0.2 |
| U | 0 1.4 | 0.07 |

Tabla 6. Rangos y nominales de los parámetros en la simulación 2.

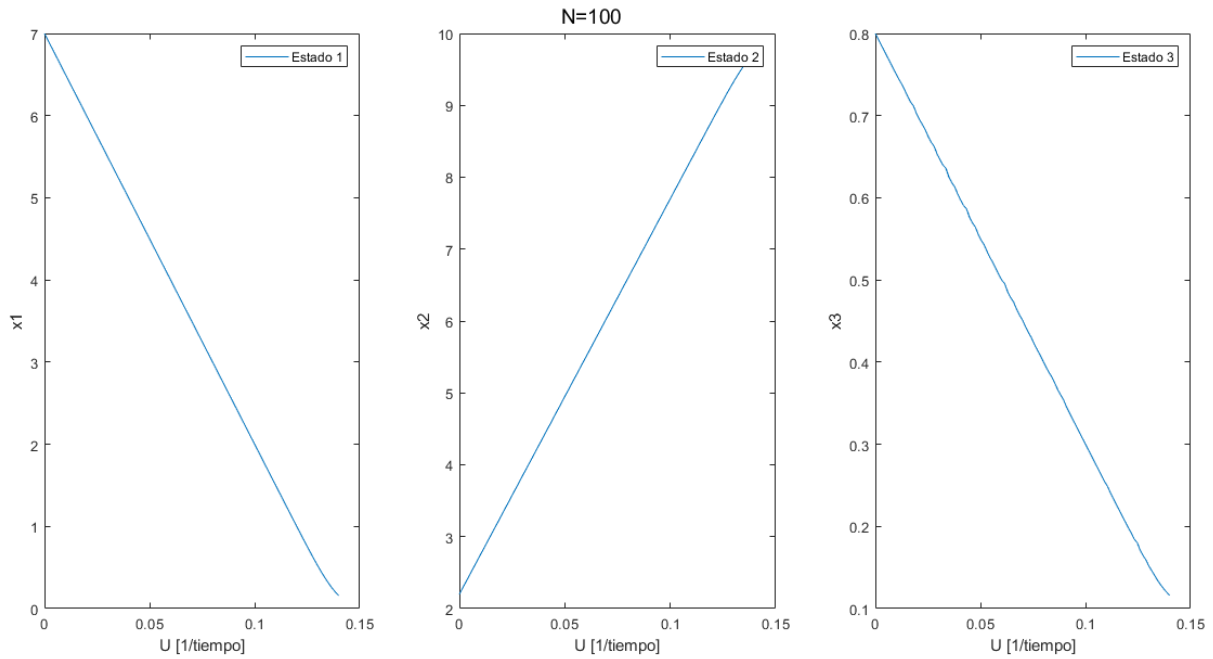


Figura 11: Curva de Linealidad para cada variable

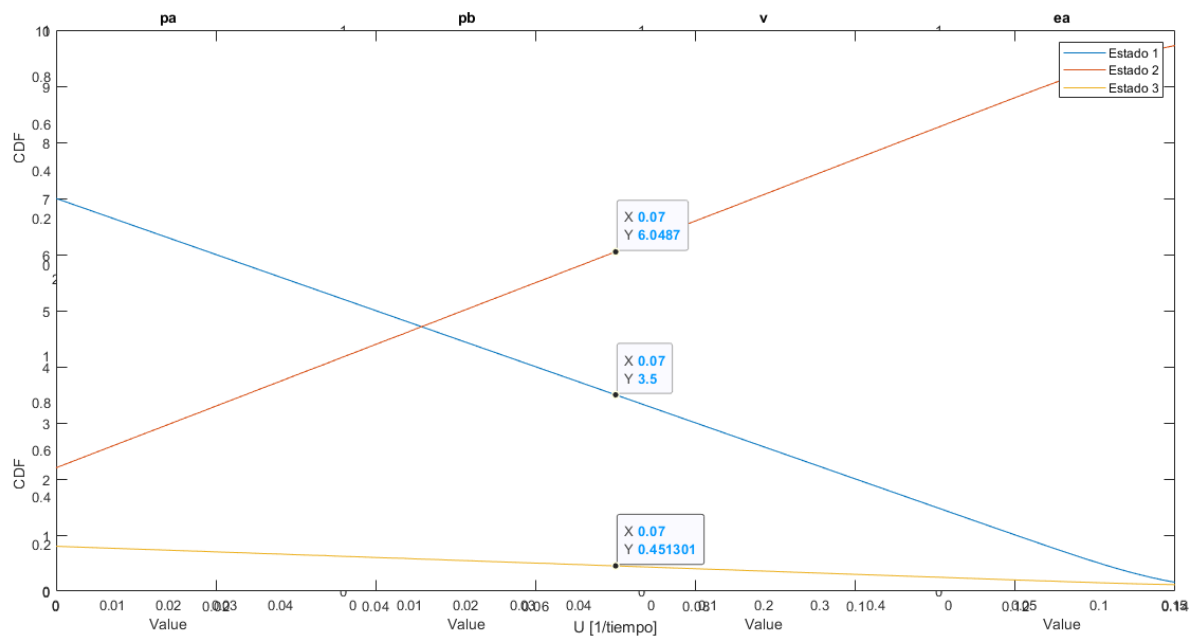


Figura 12: Selección de Puntos de Operación

Puntos de Operación: Se seleccionan los puntos de operación donde el comportamiento de las variables es lineal:

| Variable | Valor |
|----------|--------|
| x_1 | 3.5 |
| x_2 | 6.0487 |
| x_3 | 0.4513 |
| U | 0.07 |

Tabla 7. Puntos de operación

Puntos de equilibrio: Al igualar las ecuaciones a cero, se obtiene que los puntos de equilibrio de x_1, x_2 y x_3 respectivamente son:

$$\begin{bmatrix} h - \frac{e_a + U}{c_a} \\ \frac{(e_a + U)(c_a + c_b)}{c_a c_b} - \frac{e_b}{c_b} - \frac{h c_a}{c_b} \\ \frac{1}{c_b} (h c_a - (e_a + U) + e_b) \end{bmatrix}$$

Si reemplazamos los parámetros por sus valores nominales, obtenemos que los puntos críticos son:

$$\begin{bmatrix} 3,5 \\ 6,05 \\ 0,45 \end{bmatrix}$$

Como podemos observar, los puntos de equilibrio corresponden a los puntos de operación.

Linealización Analítica: Para hacer la linealización Analítica, tomamos en cuenta los parámetros de la simulación 1, es decir, los valores nominales de la Tabla 4 y los puntos de operación de la Tabla 6. Teniendo así los valores de:

| Variable/Parámetro | Valor |
|--------------------|--------|
| x_1 | 3.5 |
| x_2 | 6.0487 |
| x_3 | 0.4513 |
| U | 0.07 |
| e_a | 0.06 |
| e_b | 0.02 |
| c_a | 0.02 |
| c_b | 0.2 |

Tabla 7. Puntos de operación y Valores Nominales de los parámetros

Teniendo en cuenta estos valores, encontramos A y B .

$$A = \begin{bmatrix} c_a x_3 - e_a - U + c_a x_2 & c_a x_1 & c_a x_1 \\ -c_a x_2 & c_b x_3 - e_b - c_a x_1 & c_b x_2 \\ -c_a x_3 + e_a + U & -c_b x_3 + e_b & -c_a x_1 - c_b x_2 \end{bmatrix}_0, \quad B = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix}_0$$

Reemplazando los valores de la Tabla 7 en A y B obtenemos que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,0700 & 0,0700 \\ -0,1210 & 0,0003 & 1,2097 \\ 0,1210 & -0,0703 & -1,2797 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{bmatrix}$$

Estabilidad: Ahora, extraemos los autovalores de la matriz A :

$$eig(A) = \begin{bmatrix} -1,2095 \\ -0,0000 \\ -0,0700 \end{bmatrix}$$

Posterior, definimos C y D , como

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

C conforma una matriz identidad debido a que contamos con 3 variables de estado, por lo que cada fila corresponde a una de estas variables.

Linealización Matlab: Mediante el uso de la función `linmod()` se obtienen los siguientes resultados:

```

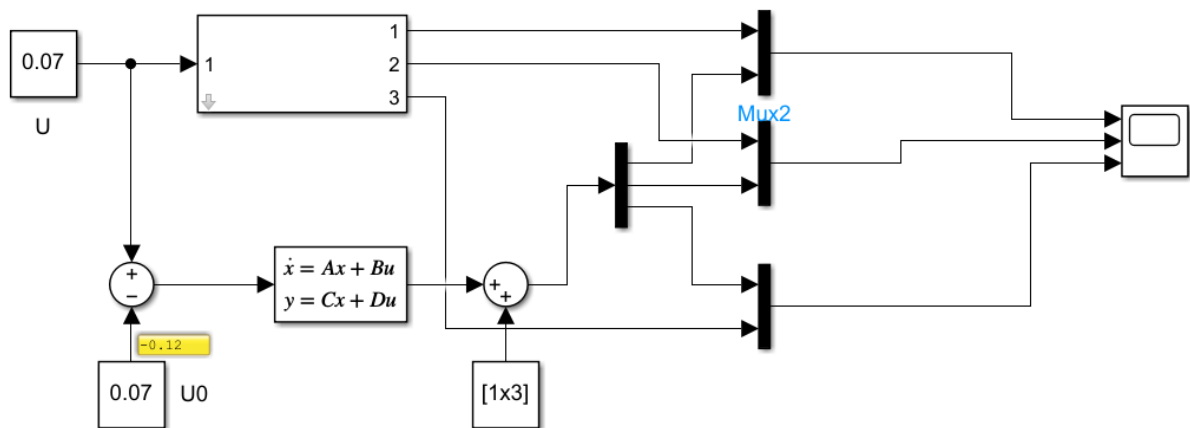
A = 3x3
    0    0.0700    0.0700
   -0.1210    0.0003    1.2097
    0.1210   -0.0703   -1.2797

B = 3x1
   -3.5000
         0
    3.5000

```

Figura 13: Linealización por Matlab

Implementación Linealización



Linealización en Simulink

Comparación Modelo Lineal y Modelo no Lineal: Para las siguientes Figuras, se tienen las salidas del modelo no lineal como: x_1 , x_2 y x_3 y para el modelo lineal contamos con las salidas de: $\text{Lin } x_1$, $\text{Lin } x_2$ y $\text{Lin } x_3$: que representan a las variables x_1, x_2 y x_3 respectivamente.

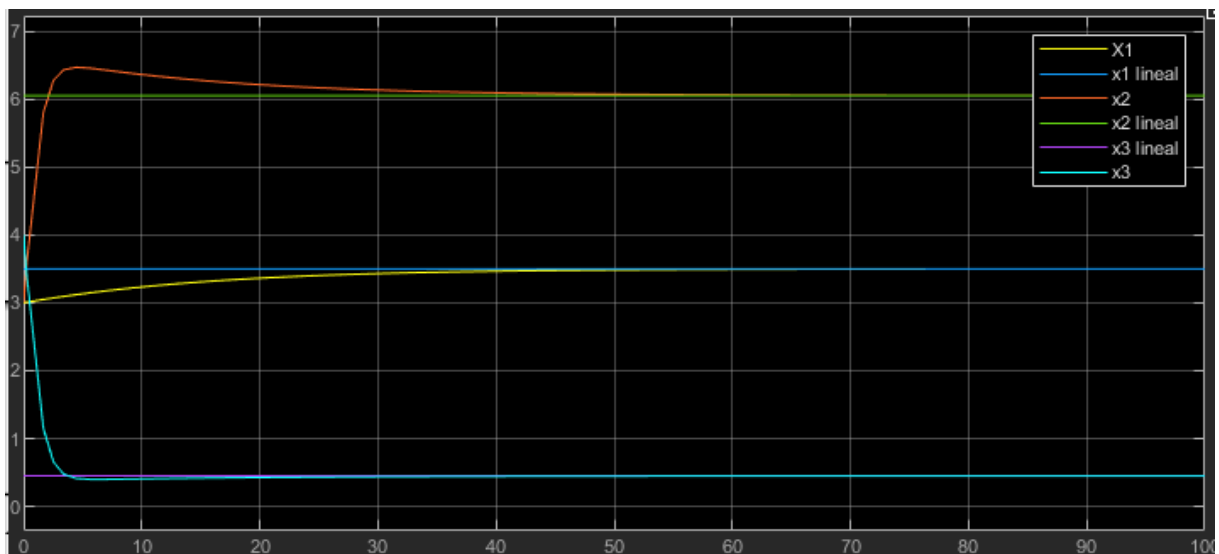


Figura 14: Comparación Sistema Lineal y No Lineal $U = 0,07$

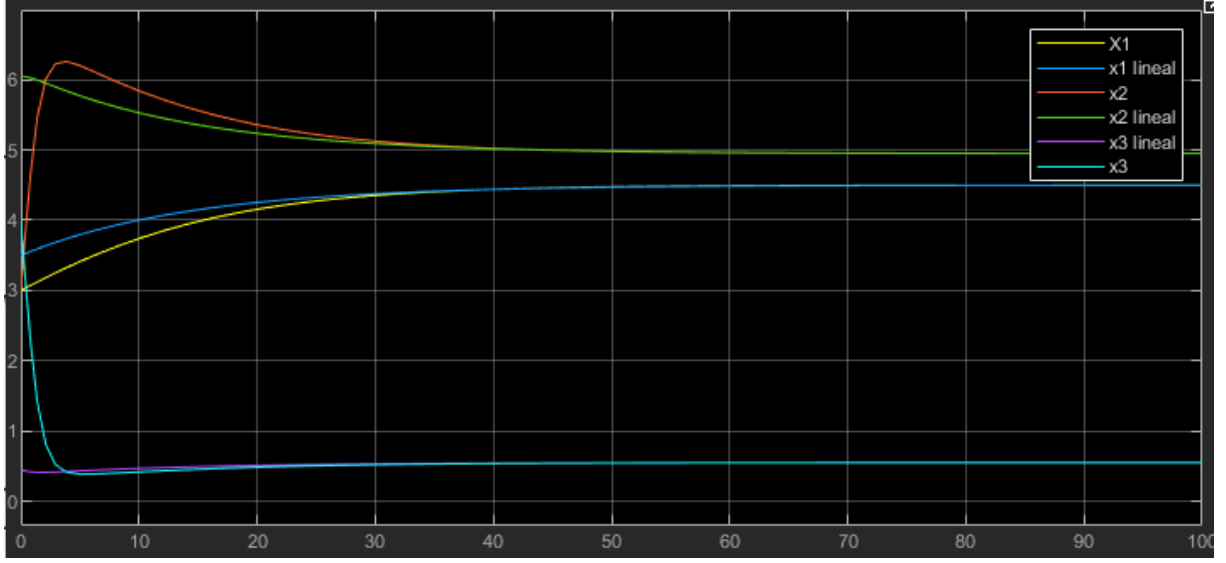


Figura 15: Comparación Sistema Lineal y No Lineal $U = 0,05$

3.4.1. Puntos de equilibrio para la simulación 1 y 3

Simulación 1: Para encontrar los puntos de equilibrio de este modelo, tomamos en consideración los valores brindados por la Tabla 3. Tomando en cuenta estos valores, obtenemos los puntos de equilibrio (p_e), los jacobianos y los autovalores de A :

$$p_e = \begin{bmatrix} 9,38 \\ 0 \\ 0,62 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0,0155 & 2,3450 & 2,3450 \\ 0 & -2,2795 & 0 \\ 0,0155 & -0,0655 & -2,3450 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -9,38 \\ 0 \\ 9,38 \end{bmatrix}, \quad eig(A_1) = \begin{bmatrix} 0,000 \\ -2,3605 \\ -2,2795 \end{bmatrix}$$

Simulación 3: Para el modelo de extinción de los competidores se toman los valores de la Tabla 5. Los resultados obtenidos son:

$$p_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0,1800 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2100 & 0 \\ 0,1800 & 0,2100 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad eig(A_2) = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ -0,1800 \\ -0,2100 \end{bmatrix}$$

3.5. Control

3.6. Control SISO

Función de transferencia del sistema SISO

Tomando en consideración la primera variable, es decir x_1 , para hallar nuestra función de transferencia del sistema SISO tomamos en consideración que $C = [1 \ 0 \ 0]$ y A y B son las matrices obtenidas por la **Linealización Analítica** en secciones previas. Por lo que:

$$G(s) = \frac{49}{2(100s^2 + 7s)} - \frac{7}{2s}$$

$$H(s) = \frac{-350K}{100s + 7 - 350K}$$

Ahora, que tenemos la función de transferencia para nuestro sistema de control, aplicamos el criterio de estabilidad mediante el arreglo de *Routh – Hurwitz*

$$\begin{array}{c|c} s^1 & 100 \\ s^0 & -350K+7 \end{array}$$

Tabla 8. Arreglo de *Routh – Hurwitz*

Como sabemos, hay un condición necesaria para que las raíces tengan parte real negativa y es que todos los coeficientes del polinomio del denominador de la función de transferencia sean de un mismo signo. Esta condición es suficiente para polinomios de grado $n \leq 2$. Ahora, para que esta condición se cumpla,

$$-350K + 7 > 0$$

Por lo que:

$$K < \frac{7}{350}$$

Una vez encontramos los valores de K para los cuales el sistema es controlado. Posteriormente, presentamos el esquema de control SISO para el modelo, para este modelo tomamos en consideración la salida 1, es decir los espacios de territorio ocupados por el competidor superior A (x_1 equivalente a p_a)

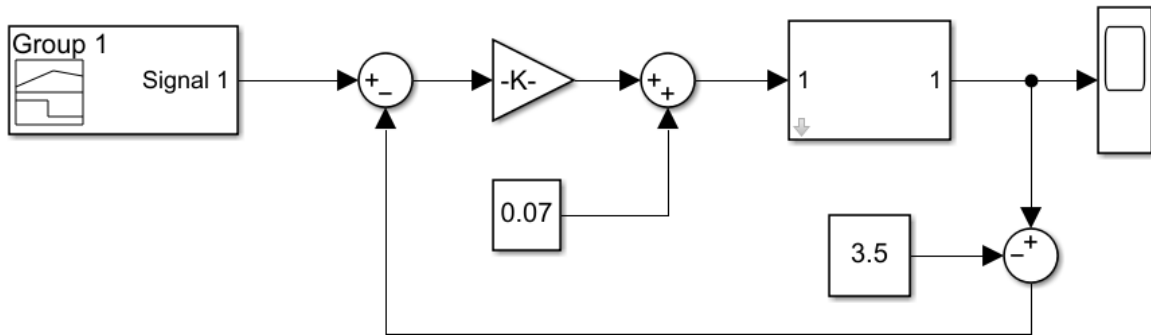


Figura 1: Figura 16: Implementación control SISO Simulink

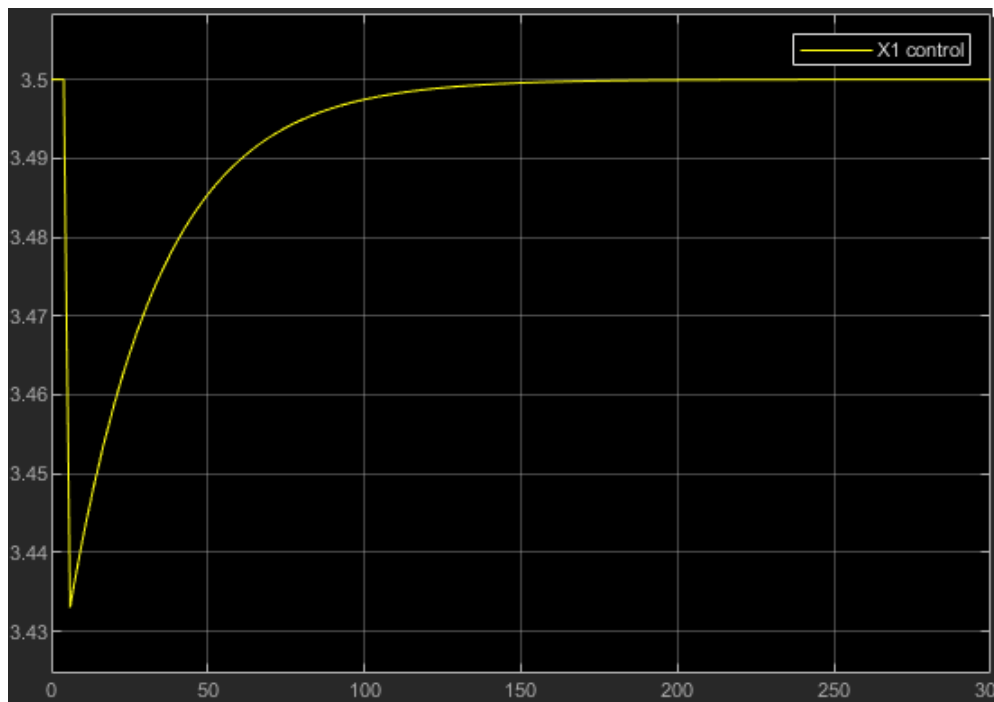


Figura 2: Figura 17: Control SISO con una señal de 1

3.6.1. Control MIMO

Se realizaron tres pruebas diferentes para confirmar que el modelo era completamente controlable, con el objetivo de implementar control MIMO.

La primera prueba fue encontrar la matriz de controlabilidad y verificar que su rango fuera igual a n , que en nuestro caso es 3. Esta prueba es conocida como el test de Kalman. La función de MatLab $ctrb(A, B)$ toma los jacobianos A y B del modelo, y a partir de ellos calcula la matriz de controlabilidad Co . El rango de la matriz resultante es 2 y no 3, por lo que el modelo no pasa el test de controlabilidad de Kalman.

Luego, se probó que la matriz de controlabilidad Co es singular, y de este modo, el sistema no es completamente controlable. En el caso de este sistema, la matriz Co es la siguiente:

$$Co = \begin{bmatrix} -3,5000 & 0,2450 & -0,0172 \\ 0 & 4,6575 & -5,9592 \\ 3,5000 & -4,9025 & 5,9763 \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es $-1.4478e-14$. El determinante posiblemente sea 0, y por motivos numéricos y de estimaciones, el resultado se haya sesgado un poco. Otra posibilidad es que el resultado real no sea 0, pero de todos modos este determinante tan cercano a 0 hace que la matriz tenga muchos problemas de invertibilidad, por lo que el sistema no sería completamente controlable.

Por último, se hace uso de la función $place(A, B, p)$ en MatLab con diferentes polos, la cual transforma al modelo a su forma canónica controlable (recordar que todo modelo completamente controlable puede ser transformado a la forma canónica controlable). Sin embargo, la función arroja un error, que sugiere que el modelo puede ser críticamente no controlable. Se realizó una revisión de literatura acerca de la identificación de los modelos críticamente no controlables (nearly uncontrollable en inglés), y de acuerdo con [Byers, 1990], no hay un método exacto para detectar pares críticamente no controlables, y los más exactos que existen requieren de un gran poder computacional.

3.7. Análisis de Sensibilidad

3.7.1. Nivel de Incertidumbre 10 %

Para realizar el análisis de sensibilidad con un nivel de incertidumbre del 10 % tomamos en consideración la siguiente Tabla:

| Parámetro | Rango | | Nominal |
|-----------|--------|--------|---------|
| p_a | 1.8 | 2.2 | 2 |
| p_b | 1.8 | 2.2 | 2 |
| v | 2.7 | 3.3 | 3 |
| e_a | 0.0009 | 0.0011 | 0.001 |
| e_b | 0.0009 | 0.0011 | 0.001 |
| c_a | 0.0009 | 0.0011 | 0.001 |
| c_b | 0.0009 | 0.0011 | 0.001 |
| U | 0.0009 | 0.0011 | 0.01 |

Tabla 9. Rango de los parámetros variando el 10 %

Calculamos la confiabilidad del análisis, con un $N = 500$

$$\frac{\sum_i S_i}{\sum_i |S_i|} = -0,1652$$

Ahora, presentamos los resultados del análisis de sensibilidad de orden total y primer orden:

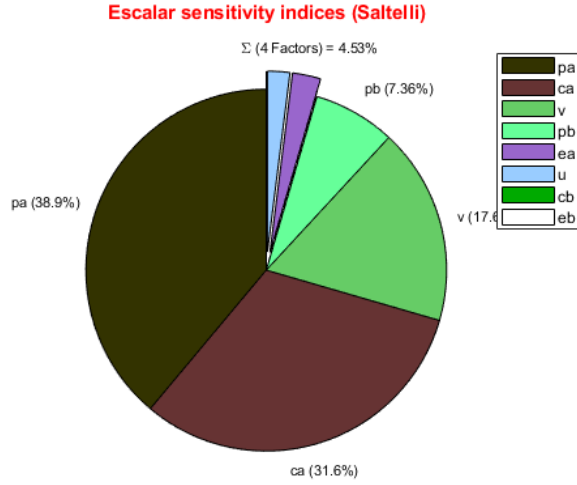


Figura 18: Índices de sensibilidad escalares de orden total

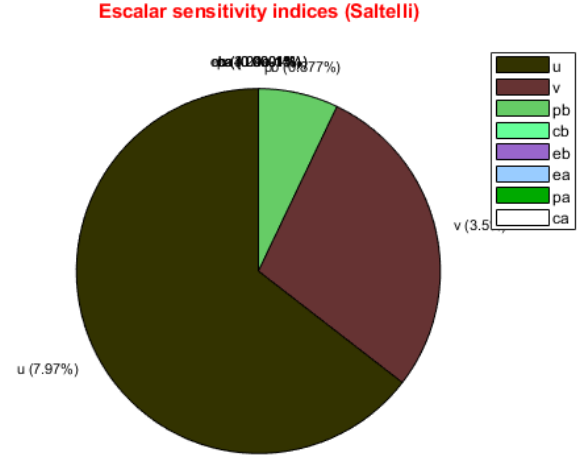


Figura 19: Índices de sensibilidad escalares de primer orden

Bar chart of sensitivity indices for MSE function using Saltelli method

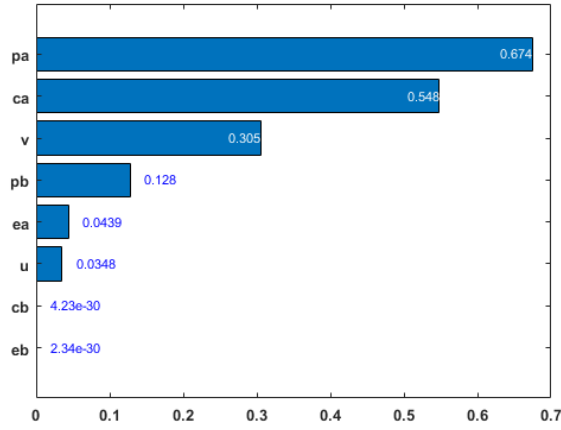


Figura 20: Diagrama de barras de los índices escalares de orden total

Bar chart of sensitivity indices for MSE function using Saltelli method

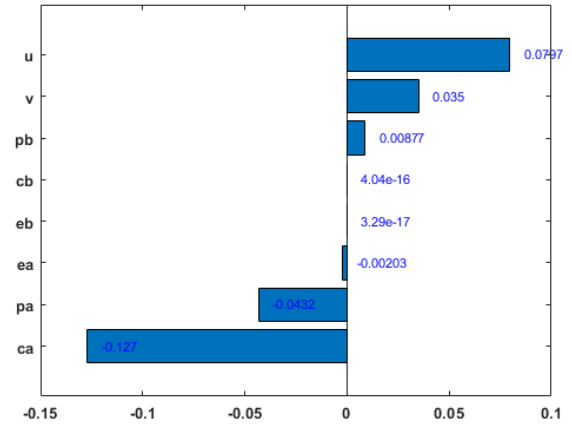


Figura 21: Diagrama de barras de los índices escalares de primer orden

3.7.2. Nivel de Incertidumbre 20 %

Para el análisis de sensibilidad con un nivel de incertidumbre del 20 % tomamos en consideración los siguientes rangos y nominales:

| Parámetro | Rango | | Nominal |
|-----------|--------|--------|---------|
| p_a | 1.6 | 2.4 | 2 |
| p_b | 1.6 | 2.4 | 2 |
| v | 2.4 | 3.6 | 3 |
| e_a | 0.0008 | 0.0012 | 0.001 |
| e_b | 0.0008 | 0.0012 | 0.001 |
| c_a | 0.0008 | 0.0012 | 0.001 |
| c_b | 0.0008 | 0.0012 | 0.001 |
| U | 0.0008 | 0.0012 | 0.01 |

Tabla 10. Rango de los parámetros variando el 20 %

Y con la siguiente confiabilidad con un $N = 500$

$$\frac{\sum_i S_i}{\sum_i |S_i|} = 0,3855$$

A continuación presentamos los diagramas de tortas y de barras para el análisis de sensibilidad de los parámetros

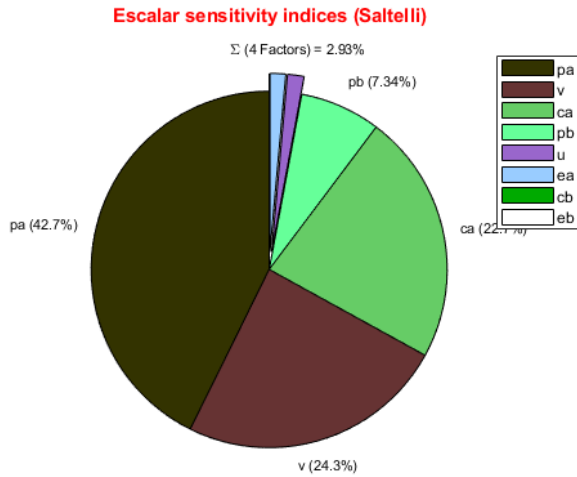


Figura 22: Índices de sensibilidad escalares de orden total

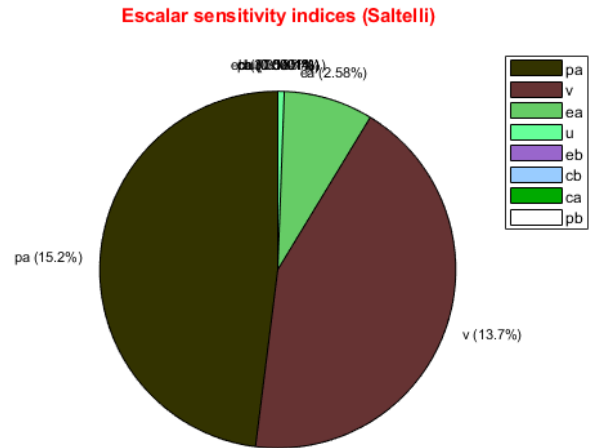


Figura 23: Índices de sensibilidad escalares de primer orden

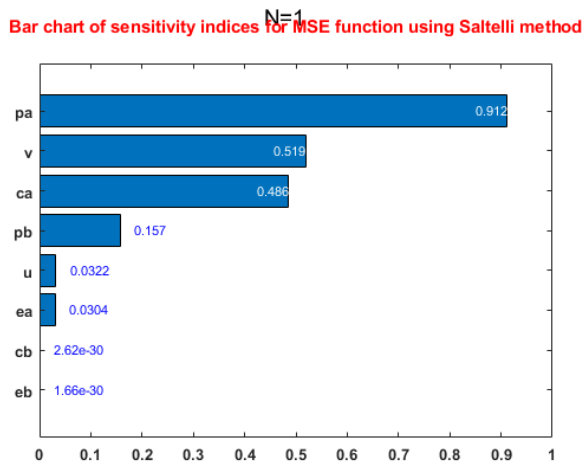


Figura 24: Diagrama de barras de los índices escalares de orden total

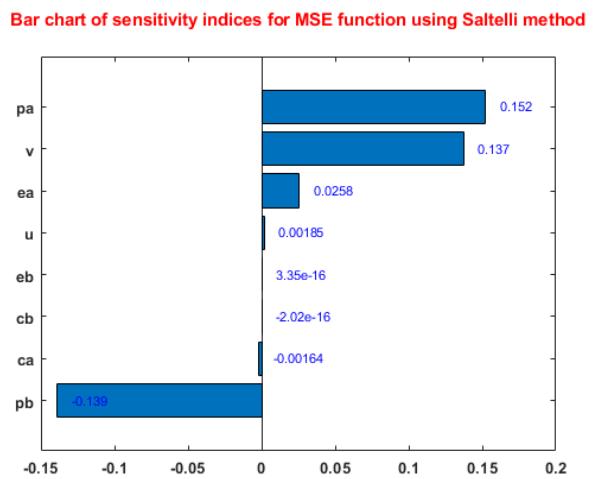


Figura 25: Diagrama de barras de los índices escalares de primer orden

3.7.3. Nivel de Incertidumbre 30 %

Finalmente, presentamos el análisis de sensibilidad del modelo con un nivel de incertidumbre del 30 % y al igual que en las dos subsubsecciones anteriores presentamos las tabla con los rangos y los nominales, la confiabilidad y los y sus respectivas gráficas escalares.

| Parámetro | Rango | | Nominal |
|-----------|--------|--------|---------|
| p_a | 1.6 | 2.4 | 2 |
| p_b | 1.6 | 2.4 | 2 |
| v | 2.4 | 3.6 | 3 |
| e_a | 0.0007 | 0.0013 | 0.001 |
| e_b | 0.0007 | 0.0013 | 0.001 |
| c_a | 0.0007 | 0.0013 | 0.001 |
| c_b | 0.0007 | 0.0013 | 0.001 |
| U | 0.0007 | 0.0013 | 0.01 |

Tabla 11. Rango de los parámetros variando el 30 %

Y la confiabilidad con $N = 500$

$$\frac{\sum_i S_i}{\sum_i |S_i|} = -1$$

Finalmente, las gráficas escalares

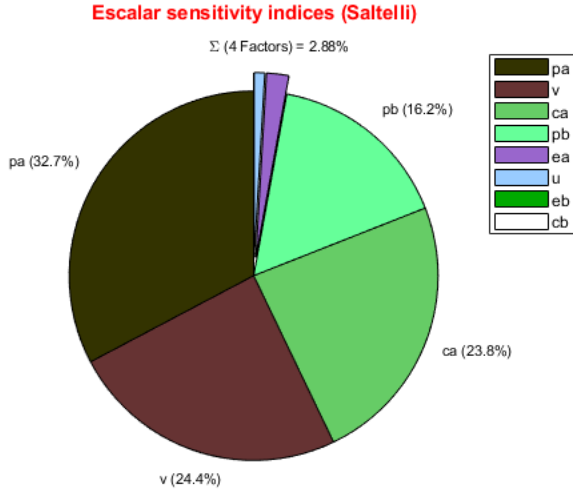


Figura 26: Índices de sensibilidad escalares de

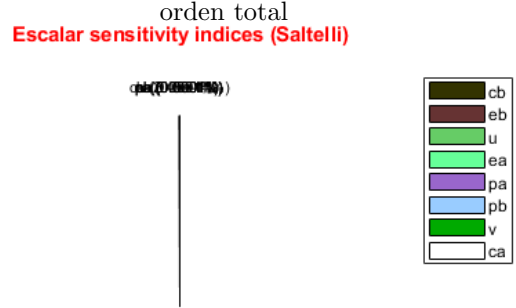


Figura 27: Índices de sensibilidad escalares de primer orden

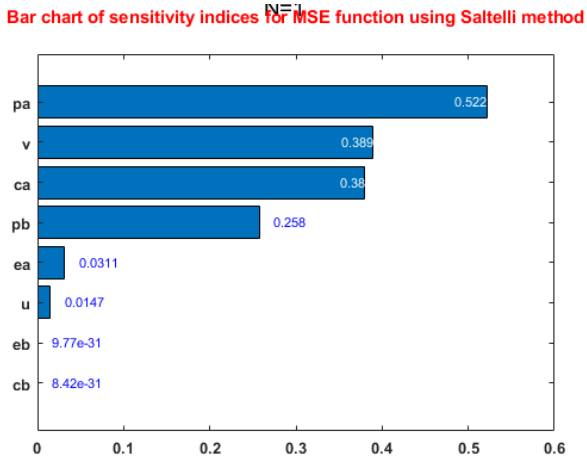


Figura 28: Diagrama de barras de los índices escalares de orden total

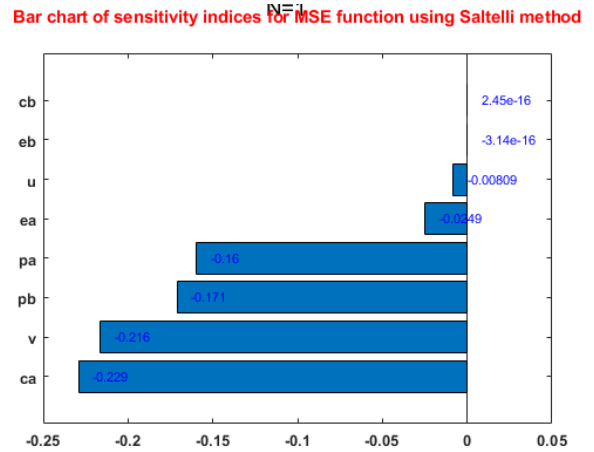


Figura 29: Diagrama de barras de los índices escalares de primer orden

4. Discusión

Simulación 1:

En la Tabla 3. se evidencia que no se cumple la condición de persistencia de la especie inferior puesto que $\frac{c_b}{e_b} < \frac{c_a}{b_a}$. Por este motivo, en la Figura 3.2 se observa que a medida que pasa el tiempo, la cantidad de espacio conquistada por el competidor superior A va aumentando, y las cantidad de espacio conquistado por B y no ocupadas van disminuyendo, hasta el punto en que la especie A conquista todo el territorio habitable h . Dicho resultado es esperado, ya que al no haber resistencia por parte del competidor B , todo el territorio habitable sería conquistado por el competidor superior. Adicionalmente, las Figuras 3.3, 3.4 y 3.5 evidenciamos que el parámetro del modelo c_a afecta significativamente todas las variables del modelo, y e_a afecta también, en menor medida, a x_1 .

Simulación 2:

Corroborando la Tabla 4. donde se muestran los rangos y nominales para la simulación 2 se puede comprobar que en éste sí se cumple la condición de persistencia del competidor inferior y en la Figura 4.2 observamos un comportamiento estable del modelo que describe la dinámica de estas dos metapoblaciones. Estas especies se estabilizan después de un instante de tiempo t , y se puede evidenciar un equilibrio de coexistencia por la competencia de territorio. Por otro lado, podemos ver que de manera similar a la simulación 1, el parámetro c_a afecta significativamente a todas las variables del modelo pero también se nota que el parámetro de tasa de extinción de la especie A e_a afecta también a las variables del modelo.

Simulación 3:

Analizando los nominales de la Tabla 5. y Figura 5.2, podemos evidenciar una dinámica de extinción de competidores, puesto que $h < \frac{e_a}{c_a} < \frac{e_b}{c_b}$. Por lo que se cumplió un resultado esperado, es decir, las unidades de espacio ocupados por ambas especies a partir de un instante llegan a cero por lo que se puede interpretar que se extinguieron, recíproco a esto, podemos evidenciar que el espacio no conquistado x_3 incrementa hasta que llega a ser h .

Entradas del modelo

■ Entrada constante $U = 0,05$:

Como se puede ver en la sección 2.4 la entrada del modelo U afecta directamente a la característica que describe la tasa de extinción de la especie A de un territorio, así que al agregarle una entrada constante de 0.5 se estaría aumentando el valor de dicha tasa de extinción en cada instante de la respuesta temporal. Por este motivo, en la figura 6.1 observamos una estabilidad en el modelo, ya que como se mencionó antes, se usa el modelo con persistencia de la especie inferior B como base para aplicarle dicha entrada. Al tener una tasa de extinción mayor para la especie A , se nota que la cantidad de territorio ocupada es un poco menor a los resultados obtenidos de la simulación 2.

■ Entrada constante $U = -0,07$:

En la Figura 6.2 podemos observar el comportamiento del sistema si le aplicamos una entrada tipo constante de -0.07. Como habíamos mencionado anteriormente, esta entrada afecta directamente a la tasa de extinción del competidor A . Una particular observación, es que aplicando esta entrada aún se sigue cumpliendo la condición necesaria de persistencia del competidor B , por lo que el comportamiento del sistema es muy parecido al de la Figura 6.1 y al de la simulación 2. cambiando únicamente las escalas del modelo.

■ Entrada senoidal:

Esta entrada se diseñó para simular un sistema en el que el competidor A tiene aumentos y disminuciones periódicas en su tasa de extinción. Este tipo de entrada añadió fluctuaciones u oscilaciones a la respuesta temporal. Sin embargo, como podemos ver en la figura 7, las proporciones entre las variables de estado permanecen muy parecidas. Se observa en la figura que los picos de la respuesta temporal de x_3 son casi igual de altos que los de x_1 , mientras que los de x_2 son más planos. Esto se debe posiblemente a que x_1 afecta más a x_3 por su relación inversamente proporcional, ya que el territorio en el que A se extingue pasa a ser terreno sin habitar. Asimismo, se constata que cuando hay un valle en x_1 , hay un pico x_2 . Este comportamiento se da porque, cuando A ocupa menos territorio, hay más territorio vacío, lo cual le permite a B colonizar más territorio.

■ Entrada Escalón:

En la Figura 8. podemos ver el comportamiento del sistema si en el tiempo 50 se le aplica una entrada tipo escalón de 0.07. Al aplicar esta entrada, podemos ver cómo cambia esta dinámica, Las unidades de espacio ocupadas por el competidor A empiezan a disminuir mientras que las del competidor B aumentan. Esto debido al cambio aplicado en la tasa de extinción e_a de la especie superior, en este sistema

podemos observar de manera clara cómo funciona la interacción/conquista de ambas especies, pues como se mencionó, al incrementar la tasa de extinción del competidor A , éste va perdiendo territorios conquistados por él, pasando a ser territorio no conquistado, por lo que el competidor B aprovecha esto y va conquistando territorios que el competidor A va perdiendo. Sin embargo en todo el sistema podemos ver cómo la especie superior siempre tiene mayor territorio que la otra especie, esto debido a que aún conserva su tasa de colonización c_a .

Variación en los parámetros

■ Parámetros $c_a = 0,5$:

Al aumentar considerablemente la tasa de conquista de la especie superior A , se observa en la Figura 9.1 que la dinámica del sistema se comporta similar a la de la simulación 1, puesto que no se cumple la condición de persistencia de la especie inferior. La diferencia de estos modelos, es que al tener una tasa de conquista tan alta, el competidor A conquista todo el territorio habitable h en un tiempo menor al de la simulación 1.

■ Parámetro $c_a = 0,001$:

Como vemos en la Figura 9.2. las unidades de espacio conquistadas por el competidor A decaen hasta estabilizarse en cero, esto debido a que no hay una proporción equilibrada entre la tasa de conquista y la tasa de extinción de la especie A , es decir, su tasa de extinción es más alta que su tasa de conquista, lo que implica que el espacio ocupado por la especie B termine siendo todo el territorio habitable h ya que no tiene competencia.

■ Parámetro $e_a = 0,002$:

Como evidenciamos en la Figura 10.1 al disminuir la tasa de extinción del competidor A no estaríamos cumpliendo la condición de persistencia del competidor B por lo que era de esperarse este comportamiento, es decir, en cierto instante de tiempo, el competidor superior llega a conquistar el territorio habitable h mientras que la cantidad de espacio ocupada por la especie inferior llegara a ser cero.

■ Parámetro $e_a = 0,1$:

En esta simulación se le aumento 0.04 a la extinción de A , pasando de 0.06 a 0.1. Comparando las figuras 4.2 y 10.2, se puede ver una drástica disminución en la brecha de territorio colonizado por el competidor A y el territorio colonizado por el competidor B . En la figura 4.2, x_1 se estabilizaba en 7 y x_2 justo por encima de 2, mientras que en la figura 10.2, x_1 se estabiliza en 5 y x_2 en 4.5. Este comportamiento tiene sentido con la teoría, pues al aumentar la tasa de extinción de A , la relación $\frac{c_a}{e_a}$ disminuye en valor, haciendo menos débil al competidor B .

Verificación: No se encontraron modelos prácticos similares en la bibliografía, pues la mayoría de los trabajos se enfocaban en la parte teórica del comportamiento. No obstante, se constata en los análisis de las simulaciones 1, 2 y 3 que el comportamiento gráfico corresponde con el comportamiento teórico que describen [Nee & May, 1992] en su trabajo. Cuando $\frac{c_b}{e_b} < \frac{c_a}{b_a}$, el competidor inferior B no persiste y A coloniza todo el territorio habitable h . Cuando $\frac{c_b}{e_b} > \frac{c_a}{b_a}$, el competidor B persiste y se constata una especie de equilibrio entre las tres variables de estado, pues ninguna converge (al menos en el tiempo $t = 100$) hasta 0. Así mismo, cuando $h < \frac{e_a}{c_a}$ y $h < \frac{e_b}{c_b}$, ambas especies se extinguen, tal como lo plantea la teoría.

Linealización

■ Curvas de Linealidad:

Con la simulación de varias entradas, en el rango de 0 a 0.14, valores que se pueden evidenciar en la Tabla 6, obtuvimos tres curvas de linealidad, una para cada variable de estado. En las tres variables x_1, x_2 y x_3 se observamos un comportamiento lineal, en todo su dominio y rango.

■ Puntos de operación:

Como se muestra en la Figura 12, con el valor nominal de la entrada, es decir, $U = 0,07$ obtenemos los puntos de operación de cada uno de nuestras variables de estados, siendo estos valores; $x_1 = 3,5$, $x_2 = 6,0487$, $x_3 = 0,4513$

■ Puntos de equilibrio:

Al igualar a cero las ecuaciones y reemplazar los parámetros de cada ecuación con los valores nominales de la Tabla 4, obtenemos los puntos de equilibrio para cada una de nuestras variables, siendo estos los valores en los que el sistema permanece estable, es decir, deja de cambiar. Dichos valores que obtuvimos son los mismos a los puntos de operación, lo cual mencionado según teoría, dichos valores debían coincidir.

■ Linealización Analítica y con Matlab:

Se obtienen las matrices A y B, mediante dos procesos. El primero de forma analítica por medio de los jacobianos, y la segunda por medio de la función de Matlab *linmod()*. Como se observa en la Figura 13, dichas matrices coinciden con los jacobianos hallados analíticamente, por lo que se comprueba la veracidad de las matrices necesarias para linealizar.

■ Estabilidad:

Como pudimos observar en la subsección 3.4.1 y anterior a eso, que los tres modelos del sistema son estables, es decir, la parte real de los autovalores de las matrices A de cada modelo eran negativos, por lo cual garantizamos estabilidad del sistema.

■ Comparación Modelo Lineal y Modelo no Lineal:

Para hacer la comparación de ambos modelos, se les aplica una misma entrada. En las Figuras 14 y 15 observamos el comportamiento bajo entradas constantes de 0.07 y 0.05 respectivamente. Podemos observar cómo sus comportamientos son diferentes en los primeros instantes de tiempo, pero después de cierto tiempo, llegan a tener el mismo comportamiento, éste es dado en el punto de equilibrio del sistema no lineal, lo cual era de esperarse que se comportaran igual en ese punto.

Control

■ Control SISO

Al aplicar el criterio de estabilidad de *Routh – Hurwitz* logramos concluir que el sistema es estable para valores de $K < \frac{7}{350}$. Es decir, cuando K toma estos valores, podemos aplicar un controlador SISO. Como podemos en la figura 16, se evidencia el esquema del sistema con un controlador SISO. Adicionalmente, en la figura 17 vemos el comportamiento del sistema ante una entrada tipo señal de 1. Es muy interesante y emocionante aún con el cambio brusco que tiene el sistema al ser afectado por la señal, la cual tiene un valor muy alto logra ser controlado de manera perfecta, llegando así a su punto de equilibrio.

■ Control MIMO

Como presentamos en la sección de resultados, mostramos por qué teóricamente el modelo no puede ser controlado por un controlador tipo MIMO. Sin embargo, presentamos nuestra intuición de por qué no puede ser controlable. Consideramos que no pueden ser controladas las tres salidas del modelo a la vez, es decir, el comportamiento de las dos especies en competencia y de los espacios de terreno sin conquistar, debido que el comportamiento de uno influye de manera significativa del otro. Por lo que al aplicar cambios en uno, el otro afecta de manera tal que no se controle. Sin embargo al ser intuiciones personales puede no ser una razón confiable.

4.1. Análisis de Sensibilidad

Una principal observación a destacar del análisis de sensibilidad para los tres niveles de incertidumbre, es que se podría decir que no es confiable, ya que todos toman valores por debajo de 0.95, llegando a ser muy bajos.

Adicionalmente, podemos ver también que en los tres niveles de incertidumbre afectan casi los mismos parámetros, cambiando únicamente los porcentajes de cada uno, de estos parámetros podemos evidenciar que p_a y v en todos los diagramas de tortas. Esto podría ser dado ya que el comportamiento de todo el sistema se ve afectado por la dinámica de estos parámetros (población inicial de cada variable)

Otra particularidad notada en los diagramas de tortas y barras del nivel de incertidumbre del 30 % es que el parámetro c_a en el índice de sensibilidad escalar de primer orden ocupa casi por completo el diagrama de torta, esto indica qué tan sensible es el modelo ante este parámetro, esto puede ser debido a que esta tasa de conquista del competido A influye mucho en los espacios de terrenos conquistados por él y por el otro competidor, ya que si este valor es muy alto, el competidor A fácilmente conquista todo el espacio habitable h , en el caso contrario, es decir, cuando el parámetro es bajo, puede ocurrir que esta especie se extinga o puede que sobreviva bajo un buen ritmo. Con esto podemos decir que el sistema puede ser considerado bajo este parámetro, cuya afirmación podríamos considerar validado con los resultados del análisis de incertidumbre presentados en la figura 4.

Referencias

- [Byers, 1990] Byers, Ralph. 1990. Detecting nearly uncontrollable pairs. *Pages 447–457 of: Numerical methods proceedings of the international symposium MTNS-89*, vol. 3. Citeseer.
- [Chen, 2001] Chen, Jerry J. 2001. *Analysis of discrete dynamical system models for competing species*. New Jersey Institute of Technology.
- [Gutiérrez, 2002] Gutiérrez, David. 2002. Metapoblaciones: un pilar básico en biología de conservación. *Ecosistemas*, **11**(3).
- [Nee & May, 1992] Nee, Sean, & May, Robert M. 1992. Dynamics of metapopulations: habitat destruction and competitive coexistence. *Journal of Animal Ecology*, 37–40.
- [Troncoso, 2002] Troncoso, Ricardo J. Mantz Pablo E. 2002. Notas y ejemplos sobre Controlabilidad y Observabilidad para ayudar al seguimiento de las clases. *CONTROL MODERNO*.