

Introdução à Teoria dos Conjuntos - Prova 2

Ariel Serranoni Soares da Silva - Número USP: 7658024

Pedro Felizatto - Número USP: 9794531

Pietro Mesquita Piccione - Número USP: 4630640

Mateus Schmidt Mattos Lopes Pereira - Número USP: 10262892

Luís Cardoso - Número USP: 4552403

4 de Agosto de 2020

Observações iniciais

As notas de aula a seguir foram produzidas com base na Seção 3 do Capítulo 12 de [1]. A ideia do nosso trabalho é seguir fielmente o conteúdo abordado no livro, inclusive mantendo a notação e numeração que são usados pelo autor. Além disso, vamos incluir observações, soluções para os exercícios, e justificar passos que ficaram em segundo plano no tratamento feito na obra mencionada.

3 Árvores

Definição 3.1. Uma *árvore* é um conjunto ordenado (T, \leq) tal que:

- (i) T possui um menor elemento;
- (ii) para cada $x \in T$, o conjunto $\{y \in T : y < x\}$ é bem ordenado sob \leq .

Os elementos de T são chamados de *nós*. Em particular, o menor elemento de T é chamado de *raiz*. Se $x, y \in T$ são nós tais que $y < x$, dizemos que y é um *antecessor* de x , e que x é um *sucessor* de y .

Seja $x \in T$ um nó. A *altura* $h(x)$ de x é o único ordinal isomorfo ao conjunto bem ordenado $\{y \in T : y < x\}$, composto por todos os antecessores de x . Observe que o Teorema 3.1 do Capítulo 6 garante que a altura está bem-definida como função em T . Além disso, se $h(x)$ é um ordinal sucessor, dizemos que x é um *nó sucessor*. Caso contrário x é denominado *nó limite*. O α -ésimo *nível* de T é o conjunto $T_\alpha = \{x \in T : h(x) = \alpha\}$. A *altura* $h(T)$ da árvore T é o menor ordinal α tal que $T_\alpha = \emptyset$.

Um *ramo* b de T é uma cadeia maximal em T . O *comprimento* $\ell(b)$ de um ramo b é o tipo da ordem de b . Note que para todo ramo b de T temos $\ell(b) \leq h(T)$. Um ramo cujo comprimento é igual a $h(T)$ é chamado de *cofinal*. Uma *subárvore* T' de T é um subconjunto $T' \subseteq T$ tal que, para quaisquer $x \in T'$ e $y \in T$, temos que $y < x$ implica $y \in T'$. Sendo assim, T' também é uma árvore quando ordenada por \leq . Ademais, para cada $\alpha < h(T')$ temos que o α -ésimo nível de T' é dado por $T'_\alpha = T_\alpha \cap T'$.

Para cada $\alpha \leq h(T)$, o conjunto $T^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta < \alpha} T_\beta$ é uma subárvore de T com $h(T^{(\alpha)}) = \alpha$. Se $x \in T_\alpha$ então $\{y \in T : y < x\}$ é um ramo de $T^{(\alpha)}$ de comprimento α ; entretanto, se α é um ordinal limite então $T^{(\alpha)}$ pode ter outros ramos de comprimento α .

Finalmente, um conjunto $A \subseteq T$ é uma *anticadeia* em T se quaisquer elementos de A são incomparáveis. Isto é, se $x, y \in A$ são tais que $x \neq y$, então $x \not\leq y$ e $y \not\leq x$.

A respeito dos conceitos introduzidos acima, é importante observar que todo ramo e subárvore de T contém a raiz. Também notamos que se $x, y \in T$ são nós tais que $y < x$, então $h(y) < h(x)$. Além disso, a própria definição de $h(T)$ nos dá que $T_\alpha \neq \emptyset$ para todo ordinal $\alpha < h(T)$. A seguir, vamos resolver os exercícios sugeridos pelo autor neste ponto do texto em [1]. Tais problemas exploram algumas das propriedades que surgem imediatamente das definições que apresentamos:

Exercício 3.1. Seja (T, \leq) uma árvore. Mostre que:

- (i) O único elemento $r \in T$ tal que $h(r) = 0$ é a raiz. Em particular, $T_0 \neq \emptyset$;
- (ii) Se α, β são ordinais tais que $\alpha \neq \beta$, então $T_\alpha \cap T_\beta = \emptyset$;
- (iii) $T = T^{(h(T))} = \bigcup_{\alpha < h(T)} T_\alpha$;

- (iv) Um nó $x \in T$ é um nó sucessor se, e somente se existe um único nó $y \in T$ tal que

$$y < x \text{ e não existe } z \text{ tal que } y < z < x. \quad (1)$$

Se x é um nó sucessor então o nó y que satisfaz (1) é chamado de *antecessor imediato* de x , e dizemos que x é *sucessor imediato* de y . Note que cada nó sucessor possui um único antecessor imediato, mas pode possuir múltiplos sucessores imediatos;

- (v) Se $x, y \in T$ são nós tais que $y < x$, então existe um único $z \in T$ tal que $y < z \leq x$ e z é um sucessor imediato de y ;
- (vi) $h(T) = \sup\{\alpha + 1 : T_\alpha \neq \emptyset\} = \sup\{h(x) + 1 : x \in T\}$.

Solução.

- (i) Por definição, T possui um menor elemento, o que implica que T possui uma raiz r . Para verificar a unicidade de r , suponha que T possui duas raízes r_1 e r_2 distintas. Neste caso, para todo $x \in T$ temos que $r_1 \leq x$. Em particular temos que $r_1 \leq r_2$. Analogamente, obtemos que $r_2 \leq r_1$. Como \leq é uma ordem, segue que $r_1 = r_2$, contradição. Finalmente notamos que, como r é o menor elemento de T , segue que $\{x \in T : x < r\} = \emptyset$. Como este último fato implica que $h(r) = 0$, concluímos que $r \in T_0$. Logo, $T_0 \neq \emptyset$.
- (ii) Suponha que existe $x \in T_\alpha \cap T_\beta$. Neste caso, temos que $\alpha = h(x) = \beta$, o que contradiz a unicidade de $h(x)$.
- (iii) Para a primeira igualdade, note que $T^{(h(T))} \subseteq T$ uma vez que $T^{(h(T))}$ é definido como uma união de subconjuntos de T . Por outro lado, seja $x \in T$ e suponha que $x \notin T^{(h(T))}$. Daí, segue que não existe $\alpha < h(T)$ tal que $h(x) = \alpha$. Isso implica que $h(x) \geq h(T)$, absurdo pois $T_\beta = \emptyset$ para todo ordinal $\beta \geq h(T)$. Como a segunda igualdade segue diretamente da definição de $T^{(h(T))}$, a prova está completa.
- (iv) Suponha que x é um nó sucessor. Neste caso, temos por definição que $h(x) = S(\alpha)$ para algum ordinal α . Vamos mostrar que T_α é não vazio. Assumindo o contrário, teremos que $h(x) > \alpha \geq h(T)$, que é um absurdo. Além disso, se existe z tal que $y < z < x$, então

$$h(y) = \alpha < h(z) < S(\alpha) = h(x),$$

absurdo. Finalmente, suponha que existem y_1 e y_2 distintos satisfazendo (1). Neste caso, o conjunto $S = \{w \in T : w < x\}$ não é bem ordenado pois o subconjunto $\{y_1, y_2\} \neq \emptyset$ de S não possui um menor elemento. Para a volta, basta notar que se existe y satisfazendo (1), então $h(x) = S(h(y))$. Do contrário, existe $z \in T$ tal que $h(y) < h(z) < h(x)$, implicando que $y < z < x$. Absurdo.

- (v) Em primeiro lugar, suponha por absurdo que não existe tal elemento z . Seja $\alpha = h(x)$ e considere a subárvore $T^{(\alpha)}$ de T . Seja $b = \{w \in T : w < x\}$ e recorde que b ramo de $T^{(\alpha)}$. Note que $y \in b$ e que b tem comprimento α . Se não existe z , então b não é maximal.
- (vi) Primeiramente, lembramos que por definição, $h(T)$ é o menor ordinal α tal que $T_\alpha = \emptyset$. Sendo assim, podemos ver que

$$h(T) \geq \alpha + 1 \text{ para cada } \alpha \text{ tal que } T_\alpha \neq \emptyset,$$

e que

$$h(T) \geq h(x) + 1 : x \in T.$$

Daí segue que

$$h(T) \geq \sup\{\alpha + 1 : T_\alpha \neq \emptyset\} \text{ e que } h(T) \geq \sup\{h(x) + 1 : x \in T\}.$$

Por fim, suponha que

$$h(T) > \sup\{\alpha + 1 : T_\alpha \neq \emptyset\} \text{ ou } h(T) > \sup\{h(x) + 1 : x \in T\}.$$

Em ambos os casos, segue que $T_\beta = \emptyset$ para algum $\beta < h(T)$. Absurdo. \square

Exercício 3.2. Mostre que:

- (i) Cada cadeia em T é bem-ordenada;

- (ii) Se b é um ramo de T e $x \in b$, e $y < x$, então $y \in b$;
- (iii) Se b é um ramo em T , então $|b \cap T_\alpha| = 1$ para $\alpha < \ell(b)$ e $|b \cap T_\alpha| = 0$ para $\alpha > \ell(b)$. Conclua que $\ell(b) \leq h(T)$;
- (iv) $h(T) = \sup\{\ell(b) : b \text{ é um ramo de } T\}$;
- (v) T_α é uma anticadeia para cada $\alpha < h(T)$.

Solução.

- (i) Seja $C \subseteq T$ uma cadeia e seja $\emptyset \neq S \subseteq C$ vamos provar que S possui um menor elemento. Com efeito, para cada $y \in S$, existe $x \in S$ tal que $y > x$, logo fixado $y_0 \in S$ qualquer o conjunto $A_{y_0} = \{z \in S : z < y_0\}$ é não vazio e portanto admite um menor elemento, pois está contido em $\{z \in T : z < y\}$ que é bem ordenado por definição. Seja m o menor elemento de A_{y_0} , vou provar que m é o menor elemento de S , de fato, se $y \in S$ então ou $y \geq y_0$ ou $y < y_0$, pois $S \subseteq C$ que é uma cadeia. Portanto se $y \geq y_0$ então $m < y_0 \leq y$, e por outro lado se $y < y_0$ então $y \in A_{y_0}$ e assim $m \leq y$. De toda forma $m \leq y$ e por fim m é o menor elemento de S .
- (ii) Se $y \notin b$ então tomando $a \doteq \{z \in T : z < x\} \cup b \supsetneq b$, pois $y \in a$, e como a é uma cadeia temos um absurdo (pois a contém propriamente b , que é maximal).
- (iii) Suponha que $y \notin b$. Vamos mostrar que y é comparável a todos os elementos de b . Se $z \in b$ e $z < x$, temos que y e z são comparáveis pois ambos pertencem ao conjunto $\{w \in T : w < x\}$, que é bem ordenado, e em particular, linearmente ordenado. Caso $x < z$, obtemos que $y < z$ por transitividade. Assim, concluímos que $b \cup \{y\}$ é uma cadeia e portanto b não é maximal. Absurdo.
- (iv) Como observamos antes, temos que para todo ramo b de T , $\ell(b) \leq h(T)$. Assim nos resta mostrar que se $\alpha \geq \ell(b) \implies \alpha \geq h(T)$, de fato como $\alpha \geq \ell(b)$ então pelo item anterior temos que $b \cap T_\alpha = \emptyset$ para todo b ramo de T , logo $T_\alpha = \emptyset$, pois para todo $x \in T$ basta tomar b_x um ramo contendo x e teremos que $x \notin T_\alpha$. Isso implica por fim que $h(T) \leq \alpha$, pois $h(T)$ é o menor ordinal que satisfaz:

$$T_\beta = \emptyset$$

- (v) Seja $\alpha < h(T)$ e assumamos que existem $x, y \in T_\alpha$ distintos tal que x e y são comparáveis. Suponha sem perda de generalidade que $x < y$. Neste caso, temos que $x < y$ mas $h(x) = h(y)$, absurdo. \square

Agora vamos olhar para alguns exemplos de árvores:

Exemplo 3.2.

- (a) Todo conjunto bem-ordenado (W, \leq) é uma árvore. Sendo assim, podemos pensar em árvores como generalizações de boas ordens. A altura $h(W)$ é o tipo de ordem de W , e o único ramo de W é o próprio W , que é cofinal.
- (b) Seja λ um número ordinal e seja A um conjunto não-vazio. Defina $A^{<\lambda} = \bigcup_{\alpha < \lambda} A^\alpha$ como o conjunto de todas as seqüências transfinitas de elementos de A com comprimento menor que λ . Considere $T = A^{<\lambda}$ e o ordene segundo \subseteq . Dessa forma, para quaisquer $f, g \in T$, temos $f \leq g$ se, e somente se $f \subseteq g$. Isto é, $f = g|_{\text{dom}(f)}$. É fácil verificar que T é uma árvore: Primeiro, note que a seqüência vazia é o menor elemento de T . Além disso, para cada $f \in T$, o conjunto $\{x \in T : x < f\}$ é bem-ordenado pois, para qualquer um de seus subconjuntos, a seqüência de menor comprimento é o menor elemento. Também é imediato que para cada $f \in T$, temos que $h(f) = \alpha$ se, e somente se $f \in A_\alpha$. Isto é, $T_\alpha = A^\alpha$. Ademais, se α e β são ordinais tais que $\alpha = \beta + 1$ e $f \in A^\alpha$, a seqüência $f|_\beta$ é o antecessor imediato de f e os elementos de $f \cup \{\langle \beta, \alpha \rangle\}$ são sucessores imediatos de f .
Por fim, observemos que existe uma correspondência biunívoca entre os ramos de T e as funções de λ em A : se $F \in A^{<\lambda}$ então $F|_\alpha$ para $\alpha < \lambda$ é um ramo em T . Por outro lado, se B é um ramo em T então B é um sistema compatível de funções e $F = \bigcup B \in A^\lambda$. Vale notar que todos os ramos de T são cofinais, uma vez que possuem comprimento $\lambda = h(T)$.
- (c) Generalizando o exemplo anterior, se $T \subseteq A^{<\lambda}$ for uma subárvore de $(A^{<\lambda}, \subseteq)$ com altura $h(T) = \alpha$, então existe uma correspondência biunívoca entre os ramos de T e as funções $F \in A^{<\lambda} \cup A^\lambda$ satisfazendo cada uma das seguintes propriedades:

- (i) $F|_\alpha \in T$ para todo $\alpha \in \text{dom}(F)$;

(ii) $F \notin T$ ou $F \in T$ e F não possui sucessores em T .

Nessa situação, costuma-se identificar ramos com suas funções correspondentes

(d) Seja $A = \mathbb{N}, \lambda = \omega$. Consideremos $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ o conjunto das seqüências finitas decrescentes, ou seja, $f \in T \iff f(i) > f(j)$ para todo $i < j < \text{dom}(f) \in \mathbb{N}$, então T é uma subárvore de $(\mathbb{N}^{<\omega}, \subseteq)$. T é uma árvore de altura ω que não possui ramos cofinais (veja Exercício 2.8, Capítulo 3).

(e) Seja (\mathbb{R}, \leq) . Uma *representação* de uma árvore (T, \preceq) *por intervalos* em (\mathbb{R}, \leq) é uma função 1-a-1 Φ que para cada $x \in T$, $\Phi(x)$ é um intervalo em (\mathbb{R}, \leq) de modo que para todo $x, y \in T$:

(i) $x \preceq y \iff \Phi(x) \supseteq \Phi(y)$;

(ii) x e y são incomparáveis $\iff \Phi(x) \cap \Phi(y) = \emptyset$

Isso implica, em particular, que $(\Phi[T], \supseteq)$ é uma árvore isomorfa à (T, \preceq) . Por exemplo, o sistema $\langle D_s \mid s \in S \rangle$ construído no Exemplo 3.18, Capítulo 10, é uma representação da árvore $S = \text{Seq}(0, 1) = 0, 1^{<\omega}$ (ordenado por \subseteq por intervalos fechados na reta real).

O estudo de árvores finitas é um dos conceitos principais de combinatória. Nós não vamos nos aprofundar nisso aqui, tomaremos nossa atenção para árvores infinitas. Nos preocuparemos majoritariamente com sobre quais circunstâncias uma árvore possui ramo cofinal. Para árvores cuja altura é um ordinal sucessor a resposta é óbvia: se $h(T) = \alpha + 1$, então $T_\alpha \neq \emptyset$ e $y \in T \parallel y \leq x$ é ramo cofinal em T para qualquer $x \in T_\alpha$. Assim, focaremos em árvores de altura limite. O Exemplo 3.2(d) nos diz que existem árvores de altura ω que possuem somente ramos finitos. O próximo teorema, a observação mais básica relevante para nossos estudos, nos mostra que isso não pode acontecer se a árvore é suficientemente "esguia"

Teorema 3.1 (Lema de König). *Se T é uma árvore de altura ω , com todos os níveis finitos, então T admite um ramo de altura ω .*

Demonstração. Equivalentemente, temos que provar que, toda árvore de altura ω , tal que cada nó tem um número finito de sucessores imediatos, tem um ramo infinito. De fato vamos construir, com recursão, uma seqüência (infinita) $\langle c_n \rangle_{n=0}^\infty$ de nós de T tal que, para todo n , $\{a \in T : c_n \leq a\}$ é infinito. Pelo exercício ??

$$\{a \in T : c_n \leq a\} = \{c_n\} \cup \bigcup_{b \in S} \{a \in T : b \leq a\}$$

onde S é o conjunto dos sucessores imediatos de c_n . Logo, para pelo menos um $b \in S$, $\{a \in T : b \leq a\}$ é infinito, assim defina c_{n+1} um tal b . Falta verificar que $\{a \in T : c_n \leq a \text{ para algum } n\}$ é um ramo de T com altura ω .

□

O próximo exercício será uma generalização do Lema de König.

Então podemos considerar o seguinte problema: Se T é uma árvore de altura ω_1 , onde cada nível é contável, é verdade que T tem um ramo de comprimento ω_1 ? NÃO!

Definição 3.3. Uma árvore de altura ω_1 é chamada de uma *árvore de Aronszajn* se todos os seus níveis são no máximo contáveis e se não possui ramos de comprimento ω_1 .

Theorem 3.4. Existem árvores de Aronszajn de altura ω_1 .

Demonstração. Construímos os níveis T_α , $\alpha < \omega_1$ de uma árvore de Aronszajn por recursão transitiva de tal modo que

1. $T_\alpha \subseteq \omega^\alpha$; $|T_\alpha| \leq \aleph_0$;
2. Se $f \in T_\alpha$, então f é um-para-um e $(\omega - \text{rang } f)$ é infinito;
3. Se $f \in T_\alpha$ e $\beta < \alpha$ então $f|_\beta \in T_\beta$;
4. Para qualquer $\beta < \alpha$, qualquer $g \in T_\beta$, e qualquer $X \subseteq \omega - \text{rang } g$ finito, existe uma $f \in T_\alpha$ tal que $f \supseteq g$ e $\text{rang } f \cap X = \emptyset$.

Vamos assumir que isso foi feito, e vamos mostrar que $T = \bigcup_{\alpha < \omega_1} T_\alpha$ é uma árvore de Aronszajn. Claramente T é uma árvore por (3), cada nível é no máximo contável por (1), e sua altura é ω_1 (por (4), cada $T_\alpha \neq \emptyset$). Se B fosse um ramo de comprimento ω_1 em T , então $F = \bigcup B$ seria uma função um-para-um de ω_1 para ω (por (2)), uma contradição.

Falta construir T_α para α limite. Para qualquer $g \in T_\beta$, $\beta < \alpha$, e qualquer $X \subseteq \omega - \text{rang}$ finito, construímos uma $f = f(g, X)$ recursivamente da seguinte maneira. Fixe uma sequência crescente $\langle \alpha_n \rangle_{n=0}^\infty$ tal que $\alpha_0 = \beta$ e $\sup\{\alpha_n | n \in \mathbb{N}\} = \alpha$. Seja $f_0 = g \in T_{\alpha_0}$ e $X_0 = X \subseteq \omega - \text{rang} f_0$. Tendo definido $f_n \in T_{\alpha_n}$ e $X_n = X \subseteq \omega - \text{rang} f_n$ finitos, nós primeiro tomamos um $X_{n+1} \supset X_n$ finito, $X_{n+1} = X \subseteq \omega - \text{rang} f_n$ (isto é possível porque o último conjunto é infinito, por (2)) e então selecionamos algumas $f_{n+1} \in T_{\alpha_{n+1}}$ tais que $f_{n+1} \supseteq f_n$ e $X_{n+1} \cap \text{rang} f_{n+1} = \emptyset$ (possível por (4)). Seja $f = \bigcup_{n=0}^\infty f_n$. Claramente $f : \alpha \rightarrow \omega$, f é um-para-um (pois todas as f_n são), $\text{rang} f \cap (\bigcup_{n=0}^\infty X_n) = \emptyset$, portanto $\omega - \text{rang} f$ é infinito, e $\text{rang} f \cap X = \emptyset$. Então f satisfaz (2). Para $\beta < \alpha$, $f|_\beta = f_n|_\beta$ quando $\beta < \alpha_n$, e portanto (3) também é satisfeito.

Colocamos esta $f = f(g, X)$ em T_α para cada $g \in \bigcup_{\beta < \alpha} T_\beta$ e cada $X \subseteq \omega - \text{rang}$. Portanto (4) também é satisfeito. Como $|\bigcup_{\beta < \alpha} T_\beta| \leq \sum_{\beta < \alpha} |T_\beta| \leq \aleph_0$ (pela suposição indutiva (1)) e o número de subconjuntos finitos de ω é contável, o conjunto T_α é no máximo contável, e (1) também é satisfeito. \square

Mais geralmente, uma árvore de altura κ (κ um cardinal não-contável) é chamada de uma árvore de Aronszajn se todos os seus níveis tem cardinalidade menor que κ e não existem ramos de comprimento κ . A questão da existencia de tais árvores é muito complicada e ainda não foi totalmente resolvida. É fácil mostrar que elas sempre existem quando κ é singular (exercício). São de interesse particular os cardinais não-contáveis para os quais vale um análogo do Lema de Kőnig, i.e., não existem árvores de Aronszajn de altura κ ; dizemos que tais cardinais possuem a *propriedade da árvore*. Acontece que cardinais fortemente inacessíveis com a propriedade da árvore são precisamente os cardinais fracamente compactos definidos na seção 2.

Referências

- [1] Karel Hrbacek and Thomas Jech. *Introduction to Set Theory*. Marcel Dekker, 1999.