Introdução à Teoria dos Conjuntos - Prova 2

Ariel Serranoni Soares da Silva - Número USP: 7658024
Pedro Felizatto - Número USP:9794531
Pietro Mesquita Piccione - Número USP: 4630640
Mateus Schmidt Mattos Lopes Pereira - Número USP: 10262892
Luís Cardoso - Número USP: 4552403
Ariel Campêlo Viana Morais - Número USP: 9302177
Bento Pereira - Número USP: 9783608

22 de Agosto de 2020

Observações iniciais

As notas de aula a seguir foram produzidas com base na Seção 3 do Capítulo 12 de [1]. A ideia do nosso trabalho é seguir fielmente o conteúdo abordado no livro, inclusive mantendo a notação e numeração que são usados pelo autor. Além disso, vamos incluir observações, soluções para os exercícios, e justificar passos que ficaram em segundo plano no tratamento feito na obra mencionada.

3 Árvores

Vamos agora dedicar nosso trabalho para generalizar um objeto originário do contexto de combinatória finita: árvores.

Definição 3.1. Uma *árvore* é um conjunto ordenado $(T, \leq)$ tal que:

(i) T possui um menor elemento;

(ii) para cada $x \in T$, o conjunto $\{y \in T : y < x\}$ é bem ordenado sob $\leq$.

Os elementos de T são chamados de *nós*. Em particular, o menor elemento de T é chamado de *raiz*. Se $x, y \in T$ são nós tais que $y < x$, dizemos que y é um *antecessor* de x e que x é um *sucessor* de y.

Seja $x \in T$ um nó. A *altura* $h(x)$ de x é o único ordinal isomorfo ao conjunto bem ordenado $\{y \in T : y < x\}$, composto por todos os antecessores de x. Observe que como cada conjunto da forma $\{y \in T : y < x\}$ é bem ordenado, então ele é isomorfo a um único ordinal. Sendo assim, a altura está bem-definida como função em T. Além disso, se $h(x)$ é um ordinal sucessor, dizemos que x é um *nó sucessor*. Caso contrário x é denominado *nó limite*. O α-ésimo *nível* de T é o conjunto $T_\alpha = \{x \in T : h(x) = \alpha\}$. A *altura* $h(T)$ da árvore T é o menor ordinal α tal que $T_\alpha = \varnothing$.

Um *ramo* b de T é uma cadeia maximal em T. O *comprimento* $\ell(b)$ de um ramo b é o tipo da ordem de b. Note que para todo ramo b de T temos $\ell(b) \leq h(T)$. Um ramo cujo comprimento é igual a $h(T)$ é chamado de *cofinal*. Uma *subárvore* T' de T é um subconjunto $T' \subseteq T$ tal que, para quaisquer $x \in T'$ e $y \in T$, temos que $y < x$ implica $y \in T'$. Sendo assim, T' também é uma árvore quando ordenada por $\leq$. Ademais, para cada $\alpha < h(T')$ temos que o α-ésimo nível de T' é dado por $T'_\alpha = T_\alpha \cap T'$.

Para cada $\alpha \leq h(T)$, o conjunto $T^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta$ é uma subárvore de T com $h(T^{(\alpha)}) = \alpha$. Se $x \in T_\alpha$ então $\{y \in T : y < x\}$ é um ramo de $T^{(\alpha)}$ de comprimento α; entretanto, se α é um ordinal limite então $T^{(\alpha)}$ pode ter outros ramos de comprimento α.

Finalmente, um conjunto $A \subseteq T$ é uma *anticadeia* em T se quaisquer elementos de A são incomparáveis. Isto é, se $x, y \in A$ são tais que $x \neq y$, então $x \not\leq y$ e $y \not\leq x$.

A respeito dos conceitos introduzidos acima, é importante observar que todo ramo ou subárvore de T contém a raiz. Também notamos que se $x, y \in T$ são nós tais que $y < x$, então $h(y) < h(x)$. Além disso, a própria definição de $h(T)$ nos dá que $T_\alpha \neq \varnothing$ para todo ordinal $\alpha < h(T)$. A seguir, vamos resolver os exercícios sugeridos pelo autor neste ponto do texto em [1]. Tais problemas exploram algumas das propriedades que surgem imediatamente das definições que apresentamos:

Exercício 3.1. Seja $(T, \leq)$ uma árvore. Mostre que:

(i) O único elemento $r \in T$ tal que $h(r) = 0$ é a raiz. Em particular, $T_0 \neq \varnothing$;

(ii) Se α, β são ordinais tais que $\alpha \neq \beta$, então $T_\alpha \cap T_\beta = \varnothing$;

(iii) $T = T^{(h(T))} = \bigcup_{\alpha < h(T)} T_\alpha$;

(iv) Um nó $x \in T$ é um nó sucessor se, e somente se existe um único nó $y \in T$ tal que

$$y < x \text{ e não existe } z \text{ tal que } y < z < x. \tag{1}$$

Se x é um nó sucessor então o nó y que satisfaz (1) é chamado de *antecessor imediato* de x, e dizemos que x é *sucessor imediato* de y. Note que cada nó sucessor possui um único antecessor imediato, mas pode possuir múltiplos sucessores imediatos;

(v) Se $x, y \in T$ são nós tais que $y < x$, então existe um único $z \in T$ tal que $y < z \leq x$ e z é um sucessor imediato de y;

(vi) $h(T) = \sup\{\alpha + 1 : T_\alpha \neq \varnothing\} = \sup\{h(x) + 1 : x \in T\}$.

Solução.

(i) Seja $r \in T$ tal que $h(r) = 0$, então temos que $\{x \in T : x < r\} = \varnothing$, da onde segue que r é o menor elemento de T, a raiz. Agora suponha que existem $r_1, r_2 \in T$ tais que $h(r_1) = h(r_2) = 0$. Então r_1 e r_2 são raízes de T. Neste caso, para todo $x \in T$ temos que $r_1 \leq x$. Em particular temos que $r_1 \leq r_2$. Analogamente, obtemos que $r_2 \leq r_1$. Como $\leq$ é uma ordem, segue que $r_1 = r_2$. Para $r \in T$ raiz, temos $h(r) = 0$ e portanto $r \in T_0$. Logo, $T_0 \neq \varnothing$.

(ii) Suponha que existe $x \in T_\alpha \cap T_\beta$. Neste caso, temos por definição que $\alpha = h(x) = \beta$.

(iii) Para a primeira igualdade, note que $T^{(h(T))} \subseteq T$ uma vez que $T^{(h(T))}$ é definido como uma união de subconjuntos de T. Por outro lado, seja $x \in T$ e suponha que $x \notin T^{(h(T))}$. Daí, segue da definição de $T^{(h(T))}$ que não existe $\alpha < h(T)$ tal que $h(x) = \alpha$. Isso implica que $h(x) \geq h(T)$. Absurdo. Como a segunda igualdade segue diretamente da definição de $T^{(h(T))}$, a prova está completa.

(iv) Suponha que x é um nó sucessor. Neste caso, temos por definição que $h(x) = S(\alpha)$ para algum ordinal α. Vamos mostrar que existe $y \in T_\alpha$ tal que $y < x$. Assumindo o contrário, teremos que o ramo $b := \{y \in T^{(h(x))} : y < x\}$ não possui elemento em T_α. Daí, segue que

$$S(\alpha) = h(x) = \ell(b) \leq \alpha,$$

que é um absurdo. Assim, tome $y \in T_\alpha$ tal que $y < x$ qualquer. Se existe z tal que $y < z < x$, então obtemos que

$$h(y) = \alpha < h(z) < S(\alpha) = h(x),$$

absurdo. Finalmente, suponha que existem y_1 e y_2 distintos satisfazendo (1). Neste caso, o conjunto $S = \{w \in T : w < x\}$ não é bem ordenado pois o subconjunto $\{y_1, y_2\} \neq \varnothing$ de S não possui um menor elemento.

Para verificar a implicação reversa, observamos que se existe y satisfazendo (1), então $h(x) = S(h(y))$. Do contrário, existe $z \in T$ tal que $h(y) < h(z) < h(x)$, implicando que $y < z < x$. Absurdo.

(v) Vamos primeiro mostrar a existência de tal elemento z: se x é sucessor imediato de y então basta tomar $z = x$. Caso contrário, existe w com $y < w < x$. Sabendo que o conjunto $\{t \in T : t < x\}$ é bem ordenado, concluímos que $A = \{t \in T : y < t < x\}$, que é não vazio pois $w \in A$, tem um menor elemento. Seja z o mínimo de A. Afirmamos que z é sucessor imediato de y. De fato, temos que $y < z < x$ pois $z \in A$. Além disso, se z não fosse sucessor imediato de y, existiria w' com $y < w' < z < x$, implicando que $w' \in A$. Absurdo, pois z é o mínimo de A.

Para a unicidade de z, basta notar que se existem z_1, z_2 satisfazendo as propriedades dadas no enunciado, então o conjunto $\{z_1, z_2\}$ não tem um menor elemento uma vez que $h(z_1) = h(z_2)$. Como $\varnothing \neq \{z_1, z_2\}$ está contido em $\{t \in T : t < x\}$, que é bem ordenado, temos um absurdo.

(vi) Por definição, $h(T)$ é o menor ordinal α tal que $T_\alpha = \varnothing$. Sendo assim, podemos ver que

$$h(T) \geq \alpha + 1 \text{ para cada } \alpha \text{ tal que } T_\alpha \neq \varnothing,$$

e que

$$h(T) \geq h(x) + 1 \text{ para cada } x \in T.$$

Daí segue que

$$h(T) \geq \sup\{\alpha + 1 : T_\alpha \neq \varnothing\} \text{ e que } h(T) \geq \sup\{h(x) + 1 : x \in T\}.$$

Por fim, suponha que

$$h(T) > \sup\{\alpha + 1 : T_\alpha \neq \varnothing\} \text{ ou } h(T) > \sup\{h(x) + 1 : x \in T\}$$

e note que em ambos os casos, segue que $T_\beta = \varnothing$ para algum $\beta < h(T)$. Absurdo. □

Exercício 3.2. Seja $(T, \leq)$ uma árvore. Mostre que:

(i) Cada cadeia em T é bem-ordenada;

(ii) Se b é um ramo de T e $x \in b$, e $y < x$, então $y \in b$;

(iii) Se b é um ramo em T, então $|b \cap T_\alpha| = 1$ para $\alpha < \ell(b)$ e $|b \cap T_\alpha| = 0$ para $\alpha > \ell(b)$. Conclua que $\ell(b) \leq h(T)$;

(iv) $h(T) = \sup\{\ell(b) : b \text{ é um ramo de } T\}$;

(v) T_α é uma anticadeia para cada $\alpha < h(T)$.

Solução.

(i) Seja $C \subseteq T$ uma cadeia e seja $\varnothing \neq S \subseteq C$. Vamos provar que S possui um menor elemento.

Seja $y \in S$. Se y é o menor elemento de S então a prova está completa. Caso contrário, temos que existe $x \in S$ tal que $x < y$. Assim, o conjunto $S_y = \{z \in S : z < y\}$ é não vazio. Além disso, como S_y está contido em $\{z \in T : z < y\}$, que é bem ordenado por definição, obtemos que S_y possui um menor elemento m.

Por fim, vamos mostrar que m é o menor elemento de S. De fato, se $s \in S$ então ou $y \leq s$ ou $s < y$, pois $S \subseteq C$, que é uma cadeia. Se $y \leq s$ então $m < y \leq s$. Por outro lado se $s < y$ então $s \in S_y$, e assim $m \leq s$. De toda forma, temos que $m \leq s$. Logo, m é o menor elemento de S.

(ii) Suponha que $y \notin b$. Vamos mostrar que y é comparável a todos os elementos de b. Se $z \in b$ e $z < x$, temos que y e z são comparáveis pois ambos pertencem ao conjunto $\{w \in T : w < x\}$, que é bem ordenado, e em particular, linearmente ordenado. Caso $x < z$, obtemos que $y < z$ por transitividade. Assim, concluímos que $b \cup \{y\}$ é uma cadeia e portanto b não é maximal. Absurdo.

(iii) Vamos começar mostrando que $|b \cap T_\alpha| \leq 1$, para cada α ordinal. De fato, suponhamos por absurdo que $|b \cap T_\alpha| \geq 2$ para algum α. Tome $x, y \in b \cap T_\alpha$ tais que $x \neq y$. Como b é uma cadeia, temos que $x < y$ ou $y < x$. Assumindo sem perda de generalidade que $x < y$, segue que $\{t \in T : t < x\} \subsetneq \{t \in T : t < y\}$ e então $\alpha = h(x) < h(y) = \alpha$, absurdo.

Agora seja $\alpha > \ell(b)$ e suponhamos por absurdo que $|b \cap T_\alpha| = 1$. Logo existe $u \in T_\alpha$ tal que $u \in b$, pelo item (ii) do Exercício 3.2, segue que $\{t \in T : t < u\} \subset b$, donde $h(u) \leq \ell(b)$, mas $u \in T_\alpha$ e então $\alpha = h(u) \leq \ell(b)$, impossível. Assim, como $|b \cap T_\alpha| \leq 1$ e $|b \cap T_\alpha| \neq 1$, devemos ter $|b \cap T_\alpha| = 0$.

Por fim, faremos o caso $\alpha < \ell(b)$ utilizando indução Como a raiz de T é unica e pertence a todos os ramos de T, o resultado é verdadeiro quando $\alpha = 0$. Seja $\alpha < \ell(b)$ e suponha que $|b \cap T_\beta| = 1$ para cada $\beta < \alpha$. Sendo assim, podemos definir uma única função $r \colon \alpha \to T^{(\alpha)} \cap b$ de modo que $r(\lambda) \in T_\lambda \cap b$. Veja que r que é sobrejetora uma vez que $|b \cap T_\beta| = 1$ para cada $\beta < \alpha$. Além disso, r é injetora pois se existem β, λ distintos tais que $r(\beta) = r(\lambda) =: y$, temos que $y \in T_\beta \cap T_\lambda \cap b$, contradizendo o segundo item do Exercício 3.1. Assim concluímos que r é bijetora.

Evidentemente, temos que $h(r(\lambda)) = \lambda$ para cada $\lambda < \alpha$. Desta forma, r é um isomorfismo entre α e $b \cap T^{(\alpha)}$. Como $\alpha < \ell(b)$, então $b \setminus (T^{(\alpha)} \cap b) \neq \varnothing$, o que nos garante a existência de $z \in b \cap T_\gamma$ para algum $\gamma \geq \alpha$. Se $\gamma > \alpha$, então existe $p \in \{\zeta \in T : \zeta < z\}$ tal que $\{\zeta \in T : \zeta < p\}$ é isomorfo à α. Observe que isso é verdade pois $\{\zeta \in T : \zeta < z\}$ e α são bem ordenados. Como $p < z \in b$, temos que $p \in b$. Além do mais, $h(p) = \alpha$ nos diz que $p \in b \cap T_\alpha$ e teremos finalmente $|b \cap T_\alpha| = 1$. Se $\gamma = \alpha$, tome $p \doteq z$ e teremos que $p \in b$ e $h(p) = \alpha$, tendo assim que $|b \cap T_\alpha| = 1$.

Se $\ell(b) > h(T)$, então $T_{h(T)} \neq \varnothing$, mas isso é absurdo pela definição de $h(T)$, assim $\ell(b) \leq h(T)$.

(iv) Como observamos anteriormente, temos que $\ell(b) \leq h(T)$ para todo ramo b de T. Este fato nos permite concluir que

$$h(T) \geq \sup\{\ell(b) : b \text{ é um ramo de } T\}.$$

Assim nos resta verificar que $h(T)$ é de fato o menor dos majorantes de $\{\ell(b) : b \text{ é um ramo de } T\}$. Isto é, vamos provar que se $\alpha \geq \ell(b)$ para todo ramo b de T, então $\alpha \geq h(T)$.

De fato, se $x \in T$, tome b_x um ramo de T tal que $x \in b_x$. Como $\{\zeta \in T : \zeta < x\} \subseteq b_x$, temos que

$$h(x) \leq h(x) + 1 \leq \ell(b_x) \leq \alpha$$

Assim, pelo último item do Exercício 3.1, obtemos que $h(T) \leq \alpha$.

(v) Seja $\alpha < h(T)$ e assuma que existem $x, y \in T_\alpha$ distintos tal que x e y são comparáveis. Suponha sem perda de generalidade que $x < y$. Neste caso, temos que $x < y$ mas $h(x) = h(y)$. Absurdo, pois $x < y$ implica que $h(x) < h(y)$. □

Agora vamos olhar para alguns exemplos de árvores:

Exemplo 3.2.

(a) Todo conjunto bem-ordenado $(W, \leq)$ é uma árvore. Sendo assim, podemos pensar em árvores como generalizações de boas ordens. A altura $h(W)$ é o tipo de ordem de W, e o único ramo de W é o próprio W, que é cofinal.

(b) Seja λ um número ordinal e seja A um conjunto não-vazio. Defina $A^{<\lambda} = \bigcup_{\alpha<\lambda} A^\alpha$ como o conjunto de todas as sequências transfinitas de elementos de A com comprimento menor que λ. Considere $T = A^{<\lambda}$ e o ordene segundo $\subseteq$. Assim, para quaisquer $f, g \in T$, temos $f \leq g$ se, e somente se $f \subseteq g$, o que significa que $f = g_{\restriction \mathrm{dom}(f)}$. É fácil verificar que $(T, \subseteq)$ é uma árvore: Primeiro, note que a sequência vazia é o menor elemento de T. Além disso, para cada $f \in T$, o conjunto $\{x \in T : x < f\}$ é bem-ordenado pois, para qualquer um de seus subconjuntos, a sequência de menor comprimento é o menor elemento.

Também é imediato que para cada $f \in T$, temos que $h(f) = \alpha$ se, e somente se $f \in A^\alpha$. Isto é, $T_\alpha = A^\alpha$. Ademais, se α e β são ordinais tais que $\alpha = \beta + 1$ e $f \in A^\alpha$, a sequência $f_{\restriction\beta}$ é o antecessor imediato de f e os elementos de $f \cup \{\langle\beta, \alpha\rangle\}$ são sucessores imediatos de f.

Por fim, observemos que existe uma correspondência biunívoca entre os ramos de T e as funções de λ em A: se $f \in A^\lambda$ então $\{f_{\restriction\alpha} : \alpha < \lambda\}$ é um ramo em T. Por outro lado, se b é um ramo em T então b é um sistema compatível de funções e $f = \bigcup_{g\in b} g \in A^\lambda$. Vale notar que todos os ramos de T são cofinais, uma vez que possuem comprimento $\lambda = h(T)$.

(c) Generalizando o exemplo anterior, se $T \subseteq A^{<\lambda}$ é uma subárvore de $(A^{<\lambda}, \subseteq)$ com altura $h(T) = \alpha$, então existe uma correspondência biunívoca entre os ramos de T e as funções $f \in A^{<\lambda} \cup A^\lambda$ satisfazendo cada uma das seguintes propriedades:

   (i) $f_{\restriction\alpha} \in T$ para todo $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$;

   (ii) $f \notin T$ ou $f \in T$ e f não possui sucessores em T.

Nessa situação, costuma-se identificar um ramo utilizando sua função correspondente.

(d) Consideremos o conjunto $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ das sequências de números naturais que são finitas e decrescentes, ou seja, $f \in T$ se, e somente se $f(i) > f(j)$ para todo $i < j < \mathrm{dom}(f) \in \mathbb{N}$. Então $(T, \subseteq)$ é uma subárvore de $(\mathbb{N}^{<\omega}, \subseteq)$. Note que a altura de T é ω. Além disso, sabemos que não existe uma sequência de números naturais que seja infinita e decrescente. Assim conseguimos concluir que todos os ramos de T são finitos, o que implica que T não possui ramos cofinais.

(e) Seja $(R, \leq)$ um conjunto linearmente ordenado. Uma *representação* de uma árvore $(T, \preceq)$ *por intervalos* em $(R, \leq)$ é uma função Φ tal que para quaisquer $x, y \in T$, suas imagens $\Phi(x)$ e $\Phi(y)$ são intervalos em $(R, \leq)$ satisfazendo:

   (i) $x \preceq y$ se, e somente se $\Phi(x) \supseteq \Phi(y)$;

   (ii) x e y são incomparáveis se, e somente se $\Phi(x) \cap \Phi(y) = \varnothing$.

Em particular, as propriedades acima implicam que $(\Phi[T], \supseteq)$ é uma árvore isomorfa a $(T, \preceq)$. Por exemplo, se considerarmos a árvore $S = \text{Seq}(\{0,1\}) = \{0,1\}^{<\omega}$ ordenado por $\subseteq$, então o sistema do conjunto de Cantor $\langle D_s : s \in S \rangle$, onde definimos $D_{\langle\rangle} = [0,1]$ e, se $D_s = [a,b]$ considerarmos

$$D_{\langle s,0\rangle} = [a, a + \frac{b-a}{3}] \text{ e } D_{\langle s,1\rangle} = [a + \frac{2(b-a)}{3}, b]$$

é uma representação de $(S, \subseteq)$ por intervalos fechados na reta real.

O estudo de árvores finitas é um dos principais conceitos que aparecem em combinatória. Entretanto, não vamos nos aprofundar muito no tema. Ao invés disso, vamos investigar algumas propriedades de árvores infinitas, nos preocupando especialmente com condições suficientes para que uma árvore possua um ramo cofinal.

Para árvores cuja altura é um ordinal sucessor a resposta é óbvia: se $h(T) = \alpha + 1$, então $T_\alpha \neq \varnothing$ e para qualquer $x \in T_\alpha$ temos que $\{y \in T : y \leq x\}$ é ramo cofinal de T. Assim, focaremos em árvores cuja altura é um limite. Por outro lado, o item (d) do Exemplo 3.2 nos diz que existem árvores de altura ω que possuem apenas ramos finitos. O próximo teorema mostra que, pensando na largura de uma árvore como um majorante para a cardinalidade de seus níveis, se uma aŕvore T de altura enumerável é suficientemente "esguia", então T possui um ramo cofinal.

Teorema 3.3 (Lema de König)**.** Seja $(T, \leq)$ uma árvore de altura ω. Se todos os níveis de T são finitos, então T admite um ramo de altura ω.

Demonstração. Em primeiro lugar, observamos que[1] se T é uma árvore de altura ω, então cada nó de T possui um número finito de sucessores imediatos se, e somente se todos os níveis de T são finitos. Ancorados neste fato, vamos mostrar que se T é uma árvore de altura ω tal que cada nó tem um número finito de sucessores imediatos, então T tem um ramo infinito. De fato, vamos utilizar recursão para construir uma sequência $\langle c_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ de nós de T tal que, para todo $n < \omega$, o conjunto $\{a \in T : c_n \leq a\}$ é infinito.

Seja c_0 a raiz de T e note que $\{a \in T : c_0 \leq a\} = T$ é infinito. Além disso, se $\{a \in T : c_n \leq a\}$ é infinito para $n < \omega$ e consideramos o conjunto S_n dos sucessores imediatos de c_n, então

$$\{a \in T : c_n \leq a\} = \{c_n\} \cup \bigcup_{b \in S_n} \{a \in T : b \leq a\}.$$

Daí, como S_n é finito por hipótese, segue que existe $b \in S_n$ tal que o conjunto $\{a \in T : b \leq a\}$ é infinito, assim podemos utilizar o Axioma da Escolha para tomar c_{n+1} um tal b. Finalmente, vamos mostrar que

$$r = \{a \in T : a \leq c_n \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n<\omega} \{a \in T : a \leq c_n\}$$

é um ramo infinito de $T^{(\omega)} = T$. Com efeito, se $x, y \in r$, então existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $x \leq c_n$ e $y \leq c_m$. Tomando $p = \max\{n, m\}$, temos que $x, y \leq c_p$ e portanto $x \leq y$ ou $y \leq x$, pois $T^{(p)}$ é uma árvore. Além disso, r é maximal pois se $C \supsetneq r$ é uma cadeia e $z \in C \setminus r$, então $z > c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, contradição. Desse modo, segue que $h(z) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e daí $h(z) \geq \omega = h(T)$, absurdo. □

Observe que usamos o Teorema da Recursão sem explicitamente especificar uma função g para calcular c_{n+1} a partir de c_n. De fato, para construir tal função precisamos aplicar o Axioma da Escolha: se k é uma função escolha para $\mathcal{P}(T)$ e S_c é o conjunto de todos os sucessores imediatos de c, então definindo $g(c,n) := k\big(\{b \in S_c : \{a \in T : b \leq a\} \text{ é infinita}\}\big)$ temos que $c_{n+1} = g(c_n, n)$. Nesse cenário, estamos de acordo com o Teorema da Recursão que vimos. No próximo exercício veremos que, se T é uma árvore com 'largura finita', então T possui um ramo cofinal não importando sua altura. Nesse sentido, o resultado a seguir é uma generalização do Lema de König.

Exercício 3.3. Seja κ um cardinal infinito e seja $(T, \leq)$ uma árvore de altura κ. Prove que se todos os níveis de T são finitos, então T possui um ramo de comprimento κ.

Dica: Seja $U_\alpha = \{x \in T_\alpha : |\{\zeta \in T : x \leq \zeta\}| = \kappa\}$. Prove que $\{|U_\alpha|, \alpha < \kappa\} \subset \mathbb{N}$ é limitado. Seja M o seu máximo, mostre que T possui exatamente M ramos de tamanho κ.

Solução. Observemos que a dica não vale em geral: considere a árvore T tal que cada nó possui exatamente 2 sucessores imediatos e que $h(T) = \omega$. É fácil ver para cada nível T_n temos $|T_n| = 2^n$, então $U_n = \{x \in T_n : |y \in T : x \leq y| = \kappa\} = T_n$ de modo que $|U_n| = |T_n| = 2^n$, não sendo limitado. Nesse contexto, iremos separar nossa demonstração em casos:

[1] Este fato é verdade pois se $\alpha < \omega$, α é um ordinal sucessor, e portanto o fato segue sem dificuldades do item (iv) do Exercício 3.1

(i) Para o caso em que $\mathrm{cf}(\kappa) < \omega$, consideramos $(\alpha_n)_{\mathbb{N}}$ sequência crescente cofinal tal que $\alpha_0 = 0$. Por indução, vamos construir uma sequência $c_n \in T_{\alpha_n}$ crescente tal que $|\{\zeta \in T : c_n \leq \zeta\}| = \kappa$. Uma vez feito isso, definamos $b = \{y \in T : y < c_n \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{i<n} c_i$. De maneira análoga ao Teorema 3.2, concluímos que b é um ramo de comprimento $\ell(b) = \kappa$.

Com efeito, seja c_0 a raiz de T e observe que $S_n \coloneqq \{y \in T : y \geq c_n\} \cap T_{\alpha_{n+1}} \neq \varnothing$, pois, pelo exercício anterior, se S_n fosse vazio, então $\{y \in T : c_n \leq y\} \subset T^{(\alpha_{n+1})}$ e como todos os níveis são finitos e $\alpha_{n+1} < \kappa$ então $|T^{(\alpha_{n+1})}| < \kappa$, o que não pode ocorrer pela definição de c_n. Também notamos que existe $y \in S_n$ tal que $|\{\zeta \in T : y \leq \zeta\}| = \kappa$. Caso contrário, teríamos que

$$\{\zeta \in T : c_n \leq \zeta\} = \left(\{\zeta \in T : c_n \leq \zeta\} \cap T^{(\alpha_{n+1})}\right) \cup \{\zeta \in T : x < \zeta \text{ para algum } x \in S_n\},$$

e portanto $|\{\zeta \in T : c_n \leq \zeta\}| \neq \kappa$. Assim, tome $c_{n+1} \in S_n$ tal que $|\{\zeta \in T : c_{n+1} \leq \zeta\}| = \kappa$.

(ii) Para $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$, mostraremos que o conjunto $\{|U_\alpha : \alpha < \kappa|\}$ é limitado em $\mathbb{N}$. Suponha que $\{|U_\alpha : \alpha < \kappa|\}$ não é limitado e considere α_n como a menor solução para $|U_\alpha| \geq n$. Note que α_n é sequência cofinal em κ pois para todo $\lambda < \kappa$ o conjunto U_λ é finito, e para $l = |U_\lambda|$ temos que $\alpha_{l+1} > \lambda$ por construção.

Estabelecida a dica, sejam $M = \max\{|U_\beta|, \beta < \kappa\}$ e $\overline{\alpha}$ tais que $|U_{\overline{\alpha}}| = M$. Mostraremos que para todo $\alpha > \overline{\alpha}$, existe uma bijeção $f = f_{\overline{\alpha},\alpha} \colon U_{\overline{\alpha}} \to U_\alpha$ tal que $f(x) \geq x$ para cada $x \in U_{\overline{\alpha}}$. Fixado $x \in U_{\overline{\alpha}}$, observemos que de modo análogo ao que foi feito anteriormente, $(c_n = x, c_{n+1} = f(x), \alpha_n = \overline{\alpha}, \alpha_{n+1} = \alpha)$, temos f com as propriedades desejadas. Agora vamos mostrar f injetora. Com efeito, se $x, y \in T_{\overline{\alpha}}$ são tais que $f(x) = f(y) = z$, então $z \geq x$ e $z \geq y$, implicando que $x = y$ pois $x, y \in T_{\overline{\alpha}}$ e T é uma árvore. Além disso, f é sobrejetora pois $|U_{\overline{\alpha}}| \geq |U_\alpha| \in \mathbb{N}$. Por fim, para $x \in U_{\overline{\alpha}}$ defina

$$b_x \coloneqq \{f_{\overline{\alpha},\beta}(x) : \beta > \overline{\alpha}\} \cup \{y \in T : y \leq x\}.$$

Observe que b_x é ramo pois $\overline{\alpha} < \beta < \gamma$ implica que $f_{\beta,\gamma}(f_{\overline{\alpha},\beta}(x)) = f_{\overline{\alpha},\gamma}(x)$ pois ambos são maiores que x e $|U_{\overline{\alpha}}| = |U_\gamma|$ e T é uma árvore.

Assim provamos b é um ramo. Observando que $\ell(b_x) = \kappa$, concluímos que b é cofinal como desejado. □

Uma ideia alternativa usando conceitos de topologia. [2]

Para demonstrar tal resultado, vamos interpretar os ramos da árvore T como compactos contidos num espaço topológico produto. De fato, temos que consideramos o conjunto $X = \Pi_{\alpha<\kappa}(T_\alpha \cup \{0\})$, (onde 0 é um elemento que não faz parte do ambiente de T, que serve simplesmente para identificar a falta de nós sucessores) munido do produto das topologias discretas, então o conjunto C dos ramos de T é identificado como

$$C = \{(x_\alpha)_{\alpha<\kappa} \in X : x_\beta < x_{\beta+1} \text{ pra todo } \beta\},$$

onde definimos $0 > x$ pra todo $x \in T$. Não é difícil ver que $X \setminus C$ é aberto, pois seu complementar é formado pela união dos conjuntos cujos elementos tem duas "coordenadas" seguidas em ordem decrescente. Portanto como X é compacto pelo Teorema de Tychonoff, C é compacto. Agora, queremos construir $F_\lambda \subset C$ fechados encaixantes, então teremos que $\bigcap F_\lambda \neq \varnothing$, e assim $x \in \bigcap F_\lambda$ será o ramo que desejamos.

Defina $F_0 = C$. Indutivamente suponhamos F_α bem definido para $\alpha < \lambda$ de modo que $\sup\{\ell(b) : b \in F_\alpha\} = \kappa$. (Como visto no item (iv) do Exercício 3.2). Como todo nó possui uma quantidade finita de sucessores imediatos, temos que existe $a_\lambda \in T_\lambda$ de modo que quando definimos

$$F_\lambda = \{(x_\beta) \in C : x_\lambda = a_\lambda\} \bigcap_{\alpha<\lambda} F_\alpha$$

temos que $\sup\{\ell(b) : b \in F_\lambda\} = \kappa$, e não é difícil ver que F_λ é fechado. Então temos que existe $x \in \bigcap F_\lambda$, que será claramente o ramo de comprimento κ. □

Os dois últimos resultados nos mostram que para uma árvore $(T, \leq)$ cuja altura é um ordinal limite maior ou igual a ω com níveis finitos, então T possui um ramo cofinal. A partir deste ponto, podemos pensar em generalizações desta condição. Por exemplo, é natural que nos perguntemos se T é uma árvore de altura κ, onde cada nível tem cardinalidade estritamente menor de que κ, é verdade que T tem um ramo de comprimento κ? A resposta para tal pergunta é **NÃO!**

Definição 3.4. Seja κ um cardinal não enumerável. Uma árvore de altura κ é uma *árvore de Aronszajn* se todos os os seus níveis tem cardinalidade estritamente menor do que κ e se não possui ramos de comprimento κ.

[2] Esta solução foi uma tentativa de usar o Teorema de Tychonoff no contexto de árvores. Porém, a ideia não está completa e não deve ser considerada como uma demonstração, mas sim um devaneio lúdico sobre uma possível aplicação deste resultado interessante de topologia.

A seguir, vamos estudar mais a fundo o caso em que $\kappa = \omega_1$. Nesta situação, conseguimos construir árvores de Aronszajn, que servem como contra-exemplo para a indagação que propusemos acima.

Teorema 3.5. Existem árvores de Aronszajn de altura ω_1.

Demonstração. Vamos construir uma árvore T de Aronszajn construindo, para cada $\alpha < \omega_1$, o nível T_α. Queremos que cada nível satisfaça:

(i) $T_\alpha \subseteq \omega^\alpha$ e $|T_\alpha| \leq \aleph_0$;

(ii) Se $f \in T_\alpha$, então f é injetora e $\omega \setminus \operatorname{ran} f$ é infinito;

(iii) Se $f \in T_\alpha$ e $\beta < \alpha$ então $f_{\restriction\beta} \in T_\beta$;

(iv) Para qualquer $\beta < \alpha$, qualquer $g \in T_\beta$, e qualquer $X \subseteq \omega \setminus \operatorname{ran} g$ finito, existe uma $f \in T_\alpha$ tal que $g \subseteq f$ de $\operatorname{ran} f \cap X = \varnothing$.

Em primeiro lugar, vamos provar que uma vez demonstrada a existência de uma tal família, o conjunto $T = \bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha$, ordenado de acordo com a contenção usual de funções, é a árvore de Aronszajn que desejamos.

Mostremos que T possui menor elemento. Se $f \in T$, então $f_{\restriction 0} = \varnothing$ e daí por (iii) segue que $f \geq \varnothing \in T_0 \subset T$. Além disso, mostremos que se $x \in T$, então o conjunto $A_x := \{y \in T : y < x\}$ é bem ordenado. Para facilitar a notação, considere $o\colon T \to \{\alpha < \omega_1\}$ tal que $x \in T_{o(x)}$. Seja $A \subset A_x$ e defina $A^* := \{\alpha < \omega_1 : x \in T_\alpha \cap A\}$. Como os ordinais são bem ordenados, existe $\beta \in A^*$ menor elemento de A^*. Logo, se $m \in T_\beta \cap A$, então para todo $g \in A$ temos $o(g) \geq \beta$, e como $f_{\restriction o(g)} = g$ e $f_{\restriction\beta} = m$, concluímos que $g_{\restriction\beta} = f_{\restriction\beta} = m$. Portanto $g \geq m$ e m é o menor elemento de A.

Falta verificar que T é uma árvore de Aronszajn de altura ω_1. Com efeito, vejamos que:

(a) Por (i), os níveis são enumeráveis.

(b) Por (iv), para todo $\alpha < \omega_1, T_\alpha \neq \varnothing$, basta tomar $\beta = 0$ e X qualquer, então $h(T) = \omega_1$.

(c) Precisamos verificar que T não possui ramo de comprimento ω_1. De fato, se b fosse ramo com $\ell(b) = \omega_1$, se $F = \bigcup_{f\in b} f$, então mostraremos F é função injetora de $\operatorname{dom} F = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \alpha = \omega_1$ em ω: veja que F é função pois se $\langle x, p\rangle, \langle x, q\rangle \in F, \langle x, p\rangle \in f_p \in b$ e $\langle x, q\rangle \in f_q \in b$. Como b é uma cadeia, temos que, sem perda de generalidade, $f_p > f_q$. Assim $(f_p)_{\restriction o(f_q)} = f_q$ então $p = q$. Analogamente F é injetora. Absurdo.

Seja $T_0 = \{\varnothing\}$. Assumindo que para todo $\beta < \lambda, T_\beta$ satisfaz (i)-(iv), Então, se λ for ordinal sucessor, $\lambda = \alpha + 1$, para algum α, definimos

$$T_{\alpha+1} = \Big\{g \cup \{\langle\alpha, a\rangle\} : g \in T_\alpha \text{ e } a \in \omega \setminus \operatorname{ran} g\Big\}.$$

Vamos verificar que $T_{\alpha+1}$ satisfaz (i)-(iv):

(i) $T_{\alpha+1} \subseteq \omega^{\alpha+1}$ por construção, e $|T_{\alpha+1}| \leq |T_\alpha||\omega| \leq \aleph_0^2 = \aleph_0$.

(ii) Seja $f \in T_{\alpha+1}$, então temos $f = g \cup \{\langle\alpha, a\rangle\}$ para alguma $g \in T_\alpha$ e $a \in \omega \setminus \operatorname{ran} g$. Sabemos que g é injetora, assim, basta mostrarmos que $a \neq g(\beta)$ para todo $\beta < \alpha$, o que é verdade pela definição de a.

(iii) Seja $f \in T_{\alpha+1}$, então temos $f = g \cup \{\langle\alpha, a\rangle\}$ para alguma $g \in T_\alpha$ e $a \in \omega \setminus \operatorname{ran} g$. Se $\beta < \alpha + 1$, então $f_{\restriction\beta} = g_{\restriction\beta} \in T_\beta$ pois $\beta \leq \alpha$.

(iv) Para qualquer $\beta < \alpha + 1$, qualquer $g \in T_\beta$, e qualquer $X \subseteq \omega \setminus \operatorname{ran} g$ finito, existe uma $f \in T_\alpha$ tal que $g \subseteq f$ de $\operatorname{ran} f \cap X = \varnothing$. Seja $a \in \omega \setminus (\operatorname{ran} f \cup X)$ (observe que isto é possível pois X é finito e $\omega \setminus \operatorname{ran} f$ é infinito). Então teremos que $f \cup \{\langle\alpha, a\rangle\} \in T_{\alpha+1}$ é a função que desejamos.

Agora, vamos construir T_λ no caso em que λ é um ordinal limite. Considere um ordinal $\beta < \lambda$, um nó $g \in T_\beta$ e um conjunto $X \subseteq \omega \setminus \operatorname{ran} g$ finito. Vamos construir uma função $f = f(g, X)$ da seguinte maneira: fixe uma sequência crescente $\langle\lambda_n\rangle_{n=0}^\infty$ tal que $\lambda_0 = \beta$ e $\sup\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} = \lambda$. Seja $f_0 = g \in T_{\lambda_0}$ e $X_0 = X \subseteq \omega \setminus \operatorname{ran} f_0$. Tendo definido $f_n \in T_{\lambda_n}$ e $X_n \subseteq \omega \setminus \operatorname{ran} f_n$ finito, nós primeiro tomamos um conjunto $X_{n+1} \supsetneq X_n$ finito tal que $X_{n+1} \subseteq \omega \setminus \operatorname{ran} f_n$ (Note que por (ii) este último passo é possível porque o conjunto $\omega \setminus \operatorname{ran} f_n$ é infinito). Feito isso, escolhemos $f_{n+1} \in T_{\lambda_{n+1}}$ tal que $f_{n+1} \supseteq f_n$ e $X_{n+1} \cap \operatorname{ran} f_{n+1} = \varnothing$, o que é possível por (iv).

Seja $f = \bigcup_{n=0}^\infty f_n$. Claramente $f\colon \lambda \to \omega$ e f é injetora pois, como visto anteriormente, união de funções injetoras encadeadas também é função injetora. Além disso, temos que $\operatorname{ran} f \cap (\bigcup_{n=0}^\infty X_n) = \varnothing$ pois se

$X \in X_k$ e $y \in X_k \cap \operatorname{ran} f_n$, então seja $m = \max\{k, n\}$, e temos que $y \in X_m \cap \operatorname{ran} f_m = \varnothing$ (f_n e X_n estão encadeados). Portanto $\omega \setminus \operatorname{ran} f$ é infinito e $\operatorname{ran} f \cap X = \varnothing$. Assim concluímos que f satisfaz (ii). Ademais, se $\beta < \lambda$, tome n tal que $\beta < \lambda_n$, e teremos $f_{\restriction\beta} = (f_n)_{\restriction\beta} \in T_\beta$ e portanto (iii) também é satisfeito (Perceba que $f_n \in T_{\lambda_n}$ e $\lambda_n < \lambda$).

Definimos $T_\lambda \coloneqq \{f(g, X) : g \in \bigcup_{\beta<\lambda} T_\beta \text{ e cada } X \subseteq \omega \setminus \operatorname{ran} g\}$. Portanto (iv) também é satisfeito por construção. Falta verificar (i). Com efeito,

$$|T_\lambda| \le |\bigcup_{\beta<\lambda} T_\beta||\mathcal{P}^f(\omega)| \le |\omega| \sum_{\beta<\lambda} |T_\beta| \le \aleph_0^2 = \aleph_0,$$

onde $\mathcal{P}^f$ indica o conjunto das partes finitas.

Como vimos anteriormente, T é uma árvore de Aronszajn de altura ω_1. □

A questão da existência de árvores de Aronszajn é muito complicada e ainda não foi totalmente resolvida. De modo geral, dizemos que cardinais κ não-contáveis para os quais vale um análogo do Lema de Kőnig, i.e., não existem árvores de Aronszajn de altura κ; dizemos que tais cardinais possuem a *propriedade de árvore.* O exercício a seguir nos mostra que cardinais singulares não satisfazem tal requisito.

Exercício 3.4. Construa uma árvore de Aronszajn de altura $\aleph_\omega$. Generalize para um cardinal singular κ qualquer.

Solução. Vamos demonstrar diretamente para κ cardinal singular. Primeiramente daremos a ideia da demonstração: Fixado κ, queremos encontrar uma árvore T de altura κ, cujos ramos têm comprimento estritamente menor que κ mas que $\sup\{\ell(b) : b \text{ é um ramo de } T\} = h(T) = \kappa$. Faremos isso da seguinte maneira: Como κ é singular, então existe $\{\alpha_\eta : \eta < \lambda\}$ onde $\lambda < \kappa$ com $\sup\{\alpha_\eta\} = \kappa$. Assim basta construir uma árvore formada por ramos "disjuntos" (cuja única intersecção é a raiz) com altura α_η para todo $\eta < \lambda$. Agora construiremos tal árvore.

Seja κ ordinal singular, e $\lambda = \operatorname{cf}(\kappa) < \kappa$. Então existe $\{\alpha_\eta : \eta < \lambda\}$ subconjunto cofinal de κ. Vamos considerar o seguinte conjunto:

$$T = \{f_{\eta,\beta} : \eta < \lambda \text{ e } \beta < \alpha_\eta\} \cup \{\varnothing\}$$

Onde temos que $f_{\eta,\beta} \colon \beta \to \kappa$, que $f_{\eta,\beta}(0) = \eta$, e que $f_{\eta,\beta}(\gamma) = 0$ para todo $\gamma \neq 0$. Observe que T é ordenado pela ordem usual de funções e que para quaisquer $\varnothing \neq f, g \in T$ vale que $f \le g$ se, e somente se $f(0) = g(0)$ e $\operatorname{dom} f \subseteq \operatorname{dom} g$. Vamos provar que T é uma árvore: note que $\{\varnothing\}$ é o menor elemento de T. Além disso, seja $A_x = \{y \in T : y < x\}$ e observe que A_x possui o mesmo tipo de ordem de $\operatorname{dom} x$, que é bem ordenado. Assim concluímos que T é de fato uma árvore.

Afirmamos que seus ramos são da forma $b_\eta = \{f \in T : f(0) = \eta\}$ para algum $\eta < \lambda$. Pois se $b_\eta = \{f \in T : f(0) = \eta\}$ para algum $\eta < \lambda$, sejam $f, g \in b_\eta$, então $f(0) = g(0)$ e como $\operatorname{dom} g, \operatorname{dom} f < \alpha_\eta$, sem perda de generalidade, temos $\operatorname{dom} f \subseteq \operatorname{dom} g$, logo $f \le g$. Além disso, note que b_η é maximal pois supondo $b_\eta \subsetneq c$ com c cadeia, então segue que existe $f \in c$ com $f(0) \neq \eta$. Logo, f não é comparável com qualquer elemento de b_η. Agora se b é ramo qualquer de T, vamos provar que $b \subset b_\xi$ para algum $\xi < \eta$: De fato tome $f \in b$ e $\xi = \eta_f = f(0)$, então se $g \in b$, ou $g \le f$ ou $g \ge f$ pois b é uma cadeia. De toda forma, $g(0) = f(0) = \xi$ implica que $g \in b_\xi$. Como b é maximal e $b \subset b_\xi$, obtemos que $b = b_\xi$ pois b_ξ é ramo (maximal).

Observe que construímos T para que $b_\eta = \{f \in T : f(0) = \eta\}$ tenha tipo de ordem $\ell(b_\eta) = \alpha_\eta < \kappa$. Além disso $h(T) = \sup\{\alpha_\eta : \eta < \lambda\} = \kappa$ e portanto T é árvore de Aronszajn de cardinalidade κ cardinal singular. □

Assim encerra-se a Seção 3 sobre árvores.

Referências

[1] Karel Hrbacek and Thomas Jech. *Introduction to Set Theory.* Marcel Dekker, 1999.