MAP5747 Programação Não Linear: Exercícios

Ariel Serranoni

2º semestre de 2019

Lista 1

Exercício 1. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sejam $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $\inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, então

(i) $\inf_{x\in A} f(x) \leq \inf_{x\in B} f(x)$;

(ii) todo minimizador de f em A é um minimizador de f em B.

Solução.

(i)

$$\inf_{x\in A} f(x) = \min\{\inf_{x\in B} f(x), \inf_{x\in A\setminus B} f(x)\} \leq \inf_{x\in B} f(x).$$

(ii)

□

Exercício 2. Exercício 2 - Lista 1

Solução. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) \coloneqq \exp(x)$. Considere $\Omega = \mathbb{N}$. Então cada ponto $\bar{x} \in \Omega$ minimiza f localmente e, como f é injetora temos que $f(x) \neq f(y)$ sempre que $x \neq y$. □

Exercício 3. Exercício 3 - Lista 1

Solução. Primeiramente, note que o conjunto $f(\Omega)$ é compacto pois f é contínua e Ω é compacto.

Vamos mostrar que $\alpha \coloneqq \inf_{x\in\Omega} f(x) \in f(\Omega\setminus)$ e $\beta \coloneqq \sup_{x\in\Omega} f(x) \in f(\Omega)$. Como $f(\Omega)$ é fechado temos que $f(\Omega) = \overline{f(\Omega)}$. Portanto é suficiente mostrar que $\alpha, \beta \in \overline{f(\Omega)}$. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}$ e note que se $\alpha + \varepsilon\mathbb{B} \cap f(\Omega) = \varnothing$ então $\inf_{x\in\Omega} f(x) = \inf f(\Omega) \geq \alpha + \varepsilon$. Isso implica que $\inf f(\Omega) > \alpha$. Contradição. (escreve analogamente pra β) □

Exercício 4. Exercício 4 - Lista 1

Solução. Considere a função $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ dada por $f(x) \coloneqq \frac{1}{x}$. Se consideramos $\Omega = [-1, 0)$, temos que f é contínua em Ω e que Ω é limitado, mas não fechado. Portanto não vale o Teorema de Bolzano-Weierstrass e f não possui minimizador, de fato f é ilimitada em Ω. Similarmente, se $\Omega = [-1, 0]$ temos que Ω é compacto mas f não é contínua em Ω e tb n vale o teorema. □

Exercício 5. Exercício 5 - Lista 1

Solução. Como f é contínua, temos que o conjunto de nível dado no enunciado é fechado. Além disso, temos por hipótese que o conjunto é limitado. Assim, o resultado segue aplicando o exercicio 3 □

Exercício 6. Exercício 6 - Lista 1

Solução. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e considere o conjunto de nível

$$N := \{y \in \mathbb{R}^n : f(y) \leq f(x)\}.$$

Como f é contínua temos que N é fechado. Agora suponha que N não é limitado, então existe uma sequencia $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\|y_n\| \to \infty$ mas $f(y_n) \leq f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que contradiz a hipótese de que f é coerciva. Assim concluímos que N é compacto e o resultado segue do exercicio 3. □

Exercício 7. Exercício 7 - Lista 1

Solução.

1. Considere $f(x) = \exp(x)$ e $\Omega = \{0\}$.
2. Considere $f(x) = -x^2$ e $\Omega = \{0\}$.
3. Considere $f(x) = x^3$ e $\Omega = \mathbb{R}$.
4. Considere $f(x) = x^3$ e $\Omega = \mathbb{R}$.

□

1 Lista 2