LISTA DE EXERCÍCIOS 3
MAC0427 PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR
OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES

Entrega: *somente dos exercícios 2, 5, 8 e 15*, nos primeiros 15 minutos da aula de 23/06.

Exercícios adaptados dos livros listados como "Material para estudo" no PACA.

Exercício 1. Um *programa quadrático* é um PNL cuja função objetivo é quadrática e cujas restrições são funções afins; ou seja, toda restrição é da forma $a^\mathsf{T} x \geq \beta$ para algum $a \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Dado um programa quadrático

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \frac{1}{2} x^\mathsf{T} Q x + c^\mathsf{T} x \\ \text{sujeito a} & b - Ax \leq 0, \end{array}$$

em que $Q \succ 0$, escreva seu dual Lagrangeano *como um programa quadrático* (note que será um problema de maximização).

Exercício 2. Uma função $g \colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ é dita *convexa* se $X \coloneqq \{\, x \in \mathbb{R}^n : g(x) < \infty \,\}$ é um conjunto convexo e a função g, restrita a X, é convexa. Mostre que, se $\{\, f_i : i \in I \,\}$ é uma coleção de funções convexas de $\mathbb{R}^n$ para $(-\infty, +\infty]$, então a função $f \colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ dada por

$$f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$$

é convexa. (Para facilitar, você pode supor que o sup é, na verdade, um max; ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe um $i \in I$ tal que $f(x) = f_i(x)$.)

Exercício 3. Considere um PNL com Lagrangeano $L(x, y) = f(x) + y^\mathsf{T} g(x)$. Prove que o dual Lagrangeano

$$\sup_{y \geq 0} \underline{L}(y)$$

é um problema convexo; ou seja, mostre que a função $-\underline{L}(y)$ é convexa.

Dica: use o exercício anterior.

Exercício 4. Considere um PNL

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & g(x) \leq 0, \end{array}$$

cujo Lagrangeano é $L(x, y) = f(x) + y^\mathsf{T} g(x)$. Um ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ com $\bar{y} \geq 0$ é chamado de *ponto de cela* de L se, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ com $y \geq 0$, vale que

$$L(\bar{x}, y) \leq L(\bar{x}, \bar{y}) \leq L(x, \bar{y}).$$

Mostre que, se $(\bar{x}, \bar{y})$ é um ponto de cela de L, então $\bar{x}$ é solução ótima global do PNL e $\bar{y}$ é solução ótima global do dual Lagrangeano.

Exercício 5. Calcule o valor ótimo do PNL

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & e^{x_1} \\ \text{sujeito a} & \dfrac{x_1^2}{e^{x_2}} \leq 0 \end{array}$$

e de seu dual Lagrangeano.

Data: 31 de maio de 2016.

Exercício 6. Escreva as condições de otimalidade KKT para o problema

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{array}$$

Encontre todas as soluções para o sistema de equações obtido.

Exercício 7. Mostre que o triângulo com ângulos internos dados por $x_1, x_2, x_3 > 0$ minimizam

$$-\sin(x_1) \cdot \sin(x_2) \cdot \sin(x_3)$$

se, e somente se, o triângulo é equilátero.

Roteiro:

(i) Formule como um PNL com uma restrição de igualdade sobre $x_1 + x_2 + x_3$ e com as inequações $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
(ii) Defina $x_1^* := x_2^* := x_3^* := \pi/3$.
(iii) Argumente porque podemos usar $x_i \geq 0$ no lugar de $x_i > 0$.
(iv) Prove que existe uma solução ótima global $\bar{x}$.
(v) Mostre que nenhuma das restrições de desigualdade é ativa em $\bar{x}$.
(vi) Escreva as condições de otimalidade KKT para o ponto $\bar{x}$, simplificando-as usando as propriedades já deduzidas sobre $\bar{x}$.
(vii) Conclua que $\cot(\bar{x}_1) = \cot(\bar{x}_2) = \cot(\bar{x}_3)$.
(viii) Finalize usando o fato de que o período de cot é π.

Exercício 8. Denote o vetor formado só de 1's por $\mathbb{1}$. Mostre que, se $Q \succ 0$, então existe uma única solução ótima para o PNL

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & \mathbb{1}^\mathsf{T} x, \\ \text{sujeito a} & \frac{1}{2} x^\mathsf{T} Q x = 2, \end{array}$$

e ela é dada por

$$x^* := -\frac{2Q^{-1}\mathbb{1}}{\sqrt{\mathbb{1}^\mathsf{T} Q^{-1} \mathbb{1}}}.$$

Exercício 9. Escreva as condições de otimalidade KKT para o PNL

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & x_1 \\ \text{sujeito a} & x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1, \\ & x_2 \leq 0, \end{array}$$

e mostre elas não identificam a única solução ótima do problema.

Exercício 10. Mostre que, dentre todos os paralelepípedos com lados $x_1, x_2, x_3 > 0$ e diagonal $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, o cubo é o que maximiza a área de superfície.

Roteiro:

(i) Formule como um PNL com restrições $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
(ii) Argumente que existe uma solução ótima global $\bar{x}$.
(iii) Mostre que, se restringirmos $x_3 = 0$, a solução ótima tem $x_1 = x_2$; use a inequação $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ para provar otimalidade.
(iv) Conclua, usando uma solução viável "favorável", que nenhuma restrição de desigualdade é ativa em $\bar{x}$.
(v) Escreva as condições de otimalidade KKT para o ponto $\bar{x}$, simplificando-as usando as propriedades já deduzidas sobre $\bar{x}$.
(vi) Denote o vetor formado só de 1's por $\mathbb{1}$ e conclua que $(\mathbb{1}\mathbb{1}^\mathsf{T} - I)x = z_1 x$.
(vii) Um dos autovetores de $\mathbb{1}\mathbb{1}^\mathsf{T} - I$ é $\mathbb{1}$; os demais são ortogonais a $\mathbb{1}$. Conclua que $\bar{x}$ são os lados de um cubo.

Exercício 11. Considere um PNL na forma

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & Ax = b, \\ & g(x) \leq 0, \end{array}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Justifique a seguinte afirmação: para resolver o PNL, podemos supor que as linhas de A são linearmente independentes.

Exercício 12. Resolva o PNL

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & (x-y)^2 + e^z + e^{-z} \\ \text{sujeito a} & xz = 0, \\ & yz = 0. \end{array}$$

Dica: use alguma forma de eliminação de variáveis, talvez múltiplas vezes.

Exercício 13. Seja $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $a_i > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $a_1 + \ldots + a_n = 1$. Resolva o PNL

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & a^\mathsf{T} x \\ \text{sujeito a} & x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} = 1, \\ & x_1 > 0, \ldots, x_n > 0. \end{array}$$

Você pode supor que existe uma solução ótima global.

Dica: use as condições de otimalidade KKT após reformular com a mudança de variáveis $u_i = \ln x_i$.

Exercício 14. Seja $L \subseteq \mathbb{R}^n$ um subespaço linear. Um *projetor ortogonal* sobre L é uma matriz simétrica e idempotente P que tem L como imagem (ou seja, $P = P^2 = P^\mathsf{T}$ e $\operatorname{Im}(P) = L$). Mostre que existe um único projetor ortogonal sobre L.

Roteiro:

(i) Existência: seja $\{x_1, \ldots, x_k\}$ uma base ortonormal para L e considere a matriz $x_1 x_1^\mathsf{T} + \cdots + x_k x_k^\mathsf{T}$.

(ii) Unicidade: se P, Q são projetores ortogonais, mostre que $PQ = Q$ (note que $Qe_i \in L$). Conclua que $P = Q$ usando simetria.

Exercício 15. Considere o programa quadrático com restrições lineares

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & \frac{1}{2} x^\mathsf{T} Q x - c^\mathsf{T} x \\ \text{sujeito a} & Ax = b. \end{array}$$

em que $Q \succ 0$ e A tem linhas linearmente independentes. Parte das condições KKT para o problema podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} Q & A^\mathsf{T} \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ b \end{bmatrix}.$$

Mostre que a matriz desse sistema é inversível.

Exercício 16. Formule o problema

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & c^\mathsf{T} x \\ \text{sujeito a} & Ax \leq 0, \\ & \max_i |x_i| \leq 1 \end{array}$$

como um programa linear.

Exercício 17. Prove que, se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tem linhas linearmente independentes, então AA^T é inversível.

Dica: Se acertar a matriz à direita com um vetor não for suficiente, acerte-a também pela esquerda.

Exercício 18. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ uma matriz com linhas linearmente independentes. Mostre que o projetor ortogonal sobre o subespaço $\mathrm{Im}(A^\mathsf{T})$ é dado por

$$P = A^\mathsf{T}\left[AA^\mathsf{T}\right]^{-1}A.$$

Dicas:

(i) Use a definição de projetor ortogonal, vista em outro exercício.
(ii) Lembre-se que $\mathrm{Im}(XY) \subseteq \mathrm{Im}(X)$ para matrizes X, Y.