

MAP5747 Programação Não Linear: Exercícios

Ariel Serranoni

2º semestre de 2019

1 Lista 1

Exercício 1.1. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e sejam $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, então

- (i) $\inf_{x \in A} f(x) \leq \inf_{x \in B} f(x)$;
- (ii) todo minimizador de f em A é um minimizador de f em B .

Solução.

(i)

$$\inf_{x \in A} f(x) = \min\{\inf_{x \in B} f(x), \inf_{x \in A \setminus B} f(x)\} \leq \inf_{x \in B} f(x).$$

- (ii) Seja x tal que $f(x) \leq f(y)$ para cada $y \in A$. Como $B \subseteq A$ temos que $f(x) \leq f(y)$ para cada $y \in B$. Logo, x minimiza f em B . \square

Exercício 1.2. Exercício 2 - Lista 1

Solução. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \exp(x)$. Considere $\Omega = \mathbb{N}$. Então cada ponto $\bar{x} \in \Omega$ minimiza f localmente e, como f é injetora temos que $f(x) \neq f(y)$ sempre que $x \neq y$. \square

Exercício 1.3. Exercício 3 - Lista 1

Solução. Seja $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ uma sequência qualquer e considere a sequência $\{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Como Ω é compacto temos que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergindo para algum $x \in \Omega$. Neste caso, segue que $\{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ também admite uma subsequência convergindo para $f(x)$. Como $x \in \Omega$ temos que $f(x) \in f(\Omega)$. Mostramos assim que cada sequência em $f(\Omega)$ admite uma subsequência convergindo para um elemento do próprio $f(\Omega)$, ou seja, $f(\Omega)$ é compacto.

Finalmente, vamos mostrar que $\alpha := \inf_{x \in \Omega} f(x) \in f(\Omega)$ e $\beta := \sup_{x \in \Omega} f(x) \in f(\Omega)$. Como $f(\Omega)$ é fechado temos que $f(\Omega) = \overline{f(\Omega)}$. Portanto é suficiente mostrar que $\alpha, \beta \in \overline{f(\Omega)}$. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}$ e note que se $\alpha + \varepsilon \mathbb{B} \cap f(\Omega) = \emptyset$ então $\inf_{x \in \Omega} f(x) = \inf f(\Omega) \geq \alpha + \varepsilon$. Isso implica que $\inf f(\Omega) > \alpha$. Contradição. [escrevemos analogamente pra β]. \square

Exercício 1.4. Exercício 4 - Lista 1

Solução. Considere a função $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dada por $f(x) := \frac{1}{x}$. Se consideramos $\Omega = [-1, 0)$, temos que f é contínua em Ω e que Ω é limitado, mas não fechado. Portanto não vale o Teorema de Bolzano-Weierstrass e f não possui minimizador, de fato f é ilimitada em Ω . Similarmente, se $\Omega = [-1, 0]$ temos que Ω é compacto mas f não é contínua em Ω e tb n vale o teorema. \square

Exercício 1.5. Exercício 5 - Lista 1

Solução. Como f é contínua, temos que o conjunto de nível dado no enunciado é fechado. Além disso, temos por hipótese que o conjunto é limitado. Assim, o resultado segue aplicando o exercício 3. \square

Exercício 1.6. Exercício 6 - Lista 1

Solução. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e considere o conjunto de nível

$$N := \{y \in \mathbb{R}^n : f(y) \leq f(x)\}.$$

Como f é contínua temos que N é fechado. Agora suponha que N não é limitado, então existe uma sequência $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\|y_n\| \rightarrow \infty$ mas $f(y_n) \leq f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que contradiz a hipótese de que f é coerciva. Assim concluímos que N é compacto e o resultado segue do exercício 3. \square

Exercício 1.7. Exercício 7 - Lista 1

Solução.

1. Considere $f(x) = \exp(x)$ e $\Omega = \{0\}$.
2. Considere $f(x) = -x^2$ e $\Omega = \{0\}$.
3. Considere $f(x) = x^3$ e $\Omega = \mathbb{R}$.
4. Considere $f(x) = x^3$ e $\Omega = \mathbb{R}$. \square

2 Lista 1 - Old

Exercício 2.1. Exercício 2 - 2.1 do NOCEDAL

Solução. Iniciamos calculando uma forma polinomial para a função f . Daí, obtemos que

$$f(x_1, x_2) = 100x_1^4 + x_1^2 - 2x_1 + 100x_2^2 - 200x_1^2x_2 + 1. \quad (1)$$

Além disso, vamos calcular o vetor gradiente e a matriz hessiana de f :

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 400x_1^3 + 2x_1 - 400x_1x_2 - 2 \\ 200x_2 - 200x_1^2 \end{pmatrix} \text{ e } \nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1200x_1^2 + 2 - 400x_2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Resolvendo o sistema $\nabla f(x_1, x_2) = 0$ nos dá a solução única $x := (1, 1)^\top$. Feito isso verificamos que

$$\nabla^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_{++}^n.$$

Assim, concluímos que x é o único minimizador global de f . \square

Exercício 2.2. Exercício 15

Solução. \square

Exercício 2.3. Exercício 17 - 2.17 da ANA

Solução. Fazendo algumas continhas, obtemos facilmente que $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ e ainda que $f''(x) = 6x + 2a$. Para que 0 seja maximizador de f , precisamos que $f'(0) = 0$ e que $f''(0) < 0$. Analogamente para que 1 seja minimizador de f precisamos que $f'(1) = 0$ e que $f''(1) > 0$. Resolvendo o sistema dado por estas equações obtemos a única solução $b = 0$ e $a = -\frac{3}{2}$. \square

Exercício 2.4. Exercício 18

Solução. Seja $\overline{X} := \{x \in X : f(x) = v^*\}$, sejam $x_1, x_2 \in \overline{X}$, e seja $\lambda \in [0, 1]$. Como f é convexa segue que

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = v^*.$$

Mas como $v^* = \inf\{f(x) : x \in X\}$ também vale que

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq v^*.$$

Assim concluímos que $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = v^*$. Portanto, segue que $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \overline{X}$ e logo \overline{X} é convexo. \square

Exercício 2.5. Exercício 19

Solução. Sabemos que f é convexa se, e só se $\nabla^2 f(x) \in \mathbb{S}_+^n$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Observando que $\phi''(\alpha) = d^\top \nabla^2 f(x + \alpha d)d$, concluímos que $\phi''(\alpha) \geq 0$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Como este último fato acontece se e só se ϕ é convexa, o resultado segue. \square

3 Lista 2 - Old

Exercício 3.1. Exercício 5

Solução. Neste exercício faremos uso das contas feitas no Exercício 2.1.

1. Primeiro, veja que $d = -\nabla f(0, 0) = (2, 0)^\top$. Neste caso segue que

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= f(0 + \alpha d) = f((2\alpha, 0)^\top) \\ &= 100((-2\alpha)^2)^2 + (1 - 2\alpha^2) \\ &= 100(16\alpha^4) + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1. \end{aligned}$$

2. Primeiro, vamos calcular a direção de Newton. Por definição, segue

$$d = (-\nabla^2 f((0, 0)^\top)^{-1} \nabla f((0, 0)^\top) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, segue que

$$f((\alpha, 0)^\top) = 100((- \alpha)^2)^2 + (1 - \alpha)^2 = 100\alpha^4 + \alpha^2 - 2\alpha + 1. \quad \square$$

Exercício 3.2. Exercício 6

Solução. Primeiramente, notamos que $\nabla f(x) = Ax + b$ e $\nabla^2 f(x) = A$. Como $A \in \mathbb{S}_+^n$ temos que f é convexa e portanto pelo Exercício 2.5 temos que $\phi(\alpha) := f(x + \alpha d)$ é convexa para todo $x, d \in \mathbb{R}^n$. Assim, podemos calcular o minimizador de ϕ da seguinte maneira:

$$\phi'(\alpha) = 0$$

$$\iff \nabla f(x + \alpha d)^\top d = 0$$

$$\iff (A(x + \alpha d) + b)^\top d = 0$$

$$\iff ((Ax + b)^\top + \alpha(Ad)^\top)d = 0$$

$$\iff \nabla f(x)^\top + \alpha d^\top d = 0$$

$$\iff \alpha = -\frac{\nabla f(x)^\top d}{d^\top Ad}.$$

□

Exercício 3.3. Exercício 10

Solução. Primeiramente, note que $\nabla f(x) = Ax - b$ e que $x_{t+1} = x_t - \alpha \nabla f(x_t)$. Assim, calculando $\nabla f(x_{t+1})$ em termos de $\nabla f(x_t)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \nabla f(x_{t+1}) &= A(x_{t+1}) - b \\ &= A(x_t - \alpha \nabla f(x_t)) - b \\ &= Ax_t - \alpha A \nabla f(x_t) - b \\ &= \nabla f(x_t) - \alpha A \nabla f(x_t). \end{aligned}$$

Finalmente, segue que

$$\begin{aligned} \nabla f(x_{t+1})^\top \nabla f(x_t) &= (\nabla f(x_t) - \alpha A \nabla f(x_t))^\top \nabla f(x_t) \\ &= \nabla f(x_t)^\top \nabla f(x_t) - \alpha (A \nabla f(x_t))^\top \nabla f(x_t) \\ &= \nabla f(x_t)^\top \nabla f(x_t) - \frac{\nabla f(x_t)^\top \nabla f(x_t) \nabla f(x_t)^\top A \nabla f(x_t)}{\nabla f(x_t)^\top A \nabla f(x_t)} \\ &= \nabla f(x_t)^\top \nabla f(x_t) - \nabla f(x_t)^\top \nabla f(x_t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□