Lista 1 - Otimização Não Linear

1. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}^n$ tais que $B \subseteq A$. Suponha que f é limitada inferiormente em $\mathbb{R}^n$. Mostre que

   i) $\inf_{x \in A} f(x) \leq \inf_{x \in B} f(x)$;

   ii) se $\overline{x}$ é minimizador de f em A e $\overline{x} \in B$, então $\overline{x}$ também é minimizador de f em B.

2. Encontrar exemplos onde todos os pontos de Ω são minimizadores locais mas $f(x) \neq f(y)$ se $x \neq y$.

3. *Teorema de Bolzano-Weierstrass:* Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua onde A é um conjunto compacto (isto é, fechado e limitado). Prove que f tem mínimo global em A.

4. Mostrar, com exemplos, o que acontece quando as hipóteses de continuidade e compacidade do Teorema de Bolzano-Weierstrass são eliminadas.

5. Provar que se f é contínua em $\mathbb{R}^n$ e, dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$, o conjunto de nível $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \leq f(x^0)\}$ é limitado, então f tem minimizador global em $\mathbb{R}^n$.

6. Provar que se f é contínua em $\mathbb{R}^n$ e $\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = \infty$, então f tem minizador global em $\mathbb{R}^n$.

7. Encontrar exemplos onde:

   i) x^* é minimizador local de f em Ω, mas $\nabla f(x^*) \neq 0$;

   ii) x^* é minimizador local de f em Ω, $\nabla f(x^*) = 0$ mas $\nabla^2 f(x^*)$ não é semi definida positiva;

   iii) Ω é aberto, $\nabla f(x^*) = 0$ mas x^* não é minimizador local;

   iv) Ω é aberto, $\nabla f(x^*) = 0$, $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$ mas x^* não é minimizador local.