Análise Funcional: Uma introdução

Cleon S. Barroso

Universidade Federal do Ceará

EMALCA DA AMAZÔNIA 2009

Escola de Matemática

da América Latina e do Caribe - 2009

UFAM

Introdução

O que é Análise Funcional? Essa é, sem dúvida, uma boa pergunta e, como tantas outras, o conjunto das respostas é infinito. Informalmente, podemos dizer que trata-se de um tipo de análise matemática sobre objetos de dimensão infinita. Mas, o que é um objeto de dimensão infinita? Também é uma pergunta com possibilidades enumeráveis de respostas. Escolhamos um foco para fixar as idéias. Em Álgebra Linear, estudamos os espaços vetoriais e, em seguida, os espaços de dimensão finita. Nesse âmbito, os "objetos", vetores, são representáveis por uma combinação linear finita. Assim, muito do que se faz em matemática (mensurar, comparar, classificar, caracterizar, provar a existência de algo, etc.) pode ficar mais tratável. Isso é bem razoável pois lidar com "coisas"finitas é lidar com o controlável, em princípio. Entretanto, ao considerar, por exemplo, funções como vetores de um espaço vetorial, a idéia de representação finita perde o sentido. Por exemplo, será que existe um subconjunto finito e linearmente independente do espaço $C[0,1]$ das funções contínuas no intervalo $[0,1]$ em que todas as funções do espaço possam ser representadas por uma combinação linear finita de seus elementos? Suponha que existisse tal conjunto, digamos $\mathcal{B} = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Então, $C[0,1]$ seria um espaço vetorial de dimensão n, ou seja, $\dim\big(C[0,1]\big) = n$. Mas, o conjunto $\mathscr{U} = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ é um conjunto $L.I$ em $C[0,1]$. Com efeito, se

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 t^2 + \cdots + \lambda_n t^n = 0,$$

então da igualdade de polinômios segue-se que $\lambda_0, \ldots, \lambda_n = 0$. Dessa forma, $C[0,1]$ conteria um subespaço de dimenão $n+1$, a saber, o espaço gerado por $\mathscr{U}$. Contradição.

Sob essa perspectiva, pode-se dizer que Análise Funcional é uma análise em espaços de dimensão infinita. De um modo geral, em um modo simples de dizer, trata-se de uma das áreas mais fascinantes da Matemática. Além de sua própria importância teórica, como sendo uma generalização natural da Álgebra Linear Clássica, por exemplo, ela destaca-se por desempenhar um papel crucial nos mais diversos ramos da Matemática como Análise Não-Linear, Teoria do Controle, Otimização, EDP's e sobre tudo na moderna Teoria dos Espaços de Banach.

O objetivo do presente texto, escrito especificamente para a EMALCA da Amazônia 2009 - Escola de Matemática da Americana Latina e do Caribe, é apresentar de forma introdutória o curso de Análise Funcional como uma análise matemática em espaços de dimensão infinita. O texto tem como público-alvo estudantes do final da graduação e início do mestrado. Na escolha dos temas a serem tratados aqui, esboçamos uma tentativa de econtrar um equilíbrio entre o vasto espectro de assuntos que merecem ser abordados, os vários pontos de vistas, clássicos e modernos, e o desafio de cumprir com a missão em um curto espaço de tempo. Para tanto, optamos por uma abordagem que vai na direção de enfatizar as nuances topológicas que surgem ao passar do finito para o infinito.

No Capítulo 1, dedicamos atenção especial aos conceitos básicos da Álgebra Linear como espaços vetoriais, subspaços, bases, e dimensão. No Capítulo 2, fazemos uma introdução aos espaços normados com ênfase aos espaços de Banach. O Capítulo 3, dedica-se a uma revisão dos conceitos básicos de topologia geral focados nos espaços métricos. Os três capítulos subsequentes são os principais capítulos do texto. No Capítulo 4, estudamos o Teorema de Hahn-Banach, uma das principais ferramenta da Análise funcional. Estudamos também varias de suas consequências. No Capítulo 5, introduzimos a noção de topologia fraca em espaços de Banach e fazemos um esboço comparativo entre ela e a topologia da norma (também conhecida como topologia forte). O Capítulo 6, dedica-se ao estudo de algumas das propriedades topológicas dos espaços de Banach sob a ótica da topologia fraca.

Gostaria de externar meus sinceros agradecimentos ao Professor Marcelo Viana pelo convite ao desafio de ministrar esse curso. De um modo geral, agradecer também aos organizadores do evento, em particular ao Professor Cicero Mota pelo constante apoio e motivação e ao Professor Leonardo Mora pela exemplar conduta das atividades. Várias pessoas também foram fundamentais durante a escrita desse trabalho. Entre elas, a nutricionista Adriane Guimarães Barroso, meus dois amados filhos, Marco Antonio M. Barroso e Abner Montenegro Barroso, e os Professores Aldemir Oliveira e Flávia Morgana pelo carinho e apreço demonstrados de forma ímpar durante minha estada no Rio de Janeiro, onde parte desse trabalho foi escrita. Muito obrigado por tudo.

Conteúdo

Capítulo 1

Algebra Linear - Uma abordagem infinito-dimensional

1.1 Espaços Vetoriais

Um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ é um conjunto não-vazio X, cujos elementos são chamados de vetores, munido de duas operações chamadas adição e produto por escalar, respectivamente. A adição, simbolizada por "$+$", associa a cada par (x, y) do conjunto carteziano $X \times X$ um novo elemento em X, indicado por $x + y$, chamado soma de x com y. O produto por escalar, simbolizado por "$\cdot$", associa a cada par (λ, x) do produto carteziano $\mathbb{R} \times X$ um novo elemento em X, indicado por $\lambda \cdot x$, chamado o produto do escalar λ pelo vetor x. Além disso, tais operações gozam das seguintes propriedades:

Adição. Para quaisquer $x, y \in X$ tem-se:

(a_1) (Comutatividade): $x + y = y + x$;

(a_2) (Associatividade): $x + (y + z) = (x + y) + z$;

(a_3) (Elemento Neutro): Existe um elemento $x^* \in X$ tal que $x + x^* = x$, $\forall x \in X$;

(a_4) (Elemento inverso): Para cada $x \in X$, existe $\hat{x} \in X$ tal que $x + \hat{x} = x^*$.

Produto por Escalar. Para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tem-se:

(p_1) (Distributividade): $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ e $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;

(p_2) (Associatividade): $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$;

(p_3) (Elemento Neutro): Para cada $x \in X$, tem-se $1 \cdot x = x$ onde $1 \in \mathbb{R}$;

Doravante, usaremos a expressão "espaço vetorial"tão somente para designar um espaço vetorial sobre o corpo dos reais. Também, por simplicidade notacional, usaremos a notação "λx" em vez de "$\lambda \cdot x$", sempre que $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in X$.

Proposição 1.1.1 *Em um espaço vetorial X valem as seguintes propriedades:*

(a) O elemento neutro da adição é único;

(b) O elemento inverso da adição é único.

Prova. (a) Com efeito, se existe um outro elemento em X, digamos N, tal que $x + N = x$ para todo $x \in X$, então $x^* = x^* + N = N + x^* = N$. (b) De fato, suponha que para cada $x \in X$, exista um outro $x' \in X$ tal que $x + x' = x^*$. Então, $\hat{x} = \hat{x} + x^* = \hat{x} + (x + x') = (\hat{x} + x) + x' = (x + \hat{x}) + x' = x^* + x' = x' + x^* = x'$.

O leitor poderá encontrar na literatura [3] uma boa referência onde as propriedades acima e outras mais são demonstradas.

Definição 1.1.2 *Um subconjunto não-vazio Y de um espaço vetorial X é dito ser um subespaço de X quando munido com as operações de adição e multiplicação do espaço X ele próprio constituir um espaço vetorial.*

É bem conhecido, para que um subconjunto Y de um espaço vetorial X seja um subespaço vetorial é necessário, e suficiente, que a seguinte propriedade seja verificada:

$$x + \lambda y \in Y, \text{ para todo } x, y \in Y \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Deste modo, as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar quando restritas aos conjuntos $Y \times Y$ e $\mathbb{R} \times Y$, respectivamente, possuem em comum como contradomínio o próprio conjunto Y. Na circunstância, dizemos que Y é fechado em relação à essas operações.

1.1.1 Exemplos de Espaços Vetoriais.

(a) Fixado um natural $n \in \mathbb{N}$, defina o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ como o seguinte conjunto carteziano:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon x_i \in \mathbb{R}\}$$

As operações de adição e produto por escalar são definidas do seguinte modo natural:

$$\begin{aligned} x + y \ &: = \ (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \quad e \\ \lambda \cdot x \ &: = \ (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

(b) O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação de números complexos.

(c) Seja X um conjunto não-vazio. O conjunto $\mathcal{F}(X)$ de todas a funções reais $f \colon X \to \mathbb{R}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação de funções.

(d) O conjunto $\mathcal{P}^n[0,1]$ de todos as funções polinômiais de grau $\leq n$ definidas no intervalo $[0,1]$:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0,$$

munido com as operações usuais entre polinômios é um espaço vetorial.

(e) O conjunto $C[0,1]$ das funções contínuas no intervalo $[0,1]$.

O exemplo (a) acima ensina-nos uma das várias formas de como proceder na construção de espaços vetoriais. Com efeito, se X e Y são espaços vetoriais arbitrários, então podemos introduzir uma estrutura de espaço vetorial no conjunto carteziano $X \times Y$ da mesma forma que foi feito com o espaço $\mathbb{R}^n$. Para tanto, basta definir a adição entre dois vetores (e_1, f_1) e (e_2, f_2) arbitrários de $X \times Y$ como sendo o vetor $(e_1 + e_2, f_1 + f_2)$. Analogamente, o produto por escalar é definido por $\lambda \cdot (e, f) \colon = (\lambda e, \lambda f)$.

1.2 Bases Algébricas

Seja X um espaço vetorial.

Definição 1.2.1 *Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma coleção finita de vetores em X. Uma combinação linear desses vetores é um vetor da forma*

$$x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Definição 1.2.2 *(i) Uma coleção finita de vetores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ em X é dita ser linearmente independente quando*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0,$$

implicar que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

(ii) Um conjunto infinito $\mathcal{U}$ contido em X é dito linearmente independente quando nenhum de seus elementos puder ser escrito como combinação linear de um número finito de vetores de $\mathcal{U}$.

Assim, para que $\mathcal{U}$ seja linearmente independente é necessário e suficiente que a seguinte condição se verifique: Dada uma quantidade n de vetores distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em $\mathcal{U}$ e escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tais que:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0,$$

então deve ocorrer que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Doravante, a notação $L.I.$ indicará a frase "linearmente independente".

Definição 1.2.3 *Um conjunto não-vazio $\mathcal{B} \subset X$ é dito ser uma base de Hamel para o espaço X quando $\mathcal{B}$ for um conjunto linearmente independente maximal, ou seja, se u é um vetor em X tal que $\mathcal{B} \cup \{u\}$ é um conjunto L.I., então $u \in \mathcal{B}$. Em outras palavras, $\mathcal{B}$ é uma base de Hamel quando não for subconjunto próprio de nenhum outro conjunto L.I em X.*

Definição 1.2.4 *Seja A um subconjunto de um espaço vetorial X. O espaço gerado por A, denotado por $\langle A \rangle$, é o conjunto de todas as combinações lineares de finitos vetores de A, ou seja,*

$$\langle A \rangle = \Big\{ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j \;\Big|\; m \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, v_j \in A \Big\}.$$

Daqui em diante, a menos que seja dito em contrário, nos referiremos a uma base de Hamel simplesmente como base. Ressaltamos que a partir da noção de base é possível determinar todos os elementos de um espaço vetorial, haja vista que qualquer vetor x em X pode ser expresso como uma combinação linear de uma quantidade finita de vetores de $\mathcal{B}$. Além do que, conforme pode ser verificado facilmente tal expressão é única. Neste caso, de acordo com a Definição 1.2.4, segue-se que $\mathcal{B}$ gera o espaço X, ou que X é gerado pela base $\mathcal{B}$.

Portanto, cabe aqui a seguinte indagação:

Problema. Dado um espaço vetorial X qualquer, sempre existe uma base para X?

A resposta a essa questão, conhecida como o problema de existência de bases, é positiva. A seguir, faremos uma pequena pausa para estudarmos algumas noções básicas que nos conduzirão à compreensão de uma ferramenta que será usada de forma decisiva na solução desse problema.

Relação de Ordem. Uma ordem parcial em um conjunto não-vazio $\mathscr{A}$ é uma relação entre pares de elementos de $\mathscr{A}$, genericamente representada pelo símbolo $\leq$, que caracteriza-se por cumprir a três propriedades, a saber:

(i) $x \leq x$,

(ii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$,

(iii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$,

para quaisquer x, y e z em $\mathscr{A}$.

Indica-se com a notação $(\mathscr{A}, \leq)$ um conjunto $\mathscr{A}$ munido com uma ordem parcial $\leq$. Dizemos neste caso que $\mathscr{A}$ é um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos ainda que $(\mathscr{A}, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado se dados quaisquer $a, b \in \mathscr{A}$ pudermos verificar que ou $a \leq b$, ou $b \leq a$. Agora, seja $\mathcal{M}$ um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado $\mathscr{A}$. Um elemento $a \in \mathscr{A}$ é dito ser uma cota superior para $\mathcal{M}$ quando $x \leq a$ para todo $x \in \mathcal{M}$. No caso em que isso se verifica com $a \in \mathcal{M}$, dizemos que a é um elemento maximal para $\mathcal{M}$ (segundo a relação $\leq$).

O próximo resultado é de fundamental importância para o desenvolvimento da teoria.

Lema 1.2.5 *(Lema de Zorn) Seja $(\mathscr{A}, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Suponha que todo subconjunto não-vazio e totalmente ordenado $\mathcal{M}$ de $\mathscr{A}$ possui uma cota superior em $\mathscr{A}$. Então $\mathscr{A}$ possui um elemento maximal.*

O seguinte resultado nos diz que um conjunto $L.I.$ em um espaço vetorial pode ser completado à uma base para o espaço X.

Teorema 1.2.6 *Seja $\mathcal{U}$ um conjunto linearmente independente em um espaço vetorial X. Então, existe uma base $\mathcal{B}$ em X tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$.*

Prova. Seja $\mathscr{C}$ o conjunto de todas os subconjuntos linearmente independentes C de X tais que $\mathcal{U} \subset C$. Naturalmente $\mathscr{C}$ é não-vazio pois $\mathcal{U} \in \mathscr{C}$. Vamos definir uma ordem parcial em $\mathscr{C}$: Dados $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$, dizemos que $C_1 \leq C_2$ se tivermos $C_1 \subset C_2$. Pelo Lema de Zorn, $\mathscr{C}$ possui um elemento maximal que o indicaremos por $\mathcal{B}$. Portanto, $\mathcal{B}$ é um conjunto linearmente independente maximal, ou seja, uma base para X contendo $\mathcal{U}$.

Como uma simples aplicação deste resultado, obtemos a seguinte caracterização de bases em termos de geração de espaços vetoriais.

Proposição 1.2.7 *Seja $\mathcal{U}$ um subconjunto de um espaço vetorial X. Então, $\mathcal{U}$ é uma base para X se, e somente se, $\mathcal{U}$ é L.I. e gera o espaço X, ou seja, $X = \langle \mathcal{U} \rangle$.*

Prova. Exercício.

O resultado a seguir resolve de uma vez por todas o problema da existência de bases.

Proposição 1.2.8 *Todo espaço vetorial possui um base de Hamel.*

Prova. Seja X um espaço vetorial. Se X for gerado por um único vetor não-nulo $u \in X$, então o conjunto $\mathcal{B} = \{u\}$ é uma base para E. Assim, podemos supor que existem ao menos dois vetores não-nulos $u, v \in E$ que são $L.I.$. Considere o conjunto $\mathcal{U} = \{u, v\}$. Pelo Teorema 1.2.6, X possui uma base $\mathcal{B}$ que contém $\mathcal{U}$. Isso conclui a prova do resultado.

Definição 1.2.9 *Um espaço vetorial X é dito ser finito-dimensional se ele possui uma base finita. Do contrário, ele é dito ser infinito-dimensional.*

Se X possui uma base finita, digamos com n vetores, então dizemos que a dimensão de X é n e escrevemos $\dim(X) = n$. Se X é infinito-dimensional, então simbolizamos isso por $\dim(X) = \infty$. Antes de prosseguirmos, lembremos que dois conjuntos não-vazios são ditos terem a mesma cardinalidade quando existe uma bijeção entre eles. O próximo resultado, conhecido como o teorema da dimensão, estabelece uma caracterização importante sobre bases em termos de cardinalidade.

Teorema 1.2.10 *(Teorema da Dimensão) Duas bases em um espaço vetorial possuem a mesma cardinalidade.*

Prova. Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de um espaço vetorial E. Vamos mostrar que existe uma função injetiva $\psi\colon \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$.

Etapa 1. Considere o conjunto $\mathscr{A}$ formado por todas as funções injetivas φ cujo domínio D_φ é um subconjunto de $\mathcal{B}_1$, a imagem R_φ é um subconjunto de $\mathcal{B}_2$, e que a união $R_\varphi \cup \big(\mathcal{B}_1 \setminus D_\varphi\big)$ seja um conjunto $L.I.$. Consideremos em $\mathscr{A}$ a seguinte ordem parcial: $\varphi_1 \leq \varphi_2$ desde que $D_{\varphi_1} \subset D_{\varphi_2}$ e que φ_2 restrita a D_{φ_1} seja idêntica a φ_1. Seja $\mathcal{M}$ um subconjunto não-vazio e totalmente ordenado de $\mathscr{A}$. Então, definindo $D_0 = \cup_{\varphi\in\mathcal{M}} D_\varphi$ e $\varphi_0\colon D_0 \to \mathcal{B}_2$ pondo $\varphi_0(x) = \varphi(x)$ se $x \in D_\varphi$, concluimos a partir da hipótese que $\mathcal{M}$ é totalmente ordenado que φ_0 pertence a $\mathscr{A}$ e, de fato, é uma cota superior para $\mathcal{M}$. Sendo assim, pelo Lema de Zorn o conjunto $\mathscr{A}$ possui um elemento maximal que o representaremos por $\psi : D_\psi \to \mathcal{B}_2$.

Etapa 2. Afirmamos agora que $D_\psi = \mathcal{B}_1$. Suponhamos por contradição que isso não ocorre, ou seja, que D_ψ é um subconjunto próprio de $\mathcal{B}_1$. Então, segue-se daí que R_ψ também é um subconjunto próprio de $\mathcal{B}_2$ pois do contrário teríamos que o conjunto $R_\psi \cup \big(\mathcal{B}_1 \setminus D_\psi\big)$ seria linearmente independente, o que contrariria a definição de base para $\mathcal{B}_2$.

Seja agora $y \in \mathcal{B}_2 \setminus R_\psi$ arbitrário. Então, ou y é linearmente independente de $R_\psi \cup \big(\mathcal{B}_1 \setminus D_\psi\big)$ ou não. No primeiro caso, escolhemos um vetor arbitrário $x \in \mathcal{B}_1 \setminus D_\psi$ e definimos a estensão $\tilde{\psi}\colon D_\psi \cup \{x\} \to \mathcal{B}_2$ de ψ pondo $\tilde{\psi}(x) = y$. Isso implica que $\psi \leq \tilde{\psi}$, o que contradiz a maximalidade de ψ. No segundo caso, podemos expressar y de modo único como

$$y = \sum_{v\in R_\psi} \lambda_v v + \sum_{u\notin D_\psi} \mu_u u,$$

em que ao menos um μ_{u_0} é diferente de zero pois y é um elemento da base $\mathcal{B}_2$. Considere agora a extensão $\tilde{\psi}\colon D_\psi \cup \{u_0\} \to \mathcal{B}_2$ em que $\tilde{\psi}(u_0) = y$. Claramente, $\tilde{\psi}$ é injetiva e $D_\psi \cup \{u_0\} \subset \mathcal{B}_1$. Resta mostrarmos que $R_{\tilde{\psi}} \cup \big(\mathcal{B}_1 \setminus D_{\tilde{\psi}}\big)$ é um conjunto linearmente independente. Isso, de fato, é uma tarefa simples e a deixaremos como exercício para o leitor.

Etapa 3. Portanto, vale a afirmação e ψ é a função injetiva procurada. De modo inteiramente análogo, mostra-se que existe uma função injetiva $\Theta\colon \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1$. Pelo Teorema de Schroeder-Bernstein, existe uma bijeção entre $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ e, portanto, possuem a mesma cardinalidade. Isso completa a prova do teorema. $\square$

O teorema da dimensão surgiu em 1934 num artigo devido a Löwig. A referência precisa é a seguinte: H. Löwig, "Über die Dimension linearer Raume,"Studia Math., 5, 18-23 (1934).

1.3 Funcionais Lineares - Dual Algébrico

Um funcional linear em um espaço vetorial X é uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$,

(ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$,

para quaisquer vetores x, y em X e escalar λ em $\mathbb{R}$.

Definição 1.3.1 *O dual algébrico de um espaço vetorial X é o conjunto*

$$X^\sharp = \left\{ f\colon X \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ é um funcional linear } \right\}.$$

Um exercício simples é mostrar que $X^\sharp$ é um espaço vetorial.

Definição 1.3.2 *Se $f \in X^\sharp$, então o núcleo do funcional f é o espaço vetorial $Ker(f)$ definido por*

$$Ker(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}.$$

Proposição 1.3.3 *Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é linear se, e somente se, f é uma função afim, ou seja, existe um número real a tal que $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular,*

$$\mathbb{R}^\sharp = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ é afim } \right\}.$$

Uma pergunta natural é a seguinte: O dual algébrico de qualquer espaço vetorial é não-trivial? A proposição seguinte fornece uma resposta positiva a essa questão.

Proposição 1.3.4 *Seja X um espaço vetorial não-trivial. Então, existe um funcional não nulo em X.*

Prova. Seja $\mathcal{B}$ um base para X. Fixe $e \in \mathcal{B}$ e defina um funcional $f\colon X \to \mathbb{R}$ pondo $f(e) = 1$, $f(u) = 0$ para todo $u \in \mathcal{B} \setminus \{e\}$ e se $x \in X$ é tal que $x = \sum_{i=1} \lambda_i e_i$ com $e_i \in \mathcal{B}$, defina $f(x) = \sum_{i=1} \lambda_i f(e_i)$. Segue-se que $f \in X^\sharp$ e $f \not\equiv 0$. $\square$

Uma outra propriedade interessante é a seguinte.

Proposição 1.3.5 *Sejam $f, f_1, \dots, f_n$ funcionais lineares em um espaço vetorial X. Então, f é uma combinação linear de $f_1, \dots, f_n$ se, e somente se, $\bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(f_i) \subset \mathrm{Ker}(f)$.*

Prova. Podemos supor que $f_1, \dots, f_n$ são $L.I.$. Suponha que $f \in \langle f_1, \dots, f_n \rangle$. Então, existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que

$$f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n.$$

Segue-se daí que $\bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(f_i) \subset \mathrm{Ker}(f)$. A recíproca será demonstrada por indução em n. Consideremos o caso $n = 1$. Fixe $x \notin \mathrm{Ker}(f_1)$, então $f_1(x) \neq 0$. Então, para todo $y \in X$ tem-se que $y - \frac{f_1(y)}{f_1(x)} x \in \mathrm{Ker}(f_1)$. Usando a hipótese que $\mathrm{Ker}(f_1) \subset \mathrm{Ker}(f)$, segue-se que $f(y) = \lambda f_1(y)$, com $\lambda = \left(\frac{f(x)}{f_1(x)}\right)$. Suponha por indução que o resultado vale para $n-1$, e assuma que

$$\bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(f_i) \subset \mathrm{Ker}(f).$$

Se $x \in \mathrm{Ker}(f_n)$, e suponha que $f_1(x) = \cdots = f_{n-1}(x) = 0$. Então, $x \in \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(f_i)$ e portanto, $f(x) = 0$. Considerando as restrições $f\big|_{\mathrm{Ker}(f_n)}, f_1\big|_{\mathrm{Ker}(f_n)}, \dots, f_{n-1}\big|_{\mathrm{Ker}(f_n)}$, vemos que

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ker}\big(f_i\big|_{\mathrm{Ker}(f_n)}\big) \subset \mathrm{Ker}\big(f\big|_{\mathrm{Ker}(f_n)}\big).$$

Pela hipótese de indução, existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ tais que

$$f(y) = \alpha_1 f_1(y) + \cdots + \alpha_{n-1} f_{n-1}(y),$$

para todo $y \in \mathrm{Ker}(f_n)$. Por consequência, o núcleo de $f - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i$ contém o núcleo de f_n. Usando novamente a parte já demonstrada para $n = 1$, segue-se o resultado. $\square$

1.4 Aplicações Lineares

A noção de funcionais lineares se estende naturalmente à noção de aplicações lineares.

Definição 1.4.1 *Sejam X, Y espaços de Banach. Uma aplicação $T\colon X \to Y$ é dita ser linear quando T cumpre as seguintes condições:*

(i) $T(x+y) = T(x) + T(y)$, *e*

(ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$,

para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Um exemplo básico de aplicações lineares é dado pela aplicação identidade: $T\colon X \to X$ é tal que $T(x) = x$ para todo $x \in X$. De um modo inteiramente análogo, se definem o núcleo $N(T)$ e a imagem $\mathrm{Im}(T)$ de uma aplicação linear T como sendo os conjuntos:

$$N(T) = \big\{x \in X \,\big|\, T(x) = 0\,\big\} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(T) = \big\{T(x) \,\big|\, x \in X\big\}.$$

Mostra-se também tais conjuntos são espaços vetoriais.

1.5 Exercícios

1. Seja X um espaço vetorial. Mostre que:

(i) Se $\mathcal{B} = \{e_\alpha\colon \alpha\}$ é uma base de Hamel para X e $x \in X \setminus \mathcal{B}$, então existem únicos escalares $h_\alpha(x)$ tais que
$$x = \sum_{\alpha \in \mathrm{supp}(x)} h_\alpha(x) e_\alpha,$$
onde $\mathrm{supp}(x)$ é suporte de x, ou seja, o conjunto do índices α tais que $h_\alpha(x) \neq 0$. (Use o fato que $\mathcal{B}$ é maximal, e lembre da definição de base de Hamel que $\mathrm{supp}(x)$ é finito.)

(ii) No item (i) acima, mostre que para cada α, a função $x \mapsto h_\alpha(x)$ define um funcional linear em X. (Use um argumento de unicidade.)

(iii) Se X possui um conjunto L.I. infinito, então $\dim(X) = \infty$.

(iv) Se $\mathcal{U}$ é um conjunto L.I. em X, então $\mathcal{U}$ é uma base para o espaço $\langle \mathcal{U} \rangle$.

2. Mostre que os conjuntos abaixo são espaços vetoriais:

(i) $\ell_p = \big\{(\alpha_n) : \ \alpha_n \in \mathbb{R}, \ \text{e} \ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p < \infty \big\}$, se $1 \leq p < \infty$.

(ii) $c_0 = \big\{(\alpha_n) \colon \ \alpha_n \in \mathbb{R}, \ \text{e} \ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \big\}$ é um espaço vetorial.

(iii) $\ell_\infty = \big\{(\alpha_n) \,\big|\, \text{Existe uma constante } C > 0 \text{ tal que } |\alpha_n| \leq C, \forall n \in \mathbb{N} \big\}$.

(iv) $C[0,1] = \big\{u \colon [0,1] \to \mathbb{R} \,\big|\, u \text{ é uma função contínua } \big\}$.

(v) $L_1[0,1] = \big\{[u] \,\big|\, u \colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ é uma função mensurável à Lebesgue e } \int_0^1 |u(s)| ds < \infty \big\}$.

(Lembrando que $[u]$ representa a classe de equivalência de todas a funções u que são iguais a menos de um conjunto de medida nula).

3. Mostre que:

(i) Se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots\}$, onde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, em que 1 aparece na i-ésima posição, então $\mathcal{B}$ é um conjunto L.I. nos espaços $c_0, \ell_1, \ell_p, \ell_\infty$.

(ii) Se $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3, \dots\}$, então $\mathcal{B}$ é um conjunto $L.I.$ em $C[0,1]$.

(iii) Se $\mathcal{B} = \{u_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, onde $u_n(t) = \chi_{[0,1-1/n]}(t)$ com $t \in [0,1]$, então $\mathcal{B}$ é um conjunto L.I. em $L_1[0,1]$. Conclua que $L_1[0,1]$ é um espaço infinito-dimensional.

(Lembrando que se A é um conjunto não-vazio qualquer, então χ_A é a função característica de A, ou seja, $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$).

4. Considere o espaço $L_\infty[0,1]$ das classes $[u]$ de funções $u \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que existem uma constante uma constante $C > 0$ e um conjunto de medida nula $N \subset [0,1]$ tal que

$$|u(t)| \leq C, \ \forall\, t \in [0,1] \setminus N.$$

Mostre que:

(i) $L_\infty[0,1]$ é um espaço vetorial.

(ii) $C[0,1]$ é um subespaço de $L_\infty[0,1]$.

(iii) Conclua que $L_\infty[0,1]$ é um espaço infinito-dimensional.

5. Mostre que:

(i) $\ell_p \subset \ell_q$ se $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

(ii) $\ell_1 \subset \ell_p \subset c_0 \subset \ell_\infty$, em que $1 < p < \infty$.

6. Seja $c_{00} = \big\{(\alpha_n)\colon\ \alpha_n \in \mathbb{R},\ \text{e a menos de um número finito, todos os termos } \alpha_n = 0\big\}$. Mostre que:

(i) c_{00} é um espaço vetorial.

(ii) Se $\mathcal{B} = \{e_i\colon\ i \in \mathbb{N}\}$ é como no Exercício 2, então $\mathcal{B}$ é uma base para o espaço c_{00}.

7. Sejam X, Y espaços vetoriais. Mostre que:

(i) Se $f \in X^\sharp$, então $\mathrm{Ker}(f)$ é um espaço vetorial.

(ii) O conjunto $L(X,Y)$ das aplicações lineares de X em Y também é um espaço vetorial.

(iii) Se $T \in L(X,Y)$, então $N(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ são espaços vetoriais.

8. Sejam X, Y espaços vetoriais não-triviais. Mostre que:

(i) Sempre existe uma aplicação linear $T\colon X \to Y$ não-identicamente nula. Conclua neste caso que o espaço $L(X,Y)$ é não-trivial.

(ii) Se X é infinito-dimensional, então $L(X,Y)$ é infinito-dimensional.

9. Seja X um espaço vetorial. Mostre que:

(a) Todo funcional linear não-nulo em X é sobrejetivo;

(b) Um funcional linear em X é injetivo se, e somente se, $\dim X = 1$.

10. Sejam X um espaço finito-dimensional e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base para X. Mostre que dados números $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, existe um funcional linear f em X tal que $f(v_i) = a_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

11. Seja X um espaço vetorial. Então, X é finito-dimensional se, e somente se, X^* também é finito-dimensional. Em particular, $\dim X = \dim X^*$.

12. Sejam X e Y espaços vetoriais e $T\colon X \to Y$ um aplicação linear. Suponha que X é finito-dimensional. Então $Im(T)$ é finito-dimensional e vale $\dim X = \dim N(T) + \dim Im(T)$.

Prova. Sejam $m = \dim X$ e $n = \dim N(T)$. Devemos mostrar então que a imagem $Im(T)$ tem dimensão finita e que $\dim Im(T) = m - n$. Para mostrar que $Im(T)$ é finito-dimensional é suficiente mostrar que esse espaço admite uma quantidade finita de geradores. Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base para $N(T)$. Pelo Teorema 1.2.6, existem vetores $u_1, \ldots, u_{m-n}$ tais que

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_{m-n}\}$$

é uma base para X. Afimarmos que $\mathcal{U} = \{T(u_1), \ldots, T(u_{m-n})\}$ forma uma base para a imagem $Im(T)$. Com efeito, seja $y \in Im(T)$ qualquer. Então, existe $x \in X$ tal que $T(x) = y$. Como $\mathcal{B}$ é uma base para X, podemos encontrar escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{m-n}$ tais que

$$x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} u_1 + \cdots + \alpha_{m-n} u_{m-n}.$$

Então, $y = T(x) = \alpha_{n+1} T(u_1) + \cdots + \alpha_{m-n} T(u_{m-n})$ donde segue-se que $Im(T)$ é gerado por $\mathcal{U}$. Em particular, a imagem de T é um espaço finito-dimensional. Mostremos agora que $\mathcal{U}$ é um conjunto $L.I.$. Suponhamos que existam escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-n}$ tais que $\lambda_1 T(u_1) + \cdots + \lambda_{m-n} T(u_{m-n}) = \mathit{0}$, então, por linearidade, segue-se que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{m-n} u_{m-n}$ pertence ao núcleo de T. Logo, podemos encontrar escalares $\beta_1, \ldots, \beta_n$ que verificam a igualdade

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{m-n} u_{m-n} = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n,$$

a qual é possível se, e somente se, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{m-n} = 0$. Isso prova a afirmação. Portanto, $\dim Im(T) = m - n$. Isso conclui o exercício.

13. Mostre que se X é infinito-dimensional e $f_1, \ldots, f_n$ são funcionais lineares em X, então

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_i) \neq \{0\}.$$

(Considere a aplicação linear $T\colon X \to \mathbb{R}^n$ definida por $T(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Em seguida, use o Teorema do Núcleo e da Imagem (Exercício 12)).

Capítulo 2

Espaços Normados

Uma norma em um espaço vetorial X é uma função $N\colon X \to [0,\infty)$ tal que as seguintes propriedades são verificadas:

(i) Desigualdade Triangular: $N(x+y) \le N(x) + N(y)$,

(ii) Homegeneidade: $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,

(iii) Nulidade: $N(x) = 0$ implica $x = 0$,

para quaisquer vetores x, y em X e escalar λ em $\mathbb{R}$.

Visando uma simplicidade notacional, ao invés de $N(x)$ escreveremos $\|x\|$. Também, quando necessário for, faremos uso da notação $\|x\|_X$ para indicar que trata-se da norma do espaço X.

Definição. Se X é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ uma norma em X, então ao par $(X, \|\cdot\|)$ dá-se o nome de espaço normado.

A seguir conheceremos alguns exemplos de espaços normados.

2.1 Exemplos de Espaços Normados.

(i) (Espaços das seqüência convergentes para zero): Considere a função $\|\cdot\|\colon c_0 \to [0,\infty)$ definida por
$$\|(\alpha_n)\|_{c_0} = \max_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|.$$

Então, $(c_0, \|\cdot\|_{c_0})$ é um espaço normado.

(ii) (O espaço das sequências somáveis): Considere a função $\|\cdot\|_{\ell_1} : \ell_1 \to [0, \infty)$ dada por:

$$\|(\alpha_n)\|_{\ell_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|.$$

Então, $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$ é um espaço normado.

Observe que vale a inclusão $\ell_1 \subset c_0$ e que $\ell_1 \neq c_0$, pois $(\frac{1}{n})$ pertence a c_0 mas não pertence a ℓ_1. Menos trivial que os exemplos acimas são o que virão a seguir. Mas, antes, façamos uma pausa para estabelecermos alguamas desigualdades importantes.

2.1.1 Desigualdades Clássicas

Proposição 2.1.1 *Sejam números reais $a, b \geq 0$ e $p \geq 1$. Então,*

$$(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p).$$

Prova. Basta considerar o caso em que $a \leq b$. O outro é análogo. Assim,

$$(a+b)^p \leq (2b)^p = 2^p b^p \leq 2^p(a^p + b^p).$$

Proposição 2.1.2 *(Desigualdade de Young) Sejam números reais $a, b \geq 0$ e $p, q > 1$. Suponha que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Prova. Considere as função $f(x) = x^{p-1}$ com $0 \leq x \leq a$ e $g(y) = \sqrt[p-1]{y}$ com $0 \leq y \leq b$. Observe que há um intervalo I para o qual g é a inversa de f. Suponhamos sem perda de generalidade que $f(a) \leq b$. Considerando o número ab como a área do retângulo de base a, no eixo das abscissas, e altura b no eixo das ordenadas e, além disso, representando por $A_1 = \int_0^a f(x)dx$ e por $A_2 = \int_0^b g(y)dy$ vê-se facilmente que

$$ab \leq A_1 + A_2.$$

Após os devidos cálculos de A_1 e A_2 chega-se a desigualdade procurada.

Proposição 2.1.3 *(Desigualdade de Hölder) Dados números reais* $a_1, \ldots, a_N$*,* $b_1, \ldots, b_N$*, e números* $p, q > 1$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, tem-se:*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n \leq \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Prova. Basta aplicar a desigualdade de Young aos números

$$A_k = \frac{a_k}{\Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\Big)^{1/p}}, \qquad B_k = \frac{b_k}{\Big(\sum_{n=1} |b_n|^q\Big)^{1/q}}.$$

Proposição 2.1.4 *(Desigualdade de Minkowski) Dados números* $a_1, \ldots, a_N$*,* $b_1, \ldots, b_N$*, e* $p \geq 1$*, tem-se*

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^p\Big)^{1/p}.$$

Prova.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^p &\leq \sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^{p-1} |a_n + b_n| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^{p-1} |a_n| + \sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^{p-1} |b_n| \\
&\leq \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^p\Big)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^p\Big)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \Big(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^p\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n + b_n|^p\Big)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \Big[\Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^p\Big)^{1/p}\Big].
\end{aligned}$$

□

Após a pausa, voltemos para os exemplos de espaços normados.

(iii) (O espaço das seqüências p-somáveis). Para $1 < p < \infty$, considere a função $\|\cdot\|_{\ell_p} : \ell_p \to [0, \infty)$ dada por

$$\|(\alpha_n)\|_{\ell_p} = \Big\{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p\Big\}^{1/p}.$$

Então, $(\ell_p, \|\cdot\|_{\ell_p})$ é um espaço normado.

(iv) (O espaço das seqüências limitadas.) Considere a função $\|\cdot\|_{\ell_\infty}\colon \ell_\infty \to [0,\infty)$ definida por

$$\|(\alpha_n)\|_{\ell_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|.$$

Então, $(\ell_\infty, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ é um espaço normado.

(v) (O espaço das classes de funções p-integráveis). Para $1 \le p < \infty$, defina

$$L_p[0,1] = \Big\{[u] \,\Big|\, u\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ é uma função mensurável à Lebesgue e } \int_0^1 |u(t)|^p dt < \infty\Big\}.$$

Considere a função $\|\cdot\|_{L_p}\colon L_p[0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\|u\|_{L_p} = \Big\{\int_0^1 |u(t)|^p dt\Big\}^{1/p}.$$

(vi) (O espaço das classes de funções limitadas) Considere a função $\|\cdot\|_{L_\infty}\colon L_\infty[0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\|u\|_{L_\infty} = \inf\big\{C > 0 \,\big|\, \text{Existe } N \subset [0,1], |N| = 0, \text{ tal que } |u(t)| \le C, \forall\, t \in [0,1] \setminus N\big\}.$$

Então, $(L_\infty[0,1], \|\cdot\|_{L_\infty})$ é um espaço normado.

2.2 Convergência em Espaços Normados

Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Tal como ocorre em $\mathbb{R}^n$, ou mais geralmente nos espaços métricos, podemos resgatar em X a noção de convergência de sequências.

Definição 2.2.1 *Dizemos que uma sequência $\{x_n\}$ em X converge para um vetor $x \in X$ se para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um inteiro $n_\epsilon \ge 1$ tal que $\|x_n - x\| < \epsilon$, para todo índice $n \ge n_\epsilon$.*

Usaremos a notação $x_n \to x$ para indicar a convergência em norma da sequência $\{x_n\}$ para o vetor x.

2.3 Dual de um espaço normado

Um funcional linear $f\colon X \to \mathbb{R}$ em um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é dito ser limitado se:

$$\|f\| \colon = \sup_{x\in B_X, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} < \infty.$$

O espaço dual de um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é o subconjunto X^* do espaço $X^\sharp$ definido por:

$$X^* = \big\{ f \colon X \to \mathbb{R} \,\big|\, f \text{ é linear e limitada } \big\}.$$

É fácil verificar que X^* é um espaço vetorial (Ex.). O resultado a seguir mostra que nem todo funcioanal linear em um espaço normado é limitado. Portanto, X^* é um subespaço próprio de $X^\sharp$.

Proposição 2.3.1 *Seja X um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Então, existe um funcional linear não-limitado em X.*

Prova. Seja $\mathcal{B} = \{e_\alpha\}$ uma base de Hamel para X, e $\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ uma seqüência de vetores em $\mathcal{B}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\|e_\alpha\| = 1$ para todo α. Defina um funcional linear $f \colon X \to \mathbb{R}$ pondo $f(e_\alpha) = 0$ se $e_\alpha \notin \{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, e $f(e_n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere agora a seqüência $\{x_n\}$ em X definida por $x_n = \frac{1}{n} e_n$. Então, $\|x_n\| = \frac{1}{n}$ e

$$\frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} = n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que mostra que $\|f\| = \infty$. $\square$

A proposição a seguir fornece uma caracterização importante sobre funcionais lineares limitados.

Proposição 2.3.2 *Um funcional linear em um espaço normado é limitado se, e somente se, ele é contínuo se, e somente se, ele é contínuo no vetor nulo.*

Prova. Exercício.

Observação 2.3.1 *A demonstração da Proposição 2.3.1 mostra ainda que $\|x_n\| \to 0$ mas*

$$f(x_n) = 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, f é um funcional linear não-contínuo.

Proposição 2.3.3 *Se f é um funcional linear limitado em um espaço normado X, então*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \colon x \in S_X\},$$

em que $S_X = \{x \in X \colon \|x\| = 1\}$.

Prova. Como $S_X \subset B_X$, segue-se da definição de supremo que

$$\|f\| \geq \sup\{|f(x)|\colon x \in S_X\}.$$

Seja $x \in B_X$ tal que $x \neq 0$, então $u = \dfrac{x}{\|x\|} \in S_X$ e portanto,

$$\sup\{|f(z)|\colon z \in S_X\} \geq |f(u)| = \frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

donde segue-se da definição de supremo que $\sup\{|f(z)|\colon z \in S_X\} \geq \|f\|$. Isso conclui a prova. $\square$

2.4 Aplicações Lineares em Espaços Normados

Sejam X, Y espaços de normados.

Definição 2.4.1 *Uma aplicação linear $T\colon X \to Y$ é dita ser contínua ser limitada se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X,$$

para todo $x \in X$.

O conjunto das apicações lineares limitadas de X em Y é denotado por: $\mathscr{L}(X, Y)$. Mostra-se facilmente que $\mathscr{L}(X, Y)$ é um espaço vetorial. Além disso, é possível mostrar que se $T \in \mathscr{L}(X, Y)$, então:

(i) $\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}\right\} < \infty$.

(ii) A função que associa a cada $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ o número $\|T\|$ define uma norma no espaço $\mathscr{L}(X, Y)$.

É fácil verificar que $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ se, e somente se, T é contínua em relação a topologia gerada pela norma, ou seja, $x_n \to x$ em X se, e só se, $T(x_n) \to T(x)$ em Y.

2.4.1 Dual de Espaços de Sequências

Uma aplicação linear $T\colon X \to Y$ é dita ser uma isometria se ela satisfaz $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$, para qualquer $x \in X$. No caso em que T é uma isometria sobrejetiva, dizemos que X e Y são isométricos e usamos a notação $X \equiv Y$ para representar tal acontecimento.

Teorema 2.4.2 *c_0^* é isométrico a ℓ_1.*

Prova. Defina uma aplicação $T\colon c_0^* \to \ell_1$ pondo $T(f) = (f(e_i))$, onde $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^{\infty}$. Claramente, T é linear. Afirmamos que T é limitada (e portanto, contínua). Com efeito, se $f \in c_0^*$ defina uma sequência $\{x^n\}$ em c_0 tal que

$$x^n = (\operatorname{sign}(a_1), \ldots, \operatorname{sign}(a_n), 0, 0, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(a_i) e_i,$$

onde $a_i = f(e_i)$ e $\operatorname{sign}(\lambda) = 1$ se $\lambda \geq 0$ e zero caso contrário. Note que $f(x^n) = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ e que $\|x^n\|_{c_0} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| = f(x^n) \leq \|f\|_{c_0^*} \|x^n\| = \|f\|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso implica que $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \leq \|f\|$. Portanto, $\|T(f)\|_{\ell_1} \leq \|f\|_{c_0^*}$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, pela Proposição 2.3.3 existe $x_\epsilon \in c_0$ com $\|x_\epsilon\|_{c_0} = 1$ tal que

$$\|f\|_{c_0^*} - \epsilon \leq |f(x_\epsilon)|$$

Portanto, escrevendo agora $u_\epsilon^n = \sum_{i=1}^{n} x_\epsilon^i e_i$, obtemos que

$$\|x_\epsilon - u_\epsilon^n\|_{c_0} = \sup_{i \geq n+1} |x_\epsilon^i| \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

donde conclui-se que $|f(x_\epsilon) - f(u_\epsilon^n)| \to 0$. Assim

$$\begin{aligned}
\|f\|_{c_0^*} - \epsilon &\leq |f(x_\epsilon) - f(u_\epsilon^n)| + |f(u_\epsilon^n)| \\
&\leq |f(x_\epsilon) - f(u_\epsilon^n)| + \sum_{i=1}^{n} |x_\epsilon^i||a_i| \\
&\leq |f(x_\epsilon) - f(u_\epsilon^n)| + \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \\
&= |f(x_\epsilon) - f(u_\epsilon^n)| + \|T(f)\|_{\ell_1}.
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ e depois $\epsilon \to 0$, obtemos $\|f\|_{c_0^*} \leq \|T(f)\|_{\ell_1}$. Resta mostrarmos que T é sobrejetiva. Seja $x = (\alpha_n) \in \ell_1$ qualquer. Defina $f\colon c_0 \to \mathbb{R}$ pondo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \alpha_n$. É fácil verificar que f está bem definida e que $f \in c_0^*$. Agora, note que $f(e_i) = \alpha_i$. Portanto, $T(f) = (f(e_i)) = (\alpha_i) = x$. Isso conclui a prova. □

Observação. Por causa do Teorema 2.4.2, costumamos dizer que o dual de c_0 é o ℓ_1. Em geral, se X, Y são espaços normados e X^* é isométrico a Y, dizemos que o dual de X é "igual" a Y.

Os seguintes resultados são clássicos.

Teorema 2.4.3 *Valem as seguintes isometrias:*

(i) $\ell_1^* \equiv \ell_\infty$,

(ii) Se $p, q > 1$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *então* $\ell_p^* \equiv \ell_q$,

2.5 Espaços de Banach

Um sequência $\{x_n\}$ de vetores em um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é dita ser de Cauchy se a seguinte sentença for verificada:

Para todo $\epsilon > 0$ dado, existe um $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_m - x_n\| < \epsilon$, $\forall m, n \geq n_\epsilon$.

Mostra-se facilmente que se $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em X, então ela é limitada, ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|x_n\| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.5.1 *Um espaço normado* $(X, \|\cdot\|)$ *é dito ser um espaço de Banach se quando toda sequência de Cauchy for convergente.*

A Teoria dos Espaços de Banach desempenha um papel fundamental em Análise Funcional. A seguir veremos alguns exemplos desses espaços.

2.5.1 Exemplos de Espaços de Banach

Proposição 2.5.2 *Considere o espaço* $C[0,1]$ *das funções contínuas no intervalo* $[0,1]$ *munido com a norma*

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |u(t)|.$$

Então, $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ *é um espaço de Banach.*

Prova. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $C[0,1]$. Então, para todo $t \in [0,1]$ a sequência $\{u_n(t)\}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Seja $u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t)$. Afirmamos que u é contínua e que $\|u_n - u\|_\infty \to 0$ quando $n \to \infty$. Dado ϵ, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|u_m(t) - u_n(t)| < \epsilon$ para todo $m, n \geq n_\epsilon$, e para todo $t \in [0,1]$. Fixe $m \geq n \geq n_\epsilon$ e faça $n \to \infty$. Segue-se que $\|u_m(t) - u(t)| \leq \epsilon$ para todo $m \geq n_\epsilon$ e todo $t \in [0,1]$. Isso mostra que $\|u_m - u\| \leq \epsilon$ para todo $m \geq n_\epsilon$. Portanto, u_m converge para u uniformemente. Então, $u \in C[0,1]$ pois é o limite uniforme de funções contínuas. A prova está completa. □

Proposição 2.5.3 *ℓ_∞ munido com a norma do supremo é um espaço de Banach.*

Prova. Com efeito, considere em ℓ_∞ a norma $\|(\alpha_n)\|_{\ell_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|$. Seja $\{x^n\}$ uma sequência de Cauchy em ℓ_∞. Então, para cada $i \in \mathbb{N}$ a sequência $\{x_i^n \colon n \in \mathbb{N}\}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Seja $y_i = \lim_{n\to\infty} x_i^n$. Um método muito similar usado na proposição anterior, mostra que $(y_1, y_2, \dots) \in \ell_\infty$ e que $x^n \to y$ em ℓ_∞. □

2.5.2 Espaços com Produto Interno

Seja X um espaço vetorial. Um produto interno em X é uma função $(\cdot,\cdot)$ em $X \times X$ com valores reais satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) Para cada $x \in X$, a função $y \mapsto (x, y)$ é linear.

(ii) $(x, y) = (y, x)$, para todo $x, y \in X$.

(iii) $(x, y) \geq 0$, para todo $x \in X$.

(iv) $(x, x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Proposição 2.5.4 *Valem as seguinte propriedades:*

(a) (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) $|(x, y)| \leq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(x,y)}$

(b) (Norma Induzida) A função $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ *define uma norma em* X.

Definição 2.5.5 *Um espaço de Banach* $(X, \|\cdot\|)$ *é dito ser um espaço de Hilbert se* $\|\cdot\|$ *provém de um produto interno.*

Example 2.5.1 *Exêmplos de Espaços de Hilbert:*

(i) $\ell_2 = \left\{(\alpha_n)\colon\ \alpha_n \in \mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty\right\}$.

(ii) $L_2[0,1] = \left\{u\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon\ \int_0^1 u^2(t)dt < \infty\right\}$.

2.6 Exercícios

1. Mostre que os exemplos listados na Seção 2.1 são de fato espaços normados.

2. Construa um funcional $\varphi \in C[0,1]^*$ tal que $\|\varphi\|_{C[0,1]^*} = 1$.

3. Construa uma aplição linear limitada $T\colon \ell_1 \to L_1[0,1]$. (Use o Exercício 3, Cap. 1).

4. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Então, o dual X^* é um espaço de Banach.(Pesquise.)

5. Todo subespaço fechado de um espaço de Banach é um espaço de Banach.

6. Para $p \in [1,\infty)$, os espaços ℓ_p são espaços de Banach.

7. Mostre que a aplicação $T\colon \ell_1^* \to \ell_\infty$ definida por $T(f) = (f(e_1), f(e_2), \dots)$ é uma isometria. Conclua que $\ell_1^* \equiv \ell_\infty$.

8. Mostre que se $1 < p, q < \infty$ são conjugados (ou seja, $1/p + 1/q = 1$), então a aplicação $T\colon \ell_p^* \to \ell_q$ definida por $T(f) = (f(e_1), f(e_2), \dots)$ é uma isometria.

9. Demonstre a Proposição 2.5.4.

10. Mostre que todo espaço vetorial admite uma norma. (Use Exercício 1 do Capítulo 1.)

11. Seja $\mathcal{B}$ uma base de Hamel de um espaço vetorial X. Mostre que existe uma aplição linear bijetiva entre $X^\sharp$ e $\mathbb{R}^{\mathcal{B}}$.

Capítulo 3

Noções de Topologia Geral

O objetivo deste capítulo é fazer uma ligeira revisão sobre topologia geral. O leitor que detém os conhecimentos fundamentais do tema poderá passar para o próximo capítulo.

3.1 Espaços Topológicos

Definição 3.1.1 *Seja X um conjunto não-vazio. Uma topologia em X é uma coleção τ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*

(i) $\emptyset$, X *pertencem a* τ,

(ii) A união dos elementos de uma subcoleção de τ *pertence a* τ,

(iii) A interseção dos elementos de uma subcoleção finita de τ *pertence a* τ.

No caso, o par (X, τ) é chamado um espaço topológico e os elementos de τ são chamados abertos de X, ou abertos em X. Em resumo, um espaço topológico é um conjunto não-vazio X com uma coleção τ de subconjuntos de X tal que $\emptyset$, X são abertos em X, a união arbitrária de abertos em X é um aberto de X, e a interseção finita de abertos de X é aberto em X.

Definição 3.1.2 *Seja* (X, τ) *um espaço topológico.*

(i) Se $U \subset X$ *é um aberto e* $x \in U$, *então dizemos que* U *é uma vizinhança de* x.

(ii) τ *é dita ser de Hausdorff se dados quaisquer* x, y *em* X, *com* $x \neq y$, *existem vizinhanças* U *de* x, *e* V *de* y, *tais que* $U \cap V = \emptyset$.

3.2 Continuidade

Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos.

Definição 3.2.1 *Uma função $f\colon X \to Y$ é dita ser:*

- *Contínua se $f^{-1}(A) \in \tau$ para todo $A \in \sigma$.*
- *Um homeomorfismo se f é bijetiva, contínua e possui inversão contínua.*

3.3 Construindo Topologias

A seções seguintes nos rementem ao seguinte questionamento: Como construir uma topologia em um conjunto não-vazio?

3.3.1 Topologia Induzida em Subconjuntos

Seja S um subconjunto de um espaço topológico (X, τ). Considere a coleção

$$\tau_S = \{A \cap S \,\big|\, A \in \tau\}.$$

Não é difícil ver que τ_S define uma topologia em S. Neste caso, dizemos que S herda a topologia de X, ou que X induz uma topologia natural em S.

3.3.2 Topologia Induzida por Bases

Uma outra forma de induzir uma topologia em um conjunto é descrita a partir da noção de base para uma topologia.

Definição 3.3.1 *Seja X um conjunto não-vazio. Uma base para uma topologia em X é uma coleção $\mathscr{B}$ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*

(i) Para todo elemento $x \in X$, existe $A \in \mathscr{B}$ tal que $x \in A$,

(ii) Se para cada dois elementos $A_1, A_2 \in \mathscr{B}$, $x \in A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, então existe um terceiro $A_3 \in \mathscr{B}$ tal que $x \in A_3 \subset A_1 \cap A_2$.

Proposição 3.3.2 *Seja X um conjunto não-vazio. Se $\mathscr{B}$ é uma base para uma topologia em X, então $\mathscr{B}$ induz um topologia em X.*

Prova. De fato, considere o seguinte conjunto:

$$\tau(\mathscr{B}) = \big\{U \subset X \,\big|\, \text{Para cada } x \in U, \text{ existe } A \in \mathscr{B} \text{ tal que } x \in A \subset U\big\}.$$

Afirmamos que $\tau(\mathscr{B})$ define uma topologia em X. Claramente, $\emptyset \in \tau(\mathscr{B})$. Pelo item (i) da Definição 3.3.1, segue-se também que $X \in \tau(\mathscr{B})$. Vamos mostrar agora que $\tau(\mathscr{B})$ é fechada para uniões arbitrárias. Seja $\{U_\alpha\}$ uma família de elementos de $\tau(\mathscr{B})$. Ponha $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Seja $x \in U$ qualquer. Então, $x \in U_{\alpha_0}$, para algum α_0. Por definição, existe $A \in \mathscr{B}$ tal que $x \in A \subset U_{\alpha_0}$. Portanto,

$$x \in A \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha} U_\alpha = U.$$

Analogamente, usando (ii) da Definição 3.3.1, mostra-se por indução que $\tau(\mathscr{B})$ é fechado para interseções finitas. (Confira também [4]) □

3.3.3 Topologia induzida por uma família de funções

Considere a seguinte situação. Seja X um conjunto não-vazio, (Y, τ) um espaço topológico e $\mathfrak{F} = \{\varphi_\alpha \colon X \to Y \,\big|\, \alpha \in \Lambda\}$ uma família de funções de X em Y.

Problema. Construir uma topologia em X tal que todas as funções de $\mathfrak{F}$ sejam contínuas.

O resultado a seguir fornece uma solução afirmativa para esse problema.

Proposição 3.3.3 *Considere a seguinte família de subconjuntos de X:*

$$\mathscr{B} = \Big\{ \bigcap_{\alpha\in\Lambda^*, A\in\Gamma} \varphi_\alpha^{-1}(A) \,\big|\, \Lambda^* \subset \Lambda \textit{ é finito }, \Gamma \textit{ é uma família finita de abertos em } Y \Big\}.$$

Então, $\mathscr{B}$ é base de uma topologia $\sigma(X, \mathfrak{F})$ em X na qual todas as funções de $\mathfrak{F}$ são contínuas. Além disso, se $\mathfrak{T}$ é uma topologia em X com a mesma propriedade, então $\sigma(X, \mathfrak{F}) \subset \mathfrak{T}$

Prova. De fato, seja $x \in X$ qualquer. Então, como para qualquer $\alpha \in \Lambda$ tem-se $X = \varphi_\alpha^{-1}(Y)$ e Y é aberto, segue-se que $x \in \varphi_\alpha^{-1}(Y) \subset X$, provando o item (i) da Definição 3.3.1. Sejam $U = \bigcap_{\alpha\in\Lambda_1, A\in\Gamma_1} \varphi_\alpha^{-1}(A)$, $V = \bigcap_{\alpha\in\Lambda_1, A\in\Gamma_2} \varphi_\alpha^{-1}(A)$ elementos arbitrários de $\mathscr{B}$, e $x \in U \cap V$. Seja $W = \bigcap_{\alpha\in\Lambda^*, A\in\Gamma} \varphi_\alpha^{-1}(A)$, onde $\Lambda^* = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Então, $W \in \mathscr{B}$ e $x \in W \subset U \cap V$. Isso conclui a prova. □

Observação. A topologia $\sigma(X, \mathfrak{F})$ é chamada a topologia em X induzida por $\mathfrak{F}$.

Uma propriedade interessante da topologia definida acima é a seguinte:

Proposição 3.3.4 *Sejam X, Y and $\mathfrak{F} = \{\varphi_\alpha \colon X \to Y\}$ como acima. Considere em X a topologia $\sigma(X, \mathfrak{F})$ induzida pela família $\mathfrak{F}$, e seja Z um espaço topológico qualquer. Então, uma aplicação $\Phi \colon Z \to X$ é contínua se, e somente se, $\varphi_\alpha \circ \Phi \colon Z \to Y$ é contínua, para todo α.*

Prova. Exercício.

3.3.4 Topologia Produto

Consideremos a seguinte situação: Sejam $\{A_\alpha \,\big|\, \alpha \in J\}$ uma família de conjuntos indexadas por um conjunto J. O produto cartesiano generalizado dos $A'_\alpha s$ é definido por

$$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha = \Big\{ x \colon J \to \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \,|\, x_\alpha \colon = x(\alpha) \in A_\alpha \Big\}.$$

Ou seja, um elemento de $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$ é uma função do conjunto J na união de todos os $A'_\alpha s$ com a propriedade que cada imagem x_α pertence ao respectivo A_α. Por simplicidade, usaremos a notação $\prod A_\alpha$ para representar o produto cartesiano definido acima. Também, usaremos a notação $(x_\alpha)_\alpha$ para representar um elemento qualquer de $\prod A_\alpha$.

Problema. Construir uma topologia em $\prod A_\alpha$ sabendo que cada A_α é um espaço topológico.

Solução. Optaremos como solução, a construção de um topologia chamada topologia produto. Considere a família $\mathfrak{F}$ das funções $\pi_\beta \colon \prod A_\alpha \to A_\beta$ definidas por $\pi_\beta((x_\alpha)_\alpha) = x_\beta$. Tais funções são as chamadas aplicações de projeção associadas ao índice β. Então, a topologia

$$\sigma\Big(\prod A_\alpha, \mathfrak{F} \Big)$$

definida na Proposição 3.3.3 é por definição a topologia produto em $\prod A_\alpha$. Isso resolve o problema. □

Observação. Vale a pena ressaltar que a topologia produto $\sigma\Big(\prod A_\alpha, \mathfrak{F} \Big)$ definida acima é tal que as projeções π_β são contínuas.

3.4 Espaços Métricos

Exemplos de espaços topológicos incluem os espaços métricos (X, d). Neste caso, uma topologia τ é gerada por todas as bolas abertas de X. Vejamos isso a seguir.

Definição 3.4.1 *Um espaço métrico é uma par (X, d), onde X é um conjunto não-vazio e $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ é uma função tal que:*

(i) $d(x, y) = 0$ *se* $x = y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$*, para todo* $x, y \in X$.

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$*, para quaisquer* $x, y, z \in X$.

Sejam (X, d) um espaço métrico, $p \in X$ e $r > 0$. A bola aberta de centro p e raio r é o conjunto:

$$B_r(p) = \{x \in X\colon d(x, p) < r\}.$$

A bola fechada, (resp., a esfera) de centro p e raio r, é o conjunto $B_r[p] = \{x \in X\colon d(x, p) \leq r\}$, (resp., $S_r[p] = \{x \in X, d(x, p) = r\}$).

Proposição 3.4.2 *Seja (X, d) um espaço métrico. Então, a coleção:*

$$\mathscr{B} = \big\{B_r(p) \,\big|\, r > 0, p \in X \subset A\big\},$$

define uma base para uma topologia em X.

Prova. Elementar. □

Exemplos particulares de espaços métricos, (e portanto, espaços topológicos), são os espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$, e mais geralmente, todos os espaços vetoriais normados $(X, \|\cdot\|)$.

Proposição 3.4.3 *Todo espaço normado é um espaço métrico.*

Prova. Ora, se $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço normado, então a função $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ definida por $d(x, y) = \|x - y\|$ define uma métrica em X. Em particular, a norma $\|\cdot\|$ induz uma topologia em X, a saber, a topologia métrica gerada por d. □

3.5 Convergência

Os conceitos clássicos de convergência de sequências são naturalmente reproduzidos no ambiente de um espaço topológico.

Definição 3.5.1 *Sejam (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que uma sequência $\{x_n\}$ uma sequência em X converge para um ponto $x \in X$ se para qualquer vizinhança U de x, for possível determinar $n_U \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$, para todo $n \geq n_U$.*

Contudo, os conceitos envolvendo as noções de limitação e de Cauchy são melhores reproduzidas em espaços métricos.

Definição 3.5.2 *Seja (M, d) um espaço métrico.*

(i) Um subconjunto K de M é dito ser limitado quando existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$, para quaisquer $x, y \in M$.

(ii) Uma sequência $\{x_n\}$ converge para $x \in M$ se, e só se, para todo $\epsilon > 0$ existe um $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$, para todo $n \geq n_\epsilon$.

(iii) M é dito ser completo se toda sequência de Cauchy é convergente em M.

É fácil checar que toda sequência convergente de M é limitada.

3.6 Pontos Interiores e Conjuntos Fechados

Seja (X, τ) um espaço topológico.

Definição 3.6.1 *Seja A um subconjunto de X.*

- *Um ponto $p \in A$ é dito pertence ao interior de A se existe um aberto $U \in \tau$ tal que $p \in U \subset A$.*
- *O conjunto dos pontos interiores de A é representado por $Int(A)$.*
- *O fecho do conjunto A de X é o conjunto $\overline{A}$ tal que $x \in \overline{A}$ se, e somente se, para qualquer vizinhança U de x em X, dada arbitrariamente, tem-se $U \cap A \neq \emptyset$.*

Um subconjunto F de X é dito ser fechado se ele coincide com seu fecho. Mostra-se que um conjunto $F \subset X$ é fechado se, e somente se, o complementar $X \setminus F$ for um conjunto aberto em X.

Definição 3.6.2 *(Densidade) Um subconjunto A de X é dito ser denso em X quando o seu fecho for igual a X, ou seja, quando ocorrer $\overline{A} = X$.*

O seguinte resultado é bem conhecido e caracteriza conjuntos fechados.

Teorema 3.6.3 *As seguintes propriedades se verificam:*

- *$\emptyset$ e X são fechados.*
- *Interseções arbitrárias de conjuntos fechados são fechados.*
- *Uniões finitas de conjuntos fechados são fechados.*

3.7 Compacidade

Seja (X, τ) um espaço topológico e K um subconjunto de X. Uma cobertura aberta de K é uma coleção $\mathfrak{U}$ de abertos de X tal que K está contido na união dos elementos de $\mathfrak{U}$, ou seja,

$$K \subset \bigcup_{A \in \mathfrak{U}} A.$$

Uma subcoleção $\mathscr{U}$ de $\mathfrak{U}$ é chamado uma subcobertura de K se ela mesma ainda for uma cobertura aberta de K. Neste caso, dizemos também que $\mathfrak{U}$ admite uma subcobertura.

Definição 3.7.1 *Um subconjunto K de um espaço topológico (X, τ) é dito ser compacto quando toda cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita. Dizemos também que K é relativamente compacto se o seu fecho $\overline{K}$ for compacto.*

O resultado a seguir é bem conhecido.

Teorema 3.7.2 (Bolzano-Weiestrass) *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$. São equivalentes:*

(i) K é limitado e fechado.

(ii) K é compacto.

(iii) Toda sequência em K possui subsequência convergente em K.

Em particular, é verdadeira a frase:

"Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui subsequência convergente".

Entretanto, essa afirmação não é verdadeira em geral para espaços de dimensão infinita.

Example 3.7.1 *Seja $X = \ell_2$ munido com sua norma usual $\|\cdot\|_{\ell_2}$. Considere a sequência (x_n) em ℓ_2 definida por:*

$$x_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots),$$

em que o número 1 aparece na n-ésima entrada. É fácil ver que (x_n) é limitada em ℓ_2, porém não converge já que $\|x_m - x_n\|_{\ell_2} = \sqrt{2}$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ e $m \neq n$.

Isso sugere o conceito de compacidade sequencial.

Definição 3.7.3 *Seja (X, τ) um espaço topológico.*

(i) Um subconjunto K de X é dito ser sequencialmente compacto se toda sequência em K possui subsequência convergente em K.

(ii) Uma sequência $\{x_n\}$ em X é dita ser pré-compacta se ela possui uma subsequência convergente.

Em geral, vale o seguinte resultado para um espaço métrico.

Teorema 3.7.4 *Um espaço métrico (X, d) é compacto se, e somente se, X é sequencialmente compacto.*

O seguinte resultado é devido a Tychonoff.

Teorema 3.7.5 *O produto cartesiano generalizado de espaço topológicos compactos é compato.*

3.7.1 Alguns Resultados de Compacidade em Dimensão Infinita

Vimos a pouco que, em geral, não se pode afirmar que uma sequência limitada num espaço normado de dimensão infinita é pré-compacta. No entanto, existem determinados espaços em que sob certas condições uma tal frase é verdadeira. O objetivo desta subseção é relembrar alguns desses resultados. Comecemos pelo, tal vez, o mais conhecido de todos.

Teorema 3.7.6 *(Arzela-Ascoli) Seja K um subconjunto limitado de $C[0,1]$. Suponha que K é equicontínuo. Então, K é relativamente compacto.*

O resultado acima diz quando um conjunto limitado e fechado em $C[0,1]$ é compacto. Existe ainda um outro famoso resultado de compacidade em dimensão infinita. Mas, trata-se de compacidade nos espaços $L_p[0,1]$, veja [2].

3.7.2 A Propriedade da Interseção Finita

Estreitamente relacionado à compacidade é a propriedade da interseção finita. Vejamos. Sejam (X,τ) um espaço topológico e $\mathfrak{U}$ uma família de subconjuntos fechados de X.

Definição 3.7.7 *Dizemos que $\mathfrak{U}$ possui a propriedade da interseção finita se a interseção de qualquer subcoleção finita $F_1,\ldots,F_n$ de elementos de $\mathfrak{U}$ é não-vazia.*

O seguinte resultado caracteriza espaços topológicos compactos em termos da propriedade da interseção finita.

Teorema 3.7.8 *Seja (X,τ) um espaço topológico. Então, X é compacto se, se somente se, toda coleção $\mathfrak{U}$ de subconjuntos fechados de X possui a propriedade da interseção finita.*

3.8 Comparando Topologias

Suponha que τ e σ sejam duas topologias em um conjunto não-vazio X.

Definição 3.8.1 *Se $\sigma \supset \tau$, então dizemos que σ é mais fina que τ.*

Importância. Quanto menos abertos, melhores são as chances de se obter compacidade.

Definição 3.8.2 *τ e σ são ditas equivalentes se a aplicação identidade $I\colon (X,\tau) \to (X,\sigma)$ definida por $I(x) = x$ for um homeomorfismo.*

3.9 Topologias Vetoriais

Seja X um espaço vetorial. Uma topologia τ em X é dita ser vetorial se as operações usuais de adição de vetores e multiplicação por escalar são funções contínuas. O seguinte resultado fornece uma importante caracterização de topologias vetoriais em espaços finito-dimensionais.

Teorema 3.9.1 *Seja X um espaço vetorial finito-dimensional. Então, duas topologias Hausdorff vetoriais são equivalentes.*

3.10 Metrizabilidade

Em vária situações práticas, compacidade sequencial é mais preferível a que compacidade. Por outro lado, em espaços métricos as duas noções coincidem. Portanto, é razoável questionar o quão parecida é uma dada topologia com uma topologia métrica. Um espaço topológico (X,τ) é dito ser metrizável quando existe uma métrica d em X cuja topologia induzida τ_d coincide com a topologia original τ.

Em consequência, vale o seguinte resultado.

Teorema 3.10.1 *Seja (X,τ) um espaço topológico metrizável. Então, X é compacto se, e somente se, X é sequencialmente compacto.*

3.10.1 Primeiro Axioma da Enumerabilidade

No contexto da metrazibilidade a seguinte noção também é importante.

Definição 3.10.2 *Seja (X,τ) um espaço topológico. Dizemos que:*

(i) Um ponto $x \in X$ possui uma base enumerável de vizinhanças se existe uma coleção enumerável $\{U_n\}$ de vizinhanças de x tal que qualquer vizinhança U de x contém algum dos $U_n's$.

(ii) τ satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade se cada ponto de X possui uma base enumerável de vizinhanças.

3.11 Separabilidade

Um espaço topológico (X, τ) é dito ser separável quando existe uma sequência $\{x_n\}$ em X que é densa em X, ou seja, $\overline{\{x_n\}} = X$.

3.12 Teorema de Baire

Teorema 3.12.1 *Seja (M, d) um espaço métrico completo. Suponha que $\{F_n \,\big|\, n \in \mathbb{N}\}$ é um família enumerável de subconjuntos fechados de M tais que $Int(F_n) = \emptyset$. Então,*

$$Int(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \emptyset.$$

A seguinte versão do Teorema de Baire é mais usada.

Corolário 3.12.2 *Seja M um espaço métrico completo tal que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é um subconjunto fechado de M. Então, existe algum n_0 tal que $Int(F_{n_0}) = \emptyset$.*

No contexto acima, o seguinte resultado é importante.

Proposição 3.12.3 *Sejam X um espaço normado infinito-dimensional e F um subespaço de dimensão finita. Então, $Int(F) = \emptyset$.*

Prova. Suponha o contrário que $\mathrm{Int}(F) \neq \emptyset$. Então, F contém um bola do espaço X, digamos B. Mas, em B podemos escolher uma quantidade infinita de vetores L.I. Contradição, pois F é finito-dimensional. $\square$

3.13 Exercícios

1. (Pesquise). Mostre que:

(i) Se $p \in [1, \infty)$, então ℓ_p é separável.

(ii) O espaço c_0 é separável.

(iii) O espaço ℓ_∞ não é separável.

2. (Pesquise). Mostre que:

(i) $C[0,1]$ é separável.

(ii) Se $p \in [1, \infty)$, então $L_p[0,1]$ é separável.

(iii) $L_\infty[0,1]$ não é separável.

3. Mostre que todo espaço métrico satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade.

4. Mostre que todo espaço de Banach não pode conter uma base de Hamel enumerável.

Capítulo 4

Teorema de Hahn-Banach

A existência de funcionais lineares em espaços vetoriais decorre da existência de bases algébricas. Além disso, se $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço normado o dual topológico X^* é um subespaço próprio do dual algébrico $X^\sharp$. Para o desenvolvimento da teoria dos espaços de Banach, é fundamental sabermos o quão substancial é o dual X^*. Até aqui, não sabemos sequer se X^* é não-trivial. Trata-se de um problema não-simples, a priori. Por sua vez, esse problema está estreitamente relacionado ao problema da extensão de funcionais lineares. Com efeito, seja $e \in X$ um vetor não-nulo num espaço normado X e M o espaço gerado por e. Então, $M = \{te \colon t \in \mathbb{R}\}$ e $g \colon M \to \mathbb{R}$ dado por $g(te) = t$ define um funcional linear em M. Como X é um espaço normado e M é finito-dimensional, não é difícil mostrar que $g \in M^*$. Portanto, cabe a pergunta: Existe um funcional linear $f \in X^*$ tal que $f|_M \equiv g$? Naturalmente, uma condição necessária é que $g(x) \leq \rho(x)\ \forall x \in M$, em que $\rho(x) = |f(x)|$ se $x \in M$. De um modo geral, podemos questionar o seguinte:

Problema 4.1 (Extensão de funcionais) *Sejam X um espaço vetorial real, M um subespaço de X e $g \colon M \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Existe um funcional linear $f \colon X \to \mathbb{R}$ tal que $f\big|_M \equiv g$?*

O problema sobre a extensão de funcionais data de 1912 e deve-se a Eduard Helly. Entre os anos de 1927 e 1929, Hahn e Banach, usaram as técnicas de Helly, outrora utilizadas somente em espaços de seqüências, e passaram a lidar com o problema da extensão de funcionais em toda sua generalidade em espaços normados abstratos.

Na seção seguinte iremos, passo a passo, promover a solução do problema sobre a extensão de funcionais lineares.

4.1 Solução do Problema da Extensão de Funcionais

Comecemos com a seguinte definição.

Definição 4.1.1 *Seja X um espaço vetorial real. Uma seminorma em X é uma função $\rho\colon X \to [0,\infty)$ com as seguintes propriedades:*

(i) $\rho(x+y) \le \rho(x) + \rho(y)$, para todo $x, y \in X$.

(ii) $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$, para todo $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vamos ao Teorema principal deste capítulo.

Teorema 4.1.2 (Hahn-Banach) *Seja M um subspaço de um espaço vetorial X, e $g\colon M \to \mathbb{R}$ um funcional linear em M. Suponha que exista uma seminorma em X, $\rho\colon X \to [0,\infty)$ tal que: $g(x) \le \rho(x)$, para todo $x \in M$. Então, existe um funcional linear $f\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $f\big|_M \equiv g$ e $f(x) \le \rho(x)$ para todo $x \in X$.*

Prova. Mais uma vez faremos uso do Lema de Zorn. Considere o seguinte conjunto:

$$\mathscr{F} = \{(F,h)\big| F \text{ é um subepaço de } X,\, M \subset F,\, h \in F^\sharp,\, h\big|_M \equiv g, \text{ e } h(x) \le \rho(x), \forall x \in F\}.$$

Por definição, $(M,g) \in \mathscr{F}$. Considere em $\mathscr{F}$ a seguinte relação de ordem: $(F_1,h_1) \preceq (F_2,h_2)$ se, e somente se, $F_1 \subset F_2$ e $h_2\big|_{F_1} \equiv h_1$. Deixamos para o leitor a constatação de " $\preceq$ " define uma ordem parcial em $\mathscr{F}$. Seja $\mathfrak{M} = \{(F_\alpha, h_\alpha)\colon \alpha \in \Lambda\}$ um subconjunto totalmente ordenado de $\mathscr{F}$, e mostremos que $\mathfrak{M}$ possui uma cota superior em $\mathscr{F}$. Defina $F = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha$ e $h\colon F \to \mathbb{R}$ por $h(x) = h_\alpha(x)$ se $x \in F_\alpha$. Como $\mathfrak{M}$ é totalmente ordenado e cada F_α contém M, segue-se facilmente que $(F,h) \in \mathscr{F}$. Além disso, $(F_\alpha, h_\alpha) \preceq (F,h)$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Portanto, (F,h) é uma cota superior para $\mathfrak{M}$ em $\mathscr{F}$. Pelo Lema de Zorn, o conjunto $\mathscr{F}$ possui um elemento maximal que o denotaremos por $(\mathcal{F}, \mathfrak{h})$. Agora, vamos à segunda parte da demonstração.

Afirmação. $\mathcal{F} = X$. Suponhamos o contrário que exista $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin \mathcal{F}$. Considere o espaço gerado por x_0, $M = \{tx_0\colon t \in \mathbb{R}\}$. Defina $\tilde{\mathcal{F}}\colon = \mathcal{F} \oplus M$, e $\tilde{\mathfrak{h}}\colon \tilde{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}$ pondo $\tilde{\mathfrak{h}}(z+tx_0) = \mathfrak{h}(z) + t\beta$, onde β é um número real (a ser escolhido). Note que $(\mathcal{F},\mathfrak{h}) \preceq (\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathfrak{h}})$. A idéia, portanto, é chegarmos a uma contradição em relação a maximalidade do par $(\mathcal{F},\mathfrak{h})$. Para tanto, basta mostrarmos que o novo par $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathfrak{h}})$ é um elemento de $\mathscr{F}$. Para isso, só resta mostrar que $\tilde{\mathfrak{h}}(x) \le \rho(x)$ para todo $x \in \tilde{\mathcal{F}}$. Seja $x = z + tx_0$ com $t > 0$. Então, $\tilde{\mathfrak{h}}(z+tx_0) \le \rho(z+tx_0)$ se, e só se,

$$\mathfrak{h}(z) + t\beta \le \rho(z+tx_0),$$

se, e só se, (dividindo ambos os lados da desigualdade por $t > 0$)

$$\beta \leq \rho(y + x_0) - \mathfrak{h}(y),$$

para todo $y \in X$. Por outro lado, se $x = z + tx_0$ com $t < 0$, então $\tilde{\mathfrak{h}}(z + tx_0) \leq \rho(z + tx_0)$ se, e só se,

$$\mathfrak{h}(z) + t\beta \leq \rho(z + tx_0),$$

se, e só se, (dividindo ambos os lados da desigualdade por $-t > 0$)

$$\mathfrak{h}(\frac{-z}{t}) - \beta \leq \rho(\frac{-z}{t} - x_0),$$

se, e só se,

$$\mathfrak{h}(x) - \rho(x - x_0) \leq \beta,$$

para todo $x \in X$. Assim, devemos ter

$$\sup_{x \in X} \big\{\mathfrak{h}(x) - \rho(x - x_0)\big\} \leq \beta \leq \inf_{y \in X} \{\rho(y + x_0) - \mathfrak{h}(y)\}. \tag{4.1}$$

Vejamos se isso de fato ocorre. Sabemos que $\mathfrak{h}(x + y) \leq \rho(x + y)$, para quaisquer $x, y \in X$. Daí, segue-se que

$$\mathfrak{h}(x) + \mathfrak{h}(y) = \mathfrak{h}(x + y) \leq \rho(x + y) \leq \rho(x - x_0) + \rho(y + x_0),$$

donde vem que

$$\mathfrak{h}(x) - \rho(x - x_0) \leq \rho(y + x_0) - \mathfrak{h}(y),$$

para quaisquer $x, y \in X$. Desta feita, basta finalmente escolher

$$\beta \in \Big[\sup_{x \in X} \big\{\mathfrak{h}(x) - \rho(x - x_0)\big\}, \inf_{y \in X} \{\rho(y + x_0) - \mathfrak{h}(y)\}\Big].$$

Isso demonstra a desigualdade (4.1) e prova o Teorema de Hahn-Banach. $\square$

4.2 Consequências

Proposição 4.2.1 *Seja X um espaço normado e x_0 um vetor não-nulo em X. Então, existe um funcional linear $h \in X^*$ tal que $h(x_0) = \|x_0\|$ e $\|h\| = \|x_0\|$.*

Prova. Seja $M = \operatorname{span}(x_0)$ e defina $g\colon M \to \mathbb{R}$ pondo $g(tx_0 = t\|x_0\|$. Considere a seminorma $p\colon X \to [0, \infty)$ definida por $p(x) = \|x\|$. Então, $g(tx_0) \leq |t|\|x_0\| = \|tx_0\| = p(tx_0)$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear $f\colon X \to \mathbb{R}$ que é uma extensão de g e satisfaz $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Note também que $-f(x) = f(-x) \leq p(-x) = p(x)$, para todo $x \in X$. Isso mostra que $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in X$. Em particular, f é cont´ i nua no zero e, portanto, $f \in X^*$.

Proposição 4.2.2 *Seja Y um subespaço de um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$. Suponha que $g \in Y^*$. Então, existe um funcional $f \in X^*$ tal que $f\big|_Y \equiv g$ e $\|f\|_{X^*} = \|g\|_{Y^*}$.*

Prova. Defina $p\colon X \to [0, \infty)$ pondo $p(x) = \|g\|_{Y^*}\|x\|$. Então, $g(y) \leq \|g\|_{Y^*}\|y\| = p(y)$ para todo $y \in Y$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um functional linear $f\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $f\big|_Y \equiv g$ e $f(x) \leq p(x)$, par qualquer $x \in X$. Já sabemos que $|f(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in X$. Portanto, $|f(x)| \leq \|g\|_{Y^*}\|x\|$, $\forall x \in X$, o que implica que $\|f\|_{X^*} \leq \|g\|_{Y^*}$. Por outro lado, se $x \in Y$ então

$$\|f\|_{X^*} \geq \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \frac{|g(x)|}{\|x\|},$$

o que implica que $\|f\|_{X^*} \geq \|g\|_{Y^*}$. Como desejado. □

Proposição 4.2.3 *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $x \in X \setminus \{0\}$. Então, existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(x) = \|x\|$.*

Prova. Seja $Y = \operatorname{span}(x)$ e defina $g\colon M \to \mathbb{R}$ pondo $g(tx) = t\|x\|$. Note que

$$\|g\|_{Y^*} = \sup_{\|tx\|=1} \frac{|g(tx)|}{\|tx\|} = 1,$$

donde segue-se que $g \in Y^*$. Pela Proposição 4.2.2, existe $f \in X^*$ tal que $f\big|_Y \equiv g$ e $\|f\|_{X^*} = \|g\|_{Y^*}$. Mas, isso signifca que $f(x) = \|x\|$ e $\|f\|_{X^*} = 1$. □

A Proposição 4.2.3 permite mostrar a seguinte caracterização da norma de uma espaço normado.

Corolário 4.2.4 *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Então, para todo $x \in X$ vale*

$$\|x\| = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x)| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|.$$

Prova. Podemos supor que $x \neq 0$, pois do contrário não há o que ser feito. Claramente, tem-se $|f(x)| \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\|$, para todo $f \in B_{X^*}$. Agora, pela Proposição 4.2.3, existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(x) = \|x\|$. Isso conclui a demonstração. □

Uma outra consequência simples mas importante é a seguinte.

Corolário 4.2.5 *Se X é um espaço de Banach infinito-dimensional, então X^* é infinito-dimensional.*

Prova. Suponha o contrário que X^* é finito-dimensional, digamos $\dim(X^*) = n$. Sejam $\{f_1, \ldots, f_n\}$ uma base para X^*, e defina $\Phi\colon X \to \mathbb{R}^n$ pondo $\Phi(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Claramente tem-se que Φ é linear. Afirmamos que Φ é injetiva. De fato, suponha que $\Phi(x) = 0$. Então, $x \in \bigcap \mathrm{Ker}(f_i)$. Como todo funcional em X^* é combinação linear dos $f_i's$, segue-se que $f(x) = 0$ para todo $f \in X^*$. Se fosse $x \neq 0$, então do Corolário 4.2.4 acima concluiríamos que $f(x) = \|x\| \neq 0$ para algum $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$. Contradição. □

4.3 Versão Geométrica do Teorema de Hahn-Banach

Nesta seção veremos uma outra aplicação decorrente do Teorema de Hahn-Banach.

4.3.1 Hiperplanos

Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach Banach. Um subespaço Y de X é dito ser um hiperplano de X se existe um funcional $f \in X^*$ tal que $Y = f^{-1}(0)$. Em particular, todo hiperplano de X é um subespaço fechado. Um subconjunto $H \subset X$ é chamado um hiperplano afim se existem um vetor $x \in X$ e um hiperplano Y de X tal que $H = x + Y$.

Proposição 4.3.1 *$H \subset X$ é um hiperplando afim se, se somente se, existem $f \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $H = f^{-1}(\alpha)$.*

Prova. Se $H = x + f^{-1}(0)$ é um hiperplando afim, então pondo $\alpha = f(x)$ segue-se que $H = f^{-1}(\alpha)$. Deixamos como exercício a demonstração da recíproca. □

Definição 4.3.2 *Sejam dados conjuntos $A, B \subset X$ e $H = \{f = \alpha\}$ um hiperplano afim.*

- *H é dito separar A e B quando $f(x) \leq \alpha \leq f(y)$, para todo $x \in A$ e $y \in B$.*

- *H é dito separar estritamente os conjuntos A e B quando existe um $\epsilon > 0$ tal que*

$$f(x) \leq \alpha - \epsilon \quad \text{e} \quad \alpha + \epsilon \leq f(y),$$

para quaisqer $x \in A$ e $y \in B$.

4.3.2 Funcional de Minkowski

Seja C um subconjunto convexo de um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$.

Definição 4.3.3 *O funcional de Minkowski de C é a função $p_C \colon X \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$p_C(x) = \inf \big\{ \lambda > 0 \,\big|\, \lambda x \in C \big\}.$$

As propriedades fundamentais dos funcionais de Minkowski estão relacionadas no seguinte resultado.

Proposição 4.3.4 *Seja C um subconjunto convexo de um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$. Suponha que $0 \in Int(C)$. Então,*

(i) $0 \leq p_C(x) < \infty$ *para todo* $x \in X$,

(ii) $p_C(\alpha x) = \alpha p_C(x)$, *para todo* $\alpha > 0$ *e* $x \in X$,

(iii) $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$, *para todo* $x, y \in X$,

(iv) $\{x \in X \,|\, p_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in X \,|\, p_C(x) \leq 1\}$.

O detalhes da prova abaixo são deixadas como exercício.

Prova. Para o item (i) é suficiente provar que $p_C(x) < \infty$ para todo $x \in C$. Por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta = \{x \in X \colon \|x\| \leq \delta\} \subset C$. Se $x \neq 0$, então $\delta \|x\|^{-1} x \in B_\delta \subset C$. Portanto, como C é convexo e $0 \in C$, segue-se que $x \in \frac{\|x\|}{\delta} C$. Por definição, temos $p_C(x) \leq \frac{\|x\|}{\delta} < \infty$, para todo $x \in X \setminus \{0\}$.

(ii): Seja $\alpha > 0$ e $x \in C$. Então, $x \in \lambda C$ se, e somente se, $\alpha x \in \lambda\alpha C$. Portanto, $p_C(\alpha x) = \alpha p_C(x)$.

(iii): Sejam $x, y \in X$ quaisquer. Fixe números $s > p_C(x)$ e $t > p_C(y)$. Por definição, existem $s_0, t_0 > 0$ tais que $s_0 x \in C$ e $t_0 y \in C$, com $s > s_0$ e $t > t_0$. Afirmamos que $s_0 C \subset sC$. Com efeito, dado $z \in C$ arbitrário, vemos que

$$s_0 z = \frac{s_0}{s}(sz) + (1 - \frac{s_0}{s})0 \in sC.$$

Portanto, $x \in sC$ e da mesma forma $y \in tC$. Segue-se que $x + y \in sC + tC$. Por convexidade, temos

$$x + y \in (t+s)\big(\frac{s}{t+s}C + \frac{t}{t+s}C\big) \subset (t+s)C,$$

donde conclui-se que $p_C(x+y) \leq (t+s)$ e, portanto, como s, t são arbitrários, que $p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$.

(iv): Se $p_C(x) < 1$, então da definição de ínfimo, concluimos que $x \in \lambda C$ para algum $\lambda \in (0, 1)$. Então, existe $u \in C$ tal que

$$x = \lambda u + (1 - \lambda)0 \in C.$$

Por outro lado, se $x \in C$ então $p_C(x) \leq 1$ por definição. Isso conclui a prova de (iv). $\square$

Com um pouco mais de perseverança, prova-se ainda que:

Proposição 4.3.5 *Seja C como acima.*

(i) Se C é aberto, então $C = \{x \in X \big| \, p_C(x) < 1\}$.

(ii) Se C é fechado, então $C = \{x \in X \big| \, p_C(x) \leq 1\}$.

4.3.3 A Forma Geométrica do THB

A versão geométrica do Teorema de Hahn-Banach é a seguinte.

Teorema 4.3.6 *Sejam C um subconjunto fechado e convexo de um espaço normado X e $x_0 \in X \setminus C$. Então, existe $f \in X^*$ tal que $\sup\{f(x)\} < f(x_0)$ para todo $x \in C$. Em particular, o hiperplano afim $H = \{f = f(x_0)\}$ separa $\{x_0\}$ e C.*

Prova. Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 \in C$. Do contrário, consideramos o conunto $C - \{x\}$ e o vetor $x_0 - x$ ao invés de C e x_0. Seja $\delta = \mathrm{dist}(x_0, C)$. Como C é fechado, segue-se que $\delta > 0$. Considere agora o conjunto $D = \{x \in X \,|\, \mathrm{dist}(x, C) \leq \delta\}$. Tendo em vista que $0 \in C$, mostra-se facilmente que $\frac{\delta}{4} B_X \subset D$. Portanto, D contém o vetor 0 em seu interior. Note também que D é fechado, convexo e $x_0 \notin D$. Seja p_D o funcional de Minkowski de D. Pela Proposição 4.3.5, vemos que $p_D(x_0) > 1$. Seja $M = \langle x_0 \rangle$ o espaço gerado por $\{x_0\}$ e defina $g(tx_0) = tp_D(x_0)$. Segue-se que $g(tx_0) \leq p_D(tx_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear $f \colon X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq p_D(x)$ e $f\big|_M \equiv g$. Afirmamos que $f \in X^*$. Com efeito, se $x \in D$ então $p_D(x) \leq 1$. Logo, $f(x) \leq p_D(x) \leq 1$. Uma vez que D contém uma vizinhança da origem, segue-se que f é limitada numa vizinhança da origem. Isso implica que $f \in X^*$. Por outro lado, como $C \subset D$ vemos que se $x \in C$, então $f(x) \leq p_D(x) \leq 1 < p_D(x_0) = f(x_0)$. Segue-se que $\sup\{f(x)\} \leq 1 < f(x_0)$. Isso conclui a prova. $\square$

Corolário 4.3.7 *Seja X um espaço de Banach.*

(i) Seja C um subconjunto aberto convexo de X. Se $x_0 \notin C$, então existem $f \in X^*$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = \lambda$ e $f(x) < \lambda$ para todo $x \in C$.

(ii) Sejam A, B convexos disjuntos em X. Se A é aberto, então existem $f \in X^*$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) < \lambda \leq f(y)$, para todo $x \in A$ e $y \in B$.

Corolário 4.3.8 *Sejam A, B convexos disjuntos em X. Suponha que A é fechado e B é compacto. Então, existe um hiperplano que separa A e B estritamente.*

Capítulo 5

Topologias Fracas

5.1 Teorema de Riesz

O seguinte resultado é devido a F. Riesz.

Teorema 5.1.1 *Seja X um espaço normado. Suponha que a bola B_X é compacta. Então, X é um espaço finito-dimensional.*

Proof. Suponha por contradição que X é infinito-dimensional. Considere a esfera $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Como B_X é compacto segue-se que S_X é compacto como um subconjunto fechado de um espaço métrico compacto. Em particular, S_X satisfaz a propriedade da interseção finita. Considere a família $\mathfrak{F}$ de todos os hiperplanos contidos em X. O Corolário 4.2.4 implica que $\bigcap_{H \in \mathfrak{F}} H = \{0\}$. Considere agora a família $\mathfrak{U} = \{H \cap S_X : H \in \mathfrak{F}\}$. Como S_X é compacto, do Teorema 3.7.8 existem $H_1^*, \dots, H_n^*$ hiperplanos em $\mathfrak{F}$ tais que $(H_1^* \cap \cdots \cap H_n^*) \cap S_X = (H_1^* \cap S_X) \cap \cdots \cap (H_n \cap S_X) = \emptyset$. Isso implica que $H_1^* \cap \cdots \cap H_n^* = \{0\}$. Sejam $f_1, \dots, f_n$ funcionais em X^* tais que $H_i^* = \mathrm{Ker}(f_i)$. Dado qualquer $f \in X^*$, segue-se que $\bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(f_i) = \{0\} \subset \mathrm{Ker}(f)$. Então, pela Proposição 1.3.5, $f \in \langle f_1, \dots, f_n \rangle$. Isso implica que $\dim(X^*) \leq n$. Contradição. □

Observação 5.1.1 *A demonstração acima mostra também que se X é de dimensão infinita, então para quaisquer $f_1, \dots, f_n \in X^*$, tem-se $\bigcap_{i=1}^n Ker(f_i) \neq \{0\}$.*

Corolário 5.1.2 *Se K é um subconjunto compacto de um espaço normado X, então K possui interior vazio.*

Do ponto de vista topológico, a partir desses resultados vemos a necessidade de considerar topologias mais ricas e frutíferas em espaços vetoriais normados.

5.2 Definição de Topologia Fraca

Seja X um espaço normado e X^* o dual topológico de X. Considere a família

$$\mathfrak{F} = \{f\colon X \to \mathbb{R} \,\big|\, f \in X^*\} = X^*.$$

Definição 5.2.1 *A topologia fraca de X é a topologia $\sigma(X, X^*)$ em X induzida por X^*.*

5.2.1 Propriedades da Topologia Fraca

Proposição 5.2.2 *Seja X um espaço normado. Então, $\sigma(X, X^*)$ é Hausdorff.*

Prova. Isso é uma consequência do Teorema de Hahn-Banach. (Exercício). □

Seja $\{x_n\}$ uma sequência em X. Usamos a notação $x_n \xrightarrow{w} x$ para indicar que $\{x_n\}$ converge na topologia $\sigma(X, X^*)$ para um ponto $x \in X$.

Proposição 5.2.3 *Seja X um espaço normado. Então, $x_n \xrightarrow{w} x$ se, e somente se, para todo $f \in X^*$ tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Prova. Seja $f \in X^*$ qualquer, e suponha que $x_n \xrightarrow{w} x$. Dado $\epsilon > 0$, segue-se da definição de topologia fraca que $U = f^{-1}\big\{(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)\big\}$ é um aberto fraco. Logo, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_\epsilon$. Isso implica que, $f(x_n) \in (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$ para todo $n \geq n_\epsilon$. Portanto, $|f(x_n) - f(x)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_\epsilon$. Isso demonstra o que queríamos. Recíprocamente, seja U um aberto da topologia fraca contentendo x. Por causa da Proposição 3.3.3, existem $\epsilon > 0$ e funcionais $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ tais que

$$\{y \in X \,\big|\, |f_i(y) - f_i(x)| < \epsilon,\ \forall i = 1, \ldots, n\} \subset U.$$

Por hipótese, para cada $i = 1, \ldots, n$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $|f_i(x_n) - f_i(x)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_i$. Seja $n_0 = \min\{n_i\colon i = 1, \ldots, n\}$. Então, $x_n \in \{y \in X \,\big|\, |f_i(y) - f_i(x)| < \epsilon,\ \forall i = 1, \ldots, n\}$, para todo $n \geq n_0$. Isso conclui a prova. □

Proposição 5.2.4 *Seja X um espaço normado de dimensão infinita. Se U é um aberto fraco, então U não pode ser limitado na topologia da norma. Em particular, vale a inclusão estrita $\sigma(X, X^*) \subset \mathfrak{T}_{\|\cdot\|_X}$, onde $\mathfrak{T}_{\|\cdot\|_X}$ representa a topologia gerada pela norma de X.*

Prova. Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 \in U$. Então, existem $\epsilon > 0$ e funcionais $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ tais que

$$\bigcap \left\{ x \in X \,\middle|\, |f_i(x)| < \epsilon \right\} \subset U.$$

Da Obeservação 5.1.1, segue-se que $N = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_i) \neq \{0\}$. Portanto, existe $x \neq 0$ em N. Em particular, $\lambda x \in N$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Isso implica que U não pode ser limitado na topologia da norma. $\square$

Proposição 5.2.5 *A topologia fraca $\sigma(X, X^*)$ num espaço normado é uma topologia vetorial.*

Prova. Exercício.

Proposição 5.2.6 *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Suponha que $\{x_n\}$ é um sequência em X tal que $x_n \rightharpoonup x$ em X. Então:*

(i) $\{x_n\}$ *é limitada na topologia da norma.*

(ii) $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$

Prova. Exercício.

Vale ainda a seguinte caracterização da topologia fraca em termos da dimensão do espaço X.

Teorema 5.2.7 *Seja X um espaço normado. São equivalentes:*

(i) *X é finito-dimensional.*

(ii) *As topologias fraca e forte coincidem em X.*

(iii) *A topologia fraca é metrizável.*

(iv) *A topologia fraca satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade.*

Prova. Num espaço vetorial de dimensão finita, duas topologias vetoriais de Hausdorff são sempre equivalentes (veja, Teorema 3.9.1). Portanto, (i) implica (ii). As implicações $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ são óbvias. Vamos provar agora que $(iv) \Rightarrow (i)$. Suponha por contradição que X é infinito-dimensional. Como $\sigma(X, X^*)$ satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade, podemos encontrar uma sequência $\{f_n\}$ em X^* tal que as vizinhanças fracas $\big\{U_1, U_2, \dots\big\}$ definidas por

$$U_n = \big\{x \in X \,\big|\, |f_i(x)| < 1, \quad i = 1, \dots, n\big\},$$

constituem uma base enumerável de vizinhanças do vetor nulo 0 em X. Já sabemos que $\bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(f_i) \neq \{0\}$. Portanto, podemos escolher uma sequência $\{x_n\}$ em $\bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(f_i)$ tal que $\|x_n\| = n$. Segue-se que $\{x_n\}$ é ilimitada. Mas, como $U_{n+1} \subset U_n$ para todo n, $x_n \in U_n$ para todo n, e $\{U_n\}$ forma uma base de vizinhanças do zero em X para $\sigma(X, X^*)$, podemos concluir que $x_n \rightharpoonup 0$ em X. Pela Proposição 5.2.6, segue-se que $\{x_n\}$ é limitada em norma. Contradição. $\square$

Embora a topologia fraca nunca seja metrizável em espaços normados de dimensão infinita, em alguns espaços ocorrem propriedades bastantes bizarras.

Teorema 5.2.8 *Considere o espaço ℓ_1 munido com sua norma usual. Então, as convergências fraca e forte coincidem em ℓ_1. Ou seja, $x_n \rightharpoonup x$ em ℓ_1 se, e somente se, $x_n \to x$ em ℓ_1.*

5.3 Definição de Topologia Fraca*

Seja X um espaço normado e X^* o dual topológico de X. Considere o conjunto

$$\mathfrak{F} = \{\varphi_x \colon X^* \to \mathbb{R} \,\big|\, x \in X,\, \varphi_x(f) = f(x)\}.$$

Definição 5.3.1 *A topologia fraca* de X^* é a topologia $\sigma(X^*, X)$ em X^* induzida por $\mathfrak{F}$.*

5.3.1 Propriedades da Topologia fraca*

Proposição 5.3.2 *Seja X um espaço normado. Então, $\sigma(X^*, X)$ é Hausdorff.*

Se $\{f_n\}$ é uma sequência em X^*, usamos a notação $f_n \overset{w^*}{\to} f$ para indicar que $\{f_n\}$ converge para o funcional f na topologia $\sigma(X^*, X)$. Tal como foi feito na Proposição 5.2.3, vale o seguinte resultado.

Proposição 5.3.3 *Seja X um espaço normado. Então, $f_n \xrightarrow{w^*} f$ se, e somente se, para todo $x \in X$ tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Proposição 5.3.4 *Suponha que $(X, \|\cdot\|)$ seja um espaço de Banach separável. Então, B_{X^*} munido com a topologia fraca* é metrizável, ou seja, $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ é um espaço topológico metrizável.*

Prova. Seja $\{x_n\}$ uma sequência densa na topologia de norma em B_X. Defina um métrica d na bola B_{X^*} da seguinte forma: $d\colon B_{X^*} \times B_{X^*} \to [0,\infty)$ é tal que

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(x_n) - g(x_n)|}{2^n}.$$

Não é difícil mostrar que as topologias $\sigma(X^*, X)$ e τ_d (topologia induzida por d) são equivalentes. $\square$

Um raciocínio similar prova ainda o seguinte resultado:

Teorema 5.3.5 *O dual X^* de um espaço de Banach X é separável se, se somente se, a bola B_X é fracamente metrizável.*

Uma outra propriedade bastante interessante é a seguinte:

Proposição 5.3.6 *Seja X um espaço de Banach.*

5.3.2 Teorema de Banach-Alaoglu

Enquanto que a bola de um espaço de Banach infinito-dimensional não pode ser compacta, o principal resultado desta seção fala-nos que a bola do dual é compacta com relação a topologia $\sigma(X^*, X)$. Vamos ao seu enunciado.

Teorema 5.3.7 *Seja X um espaço de Banach. Então, a bola B_{X^*} é compacta na topologia fraca*.*

Prova. Para cada $x \in X$ defina $A_x = \mathbb{R}$. Então, cada A_x é igual ao espaço topológico $\mathbb{R}$. Considere agora o produto cartesiano generalizado $\mathbb{R}^X :\ = \prod A_x$ munido com a topologia produto usual. Defina uma aplicação $\Phi\colon X^* \to \mathbb{R}^X$ pondo $\Phi(f) = ((f_x)_x)$, onde $f_x = f(x)$.

Afirmação 1. Φ é contínua de $(X^*, \sigma(X^*, X))$ em $\mathbb{R}^X$. Com efeito, se $f_n \overset{w^*}{\to} f$ em X^*, então vemos da desigualdade

$$\big|(\Pi_x \circ \Phi)(f_n) - (\Pi_x \circ \Phi)(f)\big| = \big|f_n(x) - f(x)\big|,$$

que $(\Pi_x \circ \Phi)(f_n) \to (\Pi_x \circ \Phi)(f)$, para todo $x \in X$. Isso mostra que cada $\Pi_x \circ \Phi$ é contínua de X^* em $\mathbb{R}$. Portanto, da Proposição 3.3.4, segue-se Φ é contínua. Como queríamos.

Afirmação 2. Φ é injetiva. Ora, se $\Phi(f) = \Phi(g)$ então $((f_x)_x) = ((g_x)_x)$. Isso implica, aplicando as projeções em cada coordenada se necessário, que $f_x = g_x$ para todo $x \in X$. Portanto, $f \equiv g$. Isso demonstra a afirmação.

Afirmação 3. Φ é um homeomorfismo de $(X^*, \sigma(X^*, X))$ sobre $\Phi(X^*)$. Para tanto, em vista da Proposição 3.3.4, é suficiente mostrar que para todo $x \in X$ a função $\varphi_x \circ \Phi^{-1}$ é contínua de $\mathbb{R}^X$ em $\mathbb{R}$. Ora, fixado $x \in X$, $\varphi_x \circ \Phi^{-1}$ coincide com a x-ésima projeção Π_x que é contínua.

Assim, para mostrar que B_{X^*} é $\sigma(X^*, X)$-compacta basta mostrarmos que $\Phi(B_{X^*})$ é compacto em $\mathbb{R}^X$.

Afirmação 4. $K = \Phi(B_{X^*})$ é compacto. Com efeito, note que

$$K = \big\{u \in \mathbb{R}^X \;\big|\; |u_x| \leq \|x\|, \text{ e } u_{x+y} = u_x + u_y,\ u_{\lambda x} = \lambda u_x, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ x, y \in X\big\} = K_1 \cap K_2,$$

onde

$$K_1 = \prod_{x \in X} \big[-\|x\|, \|x\|\big],$$

e

$$K_2 = \Big(\bigcap_{x,y \in X} A_{x,y}\Big) \cap \Big(\bigcap_{x,y} B_{x,y}\Big),$$

em que $A_{x,y} = \big\{u \in \mathbb{R}^X \colon u_{x+y} - u_x - u_y = 0\big\}$ e $B_{x,y} = \big\{u \in \mathbb{R}^X \colon u_{\lambda x} - \lambda u_x = 0\big\}$. Não é difícil mostrar que $A_{x,y}, B_{x,y}$ são fechados em $\mathbb{R}^X$. Portanto, K_2 é fechado. Por outro lado, segue-se do Teorema 3.7.5 (de Tychonoff) que K_1 é compacto. Segue-se que K é compacto como a interseção de um compacto com um fechado. Isso conclui a demonstração do Teorema de Banach-Alaoglu. $\square$

Capítulo 6

Reflexividade

6.1 Injeção Canônica

Seja X um espaço de Banach, e considere o espaço bi-dual X^{**}. A injeção canônica de X em X^{**} é aplicação $J\colon X \to X^{**}$ definida por:

$$J(x)(f) = \langle f, x \rangle, \quad x \in X.$$

O principal propriedade da injeção canônica é a seguinte:

Proposição 6.1.1 *A injeção canônica J é uma isometria.*

Prova. Claramente tem-se que J é uma aplicação linear. Resta-nos mostrar agora que $\|J(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. Dados quaisquer $f \in X^* \setminus \{0\}$ e $x \in X$, vemos que $\big|J(x)(f)\big| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\|$, donde segue-se que

$$\frac{|J(x)(f)|}{\|f\|} \leq \|x\|.$$

Isso mostrar em particular que $\|J(x)\| \leq \|x\|$, para todo $x \in X$. Por outro lado, sabemos via Proposição 4.2.3 que para todo $x \in X \setminus \{0\}$, existe $f_0 \in X^*$ com $\|f_0\| = 1$ tal que $f_0(x) = \|x\|$. Assim,

$$\|J(x)\| \geq \frac{|f_0(x)|}{\|f_0\|} = \|x\|,$$

que quando combinada com a desigualdade anterior mostra ser verdadeira a igualdade $\|J(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. Portanto, J é uma isometria. $\square$

Definição 6.1.2 *Um espaço de Banach X é dito ser reflexivo quando a injeção canônica for uma aplicação sobrejetiva, ou seja, $J(X) = X^{**}$.*

Proposição 6.1.3 *São reflexivos os seguintes espaços:*

(i) ℓ_p *com* $1 < p < \infty$,

(ii) $L_p(\Omega)$ *com* $1 < p < \infty$.

Prova. Provaremos somente o item (i). Sabemos que $(\ell_p)^* \equiv \ell_q$ com p e q conjugados. Segue-se daí que $(\ell_p)^{**} \equiv (\ell_q)^* \equiv \ell_p$. □

6.1.1 Teorema de Goldstine

O resultado a seguir estabelece uma relação importante entre a topologia $\sigma(X^{**}, X^*)$ e a aplicação J.

Teorema 6.1.4 *Seja X um espaço de Banach. Então,*

$$\overline{J(B_X)}^{\sigma(X^{**},X^*)} = B_{X^{**}}.$$

Prova. Do Teorema de Banach-Alaoglu podemos concluir que $\overline{B_{X^{**}}}^{\sigma(X^{**},X^*)} = B_{X^{**}}$. Como J é uma isometria, segue-se que $J(B_X) \subset B_{X^{**}}$. Portanto, passando o fecho, vemos que

$$\overline{J(B_X)}^{\sigma(X^{**},X^*)} \subset \overline{B_{X^{**}}}^{\sigma(X^{**},X^*)} = B_{X^{**}}.$$

Deixamos a prova da inclusão contrária como exercício. (Veja por exemplo, [1]) □

6.1.2 Caracterização de Espaços Reflexivos

O principal resultado deste capítulo é o seguinte.

Teorema 6.1.5 *Um espaço de Banach X é reflexivo se, e somente se, a bola B_X é compacta na topologia fraca.*

Prova. Suponha X reflexivo. Então, $J(X) = X^{**}$ e, portanto, $J(B_X) = B_{X^{**}}$. Sabemos, pelo Teorema de Banach-Alaoglu, que $B_{X^{**}}$ é $\sigma(X^{**}, X^*)$-compacta em X^{**}. Agora, afirmamos que a aplicação inversa $J^{-1}\colon \big(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)\big) \to \big(X, \sigma(X, X^*)\big)$ é contínua com relação às topologias indicadas. Pela Proposição 3.3.4, é suficiente mostrarmos que se $f \in X^*$, então $f \circ J^{-1}\colon \big(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)\big) \to \mathbb{R}$ é contínua. Isso de fato ocorre. Com efeito, dado qualquer $\phi \in \big(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)\big)$ existe $x \in X$ tal que $J(x) = \phi$. Assim, $(f \circ J^{-1})(\phi) = f(x) = J(x)(f) = \varphi_f(\phi)$, o que implica dizer que $f \circ J^{-1} \equiv \varphi_f$. Lembrando a definição de topologia fraca*, concluímos que φ_f pertence à família que gera $\sigma(X^{**}, X^*)$ e, portanto, $f \circ J^{-1}$ é contínua. Segue-se, em particular, que B_X é fracamente compacta em X.

Recíprocamente, se B_X é fracamente compacta, então como J é linear, $J(B_X)$ é $\sigma(X^{**}, X^*)$-compacta (e portanto, $\sigma(X^{**}, X^*)$-fechada) em X^{**}. Por outro lado, sabemos pelo Teorema 6.1.4, que $\overline{J\big(B_X\big)}^{\sigma(X^{**}, X^*)} = B_{X^{**}}$. Portanto, $J(B_X) = B_{X^{**}}$. Isso implica que X é reflexivo. $\square$

Bibliografia

[1] H. Brezis, Functional Analysis, Masson, Paris (1983) (in French).

[2] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Operators, Part I: General Theory. Interscience, New York (1958).

[3] E. L. Lima, lgebra Linear, 4a Ed., Coleo Matemtica Universitria, IMPA, RJ, 2000.

[4] J. R. Munkres, Topology, 2nd. Ed. Upper Saddle River. NJ: Prentice Hall. 2000.