Álgebra Linear

MAT5730

2 semestre de 2019

Conteúdo

1 Lista 0

1.1 Exercício 1

(1) Seja

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

(a) Prove que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um corpo.

(b) Prove que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um $\mathbb{Q}$-espaço vetorial e exiba uma base desse espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.

(c) Mostre que se L e K são corpos tais que $K \subset L$, então L é um K-espaço vetorial.

1.2 Exercício 2

(2) Seja V um K-espaço vetorial e seja $\{u, v, w\} \subset V$ um conjunto linearmente independente. Determine condições sobre K para que o conjunto $\{u + v, u + w, v + w\}$ também seja linearmente independente.

1.3 Exercício 3

(3) Seja S um subconjunto de um espaço vetorial V sobre um corpo K. Recorde que o subespaço de V gerado por S é definido por

$$\langle S \rangle \coloneqq \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K, v_i \in S\},$$

isto é, $\langle S \rangle$ é o conjunto de todas as combinações lineares de vetores em S.

(a) Mostre que $\langle S \rangle$ é um subespaço de V.

(b) Seja W a interseção de todos os subespaços de V que contém S. Mostre que $W = \langle S \rangle$.

Solução:

(a) Primeiramente note que para qualquer conjunto $S' \subseteq S$ finito e $\alpha\colon S' \to \{0\}$ temos que $\sum_{x\in S'} \alpha_x x = 0$ e logo $0 \in \langle S\rangle$. Além disso, se $\lambda \in K$ e $x \in \langle S\rangle$ temos que $x = \sum_{x\in S'} \alpha_x x$ para $S' \subseteq S$ finito e $\alpha\colon B' \to \mathbb{R}$. Então

$$\lambda x = \sum_{x\in S'} (\lambda\alpha_x)x \in \langle S\rangle.$$

Por fim, sejam $x, y \in \langle S\rangle$. Então $x = \sum_{I_x} \alpha_v v$ e $y = \sum_{I_y} \beta_v v$ para conjuntos I_x, I_y finitos e funções $\alpha\colon I_x \to \mathbb{R}$ e $\beta\colon I_y \to \mathbb{R}$. Defina a função $\bar{\alpha}\colon I_x \cup I_y \to \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{\alpha}_v := \begin{cases} \alpha_v & \text{se } v \in I_x; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Similarmente, considere a função $\bar{\beta}\colon I_x \cup I_y \to \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{\beta}_v := \begin{cases} \beta_v & \text{se } v \in I_y; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então temos que

$$x + y = \sum_{v\in I_x} \alpha_v v + \sum_{v\in I_y} \beta_v v = \sum_{v\in I_x\cup I_y} (\bar{\alpha}_v + \bar{\beta}_v)v.$$

Como $I_x \cup I_y$ é finito e $\bar{\alpha}_v + \bar{\beta}_v \in \mathbb{R}$ para cada $v \in I_x \cup I_y$ segue que $x + y \in \langle S\rangle$. Concluímos assim que $0 \in \langle S\rangle$, que $\lambda s \in \langle S\rangle$ para cada $\lambda \in K$ e cada $s \in \langle S\rangle$ e que $x + y \in \langle S\rangle$ sempre que $x, y \in \langle S\rangle$. Isto é, $\langle S\rangle$ é um subespaço.

(b) Considere o seguinte conjunto

$$W := \bigcap \{U \subseteq V : U \text{ é subespaço e } S \subseteq U\}.$$

Seja U um subespaço de V que contém S. Pela definição de subespaço, obtemos que U contém todas as combinações lineares de elementos de S. Logo, $\langle S\rangle \subseteq U$. Concluímos assim que $\langle S\rangle$ está contido em cada subespaço de V que contém S e portanto $\langle S\rangle \subseteq W$.

Por outro lado, se $s \in W$ então s pertence a cada subespaço de V que contém S. Pelo item a, temos que $\langle S\rangle$ é um subespaço de V e claramente contém S. Portanto $s \in \langle S\rangle$.

1.4 Exercício 4

(4) Mostre que um subconjunto B de um espaço vetorial é linearmente independente se, e somente se, todo subconjunto finito de B é linearmente independente.

1.5 Exercício 5

(5) Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V.

(a) Dê um exemplo mostrando que $W_1 \cup W_2$ pode não ser um subespaço de V.

(b) Prove que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço se, e somente se $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.

(c) Mostre que $W_1 + W_2$ é o subespaço gerado por $W_1 \cup W_2$.

Solução:

(a) Por exemplo, se $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \langle(1,0)\rangle$ e $W_2 = \langle(0,1)\rangle$ então $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço de V.

(b) Primeiro, suponha sem perda de generalidade que $W_1 \subseteq W_2$. Neste caso, temos que $W_1 \cup W_2 = W_2$, que é um subespaço por hipótese. A outra implicação é a contrapositiva da Proposição **??** das notas de aula.

(c) Primeiramente vamos mostrar que $W_1 + W_2 \subseteq \langle W_1 \cup W_2\rangle$. Se $w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$, então claramente

$$w_1 + w_2 = 1w_1 + 1w_2 \text{ com } w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2.$$

Por outro lado, seja $w \in \langle W_1 \cup W_2\rangle$. Então podemos escrever

$$w = \sum_{v \in I_1 \cup I_2} \alpha_v v = \sum_{v \in I_1} \alpha_v v + \sum_{v \in I_2} \alpha_v v,$$

onde $I_1 \subseteq W_1$ e $I_2 \subseteq W_2$, e $\alpha\colon I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}$. Como W_1 e W_2 são subespaços temos que $\sum_{v \in I_1} \alpha_v v \in W_1$ e $\sum_{v \in I_2} \alpha_v v \in W_2$ e portanto $w \in W_1 + W_2$.

1.6 Exercício 6

(6) Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ das matrizes de 2×2 sobre $\mathbb{R}$ e os seguintes subconjuntos de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Mostre que W_1 e W_2 são subespaços de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Encontre as dimensões de $W_1, W_2, W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$.

1.7 Exercício 7

(7) Seja $\mathscr{F} = \{S_i : i \in I\}$ uma família não vazia de subespaços distintos de um K-espaço vetorial V. Mostre que são equivalentes:

(i) Para cada $i \in I$, temos que $S_i \cap \left(\sum\limits_{i \neq j} S_j \right) = \{0\}$.

(ii) O vetor nulo não pode ser escrito como uma soma de vetores não nulos, cada um pertencendo a um subespaço distinto de $\mathscr{F}$.

(iii) Todo vetor não nulo de $\sum_{i \in I} S_i$ tem, a menos da ordem, uma decomposição única como soma de vetores não nulos $v = s_1 + \ldots + s_n$, com os vetores $s_1, \ldots, s_n$ pertencendo a subespaços distintos de $\mathscr{F}$.

Observação: Segue deste exercício que $V = \sum\limits_{i \in I} S_i$ é uma soma direta se, e somente se, uma das condições (i)-(iii) é satisfeita.

Solução:

(a) **(i) $\implies$ (ii)**: Assuma que existe uma família de elementos não nulos $v_i \in S_i$ tais que $\sum\limits_{i \in I} v_i = 0$. Seja $i_0 \in I$ e note que $v_{i_0} = -\sum\limits_{i \in I \setminus \{i_0\}} v_i$. Como S_i é um subespaço para cada $i \in I$ concluímos que $v_{i_0} \in \sum\limits_{i \in I \setminus \{i_0\}} S_i$. Como temos que $v_{i_0} \in S_{i_0}$ por construção, concluímos que $0 \neq v_{i_0} \in S_{i_0} \cap \Big(\sum\limits_{i \neq i_0} S_i\Big)$ e portanto a afirmação (i) é falsa.

(b) **(ii) $\implies$ (i)**: Assuma que existe $i_0 \in I$ tal que existe $0 \neq v_{i_0} \in S_{i_0} \cap \Big(\sum\limits_{i \neq i_0} S_i\Big)$. Neste caso, temos que existe uma família $\{-v_i\}_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ com $v_i \in S_i$ para cada $i \in I \setminus \{i_0\}$ e $\sum\limits_{i \in I \setminus \{i_0\}} v_i = v_{i_0}$. Dessa forma, temos que a família $\{v_{i_0}\} \cup \{v_i\}_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ é uma família não nula com $v_i \in S_i$ para cada $i \in I$ e $\sum\limits_{i \in I} v_i = 0$. Isto é, a afirmação (ii) é falsa.

(c) **(iii) $\implies$ (i)**: Seja $0 \neq s \in \sum\limits_{i \in I} S_i$ e seja $\{s_i\}_{i \in I}$ a única decomposição de S. Assuma que existe $0 \neq v \in S_{i_0} \cap (\sum\limits_{j \in I \setminus \{i_0\}} S_j)$ para algum $i_0 \in I$. Neste caso segue que

$$s = \sum_{i \in I} s_i = (s_{i_0} + v) + \sum_{j \in I \setminus \{i_0\}} s_i - v.$$

Isto é, s tem duas decomposições, o que é uma contradição.

(d) **(i) $\implies$ (iii)**: Seja $0 \neq s \in \sum\limits_{i \in I} S_i$ e assuma que existem duas famílias $\{s_i\}_{i \in I}$ e $\{v_i\}_{i \in I}$ distintas tais que

$$\sum_{i \in I} s_i = \sum_{i \in I} v_i = s.$$

. Seja $i_0 \in I$ tal que $s_{i_0} \neq v_{i_0}$. Então

$$\begin{aligned} 0 \neq v_{i_0} - s_{i_0} &= \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} s_i - \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} v_i \\ &= \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} s_i - v_i. \end{aligned}$$

Assim concluímos que $0 \neq v_{i_0} - s_{i_0} \in S_{i_0} \cap \Big(\sum\limits_{i \neq i_0} S_i\Big)$. Isto é, a afirmação (i) é falsa.

(e) **(ii) $\implies$ (iii)**: Seja $0 \neq s \in V$ e assuma que existem duas famílias distintas $\{v_i\}_{i \in I}$ e $\{s_i\}_{i \in I}$ tais que

$$\sum_{i \in I} v_i = \sum_{i \in I} s_i = s.$$

Neste caso, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 = s - s &= \sum_{i \in I} s_i - \sum_{i \in I} v_i \\ &= \sum_{i \in I} s_i - v_i. \end{aligned}$$

Assim escrevemos o vetor nulo como uma soma não nula de vetores, cada um pertencendo a um subespaço S_i. Isso implica que a afirmação (ii) é falsa.

(f) **(iii) $\implies$ (ii):** Seja $0 \neq v \in V$, seja $\{v_i\}_{i\in I}$ a única família tal que $v_i \in S_i$ para cada $i \in I$e $\sum_{i\in I} v_i = v$. Assuma que existe uma família $\{s_i\}_{i\in I}$ não nula de vetores onde $s_i \in S_i$ para cada $i \in I$ e $\sum_{i\in I} s_i = 0$. Então temos que

$$v = v + 0 = \sum_{i\in I} v_i + s_i = \sum_{i\in I} v_i - s_i = v - 0 = v,$$

o que nos da uma contradição.

1.8 Exercício 8

(8) Seja V um K-espaço vetorial e seja S um subconjunto linearmente independente de V. Mostre que, se $v \in V$ não for combinação linear dos elementos de S, então $S \cup \{v\}$ é linearmente independente.

Solução: Assuma que v é combinação linear dos elementos de S. Neste caso existe $S' \subseteq S$ finito e uma função $\alpha \colon S' \to \mathbb{R}$ tal que $\sum_{s\in S'} \alpha_s s = v$. Defina $\bar{\alpha} \colon S' \cup \{v\} \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{\alpha}_s = \alpha_s$ para cada $s \in S'$ e $\bar{\alpha}_v = -1$. Então segue que $\sum_{s\in S'\cup\{v\}} \bar{\alpha}_s s = 0$. Isto é, $S \cup \{v\}$ é Linearmente dependente.

1.9 Exercício 9

(9) Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita e sejam U e W subespaços de V tais que $V = U + W$. Mostre que $V = U \oplus W$, se e somente se, $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$.

Solução: Utilizando o fato de que

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(U) - \dim(U \cap W)$$

e o Exercício 7, vemos que as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $V = U \oplus W$;
2. $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$;
3. $V = U + W$ e $\dim(U \cap W) = 0$;

1.10 Exercício 10

(10) Seja V um K-espaço vetorial e seja W um subespaço de V. Mostre que W possui complemento em V, isto é, que existe um subespaço U de V tal que $V = U \oplus W$.

Solução: Seja B_1 uma base de W. Como B_1 é L.I temos pelo Teorema 1 das notas de aula que existe uma base B de V tal que $B_1 \subseteq B$. Considere o conjunto $B_2 \coloneqq B \setminus B_1$ e o subespaço $U \coloneqq \langle B_2 \rangle$. Pelo exercício 3 temos que U é um subespaço e ainda temos do exercício 5 que $V = W + U$. Resta mostrar que $U \cap W = \{0\}$. Assuma que existe $0 \neq v \in U|capW$. Neste caso temos que existem conjuntos finitos $B_1' \subseteq B_1$ e B_2' e funções $\alpha \colon B_1' \to \mathbb{R}$ e $\beta \colon B_2\prime \to \mathbb{R}$ tais que

$$v = \sum_{b\in B_1'} \alpha_b b = \sum_{b\in B_2'} \beta_b b.$$

Seja $i_0 \in B_1'$ tal que $\alpha_{i_0} \neq 0$, então

$$b_{i_0} = \frac{1}{\alpha_{i_0}}\Big(\sum_{b\in B_2'} \beta_b w - \sum_{i\in B_1'\setminus\{i_0\}}\Big),$$

que, pelo exercício 8 implica que $B_1 \cup B_2$ não é L.I. Contradição.

1.11 Exercício 11

(11) Seja $V \neq \{0\}$ um espaço vetorial sobre um corpo infinito K. Mostre que V não é uma união de um número finito de subespaços próprios. E se K for finito?
Sugestão: Suponha que $V = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n$ e que $W_1 \nsubseteq W_2 \cup \ldots \cup W_n$. Sejam $w \in W_1 \setminus (W2 \cup \ldots \cup W_n)$ e $v \notin W_1$. Seja $A = \{aw + v : a \in K\}$ e mostre que cada W_i contém no máximo um elemento de A.)

1.12 Exercício 12

(12) (Lei modular) Seja V um espaço vetorial. Sejam S, U, T subespaços de V. Mostre que se $U \subseteq S$, então:

$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + (S \cap U).$$

Solução: Primeiro, note que como $U \subseteq S$ temos que $S \cap U = U$ e portanto é suficiente mostrar que

$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + U.$$

Como $U \subseteq U + T$ e $U \subseteq S$ temos que

$$U \subseteq (U + T) \cap S. \tag{1}$$

Além disso, como $T \subseteq U + T$ temos que

$$T \cap S \subseteq (U + T) \cap S. \tag{2}$$

Assim, juntando as Equações 1 e 2 obtemos que $U + (T \cap S) \subseteq (U + T) \cap S$. Por outro lado, considere $y \in (U + T) \cap S$. Isto é, $y = u + t = s$ para alguns $u \in U$, $t \in T$, e $s \in S$. Como $U \subseteq S$ e S é subespaço, obtemos que $t = s - u \in S$ e concluímos que $t \in T \cap S$. Dessa forma segue que $y = u + t \in U + (T \cap S)$.

1.13 Exercício 13

(13) Para quais espaços vetoriais V a lei distributiva

$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + (S \cap U)$$

é verdadeira para todos os subespaços S, T, U de V?

Solução: Vamos iniciar notando que se $\dim(V) \leq 1$ o resultado vale trivialmente. Se $\dim(V) \geq 2$, tomamos dois vetores v_t e v_u linearmente independentes e consideramos $T := \langle v_t\rangle$, $U := \langle v_u\rangle$ e $S := \langle v_u + v_t\rangle$. Dessa forma temos $S \subseteq U + T$ e portanto $S \cap (U + T) = S$, mas por outro lado $(S \cap T) = (S \cap U) = 0$.

1.14 Exercício 14

(14) Sejam U e V K-espaços vetoriais e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear.

(a) Prove que T é injetora se, e somente se, T leva todo subconjunto linearmente independente de U em um conjunto linearmente independente de V.

(b) Prove que se o subconjunto $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ de V for linearmente independente, então $\{u_1, \dots, u_n\}$ é um subconjunto linearmente independente de U.

Solução:

1.15 Exercício 15

(15) Sejam U e V K-espaços vetoriais de dimensão finita tais que $\dim U = \dim V$ e seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) T é um isomorfismo;

(ii) T é sobrejetora;

(iii) T é injetora.

Solução:

1.16 Exercício 16

(16) Sejam U e V K-espaços e seja $T\colon U \to V$ um isomorfismo. Mostre que $T^{-1}\colon V \to U$ também é linear e, portanto, é um isomorfismo.

Solução:

1.17 Exercício 17

(17) Seja V um K-espaço vetorial e seja T um operador linear de V tal que $T^2 = T$ (um operador com essa propriedade é chamado de *projeção*). Mostre que

$$V = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T$$

Solução:

1.18 Exercício 18

(18) Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita e seja T um operador linear de V. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\operatorname{Ker}^2 T = \operatorname{Ker} T$;

(ii) $\operatorname{Im}^2 T = \operatorname{Im} T$;

(iii) $V = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T$.

Solução:

1.19 Exercício 19

(19) Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ uma transformação linear tal que posto$T^2 =$ posto$T$. Prove que $\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$.

Solução:

1.20 Exercício 20

(20) Seja V um K-espaço vetorial e sejam $S, T \in \mathscr{L}(V)$. Mostre que

$$T(\operatorname{Ker}(S \circ T)) = \operatorname{Ker} S \cap \operatorname{Im} T$$

Solução:

1.21 Exercício 21

(21) Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre o corpo K e sejam S e T duas transformações lineares de V em W, ambas de posto finito. Mostre que $S + T$ tem posto finito e que

$$|\text{posto } S - \text{posto } T| \leq \text{posto } (T + S) \leq \text{posto } S + \text{posto } T$$

Solução:

2 Lista 1

2.1 Exercício 1

(1) Sejam V um K-espaço vetorial e W um subespaço de V. Seja $S = \{v_i\}_{i\in I} \subset V$ tal que $\overline{S} = \{v_i + W\}_{i\in I}$ é linearmente independente no espaço quociente V/W. Mostre que se A é um conjunto linearmente independente de W então $S \cup A$ é um conjunto linearmente independente de V.

Solução: Se $\overline{S} = \{\overline{v_i} = v_i + W\}_{i\in I}$ é LI em V/W, isso significa que, para todo $M \subseteq I$ finito, temos que, para $\alpha_m \in K$, com $m \in M$, ocorre

$$\sum_{m\in M} \alpha_m \overline{v_m} = 0 \Rightarrow \alpha_m = 0 \ \forall \ m \in M$$

Seja $A = \{w_j\}_{j\in J}$. Por hipótese, sabemos também que A é um conjunto linearmente independente, ou seja, para todo $N \subseteq I$ finito, temos que, para $\alpha_n \in K$, com $n \in N$, ocorre

$$\sum_{n\in N} \alpha_n w_n = 0 \Rightarrow \alpha_n = 0, \ \forall \ n \in N$$

Para mostrar que $S \cup A = \{v_i\}_{i\in I} \cup \{w_j\}_{j\in J} = \{u_p\}_{p\in I\cup J}$ é um conjunto linearmente independente de V, precisamos mostrar que, para todo $L \subset I \cup J$ finito, temos que, para $\alpha_\ell \in K$, com $\ell \in L$, ocorre

$$\sum_{\ell\in L} \alpha_\ell u_\ell = 0 \Rightarrow \alpha_\ell = 0, \ \forall \ \ell \in L$$

Para fazer isso, precisamos antes verificar se existem vetores que são comuns aos dois subconjuntos, ou seja, calcular $S \cap A$. Observe que

$$s \in S \Rightarrow \overline{s} \in \overline{S}$$

Como $\overline{S}$ é um conjunto linearmente independente em W, temos que $\overline{s} \neq \overline{0}$. Portanto, segue que $s - 0 \notin W \Rightarrow s \notin W$. Mas como $A \subseteq W$, então isso quer dizer que $s \notin A$. Portanto, concluímos que $S \cap A = \emptyset$. Isso quer dizer que todos os v_i's são diferentes dos w_j's, e mais ainda, que $I \cup J$ é uma união disjunta.

Logo, considerando novamente $S \cup A = \{v_i\}_{i\in I} \cup \{w_j\}_{j\in J}$, para todo $L \subseteq I \cup J$ finito, existem $I' \subseteq I$ e $J' \subseteq J$ tais que $I' \cup J' = L$. Desse modo, temos que

$$\sum_{\ell\in L} \alpha_\ell u_\ell = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i\in I'} \alpha_i v_i + \sum_{j\in J'} \alpha_j w_j = 0 \quad \text{em } V \Rightarrow$$

$$\overline{\sum_{i\in I'} \alpha_i v_i + \sum_{j\in J'} \alpha_j w_j} = \overline{0} \quad \text{em } V/W \Rightarrow$$

$$\sum_{i\in I'} \alpha_i \overline{v_i} + \underbrace{\sum_{j\in J'} \alpha_j \overline{w_j}}_{=0, \text{ pois } w_j \in W} = \overline{0} \Rightarrow \sum_{i\in I'} \alpha_i \overline{v_i} = \overline{0} \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall \ i \in I',$$

pois $\{v_i\}_{i\in I'} \subseteq \overline{S}$ é um conjunto linearmente independente.

Assim, usando agora o fato de que $\{w_j\}_{j\in J'} \subseteq A$ é um conjunto linearmente independente em W, temos que

$$\sum_{i\in I'} \alpha_i v_i + \sum_{j\in J'} \alpha_j w_j = 0 \Rightarrow 0 + \sum_{j\in J'} \alpha_j w_j = 0 \Rightarrow \sum_{j\in J'} \alpha_j w_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall \ j \in J'$$

Concluímos portanto que

$$\sum_{\ell\in L} \alpha_\ell u_\ell = 0 \Rightarrow \alpha_\ell = 0 \;\forall\; \ell \in L$$

Daí, $S \cup A$ é um conjunto linearmente independente em V.

2.2 Exercício 2

(2) Sejam V um K-espaço vetorial e W um subespaço de V. Seja $S = \{v_i\}_{i\in I} \subset V$ tal que $S = \{v_i + W\}_{i\in I}$ gera o espaço quociente V/W. Mostre que se A é um conjunto gerador de W então $S \cup A$ é um conjunto gerador de V.

Solução: Se $\overline{S} = \{\overline{v_i} = v_i + W\}_{i\in I}$ gera em V/W, isso significa que, para todo $\overline{v} \in V/W$, existem $M \subseteq I$ finito e $\alpha_m \in K$, com $m \in M$, tais que

$$\overline{v} = \sum_{m\in M} \alpha_m \overline{v_m}$$

Seja $A = \{w_j\}_{j\in J}$. Por hipótese, sabemos também que A gera W, ou seja, para todo $w \in W$, existem $N \subseteq J$ finito e $\alpha_n \in K$, com $n \in N$, tais que

$$w = \sum_{n\in N} \alpha_n w_n$$

Precisamos mostrar que $S \cup A = \{v_i\}_{i\in I} \cup \{w_j\}_{j\in J} = \{u_p\}_{p\in I\cup J}$ é um conjunto gerador para V, ou seja, que para todo $v \in V$, existem $L \subset I \cup J$ finito e $\alpha_\ell \in K$, com $\ell \in L$, tais que

$$v = \sum_{\ell\in L} \alpha_\ell u_\ell$$

Note que, como $\overline{S}$ é um conjunto gerador de V/W, temos como já foi explicitado acima que, para $\overline{v} \in V/W$,

$$\overline{v} = \sum_{m\in M} \alpha_m \overline{v_m} \Rightarrow \overline{v} - \sum_{m\in M} \alpha_m \overline{v_m} = \overline{0} \Rightarrow v - \sum_{m\in M} \alpha_m v_m \in W$$

Como $A = \{w_j\}_{j\in J}$ é conjunto gerador para W, temos que existem $N \subseteq J$ finito e $\alpha_n \in K$, com $n \in N$, tais que

$$v - \sum_{m\in M} \alpha_m v_m = \sum_{n\in N} \alpha_n w_n$$

Assim, tomando $L = N \cup M$:

$$v = \sum_{m\in M} \alpha_m v_m + \sum_{n\in N} \alpha_n w_n \Rightarrow v = \sum_{\ell\in L} \alpha_\ell u_\ell$$

Portanto, $S \cup A$ é um conjunto gerador para V.

2.3 Exercício 3

(3) Seja V um K-espaço vetorial e sejam U e W subespaços de V. Prove:

(a) O Segundo Teorema do Isomorfismo:

$$\frac{U + W}{W} \cong \frac{U}{U \cap W}.$$

(b) O Terceiro Teorema do Isomorfismo: Se $U \subset W$,

$$\frac{V}{W} \cong \frac{V/U}{W/U}$$

Solução:

(a) A intenção será encontrar uma transformação linear adequada para poder aplicar o Primeiro Teorema do Isomorfismo e concluir o resultado desejado. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccl} T & : & U & \longrightarrow & \frac{U+W}{W} \\ & & u & \longmapsto & T(u) = \overline{u} = u + W \end{array}$$

Observe que T é uma transformação linear. De fato, segue trivialmente que:

♣ $\forall u, v \in V$, temos que

$$T(u+v) = \overline{u+v} = (u+v) + W = u + W + v + W = \overline{u} + \overline{v} = T(u) + T(v)$$

♥ $\forall u \in W, \forall \alpha \in K$, temos que

$$T(\alpha u) = \overline{\alpha u} = \alpha u + W = \alpha(u + W) = \alpha(\overline{u}) = \alpha T(u)$$

Sendo T uma transformação linear, temos do Primeiro Teorema do Isomorfismo que

$$\frac{V/U}{\operatorname{Ker} T} \cong \operatorname{Im}\, T$$

Calculemos $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im}\, T$:

♠ $\operatorname{Im}\, T = \frac{U+W}{W}$. Mostremos que T é sobrejetora:
Para $a \in \frac{U+W}{W}$, dado por $a = \overline{u+w}$, onde $u \in U$ e $w \in W$, temos que

$$a = \overline{u+w} = (u+w) + W = (u+W) + (w+W) = (u+W) + (0+W) =$$

$$(u+0) + W = u + W = \overline{u} = T(u)$$

Logo, para todo $a \in \frac{U+W}{W}$, existe um $u \in U$ tal que $T(u) = a$. Logo, T é sobrejetora, e portanto $\operatorname{Im}\, T = \frac{U+W}{W}$.

♦ $\operatorname{Ker} T = U \cap W$. Claramente, sabemos que, como $\operatorname{Ker} T = \{u \in U : T(u) = \overline{0}\}$, temos que $\operatorname{Ker} T \subset U$. Mas também temos que, para $a \in \operatorname{Ker} T$, segue que $a \in U$, e

$$T(a) = \overline{0} = 0 + W \Rightarrow a - 0 \in W \Rightarrow a \in W$$

Portanto, segue que $a \in U \cap W$. Daí, $\operatorname{Ker} T = U \cap W$.

Finalmente, obtemos do Primeiro Teorema do Isomorfismo que

$$\frac{U}{\operatorname{Ker} T} \cong \operatorname{Im}\, T \Rightarrow \frac{U}{U \cap W} \cong \frac{U+W}{W}.$$

(b) Utilizando a mesma estratégia do item (a), considere a aplicação

$$\begin{array}{rccl} T & : & \frac{V}{U} & \longrightarrow & \frac{V}{W} \\ & & v+U & \longmapsto & T(v+U) = v+W \end{array}$$

Vejamos que T está bem-definida, ou seja, representantes de uma mesma classe de equivalência no domínio correspondem a representantes de uma mesma classe de equivalência na imagem. Temos, para $\overline{v_1} = v_1 + U, \overline{v_2} = v_2 + U \in \frac{V}{U}$, que

$$\overline{v_1} = \overline{v_2} \Rightarrow v_1 - v_2 \in U \subset W \Rightarrow v_1 - v_2 \in W \Rightarrow v_1 + W = v_2 + W.$$

Note que utilizamos fortemente o fato de que $U \subset W$ para mostrar que T está bem-definida. Além disso, T é uma transformação linear. De fato:

♣ $\forall v_1 + U, v_2 + U \in \frac{V}{U}$, temos que

$$T((v_1+U)+(v_2+U)) = T((v_1+v_2)+U) = (v_1+v_2)+W =$$

$$(v_1+W)+(v_2+W) = T(v_1+U)+T(v_2+U)$$

♥ $\forall v + U \in \frac{V}{U}, \forall \alpha \in K$, temos que

$$T(\alpha v + U) = \alpha v + W = \alpha(v+W) = \alpha T(v+U)$$

Sendo T uma transformação linear, temos do Primeiro Teorema do Isomorfismo que

$$\frac{U}{\operatorname{Ker} T} \cong \operatorname{Im}\, T$$

Calculemos $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im}\, T$:

♠ $\operatorname{Im}\, T = \frac{V}{W}$. Claramente T é sobrejetora:
Para $v + W \in \frac{V}{W}$, temos que

$$v+W = T(v+U)$$

Logo, para todo $v+W \in \frac{V}{W}$, existe um $v+U \in \frac{V}{U}$ tal que $T(v+U) = v+W$. Logo, T é sobrejetora, e portanto $\operatorname{Im}\, T = \frac{V}{W}$.

♦ $\operatorname{Ker} T = \frac{W}{U}$. Observe que

$$v+U \in \operatorname{Ker} T \Leftrightarrow T(v+U) = v+W = 0+W \Leftrightarrow v \in W \Leftrightarrow v+U \in \frac{W}{U}.$$

Logo, $\operatorname{Ker} T = \frac{W}{U}$.

Finalmente, obtemos do Primeiro Teorema do Isomorfismo que

$$\frac{V/U}{\operatorname{Ker} T} \cong \operatorname{Im}\, T \Rightarrow \frac{V/U}{W/U} \cong \frac{V}{W}.$$

2.4 Exercício 4

(4) Seja V um K-espaço vetorial e sejam U e W subespaços de V tais que12 $\dim(V/U) = m$ e $\dim(V/W) = n$. Prove que $\dim(V/(U \cap W)) \leq m + n$.

Solução: Das informações fornecidas no enunciado, sabemos que:

$$\dim(V/U) = m \Rightarrow \dim(V) - \dim(U) = m$$

$$\dim(V/W) = n \Rightarrow \dim(V) - \dim(W) = n$$

Somando essas duas equações obtemos:

$$2\dim(V) - (m+n) = \dim(U) + \dim(W).$$

Sabemos também que, se U e W são subespaços de V, então

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$$

Estamos interessados em encontrar $\dim(V/(U \cap W)) = \dim(V) - \dim(U \cap W)$. Observe que, como U e W são subespaços de V, então $\dim(V) \geq \dim(U + W)$. Desse modo,

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W) \leq \dim(U \cap W) + \dim(V)$$

Então:

$$\dim(U) + \dim(W) \leq \dim(U \cap W) + \dim(V) \Rightarrow 2\dim(V) - (m+n) \leq \dim(U \cap W) + \dim(V) \Rightarrow$$

$$-(m+n) \leq \dim(U \cap W) - \dim(V) \Rightarrow \dim(V) - \dim(U \cap W) \leq m + n$$

Portanto, concluímos que

$$\dim(V/(U \cap W)) = dim(V) - \dim(U \cap W) \leq m + n \Rightarrow \boxed{\dim(V/(U \cap W)) \leq m + n}$$

2.5 Exercício 5

(5) Mostre que

(a) $W \oplus U = W' \oplus U'$ e $W \cong W' \nrightarrow U \cong U'$.

(b) $V \cong V', V = W \oplus U$ e $V' = W \oplus U' \nrightarrow U \cong U'$.

Solução:

(a) Considere K um corpo, e seja

$$V = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_i$$

Considere

$$W = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i}$$

Observe que $W \subseteq V$, e além disso, $W \cong V$. Temos também que

$$V = W \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i+1} \right)$$

Portanto, tomando

$$W = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i},\ U = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i+1},\ W' = V,\ \text{e } U' = \{0\},$$

temos que

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i}\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i+1}\right) \cong V \cong V \oplus \{0\} \Rightarrow W \oplus U = W' \oplus U'$$

e

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i} \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_i \Rightarrow W \cong W\prime,$$

mas

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i+1} \ncong \{0\} \Rightarrow U \ncong U'$$

(b) Considere $K^{\mathbb{N}} = \{(a_0, a_1, a_2, \ldots) | a_i \in K\}$, e sejam:

$$V_i = \{(0, a_1, 0, a_3, \ldots) | a_{2i+1} \in K\} \quad \text{e} \quad V_p = \{(a_0, 0, a_2, 0, \ldots) | a_{2i} \in K\}.$$

Tome $V = K^{\mathbb{N}}$, $V' = V_i$, $U = V_p$ e $U' = \{0\}$. Temos então que $V \cong V'$, pois $K^{\mathbb{N}} \cong V_i$, e também

$$V = V_i \oplus V_p = W \oplus U \quad \text{e} \quad V' = V_i \oplus \{0\} = W \oplus U',$$

mas

$$V_p \ncong \{0\} \Rightarrow U \ncong U'.$$

Portanto, temos que

$$\left.\begin{array}{l} V \cong V' \\ V = W \oplus U \\ V' = W \oplus U' \end{array}\right\} \nRightarrow U \cong U'$$

Observação: Cabe salientar que ambos os itens dessa questão são válidos quando V é um espaço vetorial de dimensão finita.

2.6 Exercício 6

(6) Seja V um espaço vetorial e seja W um subespaço de V. Suponha que $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ e $S = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$, com $S_i \subseteq V_i$ subespaços de V para todo $i = 1, \ldots, n$. Mostre que

$$\frac{V}{S} \cong \frac{V_1}{S_1} \oplus \ldots \oplus \frac{V_n}{S_n}.$$

Solução: Sabemos que, se V é soma direta de $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, então todo $v \in V$ pode ser escrito como soma de elementos de V_i **de maneira única**. Podemos escrever então

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

O mesmo se aplica a S. Dito isso, considere a aplicação

$$\begin{array}{rcrcl} T & : & V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^{n} \frac{V_i}{S_i} = \frac{V_1}{S_1} \oplus \ldots \oplus \frac{V_n}{S_n} \\ & & v = \sum_{i=1}^{n} v_i & \longmapsto & T(v) = \sum_{i=1}^{n} (v_i + S_i) \end{array}$$

Verifiquemos que T é uma transformação linear:

- Para todo $u, v \in V$, podemos escrever de maneira única $u = \sum_{i=1}^{n} u_i$ e $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$. Portanto, temos

$$T(u) + T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) + T\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(u_i + S_i) + \sum_{i=1}^{n}(v_i + S_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}((u_i + S_i) + (v_i + S_i)) = T(u+v) \Rightarrow T(u) + T(v) = T(u+v).$$

- Para todo $v \in V$, podemos escrever de maneira única $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$; assim, para $\alpha \in K$:

$$T(\alpha v) = T\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} v_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha v_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha v_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha v_i + S_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(v_i + S_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n}(v_i + S_i) = \alpha T(v) \Rightarrow T(\alpha v) = \alpha T(v)$$

Logo, T é uma transformação linear. Vamos utilizar o Primeiro Teorema do Isomorfismo em T. Para isso, calculemos o núcleo e a imagem de T :

- $\mathrm{Im}(T)$: Dado $u \in \bigoplus_{i=1}^{n} \frac{V_i}{S_i}$, temos que esse elemento pode ser escrito de maneira única como

$$u = \sum_{i=1}^{n}(u_i + S_i),$$

onde $u_i \in V_i$. Então temos que

$$u = \sum_{i=1}^{n}(u_i + S_i) = T\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right).$$

Logo, T é sobrejetora, e

$$\mathrm{Im}(T) = \bigoplus_{i=1}^{n} \frac{V_i}{S_i} = \frac{V_1}{S_1} \oplus \ldots \oplus \frac{V_n}{S_n}$$

- $\mathrm{Ker}(T)$: Considere $v \in \mathrm{Ker}(T)$. Então, tomando $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$, temos que

$$v \in \mathrm{Ker}(T) \Rightarrow T(v) = 0 \Rightarrow T\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(v_i + S_i) = 0 \Rightarrow$$

$$v_i + S_i = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow v_i \in S_i,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow v \in S$$

Assim, $\mathrm{Ker}(T) \subseteq S$. Agora, tome $s \in S$. Então, como $S = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$, então podemos escrever s de maneira única como

$$s = \sum_{i=1}^{n} s_i,$$

onde $s_i \in S_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Desse modo,

$$T(s) = T\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(s_i + S_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(0 + S_i)}_{\text{pois } s_i \in S_i \ \forall i} = 0.$$

Assim, $S \subseteq \operatorname{Ker}(T)$. Concluímos que $\operatorname{Ker}(T) = S$.

Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos que

$$\frac{V}{\operatorname{Ker}(T)} \cong \operatorname{Im}(T) \Rightarrow \frac{V}{S} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \frac{V_i}{S_i}$$

Então:

$$\frac{V}{S} \cong \frac{V_1}{S_1} \oplus \ldots \oplus \frac{V_n}{S_n},$$

como queríamos.

2.7 Exercício 7

(7) Seja V um K-espaço vetorial e seja W um subespaço de V. Seja $T \in \mathscr{L}(V)$ e defina $\overline{T}\colon V/W \to V/W$ por

$$\overline{T}(v + W) = T(v) + W, \text{ para todo } v + W \in V/W.$$

(a) Determine uma condição necessária e suficiente sobre W para que $\overline{T}$ esteja bem definida.

(b) Se $\overline{T}$ estiver bem definida, mostre que ela é linear e determine seu núcleo e sua imagem.

Solução:

(a) Seja

$$\begin{array}{rccl} \pi & : & V & \longrightarrow & V/W \\ & & v & \longmapsto & \pi(v) = v + W \end{array}$$

A projeção canônica de V em V/W. Então, podemos considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "\pi"] & \\ V \arrow[ur, "T"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V/W \\ & V/W \arrow[ur, "\overline{T}"'] & \end{tikzcd}$$

Note que $\pi \circ T = \overline{T} \circ \pi$. Daí, $\overline{T}$ estará bem-definida se $\text{Ker}(\pi) \subseteq \text{Ker}(\pi \circ T)$. Claramente, temos que $\text{Ker}(\pi) = W$. Vamos calcular $\text{Ker}(\pi \circ T)$. Temos que

$$v \in \text{Ker}(\pi \circ T) \Leftrightarrow \pi(T(v)) = \overline{0} \Leftrightarrow T(v) \in W \Leftrightarrow v \in T^{-1}$$

Logo, temos que

$$\text{Ker}(\pi) \subseteq \text{Ker}(\pi \circ T) \Rightarrow W \subseteq T^{-1}(W) \Rightarrow T[W] \subseteq W.$$

Portanto, uma condição necessária e suficiente para $\overline{T}$ estar bem definida é que para todo $v \in W$, tenhamos $T(v) \in W$, ou seja, $T(W) \subseteq W$.

Em outras palavras, $\overline{T}$ está bem definida se W for um subespaço T-invariante de V.

(b) Verifiquemos que $\overline{T}$ é uma transformação linear. Temos:

- Para todos $u + W, v + W \in V/W$, lembrando que T é linear, temos que

$$\overline{T}((u + W) + (v + W)) = \overline{T}((u + v) + W) = T(u + v) + W = T(u) + T(v) + W =$$

$$(T(u) + W) + (T(v) + W) = \overline{T}(u + W) + \overline{T}(v + W)$$

Logo, $\overline{T}(\overline{u} + \overline{v}) = \overline{T}(\overline{u}) + \overline{T}(\overline{v})$.

♣ Para todo $v + W \in V/W$, e para todo $\alpha \in K$, temos que

$$\overline{T}(\alpha(v+W)) = \overline{T}((\alpha v) + W) = T(\alpha v) + W = \alpha T(v) + W =$$

$$\alpha(T(v) + W) = \alpha\overline{T}(v+W)$$

Portanto, $\overline{T}(\alpha\overline{v}) = \alpha\overline{T}(\overline{v})$.

Vamos encontrar o núcleo e a imagem de $\overline{T}$.

♥ Sendo $\overline{v} = v + W \in V/W$, observe que

$$\overline{T}(\overline{v}) = 0 \Rightarrow \overline{T(v)} = 0 \Rightarrow T(v) \in W \Rightarrow v \in T^{-1}(W).$$

Portanto, temos que

$$\text{Ker}(\overline{T}) = \{\overline{v} | v \in T^{-1}(W)\}.$$

♠ Vamos verificar que $\overline{T}$ é sobrejetora. Sabemos que π é sobrejetora. Então, temos que

$$\begin{aligned} \text{Im}(\overline{T}) &= \text{Im}(\overline{T} \circ \pi) \\ &= \text{Im}(\pi \circ T) \\ &= \{\pi(T(v)) : v \in V\} \\ &= \{\overline{T(v)} : v \in V\} \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\text{Im}(\overline{T}) = V/W.$$

2.8 Exercício 8

(8) Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ o operador linear definido por $T(x,y,z) = (x,x,x)$. Seja $T\colon \mathbb{R}^3/W \to \mathbb{R}^3/W$ tal que $\overline{T}((x,y,z) + W) = T(x,y,z) + W$, em que $W = \text{Ker}\, T$. Descreva $\overline{T}$.

Solução: Veja que $\overline{T}$ está bem definida, pois $W = \text{Ker}(T)$ é um subespaço T-invariante de V. Vamos encontrar o núcleo e a imagem de $\overline{T}$.

- Do exercício anterior, temos que

  $$\text{Ker}(\overline{T}) = \{\overline{v} | v \in T^{-1}(W)\}.$$

  Em particular,

  $$\text{Ker}(\overline{T}) = \{\overline{v} | v \in T^{-1}(\text{Ker}\, T)\} = \{\overline{v} | v \in T^{-1}(\text{Ker}\, T)\}$$

  Então segue que

  $$v \in T^{-1}(\text{Ker}\, T) \Rightarrow T(v) \in \text{Ker}(T) \Leftrightarrow T(T(v)) = 0.$$

  Mas $T(T(v)) = T(v)$. De fato, para $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos

  $$T(T(v)) = T(T(x,y,z)) = T(x,x,x) = (x,x,x) = T(x,y,z) = T(v)$$

  Daí, como para $v \in T^{-1}(\text{Ker}\, T)$, temos $T(T(v)) = 0$,

  $$T(T(v)) = 0 \Rightarrow T(v) = 0$$

  Além disso, se $v \in \text{Ker}(T) = W$, temos $\overline{v} = 0$.

  Portanto, concluímos que $\text{Ker}(\overline{T}) = \{0\}$, ou seja, $\overline{T}$ é injetora.

- Do exercício anterior, temos
$$\mathrm{Im}(\overline{T}) = V/W.$$
Logo, $\mathrm{Im}(\overline{T}) = \mathbb{R}^3/\operatorname{Ker} T$. Podemos também descrever $\mathrm{Im}(\overline{T})$ da seguinte maneira:
$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\overline{T}) &= \{\overline{T(v)} : v \in V\} \\
&= \{T(v) + \operatorname{Ker} T | v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \{(x,x,x) + \operatorname{Ker} T | x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x,x,x) + (0,y,z) | x,y,z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x, x+y, x+z) | x,y,z \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

2.9 Exercício 9

(9) Sejam V e U K-espaços vetoriais. Seja W um subespaço de V e $\pi\colon V \to V/W$ a projeção canônica. Mostre que a função $\mathscr{L}(V/W, U) \to \mathscr{L}(V,U)$, dada por $T \to T \circ \pi$, é injetora.

Solução: Temos a função
$$\begin{array}{rcrcl}
\varphi & : & \mathscr{L}(V/W,U) & \longrightarrow & \mathscr{L}(V,U) \\
 & & T & \longmapsto & T \circ \pi
\end{array}$$

Para mostrar que φ é injetora, precisamos verificar que, para $T \in \mathscr{L}(V/W,U)$, se $\varphi(T) = 0$, então $T \cong 0$. Note que
$$\varphi(T) = 0 \Rightarrow T \circ \pi = 0 \Rightarrow T(\pi(v)) = 0.$$
Vamos mostrar que $T(u) = 0$ $\forall u \in V/W$. Sabemos que π é sobrejetora. Assim, dado $u \in V/W$, existe $v \in V$ tal que $u = \pi(v)$. Logo,
$$T(u) = T(\pi(v)) = (T \circ \pi)(v) = 0.$$
Portanto, $T(u) = 0$ $\forall u \in V/W$. Daí, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.
Concluímos que φ é injetora.

2.10 Exercício 10

(10) Seja V um K-espaço vetorial e seja W um subespaço de V. Mostre que $(V/W)^* \cong W^0$ e que $V^*/W^0 \cong W^*$.

Solução: Mostremos que $(V/W)^* \cong W^0$. Para isso, a ideia será utilizar a aplicação canônica de V em V/W e sua transposta, e depois aplicar o Primeiro Teorema do Isomorfismo para obter o resultado desejado. Comecemos considerando a aplicação canônica
$$\begin{array}{rcrcl}
T & : & V & \longrightarrow & V/W \\
 & & v & \longmapsto & T(v) = v + W
\end{array}$$

Veja que T é sobrejetora (isto é, $\mathrm{Im}\ T = V/W$), e $\mathrm{Ker}\ T = W$. Consideremos a aplicação transposta
$$\begin{array}{rcrcl}
T^t & : & (V/W)^* & \longrightarrow & V^* \\
 & & f & \longmapsto & T^t(f) = f \circ T
\end{array}$$

Das propriedades da transformação transposta, sabemos que
$$\mathrm{Ker}\ T^t = (\mathrm{Im}\ T)^0 = (V/W)^0 = \{0\}$$
$$\mathrm{Im}\ T^t = (\mathrm{Ker}\ T)^0 = W^0$$

Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos que

$$\frac{(V/W)^*}{\text{Ker } T^t} \cong \text{Im } T^t \Rightarrow \frac{(V/W)^*}{\{0\}} \cong W^0 \Rightarrow \boxed{(V/W)^* \cong W^0}$$

Mostremos agora que $V^*/W^0 \cong W^*$. Utilizaremos a mesma estratégia, mas considerando agora a inclusão. Tome a inclusão de W em V, isto é:

$$\begin{array}{rccl} \iota & : & W & \longrightarrow & V \\ & & w & \longmapsto & \iota(w) = w \end{array}$$

Note que Ker $\iota = \{0\}$ e Im $\iota = W$. Seja

$$\begin{array}{rccl} \iota^t & : & V^* & \longrightarrow & W^* \\ & & f & \longmapsto & \iota(f) = f \circ \iota \end{array}$$

a transposta de ι. Observe que

$$\text{Ker } \iota^t = (\text{Im } \iota)^0 = W^0$$

$$\text{Im } \iota^t = (\text{Ker } \iota)^0 = \{0\}^0 = W^*$$

Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo,

$$\frac{V^*}{\text{Ker } \iota^t} \cong \text{Im } \iota^t \Rightarrow \frac{V^*}{W^0} \cong W^* \Rightarrow \boxed{V^*/W^0 \cong W^*}$$

2.11 Exercício 11

(11) Sejam $A, B, C \in \mathscr{M}_n(K)$. Prove que

$$\det \begin{bmatrix} 0 & C \\ A & B \end{bmatrix} = (-1)^n \det(A) \det(C).$$

Solução: Considere

$$\begin{array}{rccl} F_1 & : & \mathscr{M}_n(K) & \longrightarrow & K \\ & & X & \longmapsto & F_1(X) = \det \begin{bmatrix} 0 & X \\ A & B \end{bmatrix} \end{array}$$

Observe que F_1 é n-linear e alternada nas linhas de X. Logo, existe um $\lambda_1 \in K$ tal que

$$F_1(X) = \lambda_1 \det(X).$$

Em particular,

$$\lambda_1 = \lambda_1 \cdot 1 = \lambda_1 \det(I_n) = F_1(I_n) = \det \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A & B \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A & B \end{bmatrix}}$$

Considere agora

$$\begin{array}{rccl} F_2 & : & \mathscr{M}_n(K) & \longrightarrow & K \\ & & Y & \longmapsto & F_2(Y) = \det \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ Y & B \end{bmatrix} \end{array}$$

Temos que F_2 é n-linear e alternada nas colunas de Y. Logo, existe um $\lambda_2 \in K$ tal que

$$F_2(Y) = \lambda_2 \det(Y).$$

Além disso,

$$\lambda_2 = \lambda_2 \cdot 1 = \lambda_2 \det(I_n) = F_2(I_n) = \det \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & B \end{bmatrix} = (-1)^n \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = (-1)^n}$$

Logo,

$$\lambda_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A & B \end{bmatrix} = F_2(A) = \lambda_2 \det(A) = (-1)^n \det(A)$$

Consequentemente,

$$\det \begin{bmatrix} 0 & C \\ A & B \end{bmatrix} = F_1(C) = \lambda_1 \det(C) = (-1)^n \det(A) \det(C)$$

Portanto, concluímos que

$$\det \left[\begin{array}{cc} 0 & C \\ A & B \end{array} \right] = (-1)^n \det(A) \det(C).$$

Observação: Mas porquê $\det \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & B \end{bmatrix} = (-1)^n$? Vamos explicitar essa matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{array} \right]$$

Por definição, temos que

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \operatorname{sgn}(\sigma) m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \dots m_{2n\sigma(2n)}.$$

Mas observe que $m_{1\sigma(1)} \neq 0$ apenas quando $\sigma(1) = n + 1$. Também temos que $m_{2\sigma(2)} \neq 0$ apenas quando $\sigma(2) = n + 2$. Analogamente, concluímos que, para todo $k \leq n$,

$$m_{k\sigma(k)} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma(k) = n + k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases},$$

já que $m_{k\sigma(k)}$ estará na área em verde na matriz. Portanto, os somandos serão não nulos somente para as permutações que satisfazem $\sigma(k) = n + k$, para $k \leq n$. Então, temos que para $n < \ell \leq 2n$, $\sigma(\ell) = p$, onde $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ Agora, veja que $m_{\ell\sigma(\ell)}$ se encontrará na área em vermelho na matriz, e portanto

$$m_{\ell\sigma(\ell)} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma(\ell) = \ell - n; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, a única permutação para a qual $m_{g\sigma(g)} \neq 0 \ \forall g \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ será a permutação

$$\rho = (1 \ \ n + 1)(2 \ \ n + 2) \dots (n \ \ 2n),$$

que é composta por uma quantidade ímpar de transposições, se n é ímpar, ou por uma quantidade par de transposições, se n é par. Logo, $\operatorname{sgn}(\rho) = (-1)^n$. Portanto, concluímos que

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \operatorname{sgn}(\sigma) m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \dots m_{2n\sigma(2n)} = \operatorname{sgn}(\rho) m_{1\rho(1)} m_{2\rho(2)} \dots m_{2n\rho(2n)} =$$

$$(-1)^n m_{1(n+1)} m_{2(n+2)} \dots m_{2n(n)} = (-1)^n$$

2.12 Exercício 12

(12) Calcule o determinante da matriz de Vandermonde, isto é, prove que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \dots & c_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (c_j - c_i)$$

Solução: Vamos provar o resultado por indução sobre $n \geq 2$. Para $n = 2$, é fácil ver que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} = c_2 - c_1 = \prod_{1 \le i < j \le 2} (c_j - c_i)$$

Assuma o resultado válido para $n - 1$, ou seja,

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{n-2} & c_2^{n-2} & \dots & c_n^{n-2} \end{bmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n-1} (c_j - c_i) = \prod_{1 \le i < j \le n-1} (c_j - c_i)$$

Provemos para a matriz $n \times n$. Utilizando a matriz transposta, vamos aplicar operações nas colunas da matriz de modo a obter zeros na primeira linha. Para isso, vamos multiplicar cada coluna C_i por $-c_1$ e somaremos com a coluna C_{i+1}, obtendo

$$\begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \dots & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-1} \\ 1 & c_3 & c_3^2 & \dots & c_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-1} \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{i+1} = C_{i+1} - c_1 C_i} \begin{bmatrix} 1 & c_1 - c_1 1 & c_1^2 - c_1 c_1 & \dots & c_1^{n-1} - c_1 c_1^{n-2} \\ 1 & c_2 - c_1 1 & c_2^2 - c_1 c_2 & \dots & c_2^{n-1} - c_1 c_2^{n-2} \\ 1 & c_3 - c_1 1 & c_3^2 - c_1 c_3 & \dots & c_3^{n-1} - c_1 c_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_n - c_1 1 & c_n^2 - c_1 c_n & \dots & c_n^{n-1} - c_1 c_n^{n-2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & c_2 - c_1 & c_2(c_2 - c_1) & \dots & c_2^{n-2}(c_2 - c_1) \\ 1 & c_3 - c_1 & c_3(c_3 - c_1) & \dots & c_3^{n-2}(c_3 - c_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_n - c_1 & c_n(c_n - c_1) & \dots & c_n^{n-2}(c_n - c_1) \end{bmatrix}$$

Utilizando o Teorema de Laplace, temos que

$$\det \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 1 & c_2 - c_1 & c_2(c_2 - c_1) & \dots & c_2^{n-2}(c_2 - c_1) \\ 1 & c_3 - c_1 & c_3(c_3 - c_1) & \dots & c_3^{n-2}(c_3 - c_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_n - c_1 & c_n(c_n - c_1) & \dots & c_n^{n-2}(c_n - c_1) \end{array}\right] =$$

$$\det\begin{bmatrix} c_2-c_1 & c_2(c_2-c_1) & \dots & c_2^{n-2}(c_2-c_1) \\ c_3-c_1 & c_3(c_3-c_1) & \dots & c_3^{n-2}(c_3-c_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n-c_1 & c_n(c_n-c_1) & \dots & c_n^{n-2}(c_n-c_1) \end{bmatrix}$$

Como cada linha está multiplicada por $c_i - c_1$, por propriedades do determinante, temos que

$$\det\begin{bmatrix} c_2-c_1 & c_2(c_2-c_1) & \dots & c_2^{n-2}(c_2-c_1) \\ c_3-c_1 & c_3(c_3-c_1) & \dots & c_3^{n-2}(c_3-c_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n-c_1 & c_n(c_n-c_1) & \dots & c_n^{n-2}(c_n-c_1) \end{bmatrix} =$$

$$(c_2-c_1)(c_3-c_1)\cdot\ldots\cdot(c_n-c_1)\det\begin{bmatrix} 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-2} \\ 1 & c_3 & c_3^2 & \dots & c_3^{n-2} \\ 1 & c_4 & c_4^2 & \dots & c_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-2} \end{bmatrix} =$$

$$\prod_{j=2}^{n}(c_j-c_1)\det\begin{bmatrix} 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-2} \\ 1 & c_3 & c_3^2 & \dots & c_3^{n-2} \\ 1 & c_4 & c_4^2 & \dots & c_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

Como a matriz resultante tem tamanho $n-1 \times n-1$, da hipótese de indução, vem

$$\det\begin{bmatrix} 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-2} \\ 1 & c_3 & c_3^2 & \dots & c_3^{n-2} \\ 1 & c_4 & c_4^2 & \dots & c_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-2} \end{bmatrix} = \prod_{2\leq i<j\leq n}(c_j-c_i).$$

Daí,

$$\left(\prod_{j=2}^{n}(c_j-c_1)\right)\det\begin{bmatrix} 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-2} \\ 1 & c_3 & c_3^2 & \dots & c_3^{n-2} \\ 1 & c_4 & c_4^2 & \dots & c_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-2} \end{bmatrix} =$$

$$\left(\prod_{j=2}^{n}(c_j-c_1)\right)\left(\prod_{2\leq i<j\leq n}(c_j-c_i)\right) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(c_j-c_i)$$

Assim, segue o resultado.

2.13 Exercício 13

(13) Mostre que

$$\det\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

Solução: Considere

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix},$$

e seja

$$C = \det \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz CC^t é diagonal, já que as colunas são ortogonais. Como $\det(C) = \det(C^t)$, temos que

$$\det(C^2) = \det(C)\det(C) = \det(C)\det(C^t) = \det(CC^t)$$

De fato, temos que

$$CC^t = \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

Daí,

$$\det(CC^t) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

Portanto,

$$(\det(C))^2 = \det(CC^t) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4 \Rightarrow \det(C) = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

Mas observe que o coeficiente de a^4 no determinante de C deve ser 1, o que impossibilita a opção $\det(C) = -(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$, já que nesse caso o coeficiente de a^4 seria -1. Logo, segue que

$$\det(C) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

Outra solução: (assumindo $K = \mathbb{C}$) Primeiramente, vamos mostrar que, para $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, temos que

$$\det \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = \left|\det(A+Bi)\right|^2$$

De fato:

$$\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A-iB & -B \\ B+iA & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A-iB & -B \\ i(A-iB) & A \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} A-iB & -B \\ i(A-iB)-i(A-iB) & A+iB \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A-iB & -B \\ 0 & A+iB \end{pmatrix} = \left|\det(A+Bi)\right|^2$$

Portanto, escrevendo

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix},$$

segue que

$$\det \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = \left|\det(A+Bi)\right|^2.$$

Como

$$A + Bi = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix} i = \begin{bmatrix} a+ci & -b+di \\ b+di & a-ci \end{bmatrix},$$

temos que

$$\left|\det(A+Bi)\right|^2 = \left|\det \begin{bmatrix} a+ci & -b+di \\ b+di & a-ci \end{bmatrix}\right|^2 = \left|(a+ci)(a-ci)-(di-b)(di+b)\right|^2 =$$

$$\left|a^2+c^2-(-b^2-d^2)\right|^2 = \left|a^2+c^2+b^2+d^2\right|^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

2.14 Exercício 14

(14) Sejam $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Mostre que se A é inversível então existem no máximo n escalares c tais que $cA+B$ não é inversível.

Solução: Se $cA+B$ é inversível, isso quer dizer que

$$(cA+B)A^{-1} = cI + BA^{-1}$$

é inversível.[1]
Considere portanto a função

$$\begin{array}{rccl} p : & K & \longrightarrow & K \\ & c & \longmapsto & p(c) = \det(cI+BA^{-1}) \end{array}$$

Veja que essa função na verdade é um polinômio de grau n na variável c. De fato, chamando

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

temos que

$$cI+BA^{-1} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c+\sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{k1} & c+\sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{k2} & c+\sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{k3} & \dots & c+\sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{kn} \end{pmatrix}$$

[1] De fato, $cA+B$ é inversível se e somente se $cI+BA^{-1}$ é inversível.

Assim, temos que

$$\det(cI + BA^{-1}) = \det \begin{pmatrix} c + \sum\limits_{k=1}^{n} b_{1k}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} b_{1k}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{n} b_{1k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} b_{1k}a_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} b_{2k}a_{k1} & c + \sum\limits_{k=1}^{n} b_{2k}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{n} b_{2k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} b_{2k}a_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} b_{3k}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} b_{3k}a_{k2} & c + \sum\limits_{k=1}^{n} b_{3k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} b_{3k}a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} b_{nk}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} b_{nk}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{n} b_{nk}a_{k3} & \dots & c + \sum\limits_{k=1}^{n} b_{nk}a_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)} \dots \alpha_{n\sigma(n)} = \alpha_{11}\alpha_{22} \dots \alpha_{nn} + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq 1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)} \dots \alpha_{n\sigma(n)} =$$

$$\left(c + \sum_{k=1}^{n} b_{1k}a_{k1}\right)\left(c + \sum_{k=1}^{n} b_{2k}a_{k2}\right) \dots \left(c + \sum_{k=1}^{n} b_{nk}a_{kn}\right) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq 1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)} \dots \alpha_{n\sigma(n)} =$$

$$c^n + \left(\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{mk}a_{km}\right)\right)c^{n-1} + \dots + \left(\prod_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{mk}a_{km}\right)\right) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq 1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{r=1}^{n}\alpha_{r\sigma(r)}$$

Logo, p é um polinômio de grau n com coeficientes no corpo K.
Observe que $cA + B$ não será inversível quando $\det(cI + BA^{-1}) = 0$, ou seja, quando c for uma raiz de p. Como o grau de p é n, segue que este possui no máximo n raízes em K, e daí temos que existem no máximo c escalares tais que $cA + B$ não é inversível.

2.15 Exercício 15

(15) Sejam $A, B, C, D \in \mathscr{M}_n(K)$ com D inversível.

(a) Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BD^{-1}CD)$$

(b) Se $CD = DC$, mostre que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC).$$

O que acontece quando D não é inversível?

(c) Se $DB = BD$, calcule $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.

Solução: Pelo Teorema de Binet, sabemos que o determinante de um produto de duas matrizes quadradas é o produto de seus determinantes, ou seja, se $X, Y \in \mathscr{M}_n(K)$, então

$$\det(X)\det(Y) = \det(XY)$$

Além disso, lembramos que, para $U, V, X, Y \in \mathscr{M}_n(K)$, temos

$$\det \begin{bmatrix} U & 0 \\ X & Y \end{bmatrix} = \det U \det Y$$

e

$$\det \begin{bmatrix} U & V \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \det U \det Y$$

Feitas essas observações, estamos aptos a resolver a questão.

(a) Para obter o resultado desejado, a ideia será multiplicar a matriz em questão por uma matriz conveniente cujo determinante é 1. Dessa forma, utilizando as observações acima, sendo I_n a notação para a matriz identidade $n \times n$, e lembrando que D é invertível, temos que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Calculando os determinantes, vem

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{bmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{bmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) \cdot \det I_n \cdot \det I_n = \det\left(A - BD^{-1}C\right)\det(D) \Rightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) \cdot \det(I_n I_n) = \det\left((A - BD^{-1}C)D\right) \Rightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) \cdot \det(I_n) = \det(AD - BD^{-1}CD) \Rightarrow$$

$$\boxed{\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det\left(AD - BD^{-1}CD\right)}$$

(b) Utilizando as observações acima, sendo I_n a notação para a matriz identidade $n \times n$, e usando o fato de que $CD = DC$, temos que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ CD - DC & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Como D é invertível, temos $\det D \neq 0$. Portanto, segue que

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{bmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{bmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) \cdot \det(D)\det(I_n) = \det(AD - BC)\det(D) \Rightarrow$$

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC)\det(D) \cdot \frac{1}{\det(D)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC)}$$

(c) Para resolver este item, vamos utilizar as propriedades das matrizes transpostas. Lembrando que, se $X, Y \in \mathscr{M}_n(K)$, então

- $(X^t)^t = X$;
- $(X + Y)^t = X^t + Y^t$;
- $(XY)^t = Y^t X^t$;
- $\det(X^t) = \det(X)$.

De posse dessas propriedades, observe que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix}$$

Daí, utilizando a notação I_n para a matriz identidade $n \times n$, e usando o fato de que $DB = BD$,

$$\begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D^t & 0 \\ -B^t & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^t D^t - B^t C^t & C^t \\ B^t D^t - D^t B^t & D^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (DA)^t - (CB)^t & C^t \\ (DB)^t - (BD)^t & D^t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (DA - CB)^t & C^t \\ (DB - BD)^t & D^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (DA - CB)^t & C^t \\ 0 & D^t \end{pmatrix}$$

Novamente, sendo D invertível, então D^t também é invertível. Logo, temos

$$\det\left(\begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D^t & 0 \\ -B^t & I_n \end{bmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} (DA - CB)^t & C^t \\ 0 & D^t \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix}\right)\det\left(\begin{bmatrix} D^t & 0 \\ -B^t & I_n \end{bmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} (DA-CB)^t & C^t \\ 0 & D^t \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix}\right)\det(D^t)\det(I_n) = \det\left((DA-CB)^t\right)\det\left(D^t\right) \Rightarrow$$

$$\det\begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} = \det\left((DA-CB)^t\right)\det\left(D^t\right)\cdot\frac{1}{\det\left(D^t\right)} \Rightarrow$$

$$\det\begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} = \det\left((DA-CB)^t\right) \Rightarrow \boxed{\det\begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} = \det\left(DA-CB\right)}$$

2.16 Exercício 16

(16) Seja $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(K)$. Prove que

$$\det(I_m + AA^t) = \det(I_n + A^tA)$$

Observação: Tal identidade é um caso particular da conhecida como *identidade de Weinstein-Aronszajn*.

Solução: Se A é uma matriz:

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ A^T & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m + AA^T & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -A^T & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n + A^TA \end{pmatrix}.$$

Desse modo,

$$\det\left(\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ A^T & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m + AA^T & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -A^T & I_n \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n + A^TA \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ A^T & I_n \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} I_m + AA^T & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -A^T & I_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n + A^TA \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(I_m)\det(I_n)\det\left(I_m + AA^T\right)\det(I_n)\det(I_m)\det(I_n) = \det(I_m)\det(I_n + A^TA) \Rightarrow$$

$$\boxed{\det\left(I_m + AA^T\right) = \det(I_n + A^TA)}$$

Outra solução: Vamos utilizar uma versão estendida do item a do exercício 15: Sendo $A \in \mathscr{M}_n(K)$ $B \in \mathscr{M}_{m\times n}(K)$, $C \in \mathscr{M}_{n\times m}(K)$ e $D \in \mathscr{M}_n$, com D invertível, temos que

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(D)\det(A - BD^{-1}C)$$

Daí, tomando $A = I_m$, $B = A$, $C = -A^t$ e $D = I_n$, temos que

$$\det\begin{bmatrix} I_m & A \\ -A^t & I_n \end{bmatrix} = \det(I_n)\det(I_m - AI_n{}^{-1}(-A^t)) = \underbrace{\det(I_n)}_{=1}\det(I_m + AA^t) = \det(I_m + AA^t)$$

Por outro lado, observando que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix},$$

temos

$$\det \begin{bmatrix} I_n & -A^t \\ A & I_m \end{bmatrix} = \det(I_m)\det(I_n - (-A^t)I_m{}^{-1}A) = \underbrace{\det(I_m)}_{=1}\det(I_n + A^tA) = \det(I_n + A^tA)$$

Portanto, concluímos que $\det(I_m + AA^t) = \det(I_n + A^tA)$.

2.17 Exercício 17

(17) Seja $\sigma \in S_n$ e defina

$$\begin{array}{rcccl} T_\sigma & : & K^n & \longrightarrow & K^n \\ & & e_i & \longmapsto & T_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \end{array},$$

para $i = \{1, 2, \dots, n\}$ e $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é a base canônica de K^n. Calcule $\det(T_\sigma)$.

Solução: Observe que T_σ está permutando as colunas da matriz cujas colunas são os elementos da base canônica. Assim, para cada coluna i, vamos associar o vetor $e_{\sigma(i)}$. Então, sendo A a matriz de T_σ na base canônica, temos que $a_{\ell k} = 1$ se e somente se $k = \sigma(\ell)$. Da definição de determinante, sabemos que

$$\det A = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)}$$

Mas observe que os somandos acima serão todos não nulos apenas se $\tau = \sigma$. Então,

$$\det A = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)} = \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = \operatorname{sgn}(\sigma) 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Portanto, $\det(T_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

2.18 Exercício 18

(18) Seja $C \in \mathscr{M}_n(K)$ a matriz

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x + c_{n-1} \end{bmatrix}$$

Prove que $\det C = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

Solução: Vamos provar o resultado por indução sobre $n \geq 2$.
Para $n = 2$, temos que

$$C = \begin{bmatrix} x & c_0 \\ -1 & x + c_1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\det C = x(x + c_1) + c_0 = x^2 + c_1 x + c_0.$$

Seja agora $n > 2$ e admita que o resultado é verdadeiro para matrizes $n-1 \times n-1$ desse tipo. Usando o desenvolvimento de $\det C$ por Laplace, pela primeira linha, temos que

$$\det \left[\begin{array}{c|cccc|c} x & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \\ \hline -1 & x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x + c_{n-1} \end{array}\right] =$$

$$x \cdot \det \begin{bmatrix} x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x + c_{n-1} \end{bmatrix} + (-1)^{n+1} c_0 \det \begin{bmatrix} -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Pela hipótese de indução, segue que

$$\det C = x(x^{n-1} + c_{n-1}x^{n-2} + \ldots + c_2 x + c_1) + (-1)^{n+1} c_0 (-1)^{n-1} = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0,$$

como queríamos.

2.19 Exercício 19

(19) Seja K um corpo e $A_1, \ldots, A_n$ matrizes quadradas sobre K. Seja B a matriz triangular por blocos

$$\begin{bmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{bmatrix}$$

Mostre que $\det B = \det(A_1)\det(A_2)\ldots\det(A_n)$.

Solução: A demonstração de tal resultado se dará por indução em n. Para $n = 2$, temos a matriz

$$\begin{bmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

na qual sabemos que seu determinante é $\det(A_1)\det(A_2)$.
Suponha que o resultado é verdadeiro para certo $n = k$. Dessa forma, temos que

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix} = \det(A_1)\det(A_2)\ldots\det(A_k) = \prod_{i=1}^{k} \det(A_i)$$

Calculemos o determinante de B para $n = k+1$. Dividindo a matriz em blocos, e utilizando que, para $U \in \mathscr{M}_\ell(K)$, $V \in \mathscr{M}_{\ell \times m}(K)$, $Y \in \mathscr{M}_m(K)$, temos que

$$\det \begin{pmatrix} U & V \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \det(U)\det(Y),$$

Em particular, tomando $\ell = k$ e $m = 1$, podemos considerar

$$\det \left[\begin{array}{ccccc|c} A_1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & A_2 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_k & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{k+1} \end{array}\right] = \det \begin{pmatrix} U & V \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \det(U)\det(Y) =$$

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix} \det(A_{k+1}) = \left(\prod_{i=1}^{k} \det(A_i)\right) \cdot \det(A_{k+1}) =$$

$$\prod_{i=1}^{k+1} \det(A_i) = \det(A_1)\det(A_2)\dots\det(A_k)\det(A_{k+1})$$

Segue então o resultado desejado.

2.20 Exercício 20

(20) Seja K um corpo e $a, b, c, d, e, f, g \in K$. Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} a & b & b \\ c & d & e \\ f & g & g \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b & b \\ e & c & d \\ f & g & g \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b & b \\ d & e & c \\ f & g & g \end{bmatrix} = 0$$

Solução: Temos que o determinante é uma forma 3-linear das linhas da matriz, então:

$$\det \begin{bmatrix} a & b & b \\ c & d & e \\ f & g & g \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b & b \\ e & c & d \\ f & g & g \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b & b \\ d & e & c \\ f & g & g \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & b \\ c+d+e & d+c+e & e+d+c \\ f & g & g \end{bmatrix}$$

Note que a segunda e a terceira coluna são iguais. Como o determinante é 3-linear e alternado nas colunas da matriz, segue que

$$\det \begin{bmatrix} a & b & b \\ c+d+e & d+c+e & e+d+c \\ f & g & g \end{bmatrix} = 0.$$

2.21 Exercício 21

(21) Sabendo que os números inteiros $23028, 31882, 86469, 6327$ e 61902 são todos múltiplos de 19, mostre que o número inteiro

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 8 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 9 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é múltiplo de 19.

Solução: Utilizaremos as propriedades dos determinantes. Multiplicando a primeira coluna por 10^4, a segunda por 10^3, a terceira por 10^2, e a quarta por 10, chamando

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 8 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 9 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\det \begin{bmatrix} 20000 & 3000 & 0 & 20 & 8 \\ 30000 & 1000 & 800 & 80 & 2 \\ 80000 & 6000 & 400 & 60 & 9 \\ 0 & 6000 & 300 & 20 & 7 \\ 60000 & 1000 & 900 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2\cdot 10^4 & 3\cdot 10^3 & 0\cdot 10^2 & 2\cdot 10 & 8 \\ 3\cdot 10^4 & 1\cdot 10^3 & 8\cdot 10^2 & 8\cdot 10 & 2 \\ 8\cdot 10^4 & 6\cdot 10^3 & 4\cdot 10^2 & 6\cdot 10 & 9 \\ 0\cdot 10^4 & 6\cdot 10^3 & 3\cdot 10^2 & 2\cdot 10 & 7 \\ 6\cdot 10^4 & 1\cdot 10^3 & 9\cdot 10^2 & 0\cdot 10 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$10^4 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 10 \det A = 10^{10} \det A$$

Agora, somando as quatro primeiras colunas à quinta coluna, isso não altera o valor do determinante, e como todos os elementos são múltiplos de 19, temos

$$\det \begin{bmatrix} 20000 & 3000 & 0 & 20 & 23028 \\ 30000 & 1000 & 800 & 80 & 31882 \\ 80000 & 6000 & 400 & 60 & 86469 \\ 0 & 6000 & 300 & 20 & 6327 \\ 60000 & 1000 & 900 & 0 & 61902 \end{bmatrix} = 10^{10} \det A \Rightarrow$$

$$\det \begin{bmatrix} 20000 & 3000 & 0 & 20 & 23028 \\ 30000 & 1000 & 800 & 80 & 31882 \\ 80000 & 6000 & 400 & 60 & 86469 \\ 0 & 6000 & 300 & 20 & 6327 \\ 60000 & 1000 & 900 & 0 & 61902 \end{bmatrix} = 10^{10} \det A \Rightarrow$$

$$\det \begin{bmatrix} 20000 & 3000 & 0 & 20 & 19\cdot 1212 \\ 30000 & 1000 & 800 & 80 & 19\cdot 1678 \\ 80000 & 6000 & 400 & 60 & 19\cdot 4551 \\ 0 & 6000 & 300 & 20 & 19\cdot 333 \\ 60000 & 1000 & 900 & 0 & 19\cdot 3258 \end{bmatrix} = 10^{10} \det A \Rightarrow$$

$$19 \det \begin{bmatrix} 20000 & 3000 & 0 & 20 & 1212 \\ 30000 & 1000 & 800 & 80 & 1678 \\ 80000 & 6000 & 400 & 60 & 4551 \\ 0 & 6000 & 300 & 20 & 333 \\ 60000 & 1000 & 900 & 0 & 3258 \end{bmatrix} = 10^{10} \det A$$

Desse modo, temos que $19 \mid 10^{10} \det A$, mas como $\mathrm{mdc}(10^{10}, 19) = 1$, ou seja, 19 e 10^{10} são primos entre si, temos que $19 \mid \det A$. Portanto, o determinante de A é um múltiplo de 19.

2.22 Exercício 22

(22) Seja K corpo e $a, b, c \in K$. Usando a matriz $\begin{bmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$, calcule

$$\det \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & ab & ac \\ ab & a^2 + c^2 & bc \\ ac & bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

Solução: Chamando

$$A = \begin{bmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{bmatrix},$$

observe que

$$AA^t = \begin{bmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{bmatrix} = B.$$

Logo, temos que

$$\det(B) = \det(AA^t) \Rightarrow \det(B) = \det(A)\det(A^t) \Rightarrow$$

$$\det(B) = \det(A)\det(A) \Rightarrow \boxed{\det(B) = (\det(A))^2}$$

2.23 Exercício 23

(23) Seja K um corpo e n um inteiro positivo. Dadas matrizes $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ mostre que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$$

Solução: Como somar elementos das colunas e somar elementos das linhas não altera o determinante da matriz, temos que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+B & B \\ B+A & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+B & B \\ B+A-(A+B) & A-B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{pmatrix}$$

Utilizando o fato de que, para $U, V, X, Y \in \mathscr{M}_n(K)$, temos

$$\det \begin{bmatrix} U & V \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \det U \det Y$$

Ficamos com

$$\det \begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B) \Rightarrow \det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$$

2.24 Exercício 24

(24) Seja K um corpo e V um espaço vetorial de dimensão finita n. Sejam $B = (e_1, \ldots, e_n)$ e $C = (d_1, \ldots, d_n)$ duas bases de V. Sejam φ a única forma n-linear tal que $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = 1$ e ψ a única forma n-linear tal que $\psi(d_1, \ldots, d_n) = 1$. Qual o valor de $\psi(e_1, \ldots, e_n)$ e de $\varphi(d_1, \ldots, d_n)$? Use isso para dar uma relação entre ψ e φ.

2.25 Exercício 25

(25) Seja K um corpo, n um inteiro positivo e $K_n[t]$ o conjunto de polinômios de grau menor ou igual que n com coeficientes em K. Sejam $t_1, \ldots, t_{n+1} \in K$ dois a dois distintos. Considere para $i = 1, \ldots, n+1$ as funções de avaliação

$$\begin{array}{rccl} \tau_i & : & K_n[t] & \longrightarrow & K \\ & & p(t) & \longmapsto & \tau_i(p(t)) = p(t_i) \end{array}$$

(a) Mostre que $\mathscr{B} = \{\tau_1, \ldots, \tau_{n+1}\}$ é base de $K_n[t]^*$. (Sugestão: use o exercício 12.)

(b) Mostre que os *polinômios de Lagrange*

$$L_i(t) = \prod_{j \neq i} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, i = 1, \ldots, n+1,$$

formam uma base dual de $\mathscr{B}$.

(c) Mostre que para quaisquer $a_1, \ldots, a_{n+1} \in K$ existe um único polinômio $p(t)$ de grau menor o igual que n tal que $p(t_i) = a_i$, para $i = 1, \ldots, n+1$. (O resultado do item (c) é a conhecida *Fórmula de Interpolação de Lagrange*)

Solução:

(a) Como $K_n[t]$ é um K-espaço vetorial de dimensão finita, temos que $\dim K_n[t]^* = \dim K_n[t] = n+1$. Logo, para provar que $\mathscr{B}$ é base, basta mostrar que $\mathscr{B}$ é LI.

Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in K$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_i = \alpha_1 \tau_1 + \ldots + \alpha_{n+1}\tau_{n+1} = 0$$

Vamos mostrar que $\alpha_i = 0 \; \forall i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Avaliemos $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_i$ em $1, t, \ldots, t^n$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_i(1) = \alpha_1 \tau_1(1) + \ldots + \alpha_{n+1}\tau_{n+1}(1) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_i(t) = \alpha_1 \tau_1(t) + \ldots + \alpha_{n+1}\tau_{n+1}(t) = 0 \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_i(t^n) = \alpha_1 \tau_1(t^n) + \ldots + \alpha_{n+1}\tau_{n+1}(t^n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 1 + \ldots + \alpha_{n+1} 1 = 0 \\ \alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_{n+1} t_{n+1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 t_1^n + \ldots + \alpha_{n+1} t_{n+1}^n = 0 \end{cases}$$

Logo, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})$ é solução do sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^n & t_2^n & \ldots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ são diferentes, observe que a matriz obtida é uma matriz de Vandermonde. Assim, pela questão 12, temos que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^n & t_2^n & \ldots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n+1} (t_j - t_i) \neq 0,$$

o que resulta que a única solução possível para este sistema é a trivial. Consequentemente, temos $t_1 = t_2 = \ldots = t_{n+1} = 0$. Daí, $\mathscr{B}$ é LI, e portanto uma base para $K_n[t]^*$.

2.26 Exercício 26

(26) Seja $n > 1$ um inteiro e $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Seja $\mathscr{C}^{(n-1)}(I, \mathbb{R})$ o conjunto das funções de classe $n-1$, i.e. deriváveis $n-1$ vezes com derivada $n-1$ contínua. Dadas $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{C}^{(n-1)}(I, \mathbb{R})$, o *Wronskiano* de $f_1, \ldots, f_n$ é a função

$$\begin{array}{rccl} W(f_1, \ldots, f_n) & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & (W(f_1, \ldots, f_n))(t) \end{array}$$

definida como

$$(W(f_1, \ldots, f_n))(t) = \det \begin{bmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \ldots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \ldots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Mostre que se existir $t \in I$ tal que $(W(f_1, \dots, f_n))(t) \neq 0$ então $\{ff_1, \dots, f_n\} \subset \mathscr{C}^{(n-1)}(I, \mathbb{R})$ é $\mathbb{R}$-linearmente independente.
Observe que a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, seja $I = (-1, 1)$, $f_1 \colon t \to t^3$, $f_2 \colon t \to \left|t^3\right|$. O conjunto $\{f_1, f_2\}$ é $\mathbb{R}$-linearmente independente, mas $(W(f_1, f_2))(t) = 0$ para todo $t \in (-1, 1)$.

Solução:

2.27 Exercício 27

(27) Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita n e sejam $f_1, f_2, \dots, f_r \in V^*$. Defina

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r \colon V \times V \times \dots \times V \to K$$

por $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r(v_1, v_2, \dots, v_r) = \det f_i(v_j)$.

(a) Verifique que $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r$ é r-linear e alternada.

(b) Mostre que $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r \neq 0$ se, e somente se $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ é linearmente independente.

(c) Prove que se $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$é uma base de V^* então o conjunto

$$\{f_J = f_{j_1} \wedge f_{j_2} \wedge \dots \wedge f_{j_r}\}, \text{ para todo } J = \{j_1 < j_2 < \dots j_r\} \subset \{1, 2, \dots, n\}\}$$

é uma base de $\mathscr{A}_r(V)$.

(d) Sejam B de uma base de V e $B^* = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ sua base dual. Descreva a base de $\mathscr{A}_r(V)$ que obtemos usando o item anterior. (A forma linear $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r$ é chamada de *produto exterior* dos funcionais $f_1, f_2, \dots, f_r$.)

Solução:
Questões Suplementares

2.28 Exercício 28

(28) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \frac{1}{x_1+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \frac{1}{x_2+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \frac{1}{x_3+y_1} & \frac{1}{x_3+y_2} & \frac{1}{x_3+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_3+y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \frac{1}{x_n+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{pmatrix},$$

onde $x_i + y_j \neq 0$ para $1 \leq i, j \leq n$. Mostre que o determinante dessa matriz, conhecido por *determinante de Cauchy*, é dado por

$$\det A = \frac{\prod_{i>j}^{n} (x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j=1}^{n} (x_i + y_j)}$$

Solução:

2.29 Exercício 29

(29) O determinante da *matriz circulante* $n \times n$ é dado por

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{bmatrix} = (-1)^{n-1} \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n} \zeta^{jk} a_k \right),$$

onde $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Encontre o determinante da matriz circulante $n \times n$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & \dots & n^2 \\ n^2 & 1 & 4 & \dots & (n-1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 9 & 16 & 25 & \dots & 4 \\ 4 & 9 & 16 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução:

2.30 Exercício 30

(30) Sejam $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ duas matrizes invertíveis, tais que

$$A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1}$$

(a) Se $K = \mathbb{R}$, mostre que $\det A = \det B$.

(b) Se $K = \mathbb{C}$, mostre que pode ocorrer $\det A \neq \det B$, mas é válido que $|detA| = |\det B|$.

Solução:

2.31 Exercício 31

(31) Prove a identidade de Woodbury: para $A \in \mathscr{M}_n(K)$, $U \in \mathscr{M}_{n\times m}(K)$, $C \in \mathscr{M}_{m\times m}(K)$ e $V \in \mathscr{M}_{m\times n}(K)$, temos que

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U\left(C^{-1} + VA^{-1}U\right)^{-1} VA^{-1}$$

Solução:

2.32 Exercício 32

(32) [Teorema do Determinante de Gasper] Seja $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, s a soma das entradas da matriz e q a soma dos quadrados das entradas dessa matriz. Considere $\alpha = \frac{s}{n}$ e $\beta = \frac{q}{n}$. O Teorema do Determinante de Gasper afirma que $|\det A| \leq \beta^{\frac{n}{2}}$, e no caso em que $\alpha^2 \geq \beta$:

$$|\det A| \leq |\alpha| \left(\frac{n\beta - \alpha^2}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

Solução:

2.33 Exercício 33

(33) Considere a matriz quadrada A_n cujas entradas são os n^2 primeiros números primos.

(a) Mostre que o maior valor possível para $\det(A_2)$ é um número primo.

(b) Encontre todos os valores de n para os quais o maior determinante possível para $\det(A_n)$ é um número primo.

3 Lista 2

3.1 Exercício 1

(1) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e $T \in \mathscr{L}(V)$. Sejam $\lambda \in K$ um autovalor de T e $f(t) \in K[t]$. Mostre que $f(\lambda)$ é um autovalor de $f(T)$.

Solução:
Considere $f(t) = \alpha^n t^n + \alpha^{n-1} t^{n-1} + \ldots + \alpha_0$. Sendo λ um autovalor de T, sabemos que existem um $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$. Lembrando que $T^n(v) = \lambda^n v$, temos que

$$\begin{aligned}
(f(T))(v) &= (\alpha^n T^n + \alpha^{n-1} T^{n-1} + \ldots + \alpha_1 T + \alpha_0)(v) \\
&= \alpha^n T^n(v) + \alpha^{n-1} T^{n-1}(v) + \ldots + \alpha_1 T(v) + \alpha_0 I(v) \\
&= \alpha^n \lambda^n v + \alpha^{n-1} \lambda^{n-1} v + \ldots + \alpha_1 \lambda v + \alpha_0 \lambda^0 v \\
&= \alpha^n \lambda^n v + \alpha^{n-1} \lambda^{n-1} v + \ldots + \alpha_1 \lambda v + \alpha_0 \lambda^0 v \\
&= (\alpha^n \lambda^n + \alpha^{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0) v = f(\lambda) v
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $(f(T))(v) = f(\lambda)v$. Como $v \neq 0$, temos que $f(\lambda)$ é autovalor de $f(T)$.

3.2 Exercício 2

(2) Seja V um K-espaço de dimensão finita n e seja $T \colon V \to V$ um operador linear. Mostre que se T tem n autovalores distintos então T é diagonalizável.

Solução:
Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ autovalores distintos. Para cada i existe um $v_i \neq 0$ tal que $T(v_i) = \lambda_i v_i$.

Se:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n = 0,$$

então para todo polinômio $p \in K[t]$ temos:

$$p(T)(\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n) = p(T)(0),$$

aí:

$$\alpha_1 p(T)(v_1) + \ldots \alpha_n p(T)(v_n) = 0,$$

aí, pelo exercício 1 temos:

$$\alpha_1 p(\lambda_1) v_1 + \ldots \alpha_n p(\lambda_n) v_n = 0.$$

Seria muito bom podermos encontrar um polinômio p tal que:

$$p(\lambda_1) = 1, \quad p(\lambda_2) = 0, \quad \ldots, \quad p(\lambda_n) = 0.$$

Sabemos que o polinômio:

$$q(t) = (x - \lambda_2) \ldots (x - \lambda_n)$$

satisfaz:

$$q(\lambda_2) = 0, \quad \ldots, \quad q(\lambda_n) = 0.$$

O valor de $q(\lambda_1)$ pode não ser 1, mas sabemos que $q(\lambda_1) \neq 0$, aí basta considerarmos:

$$p(t) = \frac{q(t)}{q(\lambda_1)}.$$

Aplicando este p na equação:

$$\alpha_1 p(\lambda_1) v_1 + \ldots \alpha_n p(\lambda_n) v_n = 0,$$

então obtemos:

$$\alpha_1 v_1 = 0,$$

mas $v_1 \neq 0$, assim $\alpha_1 = 0$. Analogamente $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n$. Logo a sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente, mas $\dim V = n$, aí o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ forma uma base de V. Logo T é diagonalizável.

3.3 Exercício 3

(3) Sejam V um K-espaço de dimensão finita, $T \in \mathscr{L}(V)$ e $\lambda \in K$ um autovalor de T. Chamamos de *multiplicidade algébrica* de λ ao maior inteiro m tal que $(t-\lambda)^m$ divida o polinômio característico $p_T(t)$ de T. A dimensão do autoespaço $V_T(\lambda)$ é a *multiplicidade geométrica* de λ.

(a) Mostre que a multiplicidade geométrica de λ é sempre menor ou igual à multiplicidade algébrica de λ.

(b) Mostre que T é diagonalizável se, e somente se, $p_T(t)$ é produto de fatores lineares e, para cada autovalor λ de T, as multiplicidades algébrica e geométrica de λ coincidem.

Solução:

(a) Seja m a multiplicidade geométrica de λ. Então $V_T(\lambda)$ tem uma base $\{e_1, \ldots, e_m\}$. Podemos completar para a base $B = \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ de V. Assim temos:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda I_m & X \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

Calculando o polinômio característico de T, temos

$$p_T(t) = \det(tI - [T]_B) = \det\left(\begin{pmatrix} tI_m & 0 \\ 0 & tI \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda I_m & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}\right) =$$

$$\det\begin{pmatrix} (t-\lambda)I_m & X \\ 0 & tI - Y \end{pmatrix} = (t-\lambda)^m \det(tI - Y),$$

então $(t-\lambda)^m \mid p_T(t)$, e portanto m é menor ou igual à multiplicidade algébrica de λ.

(b) $(\Rightarrow)$ Se T é diagonalizável, então, sendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ os autovalores distintos, existe uma base:

$$B = \{v_{1,1}, \ldots, v_{1,m_1}, \ldots, v_{k,1}, \ldots, v_{k,m_k}\}$$

de autovetores tais que $T(v_{l,j}) = \lambda_l v_{l,j}$ para todo $l = 1, \ldots, k$ e $j = 1, \ldots, m_l$, e portanto:

$$p_T(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \ldots (t-\lambda_k)^{m_k},$$

aí para $i = 1, \ldots, k$, para v tal que $T(v) = \lambda_i v$, sendo:

$$v = \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} v_{l,j},$$

então temos:

$$T(v) = T\left(\sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} v_{l,j}\right) = \lambda_i \left(\sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} v_{l,j}\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} T\left(v_{l,j}\right) = \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} \lambda_i v_{l,j} \Rightarrow$$

$$\sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} \lambda_l v_{l,j} = \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} \lambda_i v_{l,j} \Rightarrow$$

$$\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_l}\alpha_{l,j}\left(\lambda_l-\lambda_i\right)v_{l,j}=0,$$

e portanto para $l \neq i$ temos $\lambda_l \neq \lambda_i$, temos $\alpha_{l,j}(\lambda_l-\lambda_i)=0$, o que acarreta $\alpha_{l,j}=0$. Daí:

$$v=\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{i,j}v_{i,j}.$$

Com isso podemos concluir que o conjunto:

$$\{v_{i,1},\dots,v_{i,m_i}\}$$

é uma base de $V_T(\lambda_i)$, ou seja, $m_i=\dim V_T(\lambda_i)$.

($\Leftarrow$) Por outro lado, se:

$$p_T(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}\dots(t-\lambda_k)^{m_k}$$

e $m_i=\dim V_T(\lambda_i)$, então seja:

$$\{v_{i,1},\dots,v_{i,m_i}\}$$

uma base de $V_T(\lambda_i)$. Como $m_1+\dots+m_k=n$, basta mostrarmos que o conjunto

$$B=\{v_{1,1},\dots,v_{1,m_1},\dots,v_{k,1},\dots,v_{k,m_k}\}$$

é linearmente independente. De fato, para quaisquer escalares $\alpha_{1,1},\dots,\alpha_{1,m_1},\dots,\alpha_{k,1},\dots,\alpha_{k,m_k}\in K$, se

$$\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_l}\alpha_{l,j}v_{l,j}=0,$$

então, para todo $i=1,\dots,k$, seguindo a ideia do exercício 2, podemos considerar o polinômio

$$q(t)=\prod_{l\neq i}(x-\lambda_l)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_{i-1})(x-\lambda_{i+1})\dots(x-\lambda_k)$$

e depois:

$$p(t)=\frac{q(t)}{q(\lambda_i)},$$

assim, aplicando $p(T)$, obtemos:

$$p(T)\left(\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_l}\alpha_{l,j}v_{l,j}\right)=0\Rightarrow\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_l}\alpha_{l,j}p(T)\left(v_{l,j}\right)=0\Rightarrow$$

$$\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_l}\alpha_{l,j}p(\lambda_l)\left(v_{l,j}\right)=0,$$

aí, como $p(\lambda_i)=1$ e $p(\lambda_l)=0$ para $l\neq i$, então:

$$\sum_{j=1}^{m_l}\alpha_{i,j}\left(v_{i,j}\right)=0,$$

mas o conjunto:

$$\{v_{i,1},\dots,v_{i,m_i}\}$$

é linearmente independente, assim:

$$\alpha_{i,1}=\dots=\alpha_{i,m_i}=0;$$

logo temos:

$$\alpha_{1,1}=\dots=\alpha_{1,m_1}=\dots=\alpha_{k,1}=\dots=\alpha_{k,m_k}=0.$$

Assim, B é linearmente independente.

3.4 Exercício 4

(4) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule A^{2019}.

Solução: Calculemos o polinômio característico de A :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, temos que $p_A(A) = 0$. Daí:

$$p_A(A) = 0 \Rightarrow A^2 - 4A - 5 = 0 \Rightarrow A^2 = 4A + 5I.$$

Portanto, podemos utilizar essa identidade para obter A^n em função de A. Por exemplo:

$$A^3 = A^2 \cdot A = (4A + 5I) \cdot A = 4A^2 + 5A = 4(4A + 5I) + 5A = 21A + 20I$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (21A + 20I) \cdot A = 21A^2 + 20A = 21(4A + 5I) + 20A = 104A + 105I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (104A + 105I) \cdot A = 104A^2 + 105A = 104(4A + 5I) + 105A = 521A + 520I$$

Em geral, pode-se verificar por indução que

$$A^n = \left(\frac{5^n + 5(-1)^n}{6} + 1\right) A + \frac{5^n + 5(-1)^n}{6}$$

Logo, temos que

$$A^{2019} = \left(\frac{5^{2019} - 5}{6} + 1\right) A + \frac{5^{2019} - 5}{6}$$

Outra solução: Observe que a matriz A é diagonalizável, e portanto podemos obter P invertível e D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$. Daí, teremos que $A^n = PD^nP^{-1}$. Realizando os cálculos, obtemos

$$P = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

e portanto,

$$A^n = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$A^{2019} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5^{2019} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

3.5 Exercício 5

(5) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ um operador linear inversível. Prove que:

(a) Se λ é um valor próprio de T, então $\lambda \neq 0$.

(b) λ é um valor próprio de T se, e somente se, λ^{-1} é um valor próprio de T^{-1} (onde T^{-1} é o operador inverso de T).

(c) Se λ é um valor próprio de T, mostre que a multiplicidade algébrica de λ é igual à multiplicidade algébrica de $\frac{1}{\lambda}$.

Solução:

(a) Se λ é um autovalor de T, então sabemos que existe $\neq 0$ tal que $Tv = \lambda v$. Como T é inversível, temos que

$$T^{-1}(T(v)) = T^{-1}(\lambda v) \Rightarrow v = \lambda T^{-1}(v)$$

Sendo $v \neq 0$, temos que $\lambda T^{-1}(v) \neq 0$, o que implica $\lambda \neq 0$.

(b)

($\Rightarrow$) Se λ é autovalor de T, existe $v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v$. Temos então que

$$T^{-1}(T(v)) = T^{-1}(\lambda v) \Rightarrow v = \lambda T^{-1}(v) \Rightarrow \lambda^{-1} v = \lambda^{-1}(\lambda T^{-1}(v)) \Rightarrow T^{-1}(v) = \lambda^{-1} v$$

Portanto, como $v \neq 0$ é tal que $T^{-1}(v)\lambda^{-1}v$, temos que λ^{-1} é autovalor de T^{-1}.

($\Leftarrow$) A recíproca é análoga.

(c) Se λ é autovalor de T então, sendo B uma base e $A = [T]_B$, então seja:

$$p_T(t) = (t-\lambda)^m q(t), \quad q(\lambda) \neq 0,$$

então:

$$\begin{aligned}
\det(tI - A) &= (t-\lambda)^m q(t) \\
\det\left(\tfrac{1}{t}I - A\right) &= \left(\tfrac{1}{t} - \lambda\right)^m q\left(\tfrac{1}{t}\right) \\
\tfrac{1}{t^n}\det\left(I - tA\right) &= \left(\tfrac{1}{t} - \lambda\right)^m q\left(\tfrac{1}{t}\right) \\
\det\left(A^{-1} - tI\right)\det(A) &= t^n\left(\tfrac{1}{t} - \lambda\right)^m q\left(\tfrac{1}{t}\right) \\
\det\left(tI - A^{-1}\right) &= \frac{(-1)^{n-m}t^{n-m}\left(t - \frac{1}{\lambda}\right)^m q\left(\frac{1}{t}\right)}{\lambda^m \det(A)}
\end{aligned}$$

aí sendo:

$$r(t) = t^{n-m} q\left(\frac{1}{t}\right),$$

então r é um polinômio e aí:

$$\det\left(tI - A^{-1}\right) = \frac{(-1)^{n-m}\left(t - \frac{1}{\lambda}\right)^m r(t)}{\lambda^m \det(A)}$$

e também:

$$r\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-m} q\left(\frac{1}{\frac{1}{\lambda}}\right) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-m} q(\lambda) \neq 0.$$

3.6 Exercício 6

(6) Seja V um espaço vetorial de dimensão n e seja $T \in \mathscr{L}(V)$ de posto 1. Prove que ou T é diagonalizável ou T é nilpotente.

Solução: Como T tem posto 1, então existe uma base $\{e_1\}$ de $T[V]$. Assim podemos completar uma base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de V, e aí para cada i existe c_i tal que $T(e_i) = c_i e_1$. Temos dois casos a considerar:

- Se $c_1 = 0$, então para todo i temos:

$$T(T(e_i)) = T(c_i e_1) = c_i T(e_1) = c_i c_1 e_1 = 0;$$

  logo $T^2 = 0$, aí T é nilpotente.

- Se $c_1 \neq 0$, então consideremos a matriz:

$$A = [T]_B = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & & c_n \\ 0 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

  É fácil ver que A tem posto 1, aí A tem nulidade $n-1$, e consequentemente a multiplicidade geométrica de 0 é $n-1$. Também temos:

$$p_A(x) = \begin{pmatrix} x - c_1 & -c_2 & & -c_n \\ 0 & x & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & x \end{pmatrix} = x^{n-1}(x - c_1).$$

Portanto os autovalores são 0 e c_1 com multiplicidades algébricas respectvamente $n-1$ e 1. Assim T é diagonalizável.

3.7 Exercício 7

(7) Seja $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$ a matriz em que $a_{ij} = a \neq 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. A matriz A é diagonalizável? Qual é o seu polinômio minimal?

Solução:

(a) Se $n \geq 2$, então a matriz é diagonalizável se e só se $na \neq 0$. De fato, sendo:

$$A = \begin{pmatrix} a & a & & a \\ a & a & & a \\ & & \ddots & \\ a & a & & a \end{pmatrix}$$

com $a \neq 0$, então é fácil ver que A tem posto 1, aí a multiplicidade geométrica de 0 é $n-1$. Além disso:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det \begin{pmatrix} x-a & -a & & -a \\ -a & x-a & & -a \\ & & \ddots & \\ -a & -a & & x-a \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x-na & -a & & -a \\ x-na & x-a & & -a \\ & & \ddots & \\ x-na & -a & & x-a \end{pmatrix} \\ &= (x-na)\det \begin{pmatrix} 1 & -a & & -a \\ 1 & x-a & & -a \\ & & \ddots & \\ 1 & -a & & x-a \end{pmatrix} \\ &= (x-na)\det \begin{pmatrix} 1 & -a & & -a \\ 0 & x & & \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & x \end{pmatrix} \\ &= (x-na)x^{n-1}. \end{aligned}$$

Assim:

- Se $na \neq 0$, então a multiplicidade algébrica de 0 é $n-1$, aí A é diagonalizável.
- Se $na = 0$, então a multiplicidade algébrica de 0 é n, aí A não é diagonalizável.

(b) Se $n \geq 2$, então o polinômio minimal de A é $x^2 - nax$. De fato, A não é múltiplo de identidade, aí o polinômio minimal deve ter grau pelo menos 2. Porém temos o seguinte:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & & a \\ & \ddots & \\ a & & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & & a \\ & \ddots & \\ a & & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na^2 & & na^2 \\ & \ddots & \\ na^2 & & na^2 \end{pmatrix} = naA,$$

assim $A^2 - naA = 0$. Assim o polinômio minimal de A é $x^2 - nax$.

3.8 Exercício 8

(8) Seja $A \in \mathscr{M}_{n\times 1}(K)$. A matriz AA^t é diagonalizável?

Solução:

Seja:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Se $n \geq 2$ e $A \neq 0$, então mostraremos que AA^t é diagonalizável se e só se $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$. De fato:

$$AA^t = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & & a_2a_n \\ & & \ddots & \\ a_na_1 & a_na_2 & & a_na_n \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que AA^t tem posto 1, aí A tem nulidade $n-1$, aí a multiplicidade geométrica de 0 é $n-1$. Além disso, se tivermos $a_i \neq 0$ para todo i, então:

$$\begin{aligned}
p_{AA^t}(x) &= \det \begin{pmatrix} x - a_1^2 & -a_1a_2 & & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & x - a_2^2 & & -a_2a_n \\ & & \ddots & \\ -a_na_1 & -a_na_2 & & x - a_n^2 \end{pmatrix} \\
&= a_1 \dots a_n \det \begin{pmatrix} \frac{x}{a_1} - a_1 & -a_2 & & -a_n \\ -a_1 & \frac{x}{a_2} - a_2 & & -a_n \\ & & \ddots & \\ -a_1 & -a_2 & & \frac{x}{a_n} - a_n \end{pmatrix} \\
&= a_1 \dots a_n \det \begin{pmatrix} \frac{x}{a_1} - a_1 & -a_2 & & -a_n \\ -\frac{x}{a_1} & \frac{x}{a_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ -\frac{x}{a_1} & 0 & & \frac{x}{a_n} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} x - a_1^2 & -a_2^2 & & -a_n^2 \\ -x & x & & 0 \\ & & \ddots & \\ -x & 0 & & x \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} x - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) & -a_2^2 & & -a_n^2 \\ 0 & x & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & x \end{pmatrix} \\
&= \left(x - \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\right) x^{n-1}.
\end{aligned}$$

Agora, no caso em que $a_i = 0$ para algum i, então seja B a matriz obtida de A retirando-se todas as entradas nulas, suponhamos que sejam k entradas, então é fácil ver que:

$$p_{AA^t}(x) = p_{BB^t}(x)x^k = \left(x - \sum_{a_i \neq 0} a_i^2\right) x^{n-k-1}x^k = \left(x - \sum_{i=1}^n a_i^2\right) x^{n-1}.$$

De qualquer modo temos:

$$p_{AA^t}(x) = \left(x - \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\right) x^{n-1}.$$

Assim, temos o seguinte:

- Se $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$, então a multiplicidade algébrica de 0 é $n-1$, aí AA^t é diagonalizável.
- Se $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0$, então a multiplicidade algébrica de 0 é n, aí AA^t não é diagonalizável.

Um contraexemplo é o seguinte: considere $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Então

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix},$$

mas essa matriz não é diagonalizável.

3.9 Exercício 9

(9) Sejam $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Prove que se $I - AB$ é inversível, então $I - BA$ é inversível e que

$$(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A.$$

Solução: Suponha que $I - AB$ é inversível. Vamos mostrar que $B(I - AB)^{-1}A + I$ é o inverso de $I - BA$. De fato,

$$\begin{aligned}
(I - BA)(B(I - AB)^{-1}A + I) &= B(I - AB)^{-1}A + I - BAB(I - AB)^{-1}A - BA \\
&= B((I - AB)^{-1} - AB(I - AB)^{-1})A + I - BA \\
&= B((I - AB)(I - AB)^{-1})A + I - BA \\
&= BA + I - BA \\
&= I
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $(B(I - AB)^{-1}A + I)(I - BA) = I$. Logo, $I - BA$ é inversível.

3.10 Exercício 10

(10) Sejam $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Prove que AB e BA têm os mesmos autovalores em K. Elas têm o mesmo polinômio característico? E o minimal?

Solução:

(a) Mostraremos que AB e BA têm os mesmos autovalores. O item (b) fornecerá uma outra demonstração disso. De fato, se λ é autovalor de AB, então existe um $v \neq 0$ tal que $ABv = \lambda v$, aí $BABv = B(\lambda v) = \lambda Bv$, assim: (i) se $Bv \neq 0$, então λ é um autovalor de BA; (ii) se $Bv = 0$, então $\lambda v = ABv = 0$, aí $\lambda = 0$ e $\det(AB) = 0$, aí $\det(A)\det(B) = 0$, aí $\det(B)\det(A) = 0$, aí $\det(BA) = 0$, aí existe $u \neq 0$ tal que $BAu = 0 = \lambda u$, aí λ é autovalor de BA; de qualquer modo λ é autovalor de BA. A recíproca é análoga.

(b) Mostraremos que AB e BA têm o mesmo polinômio característico. De fato, existem matrizes inversíveis P e Q tais que:

$$A = P\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q,$$

aí seja:

$$B = Q^{-1}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} P^{-1},$$

então temos:

$$AB = P\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{e} \quad BA = Q^{-1}\begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & 0 \end{pmatrix} Q,$$

assim:

$$p_{AB}(x) = p_X(x)x^{n-k} \quad \text{e} \quad p_{BA}(x) = p_X(x)x^{n-k}.$$

(c) Nem sempre AB e BA têm o mesmo polinômio minimal. De fato, seja:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim $AB \neq 0$ e $BA = 0$, e $m_{AB}(t) = t^2$, mas $m_{BA}(t) = t$.

(d) **(Bônus)** Se A é inversível, então AB e BA têm o mesmo polinômio minimal. De fato temos $A(BA)^n = (AB)^n A$ para todo n, aí:

$$\begin{aligned} m_{AB}(BA) &= A^{-1}Am_{AB}(BA) \\ &= A^{-1}m_{AB}(AB)A \\ &= 0, \end{aligned}$$

de modo que $m_{BA}(x) \mid m_{AB}(x)$, e também:

$$\begin{aligned} m_{BA}(AB) &= m_{BA}(AB)AA^{-1} \\ &= Am_{BA}(BA)A^{-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

de modo que $m_{AB}(x) \mid m_{BA}(x)$, assim concluímos que $m_{AB}(x) = m_{BA}(x)$. Analogamente, se B é inversível, então AB e BA têm o mesmo polinômio minimal.

Outra solução: Se uma das matrizes é inversível, digamos A por exemplo, então AB e BA são semelhantes. Então

$$BA = A^{-1}(AB)A.$$

Neste caso, AB e BA possuirão o mesmo polinômio característico e o mesmo polinômio minimal. Caso contrário, considere as matrizes

$$C = \begin{bmatrix} tI & A \\ B & I \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} I & A \\ B & tI \end{bmatrix}$$

Temos que

$$CD = \begin{bmatrix} tI - AB & tA \\ 0 & tI \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad DC = \begin{bmatrix} tI & A \\ 0 & -BA + tI \end{bmatrix}$$

Então veja que

$$\det(CD) = \det(DC) \Rightarrow t^n \det(tI - AB) = t^n \det(tI - BA) \Rightarrow t^n p_{AB}(t) = t^n p_{BA}(t) \Rightarrow \boxed{p_{AB}(t) = p_{BA}(t)}.$$

3.11 Exercício 11

(11) Seja $A \in \mathscr{M}_n(K)$ uma matriz diagonalizável. Mostre que A^r é diagonalizável para todo inteiro $r \geq 1$. Exiba uma matriz *não diagonalizável* tal que A^2 é diagonalizável.

Solução:

(a) Se A é diagonalizável, então K^n tem uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ tal que para todo i exista λ_i tal que $Av_i = \lambda_i v_i$, aí $A^r(v_i) = \lambda_i^r v_i$; logo A^r é diagonalizável.

(b) Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então A tem posto 1, aí tem nulidade 1, aí a multiplicidade geométrica de 0 é 1, mas:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = x^2,$$

aí a multiplicidade algébrica de 0 é 2, aí A não é diagonalizável. Porém, é fácil ver que $A^2 = 0$, de modo que A^2 é diagonalizável.

3.12 Exercício 12

(12) Seja $D \in \mathscr{M}_n(K)$ uma matriz diagonal com polinômio característico

$$p_D(t) = (t - c_1)^{d_1} \cdots (t - c_k)^{d_k},$$

em que $c_1, \ldots, c_k$ são distintos. Seja

$$W = A \in \mathscr{M}_n(K) : DA = AD.$$

Prove que

$$\dim W = d_1^2 + \ldots + d_k^2.$$

Solução: Como D é diagonal e $p_D(x) = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$, sendo a matriz representada assim:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix},$$

então devemos ter:

$$\{1, \ldots, n\} = X_1 \cup \cdots \cup X_k,$$

em que:

$$X_i = \{r \in \{1, \ldots, n\} : d_r = c_i\}.$$

Para todo $A \in W$, então na entrada (r,s) devemos ter $(DA)_{r,s} = (AD)_{r,s}$, aí $d_r a_{r,s} = a_{r,s} d_s$, aí $(d_r - d_s)a_{r,s} = 0$, aí $d_r = d_s$ ou $a_{r,s} = 0$. Assim, para i, j com $i \neq j$, então para $r \in X_i$ e $s \in X_j$ devemos ter $d_r = c_i \neq c_j = d_s$, aí $a_{r,s} = 0$. Assim, sendo $E_{r,s}$ a matriz que vale 1 na entrada (r,s) e 0 nas outras, então é fácil ver que A deve ser combinação linear do conjunto:

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} \{E_{r,s} : r, s \in X_i\},$$

que tem $d_1^2 + \cdots + d_n^2$ elementos e é linearmente independente. Por outro lado, é fácil ver que qualquer combinação linear de M está em W. Assim a conclusão segue.

3.13 Exercício 13

(13) Seja $D \in \mathscr{L}(P_n(\mathbb{R}))$ o operador derivação. Encontre o polinômio minimal de D.

Solução: É fácil ver que $D^{n+1} = 0$. Além disso, para todo:

$$p(t) = a_n t^n + \cdots + a_0,$$

então:

$$\begin{aligned} p(D)(x^n) &= (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_{n-2} D^{n-2} + \cdots + a_0 I)(x^n) \\ &= a_n D^n(x^n) + a_{n-1} D^{n-1}(x^n) + a_{n-2} D^{n-2}(x^n) + \cdots + a_0 I(x^n) \\ &= a_n \tfrac{n!}{0!} + a_{n-1} \tfrac{n!}{1!} x + a_{n-2} \tfrac{n!}{2!} x^2 + \cdots + a_0 \tfrac{n!}{n!} x^n, \end{aligned}$$

assim se $p(t) \neq 0$, então $p(D)(x^n) \neq 0$, aí $p(D) \neq 0$. Logo o polinômio minimal deve ter grau $\geq n+1$, aí deve ser igual a x^{n+1}.

3.14 Exercício 14

(14) Determine o polinômio minimal de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(e)** $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Solução:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Temos o seguinte:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x(x-2) - 1(-1) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Assim $m_A(x) \mid (x-1)^2$, porém $A - I \neq 0$, aí $m_A(x) = (x-1)^2$.

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos o seguinte:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-2)(x-1).$$

Assim é fácil ver que $m_A(x) = (x-2)(x-1)$.

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos o seguinte:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = x(x-1)(x-2).$$

Assim é fácil ver que $m_A(x) = x(x-1)(x-2)$.

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos o seguinte:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^3.$$

Assim $m_A(x) \mid (x-1)^3$. Porém:

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que não é nulo, assim $m_A(x) = (x-1)^3$.

(e)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Temos o seguinte:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-a & -b & -c \\ 0 & x-a & -b \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} = (x-a)^3.$$

Assim $m_A(x) \mid (x-a)^3$. Porém:

$$(A-aI)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

assim:

- Se $b = 0$ e $c = 0$, então $m_A(x) = x - a$.
- Se $b = 0$ e $c \neq 0$, então $m_A(x) = (x-a)^2$.
- Se $b \neq 0$ e $c \neq 0$, então $m_A(x) = (x-a)^3$.

3.15 Exercício 15

(15) Seja $C \in \mathscr{M}_n(K)$ a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

Prove que o polinômio característico de C é

$$p_C(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0.$$

Mostre que este é também o polinômio minimal de C. A matriz C é chamada de **matriz companheira** do polinômio $c_0 + c_1 t + \ldots + c_{n-1}t^{n-1} + t^n$.

Solução:

(a) Fazendo o desenvolvimento de Laplace sobre a linha superior e "repetindo" o processo, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
p_C(x) &= \det\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x+c_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= x\det\begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x+c_{n-1} \end{pmatrix} + (-1)^{n+1}c_0\det\begin{pmatrix} -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \\
&= x\det\begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x+c_{n-1} \end{pmatrix} + (-1)^{n+1}c_0(-1)^{n-1} \\
&= x\det\begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x+c_{n-1} \end{pmatrix} + c_0 \\
&= x\left(x\det\begin{pmatrix} x & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & \dots & -1 & x+c_{n-1} \end{pmatrix} + c_1 \right) + c_0 \\
&= \dots \\
&= x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0
\end{aligned}$$

(b) Consideremos a base canônica $\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ de K^n. Então temos:

$$\begin{aligned}
C(e_0) &= e_1 \\
C(e_1) &= e_2 \\
&\vdots \\
C(e_{n-2}) &= e_{n-1} \\
C(e_{n-1}) &= -c_{n-1}e_{n-1} - c_{n-2}e_{c-2} - \dots - c_0e_0.
\end{aligned}$$

Para $p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ temos:

$$\begin{aligned}
p(C)(e_0) &= (a_{n-1}C^{n-1} + \dots + a_0)(e_0) \\
&= a_{n-1}C^{n-1}(e_0) + \dots + a_0e_0 \\
&= a_{n-1}e_{n-1} + \dots + a_0e_0,
\end{aligned}$$

aí se $p(x) \neq 0$ então $p(C)(e_0) \neq 0$, aí $p(C) \neq 0$. Logo o polinômio minimal deve ter grau $\geq n$, aí ele deve ser igual ao polinômio característico.

3.16 Exercício 16

(16) *Verdadeiro ou falso?*[2] Se $A \in \mathscr{M}_n(K)$ é uma matriz triangular superior e A é diagonalizável, então A já é uma matriz diagonal.

Solução: Falso. De fato, considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que A tem posto 1, portanto nulidade 1 e aí a multiplicidade algébrica de 0 é 1. Além disso:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = (x-1)x,$$

de modo que a multiplicidade algébrica de 0 é 1. Assim A é triangular superior e diagonalizável, mas não é diagonal.

Comentário:

Apesar da resposta ao exercício, ainda podemos concluir que, se $A = (a_{xy})$ é uma matriz triangular superior, então A é diagonalizável se e só se, para $r < s$ tais que $a_{rr} = a_{ss}$, tivermos $a_{rs} = 0$.

De fato, sejam $c_1, \ldots, c_k$ os valores distintos que aparecem na diagonal. Então devemos ter:

$$\{1, \ldots, n\} = X_1 \cup \cdots \cup X_k,$$

em que:

$$X_i = \{r \in \{1, \ldots, n\} : d_r = c_i\}.$$

Para i, seja $d_i = |X_i|$. Então o polinômio característico de A é:

$$p_A(x) = (x - c_1)^{d_i} \ldots (x - c_k)^{d_k},$$

de modo que para cada i então a multiplicidade algébrica de c_i é d_i. Para cada i, então é fácil ver que a matriz $A - c_iI$, ao ser escalonada, terá nulidade d_i se e só se para $r, s \in X_i$ tais que $r < s$ tivermos $a_{r,s} = 0$. Nisso a conclusão segue.

3.17 Exercício 17

(17) Sejam K um corpo, n um inteiro positivo e $A \in \mathscr{M}_n(K)$ uma matriz de posto $r \leq n$. Mostre que o polinômio minimal de A tem grau menor ou igual a $r + 1$.

Solução: Se $A \in \mathscr{M}_n(K)$ tem posto $r \leq n$, então consideremos a imagem da transformação $x \mapsto Ax$, então ela tem uma base $\{b_1, \ldots, b_r\}$, aí completemos uma base $B = \{b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}, \ldots, b_n\}$ de K^n, aí, sendo $C = [A]_B$, existe uma matriz inversível P tal que $C = PAP^{-1}$, e também temos:

$$C = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil provar por indução que para todo $n \geq 0$ temos:

$$C^{n+1} = \begin{pmatrix} X^{n+1} & X^nY \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[2] Só de perguntar isso tem uma grande chance de ser falso XD

Assim, sendo $p(x) = a_r x^r + \cdots + a_0$ o polinômio característico da matriz X, então, pelo teorema de Cayley-Hamilton, temos $p(X) = 0$, aí:

$$\begin{aligned} p(C)C &= \sum_{k=0}^{r} a_k C^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{r} a_k \begin{pmatrix} X^{k+1} & X^k Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{r} a_k X^{k+1} & \sum_{k=0}^{r} a_k X^k Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p(X)X & p(X)Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

assim $p(C)C = 0$, aí $p(A)A = 0$, logo, como $p(x)x$ é um polinômio de grau $r+1$, então o polinômio minimal de A tem grau menor ou igual a $r+1$.

3.18 Exercício 18

(18) Seja K um corpo de característica diferente de 2 e $T\colon \mathscr{M}_n(K) \to \mathscr{M}_n(K)$ o operador linear definido por $T(A) = A^t$. Mostre que T é diagonalizável, determine os autovalores de T, as dimensões dos autoespaços e uma base de $\mathscr{M}_n(K)$ formada por autovetores de T.

Solução: Seja V_+ o conjunto das matrizes simétricas e seja V_- o conjunto das matrizes antissimétricas. Seja $E_{i,j}$ a matriz que vale 1 na entrada (i,j) e 0 nas demais. Então é fácil ver que o conjunto:

$$B_+ = \{E_{i,i} : 1 \leq i \leq n\} \cup \{E_{i,j} + E_{j,i} : 1 \leq i < j \leq n\}$$

tem $\frac{n^2+n}{2}$ elementos e é uma base de V_+, e, como a característica do corpo é diferente de 2, então é fácil ver que o conjunto:

$$B_- = \{E_{i,j} - E_{j,i} : 1 \leq i < j \leq n\}$$

tem $\frac{n^2-n}{2}$ elementos e é uma base de V_-. Além disso, para cada $A \in V_+ \cap V_-$, então $A = A^t = -A$, aí $2A = 0$, aí $A = 0$. Logo V_+ e V_- são independentes. Assim $B_+ \cup B_-$ é uma base de n^2 elementos do espaço $V_+ + V_-$. Porém a dimensão de $\mathscr{M}_n(K)$ é n^2, assim $\mathscr{M}_n(K) = V_+ + V_-$. Com isso temos as respostas para todas as questões do exercício. Mais especificamente, T é diagonalizável, os autovalores são 1 e -1, a dimensão dos autoespaços $V_T(1)$ e $V_T(-1)$ são respectivamente $\frac{n^2+n}{2}$ e $\frac{n^2-n}{2}$, e $B_+ \cup B_-$ é uma base de autovetores de T.

3.19 Exercício 19

(19) Mostre que uma matriz $A \in \mathscr{M}_n(K)$ é inversível se, e somente se, o termo constante de seu polinômio minimal é diferente de zero.

Solução: Temos o seguinte:

$$\begin{aligned} A \text{ não é inversível} &\Leftrightarrow -A \text{ não é inversível} \\ &\Leftrightarrow \det(-A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det(0I - A) = 0 \\ &\Leftrightarrow p_A(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow m_A(0) = 0. \end{aligned}$$

3.20 Exercício 20

(20) Seja $A \in \mathscr{M}_n(K)$ uma matriz inversível.

(a) Mostre que existe um polinômio $p(t) \in K[t]$ tal que $A^{-1} = p(A)$.

(b) Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontre $p(t)$ tal que $p(A) = A^{-1}$.

Solução:

(a) Sabemos que a soma dos autovalores de uma matriz corresponde à seu traço, e o produto dos autovalores corresponde ao determinante. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, também é conhecido que $p_A(A) = 0$. Assim, seja o polinômio caracerístico dado por:

$$p_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \ldots + a_1 t + a_0.$$

Sendo A invertível, então $a_0 = p_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) \neq 0$ e também:

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_0 I = 0,$$

portanto temos:

$$A \cdot \frac{-1}{a_0}\left(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots a_1\right) = I.$$

Logo, considerando o polinômio $p(t) \in K[t]$ dado por

$$p(t) = \frac{-1}{a_0}\left(t^{n-1} + a_{n-1}t^{n-2} + a_{n-2}t^{n-3} + \ldots + a_1\right),$$

então:

$$A \cdot p(A) = I,$$

de modo que:

$$p(A) = A^{-1}.$$

(b) Encontremos primeiramente o polinômio característico de A :

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(xI - A) \\ &= \det\begin{pmatrix} x-2 & -1 & -4 \\ -3 & x & -1 \\ -2 & 0 & x-1 \end{pmatrix} \\ &= x^3 - 3x^2 - 9x + 1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$p_A(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1.$$

Pelo item anterior, o polinômio $p(t)$ procurado é

$$p(t) = \frac{-1}{1}(t^2 - 3t - 9) \Rightarrow p(t) = \boxed{p(t) = -t^2 + 3t + 9}$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} p(A) &= -A^2 + 3A + 9 \\ &= -\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + 3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 15 & 2 & 13 \\ 8 & 3 & 13 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 9 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -10 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e basta verificar que a matriz é inversa de A.

3.21 Exercício 21

(21) Determine todas as matrizes $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ nilpotentes e calcule $\det(A + I)$ e $\det(A - I)$.

Solução: Se A é nilpotente, então existe $k \geq 1$ tal que $A^k = 0$, aí o polinômio minimal deve ser da forma $m_A(x) = x^l$ com $l \leq k$, mas, pelo teorema de Cayley-Hamilton, o grau de $m_A(x)$ deve ser ≤ 2, aí $l \leq 2$, aí $A^2 = 0$. Agora, sendo:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

então:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \beta(\alpha + \delta) \\ \gamma(\alpha + \delta) & \beta\gamma + \delta^2 \end{pmatrix},$$

assim é fácil ver que $A^2 = 0$ se e somente se $\alpha + \delta = 0$ e $\alpha^2 + \beta\gamma = 0$. Assim, as matrizes nilpotentes em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ são as matrizes da forma:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta\gamma = -\alpha^2.$$

Calculemos $\det(A + I)$ e $\det(A - I)$:

- Temos

$$\det(A+I) = \det\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} \alpha+1 & \beta \\ \gamma & -\alpha+1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$(\alpha+1)(1-\alpha) - \beta\gamma = 1-\alpha^2 - (-\alpha^2) = 1-\alpha^2+\alpha^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\det(A+I)=1}$$

- Temos

$$\det(A-I) = \det\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} \alpha-1 & \beta \\ \gamma & -\alpha-1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$(\alpha-1)(-1-\alpha) - \beta\gamma = 1-\alpha^2 - (-\alpha^2) = 1-\alpha^2+\alpha^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\det(A-I)=1}$$

3.22 Exercício 22

(22) Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V. Seja $T\colon V \to V$ o operador linear definido por

$$T(e_1) = e_2 - e_1, T(e_2) = e_3 - e_1, T(e_3) = e_3 - e_2.$$

(a) Mostre que T não é diagonalizável.

(b) Calcule T^{212} (Dica: utilize o Teorema de Cayley-Hamilton)

Solução:

(a) Em relação à base canônica, temos:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim temos:

$$p_T(x) = \det\begin{pmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ -1 & x & +1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix} = x(x^2+1).$$

Assim é fácil ver que T não é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, pois o polinômio característico não se decompõe em fatores lineares.

(b) Pelo teorema de Cayley-Hamilton, temos $T(T^2+1) = 0$, assim $T^3 = -T$, desse modo para todo $n \geq 1$ temos $T^{n+2} = -T^n$. Temos:

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que $T^{212} = -T^{210} = T^{208} = \cdots = T^4 = -T^2$, assim:

$$T^{212} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Aviso:

De agora em diante, utilizaremos o fato de que um operador T sobre um espaço V de dimensão finita é diagonalizável se e somente se o polinômio minimal é produto de fatores lineares distintos.

3.23 Exercício 23

(23) Seja $T \in \mathscr{L}(V)$ um operador diagonalizável e seja W um subespaço de V T-invariante. Prove que a restrição de T a W, $T\restriction_W \in \mathscr{L}(W)$ é diagonalizável.

Solução: É fácil ver que um operador é diagonalizável se e somente se todo elemento $v \in V$ for uma soma de autovetores. Se T é um operador diagonalizável e W for um subespaço T-invariante, então basta mostrar que se $v_1, \ldots, v_n$ são autovetores associados a autovalores distintos $c_1, \ldots, c_n$ e $v_1 + \cdots + v_n \in W$, então $v_1 \in W$ e ... e $v_n \in W$. Faremos isto por indução em n. Se $n = 1$, então é fácil. Se é válida para $n-1$, então para $v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n$ autovetores associados a autovalores distintos $c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n$, se:

$$w = v_1 + \cdots + v_{n-1} + v_n \in W,$$

então temos:

$$T(w) = T(v_1) + \cdots + T(v_{n-1}) + T(v_n),$$

aí:

$$T(w) = c_1v_1 + \cdots + c_{n-1}v_{n-1} + c_nv_n,$$

assim:

$$T(w) - c_nw = (c_1 - c_n)v_1 + \cdots + (c_{n-1} - c_n)v_{n-1},$$

mas $T(w) - c_nw \in W$ e os $(c_1 - c_n)v_1, \ldots, (c_{n-1} - c_n)v_{n-1}$ são autovetores associados a autovalores distintos $c_1, \ldots, c_{n-1}$, aí pela hipótese de indução temos $(c_1 - c_n)v_1 \in W, \ldots, (c_{n-1} - c_n)v_{n-1} \in W$, mas $c_1 - c_n \neq 0, \ldots, c_{n-1} - c_n \neq 0$, aí $v_1 \in W, \ldots, v_{n-1} \in W$, aí $v_n = w - (v_1 + \cdots + v_{n-1}) \in W$. Assim todo elemento $w \in W$ é soma de autovetores de $T\restriction_W$. Logo $T\restriction_W$ é diagonalizável.

Solução alternativa: (Válida somente para espaços de dimensão finita)

Seja $B' = \{e_1, \ldots, e_m\}$ uma base de W e completemos uma base $B = \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ de V. Então o operador T está representado por uma matriz da forma:

$$T = \begin{pmatrix} X & ? \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

É fácil provar por indução que, para todo n então T^n é uma matriz da forma:

$$\begin{pmatrix} X^n & ? \\ 0 & Y^n \end{pmatrix},$$

assim para todo polinômio $p(x)$ temos:

$$p(T) = \begin{pmatrix} p(X) & ? \\ 0 & p(Y) \end{pmatrix},$$

em particular temos:

$$0 = m_T(T) = \begin{pmatrix} m_T(X) & ? \\ 0 & m_T(Y) \end{pmatrix},$$

logo temos $m_T(X) = 0$, aí $m_X(x) \mid m_T(x)$. Assim, se T é diagonalizável, então $m_T(x)$ é um produto de fatores lineares distintos, aí $m_X(x)$ é um produto de fatores lineares disintos, mas X representa a transformação $T\restriction_W$, aí $T\restriction_W$ é diagonalizável.

3.24 Exercício 24

(24) Seja $T \in \mathscr{L}(V)$ um operador linear tal que todo subespaço de V é T-invariante. Mostre que T é um múltiplo do operador identidade.

Solução: Seja B uma base de V.

Para $b \in B$ então Kb é T-invariante, aí existe um único $\lambda_b \in K$ tal que $T(b) = \lambda_b b$.

Para $b, c \in B$ tais que $b \neq c$, então $K(b+c)$ é T-invariante, aí existe um $\lambda \in K$ tal que $T(b+c) = \lambda(b+c)$, aí $T(b) + T(c) = \lambda b + \lambda c$, aí $\lambda_b b + \lambda_c c = \lambda b + \lambda c$, aí $\lambda_b = \lambda$ e $\lambda_c = \lambda$, aí $\lambda_b = \lambda_c$.

Logo existe um $\lambda \in K$ tal que $\forall b \in B : \lambda_b = \lambda$, aí para todo $b \in B$ temos $T(b) = \lambda b$; logo $T = \lambda I$.

3.25 Exercício 25

(25) Seja $T \in \mathscr{L}(V)$ um operador linear e seja W um subespaço de V. Prove que W é T-invariante se, e somente se, W^0 é T^t-invariante.

Solução: Primeiramente, lembremos que

$$W^0 = \{f \in V^* \mid \forall w \in W : f(w) = 0\}$$

(a) Se W é T-invariante, então temos que $T(W) \subseteq W$. Dado $f \in W^0$, veja que

$$T^t(f) = f \circ T$$

e temos também para $w \in W$:

$$(f \circ T)(w) = f(T(w)) \in f(T(W)) \subseteq f(W) = 0,$$

aí:

$$(f \circ T)(w) = 0;$$

logo:

$$T^t(W^0) \subseteq W^0.$$

Logo, W^0 é T^t-invariante.

(b) Se W^0 é T^t-invariante, então

$$T^t(W^0) \subseteq W^0 = \{f \in \mathscr{L}(V) \mid f(W) = 0\}.$$

Seja $w \in W$. Para $f \in W^0$, temos $T^t(f) \in W^0$, aí $f \circ T \in W^0$, aí $(f \circ T)(w) = 0$. Ou seja, $\forall f \in W^0 : f(T(w)) = 0$. Suponhamos por absurdo que $T(w) \notin W$. Consideremos $(v_i)_{i \in J}$ uma base para W e completemo-la para uma base $(v_i)_{i \in I}$ de V. Seja:

$$T(w) = \sum_{j \in K} \alpha_j v_j,$$

em que K seja um subconjunto finito de I. Tome $k \in K \setminus J$ tal que $\alpha_k \neq 0$, que existe, pois $T(w) \notin W$. Considere $\varphi_k \colon V \to K$ tal que:

$$\varphi(v_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k \\ 0, & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

Note que $\varphi_k \in W^0$. Mas teremos o seguinte:

$$\varphi_k(T(w)) = \varphi_k\left(\sum_{j \in K} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j \in K} \alpha_j \varphi_k(v_j) = \alpha_k \neq 0.$$

3.26 Exercício 26

(26) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e seja $T \in \mathscr{L}(V)$. Prove que T é diagonalizável se, e somente se, para todo subespaço T-invariante W de V existe um subespaço T-invariante U tal que

$$V = W \oplus U$$

Observação: Um operador linear T é dito *semi-simples* quando todo subespaço T-invariante de V tem um complemento que é também T-invariante.

Solução:

(a) Se T é diagonalizável, então seja B uma base de autovetores, aí, para subespaço W que seja T-invariante, seja C uma base de W. Então existe uma base E de V tal que $C \subseteq E \subseteq B \cup C$, aí para $e \in E \setminus C$ então $e \in B$, aí e é autovetor. Assim seja U o subespaço gerado por $E \setminus C$, então para $e \in E \setminus C$ então $e \in B$, aí existe $\lambda \in K$ tal que $T(e) = \lambda e$, aí $T(e) \in U$; logo U é T-invariante, e além disso é fácil ver que $V = W \oplus U$.

(b) Se todo subespaço T-invariante tiver complemento vetorial T-invariante então sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ os autovalores distintos, e seja:

$$W = V_T(\lambda_1) + \cdots + V_T(\lambda_k),$$

então W é T-invariante, aí existe U subespaço T-invariante tal que $V = W \oplus U$, aí existe uma base B tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

aí $p_T(x) = p_X(x)p_Y(x)$, mas:

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \ldots (x - \lambda_k)^{r_k},$$

aí:

$$p_Y(x) = (x - \lambda_1)^{s_1} \ldots (x - \lambda_k)^{s_k}$$

com $s_i \leq r_i$ para todo i, aí se existe i tal que $s_i > 0$ então $p_Y(\lambda_i) = 0$, aí existe $u \neq 0$ tal que $u \in U$ e $T(u) = \lambda_i u$, aí $u \in W$, contradição; logo $\forall i : s_i = 0$, aí $p_Y(x) = 1$, aí $U = 0$, aí $W = V$, aí T é diagonalizável.

3.27 Exercício 27

(27) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e seja $T \in \mathscr{L}(V)$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) T é diagonalizável e $T^{2n} = T^n$.

(b) $T^{n+1} = T$.

Solução:

(a) Se T é diagonalizável e $T^{2n} = T^n$, então existe uma base B tal que T seja representada pela matriz:

$$T = \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_k \end{pmatrix}.$$

Como $T^{2n} = T^n$, então para todo i temos $c_i^{2n} = c_i^n$, aí $c_i^{n+1} = c_i$; logo $T^{n+1} = T$.

(b) Se $T^{n+1} = T$, então, sendo $m_T(x)$ o polinômio minimal de T, temos:

$$m_T(x) \mid x^{n+1} - x = x(x^n - 1) = x \prod_{k=0}^{n-1} \left(x - \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right),$$

assim $m_T(x)$ é produto de fatores lineares distintos, aí T é diagonalizável.

3.28 Exercício 28

(28) Seja $A \in \mathscr{M}_n(K)$ e o operador

$$\begin{array}{rccl} T_A & : & \mathscr{M}_n(K) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(K) \\ & & M & \longmapsto & T_A(M) = AM - MA \end{array}$$

Prove que se A é diagonalizável então T_A é diagonalizável.

Solução: Se A é diagonalizável, então existem uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D tais que $A = PDP^{-1}$. Consideremos primeiro o operador T_D. Seja:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}.$$

Então, para matriz $M = (m_{i,j})$ e para $i, j = 1, \dots, n$, a entrada (i, j) da matriz $DM - MD$ é $(d_i - d_j)m_{i,j}$; assim, para $i, j = 1, \dots, n$, sendo $E_{i,j}$ a matriz que vale 1 na entrada (i, j) e 0 nas demais, então é fácil ver que $T_D(E_{i,j}) = (d_i - d_j)E_{i,j}$, assim $E_{i,j}$ é autovetor de T_D. Porém, para $M \in \mathscr{M}_n(K)$, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} T_A(M) &= AM - MA \\ &= PDP^{-1}M - MPDP^{-1} \\ &= P(DP^{-1}MP - P^{-1}MPD)P^{-1} \\ &= PT_D(P^{-1}MP)P^{-1}. \end{aligned}$$

Logo, para $i, j = 1, \dots, n$, é fácil ver que $PE_{i,j}P^{-1}$ é autovetor de T_A. Além disso, as matrizes $PE_{i,j}P^{-1}$ em que $i, j = 1, \dots, n$ formam uma base de $\mathscr{M}_n(K)$. Portanto T_A é diagonalizável.

3.29 Exercício 29

(29) Seja V um K-espaço de dimensão finita e sejam $E_1, E_2, \dots E_k \in \mathscr{L}(V)$ tais que $E_1 + E_2 + \dots + E_k = I$.

(a) Prove que se $E_iE_j = 0$, para $i \neq j$, então $E_i^2 = E_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

(b) Prove que se $E_i^2 = E_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$ e a característica de K é zero, então $E_iE_j = 0$, sempre que $i \neq j$.

Solução:

(a) Se $E_iE_j = 0$ para $i \neq j$, então para todo i temos:

$$\begin{aligned} E_i &= E_iI \\ &= E_i(E_1 + \cdots + E_n) \\ &= E_iE_1 + \cdots + E_iE_n \\ &= E_iE_i, \end{aligned}$$

ou seja, $E_i^2 = E_i$.

(b) Se $E_i^2 = E_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ e a característica de K é zero, então seja $P_i = \mathrm{Im}(E_i)$ e $K_i = \mathrm{Ker}(E_i)$, então é fácil ver que $V = P_i \oplus K_i$, aí existe base B_i de V tal que:

$$[E_i]_{B_i} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que $\mathrm{tr}(E_i) = \dim(P_i) \cdot 1_K$. Além disso, $\mathrm{tr}(I) = \dim(V) \cdot 1_K$. Como:

$$I = E_1 + \cdots + E_k,$$

então:

$$V = P_1 + \cdots + P_k$$

e também:

$$\mathrm{tr}(I) = \mathrm{tr}(E_1) + \cdots + \mathrm{tr}(E_k),$$

aí:

$$\dim(V) \cdot 1_K = \dim(P_1) \cdot 1_K + \cdots + \dim(P_k) \cdot 1_K,$$

mas a característica de K é zero, aí:

$$\dim(V) = \dim(P_1) + \cdots + \dim(P_k).$$

Portanto, para k, temos o seguinte:

$$\begin{array}{rcl} \dim(V) & = & \dim(\sum_i P_i) \\ & = & \dim(P_k) + \dim(\sum_{i \neq k} P_i) - \dim(P_k \cap \sum_{i \neq k} P_i) \\ & \leq & \dim(P_k) + \sum_{i \neq k} \dim(P_i) - \dim(P_k \cap \sum_{i \neq k} P_i) \\ & = & \sum_i \dim(P_i) - \dim(P_k \cap \sum_{i \neq k} P_i) \\ & = & \dim(V) - \dim(P_k \cap \sum_{i \neq k} P_i), \end{array}$$

aí:

$$\dim(P_k \cap \sum_{i \neq k} P_i) \leq 0,$$

aí:

$$P_k \cap \sum_{i \neq k} P_i = 0;$$

logo:

$$V = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k.$$

Assim, para $i \neq j$, então para v temos:

$$E_j(v) = E_1 E_j(v) + \cdots + E_k E_j(v),$$

aí:

$$0 = \sum_{l \neq j} E_i E_j(v),$$

mas:

$$\forall l \neq j : E_i E_j(v) \in P_l,$$

aí:

$$\forall l \neq j : E_l E_j(v) = 0,$$

aí:

$$E_i E_j(v) = 0;$$

logo:

$$E_i E_j = 0.$$

3.30 Exercício 30

(30) Seja $A \in \mathscr{M}_n(K)$ e seja

$$p_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

o polinômio característico de A. Mostre que $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$, o traço de A, e $a_0 = (-1)^n \det(A)$.

Solução: Temos o seguinte:

$$p_A(x) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(x\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)} \right)$$

Para $\sigma \in S_n$, se $\sigma \neq I$, então existe j tal que $\sigma(j) \neq j$, aí sendo $k = \sigma(j)$ temos $j \neq k$ e $\sigma(j) \neq j$ e $\sigma(k) \neq k$, assim temos:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(x\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)} \right) = \operatorname{sgn}(\sigma) a_{j,\sigma(j)} a_{k,\sigma(k)} \prod_{i \neq j,k} \left(x\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)} \right),$$

que tem grau no máximo $n-2$. Assim, o coeficiente de grau $n-1$ do polinômio:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(x\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)} \right)$$

é igual ao coeficiente de grau $n-1$ do polinômio:

$$\operatorname{sgn}(I) \prod_{i=1}^{n} \left(x\delta_{i,I(i)} - a_{i,I(i)} \right) = \prod_{i=1}^{n} \left(x - a_{i,i} \right),$$

que é igual a $-(a_1 + \cdots + a_n)$, que é $-\operatorname{tr}(A)$. Além disso, é fácil ver que:

$$a_0 = p_A(0) = \det(0I - A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A).$$

Questões Suplementares

3.31 Exercício 31

(31) [Algoritmo de Faddeev-LeVerrier] Nesse exercício, vamos apresentar um algoritmo para o cálculo direto dos coeficientes do polinômio característico de uma matriz $A \in \mathscr{M}_n(K)$, conhecido como Algoritmo de Faddeev-LeVerrier.[3]

Solução:

3.32 Exercício 32

(32) Seja $K = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^3+x+1 \rangle}$. Dada a matriz
encontre uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D em $\mathbb{M}_3(K)$ tais que $PAP^{-1} = D$.

Solução:

[3] A título de curiosidade, Urbain Le Verrier (1811-1877) foi quem descobriu Netuno, ao prever sua existência matematicamente.

3.33 Exercício 33

(33) Seja $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$. Prove que

$$P_A(x) = \frac{1}{6}[\mathrm{tr}^3(A) + 2\mathrm{tr}(A^3) - 3\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A^2)] - \frac{1}{2}[\mathrm{tr}^2(A) - \mathrm{tr}(A^2)]x + \mathrm{tr}(A)x^2 - x^3,$$

onde $P_A(x)$ denota o polinômio característico de A.

Solução:

3.34 Exercício 34

(34) Seja $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ uma matriz não inversível tal que $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(A^3)$. Prove que se $\mathrm{tr}(A)$ é um número natural maior do que 1, então $\mathrm{tr}(A^3) \in \mathbb{Q}$.

Solução:

3.35 Exercício 35

(35) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

(a) Prove que A é semelhante à matriz

$$N = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Encontre uma matriz $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $PAP^{-1} = N$ e satisfaz as seguintes condições: a soma dos elementos de P é n, $\mathrm{tr}(P) = 1$ e $\det(P) = -(n^{n-1})$.

Solução:

4 Lista 3

Aviso:

De agora em diante, utilizaremos o fato de que um operador T sobre um espaço V de dimensão finita é triangularizável se e somente se o polinômio minimal é produto de fatores lineares.

4.1 Exercício 1

(1) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $[T]_{can} = A$. Encontre a decomposição primária de T.

Solução: Para encontrar a decomposição primária de T, precisamos encontrar seu polinômio característico, escrevê-lo na forma $p(t) = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$, com $p_1, \ldots, p_k$ irredutíveis mônicos distintos.

(a) Encontrando o polinômio característico de A:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 6 & 3 & 2 \\ -4 & \lambda + 1 & 2 \\ -10 & 5 & \lambda + 3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1) \end{aligned}$$

(b) Decompondo $V = \mathbb{R}^3$ em soma direta: Como $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)$, podemos escrever

$$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2,$$

onde $V_1 = \mathrm{Ker}(A - 2I)$ e $V_2 = \mathrm{Ker}(A^2 + I)$.

(c) Encontrando geradores para V_1 e V_2 : Temos que

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 10 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 10x_1 - 5x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{x_3}{2}, x_2 = 0.$$

Logo, se $v \in V_1 = \text{Ker}(A - 2I)$, temos: $v = \left(\frac{x_3}{2}, 0, x_3\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$.

Podemos tomar $v_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$, e temos que $V_1 = \langle v_1 \rangle$, o que mostra que V_1 tem dimensão 2.

E também temos que:

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - 5x_2 = 0 \\ 10x_1 - 10x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Logo, se $v \in V_1 = \text{Ker}(A^2 + I)$, temos:

$$v = (x_2, x_2, x_3) = x_2(1, 1, 0) + x_3(0, 0, 1).$$

Daí, podemos escolher os vetores

$$v_2 = (1, 1, 0) \quad \text{e} \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

E então $V_2 = \langle v_2, v_3 \rangle$. Além disso, V_2 tem dimensão 2.

(d) Compor uma base com os geradores de V_1 e V_2 e escrever a matriz de T nessa base:

Podemos considerar a base

$$B = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(\frac{1}{2}, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Calculemos T nessa base:

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2v_1 + 0v_2 + 0v_3$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 0v_1 + 3v_2 + 5v_3$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = 0v_1 - 2v_2 - 3v_3$$

Logo, temos a representação de T na base B como uma matriz diagonal em blocos como se vê abaixo:

$$[T]_B = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \end{array}\right]$$

O bloco (2) corresponde à restrição de T ao subespaço invariante $V_1 = \mathrm{Ker}(T - 2I)$, enquanto o bloco

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

é produzido pela restrição de T ao subespaço invariante $V_2 = \mathrm{Ker}(T^2 + I)$.

4.2 Exercício 2

(2) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo K. Seja $\mathscr{F}$ uma família de operadores triangularizáveis que comutam. Prove que:

(a) Existe um autovetor comum a todos os operadores de $\mathscr{F}$, isto é, existe $v \in V$ não nulo tal que, para cada $T \in \mathscr{F}, T(v) = \lambda_T v$, para algum $\lambda_T \in K$. (*Sugestão:* Use indução na dimensão de V.)

(b) Mostre que a família

$$\mathscr{G} = \{T^t \in \mathscr{L}(V^*) | T \in \mathscr{F}\}$$

é uma família de operadores lineares que comutam.

(c) Use o item (a) para obter $f \in V^*$ autovetor comum à família $\mathscr{G}$. Prove que $\ker f$ é invariante sob T, para todo $T \in \mathscr{F}$.

(d) Use indução na dimensão de V (e o item (c)) para provar que existe uma base B de V tal que $[T]_B$ é triangular, para todo $T \in \mathscr{F}$.

Solução:

(a) Suponhamos a afirmação para espaços vetoriais de dimensão menor que n. Seja V um espaço com $\dim(V) = n$. Seja $\mathscr{F}$ conjunto de operadores triangularizáveis que comutam. Se todo elemento de $\mathscr{F}$ é múltiplo da identidade, então acaba. Senão, então existe $T \in \mathscr{F}$ que não é múltiplo da identidade, então, como T é triangularizável, então existe um autovalor c, aí, sendo $W = \operatorname{Ker}(T - cI)$, então $W \neq 0$ e $\dim(W) < n$, aí, como os elementos de $\mathscr{F}$ se comutam, então W é invariante para todo elemento de $\mathscr{F}$. Para $U \in \mathscr{F}$, então m_U é produto de fatores lineares, aí, como $m_{U\restriction W} \mid m_U$, então $m_{U\restriction W}$ é produto de fatores lineares, aí $U \restriction W$ é triangularizável. Como $\dim(W) < n$, então existe um $v \in W$ não nulo tal que para cada $U \in \mathscr{F}$ exista um $\lambda \in K$ tal que $(U \restriction W)(v) = \lambda v$, aí $U(v) = \lambda v$; aí acaba.

(b) Para $T, U \in \mathscr{F}$ temos $T \circ U = U \circ T$, aí para $f \in V^*$ temos:

$$\begin{aligned} T^t(U^t(f)) &= T^t(f \circ U) \\ &= (f \circ U) \circ T \\ &= f \circ (U \circ T) \\ &= f \circ (T \circ U) \\ &= (f \circ T) \circ U \\ &= U^t(f \circ T) \\ &= U^t(T^t(f)); \end{aligned}$$

logo $T^t U^t = U^t T^t$. Além disso, para todo $T \in \mathscr{F}$, então é fácil ver que T^t é triangularizável.

(c) Pelo item (a), então existe $f \in V^*$ não nulo tal que para todo $T \in \mathscr{F}$ exista $\lambda \in K$ tal que $T^t(f) = \lambda f$, aí $f \circ T = \lambda f$, aí para $v \in \operatorname{Ker}(f)$ então $f(v) = 0$, aí $\lambda f(v) = 0$, aí $f(T(v)) = 0$, aí $T(v) \in \operatorname{Ker}(f)$; aí $\operatorname{Ker}(f)$ é T-invariante.

(d) Suponhamos a afirmação válida para espaços com dimensão menor que n. Seja V tal que $\dim(V) = n$. Pegue um $f \in V^*$ não nulo tal que $\operatorname{Ker}(f)$ seja invariante para todo elemento de $\mathscr{F}$, aí seja $W = \operatorname{Ker}(f)$, então temos $n = \dim(V) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(W) + 1$, aí $\dim(W) = n - 1$. Para $T \in \mathscr{F}$, então m_T é produto de fatores lineares, mas $m_{T\restriction W} \mid m_T$, aí $m_{T\restriction W}$ é produto de fatores lineares, aí $T \restriction W$ é triangularizável. Assim pela hipótese de indução existe base B de $\operatorname{Ker}(f)$ tal que para todo $T \in \mathscr{F}$ então $[T \restriction W]_B$ seja triangular, aí pegando um e_n tal que $e_n \notin W$, então $C = B \cup \{e_n\}$ é uma base e aí para todo $T \in \mathscr{F}$ existe um $\lambda \in K$ tal que:

$$[T]_C = \begin{pmatrix} [T \restriction W]_B & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

aí $[T]_C$ é triangular.

4.3 Exercício 3

(3) Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(V)$ um operador linear que comuta com todo operador diagonalizável de $\mathscr{L}(V)$. Prove que T é um múltiplo escalar do operador identidade.

Solução: Seja $A \in M_n(K)$ uma matriz que comute com toda matriz diagonalizável.

Para todo i, considerando a matriz:

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

que vale 1 na entrada (i, i) e 0 nas outras, então B_i é diagonal, aí $B_iA = AB_i$, mas:

$$B_iA = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ a_{i,1} & & a_{i,i} & & a_{i,n} \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$AB_i = \begin{pmatrix} 0 & & a_{1,i} & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & a_{i,i} & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & a_{n,i} & & 0 \end{pmatrix},$$

assim para todo $j \neq i$ temos $a_{i,j} = 0$ e $a_{j,i} = 0$. Portanto A é uma matriz diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix},$$

aí para i, j tais que $i < j$, consideremos a matriz:

$$C_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & 1 & & 1 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

que vale 1 nas entradas (i, i) e (i, j) e vale 0 nas outras, então $C_{i,j}$ é diagonalizável, aí $C_{i,j}A = AC_{i,j}$, mas:

$$C_{i,j}A = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & a_i & & a_j & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$AC_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & a_i & & a_i & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

aí $a_i = a_j$. Logo A é múltiplo da identidade.

4.4 Exercício 4

(4) Seja $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ uma matriz não nula tal que $A^3 = -A$. Mostre que A é semelhante à matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução: Considerando o polinômio $f(x) = x^3 + x$, então $f(A) = 0$. Aí, como a decomposição em fatores irredutíveis é $f(x) = x(x^2 + 1)$, então seja $V_1 = \operatorname{Ker}(A)$ e $V_2 = \operatorname{Ker}(A^2 + I)$, então pela decomposição primária temos $\mathscr{M}_3(\mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2$ e os subespaços V_1 e V_2 são A-invariantes. Assim sejam $A_1 = A \restriction V_1$ e $A_2 = \restriction V_2$. Como $A \neq 0$, então $V_1 \neq V$, aí $\dim(V_1) \leq 2$, aí $\dim(V_2) \geq 1$. Além disso, temos $A_2^2 + I = 0$, aí $A_2^2 = -I$, aí $\det(A_2)^2 = (-1)^{\dim(V_2)}$, aí $\dim(V_2)$ deve ser par, aí $\dim(V_2) = 2$, aí $\dim(V_1) = 1$. Logo, pegue um $u \in V_1$ não nulo qualquer, então $\{u\}$ é base de V_1. Pegue $e \in V_2$ não nulo, então mostraremos que $\{e, A_2(e)\}$ é base de V_2. De fato, para $a, b \in \mathbb{R}$, se $ae + bA_2(e) = 0$, então $A_2(ae + bA_2(e)) = 0$, aí $-be + A_2(e) = 0$, aí:

$$0 = a0 - b0 = a(ae + bA_2(e)) - b(-be + A_2(e)) = (a^2 + b^2)e,$$

aí $a^2 + b^2 = 0$, aí $a = b = 0$. Assim temos uma base B tal que:

$$[A]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.5 Exercício 5

(5) Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathscr{L}(V)$ com polinômio minimal

$$m_T(t) = p_1(t)^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_k(t)^{m_k},$$

onde $p_i(t)$ são distintos e irredutíveis em $K[t]$. Seja $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ a decomposição primária de V, isto é, $V_i = \operatorname{Ker}(p_i(T)^{m_i})$. Seja W um subespaço T-invariante de V. Mostre que

$$W = (W \cap V_1) \oplus \ldots \oplus (W \cap V_k).$$

Solução: Seja:

$$f_i(t) = \frac{m_T(t)}{p_i(t)^{m_i}}.$$

Então $f_1, \ldots, f_k$ são primos entre si, aí existem $g_1, \ldots, g_k$ tais que:

$$f_1 g_1 + \cdots + f_k g_k = 1.$$

Assim, para $w \in W$, então:

$$w = f_1(T)g_1(T)(w) + \cdots + f_k(T)g_k(T)(w),$$

e também:

$$p_i(T)^{m_i} f_i(T)g_i(T)(w) = m_T(T)g_i(T)(w) = 0,$$

aí:

$$f_i(T)g_i(T)(w) \in V_i,$$

mas W é T-invariante, aí:

$$f_i(T)g_i(T)(w) \in W,$$

aí:

$$f_i(T)g_i(T)(w) \in W \cap V_i.$$

Portanto:

$$W = (W \cap V_1) + \ldots + (W \cap V_k),$$

e é fácil ver que esta soma é direta.

4.6 Exercício 6

(6) Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathscr{L}(V)$ com polinômio característico

$$p_T(t) = (t - \lambda_1)^{n_1}(t - \lambda_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_k)^{n_k}$$

e polinômio minimal

$$m_T(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_k)^{m_k},$$

com λ_i distintos.

(a) Prove que, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, temos que

$$\dim \operatorname{Ker}(T - \lambda_i I)^{m_i} = n_i.$$

(b) Seja

$$W_i = \{v \in V : (T - \lambda_i I)^t(v) = 0, \text{ para algum inteiro } r \geq 0\}.$$

Prove que $W_i = \operatorname{Ker}(T - \lambda_i I)^{m_i}$, para todo $i = 1, \ldots, k$.

Solução:

(a) Sendo $V_i = \operatorname{Ker}(T - \lambda_i I)^{m_i}$, então pela decomposição primária temos $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ e cada V_i é T-invariante. Além disso, sendo $V_i' = \operatorname{Ker}(T - \lambda_i I)^{n_i}$, então pela decomposição primária temos $V = V_1' \oplus \cdots \oplus V_k'$ e cada V_i' é T-invariante. Mas também temos $V_i \subseteq V_i'$ para cada i. Logo é fácil ver que $V_i = V_i'$ para todo i. Para cada i seja $T_i = T \restriction V_i$. Então $p_T = p_{T_1} \ldots p_{T_k}$. Além disso, para cada i temos $m_{T_i}(t) = (t - \lambda_i)^{m_i}$. Assim λ_i é o único autovalor de T_i em V_i, mas p_{T_i} é produto de fatores lineares, assim $p_{T_i}(t) = (t - \lambda_i)^{r_i}$ para algum r_i. Assim $p_T(t) = (t - \lambda_1)^{r_1} \ldots (t - \lambda_k)^{r_k}$, aí, pela fatoração única de polinômios, para todo i temos $r_i = n_i$, aí $p_{T_i} = (t - \lambda_i)^{n_i}$, aí $\dim(V_i) = n_i$, aí $\dim(\operatorname{Ker}(T - \lambda_i I)^{m_i}) = n_i$.

(b) É fácil ver que para todo i temos $V_i \subseteq W_i$. Agora, para cada i, então para $v \in W_i$ então existe r tal que $(T - \lambda_i I)^r(v) = 0$, mas seja $v = v_1 + \cdots + v_k$ com $v_j \in V_j$, então $0 = \sum_j (T - \lambda_i I)^r(v_j)$ e para todo j temos $(T - \lambda_i I)^r(v_j) \in V_j$, aí para todo $j \neq i$ temos $(T - \lambda_i I)^r(v_j) = 0$, mas $(T - \lambda_j I)^{m_j}(v_j) = 0$ e $(t - \lambda_i)^r$ e $(t - \lambda_j)^{m_j}$ são primos entre si, aí por Bézout temos $v_j = 0$; logo $v = v_i$, aí $v \in V_i$. Logo, $V_i = W_i$, ou seja, $W_i = \operatorname{Ker}(T - \lambda_i I)^{m_i}$.

4.7 Exercício 7

(7) Seja N um operador linear nilpotente em um espaço vetorial de dimensão finita n. Prove que o polinômio característico de N é $p_N(t) = t^n$.

Solução: Seja N um operador linear nilpotente. Então existe um $r \geq 1$ tal que $N^r = 0$.

Primeiro mostraremos que, se W é um subespaço tal que $W \neq V$, então existe um $\alpha \in V$ tal que $\alpha \notin W$ e $N(\alpha) \in W$. De fato, pegue um $\beta \in V$ tal que $\beta \notin W$, aí seja s o menor tal que $N^s(\beta) \in W$, então $s \geq 1$ e também $s \leq r$, assim $N^{s-1}(\beta) \notin W$ e $N(N^{s-1}(\beta)) \in W$.

Agora, apliquemos repetidamente o discurso do parágrafo anterior para chegarmos numa base ordenada $(a_1, \ldots, a_n)$. Seja $W_0 = 0$. Se $W_0 \neq V$, então pegue um $\alpha_1 \in V$ tal que $\alpha_1 \notin W_0$ e $N(\alpha_1) \in W_0$, e aí seja W_1 o subespaço gerado por α_1. Se $W_1 \neq V$, então pegue um $\alpha_2 \in V$ tal que $\alpha_2 \notin W_1$ e $N(\alpha_2) \in W_1$, e aí seja W_2 o subespaço gerado por α_1, α_2. Continue dessa maneira até obtermos n vetores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. É fácil ver que, sendo $B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a base ordenada obtida, então $[N]_B$ é uma matriz estritamente triangular, assim seu polinômio característico é t^n.

Solução Alternativa 1: Faremos a resolução por indução na dimensão de V. Suponhamos o exercício válido para $\dim(V) < n$. Seja V espaço vetorial tal que $\dim(V) = n$ e seja $N \in L(V)$ tal que exista r tal que $N^r = 0$. Se $V = 0$, é fácil. Senão, então tome um $v \neq 0$ qualquer. Consideremos:

$$m_{N,v}(t) = t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0,$$

o polinômio mônico de menor grau tal que $m_{N,v}(N)(v) = 0$. Então $B_1 = \{v, N(v), \ldots, N^{m-1}(v)\}$ é linearmente independente. Além disso, como $N^r(v) = 0$, então $m_{N,v}(t) \mid t^r$, aí $m_{N,v}(t) = t^m$. Seja W o subespaço gerado por ele. Note que W é N-invariante e ainda:

$$[N\restriction_W]_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

assim $p_{N\restriction_W}(t) = t^m$. Seja B uma base de V tal que $B_1 \subseteq B$ e seja $B_2 = \{\bar{b} : b \in B \setminus B_1\}$. Então B_2 é uma base de V/W e, sendo $\overline{N} \in L(V/W)$ o operador induzido, temos:

$$[N]_B = \begin{pmatrix} [N\restriction_W]_{B_1} & * \\ 0 & [\overline{N}]_{B_2} \end{pmatrix},$$

assim é fácil ver que $p_N(t) = p_{N\restriction_W}(t)p_{\overline{N}}(t)$, mas também é fácil ver que $\overline{N}^r = 0$, aí por hipótese de indução temos $p_{\overline{N}}(t) = t^{n-m}$, aí $p_N(t) = t^n$.

Solução Alternativa 2: Seja K um corpo algebricamente fechado. Nesse caso, sendo N a matriz que representa este operador nilpotente, temos que $N^r = 0$ para algum $r \geq 1$. Então, sendo λ um autovalor de N, para $v \neq 0$, temos

$$N(v) = \lambda v \Rightarrow N^r(v) = \lambda^r v \Rightarrow 0 = \lambda^r v \Rightarrow \lambda^r = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Portanto, todos os autovalores de N são nulos, e o polinômio característico de N será

$$p_N(t) = (t - \lambda_1)\ldots(t - \lambda_n) = t^n$$

Se K não for algebricamente fechado, podemos fazer uma extensão L de K de modo que L seja algebricamente fechado, e considerar N e seu respectivo polinômio característico nesse corpo.

4.8 Exercício 8

(8) Seja V um K-espaço de dimensão finita e sejam $T, N \in L(V)$ tais que N é nilpotente e $TN = NT$. Prove que

(a) T é inversível se, e somente se, $T + N$ é inversível.

(b) $\det(T) = \det(T + N)$ e $p_T(t) = p_{T+N}(t)$.

Solução:

(a)

($\Rightarrow$) Como N é nilpotente, sabemos que existe $m > 0$ tal que $N^m = 0$. Assumindo que $N \neq 0$ (pois do contrário não há o que demonstrar), então $m > 1$. Se T é inversível, podemos escrever

$$T + N = T(I + T^{-1}N)$$

Note também que

$$TN = NT \Rightarrow T^{-1}N = NT^{-1}.$$

e consequentemente

$$(-T^{-1}N)^m = (-1)^m T^{-m} N^m = 0.$$

Lembrando da identidade polinomial

$$x^m - 1 = (x - 1) \sum_{0}^{m-1} x^{m-1-i},$$

que podemos reescrever como

$$1 - x^m = (1 - x) \sum_{0}^{m-1} x^{m-1-i},$$

podemos aplicá-la tomando $x = -T^{-1}N$, obtendo

$$1 - x^m = (1 - x) \sum_{0}^{m-1} x^{m-1-i} \Rightarrow 1 - (-T^{-1}N)^m = (1 - (-T^{-1}N)) \sum_{0}^{m-1} (-T^{-1}N)^{m-1-i} \Rightarrow$$

$$I - (-T^{-1}N)^m = (I + T^{-1}N) \sum_{0}^{m-1} (-T^{-1}N)^{m-1-i}.$$

Mas por outro lado, temos que

$$I - (-T^{-1}N)^m = I - 0 = I,$$

donde segue que

$$I - (-T^{-1}N)^m = (I + T^{-1}N) \sum_{0}^{m-1} (-T^{-1}N)^{m-1-i} \Rightarrow I = (I + T^{-1}N) \sum_{0}^{m-1} (-T^{-1}N)^{m-1-i}.$$

Logo, isso mostra que $(I + T^{-1}N)$ possui uma inversa, respectivamente:

$$\sum_{0}^{m-1} (-T^{-1}N)^{m-1-i}.$$

Daí, concluímos que ambos T e $I + T^{-1}N$ são inversíveis; logo seu produto também o é. Mas

$$T(I + T^{-1}N) = T + N.$$

Portanto, segue que $T + N$ é inversível.

($\Leftarrow$) Se $T + N$ é inversível, como $-N$ é nilpotente e $(T + N)(-N) = (-N)(T + N)$, então basta aplica ($\Rightarrow$) para $T + N$ e $-N$ em vez de T e N e concluir que $(T + N) - N$ é inversível, aí T é inversível.

(b)

Se $\det(T) = 0$, então T não é inversível, aí, pelo item (a), a matriz $T+N$ não é inversível, aí temos $\det(T + N) = 0$, aí $\det(T) = \det(T + N)$. Se $\det(T) \neq 0$, então T é inversível, aí utilizando que

$$T + N = T(I + T^{-1}N),$$

podemos inferir que:

$$\det(T + N) = \det(T)\det(I + T^{-1}N),$$

porém $TN = NT$ e N é nilpotente, aí $T^{-1}N$ é nilpotente, assim, pela resolução do Exercício 7 da Lista 3, existe uma base B tal que a matriz de $T^{-1}N$ seja estritamente triangular superior, assim $I+T^{-1}N$ é triangular superior com todas as entradas na diagonal valendo 1, assim $\det(I+T^{-1}N) = 1$, aí $\det(T + N) = \det(T)$.

(c)

Para todo t, então $-N$ é nilpotente e também:

$$(tI - T)(-N) = (-N)(tI - T),$$

aí pelo item (b) temos:

$$\begin{aligned} p_T(t) &= \det(tI - T) \\ &= \det(tI - T - N) \\ &= \det(ti - (T + N)) \\ &= p_{T+N}(t) \end{aligned}$$

4.9 Exercício 9

(9) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $[T]_{can} = A$. Escreva $T = D + N$, com D diagonalizável, N nilpotente e $DN = ND$.

Solução: Vamos encontrar a decomposição de Jordan-Chevalley de A. Para isso, calculemos primeiramente o polinômio característico de A :

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -2 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 \\ &= (\lambda - 2)^2(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$. Consideremos então para cada autovalor λ_i, com $i = 1, 2, \ldots, k$, os polinômios da forma $W_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} (t-\lambda_j)^{\alpha_j}$. Temos então

$$W_1(t) = (t-1) \quad \text{e} \quad W_2(t) = (t-2)^2$$

Vamos encontrar agora polinômios $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$ tais que $Q_1(t)W_1(t) + Q_2(t)W_2(t) = 1$.

Para este caso, observe que $(t-2)^2 = t^2 - 4t + 4 = (t-1)(t-3) + 1$, o que pode ser obtido dividindo-se W_2 por W_1. Daí,

$$(3-t)(t-1) + 1 \cdot (t-2)^2 = 1 \Rightarrow Q_1(t) = (3-t) \quad \text{e} \quad Q_2(t) = 1$$

Calculemos o polinômio $D(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Q_i(t) W_i(t)$. Temos para nosso caso:

$$\begin{aligned} D(t) &= \sum_{i=1}^{2} \lambda_i Q_i(t) W_i(t) \\ &= \lambda_1 Q_1(t) W_1(t) + \lambda_2 Q_2(t) W_2(t) \\ &= 2(3-t)(t-1) + 1 \cdot (t-2)^2 \cdot 1 \\ &= -t^2 + 4t - 2 \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$D = D(A) = -A^2 + 4A - 2I = \begin{bmatrix} -9 & -3 & 4 \\ -8 & -4 & 4 \\ -10 & -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 4 & -4 \\ 8 & 8 & -4 \\ 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Daí,

$$N = A - D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

De fato, pode-se verificar que $N^2 = 0$, e que D é diagonalizável. Além disso,

$$DN = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = ND$$

Portanto, $A = D + N$.

Observação: Em resumo, o processo para se encontrar a decomposição de Jordan-Chevalley de uma matriz A é o seguinte:

- ♣ Encontre o polinômio característico de A e seus respectivos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$;
- ♥ Para cada autovalor λ_i, escreva um polinômio da forma
$$W_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} (t-\lambda_j)^{\alpha_j} = (t-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_{i-1})^{\alpha_{i-1}} \cdot (t-\lambda_{i+1})^{\alpha_{i+1}} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{\alpha_k}$$
- ♠ Encontre polinômios $Q_1(t), Q_2(t), \ldots, Q_r(t)$ tais que
$$Q_1(t)W_1(t) + Q_2(t)W_2(t) + \ldots + Q_k(t)W_k(t) = 1$$
- ♥ Determine o polinômio
$$D(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Q_i(t) W_i(t),$$
e encontre $D = D(A)$.
- ✠ Calcule $N = A - D$.

4.10 Exercício 10

(10) Sejam $A \in \mathscr{M}_n(K)$ e $T_A\colon \mathscr{M}_n(K) \to \mathscr{M}_n(K)$ o operador definido por $T_A(M) = AM - MA$.

(a) Prove que se A é nilpotente, então T_A é nilpotente. Vale a recíproca?

(b) Prove que se K é algebricamente fechado e se T_A é diagonalizável, então A é diagonalizável. (*Sugestão*: Para cada matriz $M \in \mathscr{M}_n(K)$ seja $\tilde{M} \in \mathscr{L}(K^n)$ o operador tal que $[\tilde{M}]_{can} = M$. Seja $v \in K^n$ um autovetor de $\tilde{A}$. Considere a transformação linear $\varphi\colon \mathscr{M}_n(K) \to K^n$ definida por $\varphi(M) = \tilde{M}(v)$. Prove que φ é sobrejetora.)

Solução:

(a) Se A é nilpotente, então existe um $r > 0$ tal que $A^r = 0$. Observe que

$$\begin{aligned} T_A^2(M) &= T_A(T_A(M)) \\ &= T_A(AM - MA) \\ &= A(AM - MA) - ((AM - MA))A \\ &= A^2M - 2AMA + MA^2 \end{aligned}$$

Também temos que

$$\begin{aligned} T_A^3(M) &= T_A(TA^2(M)) \\ &= T_A(A^2M - 2AMA + MA^2) \\ &= A(A^2M - 2AMA + MA^2) - (A^2M - 2AMA + MA^2)A \\ &= A^3M - 3A^2MA + 3AMA^2 - MA^3 \end{aligned}$$

Em geral, procedendo analogamente, temos que

$$T_A^k(M) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} A^{k-i} M A^k$$

Logo, a menor potência de A que aparecerá em $T_A^k(M)$ será $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$.

Portanto, para $k \geq 2r$, a menor potência de A que aparecerá em $T_A^k(M)$ será no mínimo $\left\lfloor \frac{2r}{2} \right\rfloor = r$. Portanto, teremos $T_A^k(M) = 0$ para todo M, e portanto o operador T_A será nilpotente.

Observe que a recíproca não é verdadeira. Tome por exemplo $A = I_n$. Então nesse caso, temos que

$$T_{I_n}(M) = I_nM - MI_n = 0.$$

Logo, $T_{I_n} = 0$, que obviamente é nilpotente, mas $A = I_n$ não é nilpotente.

(b) Suponhamos que A possua um autovalor λ e T_A seja diagonalizável. Seja $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ os autovalores de T_A. Para toda $M \in \mathscr{M}_n(K)$, então existem $M_1, \ldots, M_r$ tais que:

$$M = M_1 + \cdots + M_r$$

e para todo i tenhamos:

$$T_A(M_i) = \lambda_i M_i,$$

assim temos:

$$\begin{aligned} T_A(M_i)v = \lambda_i M_i v &\Rightarrow AM_i v - M_i A v = \lambda_i M_i v \\ &\Rightarrow AM_i v - \lambda M_i v = \lambda_i M_i v \\ &\Rightarrow AM_i v = (\lambda_i + \lambda) M_i v, \end{aligned}$$

aí $M_i v$ é autovetor de A; logo todo vetor da forma Mv pode ser expresso como soma de autovetores de A. Além disso, como $v \neq 0$, então existe j tal que $v_j \neq 0$, assim para i seja $E_i \in \mathscr{M}_n(K)$ a matriz que vale v_j^{-1} na entrada (i,j) e 0 nas outras, então $E_i v = e_i$, em que $e_i \in K^n$ é o vetor que vale 1 na entrada i e 0 nas demais. Portanto toda matriz em $\mathscr{M}_n(K)$ é da forma Mv para alguma $M \in \mathscr{M}_n(K)$, aí pode ser expressa como soma de autovalores de A. Logo A é diagonalizável.

Observação: T_A na verdade é um operador de derivação em $\mathscr{M}_n(K)$. Veja que $\forall M, N \in \mathscr{M}_n(K)$, temos que

- $$\begin{aligned} T_A(M+N) &= A(M+N) - (M+N)A \\ &= AM - MA + AN - NA \\ &= T_A(M) + T_A(N); \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} T_A(MN) &= AMN - MNA \\ &= AMN - MAN + MAN - MNA \\ &= (AMN - MAN) + (MAN - MNA) \\ &= T_A(M)N + MT_A(N). \end{aligned}$$

4.11 Exercício 11

(11) Encontre duas matrizes nilpotentes de ordem 4 que tenham o mesmo polinômio minimal, mas que não sejam semelhantes.

Solução: Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que $A^2 = B^2 = 0$, e A e B possuem o mesmo polinômio minimal, mas A e B não são semelhantes. De fato, para matriz $P \in M_4(K)$, sendo:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix},$$

então:

$$PA = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 & p_{33} \\ 0 & 0 & 0 & p_{43} \end{pmatrix}$$

e

$$BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & p_{1,4} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & p_{2,4} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} & p_{3,4} \\ p_{4,1} & p_{4,2} & p_{4,3} & p_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

assim, se $PA = BP$, então:

$$p_{21} = p_{22} = p_{23} = p_{41} = p_{42} = p_{43} = 0, \quad p_{13} = p_{24}, \quad p_{33} = p_{44},$$

logo P deve ser da forma:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & a & p_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a \\ p_{31} & p_{32} & b & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

aí fica fácil ver que P não é inversível. Portanto, não existe matriz inversível P tal que $PAP^{-1} = B$, ou seja, A e B não são semelhantes.

Observação: Para ver que A e B não são semelhantes, também podemos olhar sua forma normal de Jordan e observar que elas possuem decomposições em blocos distintas.

Questões Suplementares

4.12 Exercício 12

(12) O teorema de Fine-Herstein estabelece que a quantidade de matrizes nilpotentes em $\mathbb{M}_n(\mathbb{F}_q)$ é q^{n^2-n}. Prove-o.

Solução:

4.13 Exercício 13

(13) Encontre uma matriz nilpotente $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de ordem 3 que possui todas as entradas não-nulas.

Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

4.14 Exercício 14

(14) Sejam $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ duas matrizes tais que

$$A^2B + AB^2 = 2ABA$$

(a) Para

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

encontre $k \in \mathbb{N}$ tal que $(AB - BA)^k = 0$.

(b) Prove que existe um inteiro k tal que $(AB - BA)^k = 0$.

Solução:

5 Lista 4

5.1 Exercício 1

(1) Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(V)$.

(a) Prove que se existe um vetor cíclico para T então todo subespaço próprio T-invariante de V também tem um vetor cíclico.

(b) Vale a recíproca do item (a)? (Isto é, se todo subespaço próprio T-invariante W de Vtem um vetor cíclico para T_W, é verdade que existe um vetor cíclico para T?)

Solução:

(a) Sabemos que um vetor $v \in V$ é cíclico se $Z(v,T) = V$, onde

$$Z(v,T) = \{g(T)(v) \mid g(t) \in K[t]\}.$$

Para subespaço W que seja T-invariante, então seja $\{e_1, \ldots, e_m\}$ uma base de W. Para todo i então existe um polinômio p_i tal que $e_i = p_i(T)(v)$. Seja $p = \mathrm{mdc}(p_1, \ldots, p_m)$. Então por Bézout existem polinômios $q_1, \ldots, q_m$ tais que $p_1q_1 + \cdots + p_mq_m = p$, assim

$$p(T)(v) = q_1(T)(e_1) + \cdots + q_m(T)(e_m) \in W,$$

aí, como $p \mid p_i$ para todo i, então, sendo $w = p(T)(v)$, temos $W = Z(w,T)$.

(b) A recíproca não é verdadeira. Seja $V = K^2$ e $T = I$. Então para todo $v \in V$ temos $Z(v,T) = Kv$. Todo subespaço próprio T-invariante tem dimensão no máximo 1, assim é da forma $Ke = Z(e,T)$. Por outro lado, é fácil ver que para todo $v \in V$ temos $Z(v,T) = Kv \neq V$.

5.2 Exercício 2

(2) Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(V)$. Prove que se T^2 tem um vetor cíclico, então T tem um vetor cíclico. Vale a recíproca?

Solução: Seja $n = \dim V$. Se v é um vetor cíclico para T^2, isso quer dizer que $V = Z(v,T^2)$. Vejamos que $Z(v,T^2) \subseteq Z(v,T)$.

$$Z(v,T^2) = \{g(T^2)(v) \mid g(t) \in K[t]\} = \langle v, T^2(v), T^4(v), \ldots \rangle \subseteq \langle v, T(v), T^2(v), \ldots \rangle = Z(v,T).$$

Logo, concluímos que

$$Z(v,T^2) \subseteq Z(v,T) \Rightarrow V \subseteq Z(v,T) \Rightarrow \boxed{Z(v,T) = V}$$

Assim, v é um vetor cíclico para T.

Observe que a recíproca não é verdadeira. Tome:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então $v = (1,0)$ é um vetor cíclico para T, mas $T^2 = I$, que não possui um vetor cíclico.

5.3 Exercício 3

(3) Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathscr{L}(V)$ um operador diagonalizável.

(a) Mostre que existe um vetor cíclico para T se, e somente se, T tem n autovalores distintos.

(b) Mostre que se T tem n autovalores distintos e se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de autovetores de T, então $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ é um vetor cíclico para T.

Solução:

(a) Se existe $v \in V$ tal que $V = Z(v, T)$, então $\{v, T(v), \ldots, T^{n-1}(v)\}$ é base de V, aí m_T tem grau n, e sendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ os autovalores distintos, então

$$m_T(t) = (t - \lambda_1) \ldots (t - \lambda_r).$$

Assim, concluímos que m_T tem grau r. Logo, $r = n$ e T tem n autovalores distintos. A recíproca será resolvida no item (b).

(b) Se T tem n autovalores distintos e se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de autovetores de T, então para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. existe λ_i tal que $T(v_i) = \lambda_i v_i$; assim $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ devem ser distintos. Agora, considere para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$q_i(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j) \quad \text{e} \quad p_i(t) = \frac{q_i(t)}{q_i(\lambda_i)},$$

então:

$$\begin{aligned} v_i &= p_i(\lambda_1) v_1 + \cdots + p_i(\lambda_n) v_n \\ &= p_i(T) v_1 + \cdots + p_i(T) v_n \\ &= p_i(T)(v_1 + \cdots + v_n). \end{aligned}$$

Logo, $v_1 + \cdots + v_n$ é um vetor cíclico para T.

5.4 Exercício 4

(4) Prove que duas matrizes de ordem 3 são semelhantes se, e somente se, elas têm o mesmo polinômio característico e o mesmo polinômio minimal.

Solução:

5.5 Exercício 5

(5) Prove que toda matriz $A \in \mathscr{M}_n(K)$ é semelhante à sua transposta A^t.

Solução:

5.6 Exercício 6

(6) Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathscr{L}(V)$.

(a) Prove que $\operatorname{Im} T$ tem um complementar T-invariante se, e somente se, $\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T = 0$.

(b) Se $\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T = 0$, prove que $\operatorname{Ker} T$ é o único complementar de $\operatorname{Im} T$ que é T-invariante.

Solução:

5.7 Exercício 7

(7) Seja $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Encontre uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP$ esteja na forma racional.

Solução: Primeiramente, encontremos o polinômio característico e o polinômio minimal de A. Temos que

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \Rightarrow p_A(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ -3 & -3 & -5-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 \Rightarrow p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

O polinômio minimal será

$$m_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

Dessa forma, temos que

$$V = Z(v_1, A) \oplus Z(v_2, A)$$

Como na decomposição cíclica, o A-anulador do primeiro vetor v_1 é o polinômio minimal, temos que

$$\dim(Z(v_1, A)) = \deg(m_A) = 2$$

Portanto, na decomposição, aparece apenas mais um vetor v_2, sendo

$$\dim(Z(v_2, A)) = 1,$$

ou seja, v_2 é um vetor característico de A. O Aanulador de v_2 é $p_2 = \lambda - 2$, pois $p_A = p_1 p_2$. A matriz que representa $Z(v_1, A)$ será portanto, a matriz companheira de $p_1(\lambda) = m_A(\lambda)$. Assim,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A matriz que representa $Z(v_2, A)$ será a matriz companheira de $p_2(\lambda) = \lambda + 2$. Assim,

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$$

Portanto, temos que a forma racional de A é

$$R = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Encontremos agora a matriz P. Para isso, precisaremos encontrar bases para $Z(v_1, A)$ e $Z(v_2, A)$. Vamos primeiramente descrever $V_1 = \operatorname{Ker}(A - I)$ e $V_2 = \operatorname{Ker}(A + 2I)$.

- Para encontrar uma base para V_1, seja $v = (x, y, z) \in V$. Então, temos que

$$(A - I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3y + 3z = 0 \\ 3x + 3z = 0 \\ -3x - 3y - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow v = z \cdot (-1, -1, 1)$$

Desse modo, temos que $V_1 = \text{Ker}(A - I) = \langle(-1, -1, 1)\rangle$. Denotemos $u_1 = (-1, -1, 1)$.

- Para encontrar uma base para V_2, seja $v = (x, y, z) \in V$. Então, temos que

$$(A + 2I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \\ -3x - 3y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow v = y \cdot (-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

Desse modo, temos que $V_2 = \text{Ker}(A+2I) = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$. Denotemos $u_2 = (-1, 1, 0)$ e $u_3 = (-1, 0, 1)$.

Para encontrar v_1, como $p_1 = m_A$, precisamos escolher um vetor de V_1 e um de V_2. Podemos então tomar $v_1 = u_1 + u_2$ (poderia ser $u_1 + u_3$ também), e assim

$$v_1 = (-1, -1, 1) + (-1, 1, 0) \Rightarrow v_1 = (-2, 0, 1).$$

Sabemos que $\{v_1, Av_1\}$ é uma base para $Z(v_1, A)$. Então,

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo, $\mathscr{B} = \{(-2, 0, 1), (1, -3, 1)\}$ é base para $Z(v_1, A)$. Para encontrar v_2, como $p_2 = \lambda + 2$, podemos tomar $v_2 = u_3$. Logo,

$$v_2 = u_3 \Rightarrow v_2 = (-1, 0, 1)$$

Assim, temos que $\mathscr{B}_2 = \{v_2\} = \{(-1, 0, 1)\}$ é base para $Z(v_2, A)$. A matriz P será composta pelos vetores de $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ dispostos em suas colunas. Assim,

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Com efeito, uma rápida verificação mostra que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = R \Rightarrow R = P^{-1}AP,$$

como queríamos.

5.8 Exercício 8

(8) Seja $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Encontre vetores $\{v_1, \dots, v_r\}$ que satisfazem as condições do Teorema da Decomposição Cíclica.

Solução:

5.9 Exercício 9

(9) Sejam N_1 e N_2 matrizes de ordem 6 nilpotentes. Suponha que elas têm o mesmo polinômio minimal e o mesmo posto. Prove que elas são semelhantes. Mostre que o mesmo resultado não é verdadeiro para matrizes de ordem 7.

Solução:

5.10 Exercício 10

(10) Seja $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, tal que $A^2 + I = 0$. Prove que $n = 2k$ e que A é semelhante à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix},$$

onde $I \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ é a matriz identidade.

Solução:

5.11 Exercício 11

(11) Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(V)$. Prove que T tem um vetor cíclico se, e somente se a seguinte afirmação é verdadeira: "Todo operador linear que comuta com T é um polinômio em T."

Solução:

(a) Se T tem um vetor cíclico, então, para todo operador linear U que comuta com T, o conjunto $W = \operatorname{Im}(U)$ é um subespaço T-invariante. Pelo Exercício 1 da Lista 4, existe w tal que $W = Z(w, T)$, aí existe um polinômio p tal que $U(v) = p(T)(w)$. Assim, para todo k, temos que

$$UT^k(v) = T^k U(v) = T^k p(T)(v) = p(T)T^k(v).$$

Logo, como $\{v, T(v), T^2(v) \dots\}$ gera V, então $U = p(T)$.

5.12 Exercício 12

(12) Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(V)$. Prove que todo vetor não nulo $v \in V$é um vetor cíclico para T se, e somente se, o polinômio característico de T é irredutível em $K[t]$.

Solução:

5.13 Exercício 13

(13) Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(V)$. Suponha que o polinômio minimal de T é igual ao polinômio característico de T e é uma potência de um polinômio irredutível. Prove que nenhum subespaço não trivial de V invariante sob T tem um complementar que também é invariante sob T.

Solução:

5.14 Exercício 14

(14) Determine a forma racional R da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$$

e encontre uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = R$.

Solução:

5.15 Exercício 15

(15) Seja $T \in \mathscr{L}(K^6)$ com polinômio minimal $m_T(x) = (x^2-2)(x^2+1)$. Ache as possibilidades para a forma racional de T para $K = \mathbb{Q}, K = \mathbb{R}$ e $K = \mathbb{C}$.

Solução:

5.16 Exercício 16

(16) Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ um operador linear tal que t^2+3 é um divisor do polinômio minimal de T e 1 é o único autovalor de T. Quais são as possíveis a formas racionais de T?

Solução:

5.17 Exercício 17

(17) Classifique, a menos de semelhança, as matrizes reais de ordem 6 com polinômio minimal

$$(t-1)^2(t+1)(t-2).$$

Solução:

5.18 Exercício 18

(18) Determine quais das matrizes seguintes são semelhantes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 13 & -16 & 2 & -1 \\ -9 & -13 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -8 & -6 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & -8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solução:

5.19 Exercício 19

(19) Mostre que as matrizes complexas

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

são semelhantes.

Solução:

5.20 Exercício 20

(20) Classifique, a menos de semelhança, todas as matrizes de ordem 6 nilpotentes.

Solução:

5.21 Exercício 21

(21) Encontre a forma de Jordan real J da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

e a matriz P tal que $P^{-1}AP = J$.

Solução:

5.22 Exercício 22

(22) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine a forma de Jordan J de A e encontre uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = J$.

Solução: Para encontrar a forma de Jordan de A, vamos primeiramente encontrar o polinômio característico e o minimal de A. Temos que

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^4 + \lambda^2 \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda + i)(\lambda - i)$$

Sabemos que o polinômio minimal é o polinômio de menor grau que anula T. Além disso, $m_A(t) \mid p_A(t)$. Nesse caso, uma inspeção direta mostra que $m_A(t) = p_A(t) = \lambda^2(\lambda+i)(\lambda-i)$. Portanto, os autovalores de A são $0, i$ e $-i$. A quantidade de vezes que cada um aparecerá em J é exatamente sua multiplicidade algébrica, ou seja, a multiplicidade em $p_a(t)$. Desse modo, já sabemos que 0 aparecerá duas vezes, enquanto i e $-i$ aparecerão uma vez cada. Resta-nos agora determinar quantos blocos de Jordan estão associados a cada autovalor.
Para isso, vamos calcular a dimensão de cada autoespaço associado. Temos:

- $\dim(\mathrm{Ker}(A^2)) = 2$. Observe que A^2 possui 2 linhas linearmente independentes:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4=L_4+L_2]{L_3=L_3+L_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Logo, $\mathrm{posto}(A) = 2$, e portanto

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 4 - \mathrm{posto}(A) \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 4 - 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$$

  Encontremos os autovetores que geram $\mathrm{Ker}(A^2)$. Temos que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x,y,z,w) = x \cdot (1,0,0,0) + y \cdot (0,1,0,0)$$

  Logo, $\mathrm{Ker}(A) = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$.

- $\dim(\mathrm{Ker}(A - iI)) = 1$. Temos que

$$A - iI = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4=L_4-iL_3} \begin{bmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Portanto, $\mathrm{posto}(A - iI) = 3$, e $\dim(\mathrm{Ker}(A - iI)) = 1$. Encontremos agora um autovetor que gera $\mathrm{Ker}(A - iI)$. Para isso, basta resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x,y,z,w) = w \cdot (i, -1, -i, 1)$$

  Portanto, $\mathrm{Ker}(A - iI) = \langle (i, -1, -i, 1) \rangle$.

- $\dim(\mathrm{Ker}(A + iI)) = 1$. Temos que

$$A + iI = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & i \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4=L_4+iL_3} \begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Portanto, $\mathrm{posto}(A + iI) = 3$, e $\dim(\mathrm{Ker}(A + iI)) = 1$. Encontremos agora um autovetor que gera $\mathrm{Ker}(A + iI)$. Para isso, basta resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x,y,z,w) = w \cdot (-i, -1, i, 1)$$

Portanto, $\mathrm{Ker}(A - iI) = \langle(-i, -1, i, 1)\rangle$.

Portanto, a forma de Jordan de A será

$$J = \begin{bmatrix} J_0 & 0 & 0 \\ 0 & J_i & 0 \\ 0 & 0 & J_{-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

Para encontrar a matriz P, basta colocar na i-ésima coluna o autovetor que gera o respectivo autoespaço associado ao autovalor da i-ésima coluna de J. Assim,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i & -i \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & -i \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

5.23 Exercício 23

(23) Seja V um espaço vetorial de dimensão n, com $n \geq 2$ e seja T um operador linear em V de posto 2. Determine todas as possíveis formas de Jordan de T.

Solução:

5.24 Exercício 24

(24) Seja $T\colon \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ o operador linear definido por

$$T(p(t)) = p(t+1).$$

(a) Determine a forma de Jordan de T.

(b) Se $n = 4$, encontre uma base B de $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ tal que $[T]_B$ esteja na forma de Jordan.

Solução:

5.25 Exercício 25

(25) Determine o número de matrizes não semelhantes A em $\mathscr{M}_6(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$(A - 2I)^3 = 0.$$

Solução:

5.26 Exercício 26

(26) Seja $T\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ um operador linear com polinômio característico

$$p_T(t) = (t-a)^3(t-b)^3,$$

polinômio minimal

$$m_T(t) = (t-a)^2(t-b)$$

e $a \neq b$. Determine a forma racional e a forma de Jordan de T.

Solução:

5.27 Exercício 27

(27) Classifique, a menos de semelhança, todas as matrizes reais de ordem 7 com polinômio característico

$$p_T(t) = (t-1)^4(t-2)^2(t-3).$$

Solução: Sabemos que duas matrizes são semelhantes se, e somente se, possuem a mesma forma de Jordan. Logo, todas as matrizes reais de ordem 7 serão semelhantes a uma das formas de Jordan determinadas pelo operador $T\colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ que possui o polinômio característico acima. Daí, observe que

- Como $t-1$ tem expoente 4 em $p_T(t)$, o autovalor 1 deve aparecer quatro vezes na diagonal principal;
- Como $t-2$ tem expoente 2 em $p_T(t)$, o autovalor 2 deve aparecer duas vezes na diagonal principal;
- Como $t-3$ tem expoente 2 em $p_T(t)$, o autovalor 3 deve aparecer uma vez na diagonal principal.

Assim, as formas canônicas de Jordan possíveis são:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5.28 Exercício 28

(28) Determine a forma racional e a forma de Jordan da matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução:

5.29 Exercício 29

(29) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre o corpo K e seja $T \in \mathscr{L}(V)$. Seja $f \in K[t]$ um polinômio mônico, irredutível e de grau $d \geq 1$.

(a) Suponha que $d \mid n$. Prove que existe $T \in \mathscr{L}(V)$ tal que o polinômio minimal de T é f.

(b) Se $T \in \mathscr{L}(V)$ é tal que seu polinômio minimal tem grau d e é irredutível em $K[t]$, é verdade que $d \mid n$? Justifique.

Solução:

5.30 Exercício 30

(30) Dê a forma de Jordan de um operador linear $T\colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ com polinômio característico $p_T(t) = (t-1)^2(t-2)^4(t-3)$ e tal que $\dim(\operatorname{Ker}(T-2I)) = 2, \dim(\operatorname{Ker}(T-I)) = 1$ e $\operatorname{Ker}(T-2I)^3 \neq \operatorname{Ker}(T-2I)^2$.

Solução:
Questões Suplementares

5.31 Exercício 31

(31) Seja V um espaço vetorial de dimensão n e considere $T\colon V \to V$ cuja matriz na base canônica é $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, que possui como polinômio característico

$$p_A(t) = (t-\lambda_1)^{P(a_1)} \cdot (t-\lambda_2)^{P(a_2)} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{P(a_k)},$$

onde $P(k)$ representa o k-ésimo número pentagonal, e $(a_n)_{n\geq 1}$ é a sequência definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = 7n - a_n - 9, \forall n > 1 \end{cases}$$

(a) Prove que n não pode ser 2019.

(b) Mostre que a quantidade de formas de Jordan que a matriz A pode ter é um múltiplo de 7.

Solução:

6 Lista 5

Nesta lista, V é um K-espaço com produto interno $\langle , \rangle$ em que $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

6.1 Exercício 1

(1) Faça o que se pede:

(a) Se $K = \mathbb{R}$, mostre que, para $u, v \in V$,

$$\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

(b) Mostre que **(a)** é falso se $K = \mathbb{C}$.

(c) Se $K = \mathbb{C}$, mostre que para $u, v \in V$,

$$\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \|\alpha u + \beta v\|^2 = \|\alpha u\|^2 + \|\beta v\|^2 ,$$

para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Solução:

(a) Observando que

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \Rightarrow \|u + v\| = \sqrt{\langle u + v, u + v \rangle},$$

a partir das propriedades do produto interno, segue que

$$\|u + v\|^2 = \sqrt{\langle u + v, u + v \rangle}^2 = \langle u + v, u + v \rangle =$$

$$\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle =$$

$$\|u\|^2 + 0 + 0 + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Rightarrow \boxed{\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2}$$

Agora, se $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, então temos que

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle u, v \rangle \Rightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle u, v \rangle \Rightarrow$$

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle u, v \rangle \Rightarrow 2 \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\langle u, v \rangle = 0}$$

6.2 Exercício 2

(2) Mostre que vale a *lei do paralelogramo*:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 , \ \forall u, v \in V$$

Solução:

6.3 Exercício 3

(3) Se $K = \mathbb{R}$, mostre que, para $u, v \in V$, $\|u\| = \|v\|$ se, e somente se, $u + v$ e $u - v$ são ortogonais. Discuta a afirmação para $K = \mathbb{C}$.

Solução:

6.4 Exercício 4

(4) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K.

(a) Se $K = \mathbb{C}$, mostre que vale a *identidade de polarização*, para todos $u, v \in V$:

$$4\langle u, v\rangle = \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2$$

(b) Se $K = \mathbb{R}$, mostre que vale a *identidade de polarização*, para todos $u, v \in V$:

$$4\langle u, v\rangle = \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2$$

Solução:

6.5 Exercício 5

(5) Encontre uma base ortonormal de cada um dos seguintes subespaços S e determine também, em cada caso, o subespaço $S^\perp$.

(a) S é o subespaço de $\mathbb{C}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 0, i)$ e $v_2 = (2, 1, 1+i)$, com o produto interno usual.

(b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$, com o produto interno usual.

(c) $S = \{p(t) \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) | tp'(t) = p(t)\}$ e $\langle p, q\rangle = \int\limits_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t$

(d) $S = \{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) | \mathrm{tr}(A) = 0\}$ e $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$.

(e) $S = \langle (1, -1, 1)\rangle$, com o produto interno usual.

Solução:

6.6 Exercício 6

(6) Prove que se

$$\left|\langle u, v\rangle\right| = \|u\|\|v\|\,,$$

então u e v são linearmente dependentes.

Solução:

6.7 Exercício 7

(7) Sejam W um subespaço de V e $v \in V$. Um vetor $w \in W$ é uma *melhor aproximação* para v por vetores em W se

$$\|v - w\| \leq \|v - u\|\,,\ \text{para todo } u \in W.$$

Prove que

(a) O vetor $w \in W$ é uma melhor aproximação para $v \in V$ por vetores em W se, e somente se, $v - w \in W^{\perp}$.

(b) Se uma melhor aproximação para $v \in V$ por vetores em W existe, então ela é única.

(c) Se $\dim W < \infty$ então existe uma melhor aproximação para $v \in V$ por vetores em W e ela é dada por $w = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \langle v, e_i \rangle e_i$, onde $\{e_1, \dots, e_k\}$ é uma base ortonormal qualquer de W.

Tal vetor é chamado de *projeção ortogonal de v em W*.

Solução:

6.8 Exercício 8

(8) Sejam W um subespaço de V e $v \in V$. Seja $E\colon V \to V$ a função tal que $E(v) = w$, a projeção ortogonal de v em W. (Assuma que, para todo $v \in V$, existe tal w.) Prove que

(a) E é um operador linear em V.

(b) E é idempotente.

(c) $\operatorname{Im} E = W$ e $\operatorname{Ker} E = W^{\perp}$.

(d) $V = W \oplus W^{\perp}$.

Solução:

6.9 Exercício 9

(9) Seja W um subespaço de dimensão finita de V. Existem, em geral, várias projeções cuja imagem é W. Uma delas, a projeção ortogonal, tem a propriedade que $\big\|E(v)\big\| \leq \|v\|$, para todo $v \in V$. Prove se $E \in \mathscr{L}(V)$ é uma projeção cuja imagem é W e $\big\|E(v)\big\| \leq \|v\|$, para todo $v \in V$, então E é a projeção ortogonal em W. (**Sugestão:** Prove que $\big\langle E(v), v - E(v) \big\rangle = 0$, para todo $v \in V$ se, e somente se, $\big\langle u, E(v) \big\rangle = 0$, para todo $u \in \operatorname{Ker} E$ e $v \in V$.)

Solução:

6.10 Exercício 10

(10) Sejam W um subespaço de dimensão finita de V e E a projeção ortogonal de V em W. Prove que $\big\langle E(v), u \big\rangle = \big\langle v, E(u) \big\rangle$ para todos $u, v \in V$.

Solução:

6.11 Exercício 11

(11) Sejam V e W espaços vetoriais de mesma dimensão (finita) sobre K e com produtos internos $\langle , \rangle_V$ e $\langle , \rangle_W$, respectivamente. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\big\langle T(u), T(v) \big\rangle_W = \langle u, v \rangle$, para todos $u, v \in V$.

(b) T leva **toda** base ortonormal de V em uma base ortonormal de W.

(c) T leva **uma** base ortonormal de V em uma base ortonormal de W.

(d) $\big\|T(v)\big\|_W = \|v\|_V$ para todo $v \in V$.

Tal T é um *isomorfismo de espaços com produto interno.*

Solução:

6.12 Exercício 12

(12) Uma matriz $A \in \mathscr{M}_n(K)$ é chamada *ortogonal* se $AA^t = I_n$ e *unitária* se $AA^* = I_n$. Encontre um exemplo de uma matriz complexa unitária que não é ortogonal e um exemplo de uma matriz que é ortogonal e não é unitária.

Solução:

6.13 Exercício 13

(13) Seja $T \in \mathscr{L}(V)$ um isomorfismo de espaços com produto interno, isto é,

$$\big\langle T(u), T(v) \big\rangle = \langle u, v \rangle \,,$$

para todos $u, v \in V$. Prove que T possui um adjunto e $T^* = T^{-1}$. Prove que vale também a recíproca, isto é, se T possui um adjunto com $T^* = T^{-1}$, então T é um isomorfismo de espaços com produto interno. Tal T é chamado *operador unitário* se $K = \mathbb{C}$ e *ortogonal* se $K = \mathbb{R}$.

Solução: ($\Rightarrow$) Para provar que T possui um adjunto, precisamos verificar que existe $T^* \in \mathscr{L}(V)$ tal que

$$\big\langle T(u), v \big\rangle = \big\langle u, T^*(v) \big\rangle \,, \quad \forall u, v \in V$$

Como T é um isomorfismo, sabemos que existe $T^{-1} \in \mathscr{L}(V)$. Consideremos o vetor $v = T^{-1}(w)$. Daí, $\forall u, w \in V$:

$$\begin{aligned} \big\langle T(u), T(v) \big\rangle = \langle u, v \rangle \quad &\Rightarrow \quad \big\langle T(u), T(T^{-1}(w)) \big\rangle = \big\langle u, T^{-1}(w) \big\rangle \\ &\Rightarrow \quad \big\langle T(u), w \big\rangle = \big\langle u, T^{-1}(w) \big\rangle \,. \end{aligned}$$

Logo, T possui um adjunto, e $T^* = T^{-1}$.
($\Leftarrow$) Se $T \in \mathscr{L}(V)$ possui um operador adjunto $T^* \in \mathscr{L}(V)$, sabemos por definição que

$$\big\langle T(u), v \big\rangle = \big\langle u, T^*(v) \big\rangle \,, \quad \forall u, v \in V$$

Como $T^* = T^{-1}$, escrevendo $v = T(w)$, temos que

$$\begin{aligned} \big\langle T(u), v \big\rangle = \big\langle u, T^*(v) \big\rangle \quad &\Rightarrow \quad \big\langle T(u), v \big\rangle = \big\langle u, T^{-1}(v) \big\rangle \\ &\Rightarrow \quad \big\langle T(u), T(w) \big\rangle = \big\langle u, T^{-1}(T(w)) \big\rangle \\ &\Rightarrow \quad \big\langle T(u), T(w) \big\rangle = \big\langle u, T^{-1}(T(w)) \big\rangle \\ &\Rightarrow \quad \big\langle T(u), T(w) \big\rangle = \langle u, w \rangle \,. \end{aligned}$$

Logo, T é um isomorfismo.

Solução:

6.14 Exercício 14

(14) Seja T o operador linear em $\mathbb{C}^2$ (com o produto interno usual) definido por: $T(1,0) = (1+i, 2)$ e $T(0,1) = (i, i)$. Determine a matriz de T^* em relação à base canônica de $\mathbb{C}^2$. Vale que $TT^* = T^*T$?

Solução: Seja $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ a matriz que representa T. Pelas informações do enunciado, se

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

devemos ter

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}.$$

Daí, segue que $\alpha = 1+i, \gamma = 2$, e $\beta = \delta = i$. Portanto, a matriz de T na base canônica de $\mathbb{C}^2$ é

$$\begin{pmatrix} 1+i & i \\ 2 & i \end{pmatrix}.$$

Observe que a matriz adjunta T^* corresponde ao hermitiano de A, ou seja,

$$[T^*]\text{can} = A^* = A^H = \overline{A}^t.$$

Logo, temos que a matriz procurada é

$$[T^*]\text{can} = A^* = \overline{\begin{pmatrix} 1+i & i \\ 2 & i \end{pmatrix}}^t = \begin{pmatrix} 1-i & -i \\ 2 & -i \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -i & -i \end{pmatrix}$$

Observe que

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ 2 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3+2i \\ 3-2i & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & i \\ 2 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1+3i \\ 1-3i & 2 \end{pmatrix}$$

Logo $TT^* \neq T^*T$ nesse caso, ou seja, T não é um operador normal.

6.15 Exercício 15

(15) Seja T um operador linear em V que possui um adjunto T^*.

(a) Mostre que $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ e que $\operatorname{Im} T^* \subset (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

(b) Mostre que se $\dim V < \infty$, então $\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

(c) Seja $V = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ e $T \in \mathscr{L}(V)$ definida por: $f \longmapsto T(f)$,, com $(T(f))(t) = tf(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Determine T^* e mostre que $\operatorname{Im} T^* \neq (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Solução:

(a) Provemos que $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$. Temos que

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker} T^* &\Leftrightarrow T^*(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle T^*(x), y \rangle = 0, \ \forall y \in V \\ &\Leftrightarrow \langle x, T(y) \rangle = 0, \ \forall y \in V \\ &\Leftrightarrow x \perp \operatorname{Im} T \\ &\Leftrightarrow x \in (\operatorname{Im} T)^\perp \end{aligned}$$

6.16 Exercício 16

(16) Seja $T \in \mathscr{L}(V)$. Prove que se T é inversível, então T^* é inversível e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Solução: Se T é inversível, então existe $T^{-1} \in \mathscr{L}(V)$ tal que $TT^{-1} = I$. Desse modo, das propriedades da adjunção, temos que

$$(TT^{-1})^* = I^* \Rightarrow (T^{-1})^* T^* = I$$

Logo, $(T^{-1})^* \in \mathscr{L}(V)$ é tal que $(T^{-1})^* T^* = I$. Portanto, T^* é inversível.
Para mostrar que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, podemos seguir dois caminhos:

- Temos que
$$I = I^*(TT^{-1})^* = (T^{-1})^* T^*.$$
Logo, $\left(T^{-1}\right)^* = (T^*)^{-1}$.

- Sabemos que $(T^*)^{-1} T^* = I$, então $((T^*)^{-1} T^*)^* = I^*$. Das propriedades de $*$, temos que $I^* = I$, $(AB)^* = B^* A^*$ e $A^{**} = A$. Daí,
$$((T^*)^{-1} T^*)^* = I^* \Rightarrow ((T^*)^*(T^*)^{-1})^* = I \Rightarrow T^{**}((T^*)^{-1})^* = I \Rightarrow T((T^*)^{-1})^* = I$$
Assim, concluímos que $((T^*)^{-1})^*$ é a inversa de T. Ou seja,
$$T^{-1} = ((T^*)^{-1})^* \Rightarrow (T^{-1})^* = (((T^*)^{-1})^*)^* \Rightarrow (T^{-1})^* = ((T^*)^{-1})^{**} \Rightarrow \boxed{(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}}$$

- Sendo T^* o adjunto de T, sabemos por definição que
$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle \quad \forall u, v \in V$$
Então, substituindo u por $T^{-1}(w)$, onde $w \in V$, ficamos com
$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle \Rightarrow \langle T(T^{-1}(w)), v \rangle = \langle T^{-1}(w), T^*(v) \rangle \Rightarrow \langle w, v \rangle = \langle T^{-1}(w), T^*(v) \rangle$$
Por outro lado, para T^{-1} e $x = T^*(v) \in V$:
$$\langle T^{-1}(w), x \rangle = \langle w, (T^{-1})^*(x) \rangle \Rightarrow \langle T^{-1}(w), T^*(v) \rangle =$$
$$\langle w, (T^{-1})^*(T^*(v)) \rangle \Rightarrow \langle T^{-1}(w), T^*(v) \rangle = \langle w, (TT^{-1})^*(v) \rangle \Rightarrow$$
$$\langle T^{-1}(w), T^*(v) \rangle = \langle w, I^*(v) \rangle \Rightarrow \langle T^{-1}(w), T^*(v) \rangle = \langle w, v \rangle$$
Daí, temos que
$$\langle T^{-1}(w), T^*(v) \rangle =$$
MelhorarEXPLICAÇÃO

6.17 Exercício 17

(17) Seja E um operador linear em V tal que $E^2 = E$ e tal que E possui um adjunto E^*. Prove que E é autoadjunto se, e somente se $EE = E^*E$. Prove também que, neste caso, E é a projeção ortogonal em $W = \text{Im } E$.

Solução:

6.18 Exercício 18

(18) Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e $T \in \mathscr{L}(V)$. Prove que T é autoadjunto se, e somente se $\langle T(v), v\rangle \in \mathbb{R}$, para todo $v \in V$.

Solução: ($\Rightarrow$) Seja T um operador auto-adjunto. Então, sabemos que $T^* = T$. Para mostrar que certo $z \in \mathbb{C}$ é real, basta verificar que $z = \overline{z}$. Dado $v \in V$, tem-se que

$$\langle T(v), v\rangle = \langle v, T^*(v)\rangle = \langle v, T^*(v)\rangle = \overline{\langle T(v), v\rangle} \Rightarrow \langle T(v), v\rangle \in \mathbb{R}$$

($\Leftrightarrow$) Dado $v \in V$, se $\langle T(v), v\rangle \in \mathbb{R}$, então temos que $\langle T(v), v\rangle = \overline{\langle T(v), v\rangle}$. Assim,

$$\langle T(v), v\rangle = \overline{\langle T(v), v\rangle} = \overline{\langle v, T^*(v)\rangle} = \langle T^*(v), v\rangle \Rightarrow \langle (T - T^*)(v), v\rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

Como V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, temos que $T - T^*$, acarretando $T = T^*$.

6.19 Exercício 19

(19) Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e $T \in \mathscr{L}(V)$. Prove que se $\langle T(v), v\rangle = 0$, para todo $v \in V$, então $T = 0$. Dê um exemplo para mostrar que o mesmo resultado não é necessariamente verdadeiro se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Solução: Por hipótese, $\langle T(v+w), v+w\rangle = 0$ para quaisquer $v, w \in V$. Assim,

$$\langle T(v+w), v+w\rangle = 0 \Rightarrow \langle T(v) + T(w), v+w\rangle = 0 \Rightarrow \langle T(v), v\rangle + \langle T(v), w\rangle + \langle T(w), v\rangle + \langle T(w), w\rangle \Rightarrow$$
$$0 + \langle T(v), w\rangle + \langle T(w), v\rangle + 0 \Rightarrow \langle T(v), w\rangle + \langle T(w), v\rangle = 0$$

Note que w é arbitrário na igualdade obtida acima. Daí, podemos substituir w por iw, e usando que

$$\langle T(v), iw\rangle = \overline{i}\langle T(v), w\rangle = -i\langle T(v), w\rangle \quad \text{e} \quad \langle T(iw), v\rangle = \langle iT(w), v\rangle = i\langle T(w), v\rangle,$$

podemos verificar que

$$\langle T(v), w\rangle + \langle T(w), v\rangle = 0 \Rightarrow \langle T(v), iw\rangle + \langle T(iw), v\rangle = 0 \Rightarrow -i\langle T(v), w\rangle + i\langle T(w), v\rangle = 0 \Rightarrow$$
$$i(\langle T(w), v\rangle - \langle T(v), w\rangle) = 0 \Rightarrow \langle T(w), v\rangle - \langle T(v), w\rangle = 0$$

Dessa forma, temos que

$$\cancel{\langle T(v), w\rangle} + \langle T(w), v\rangle + \langle T(w), v\rangle - \cancel{\langle T(v), w\rangle} = 0 \Rightarrow 2\langle T(w), v\rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\langle T(w), v\rangle = 0}$$

Obtemos portanto que $\langle T(w), v\rangle = 0$ para quaisquer $v, w \in V$. Vejamos que isso acarreta $T = 0$. Faça $v = T(w)$. Então $\langle T(w), T(w)\rangle = 0$ e daí $T(w) = 0$ para todo $w \in V$. Consequentemente, $T = 0$.
Observe que na resolução acima tivemos que considerar a unidade imaginária em certo momento. Vejamos que tal resultado não vale para espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Considere o operador linear T em $V = \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (y, -x)$. Então, para todo $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$\langle T(v), v\rangle = \langle (-v_2, v_1), (v_1, v_2)\rangle = -v_2 v_1 + v_1 v_2 = 0.$$

Logo, $\langle T(v), v\rangle = 0$ para todo $v \in V$, mas claramente $T \neq 0$.

6.20 Exercício 20

(20) Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e T uma função de V em V tal que, para todos $u, v \in V$, $\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\|$ e $T(iv) = iT(v)$. Prove que T é linear e que $\|T(v)\| = \|v\|$, para todo $v \in V$.

Solução:

6.21 Exercício 21

(21) Seja T um operador linear em V tal que T admite um adjunto. Prove que se $T^*T = 0$ então $T = 0$.

Solução: Vamos primeiramente provar que, se $T^*T = 0$, então $TT^* = 0$.
Observe que $0^* = 0$, pois para todos $u, v \in V$,

$$\big\langle 0(u), v\big\rangle = \langle 0, v\rangle = 0 = \langle u, 0\rangle = \big\langle u, v(0)\big\rangle .$$

Veja que

$$\big(T^*T\big)^* = 0^* \Rightarrow T^*T^{**} = 0 \Rightarrow T^*T = 0.$$

6.22 Exercício 22

(22) Seja $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Mostre que A se escreve de modo único como $A = B + iC$, onde B e C são matrizes autoadjuntas.

Solução: Façamos

$$B = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{e} \quad C = \frac{A - A^*}{2i}.$$

Então

$$B + iC = \frac{A + A^*}{2} + i\frac{A - A^*}{2i} = \frac{A + A^*}{2} + \frac{A - A^*}{2} = \frac{2A}{2} = A.$$

Além disso,

$$B^* = \left(\frac{A + A^*}{2}\right)^* = \frac{A^* + A^{**}}{2} = \frac{A^* + A}{2} = B$$

e

$$C^* = \left(\frac{A - A^*}{2i}\right)^* = \frac{A^* - A^{**}}{\overline{2i}} = -\frac{A^* - A}{2i} = \frac{A - A^*}{2i} = C,$$

ou seja, B e C são matrizes auto-adjuntas.

6.23 Exercício 23

(23) Sejam $S, T \in \mathscr{L}(V)$. Suponha que S e T admitem adjuntas.

(a) Mostre que se S e T são autoadjuntas, então ST é autoadjunta se, e somente se, $ST = TS$.

(b) Encontre duas matrizes S e T autoadjuntas tais que ST não é autoadjunta.

(c) Prove que T^*T é autoadjunta.

(d) Se T é autoadjunta, mostre que S^*TS é autoadjunta.

(e) Mostre que se S e T são autoadjuntas, então $ST + TS$ é autoadjunta.

Solução:

(a) Se S e T são autoadjuntas, então $S = S^*$ e $T = T^*$.
($\Rightarrow$) Se ST é autoadjunta, então

$$(ST)^* = ST = S^*T^*(TS)^*$$

Portanto, da unicidade do operador adjunto, temos

$$(ST)^* - (TS)^* = 0 \Rightarrow (ST - TS)^* = 0 \Rightarrow ST - TS = 0 \Rightarrow ST = TS.$$

($\Leftrightarrow$) Se $ST = TS$, então

$$(ST)^* = (TS)^* \Rightarrow (ST)^* = S^*T^* \Rightarrow (ST)^* = ST.$$

Portanto, ST é autoadjunta.

(b) Considere

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então $ST = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é autoadjunta.
Outro exemplo: Sejam $T, S \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$, dadas por

$$T(x, y) = (x + 2y, 2x) \quad \text{e} \quad S(x, y) = (y, x + y)$$

As matrizes que representam T e S na base canônica (que é ortonormal) são

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

respectivamente. Observe que T e S são autoadjuntos pois A e B são matrizes hermitianas. Temos que

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Essa matriz não é hermitiana. Como a base canônica é ortonormal, então TS não é autoadjunta.

(c) Se T é autoadjunta, então

$$T^*T = TT^*$$

Pelo item (a), tomando $S = T^*$, segue que T^*T é autoadjunta.

(d) Se T é autoadjunta, então $T^* = T$. Logo,

$$\left(S^*TS\right)^* = \left(S^*(TS)\right)^* = (TS)^*S^{**} = S^*T^*S = S^*TS.$$

(e) Vamos provar $ST + TS$ é autoadjunta pela definição, ou seja, mostraremos que para todo $u, v \in V$,

$$\langle (ST + TS)(u), v \rangle = \langle u, (ST + TS)(v) \rangle$$

Para isso, lembrando que $T^* = T$ e $S^* = S$, vemos que

$$\begin{aligned}
\langle (ST + TS)(u), v \rangle &= \langle (ST)(u), v \rangle + \langle (TS)(u), v \rangle \\
&= \langle S(T(u)), v \rangle + \langle T(S(u)), v \rangle \\
&= \langle T(v), S^*(v) \rangle + \langle S(u), T^*(v) \rangle \\
&= \langle T(v), S(v) \rangle + \langle S(u), T(v) \rangle \\
&= \langle u, T^*(S(v)) \rangle + \langle u, S^*(T(v)) \rangle \\
&= \langle u, T(S(v)) \rangle + \langle u, S(T(v)) \rangle \\
&= \langle u, (TS)(v) \rangle + \langle u, (ST)(v) \rangle \\
&= \langle u, (ST + TS)(v) \rangle
\end{aligned}$$

Portanto, $\langle (ST + TS)(u), v \rangle = \langle u, (ST + TS)(v) \rangle$, e $ST + TS$ é autoadjunta.

6.24 Exercício 24

(24) Seja V um espaço vetorial com dimensão finita e seja $T \in \mathscr{L}(V)$ normal. Mostre que

(a) Se T é nilpotente, então $T = 0$.

(b) Se T é idempotente, então $T^* = T$.

(c) Se $T^3 = T^2$, então T é idempotente.

(d) Se $T^8 = T^7$, T é autoadjunto e idempotente.

Solução:

(a) Seja A a matriz que representa T na base canônica. Como T é normal, então A também é normal, ou seja, $A^*A = AA^*$.

Sendo A normal, então A é diagonalizável. Logo, existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal cujas entradas na diagonal são exatamente os autovalores de A.

Como A é nilpotente, todos os seus autovalores são 0. Consequentemente, as entradas na diagonal de D são todas nulas, e assim $D = 0$. Segue que

$$A = PDP^{-1} = P0P^{-1} = 0$$

Portanto, todo operator normal e nilpotente é nulo.

Outra solução: Seja A a matriz que representa T na base canônica. Como A é nilpotente, existe um inteiro positivo k tal que $A^k = 0$. Vamos provar por indução que $A = 0$. Se $k = 1$, o resultado é trivial.

Suponha $k > 1$ e que o caso $k - 1$ funcione. Tome $B = A^{k-1}$. Note que, como T é normal, então A também é normal, e consequentemente a matriz B também é normal.

Para um vetor $x \in \mathbb{C}^n$, vamos calcular a norma do vetor B^*Bx como segue:

$$\begin{array}{rcl} \|B^*Bx\| & = & (B^*Bx)^*(B^*Bx) \\ & = & (Bx)^*B^{**}B^*Bx \\ & = & x^*B^*BB^*Bx \\ & = & x^*B^*B^*BBx \\ & = & x^*(B^*)^2B^2x \\ & = & 0, \end{array}$$

pois $B^2 = A^{2k-2} = 0$, já que $k \geq 2$ implica $2k - 2 \geq k$. Daí, temos que $B^*Bx = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

Assim,

$$\|Bx\| = (Bx)^*(Bx) = x^*B^*Bx = 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Consequentemente, $B = 0$. Pela hipótese de indução, $A^{k-1} = 0$ implica $A = 0$, e portanto A deve ser a matriz nula. Assim, T também é o operador nulo.

(b) Se T é idempotente, então sabemos que $T^2 = T$. Sendo normal, sabemos também que $T^*T = TT^*$. Se $T^*T = 0$, pelo Exercício 21, temos que $T = 0$, que claramente é autoadjunto.

Consideremos agora $T^*T \neq 0$. Então, observe que

$$(T - T^*)(T^*T) = TT^*T - T^*T^*T = TTT^* - (T^2)^*T = T^2T^* - T^*T = TT^* - T^*T = TT^* - TT^* = 0$$

Concluímos portanto que $(T - T^*)(T^*T) = 0$. Como $T^*T \neq 0$, segue que $T - T^* = 0$, acarretando $T = T^*$.

(c) Como T é normal, pelo Teorema Espectral, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V consistindo de autovetores de T. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os correspondentes autovalores. Então,

$$T(e_j) = \lambda_j e_j,$$

para $j = 1, \ldots, n$. Aplicando T uma quantidade adequada de vezes em ambos os membros da equação acima, temos que

$$T^3(e_j) = \lambda_j^3 e_j \quad \text{e} \quad T^2(e_j) = \lambda_j^2 e_j.$$

Dessa forma,

$$T^3(e_j) = T^2(e_j) \Rightarrow \lambda_j^3 e_j = \lambda_j^2 e_j \Rightarrow \lambda_j^3 = \lambda_j^2 \Rightarrow \lambda_j^2(\lambda - 1) = 0$$

Isso implica que λ_j vale 1 ou 0. Em particular, todos os autovalores de T são reais. A matriz de T com respeito à base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ será a matriz diagona com $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ na diagonal. Esta matriz claramente é equivalente à sua transposta conjugada, e portanto é hermitiana. Daí, $T = T^*$. Aplicando T em ambos os membros na equação obtida inicialmente, ficamos com

$$T^2(e_j) = \lambda_j^2 e_j = \lambda_j e_j = T(e_j),$$

onde utilizamos que $\lambda_j^2 = \lambda_j$, afinal λ_j vale 0 ou 1. Como T^2 e T coincidem numa base, então devem ser iguais. Logo, $T^2 = T$, e T é idempotente.

(d) Um raciocínio análogo ao do item (c) permite concluir que T é autoadjunto e idempotente. Em geral, usando uma argumentação similar, pode-se provar que todo operador normal para o qual existe um inteiro positivo $k \geq 1$ tal que $T^{k+1} = T^k$ é autoadjunto e idempotente.

6.25 Exercício 25

(25)

Solução: Questões Suplementares

6.26 Exercício 31

(31) Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - 3z = 0, x - 2y + z = 0\}$$

(a) Descreva o operador de projeção ortogonal de V em W.

(b) Verifique que $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$.

Solução:

6.27 Exercício 32

(32) Seja $\mathscr{F}$ o espaço vetorial das funções reais com o produto interno usual, e considere os conjuntos

$$S_p = \{f \mid f(x) = f(-x)\} \quad \text{e} \quad S_i = \{f \mid f(x) = -f(-x)\}$$

(a) Verifique que S_i e S_p são subespaços vetoriais de $\mathscr{F}$.

(b) Descreva os operadores de projeção ortogonal de $\mathscr{F}$ em S_i e em S_p.

(c) Encontre subespaços W_1 e W_2 de $\mathscr{F}$ tais que

$$\mathscr{F} = S_i \oplus W_1 \quad \text{e} \quad \mathscr{F} = S_p \oplus W_2$$

(d) Conclua que $\mathscr{F} = S_p \oplus S_i$.

Solução:

6.28 Exercício 33

(33) (Decomposição QR) A *Decomposição QR* de uma matriz $A \in \mathscr{M}_n(K)$ consiste em escrever a matriz A como um produto QR, onde Q é uma matriz ortogonal (se $K = \mathbb{R}$) ou unitária (se $K = \mathbb{C}$) e R é uma matriz triangular superior. Tal decomposição é importante para o método dos mínimos quadrados e é base para algoritmos computacionais de cálculo de autovalores de uma matriz.

(a) Prove que toda matriz $A \in \mathscr{M}_n(K)$ admite uma decomposição QR.

(b) Encontre a decomposição QR das seguintes matrizes:

(α) $A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$

(β)

Solução:

6.29 Exercício 34

(34) Considere $T_2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ e $T_3 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, dadas respectivamente por

$$T_2(x,y) = (x+3y, 3x+2y) \quad \text{e} \quad T_3(x,y,z) = (2x+7y+8z, 7x+3y+7z, 8x+7y+5z.$$

(a) Escreva as matrizes de T_2 e T_3 nas bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

(b) Encontre T_2^* e T_3^*, e verifique que T_2 e T_3 são autoadjuntos.
Sabe-se que $\mathscr{B}_2 = \{(1,1),(1,0)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$, e $\mathscr{B}_3 = \{(1,1,-1),(2,-1,0),(3,2,0)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$.

(c) Encontre as matrizes que representam T_2 e T_3 nessas bases.

(d) Encontre as matrizes que representam T_2^* e T_3^* nessas bases e observe que ssas matrizes não são hermitianas. Isso entra em contradição com o fato de T_2 e T_3 serem autoadjuntas?

Solução:

6.30 Exercício 35

(35) Suponha que T é um operador normal em V e 3 e 4 são seus autovalores. Prove que existe um vetor $v \in V$ tal que $\|v\| = \sqrt{2}$ e $\|T(v)\| = 5$.

Solução: Sejam u e v os autovetores de T com respeito aos autovalores 3 e 4, respectivamente. Então,

$$T(u) = 3u \quad \text{e} \quad T(w) = 4w.$$

Trocando u por $\frac{u}{\|u\|}$ e w por $\frac{w}{\|w\|}$, podemos assumir sem perda de generalidade que $\|u\| = \|w\| = 1$. Como T é normal, u e w são ortogonais. O Teorema de Pitágoras implica que

$$\|u + w\| = \sqrt{\|u\|^2 + \|w\|^2} = \sqrt{2},$$

e também

$$\|T(u + w)\| = \|T(u) + T(w)\| = \|3u + 4w\| = \sqrt{9\|u\|^2 + 16\|v\|^2} = 5.$$

Tomando $v = u + w$, obtemos um vetor v tal que $\|v\| = \sqrt{2}$ e $\|T(v)\| = 5$, como pedido pelo enunciado.

7 Lista 5,5

7.1 Espaços com produto interno

7.2 Exercício 1

(1) Determine quais das funções $\langle , \rangle : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ abaixo definem um produto interno em $\mathbb{R}^4$:

(a) $\big\langle (a,b,c,d),(x,y,z,w) \big\rangle = ax + 2by + 5cz + dw;$

(b) $\big\langle (a,b,c,d),(x,y,z,w) \big\rangle = ax - by + cz + 3dw;$

(c) $\big\langle (a,b,c,d),(x,y,z,w) \big\rangle = ay + 2bx + cz + dw;$

(d) $\big\langle (a,b,c,d),(x,y,z,w) \big\rangle = ax + 5cz + dw;$

(e) $\big\langle (a,b,c,d),(x,y,z,w) \big\rangle = ax + 2b + 5z + dw.$

Solução: Para resolver essa questão, podemos utilizar duas técnicas diferentes:

- Verificando se os axiomas de produto interno são satisfeitos:

(a) Temos que
♣ $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.
Sejam $u = (u_1, u_2, u_3, u_4), v = (v_1, v_2, v_3, v_4), w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{R}^4$. Então

$$\begin{aligned}
\langle u+v, w\rangle &= \big\langle (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3, u_4+v_4), (w_1, w_2, w_3, w_4)\big\rangle \\
&= (u_1+v_1)w_1 + 2(u_2+v_2)w_2 + 5(u_3+v_3)w_3 + (u_4+v_4)w_4 \\
&= u_1w_1 + v_1w_1 + 2u_2w_2 + 2v_2w_2 + 5u_3w_3 + 5v_3w_3 + u_4w_4 + v_4w_4 \\
&= u_1w_1 + 2u_2w_2 + 5u_3w_3 + u_4w_4 + v_1w_1 + 2v_2w_2 + 5v_3w_3 + v_4w_4 \\
&= \big\langle (u_1, u_2, u_3, u_4), (w_1, w_2, w_3, w_4)\big\rangle + \big\langle (v_1, v_2, v_3, v_4), (w_1, w_2, w_3, w_4)\big\rangle \\
&= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle
\end{aligned}$$

♥ $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha \langle u, v\rangle$,
Sejam $u = (u_1, u_2, u_3, u_4), v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha u, v\rangle &= \big\langle (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3, \alpha u_4), (v_1, v_2, v_3, v_4)\big\rangle \\
&= \alpha u_1v_1 + 2\alpha u_2v_2 + 5\alpha u_3v_3 + \alpha u_4v_4 \\
&= \alpha(u_1v_1 + 2u_2v_2 + 5u_3v_3 + u_4v_4) \\
&= \alpha \big\langle (u_1, u_2, u_3, u_4), (v_1, v_2, v_3, v_4)\big\rangle \\
&= \alpha \langle u, v\rangle
\end{aligned}$$

♠ $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$. Sejam $u = (u_1, u_2, u_3, u_4), v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$. Então

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= \big\langle (u_1, u_2, u_3, u_4), (v_1, v_2, v_3, v_4)\big\rangle \\
&= u_1v_1 + 2u_2v_2 + 5u_3v_3 + u_4v_4 \\
&= v_1u_1 + 2v_2u_2 + 5v_3u_3 + v_4u_4 \\
&= \big\langle (v_1, v_2, v_3, v_4), (u_1, u_2, u_3, u_4)\big\rangle \\
&= \langle v, u\rangle
\end{aligned}$$

♦ $\langle u, u\rangle \geq 0; \langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$
Seja $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$. Então

$$\langle u, u\rangle = \big\langle (u_1, u_2, u_3, u_4), (u_1, u_2, u_3, u_4)\big\rangle = u_1^2 + 2u_2^2 + 5u_3^2 + u_4^2 \geq 0$$

Além disso,

$$\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u_1^2 + 2u_2^2 + 5u_3^2 + u_4^2 = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Logo, temos que $\big\langle (a, b, c, d), (x, y, z, w)\big\rangle = ax + 2by + 5cz + dw$ é um produto interno em $\mathbb{R}^4$.

(b)

Argumentando via matrizes, escrevendo o produto interno utilizando a notação matricial.

(a) Podemos escrever

$$\left\langle (a,b,c,d),(x,y,z,w)\right\rangle = u^tAv = (a,b,c,d)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}.$$

Como A é real e simétrica, basta mostrar que A é positiva definida. Se uma matriz é positiva definida, então é possível reduzí-la a uma matriz diagonal que possui todas as entradas na diagonal positivas. Claramente A é uma matriz diagonal, e todas suas entradas na diagonal são positivas. Logo, A é positiva definida, e $\left\langle (a,b,c,d),(x,y,z,w)\right\rangle = ax+2by+5cz+dw$ é um produto interno em $\mathbb{R}^4$.

(b)

7.3 Exercício 2

(2) Considere a função $\langle,\rangle : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dada por

$$\langle u,v\rangle = x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}.$$

(a) Verifique que $\langle,\rangle$ é um produto interno em $\mathbb{C}^2$.

(b) Encotnre a norma de $v = (1+2i, 2+3i) \in \mathbb{C}^2$ em relação a esse produto interno.

Solução:

7.4 Exercício 3

(3) Use a desigualdade de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz em $\mathbb{R}^3$ para provar a seguinte desigualdade, para $a_i > 0, i = 1,2,3$:

$$(a_1+a_2+a_3)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right) \geq 0$$

Solução:

7.5 Exercício 4

(4) Seja $V = \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que

$$\langle A,B\rangle = \operatorname{tr}(B^tA)$$

define um produto interno em V.

Solução:

7.6 Exercício 5

(5) Encontre uma base ortonormal para o subespaço $W \subset \mathbb{C}^3$ gerado por $u_1 = (1, i, 1)$ e $u_2 = (1+i, 0, 2)$.

Solução: Pelo Processo de Ortonormalização de Gramm-Schmidt, sabemos que existe um conjunto ortonormal $\{u_1, u_2\}$ tal que $\langle u_1, u_2\rangle = \big\langle (1, i, 1), (1+i, 0, 2)\big\rangle$. Temos então que, para $v_1 = (1, i, 1)$ e $v_2 = (1+i, 0, 2)$,

$$u_1 = v_1 = (1, i, 1)$$

e

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = (1+i, 0, 2) - \frac{\big\langle (1, i, 1), (1+i, 0, 2)\big\rangle}{\big\|(1, i, 1)\big\|^2}(1, i, 1) \Rightarrow$$

$$u_2 = (1+i, 0, 2) - \frac{3+i}{1}(1, i, 1) \Rightarrow u_2 = (4+2i, -1+3i, 5+i)$$

Em seguida, veja que $\|u_1\| = 1$ e $\|u_2\| = 28 + 20i$. Logo, u_1 já está normalizado. Para u_2, temos

$$\hat{u_2} = \frac{(4+2i, -1+3i, 5+i)}{28+20i} =$$

7.7 Exercício 6

(6) Completar até uma base ortogonal em $\mathbb{R}^4$ o seguinte sistema de vetores:

$$\{(1, -2, 2, -3), (2, -3, 2, 4)\}$$

Solução:

7.8 Exercício 7

(7) Usando o processo de ortogonalização de Gramm-Schmidt, construir uma base ortogonal de subespaços para cada item:

(a) $\{(1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7)\} \subset \mathbb{R}^4$;

(b) $\{(1, 1, -1, -2), (5, 8, -2, -3), (3, 9, 3, 8)\} \subset \mathbb{R}^4$;

(c) $\{(1+i, 3i, 2-i), (2-3i, 10+2i, 5-i)\} \subset \mathbb{C}^3$.

Solução:

7.9 Exercício 8

(8) Seja $V = \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{C})$ o espaço de funções complexas contínuas com produto interno dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, \mathrm{d}t.$$

Prove que

(a) o sistema de funções

$$\{1, \sqrt{2}\cos(2\pi nt), \sqrt{2}\text{sen}(2\pi nt), n, m = 1, 2, \ldots\}$$

é um conjunto ortonormal em V;

(b) o sistema de funções $\{e^{2\pi int}, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ é um conjunto ortonormal em V.

Solução:

7.10 Exercício 9

(9) Seja $V = \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ com produto interno $\langle A, B\rangle = \text{tr}(AB^t)$. Achar complementos ortogonais para os subespaços

(a) $\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) | \text{tr}(A) = 0\}$;

(b) $\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) | A = A^t\}$;

(c) $\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) | A = -A^t\}$;

(d) matrizes com zeros debaixo da diagonal principal.

Solução:

7.11 Exercício 10

(10) Encontre o cosseno do ângulo entre u e v se

$$u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

no espaço euclidiano $V = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ com produto interno do exercício anterior.

Solução: Temos que

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|},$$

onde θ é o ângulo entre u e v. Calculemos os elementos necessários:

$$\langle u, v\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^t \right) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^t \right) =$$

$$\text{tr}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right) = 2$$

$$\langle u, u\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^t \right) =$$

$$\text{tr}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \right) = 15$$

$$\langle v, v\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^t \right) =$$

$$\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 13 \end{pmatrix} \right) = 14$$

Então

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{15} \quad \text{e} \quad \|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{14}$$

Logo,

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{15}\sqrt{14}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{210}} \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{\sqrt{210}}{105}}$$

7.12 Exercício 11

(11) Sejam $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual e

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x - 2y + z + w = 0\}$$

Determine uma base ortogonal de S e uma outra para $S^\perp$.

Solução: Observe que $w = -x + 2y - z$. Logo, um vetor $v \in S$ é da forma

$$v = (x, y, z, -x + 2y - z) = x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, 0, 2) + z(0, 0, 1, -1).$$

Portanto, temos que $\mathscr{B} = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, -1)\}$ é uma base para S. Vamos ortogonalizá-la, utilizando o processo de Ortogonalização de Gramm-Schmidt. Tomando $u_1 = (1, 0, 0, -1), u_2 = (0, 1, 0, 2)$ e $u_3 = (0, 0, 1, -1)$, encontraremos a base ortogonal $\{w_1, w_2, w_3\}$:

$$w_1 = u_1 = (1, 0, 0, -1)$$

$$w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (0, 1, 0, 2) - \frac{\big\langle (0, 1, 0, 2), (1, 0, 0, -1)\big\rangle}{\big\|(1, 0, 0, -1)\big\|^2}(1, 0, 0, -1) =$$

$$(0, 1, 0, 2) - \frac{-2}{(\sqrt{2})^2}(1, 0, 0, -1) = (0, 1, 0, 2) + (1, 0, 0, -1) = (1, 1, 0, 1)$$

$$w_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle u_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 =$$

$$(0, 0, 1, -1) - \frac{\big\langle (0, 0, 1, -1), (1, 0, 0, -1)\big\rangle}{\big\|(1, 0, 0, -1)\big\|^2}(1, 0, 0, -1) - \frac{\big\langle (0, 0, 1, -1), (1, 1, 0, 1)\big\rangle}{\big\|(1, 1, 0, 1)\big\|^2}(1, 1, 0, 1) =$$

$$(0, 0, 1, -1) - \frac{1}{(\sqrt{2})^2}(1, 0, 0, -1) - \frac{-1}{(\sqrt{3})^2}(1, 1, 0, 1) = (0, 0, 1, -1) =$$

$$\frac{1}{2}(1, 0, 0, -1) + \frac{1}{3}(1, 1, 0, 1) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{6}\right)$$

Logo, $\left\{(1, 0, 0, -1), (1, 1, 0, 1), \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{6}\right)\right\}$ é uma base ortogonal de S.

Para encontrar uma base para $S^\perp$, precisamos primeiro descrever os elementos desse conjunto. Para isso, sabemos que, se $w \in S^\perp$, então $\langle w, v\rangle = 0 \ \forall v \in S$. Em particular, isso ocorre para os elementos da base de S. Daí, sendo $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$,

$$\begin{cases} \langle w, u_1\rangle = 0 \\ \langle w, u_2\rangle = 0 \\ \langle w, u_3\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 - w_4 = 0 \\ w_2 + 2w_4 = 0 \\ w_3 - w_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow w = w_4(1, -2, 1, 1)$$

Logo, $\{(1, -2, 1, 1)\}$ é uma base ortogonal para $S^\perp$.

7.13 Exercício 12

(12) Considere o espaço $V = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ com o produto interno dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Ache uma base ortonormal de $\langle 1, 5+t\rangle^{\perp}$.

Solução: Seja $h \in \langle 1, 5+t\rangle^{\perp}$. Então, temos que

$$\begin{cases} \langle 1, h\rangle = 0 \\ \langle 5+t, h\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 (5+t)h(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$$

Como $h \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, temos que $h(t) = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta$. Então

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta\,\mathrm{d}t = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 (5+t)(\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta)\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{2}\gamma + \delta = 0 \\ \frac{29}{20}\alpha + \frac{23}{12}\beta + \frac{17}{6}\gamma + \frac{11}{2}\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \gamma\left(\frac{10}{3}, -4, 1, 0\right) + \delta(20, -18, 0, 1)$$

Logo, sendo $f(t) = \frac{10t^3}{3} - 4t^2 + t$ e $g(t) = 20t^3 - 18t^2 + 1$, temos que $\{f, g\}$ é uma base para $\langle 1, 5+t\rangle^{\perp}$. Observe que $\|f\| = \frac{\sqrt{105}}{105}, \|g\| = \sqrt{\frac{33}{35}}$ e $\langle f, g\rangle = \frac{19}{210}$. Logo, vamos precisar ortonormalizá-la, e para isso, utilizaremos o Processo de Ortogonalização de Gramm-Schmidt. Sendo $\{h_1, h_2\}$ a base que procuramos, temos:

$$h_1(t) = f(t) = \frac{10t^3}{3} - 4t^2 + t$$

$$h_2(t) = g - \frac{\langle g, h_1\rangle}{\|h_1\|^2}h_1 = 20t^3 - 18t^2 + 1 - \frac{\frac{19}{210}}{\left(\frac{\sqrt{105}}{105}\right)^2}\left(\frac{10t^3}{3} - 4t^2 + t\right) =$$

$$20t^3 - 18t^2 + 1 - \frac{19}{2}\left(\frac{10t^3}{3} - 4t^2 + t\right) = -\frac{1}{6}(70t^3 - 120t^2 + 57t - 6)$$

Temos então que h_1 e h_2 são ortogonais. Basta agora normalizá-los. Como $\|h_1\| = \frac{\sqrt{105}}{105}$ e $\|h_2\| = \frac{\sqrt{3}}{6}$, temos

$$h_1(t) = \sqrt{105}\left(\frac{10t^3}{3} - 4t^2 + t\right) \quad \text{e} \quad h_2(t) = -\frac{\sqrt{3}}{3}(70t^3 - 120t^2 + 57t - 6)$$

Assim, $\{h_1, h_2\}$ é a base ortonormal procurada.

7.14 Exercício 13

(13) Seja $V = \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$ com o produto interno dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Seja $W \subset V$ o subespaço formado pelas funções ímpares. Determine $W^{\perp}$.

Solução: Seja f uma função ímpar. Então sabemos por definição que $f(-x) = -f(x)$. Além disso, sabemos que, se f é ímpar, então

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Daí, queremos que $h(t) = f(t)g(t)$ seja ímpar, para f ímpar. Ou seja, $h(-t) = -h(t)$. Mas como

$$h(-t) = f(-t)g(-t) = -f(t)g(-t)$$
$$-h(t) = -f(t)g(t),$$

devemos ter então

$$h(-t) = -h(t) \Rightarrow -f(t)g(-t) = -f(t)g(t) \Rightarrow g(-t) = g(t).$$

Logo, se g for uma função par, então $\langle f, g\rangle = 0$, para toda função f ímpar. Concluímos assim que todas as funções ímpares são ortogonais às funções pares. Portanto, $W^{\perp}$ é o subespaço formado pelas funções pares.

7.15 Exercício 14

(14) Para cada caso, encontre a distância entre o vetor x e o subespaço que contém as soluções de cada sistema de equações:

(a) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ e $x = (2, 4, 0, -1)$;

(b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ e $x = (3, 3, -4, 2)$;

Solução:

7.16 Exercício 15

(15) A sequência de polinômios $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dada recursivamente por

$$\begin{cases} p_0(x) = 1, \\ p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(x^2-1)^n, n \geq 1 \end{cases}$$

são chamados *polinômios de Legendre*. Prove que os polinômios de Legendre formam uma base ortonormal no espaço euclidiano $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ com produto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Solução: Mostremos que a sequência $(p_k)_{k\leq n}$ pode ser obtida por meio da ortonormalização da base $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ de $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$.
A tabela abaixo mostra os 11 primeiros polinômios de Legendre:

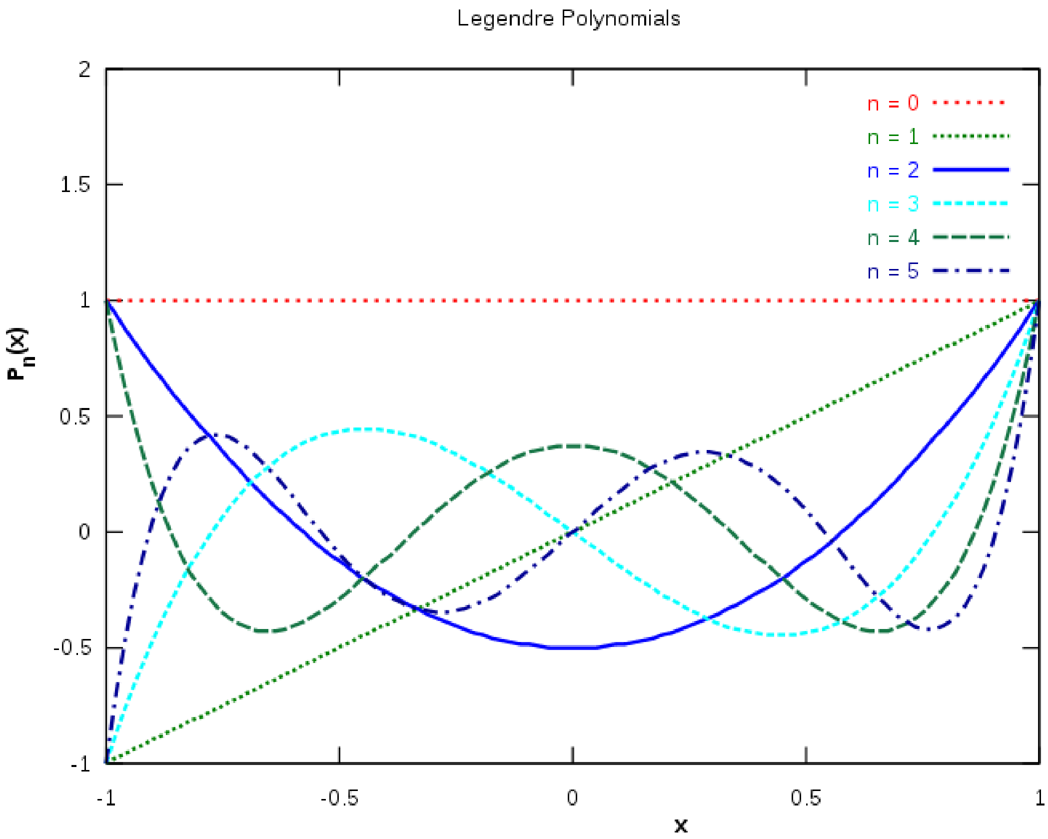

Figura 1: Gráficos dos polinômios de Legendre com $n \leq 5$

n	$p_n(t)$
0	1
1	t
2	$\frac{1}{2}\left(3t^2 - 1\right)$
3	$\frac{1}{2}\left(5t^3 - 3t\right)$
4	$\frac{1}{8}\left(35t^4 - 30t^2 + 3\right)$
5	$\frac{1}{8}\left(63t^5 - 70t^3 + 15t\right)$
6	$\frac{1}{16}\left(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5\right)$
7	$\frac{1}{16}\left(429t^7 - 693t^5 + 315t^3 - 35t\right)$
8	$\frac{1}{128}\left(6435t^8 - 12012t^6 + 6930t^4 - 1260t^2 + 35\right)$
9	$\frac{1}{128}\left(12155t^9 - 25740t^7 + 18018t^5 - 4620t^3 + 315t\right)$
10	$\frac{1}{128}\left(46189t^{10} - 109395t^8 + 90090t^6 - 30030t^4 + 3465t^2 - 63\right)$

Os gráficos dos polinômios de Legendre com $n \leq 5$ são mostrados abaixo:
Observação: Vamos mostrar que $(p_n(t))_{n\geq 0}$ é base ortonormal para $L^2[-1,1]$. Tem-se

$$p_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n$$

Segue do Teorema de Stone-Weierstrass que

$$\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R}) = \overline{[t^n, n \geq 0]}^{\|\cdot\|_\infty} = \overline{[p_n, n \geq 0]}^{\|\cdot\|_\infty}$$

Além disso,

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{2}\|f\|_\infty \ \ \forall f \in L^2[-1,1]$$

Daí, $[p_n, n \geq 0]$ é denso em $(\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$, e $[p_n, n \geq 0]$ é denso em $L^2[-1,1]$.

Sendo que $(p_n)_{n\geq 0}$ é uma família ortonormal, segue do Teorema da Base Ortonormal que $(p_n)_{n\geq 0}$ é base ortonormal de $L^2[-1,1]$.

7.17 Exercício 16

(16) Calcule o volume do paralelepípedo formado pelos vetores

(a) $(1,-1,1,-1),(1,1,1,1),(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)$.

(b) $(1,1,1,1),(1,-1,-1,1),(2,1,1,3),(0,1,-1,0)$.

Solução:

7.18 Exercício 17

(17) No espaço euclidiano $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ com o produto interno $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$, calcule

(a) o volume do paralelepípedo $P[1,x,\ldots,x^n]$;

(b) a distância do vetor x^n até o subespaço $\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$;

(c) o ângulo entre o vetor x^n e o subespaço $\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$;

(d) a distância do vetor x^k até o subespaço $\mathscr{P}_{\ell}(\mathbb{R})$, onde $k=0,1,\ldots,n$ e $\ell\leq n$;

(e) o ângulo entre o vetor x^n e o subespaço $\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, onde $k=0,1,\ldots,n$ e $\ell\leq n$.

Solução:

7.19 Exercício 18

(18) Considere $\mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Determine a função $h\in\langle 1,\operatorname{sen}x,\cos x\rangle$ que melhor se aproxime de $f\colon [0,2\pi]\to\mathbb{R}$ dada por $f(t)=t-1$.

Solução:

7.20 Exercício 19

(19) Sabemos que é possível representar um sistema linear a partir de um operador linear $T\in\mathscr{L}(V,U)$, escrevendo o sistema na forma $Tx=b$. Mesmo assim, esse sistema pode ser insolúvel. Vamos então procurar um x tal que a distância para a imagem de T seja a menor possível. Considere então $x\in U$ ta que para todo $v\in\operatorname{Im}(T)$, tenhamos $\big\langle T(x)-b,v\big\rangle=0$.

(a) Prove que x satisfaz
$$(T^*T)(x)=T^*(b)$$

(b) Verifique que o sistema representado pela equação acima sempre possui solução.

Solução:

(a) Se $\langle T(x) - b, v\rangle = 0$ para todo $v \in \text{Im }(T)$, então $T(x) - b \in (\text{Im }(T))^{\perp}$. Mas $(\text{Im }(T))^{\perp} = \text{Ker}(T^*)$. Daí,

$$T^*(T(x) - b) = 0 \Rightarrow (T^*T)(x) = T^*(b).$$

(b) Claramente $T(x) \in \text{Im }(T)$. Logo, o sistema $T^*(T(x)) = T^*(b)$ possui solução.

7.21 Exercício 20

(20) Determine a reta que melhor se ajusta aos pontos $(1, 10), (0, 6), (1, 4), (2, 2)$ de $\mathbb{R}^2$.

Solução: Considere $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ a equação da reta desejada. Queremos que esses pontos pertençam à reta. Logo, formamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\alpha - 10\beta + \gamma = 0 \\ -6\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 4\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow A = [T]\text{can} = \begin{bmatrix} -1 & -10 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sendo $x = (\alpha, \beta, \gamma)^t$ e $b = (0, 0, 0)^t$, queremos encontrar x que resolva

$$(A^*A)(x) = A^*(b).$$

Logo, temos que

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 156 & -22 \\ 2 & -22 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -10 & -6 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 156\beta - 22\gamma = 0 \\ 2\alpha - 22\beta + 4\gamma = 0 \end{cases}$$

7.22 Exercício 21

(21) Determine o polinômio de grau 2 que melhor se ajusta aos pontos $(1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 4)$ de $\mathbb{R}^2$.

Solução:

7.23 Exercício 22

(22) Determine a melhor solução aproximada do sistema

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - y = 0 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Solução: A matriz que representa o sistema será

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo, tomando $z = (x, y)^t$ e $b = (1, 0, 2)^t$,

$$Az = b$$

Vamos encontrar z tal que $A^*Az = A^*b$:

$$A^*Az = A^*b \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x + y = 5 \\ x + 9y = 2 \end{cases} \Rightarrow Z = \left(\frac{43}{53}, \frac{7}{53} \right)$$

Portanto, a melhor solução aproximada para o sistema será $\left(\frac{43}{53}, \frac{7}{53} \right)$.

7.24 Exercício 23

(23) Considere o espaço vetorial $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ com produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Determine o polinômio do subespaço $\langle 1, x^2 \rangle$ que melhor se aproxima de $f(x) = x^3 x$.

Solução: Seja $W = \langle 1, x^2 \rangle$. Vamos encontrar

$$d(f, W) = \{\|f - w\| \, | w \in W\}$$

Sabemos que $d(f, W) = \|f - E_W(f)\|$, onde

$$E_W(f) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle f, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\|1\|^2} + \frac{\langle f, x^2 \rangle}{\|x^2\|^2}$$

Logo,

$$E(x^3 - x) = \frac{\langle x^3 - x, 1 \rangle}{\|1\|^2} + \frac{\langle x^3 - x, x^2 \rangle}{\|x^2\|^2} = \frac{-\frac{1}{4}}{1} + \frac{-\frac{1}{12}}{\frac{1}{5}} = -\frac{2}{3}$$

e

$$d(f, W) = \left\| x^3 - x + \frac{2}{3} \right\| = \int_0^1 \left(x^3 - x + \frac{2}{3} \right) \left(x^3 - x + \frac{2}{3} \right) \mathrm{d}x = \frac{59}{315}.$$

Basta encontrar um $g(x)$ tal que

$$\|f - g\| = \frac{59}{315}$$

7.25 Exercício 24

(24) Ache $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma a minimizar o valor da integral

$$\int_{-1}^{1} \left| x^3 - ax^2 - bx - c \right|^2 \mathrm{d}x.$$

Solução:

7.26 Exercício 25

(25) Sejam U, V espaços com produtos internos e $T\colon U \to V$ uma aplicação tal que $\big\langle T(u), T(v)\big\rangle = \langle u, v\rangle\ \ \forall u, v \in U$. Mostre que T é linear.

Solução: Para verificar que T é linear, precisamos mostrar que, para todo $u, v \in V$ e $\alpha \in K$, temos que $T(u+v) = T(u) + T(v)$ e $T(\alpha u) = \alpha T(u)$. De fato,

- para $u, v, w \in U$, temos que
$$\big\langle T(u+v), T(w)\big\rangle = \big\langle (u+v), w\big\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle = \big\langle T(u), T(w)\big\rangle + \big\langle T(v), T(w)\big\rangle = \big\langle T(u)+T(v), T(w)\big\rangle \Rightarrow T$$

- para $u, v, w \in U$, temos que
$$\big\langle T(\alpha u), T(w)\big\rangle = \langle \alpha u, w\rangle = \alpha\,\langle u, w\rangle = \alpha\,\big\langle T(u), T(w)\big\rangle + \big\langle \alpha T(v), T(w)\big\rangle \Rightarrow T(\alpha u) = \alpha T(u).$$

Logo, T é linear.

7.27 Operadores lineares em espaços com produto interno

7.28 Exercício 26

(26) Para cada um dos seguintes funcionais lineares $\varphi \in V^*$, encontre um vetor $u \in V$ tal que $\varphi(v) = \langle v, u\rangle\ \ \forall v \in V$:

(a) $V = \mathbb{R}^3, \varphi(x, y, z) = x + 2y - 3z;$

(b) $V = \mathbb{C}^3, \varphi(x, y, z) = ix + (2+3i)y + (1-2i)z;$

(c) $V = \mathscr{P}_2(\mathbb{R}), \varphi(f) = f(1);$

Solução:

(a) Note que
$$x + 2y - 3z = \big\langle (1, 2, -3), (x, y, z)\big\rangle\,.$$
Portanto, temos que para $u = (1, 2, -3)$, $\varphi(v) = \langle u, v\rangle\,,\ \forall v \in V$.

(b) Veja que
$$ix + (2+3i)y + (1-2i)z = \big\langle (i, 2+3i, 1-2i), (x, y, z)\big\rangle\,.$$
Portanto, temos que para $u = (i, 2+3i, 1-2i)$, $\varphi(v) = \langle u, v\rangle\,,\ \forall v \in V$.

(c) Sejam $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Como $f(1) = a + b + c$, temos que
$$\varphi(f) = a + b + c.$$
Queremos encontrar g tal que $\varphi(f) = \langle g, f\rangle$. Logo, devemos ter
$$\langle g, f\rangle = a + b + c \Rightarrow \langle g, f\rangle = \int_0^1 g(x) f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)(ax^2 + bx + c)\,\mathrm{d}x = a + b + x$$

7.29 Exercício 27

(27) Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ o operador dado por $T(1,0) = (1+i, 2)$ e $T(0,1) = (i,i)$. Considerando $\mathbb{C}^2$ com o produto interno canônico, determine T^*.

Solução: Observe que a representação matricial de T na base canônica de $\mathbb{C}^2$ é

$$A = [T]\text{can} = \begin{bmatrix} 1+i & i \\ 2 & i \end{bmatrix}$$

Como a base canônica é uma base ortonormal, a matriz que representa T^* na base canônica será a hermitiana de A, ou seja,

$$[T^*]\text{can} = A^H = A^* = [T^*]\text{can} = \overline{\begin{bmatrix} 1+i & i \\ 2 & i \end{bmatrix}^t} = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ -i & -i \end{bmatrix}$$

Logo, o operador $T^* \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ é dado por $T(1,0) = (1-i, -i)$ e $T(0,1) = (2, -i)$.
Questões Suplementares

7.30 Exercício k

(k) Prove que para qualquer triângulo, a soma dos quadrados das medidas de suas três medianas é igual a três quartos da soma dos quadrados das medidas de seus lados.

Solução:

7.31 Exercício k+1

(k+1) Considere um tetraedro. Chamamos de *bimediana* o segmento que liga os pontos médios de duas arestas opostas do tetraedro.

(a) Prove que, para qualquer tetraedro, a soma dos quadrados das medidas de suas três bimedianas é igual a um quarto da soma dos quadrados das medidas de suas arestas.

(b) Encontre

8 Lista 6

8.1 Exercício 1

(1)
Questões Suplementares

8.2 Exercício 31

(31)

Solução: