

Álgebra Linear

Douglas Smigly

MAT5730

2º semestre de 2019

Conteúdo

Informações da Disciplina	5
1 Espaços vetoriais	7
1.1 Base e Dimensão	7
1.2 Subespaços	9
1.3 Coordenadas	11
2 Transformações Lineares	13
2.1 Definições	13
2.2 Espaço Dual	14
2.3 Espaço Bidual	14
2.4 Anuladores	15
2.5 Transpostas	15
2.6 Espaços Quocientes	16
3 Determinantes	19
3.1 Formas Multilineares	19
3.2 Determinantes	21
4 Formas Canônicas	25
4.1 Autovalores e Autovetores	25
4.2 Polinômio Minimal	29
4.3 Subespaços Invariantes	30

CONTEÚDO

CONTEÚDO

Informações da Disciplina

Informações Básicas

Essas são as notas de aula de Álgebra Linear (MAT5730), as aulas acontecem na sala B-134 às terças 10h e às quintas 8h.

Informações do Professor

O professor é o Ivan Shestakov, sua sala é a 290-A e o seu e-mail é shestak@ime.usp.br

Bibliografia

- [1] Flávio Coelho and Mary Lilian Lourenço. *Um Curso de Álgebra Linear*. Edusp, 2001.
- [2] Werner H. Greub. *Multilinear Algebra*. Springer, 1978.
- [3] Werner H. Greub. *Linear Algebra*. Springer, 1981.
- [4] Kenneth Hoffman and Ray Kunze. *Linear Algebra*. Prentice Hall, 1971.
- [5] Steven Roman. *Advanced Linear Algebra*. Springer, 2005.

Avaliação

A nota final da disciplina será a média aritmética de P1, P2, e P3. Todos os alunos poderão fazer a prova sub para substituir a menor das suas notas (Sub aberta). As datas das provas são as seguintes:

Prova	Data
P1	10-09
P2	15-10
P3	12-11
SUB	19-11

Outras Informações

- (i) Teremos listas, que não contarão para a nota
- (ii) As listas serão publicadas em
- (iii) Não haverá monitoria

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

Capítulo 1

Espaços vetoriais

Durante este capítulo, sempre adotaremos K como sendo um corpo qualquer.

1.1 Base e Dimensão

Definição 1.1. Seja $V \neq 0$ um espaço vetorial sobre um corpo K . Uma *base* de V é um conjunto $B \subseteq V$ tal que:

- (i) B é linearmente independente (LI).
- (ii) B gera V .

Lembramos aqui que B é linearmente independente se todo subconjunto finito $I \subseteq B$ é linearmente independente. Isto é, se $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ e

$$\sum_{b \in I} \alpha_b b = 0, \text{ então } \alpha_j = 0 \text{ para cada } j \in J.$$

Além disso, dizemos que B gera V se para cada $v \in V$ existem exatamente um subconjunto finito $I_v \subseteq B$ e uma função $\alpha: I_v \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$v = \sum_{b \in I_v} \alpha_b b.$$

Teorema 1.2. Seja V um espaço vetorial e sejam $I \subseteq V$ linearmente independente e $S \subseteq V$ gerador de V tais que $I \subseteq S$. Então existe uma base B de V tal que

$$I \subseteq B \subseteq S.$$

Demonstração. Consideremos o conjunto:

$$\mathcal{M} := \{M \subseteq S \mid M \text{ é linearmente independente e } I \subseteq M\}$$

Então $\langle \mathcal{M}, \subseteq \rangle$ é um conjunto parcialmente ordenado indutivo (ou seja, todo subconjunto totalmente ordenado possui uma cota superior). De fato, $I \in \mathcal{M}$, o que nos mostra que $\mathcal{M} \neq \emptyset$, e para subconjunto totalmente ordenado não vazio $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$ então $\bigcup_{M \in \mathcal{C}} M \in \mathcal{M}$.

Logo, pelo Lema de Zorn, \mathcal{M} possui um elemento maximal B . Vamos provar que esse elemento maximal é de fato uma base para V .

- (i) **B é linearmente independente:** segue da definição de \mathcal{M} .
- (ii) **B gera V :** Suponha por absurdo que B não gera V . Então existe $v \in S$ que não é combinação linear de elementos de B , aí $B \cup \{v\}$ é linearmente independente e $I \subseteq B \cup \{v\} \subseteq S$. Então $B \cup \{v\} \in \mathcal{M}$, uma contradição, pois B já é um elemento maximal de \mathcal{M} e obviamente $B \subseteq B \cup \{v\}$. Logo B gera V . Portanto, B é uma base de V e $I \subseteq B \subseteq S$. \square

CAPÍTULO 1. ESPAÇOS VETORIAIS

1.1. BASE E DIMENSÃO

O resultado acima mostra que todo espaço vetorial tem base, bastando para isso tomar $I = \{v\}$ e $S = V$.

Corolário 1.3. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K , seja $I \subseteq V$ um conjunto linearmente independente e seja $S \subseteq V$ um conjunto gerador de V . Então

- (i) O espaço V tem uma base;
- (ii) Existe uma base B de V tal que $I \subseteq B$;
- (iii) Existe uma base B de V tal que $B \subseteq S$.

Lema 1.4. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K . Sejam $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}} \subseteq V$ linearmente independente e $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}_{\leq m}} \subseteq V$ um conjunto gerador de V . Então $n \leq m$.

Sublema 1.5. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K . Um conjunto $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}} \subseteq V$ é linearmente dependente se e somente se existem $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$ e um $\alpha : i \rightarrow K$ tais que

$$v_i = \sum_{j < i} \alpha_j v_j$$

Demonstração. Se $\{v_i\}_{i \in n}$ é linearmente dependente, então existe $\alpha : n \rightarrow K$ não identicamente nula tal que $\sum_{i \in n} \alpha_i v_i = 0$. Seja i o maior elemento de n tal que $\alpha_i \neq 0$. Então segue que

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i v_i &= 0 \\ \iff \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} &= -\alpha_i v_i \\ \iff v_i &= -\sum_{j < i} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} v_j. \end{aligned} \quad \square$$

Vamos relembrar o que fizemos até aqui com um exemplo:

Exemplo 1.6. Considere $V = \mathbb{R}^4$ um \mathbb{R} -espaço vetorial. Sejam os vetores:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0, 0) \\ v_2 &= (0, 1, 0, -1) \\ v_3 &= (0, 0, 1, -1) \\ v_4 &= (1, -1, 0, 0) \\ v_5 &= (1, 2, 1, 0) \end{aligned}$$

Considere $I = \{v_1, v_2\}$ e $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Observe que I é LI; de fato,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 (1, 0, 0, 0) + \alpha_2 (0, 1, 0, -1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Ademais, tomando $v = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, temos que

$$(x - z + w + y)v_1 + (z - w - \varepsilon)v_2 + (z - \varepsilon)v_3 + (z - w - y + \varepsilon)v_4 + \varepsilon v_5 = v,$$

para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Logo, S gera V .

Então, existe uma base B de \mathbb{R}^4 tal que

$$\{v_1, v_2\} \subseteq B \subseteq \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

De fato, esta base é $B\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, pois percebe-se que

$$v_5 = \frac{5}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3 - \frac{3}{2}v_4$$

Para trabalhar com a cardinalidade das bases, utilizaremos alguns fatos conhecidos, enunciados na

Proposição 1.7. Se λ e μ são cardinais, então:

- Se $\lambda \leq \mu$ e $\mu \leq \lambda$, então $\lambda = \mu$. (Teorema de Cantor-Bernstein)
- Se λ e μ são infinitos, então

$$\lambda + \mu = \lambda\mu = \max\{\lambda, \mu\}.$$

Teorema 1.8. Seja V um espaço vetorial, então duas bases quaisquer têm o mesmo cardinal.

Demonstração. Sejam B e C bases de V . Para $u \in C$ existem um conjunto finito $I_u \subseteq B$ e uma função $\alpha_u : I_u \rightarrow K$ tais que $u = \sum_{i \in I_u} \alpha_{u,i} i$. Seja $I \subseteq \bigcup_{u \in C} I_u \subseteq B$. Então I gera V , assim $I = C$. Desse modo:

$$|B| = |I| = \left| \bigcup_{u \in C} I_u \right| \leq \sum_{u \in C} |I_u| \leq \aleph_0 \cdot |C| = |C|,$$

assim $|B| \leq |C|$. Analogamente $|C| \leq |B|$. Portanto $|B| = |C|$. \square

Definição 1.9. Dizemos que a **dimensão** de um espaço vetorial é a cardinalidade de sua base.

1.2 Subespaços

Proposição 1.10. Seja V um espaço vetorial e seja \mathcal{W} um conjunto de subespaços. Então $\bigcap \mathcal{W}$ é um subespaço de V .

Definição 1.11. Se S é subconjunto de V , definimos:

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{v \in I} \alpha_v v \mid I \subseteq S \text{ e } I \text{ é finito e } \alpha \in K^I \right\}$$

e chamamos de **subespaço gerado** por S .

Proposição 1.12. Se S é subconjunto de V , então:

$$\langle S \rangle = \{W \mid W \text{ é subespaço de } V \text{ e } W \subseteq S\}.$$

A intersecção de subespaços sempre é um subespaço, mas o mesmo não acontece com a união de subespaços.

Proposição 1.13. Se A e B são subespaços de V tais que $A \not\subseteq B$ e $B \not\subseteq A$, então $A \cup B$ não é subespaço de V .

Demonstração. Nesse caso, existe $a \in A$ tal que $a \notin B$ e existe $b \in B$ tal que $b \notin A$. Seja $c = a + b$. Então:

- Se $c \in A$, $b = c - a \in A$, o que é impossível.
- Se $c \in B$, $a = c - b \in B$, o que é impossível.

Logo, concluímos que $c \notin A \cup B$, absurdo. \square

Na verdade, $A \cup B$ é um subespaço se e somente se $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.

Observação 1.14. Seja $K = F_2 = \{0, 1\}$, e tome $V = K^2$. Então,

$$V = \langle (0, 1) \rangle \cup \langle (1, 0) \rangle \cup \langle (1, 1) \rangle$$

Na verdade, V só pode ser escrito como união de seus subespaços se K for um corpo finito.

Apesar de não podermos trabalhar com a união, podemos realizar a soma de subespaços, e esta sim é um subespaço:

Definição 1.15. Sejam $W_i \subseteq V$, $i \in I$, subespaços de V . Definimos:

$$\sum_{i \in I} W_i = \{w_{i_1} + \dots + w_{i_k} \mid k \in \mathbb{N}, w_i \in W_i\}$$

Pode-se mostrar que $\sum_{i \in I} W_i$ é subespaço de V .

Definição 1.16. Uma soma $\sum_{i \in I} W_i$ chama-se **soma direta** se para todo $i \in I$

$$W_i \cap \left(\sum_{j \neq i} W_j \right) = 0$$

Teorema 1.17. Para subespaço A de V , então existe subespaço $B \subseteq V$ tal que $V = A \oplus B$.

Teorema 1.18.

$$\dim(A + B) + \dim(A \cap B) = \dim(A) + \dim(B).$$

Demonstração. Seja E base de $A \cap B$. Então existe F tal que $B \cap F = \emptyset$ e $E \cup F$ seja base de A e existe G tal que $A \cap G = \emptyset$ e $E \cup G$ seja base de B . Então $E \cup F \cup G$ é base de $A + B$. Daí:

$$\dim(A + B) + \dim(A \cap B) = |E| + |F| + |G| + |E| = |E| + |F| + |E| + |G| = \dim(A) + \dim(B)$$

□

Exemplo 1.19. Considere novamente $V = \mathbb{R}^4$. Sejam

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + t = 0\}$$

$$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - 2t = 0\}$$

W_1 e W_2 são subespaços de V . Assim, $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$ são subespaços de V . Vamos encontrar bases para eles. Note que

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + t = 0\} \\ &= \{(x, y, z, -y - z) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, 0, 0, 0) + (0, y, 0, -y) + (0, 0, z, -z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1) \rangle \end{aligned}$$

Verifica-se também que $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)$ são linearmente independentes. Logo, $B_1 = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$ é base para W_1 . Analogamente, mostra-se que $B_2 = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\}$ é base para W_2 . Agora, para determinar uma base de $W_1 + W_2$, podemos escalonar a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, o conjunto

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1), (1, -1, 0, 0)\}$$

é base de $W_1 + W_2$.

Para determinar uma base de $W_1 \cap W_2$, basta resolver o sistema

$$\begin{cases} y + z + t = 0 \\ x + y = 0 \\ z - 2t = 0 \end{cases}$$

Assim, $W_1 \cap W_2 = \langle (3, -3, 2, 1) \rangle$.

Observe que

$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = 1 + 4 = 5 = 3 + 2 = \dim(W_1) + \dim(W_2)$$

Como $\dim(W_1 + W_2) = 4$, temos que $W_1 + W_2 = V = \mathbb{R}^4$. Observe também que, como $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, a soma $W_1 + W_2$ não é direta.

1.3 Coordenadas

Definição 1.20. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Seja B uma base de V . Então para $v \in V$ existe um único $\alpha : B \rightarrow K$ tal que

$$v = \sum_{b \in B} \alpha_b b,$$

e chamamos esse α de $[v]_B$.

Capítulo 2

Transformações Lineares

2.1 Definições

Definição 2.1. Uma função $T : U \rightarrow V$ se chama uma **transformação linear** se para quaisquer $\alpha, \beta \in K$ e $u, v \in V$ tivermos $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$.

Definição 2.2. Para espaços vetoriais U e V , denotamos o conjunto das transformações lineares de U a V por $\mathcal{L}(U, V)$.

Teorema 2.3. Sejam U e V espaços vetoriais sobre K , seja B uma base de U e $f : B \rightarrow V$ uma função. Então existe uma única transformação linear $T \in \mathcal{L}(U, V)$ tal que $\forall b \in B : T(b) = f(b)$.

Definição 2.4. Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Definimos $\text{Ker}(T) = \{u \in U : T(u) = 0\}$. Definimos $\text{Rank}(T) = \dim(\text{Im}(T))$.

Proposição 2.5. Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Então:

- $\text{Ker}(T)$ é um subespaço de U .
- $\text{Im}(T)$ é um subespaço de V .
- T é injetora se e só se $\text{Ker}(T) = 0$.
- Se T é bijetora, então $T^{-1} \in \mathcal{L}(V, U)$.

Teorema 2.6. Seja $\mathcal{L}(U, V)$, seja B uma base de $\text{Ker}(T)$, e seja C um conjunto tal que $T[C]$ seja base de $\text{Im}(T)$. Então $B \cup C$ é base de U .

Demonstração. Para $v \in V$ então $T(v) \in \text{Im}(T)$, então existem um conjunto finito $F \subseteq C$ e $\alpha : F \rightarrow K$ tais que $T(v) = \sum_{w \in F} \alpha_w T(w)$, assim $T\left(v - \sum_{w \in F} \alpha_w w\right) = 0$, aí $v - \sum_{w \in F} \alpha_w w \in \text{Ker}(T)$, assim existem conjunto finito $E \subseteq B$ e função $\beta : E \rightarrow K$ tal que $v - \sum_{w \in F} \alpha_w w = \sum_{u \in E} \beta_u u$, aí $v = \sum_{u \in E} \beta_u u + \sum_{w \in F} \alpha_w w$.

Por outro lado, para subconjunto finito $E \subseteq B \cup C$ e função $\alpha : E \rightarrow K$ tal que $\sum_{e \in E} \alpha_e e = 0$, então $\sum_{e \in E \cap C} \alpha_e T(e) = 0$, aí $\forall E \cap C : \alpha_e = 0$, aí bla. \square

Teorema 2.7 (Teorema do Núcleo-Imagem). Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Então

$$U = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$$

Corolário 2.8.

$$\dim V = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)).$$

Definição 2.9. Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ é bijetora, dizemos que T é um **isomorfismo** de U a V .

Proposição 2.10. $T \in \mathcal{L}(U, V)$ é isomorfismo se e somente se T^{-1} também o é.

Proposição 2.11. dois espaços vetoriais U e V são isomorfos se e somente se quaisquer duas bases \mathcal{B} de U e \mathcal{C} de V possuem a mesma cardinalidade.

Teorema 2.12. Para espaços vetoriais U e V , então U é isomorfo a V se e só se $\dim(U) = \dim(V)$.

2.2 Espaço Dual

Definição 2.13. Seja V um espaço vetorial sobre K . Denotamos $V^* = \mathcal{L}(V, K)$. O espaço V^* chama-se o **espaço dual** de V . Os elementos de V^* chama-se **funcionais lineares**.

Se $\dim(V) = n$, então $\dim(V^*) = n \cdot 1 = n$. Assim, V e V^* são isomorfos (no caso de $\dim(V) = n < \aleph_0$).

Teorema 2.14. Seja V um espaço vetorial com $\dim(V) = n$ e $B = \{v_i\}_{i \in n}$ uma base de V . Então existe uma base $B^* = \{f_i\}_{i \in n}$ de V^* tal que $f_i(v_j) = \delta_{i,j}$ para $i, j \in n$. Além disso, $\forall v \in V : v = \sum_{i \in n} f_i(v)v_i$ e $\forall f \in V^* : f = \sum_{i \in n} f(v_i)f_i$.

Demonstração. Para todo $i \in n$, existe uma única função linear $f_i : V \rightarrow K$ tal que:

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Seja $\alpha : n \rightarrow K$ tal que:

$$\sum_{i \in n} \alpha_i f_i = 0.$$

Para $j \in n$, aplicando este funcional para o vetor $v_j \in B$, então:

$$0 = 0(v_j) = \sum_{i \in n} \alpha_i f_i(v_j) = \alpha_j,$$

ou seja, $\alpha_j = 0$. Portanto B^* é linearmente independente.

Além disso, para $v \in V$ existe $\alpha : n \rightarrow K$ tal que $v = \sum_{i \in n} \alpha_i v_i$, aí para $i \in n$ temos $f_i(v) = \alpha_i f_i(v_i) = \alpha_i$; logo $f(v) = \sum_{i \in n} \alpha_i f(v_i) = \sum_{i \in n} f(v_i)f_i(v)$. \square

Definição 2.15. A base B^* chama-se a **base dual** da base B .

2.3 Espaço Bidual

Definição 2.16. Seja V um espaço vetorial sobre K . O espaço $V^{**} = (V^*)^*$ chama-se o **espaço bidual** do espaço V .

Definição 2.17. Para $v \in V$, definamos $\varphi_v : V^* \rightarrow K$ assim:

$$\forall f \in V^* : \varphi_v(f) = f(v).$$

Então $\varphi_v \in V^{**}$.

Proposição 2.18. $\varphi \in \mathcal{L}(V, V^{**})$ e φ é injetora.

Demonstração. Para $v \in \text{Ker}(\varphi)$, então $\varphi_v = 0$, aí para todo $f \in V^*$ temos $f(v) = \varphi_v(f) = 0$, aí para todo $i \in n$ temos $f_i(v) = 0$, aí $v = \sum_{i \in n} f_i(v)v_i = 0$, aí $v = 0$. \square

Seja B uma base de V , então para cada $a \in B$ definimos a transformação linear $f_a \in V^*$ por $f_a(b) = \delta_{a,b}$, então $(f_a)_{a \in B}$ é linearmente independente em V^* e para todo $v \in V$ existem um conjunto finito $F \subseteq B$ tal que $v = \sum_{b \in F} f_b(v)b$.

Corolário 2.19. Se $\dim(V) = n < \aleph_0$ então $\varphi : V \rightarrow V^{**}$ é um isomorfismo.

Demonstração.

$$\dim(V) = \dim(V^*) = \dim(V^{**}).$$

□

Observação 2.20. Nesse caso φ é um isomorfismo natural, ou seja, não depende da escolha de uma base.

Corolário 2.21. Se $\dim(V) < \aleph_0$, então toda base de V^* é a base dual para uma base de V .

Demonstração. Seja C uma base de V^* . Consideremos a base dual C^* de V^{**} . Mas $V^{**} \cong V$, então existe $v : C \rightarrow V$ tal que $\forall c \in C : f_c = \varphi_{v_c}$, assim:

$$c(v_d) = \varphi_{v_d}(c) = f_d(v_c) = \delta_{d,c} = \delta_{c,d},$$

logo C é base dual da base $(v_c)_{c \in C}$ de V .

□

2.4 Anuladores

Definição 2.22. Seja V um espaço vetorial e seja $S \subseteq V$ um subconjunto. Então definimos:

$$S^0 = \{f \in V^* \mid \forall s \in S : f(s) = 0\}.$$

O conjunto S^0 chama-se o **anulador** de S .

Proposição 2.23. S^0 é um subespaço de V .

Teorema 2.24. Seja V um espaço com $\dim(V) < \aleph_0$ e $W \subseteq V$ um subespaço. Então:

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^0).$$

Demonstração. Seja $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = m$. Escolhemos uma base $(v_i)_{i \in m}$ de W e completamos até uma base $(v_i)_{i \in n}$ de V . Consideremos a base dual $(f_{v_i})_{i \in n}$ de V^* . Mostraremos que $(f_{v_i})_{i \in n \setminus m}$ é uma base de W^0 . É claro que $\forall i \in n \setminus m : f_{v_i} \in W^0$. Seja $f \in W^0$, então $f = \sum_{i \in n} f(v_i)f_{v_i} = \sum_{i \in n \setminus m} f(v_i)f_{v_i}$. □

Teorema 2.25. Se $\dim(V) < \aleph_0$ e $V = U \oplus W$, então $V^* = U^0 \oplus W^0$ e $U^0 \cong W^*$ e $W^0 \cong U^*$.

Demonstração. Seja $B = B_U \cup B_W$ uma base de V , em que B_U é base de U e B_W é base de W . Então na base dual temos $B^* = B_U^* \cup B_W^*$, e pelo teorema anterior temos $\langle B_U^* \rangle = W^0$ e $\langle B_W^* \rangle = U^0$. □

2.5 Transpostas

Definição 2.26. Sejam U e V espaços vetoriais sobre K , e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Então definimos a **transposta** de T como a função:

$$\begin{aligned} T^t : V^t &\rightarrow U^t \\ f &\mapsto T^t(f) = f \circ T \end{aligned}$$

Proposição 2.27. Se $\dim(U) < \aleph_0$ e $T \in \mathcal{L}(U, V)$, então:

$$a) \text{ Ker}(T^t) = (\text{Im}(T))^0.$$

b) $\text{Rank}(T^t) = \text{Rank}(T)$.

c) $\text{Im}(T^t) = (\text{Ker}(T))^0$.

Demonstração. Temos o seguinte:

a) Temos:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(T^t) &= \{f \in V^* \mid T^t(f) = 0\} \\ &= \{f \in V^* \mid f \circ T = 0\} \\ &= \{f \in V^* \mid \forall u \in U : f(T(u)) = 0\} \\ &= \{f \in V^* \mid f[\text{Im}(T)] = 0\} \\ &= (\text{Im}(T))^0. \end{aligned}$$

b) Temos $\text{Rank}(T^t) = \dim(\text{Im}(T^t))$ e $\text{Rank}(T) = \dim(\text{Im}(T))$. Além disso:

$$\dim(V^*) = \dim(\text{Im}(T^t)) + \dim(\text{Ker}(T^t))$$

$$\dim(V^*) = \dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Im}(T))^0$$

mas $\dim(V^*) = \dim(V)$ e $\dim(\text{Ker}(T^t)) + \dim(\text{Im}(T))^0$.

c) Temos $\text{Im}(T^t) \subseteq (\text{Ker}(T))^0$. Seja $\varphi \in \text{Im}(T^t)$, então existe $g \in V^*$ tal que $\varphi = T^t(g)$, aí para todo $u \in U$ nós temos $\varphi(u) = T^t(g)(u) = g(T(u))$. Se $u \in \text{Ker}(T)$ então $T(u) = 0$, aí $\varphi(u) = 0$; logo $\varphi \in (\text{Ker}(T))^0$. Além disso:

$$\dim(U) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

$$\dim(U) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

aí $\dim(\text{Ker}(T))^0 = \dim(\text{Im}(T))$, aí $(\text{Ker}(T))^0 = \text{Im}(T)$.

□

Teorema 2.28. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita com bases B e C e bases duais B^* e C^* . Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$, então:

$$([T]_{B,C})^t = [T^t]_{C^*,B^*}$$

Corolário 2.29. Se $A \in M_{m,n}(K)$, então:

$$\text{RowRank}(A) = \text{ColumnRank}(A).$$

Demonstração. Consideremos $T : K^n \rightarrow K^m$ dada por $T(v) = Av$. Sejam B e C as bases canônicas de K^n e K^m , então $[T]_{B,C} = A$. Temos:

$$\begin{aligned} \text{Rank}(T) &= \text{ColumnRank}(A) \\ \text{Rank}(T^t) &= \text{ColumnRank}(A^t) = \text{RowRank}(A). \end{aligned}$$

□

2.6 Espaços Quocientes

Definição 2.30. Seja V um espaço, $W \subseteq V$ um subespaço. Para $u, v \in V$, digamos que $u \sim v$ se e só se $u - v \in W$. Então \sim é uma relação de equivalência, ou seja:

- Reflexiva, ou seja, $v \sim v$ sempre.
- Simétrica, ou seja, se $v \sim u$ então $u \sim v$.
- Transitiva, ou seja, se $v \sim u$ e $u \sim w$, então $v \sim w$.

CAPÍTULO 2. TRANSFORMAÇÕES LINEARES

2.6. ESPAÇOS QUOCIENTES

Seja V/W o conjunto das classes de equivalência relativamente a \sim . Para $v \in V$ seja \bar{v} a classe de equivalência de v .

- Definamos em V/W uma estrutura de espaço vetorial. Para $\bar{v}, \bar{w} \in V/W$ definamos $\bar{v} + \bar{w} = \overline{v + w}$.
- Para $\alpha \in K$ e $\bar{v} \in V/W$ definamos $\alpha \cdot \bar{v} = \overline{\alpha v}$. Então V/W é um espaço vetorial chamado **espaço quociente**.

Observação 2.31. As operações estão “bem definidas” pois:

- Se $\bar{v} = \bar{v'}$ e $\bar{u} = \bar{u'}$, então $v \sim v'$ e $u \sim u'$, aí $v - v', u - u' \in W$, aí $(v + u) - (v' + u') = (v - v') + (u - u') \in W$, aí $\overline{v + u} = \overline{v' + u'}$, aí $\bar{v} + \bar{u} = \bar{v'} + \bar{u'}$.
- Analogamente para a outra propriedade.

Também verificaremos algumas propriedades, deixando o resto ao leitor.

- Temos a comutatividade da adição, pois $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$ equivale a $\overline{u + v} = \overline{v + u}$, que é verdade pois $u + v = v + u$.
- O que é o $\bar{0}$ de V/W ? Temos $\bar{0} = W$, e também para todo $w \in W$ temos $w \sim 0$, aí $\bar{w} = \bar{0} = W$.

Também temos o seguinte:

- Se $W = V$, então $V/V = \{\bar{0}\}$.
- Se $W = \{0\}$, então $V/\{0\} \cong V$.

Proposição 2.32. Consideremos a aplicação:

$$\pi : V \rightarrow V/W, \quad v \mapsto \bar{v}.$$

Então $\pi \in \mathcal{L}(V, V/W)$, com $\text{Ker}(\pi) = W$.

Notação 2.33. π chama-se a **projeção canônica** de V para V/W .

Demonstração. Temos o seguinte:

- $\pi(v + u) = \overline{v + u} = \bar{v} + \bar{u} = \pi(v) + \pi(u)$.
- $\pi(\alpha v) = \overline{\alpha v} = \alpha \bar{v} = \alpha \pi(v)$.

Além disso, se $w \in W$ então $\pi(w) = \bar{w} = W$ □

Proposição 2.34. Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $W \subseteq U$ tal que $W \subseteq \text{Ker}(T)$. Então existe um único $\bar{T} \in \mathcal{L}(U/W, V)$ tal que para todo $u \in U$ tenhamos:

$$\bar{T}(\bar{u}) = T(u).$$

Demonstração. Temos o seguinte:

1) Mostraremos que \bar{T} está “bem definida”. Se $\bar{u} = \bar{v}$, então $u - v \in W \subseteq \text{Ker}(T)$, aí $T(u - v) = 0$, aí $T(u) = T(v)$.

2) Mostraremos que \bar{T} é uma transformação linear.

- $\bar{T}(\bar{u} + \bar{v}) = \bar{T}(\overline{u + v}) = T(u + v) = T(u) + T(v) = \bar{T}(\bar{u}) + \bar{T}(\bar{v})$.
-

□

Teorema 2.35. Sejam U e V espaços vetoriais sobre K , e seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Então $U/\text{Ker}(T) \cong \text{Im}(T)$.

Demonstração. Pela proposição anterior, existe uma única $\bar{T} : U/\text{Ker}(T) \rightarrow V$ tal que para todo $u \in U$ tenhamos:

$$\bar{T}(\bar{u}) = T(u).$$

Observemos que $\text{Im}(\bar{T}) = \text{Im}(T) = \{T(u) \mid u \in U\}$.

Além disso, para $\bar{u} \in \text{Ker}(\bar{T})$, então $T(u) = \bar{T}(\bar{u}) = 0$, aí $u \in \text{Ker}(T)$, aí $\bar{u} = \bar{0}$, de modo que \bar{T} é injetora. \square

Teorema 2.36. Seja W subespaço de V . Então todos os complementos de W em V são isomorfos ao V/W .

Demonstração. Seja $V = W \oplus U$. Consideremos a projeção canônica:

$$\pi : V \rightarrow V/W.$$

Seja $\bar{\pi} = \pi \upharpoonright U$. Então $\text{Ker}(\bar{\pi}) = U \cap \text{Ker}(\pi) = U \cap W = \{0\}$. Logo $\bar{\pi}$ é injetora.

Para $\bar{v} \in V/W$, seja $v = w + u$, com $w \in W$ e $u \in U$. Então $\pi(v) = \pi(w) + \pi(u) = \pi(u) = \bar{\pi}(u)$, aí $\bar{v} = \bar{\pi}(u)$, assim $\bar{\pi}$ é sobre V/W . \square

Corolário 2.37. Seja $W \subseteq V$ um subespaço. Então $\dim V = \dim W + \dim V/W$.

Demonstração. Seja $V = W \oplus U$, então $\dim V = \dim W + \dim U$, mas $U \cong V/W$, aí $\dim U = \dim V/W$. \square

Observação 2.38. Existem espaços vetoriais W e U e W' e U' tais que $W \oplus U \cong W' \oplus U'$ e $W \cong W'$, mas $U \not\cong U'$. De fato podemos tomar $W = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Ke_{2i}$ e $U = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Ke_{2i+1}$ e $W' = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Ke_i$ e $U' = \{0\}$.

Capítulo 3

Determinantes

3.1 Formas Multilineares

Definição 3.1. Seja V um espaço vetorial e $V^r = V \times \cdots \times V$. Uma **forma r-linear** sobre V é uma função:

$$F : V^r \rightarrow K, \quad (v_i)_{i \in r} \mapsto F((v_i)_{i \in r}) \in K$$

que é linear em cada argumento, ou seja, para $i \in r$ temos:

$$F(v_0, \dots, \alpha v_i + \beta v'_i, \dots, v_{r-1}) = \alpha F(v_0, \dots, v_i, \dots, v_{r-1}) + \beta F(v_0, \dots, v'_i, \dots, v_{r-1}).$$

Denotamos por $L_r(V)$ o conjunto das formas r-lineares sobre V .

Exemplo 3.2. Seja $V = K^2$ e:

$$F((x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_0 y_1 x_2 - x_0 x_1 y_2.$$

Então F é uma forma 3-linear.

Definição 3.3. Uma forma $F \in L_r(V)$ chama-se **alternativa** se e só se para $v \in V^r$, se v não é injetora, então $F(v) = 0$. Denotamos por $A_r(V)$ o conjunto das formas r-lineares alternativas.

Definição 3.4. Uma forma F é chamada **antissimétrica** se para $v \in V^r$ e para $i, j \in r$ tais que $i \neq j$, então:

$$F(v_0, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_{r-1}) = -F(v_0, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_{r-1}).$$

Proposição 3.5. Toda forma alternativa é antissimétrica.

Demonstração. Seja $F \in A_r(V)$. Sejam $v \in V^r$ e $i, j \in r$ tais que $i \neq j$. Então:

$$\begin{aligned} 0 &= F(v_0, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_{r-1}) \\ &= F(v_0, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_{r-1}) + F(v_0, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_{r-1}) \\ &\quad + F(v_0, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_{r-1}) + F(v_0, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_{r-1}) \\ &= F(v_0, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_{r-1}) + F(v_0, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_{r-1}) \end{aligned}$$

□

Proposição 3.6. Se a característica do corpo é $\neq 2$, então toda forma antissimétrica é reflexiva.

Demonstração. Para F antissimétrica e $v \in V^r$ e $i, j \in r$ tais que $i \neq j$, se $v_i = v_j$, sendo $v = v_i$, então:

$$F(v_0, \dots, v, \dots, v, \dots, v_{r-1}) = -F(v_0, \dots, v, \dots, v, \dots, v_{r-1}),$$

aí:

$$2F(v_0, \dots, v, \dots, v, \dots, v_{r-1}) = 0,$$

aí:

$$F(v_0, \dots, v, \dots, v, \dots, v_{r-1}) = 0.$$

□

CAPÍTULO 3. DETERMINANTES

3.1. FORMAS MULTILINEARES

Definição 3.7. Seja $F \in L_r(V)$ e $\sigma \in S_r$ uma permutação. Então, para $v \in V^r$, definamos $(\sigma F)(v) = F(v \circ \sigma)$. Então é fácil ver que $\sigma F \in L_r(V)$.

Observação 3.8. Para $F \in L_r(V)$, então F é antissimétrica se e somente se para toda transposição $\tau \in S_r$ tivermos $\tau F = -F$.

Proposição 3.9. Seja $F \in L_r(V)$ uma forma antissimétrica. Então para $\sigma \in S_r$, temos $\sigma F = (\text{sgn} \sigma)F$.

Demonstração. Para $\sigma \in S_r$, então σ pode ser escrita como $\sigma = \tau_0 \dots \tau_{k-1}$, em que τ_i são transposições, e σ é par se e só se k é par.

Temos $\sigma F = (\tau_0 \dots \tau_{k-1})F = (-1)^k F = (\text{sgn} \sigma)F$, pois $\text{sgn} \sigma = (-1)^k$. \square

Proposição 3.10. Toda forma r -linear determina uma forma r -linear alternada da seguinte maneira:

$$F \mapsto \varphi(F) = \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn} \sigma (\sigma F).$$

Demonstração. Seja $v_i = v_j = v$ com $i \neq j$. Precisamos provar que $\varphi(F)(v) = 0$. Seja τ a transposição (i, j) , então $S = A_r \cup A_r \tau$ e $A_r \cap A_r \tau = \emptyset$. Então temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \varphi(F)(v) &= \sum_{\sigma \in S_r} (\text{sgn} \sigma) (\sigma F)(v) \\ &= \sum_{\sigma \in A_r} (\sigma F)(v) - \sum_{\sigma \in A_r} (\sigma \tau F)(v) \\ &= \sum_{\sigma \in A_r} (\sigma F)(v) - \sum_{\sigma \in A_r} (\sigma F)(v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

 \square

Observação 3.11. Se $F \in A_r(V)$ e $v \in V^r$ é linearmente dependente, então:

$$F(v) = 0.$$

Lema 3.12. Seja $\dim V = n$ e $F \in A_n(V)$. Seja $(e_i)_{i \in n}$ uma base de V , então F é completamente determinada pelo valor $F(e)$.

Demonstração. Seja $v \in V^n$. Então existe $\alpha : n \times n \rightarrow K$ tal que:

$$v_i = \sum_{j \in n} \alpha_{i,j} e_j.$$

Assim:

$$\begin{aligned} F(v) &= F\left(\left(\sum_{j \in n} \alpha_{i,j} e_j\right)_{i \in n}\right) \\ &= \sum_{j \in n^n} \prod_{i \in n} \alpha_{i,j(i)} F(e \circ j) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i \in n} \alpha_{i,\sigma(i)} F(e \circ \sigma) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i \in n} \alpha_{i,\sigma(i)} \text{sgn} \sigma \right) F(e). \end{aligned}$$

 \square

Note então que o valor $\sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i \in n} \alpha_{i,\sigma(i)} \text{sgn} \sigma$ determina F para qualquer $v \in V^n$. Chamaremos este valor de **determinante** de F .

Exemplo 3.13.

3.2 Determinantes

Seja K um corpo e consideremos o anel das matrizes $M_n(K)$. Identificaremos os elementos de $M_n(K)$ com os elementos de $(K^n)^n$ assim:

$$A = (a_{i,j})_{(i,j) \in n \times n} \leftrightarrow ((a_{i,j})_{j \in n})_{i \in n}$$

Portanto, uma função n -linear aqui é uma função n -linear nas linhas da matriz.

Definição 3.14. Uma função $\det : M_n(K) \rightarrow K$ é dita uma função **determinante** se e só se \det é n -linear alternada e $\det(I) = 1$.

Pelo que vimos, existe e é única a função determinante: É a forma n -linear alternada que vale 1 na base canônica de K^n .

Logo, se $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$, então:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i \in n} a_{i, \sigma(i)}.$$

Exemplo 3.15. Para $n = 2$, temos $S_2 = \{I, (0, 1)\}$, e assim, sendo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} \end{pmatrix},$$

então temos:

$$\det(A) = a_{0,0}a_{1,1} - a_{0,1}a_{1,0}.$$

Exemplo 3.16. Agora, se $n = 3$, então $S_3 = \{I, (0, 1, 2), (0, 2, 1), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$, e assim, sendo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix},$$

então temos:

$$\det(A) = a_{0,0}a_{1,1}a_{2,2} + a_{0,1}a_{1,2}a_{2,0} + a_{0,2}a_{1,0}a_{2,1} - a_{0,1}a_{1,0}a_{2,2} - a_{0,2}a_{1,1}a_{2,0} - a_{0,0}a_{1,2}a_{2,1}.$$

Proposição 3.17. Temos as seguintes propriedades:

- 1) Para todo $A \in M_n(K)$ temos $\det(A) = \det(A^t)$.
- 2) Para $A, B \in M_n(K)$ vale $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- 3) Para $A \in M_n(K)$, então A é inversível se e só se $\det(A) \neq 0$. Neste caso, temos $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

Demonstração. Temos o seguinte:

- 1) Sendo $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in n \times n}$, então temos:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i \in n} a_{i, \sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i \in n} a_{\sigma^{-1}(i), i} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau^{-1}) \prod_{i \in n} a_{\tau(i), i} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) \prod_{i \in n} a_{i, \tau(i)}^t \\ &= \det(A^t). \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. DETERMINANTES

3.2. DETERMINANTES

- 2) Seja $F_A : M_n(K) \rightarrow K$ tal que $\forall X \in M_n(K) : F_A(X) = \det(AX)$. Então a função F_A é uma função n -linear alternada sobre as colunas, mas também $F_A(I) = \det(A)$, aí $F_A(B) = \det(A) \det(B)$, assim $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- 3) Se A é inversível, então existe a inversa A^{-1} , assim $1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$, aí $\det(A) \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$. Por outro lado, se $\det(A) \neq 0$, então $\det(A^t) \neq 0$, aí as colunas de A são linearmente independentes, aí consideremos $T : K^n \rightarrow K^n$ tal que $[T]_{\text{can}} = A$, então T é inversível, assim $A = [T]_{\text{can}}$ é inversível.

□

Assim lembremo-nos do seguinte: a função \det é uma função n -linear e alternada nas linhas (ou nas colunas) da matriz, logo:

- 1) Trocar duas linhas (ou colunas) da matriz muda o sinal do determinante.
- 2) Somar a uma linha (ou coluna) uma combinação linear das demais linhas (colunas) não altera o valor do determinante.
- 3) Ao multiplicar uma linha (ou coluna) por um escalar, o determinante fica multiplicado por esse escalar.

Proposição 3.18. Temos o seguinte:

- 1) O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal da matriz.
- 2) Se:

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

em que $B \in M_r(K)$ e $D \in M_{n-r}(K)$ e $C \in M_{n-r,r}(K)$ e $0 \in M_{r,n-r}(K)$, então:

$$\det(A) = \det(B) \det(D).$$

Demonstração. Temos o seguinte:

- 1) Seja $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in n \times n}$ uma matriz triangular inferior, então para $i, j \in n$ tais que $i < j$ temos $a_{i,j} = 0$, mas a única permutação $\sigma \in S_n$ tal que $\forall i \in n : i \geq \sigma(i)$ é a identidade, assim temos:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i \in n} a_{i,\sigma(i)} = \text{sgn}(I) \prod_{i \in n} a_{i,I(i)} = \prod_{i \in n} a_{i,i}.$$

- 2) Seja $F : M_r(K) \rightarrow K$ tal que:

$$F(X) = \det \begin{pmatrix} X & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Então F é r -linear alternada nas linhas de X , assim $F(X) = F(I) \det(X)$.

Agora consideremos $G : M_{n-r}(K) \rightarrow K$ tal que:

$$G(Y) = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & Y \end{pmatrix}$$

Então G é $(n-r)$ -linear alternada nas colunas de Y , logo $G(Y) = G(I) \det(Y)$. Mas:

$$G(I) = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & I \end{pmatrix} = 1,$$

assim $G(Y) = \det(Y)$, aí $F(I) = G(D) = \det(D)$, assim $F(X) = F(I) \det(X) = \det(X) \det(D)$, aí acaba.

□

Agora temos a **regra de Laplace**:

Teorema 3.19. Dada $A \in M_n(K)$, indicaremos por $M_{i,j}$ a matriz quadrada de tamanho $n-1$ obtida a partir de A eliminando a linha i e a coluna j .

Para cada $i \in n$, então vale:

$$\det(A) = \sum_{j \in n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(M_{i,j}).$$

Para cada $j \in n$, então vale:

$$\det(A) = \sum_{i \in n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(M_{i,j}).$$

Demonstração. Provaremos a primeira afirmação pois a segunda é análoga. □

AULA DE 19 DE AGOSTO (COLOCAREI ASSIM QUE CONSEGUIR)- FICOU FALTANDO A PROVA DA REGRA DE LAPLACE E A PARTE DE MATRIZES SOBRE ANEIS COMUTATIVOS Bláa blá blá

Capítulo 4

Formas Canônicas

,

4.1 Autovalores e Autovetores

Definição 4.1. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Um vetor $v \in V$ é um *vetor próprio* ou *autovetor* de T se existe $\lambda \in K$ tal que $T(v) = \lambda v$. O escalar λ é um *valor próprio* ou *autovalor* do operador T . Dizemos que v é um autovetor associado com o autovalor λ .

Exemplo 4.2. Seja $V = \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ e considere o operador linear $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T(v) = v'$ para cada $v \in V$. Considere $v = e^{\lambda x}$ com $\lambda \in K$. Então $T(v) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda v$. Ou seja v é um autovetor associado com o autovalor λ .

Definição 4.3. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. O *spectrum* do operador T é o conjunto

$$\text{Spec}(T) := \{\lambda \in K : \lambda \text{ é autovalor de } T\}.$$

Para cada $\lambda \in \text{Spec}(T)$, denotamos o conjunto dos autovetores associados a λ como $V_T(\lambda)$.

No contexto da definição anterior, considere $\lambda \in \text{Spec}(T)$. Então

$$\begin{aligned} v \in V_T(\lambda) &\iff T(v) = \lambda v \\ &\iff (T - \lambda I)(v) = 0 \\ &\iff v \in \text{Ker}(T - \lambda I). \end{aligned}$$

ALGUMA COISA QUE EU PERDI

Ainda no mesmo contexto, vamos assumir agora que $\dim(V) = n < \infty$. Então temos que

$$\lambda \in \text{Spec}(T) \implies \text{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\} \implies \det(T - \lambda I) = 0.$$

Reciprocamente, se $\det(T - \lambda I) = 0$ então $V_T(\lambda) = \text{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}$.

Definição 4.4. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. O *polinômio característico* de T é a função $p_T(\lambda): K \rightarrow K$ dada por

$$p_T(\lambda) := \det(T - \lambda I), \text{ para cada } \lambda \in K.$$

Note que $\lambda \in \text{Spec}(T)$ se e só se λ é raiz de $p_T(\lambda)$. Além disso, note que se B e B' são bases V , então $p_T(\lambda) = p_{[T]_B}(\lambda)$. De fato, se P é a matriz de mudança da base B para a base B' , então

$$[\lambda I - T]_{B'} = P^{-1}[\lambda I - T]_B P$$

Isso implica que

$$\det([\lambda I - T]_{B'}) = \det(P^{-1})\det([\lambda I - T]_B)\det(P).$$

Ou seja, $\det([\lambda I - T]_{B'}) = \det([\lambda I - T]_B)$.

Exemplo 4.5. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é, $T((x, y)) = (-y, x)$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det \left(\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= \lambda^2 + 1. \end{aligned}$$

Dessa forma, $\text{Spec}(T) = \emptyset$ pois $p_T(\lambda)$ não possui raízes em $K = \mathbb{R}$.

Exemplo 4.6. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det \left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= (\lambda-1)^2(\lambda-2). \end{aligned}$$

Isso implica que $\text{Spec}(T) = \{1, 2\}$. Além disso, temos que

$$V_T(1) = \text{Ker}(T - I) = \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right) = \langle (1, 0, 2) \rangle.$$

e ainda

$$V_T(2) = \text{Ker}(T - 2I) = \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \right) = \langle (1, 1, 2) \rangle$$

Exemplo 4.7. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Neste caso temos que

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det \left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & -3-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= (\lambda+1)^2(\lambda+2). \end{aligned}$$

Isso implica que $\text{Spec}(T) = \{-1, -2\}$ e ainda

$$V_T(-1) = \langle \{(1, 0, 2), (0, 1, 2)\} \rangle$$

CAPÍTULO 4. FORMAS CANÔNICAS

4.1. AUTOVALORES E AUTOVETORES

e

$$V_T(-2) = \langle (1, -1, 1) \rangle$$

. Uma vez que os autovetores acima são L.I, eles formam uma base B de \mathbb{R}^3 e

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

é uma matriz diagonal.

Teorema 4.8. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K tal que $\dim(V) = n < \infty$ e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. São equivalentes:

1. T é diagonalizável.
2. $p_T(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \dots (t - \lambda_k)^{n_k}$ e $\dim(V_T(\lambda_i)) = n_i$ para cada $i \in [k]$.
3. $\dim(V_T(\lambda_1)) + \dots + \dim(V_T(\lambda_k)) = \dim(V) = n$.

Lema 4.9. Seja $\{\lambda_i\}_{i \in [k]} \subseteq \text{Spec}(T)$.

1. Se $v_i \in V_T(\lambda_i)$ para cada $i \in [k]$ e $v_1 + \dots + v_k = 0$, então $v_1 = \dots = v_k = 0$.
2. Se $B_i \subseteq V_T(\lambda_i)$ é L.I para cada $i \in [k]$, então $\bigcup_{i \in [k]} B_i$ é L.I.

Demonstração do Lema.

1. Vamos provar essa afirmação por indução em k . Primeiro note que o resultado é trivial quando $k = 1$. Agora seja $k \in \mathbb{N}$ e assumamos que o resultado vale para cada natural $i < k$. Sejam v_1, \dots, v_k tais que $v_i \in V_T(\lambda_i)$ para cada $i \in [k]$ e $v_1 + \dots + v_k = 0$. Então temos que

$$\lambda_1(v_1 + \dots + v_k) = 0\lambda_1 = 0. \quad (4.1)$$

Além disso, é claro que

$$T(v_1 + \dots + v_k) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0. \quad (4.2)$$

Subtraindo a Equação 4.1 de 4.2, obtemos

$$(\lambda_1 - \lambda_1)v_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + (\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0. \quad (4.3)$$

Agora notamos que cada termo no lado esquerdo é um autovetor de T e aplicamos a hipótese de indução para concluir que $v_2 = \dots = v_k = 0$. Finalmente, como sabemos que $v_1 + \dots + v_k = 0$ e $v_2 = \dots = v_k = 0$, obtemos que $v_1 = 0$ também, o que conclui nossa prova.

2. Seja $S \subseteq \bigcup_{i \in [k]} B_i$ finito e seja $\alpha: S \rightarrow \mathbb{R}$. Note que $V_T(\lambda_i) \cap V_T(\lambda_j) = \{0\}$ sempre que $i, j \in [k]$ e $i \neq j$ e então podemos escrever

$$\sum_{v \in S} \alpha_v v = \sum_{v \in S_1} \alpha_v v + \dots + \sum_{v \in S_k} \alpha_v v,$$

onde $S_i \subseteq B_i$ é finito para cada $i \in [k]$. Utilizando o fato de que o termo $\sum_{v \in S_i} \alpha_v v \in V_T(\lambda_i)$ para cada $i \in [k]$ e aplicando o item anterior, obtemos que

$$\sum_{v \in S_1} \alpha_v v = \dots = \sum_{v \in S_k} \alpha_v v = 0.$$

Finalmente como $S_i \subseteq B_i$ para cada $i \in [k]$ e B_i é sempre L.I por hipótese segue que a restrição de α a cada S_i é identicamente nula. Como $S = \bigcup_{i \in [k]} S_i$ segue que α é identicamente nula. \square

Demonstração.

(i) \Rightarrow (ii): Sejam $(v_{i,j})_{j \in n_i}$ autovetores associados a $\lambda_i \in \text{Spec}(T)$ **TERMINAR ESSA IMPLI-CAÇÃO**

- (ii) \Rightarrow (iii):

$$\dim(V_T(\lambda_1)) + \dots + \dim(V_T(\lambda_k)) = n_1 + \dots + n_k = \deg(p_T(t)) = \dim(V) = n.$$

- (iii) \Rightarrow (i): Para cada $i \in [k]$ considere uma base B_i de $V_T(\lambda_i)$. Seja $B = \bigcup_{i \in [k]} B_i$. Pelo lema anterior, temos que B é L.I. Como $|B| = n$ segue que B é uma base de V . Além disso, B é uma base de autovetores de T . Logo, T é diagonalizável.

□

4.2 Polinômio Minimal

Definição 4.10. Seja V um espaço sobre K , $\dim V = n < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V)$. Definamos por recursão $T^0 = I$ e $T^{k+1} = T^k \circ T$. Se $p(t) \in K[t]$, $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$, então está bem definido o operador $p(T) = a_0 \cdot I + a_1 \cdot T + \dots + a_m \cdot T^m \in \mathcal{L}(V)$.

Lembremo-nos de que, se $\dim(U) = m$ e $\dim(V) = n$, então $\dim \mathcal{L}(U, V) = mn$. Assim, se V é um espaço vetorial tal que $\dim(V) = n < \infty$, então $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$, de modo que existe $m \leq n^2 + 1$ tal que os operadores I, T, T^2, \dots, T^m sejam linearmente dependentes. Seja m um número minimal tal que $T^m \in \langle I, T, \dots, T^{m-1} \rangle$. Então $T^m = a_0 \cdot I + a_1 \cdot T + \dots + a_{m-1} T^{m-1}$, com $a_i \in K$. Seja $m_T(t) = t^m - a_{m-1} t^{m-1} - \dots - a_1 t - a_0$, então $m_T(T) = 0$, e $m_T(t)$ é um polinômio de menor grau tal que $m_T(T) = 0$.

Definição 4.11. Um polinômio mônico de grau mínimo tal que $m_T(t) \in K[t]$ tal que $m_T(T) = 0$ chama-se um **polinômio minimal** do operador T . Chamemos um polinômio $f(t) \in K[t]$ de um **polinômio anulador** de T se $f(T) = 0$.

Lema 4.12. Seja $f(t) \in K[t]$ tal que $f(T) = 0$. Então $m(t) \mid f(t)$.

Demonstração. Dividimos $f(t)$ por $m(t)$ (com resto):

$$f(t) = m_T(t) \cdot q(t) + r(t), \quad \deg(r(t)) < \deg(m_T(t)) \text{ ou } r(t) = 0.$$

Como $f(T) = 0$ e $m_T(T) = 0$, então $r(T) = 0$, aí $r(t) = 0$. □

Corolário 4.13. O polinômio $m_T(t)$ é único.

Se V é um espaço vetorial e $T \in \mathcal{L}(V)$, então V tem uma estrutura de $K[t]$ módulo à esquerda: Se $f(t) \in K[t]$, para $v \in V$ definimos:

$$f(t) \cdot v = f(T)(v).$$

Além disso, se considerarmos:

$$\begin{aligned} \varphi : K[t] &\rightarrow \text{End}(V) \\ f(t) &\mapsto f(T), \end{aligned}$$

então φ é um homomorfismo de K -álgebras e portanto $\text{Ker}(\varphi)$ é um ideal de $K[t]$.

Teorema 4.14. Os polinômios $p_T(t)$ e $m_T(t)$ têm as mesmas raízes em K (a menos de multiplicidade). Em outras palavras, $m_T(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \text{Spec}(T)$.

Demonstração. Se $m_T(\lambda) = 0$, então $m_T(t) = (t - \lambda)q(t)$. Por minimalidade de $m_T(t)$, $q(T) \neq 0$, então existe $w \in V$ tal que $q(T)(w) \neq 0$, aí seja $v = q(T)(w)$, então $v \neq 0$ e:

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)(v) &= (T - \lambda I)q(T)(w) \\ &= m_T(t)(w) = 0, \end{aligned}$$

aí $T(v) = \lambda v$, aí $\lambda \in \text{Spec}(T)$.

Por outro lado, se $\lambda \in \text{Spec}(T)$, seja $v \in V$ tal que $v \neq 0$ e $T(v) = \lambda v$, então $T(T(v)) = \lambda^2 v, \dots, T^m(v) = \lambda^m v, \dots$, aí para $f(t) \in K[t]$ temos $f(T)(v) = f(\lambda) \cdot v$, aí $0 = m_T(T)(v) = m_T(\lambda) \cdot v$, aí $m_T(\lambda) = 0$. □

Corolário 4.15. Se T é diagonalizável e $\text{Spec}(T) = \{\lambda_i\}_{i \in r}$, então $m_T(t) = \prod_{i \in r} (t - \lambda_i)$.

Se $\text{Spec}(T) = \{\lambda_i\}_{i \in r}$, então:

$$V = \sum_{i \in r} V_T(\lambda_i).$$

Demonstração. Já sabemos que $m_T(t) = \left(\prod_{i \in r} (t - \lambda_i)^{k_i} \right)$ em que $q(t)$ não tem raízes em K . Basta provar que $(T - \lambda_0 I) \dots (T - \lambda_{r-1} I) = 0$. Seja $v \in V$, $v = v_0 + \dots + v_{r-1}$, com $v_i \in V_T(\lambda_i)$, então temos $(T - \lambda_i I)(v_i) = 0$, portanto $(T - \lambda_i I)(v) = 0$, e logo $(T - \lambda_i I)(v) = 0$. Então o polinômio $f(t) = (t - \lambda_0) \dots$ é um polinômio anulador para T , aí $m_T(t) \mid f(t)$, aí $m_T(t) = f(t)$. □

4.3 Subespaços Invariantes

Definição 4.16. Seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Um subespaço $W \subseteq V$ chama-se **T-invariante** se $T(W) \subseteq W$.

Observação 4.17. Um subespaço é T-invariante se e só se é um $K[t]$ -submódulo.

Exemplo 4.18. Seja $V = \mathbb{C}(\mathbb{R})$ e considere o operador $D: f \rightarrow f'$. Então o subespaço

$$P_n := \{f(t) \in \mathbb{R}[t] : \deg(f) \leq n\}$$

é D-invariante.

Seja $\dim(V) = n$ e $T \in \mathcal{L}(V)$, $W \subseteq V$ um subespaço T-invariante. Escolhemos uma base $B_1 = \{v_i\}_{i \in m}$ de W e completemo-la até uma base $B = \{v_i\}_{i \in n}$ do espaço V . Qual é a matriz $[T]_B$?

Vamos começar notando que T é W-invariante e então

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \sum_{i \in m} \alpha_{1i} v_i \\ T(v_2) &= \sum_{i \in m} \alpha_{2i} v_i \\ &\dots \\ T(v_m) &= \sum_{i \in m} \alpha_{mi} v_i \\ T(v_{m+1}) &= \sum_{i \in n} \alpha_{(m+1)i} v_i \\ &\dots \\ T(v_n) &= \sum_{i \in n} \alpha_{ni} v_i. \end{aligned}$$

Dessa forma segue que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} & \alpha_{1(m+1)} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mm} & \alpha_{m(m+1)} & \dots & \alpha_{mn} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{(m+1)(m+1)} & \dots & \alpha_{(m+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{n(m+1)} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Isto é, a matriz de T na base B tem a forma

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

onde $A \in M_m(K)$ e $B \in M_{n-m}(K)$. Note que A é a matriz da restrição de T a W na base B_1 .

Vamos agora considerar a restrição de T a W , denotada por $T \upharpoonright W$. Claramente, temos que $T \upharpoonright W \in \mathcal{L}(W)$. Considere $\bar{V} := \frac{V}{W}$ e seja $\pi: V \rightarrow \bar{V}$ uma projeção. Seja $\bar{T} := \pi \circ T$. Então $\bar{T} \in \mathcal{L}(V, \bar{V})$ e $W \subseteq \text{Ker}(\bar{T})$. De fato, para cada $w \in W$ temos

$$\pi(T(w)) \in \pi(W) = 0.$$

Além disso, \bar{T} induz um operador linear $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\bar{V})$ definido por $\tilde{T}(v + W) = \bar{T}(v)$.

Proposição 4.19. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K , seja $T \in \mathcal{L}(V)$ e seja W um subespaço T -invariante de V . Considere $B := B_1 \cup B_2$ onde B é uma base de V e B_1 é uma base de W . Então

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

onde $A = [T \upharpoonright W]_{B_1}$ e $X = [\tilde{T}]_{B_2}$.

Demonstração. **COMPLETAR** □

Lema 4.20. Seja $\dim(V) = n$, $T \in \mathcal{L}(V)$ e $W \subseteq V$ um subespaço T -invariante. Então:

$$p_T(t) = p_{T_1}(t) \cdot p_{T_2}(t)$$

em que $T_1 \in \mathcal{L}(W)$ e $T_2 \in \mathcal{L}(W)$ com $T_1(w) = T(w)$ e $T_2(v + W) = T(v) + W$.

Demonstração. Escolhamos B_1 e B como bases de W e V tais que $B_1 \subseteq B$, então:

$$\begin{aligned} p_T(t) &= \det[tI - T]_B \\ &= \det \begin{pmatrix} tI_m - A & * \\ 0 & tI_{n-m} - B \end{pmatrix} \\ &= \det(tI_m - A) \det(tI_{n-m} - B) \\ &= p_A(t) p_B(t) = p_{T_1}(t) p_{T_2}(t) \end{aligned}$$

□

Observação 4.21. O mesmo **não** ocorre para polinômios minimais. De fato, seja $T = I_V$ e seja W um subespaço T -invariante (De fato, quando T é a identidade, todo subespaço de V é T -invariante), então $T_1 = I_W$ e $T_2 = I_{V/W}$ e aí $m_T(t) = m_{T_1}(t) = m_{T_2}(t) = t - 1$.

Teorema 4.22 (Teorema da Cayley-Hamilton). Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K , e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Então $p_T(T) = 0$, onde $p_T(t) \in K[t]$ é um polinômio característico de T .

Demonstração. Basta provar que $p_T(T)(v) = 0$ para cada $v \in V$. Se $v = 0$ o resultado é evidente. Então seja $0 \neq v \in V$. Note que como V tem dimensão finita temos que existe um $m \leq n = \dim(V)$ mínimo tal que existem coeficientes $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}$ tais que $T^m(v) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i T^i(v)$. Para tal $m \in \mathbb{N}$, considere o conjunto $\{v, T(v), \dots, T^{m-1}(v)\}$ e seja W o subespaço gerado por ele. Note que W é T -invariante e ainda

$$[T \upharpoonright W]_B \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix} = A.$$

Então, pelo Exercício 18 da lista 1, segue que

$$p_A(t) = p_{T|_W}(t) = t^m - \alpha_{m-1}t^{m-1} - \dots - \alpha_1t - \alpha_0.$$

E também

$$p_{T|_W}(T) = T^m - \alpha_{m-1}T^{m-1} - \dots - \alpha_1T - \alpha_0I.$$

Aplicando essa última função a v segue:

$$p_{T|_W}(T)(v) = T^m(v) - \alpha_{m-1}T^{m-1}(v) - \dots - \alpha_1T(v) - \alpha_0v = 0.$$

Para concluir que $p_t(T)(v) = 0$ escrevemos $p_T(T) = p_{T|_W}q(T)$. □

Corolário 4.23. Se $A \in M_n(K)$ então $P_A(A) = 0$, onde $P_A(t) = \det(tI - A)$.

Exemplo 4.24. Considere a matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Então temos que $p_A(t) = t^2 - (a + d)t + (ad - bc)$ e também

$$\begin{aligned} P_A(A) &= A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + ad \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + dc & ad + d^2 \end{pmatrix} + \det(A)I \\ &= \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Teorema 4.25 (Decomposição Primária). Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K tal que $\dim(V) = n < \infty$ e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Suponhamos que $f(T) = 0$, onde

$$f(t) = p_1^{k_1}(t) \dots p_r^{k_r}(t)$$

e cada $p_i(t) \in K[t]$ é irredutível. Então $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ onde cada V_i é T -invariante e $p_i^{k_i}(T|_{V_i}) = 0$.

Lema 4.26. Seja $f(T) = 0$ onde $f(t) = f_1(t)f_2(t)$ com f_1 e f_2 primas entre si. Então $V = V_1 \oplus V_2$ onde V_1 e V_2 são T -invariantes, $f_1(T|_{V_1}) = 0$ e $f_2(T|_{V_2}) = 0$.

Sublema 4.27 (Identidade de Bezout). Se $\text{m.d.c}(f_1(t), f_2(t)) = 1$ então existem $r(t), s(t) \in K[t]$ tais que

$$f_1(t)r(t) + f_2(t)s(t) = 1.$$

Demonstração do Lema. Considere $V_2 := \text{Im}(f_1(T))$ e $V_1 := \text{Im}(f_2(T))$. Vamos verificar que V_1 e V_2 são T -invariantes. Seja $v \in V_1$. Então $v = f_2(T)(w)$ para algum $w \in V$. Dessa forma,

$$T(v) = Tf_2(T)(w) = f_2(T)(T(w)) = f_2(T)(T(w)) \in \text{Im}(f_2(T)) = V_1.$$

e analogamente para V_2 . Além disso, mostremos que $V = V_1 + V_2$. De fato, para cada $v \in V$ temos

$$v = f_1(T)r(T)(v) + f_2(T)s(T)(v).$$

Como $f_1(T)r(T)(v) \in V_2$ e $f_2(T)s(T)(v) \in V_1$ concluímos que $v \in V_1 + V_2$. Agora vamos mostrar que $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Para tal, vamos verificar que $V_1 \subseteq \text{Ker}(f_1)(T)$ e $V_2 \subseteq \text{Ker}(f_2(T))$. Seja $v \in V_1$. Então $v = f_2(T)(w)$ para algum $w \in V$.

$$f_1(T)(v) = f_1(T)f_2(T)(w) = f(T)(w) = 0.$$

Também vejamos que $\text{Ker}(f_1)(T) \cap \text{Ker}(f_2)(T) = \{0\}$. Seja $v \in \text{Ker}(f_1(T)) \cap \text{Ker}(f_2(T))$. Então temos por definição que $f_1(T)(v) = f_2(T)(v) = 0$. Segue

$$v = r(T)f_1(T)(v) + s(T)f_2(T)(v) = 0$$

. Assim concluímos que $V = V_1 \oplus V_2$. Finalmente, note que como $V_1 \subseteq \text{Ker}(f_1(T))$ e $V_2 \subseteq \text{Ker}(f_2(T))$ segue que $f_1(T|_{V_1}) = 0$ e $f_2(T|_{V_2}) = 0$. \square

Demonstração do Teorema. Vamos mostrar este resultado por indução sobre r . Note que o resultado é óbvio para $r = 1$. Agora suponhamos que o resultado vale para o caso $r - 1$. Então consideramos $f(t) = f_1(t)f(t)$, onde $f_1(t) = p_1^{k_1}(t) \dots p_{r-1}^{k_{r-1}}(t)$ e $f_2(t) = p_r^{k_r}(t)$. Então $\text{m.d.c}\{f_1(t), f_2(t)\} = 1$. Aplicando o lema o resultado segue. \square

Corolário 4.28. Seja V um espaço vetorial tal que $\dim(V) = n < \infty$, seja $T \in \mathcal{L}(V)$, e seja $m_T(t) = p_1^{k_1}(t) \dots p_r^{k_r}(t)$ com $p_i(t)$ irredutíveis e primos entre si. Então $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ onde V_i são T -invariantes e $m_{T|_{V_i}}(t) = p_i^{k_i}(t)$.

Demonstração. Temos por definição que $m_T(T) = 0$. Portanto, pelo teorema temos que $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$, onde cada V_i é T -invariante. Considere $T_i := T|_{V_i}$ para cada $i \in [r]$. Temos que $p_i^{k_i}(T_i) = 0$. Então segue que $M_{T_i}(v) | p_i^{k_i}(t)$, ou seja, $m_{T_i}(t) = p_i(t)^{m_i}$, onde $m_i \leq k_i$. Suponhamos que $m_i < k_i$ e consideremos $g(t) = p_1^{k_1}(t) \dots p_i^{m_i}(t) \dots p_r^{k_r}(t)$, e então $\deg(g(t)) < \deg(m_T(t))$. Provaremos que $g(T) = 0$, o que irá contradizer a minimalidade do grau de $m_t(t)$. Se $v \in V_j$ com $j \neq i$ então $p_j^{k_j}(v) = 0$ e portanto $g(T)(v) = 0$. Se $v \in V_i$ então $p_i^{m_i}(T)(v) = 0$ e $g(T)(v) = 0$. Assim concluímos que $g(T_k) = 0$ para cada $k = 1, \dots, r$ e logo $g(T) = 0$. Isso implica que $g(T)$ é o polinômio minimal de T , absurdo. \square

Corolário 4.29. Seja V um espaço vetorial tal que $\dim(V) = n < \infty$, seja $T \in \mathcal{L}(V)$, e seja $p_t(t) = p_1^{k_1}(t) \dots p_r^{k_r}(t)$ com $p_i(t)$ irredutíveis e primos entre si. Então $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$, com V_i T -invariantes e $p_{T|_{V_i}}(t) = p_i(t)^{k_i}$.

Demonstração. **PROF NÃO TERMINOU ESSA PROVA** \square

Corolário 4.30. Um operador $T \in \mathcal{L}(V)$ é diagonalizável se, e somente se $m_T = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_r)$ com $\lambda_i \neq \lambda_j$ sempre que $i \neq j$.

Demonstração. A ida já foi provada em algum momento do passado, então vamos mostrar apenas a volta. Pelo primeiro Corolário, temos que $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ com $m_{T|_{V_i}} = t - \lambda_i$, ou seja $T|_{V_i} = \lambda_i I_{V_i}$ e ainda $V_i = V_T(\lambda_i)$. \square

Considere $\{T_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}(V)$. Quando os operadores T_i podem ser diagonalizados simultaneamente?

Teorema 4.31. Um conjunto $\{T_i : i \in I\}$ pode ser diagonalizado simultaneamente se, e somente se cada T_i é diagonalizável e $T_i T_j = T_j T_i$ para todo $i, j \in I$.

Demonstração. **PROF TB NÃO TERMINOU ESSA PROVA** \square

Índice

Espaço Vetorial

Base, 7

Base dual, 14

Dimensão, 9

Soma direta, 10

Teorema do Núcleo-Imagem, 13

Transformações Lineares, 13

Teorema de Cantor-Bernstein, 9

Transformações Lineares

Isomorfismos, 14