

Álgebra Linear

MAT5730

2 semestre de 2019

Conteúdo

1	Lista 0	5
1.1	Exercício 1	5
1.2	Exercício 2	5
1.3	Exercício 3	5
1.4	Exercício 4	6
1.5	Exercício 5	6
1.6	Exercício 6	7
1.7	Exercício 7	7
1.8	Exercício 8	9
1.9	Exercício 9	9
1.10	Exercício 10	9
1.11	Exercício 11	10
1.12	Exercício 12	10
1.13	Exercício 13	10
1.14	Exercício 14	11
1.15	Exercício 15	11
1.16	Exercício 16	11
1.17	Exercício 17	11
1.18	Exercício 18	11
1.19	Exercício 19	12
1.20	Exercício 20	12
1.21	Exercício 21	12
2	Lista 1	13
2.1	Exercício 1	13
2.2	Exercício 2	14
2.3	Exercício 3	14
2.4	Exercício 4	17
2.5	Exercício 5	17
2.6	Exercício 6	18
2.7	Exercício 7	20
2.8	Exercício 8	22
2.9	Exercício 9	23
2.10	Exercício 10	23
2.11	Exercício 11	24
2.12	Exercício 12	26
2.13	Exercício 13	27
2.14	Exercício 14	29
2.15	Exercício 15	30
2.16	Exercício 16	33

2.17	Exercício 17	34
2.18	Exercício 18	34
2.19	Exercício 19	35
2.20	Exercício 20	36
2.21	Exercício 21	36
2.22	Exercício 22	37
2.23	Exercício 23	38
2.24	Exercício 24	38
2.25	Exercício 25	39
2.26	Exercício 26	40
2.27	Exercício 27	41
2.28	Exercício 28	41
2.29	Exercício 29	42
2.30	Exercício 30	42
2.31	Exercício 31	42
2.32	Exercício 32	42
2.33	Exercício 33	43

3 **Lista 2** 44

3.1	Exercício 1	44
3.2	Exercício 2	44
3.3	Exercício 3	45
3.4	Exercício 4	47
3.5	Exercício 5	48
3.6	Exercício 6	49
3.7	Exercício 7	49
3.8	Exercício 8	50
3.9	Exercício 9	52
3.10	Exercício 10	52
3.11	Exercício 11	54
3.12	Exercício 12	54
3.13	Exercício 13	55
3.14	Exercício 14	55
3.15	Exercício 15	57
3.16	Exercício 16	59
3.17	Exercício 17	59
3.18	Exercício 18	60
3.19	Exercício 19	60
3.20	Exercício 20	61
3.21	Exercício 21	62
3.22	Exercício 22	63
3.23	Exercício 23	64
3.24	Exercício 24	65
3.25	Exercício 25	65
3.26	Exercício 26	66
3.27	Exercício 27	67
3.28	Exercício 28	67
3.29	Exercício 29	68
3.30	Exercício 30	70
3.31	Exercício 31	70
3.32	Exercício 32	70
3.33	Exercício 33	71
3.34	Exercício 34	71

3.35	Exercício 35	71
4	Lista 3	72
4.1	Exercício 1	72
4.2	Exercício 2	74
4.3	Exercício 3	75
4.4	Exercício 4	77
4.5	Exercício 5	77
4.6	Exercício 6	78
4.7	Exercício 7	79
4.8	Exercício 8	80
4.9	Exercício 9	81
4.10	Exercício 10	83
4.11	Exercício 11	84
4.12	Exercício 12	85
4.13	Exercício 13	85
4.14	Exercício 14	85
5	Lista 4	87
5.1	Exercício 1	87
5.2	Exercício 2	87
5.3	Exercício 3	88
5.4	Exercício 4	88
5.5	Exercício 5	88
5.6	Exercício 6	88
5.7	Exercício 7	89
5.8	Exercício 8	89
5.9	Exercício 9	89
5.10	Exercício 10	89
5.11	Exercício 11	89
5.12	Exercício 12	90
5.13	Exercício 13	90
5.14	Exercício 14	90
5.15	Exercício 15	90
5.16	Exercício 16	90
5.17	Exercício 17	91
5.18	Exercício 18	91
5.19	Exercício 19	91
5.20	Exercício 20	91
5.21	Exercício 21	91
5.22	Exercício 22	92
5.23	Exercício 23	93
5.24	Exercício 24	94
5.25	Exercício 25	94
5.26	Exercício 26	94
5.27	Exercício 27	94
5.28	Exercício 28	95
5.29	Exercício 29	95
5.30	Exercício 30	96
5.31	Exercício 31	96

6	Lista 5	97
6.1	Exercício 1	97
6.2	Exercício 31	97
7	Lista 6	98
7.1	Exercício 1	98
7.2	Exercício 31	98

1 Lista 0

1.1 Exercício 1

(1) Seja

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

- (a) Prove que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um corpo.
- (b) Prove que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um \mathbb{Q} -espaço vetorial e exiba uma base desse espaço vetorial sobre \mathbb{Q} .
- (c) Mostre que se L e K são corpos tais que $K \subset L$, então L é um K -espaço vetorial.

1.2 Exercício 2

(2) Seja V um K -espaço vetorial e seja $\{u, v, w\} \subset V$ um conjunto linearmente independente. Determine condições sobre K para que o conjunto $\{u + v, u + w, v + w\}$ também seja linearmente independente.

1.3 Exercício 3

(3) Seja S um subconjunto de um espaço vetorial V sobre um corpo K . Recorde que o subespaço de V gerado por S é definido por

$$\langle S \rangle := \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K, v_i \in S\},$$

isto é, $\langle S \rangle$ é o conjunto de todas as combinações lineares de vetores em S .

- (a) Mostre que $\langle S \rangle$ é um subespaço de V .
- (b) Seja W a interseção de todos os subespaços de V que contêm S . Mostre que $W = \langle S \rangle$.

Solução:

- (a) Primeiramente note que para qualquer conjunto $S' \subseteq S$ finito e $\alpha: S' \rightarrow \{0\}$ temos que $\sum_{x \in S'} \alpha_x x = 0$ e logo $0 \in \langle S \rangle$. Além disso, se $\lambda \in K$ e $x \in \langle S \rangle$ temos que $x = \sum_{x \in S'} \alpha_x x$ para $S' \subseteq S$ finito e $\alpha: S' \rightarrow \mathbb{R}$. Então

$$\lambda x = \sum_{x \in S'} (\lambda \alpha_x) x \in \langle S \rangle.$$

Por fim, sejam $x, y \in \langle S \rangle$. Então $x = \sum_{I_x} \alpha_v v$ e $y = \sum_{I_y} \beta_v v$ para conjuntos I_x, I_y finitos e funções $\alpha: I_x \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta: I_y \rightarrow \mathbb{R}$. Defina a função $\bar{\alpha}: I_x \cup I_y \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{\alpha}_v := \begin{cases} \alpha_v & \text{se } v \in I_x; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Similarmente, considere a função $\bar{\beta}: I_x \cup I_y \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{\beta}_v := \begin{cases} \beta_v & \text{se } v \in I_y; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então temos que

$$x + y = \sum_{v \in I_x} \alpha_v v + \sum_{v \in I_y} \beta_v v = \sum_{v \in I_x \cup I_y} (\bar{\alpha}_v + \bar{\beta}_v) v.$$

Como $I_x \cup I_y$ é finito e $\bar{\alpha}_v + \bar{\beta}_v \in \mathbb{R}$ para cada $v \in I_x \cup I_y$ segue que $x + y \in \langle S \rangle$. Concluimos assim que $0 \in \langle S \rangle$, que $\lambda s \in \langle S \rangle$ para cada $\lambda \in K$ e cada $s \in \langle S \rangle$ e que $x + y \in \langle S \rangle$ sempre que $x, y \in \langle S \rangle$. Isto é, $\langle S \rangle$ é um subespaço.

- (b) Considere o seguinte conjunto

$$W := \bigcap \{U \subseteq V : U \text{ é subespaço e } S \subseteq U\}.$$

Seja U um subespaço de V que contém S . Pela definição de subespaço, obtemos que U contém todas as combinações lineares de elementos de S . Logo, $\langle S \rangle \subseteq U$. Concluimos assim que $\langle S \rangle$ está contido em cada subespaço de V que contém S e portanto $\langle S \rangle \subseteq W$.

Por outro lado, se $s \in W$ então s pertence a cada subespaço de V que contém S . Pelo item a, temos que $\langle S \rangle$ é um subespaço de V e claramente contém S . Portanto $s \in \langle S \rangle$.

1.4 Exercício 4

- (4) Mostre que um subconjunto B de um espaço vetorial é linearmente independente se, e somente se, todo subconjunto finito de B é linearmente independente.

1.5 Exercício 5

- (5) Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V .
- (a) Dê um exemplo mostrando que $W_1 \cup W_2$ pode não ser um subespaço de V .
 - (b) Prove que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço se, e somente se $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.
 - (c) Mostre que $W_1 + W_2$ é o subespaço gerado por $W_1 \cup W_2$.

Solução:

- (a) Por exemplo, se $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \langle (1, 0) \rangle$ e $W_2 = \langle (0, 1) \rangle$ então $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço de V .
- (b) Primeiro, suponha sem perda de generalidade que $W_1 \subseteq W_2$. Neste caso, temos que $W_1 \cup W_2 = W_2$, que é um subespaço por hipótese. A outra implicação é a contrapositiva da Proposição ?? das notas de aula.
- (c) Primeiramente vamos mostrar que $W_1 + W_2 \subseteq \langle W_1 \cup W_2 \rangle$. Se $w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$, então claramente

$$w_1 + w_2 = 1w_1 + 1w_2 \text{ com } w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2.$$

Por outro lado, seja $w \in \langle W_1 \cup W_2 \rangle$. Então podemos escrever

$$w = \sum_{v \in I_1 \cup I_2} \alpha_v v = \sum_{v \in I_1} \alpha_v v + \sum_{v \in I_2} \alpha_v v,$$

onde $I_1 \subseteq W_1$ e $I_2 \subseteq W_2$, e $\alpha: I_1 \cup I_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Como W_1 e W_2 são subespaços temos que $\sum_{v \in I_1} \alpha_v v \in W_1$ e $\sum_{v \in I_2} \alpha_v v \in W_2$ e portanto $w \in W_1 + W_2$.

1.6 Exercício 6

(6) Considere o \mathbb{R} -espaço vetorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ das matrizes de 2×2 sobre \mathbb{R} e os seguintes subconjuntos de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

- (a) Mostre que W_1 e W_2 são subespaços de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (b) Encontre as dimensões de $W_1, W_2, W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$.

1.7 Exercício 7

(7) Seja $\mathcal{F} = \{S_i : i \in I\}$ uma família não vazia de subespaços distintos de um K -espaço vetorial V . Mostre que são equivalentes:

- (i) Para cada $i \in I$, temos que $S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j \right) = \{0\}$.
- (ii) O vetor nulo não pode ser escrito como uma soma de vetores não nulos, cada um pertencendo a um subespaço distinto de \mathcal{F} .
- (iii) Todo vetor não nulo de $\sum_{i \in I} S_i$ tem, a menos da ordem, uma decomposição única como soma de vetores não nulos $v = s_1 + \dots + s_n$, com os vetores s_1, \dots, s_n pertencendo a subespaços distintos de \mathcal{F} .

Observação: Segue deste exercício que $V = \sum_{i \in I} S_i$ é uma soma direta se, e somente se, uma das condições (i)-(iii) é satisfeita.

Solução:

(a) (i) \implies (ii): Assuma que existe uma família de elementos não nulos $v_i \in S_i$ tais que $\sum_{i \in I} v_i = 0$.

Seja $i_0 \in I$ e note que $v_{i_0} = - \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} v_i$. Como S_i é um subespaço para cada $i \in I$ concluímos

que $v_{i_0} \in \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} S_i$. Como temos que $v_{i_0} \in S_{i_0}$ por construção, concluímos que $0 \neq v_{i_0} \in$

$S_{i_0} \cap \left(\sum_{i \neq i_0} S_i \right)$ e portanto a afirmação (i) é falsa.

(b) (ii) \implies (i): Assuma que existe $i_0 \in I$ tal que existe $0 \neq v_{i_0} \in S_{i_0} \cap \left(\sum_{i \neq i_0} S_i \right)$. Neste caso,

temos que existe uma família $\{-v_i\}_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ com $v_i \in S_i$ para cada $i \in I \setminus \{i_0\}$ e $\sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} v_i = v_{i_0}$.

Dessa forma, temos que a família $\{v_{i_0}\} \cup \{v_i\}_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ é uma família não nula com $v_i \in S_i$ para cada $i \in I$ e $\sum_{i \in I} v_i = 0$. Isto é, a afirmação (ii) é falsa.

(c) (iii) \implies (i): Seja $0 \neq s \in \sum_{i \in I} S_i$ e seja $\{s_i\}_{i \in I}$ a única decomposição de S . Assuma que existe $0 \neq v \in S_{i_0} \cap \left(\sum_{j \in I \setminus \{i_0\}} S_j \right)$ para algum $i_0 \in I$. Neste caso segue que

$$s = \sum_{i \in I} s_i = (s_{i_0} + v) + \sum_{j \in I \setminus \{i_0\}} s_j - v.$$

Isto é, s tem duas decomposições, o que é uma contradição.

(d) (i) \implies (iii): Seja $0 \neq s \in \sum_{i \in I} S_i$ e assuma que existem duas famílias $\{s_i\}_{i \in I}$ e $\{v_i\}_{i \in I}$ distintas tais que

$$\sum_{i \in I} s_i = \sum_{i \in I} v_i = s.$$

. Seja $i_0 \in I$ tal que $s_{i_0} \neq v_{i_0}$. Então

$$\begin{aligned} 0 \neq v_{i_0} - s_{i_0} &= \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} s_i - \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} v_i \\ &= \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} s_i - v_i. \end{aligned}$$

Assim concluímos que $0 \neq v_{i_0} - s_{i_0} \in S_{i_0} \cap \left(\sum_{i \neq i_0} S_i \right)$. Isto é, a afirmação (i) é falsa.

(e) (ii) \implies (iii): Seja $0 \neq s \in V$ e assuma que existem duas famílias distintas $\{v_i\}_{i \in I}$ e $\{s_i\}_{i \in I}$ tais que

$$\sum_{i \in I} v_i = \sum_{i \in I} s_i = s.$$

Neste caso, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= s - s = \sum_{i \in I} s_i - \sum_{i \in I} v_i \\ &= \sum_{i \in I} s_i - v_i. \end{aligned}$$

Assim escrevemos o vetor nulo como uma soma não nula de vetores, cada um pertencendo a um subespaço S_i . Isso implica que a afirmação (ii) é falsa.

(f) (iii) \implies (ii): Seja $0 \neq v \in V$, seja $\{v_i\}_{i \in I}$ a única família tal que $v_i \in S_i$ para cada $i \in I$ e $\sum_{i \in I} v_i = v$. Assuma que existe uma família $\{s_i\}_{i \in I}$ não nula de vetores onde $s_i \in S_i$ para cada $i \in I$ e $\sum_{i \in I} s_i = 0$. Então temos que

$$v = v + 0 = \sum_{i \in I} v_i + s_i = \sum_{i \in I} v_i - s_i = v - 0 = v,$$

o que nos dá uma contradição.

1.8 Exercício 8

(8) Seja V um K -espaço vetorial e seja S um subconjunto linearmente independente de V . Mostre que, se $v \in V$ não for combinação linear dos elementos de S , então $S \cup \{v\}$ é linearmente independente.

Solução: Assuma que v é combinação linear dos elementos de S . Neste caso existe $S' \subseteq S$ finito e uma função $\alpha: S' \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\sum_{s \in S'} \alpha_s s = v$. Defina $\bar{\alpha}: S' \cup \{v\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\bar{\alpha}_s = \alpha_s$ para cada $s \in S'$ e $\bar{\alpha}_v = -1$. Então segue que $\sum_{s \in S' \cup \{v\}} \bar{\alpha}_s s = 0$. Isto é, $S \cup \{v\}$ é linearmente dependente.

1.9 Exercício 9

(9) Seja V um K -espaço vetorial de dimensão finita e sejam U e W subespaços de V tais que $V = U + W$. Mostre que $V = U \oplus W$, se e somente se, $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$.

Solução: Utilizando o fato de que

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(U) - \dim(U \cap W)$$

e o Exercício 7, vemos que as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $V = U \oplus W$;
2. $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$;
3. $V = U + W$ e $\dim(U \cap W) = 0$;

1.10 Exercício 10

(10) Seja V um K -espaço vetorial e seja W um subespaço de V . Mostre que W possui complemento em V , isto é, que existe um subespaço U de V tal que $V = U \oplus W$.

Solução: Seja B_1 uma base de W . Como B_1 é L.I temos pelo Teorema 1 das notas de aula que existe uma base B de V tal que $B_1 \subseteq B$. Considere o conjunto $B_2 := B \setminus B_1$ e o subespaço $U := \langle B_2 \rangle$. Pelo exercício 3 temos que U é um subespaço e ainda temos do exercício 5 que $V = W + U$. Resta mostrar que $U \cap W = \{0\}$. Assuma que existe $0 \neq v \in U \cap W$. Neste caso temos que existem conjuntos finitos $B'_1 \subseteq B_1$ e B'_2 e funções $\alpha: B'_1 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta: B'_2 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$v = \sum_{b \in B'_1} \alpha_b b = \sum_{b \in B'_2} \beta_b b.$$

Seja $i_0 \in B'_1$ tal que $\alpha_{i_0} \neq 0$, então

$$b_{i_0} = \frac{1}{\alpha_{i_0}} \left(\sum_{b \in B'_2} \beta_b w - \sum_{i \in B'_1 \setminus \{i_0\}} \right),$$

que, pelo exercício 8 implica que $B_1 \cup B_2$ não é L.I. Contradição.

1.11 Exercício 11

(11) Seja $V \neq \{0\}$ um espaço vetorial sobre um corpo infinito K . Mostre que V não é uma união de um número finito de subespaços próprios. E se K for finito?

Sugestão: Suponha que $V = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n$ e que $W_1 \not\subseteq W_2 \cup \dots \cup W_n$. Sejam $w \in W_1 \setminus (W_2 \cup \dots \cup W_n)$ e $v \notin W_1$. Seja $A = \{aw + v : a \in K\}$ e mostre que cada W_i contém no máximo um elemento de A .

1.12 Exercício 12

(12) (Lei modular) Seja V um espaço vetorial. Sejam S, U, T subespaços de V . Mostre que se $U \subseteq S$, então:

$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + (S \cap U).$$

Solução: Primeiro, note que como $U \subseteq S$ temos que $S \cap U = U$ e portanto é suficiente mostrar que

$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + U.$$

Como $U \subseteq U + T$ e $U \subseteq S$ temos que

$$U \subseteq (U + T) \cap S. \quad (1)$$

Além disso, como $T \subseteq U + T$ temos que

$$T \cap S \subseteq (U + T) \cap S. \quad (2)$$

Assim, juntando as Equações 1 e 2 obtemos que $U + (T \cap S) \subseteq (U + T) \cap S$. Por outro lado, considere $y \in (U + T) \cap S$. Isto é, $y = u + t = s$ para alguns $u \in U$, $t \in T$, e $s \in S$. Como $U \subseteq S$ e S é subespaço, obtemos que $t = s - u \in S$ e concluímos que $t \in T \cap S$. Dessa forma segue que $y = u + t \in U + (T \cap S)$.

1.13 Exercício 13

(13) Para quais espaços vetoriais V a lei distributiva

$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + (S \cap U)$$

é verdadeira para todos os subespaços S, T, U de V ?

Solução: Vamos iniciar notando que se $\dim(V) \leq 1$ o resultado vale trivialmente. Se $\dim(V) \geq 2$, tomamos dois vetores v_t e v_u linearmente independentes e consideramos $T := \langle v_t \rangle$, $U := \langle v_u \rangle$ e $S := \langle v_u + v_t \rangle$. Dessa forma temos $S \subseteq U + T$ e portanto $S \cap (U + T) = S$, mas por outro lado $(S \cap T) = (S \cap U) = 0$.

1.14 Exercício 14

(14) Sejam U e V K -espaços vetoriais e seja $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear.

- (a) Prove que T é injetora se, e somente se, T leva todo subconjunto linearmente independente de U em um conjunto linearmente independente de V .
- (b) Prove que se o subconjunto $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ de V for linearmente independente, então $\{u_1, \dots, u_n\}$ é um subconjunto linearmente independente de U .

Solução:

1.15 Exercício 15

(15) Sejam U e V K -espaços vetoriais de dimensão finita tais que $\dim U = \dim V$ e seja $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) T é um isomorfismo;
- (ii) T é sobrejetora;
- (iii) T é injetora.

Solução:

1.16 Exercício 16

(16) Sejam U e V K -espaços e seja $T: U \rightarrow V$ um isomorfismo. Mostre que $T^{-1}: V \rightarrow U$ também é linear e, portanto, é um isomorfismo.

Solução:

1.17 Exercício 17

(17) Seja V um K -espaço vetorial e seja T um operador linear de V tal que $T^2 = T$ (um operador com essa propriedade é chamado de *projeção*). Mostre que

$$V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$$

Solução:

1.18 Exercício 18

(18) Seja V um K -espaço vetorial de dimensão finita e seja T um operador linear de V . Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $\text{Ker}^2 T = \text{Ker } T$;
- (ii) $\text{Im}^2 T = \text{Im } T$;
- (iii) $V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$.

Solução:

1.19 Exercício 19

(19) Seja V um K -espaço vetorial de dimensão finita e seja $T: V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $\text{posto} T^2 = \text{posto} T$. Prove que $\text{Ker } T \cap \text{Im } T = \{0\}$.

Solução:

1.20 Exercício 20

(20) Seja V um K -espaço vetorial e sejam $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Mostre que

$$T(\text{Ker}(S \circ T)) = \text{Ker } S \cap \text{Im } T$$

Solução:

1.21 Exercício 21

(21) Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre o corpo K e sejam S e T duas transformações lineares de V em W , ambas de posto finito. Mostre que $S + T$ tem posto finito e que

$$|\text{posto } S - \text{posto } T| \leq \text{posto } (T + S) \leq \text{posto } S + \text{posto } T$$

Solução:

2 Lista 1

2.1 Exercício 1

(1) Sejam V um K -espaço vetorial e W um subespaço de V . Seja $S = \{v_i\}_{i \in I} \subset V$ tal que $\bar{S} = \{v_i + W\}_{i \in I}$ é linearmente independente no espaço quociente V/W . Mostre que se A é um conjunto linearmente independente de W então $S \cup A$ é um conjunto linearmente independente de V .

Solução: Se $\bar{S} = \{\bar{v}_i = v_i + W\}_{i \in I}$ é LI em V/W , isso significa que, para todo $M \subseteq I$ finito, temos que, para $\alpha_m \in K$, com $m \in M$, ocorre

$$\sum_{m \in M} \alpha_m \bar{v}_m = 0 \Rightarrow \alpha_m = 0 \quad \forall m \in M$$

Seja $A = \{w_j\}_{j \in J}$. Por hipótese, sabemos também que A é um conjunto linearmente independente, ou seja, para todo $N \subseteq J$ finito, temos que, para $\alpha_n \in K$, com $n \in N$, ocorre

$$\sum_{n \in N} \alpha_n w_n = 0 \Rightarrow \alpha_n = 0, \quad \forall n \in N$$

Para mostrar que $S \cup A = \{v_i\}_{i \in I} \cup \{w_j\}_{j \in J} = \{u_p\}_{p \in I \cup J}$ é um conjunto linearmente independente de V , precisamos mostrar que, para todo $L \subset I \cup J$ finito, temos que, para $\alpha_\ell \in K$, com $\ell \in L$, ocorre

$$\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell u_\ell = 0 \Rightarrow \alpha_\ell = 0, \quad \forall \ell \in L$$

Para fazer isso, precisamos antes verificar se existem vetores que são comuns aos dois subconjuntos, ou seja, calcular $S \cap A$. Observe que

$$s \in S \Rightarrow \bar{s} \in \bar{S}$$

Como \bar{S} é um conjunto linearmente independente em W , temos que $\bar{s} \neq \bar{0}$. Portanto, segue que $s - 0 \notin W \Rightarrow s \notin W$. Mas como $A \subseteq W$, então isso quer dizer que $s \notin A$. Portanto, concluímos que $S \cap A = \emptyset$. Isso quer dizer que todos os v_i 's são diferentes dos w_j 's, e mais ainda, que $I \cup J$ é uma união disjunta.

Logo, considerando novamente $S \cup A = \{v_i\}_{i \in I} \cup \{w_j\}_{j \in J}$, para todo $L \subseteq I \cup J$ finito, existem $I' \subseteq I$ e $J' \subseteq J$ tais que $I' \cup J' = L$. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \in L} \alpha_\ell u_\ell = 0 &\Rightarrow \\ \sum_{i \in I'} \alpha_i v_i + \sum_{j \in J'} \alpha_j w_j = 0 &\text{ em } V \Rightarrow \\ \overline{\sum_{i \in I'} \alpha_i v_i + \sum_{j \in J'} \alpha_j w_j} = \bar{0} &\text{ em } V/W \Rightarrow \\ \sum_{i \in I'} \alpha_i \bar{v}_i + \underbrace{\sum_{j \in J'} \alpha_j \bar{w}_j}_{=0, \text{ pois } w_j \in W} = \bar{0} &\Rightarrow \sum_{i \in I'} \alpha_i \bar{v}_i = \bar{0} \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i \in I', \end{aligned}$$

pois $\{v_i\}_{i \in I'} \subseteq \bar{S}$ é um conjunto linearmente independente.

Assim, usando agora o fato de que $\{w_j\}_{j \in J'} \subseteq A$ é um conjunto linearmente independente em W , temos que

$$\sum_{i \in I'} \alpha_i v_i + \sum_{j \in J'} \alpha_j w_j = 0 \Rightarrow \textcolor{red}{0} + \sum_{j \in J'} \alpha_j w_j = 0 \Rightarrow \sum_{j \in J'} \alpha_j w_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j \in J'$$

Concluimos portanto que

$$\sum_{\ell \in L} \alpha_{\ell} u_{\ell} = 0 \Rightarrow \alpha_{\ell} = 0 \quad \forall \ell \in L$$

Daí, $S \cup A$ é um conjunto linearmente independente em V .

2.2 Exercício 2

(2) Sejam V um K -espaço vetorial e W um subespaço de V . Seja $S = \{v_i\}_{i \in I} \subset V$ tal que $S = \{v_i + W\}_{i \in I}$ gera o espaço quociente V/W . Mostre que se A é um conjunto gerador de W então $S \cup A$ é um conjunto gerador de V .

Solução: Se $\bar{S} = \{\bar{v}_i = v_i + W\}_{i \in I}$ gera em V/W , isso significa que, para todo $\bar{v} \in V/W$, existem $M \subseteq I$ finito e $\alpha_m \in K$, com $m \in M$, tais que

$$\bar{v} = \sum_{m \in M} \alpha_m \bar{v}_m$$

Seja $A = \{w_j\}_{j \in J}$. Por hipótese, sabemos também que A gera W , ou seja, para todo $w \in W$, existem $N \subseteq J$ finito e $\alpha_n \in K$, com $n \in N$, tais que

$$w = \sum_{n \in N} \alpha_n w_n$$

Precisamos mostrar que $S \cup A = \{v_i\}_{i \in I} \cup \{w_j\}_{j \in J} = \{u_p\}_{p \in I \cup J}$ é um conjunto gerador para V , ou seja, que para todo $v \in V$, existem $L \subset I \cup J$ finito e $\alpha_{\ell} \in K$, com $\ell \in L$, tais que

$$v = \sum_{\ell \in L} \alpha_{\ell} u_{\ell}$$

Note que, como \bar{S} é um conjunto gerador de V/W , temos como já foi explicitado acima que, para $\bar{v} \in V/W$,

$$\bar{v} = \sum_{m \in M} \alpha_m \bar{v}_m \Rightarrow \bar{v} - \sum_{m \in M} \alpha_m \bar{v}_m = \bar{0} \Rightarrow v - \sum_{m \in M} \alpha_m v_m \in W$$

Como $A = \{w_j\}_{j \in J}$ é conjunto gerador para W , temos que existem $N \subseteq J$ finito e $\alpha_n \in K$, com $n \in N$, tais que

$$v - \sum_{m \in M} \alpha_m v_m = \sum_{n \in N} \alpha_n w_n$$

Assim, tomando $L = N \cup M$:

$$v = \sum_{m \in M} \alpha_m v_m + \sum_{n \in N} \alpha_n w_n \Rightarrow v = \sum_{\ell \in L} \alpha_{\ell} u_{\ell}$$

Portanto, $S \cup A$ é um conjunto gerador para V .

2.3 Exercício 3

(3) Seja V um K -espaço vetorial e sejam U e W subespaços de V . Prove:

(a) O Segundo Teorema do Isomorfismo:

$$\frac{U + W}{W} \cong \frac{U}{U \cap W}.$$

(b) O Terceiro Teorema do Isomorfismo: Se $U \subset W$,

$$\frac{V}{W} \cong \frac{V/U}{W/U}$$

Solução:

(a) A intenção será encontrar uma transformação linear adequada para poder aplicar o Primeiro Teorema do Isomorfismo e concluir o resultado desejado. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} T &: U \longrightarrow \frac{U+W}{W} \\ u &\longmapsto T(u) = \bar{u} = u + W \end{aligned}$$

Observe que T é uma transformação linear. De fato, segue trivialmente que:

♣ $\forall u, v \in U$, temos que

$$T(u+v) = \overline{u+v} = (u+v) + W = \textcolor{teal}{u} + \textcolor{teal}{W} + \textcolor{teal}{v} + \textcolor{teal}{W} = \bar{u} + \bar{v} = T(u) + T(v)$$

♥ $\forall u \in U, \forall \alpha \in K$, temos que

$$T(\alpha u) = \overline{\alpha u} = \alpha u + W = \alpha(\textcolor{teal}{u} + \textcolor{teal}{W}) = \alpha(\bar{u}) = \alpha T(u)$$

Sendo T uma transformação linear, temos do Primeiro Teorema do Isomorfismo que

$$\frac{U}{\text{Ker } T} \cong \text{Im } T$$

Calculemos $\text{Ker } T$ e $\text{Im } T$:

♠ $\text{Im } T = \frac{U+W}{W}$. Mostremos que T é sobrejetora:

Para $a \in \frac{U+W}{W}$, dado por $a = \bar{u+w}$, onde $u \in U$ e $w \in W$, temos que

$$\begin{aligned} a = \overline{u+w} &= (u+w) + W = (u+W) + (\textcolor{violet}{w} + \textcolor{violet}{W}) = (u+W) + (\textcolor{violet}{0} + \textcolor{violet}{W}) = \\ &= (u+0) + W = u + W = \bar{u} = T(u) \end{aligned}$$

Logo, para todo $a \in \frac{U+W}{W}$, existe um $u \in U$ tal que $T(u) = a$. Logo, T é sobrejetora, e portanto $\text{Im } T = \frac{U+W}{W}$.

♦ $\text{Ker } T = U \cap W$. Claramente, sabemos que, como $\text{Ker } T = \{u \in U : T(u) = \bar{0}\}$, temos que $\text{Ker } T \subset U$. Mas também temos que, para $a \in \text{Ker } T$, segue que $a \in U$, e

$$T(a) = \bar{0} = 0 + W \Rightarrow a - 0 \in W \Rightarrow a \in W$$

Portanto, segue que $a \in U \cap W$. Daí, $\text{Ker } T = U \cap W$.

Finalmente, obtemos do Primeiro Teorema do Isomorfismo que

$$\frac{U}{\text{Ker } T} \cong \text{Im } T \Rightarrow \frac{U}{U \cap W} \cong \frac{U+W}{W}.$$

(b) Utilizando a mesma estratégia do item (a), considere a aplicação

$$\begin{aligned} T &: \frac{V}{U} \longrightarrow \frac{V}{W} \\ v + U &\longmapsto T(v + U) = v + W \end{aligned}$$

Vejam que T está bem-definida, ou seja, representantes de uma mesma classe de equivalência no domínio correspondem a representantes de uma mesma classe de equivalência na imagem. Temos, para $\overline{v_1} = v_1 + U, \overline{v_2} = v_2 + U \in \frac{V}{U}$, que

$$\overline{v_1} = \overline{v_2} \Rightarrow v_1 - v_2 \in U \subset W \Rightarrow v_1 - v_2 \in W \Rightarrow v_1 + W = v_2 + W.$$

Note que utilizamos fortemente o fato de que $U \subset W$ para mostrar que T está bem-definida. Além disso, T é uma transformação linear. De fato:

♣ $\forall v_1 + U, v_2 + U \in \frac{V}{U}$, temos que

$$\begin{aligned} T((v_1 + U) + (v_2 + U)) &= T((v_1 + v_2) + U) = (v_1 + v_2) + W = \\ &= (v_1 + W) + (v_2 + W) = T(v_1 + U) + T(v_2 + U) \end{aligned}$$

♥ $\forall v + U \in \frac{V}{U}, \forall \alpha \in K$, temos que

$$T(\alpha v + U) = \alpha v + W = \alpha(v + W) = \alpha T(v + U)$$

Sendo T uma transformação linear, temos do Primeiro Teorema do Isomorfismo que

$$\frac{U}{\text{Ker } T} \cong \text{Im } T$$

Calculemos $\text{Ker } T$ e $\text{Im } T$:

♠ $\text{Im } T = \frac{V}{W}$. Claramente T é sobrejetora:

Para $v + W \in \frac{V}{W}$, temos que

$$v + W = T(v + U)$$

Logo, para todo $v + W \in \frac{V}{W}$, existe um $v + U \in \frac{V}{U}$ tal que $T(v + U) = v + W$. Logo, T é sobrejetora, e portanto $\text{Im } T = \frac{V}{W}$.

♦ $\text{Ker } T = \frac{W}{U}$. Observe que

$$v + U \in \text{Ker } T \Leftrightarrow T(v + U) = v + W = 0 + W \Leftrightarrow v \in W \Leftrightarrow v + U \in \frac{W}{U}.$$

Logo, $\text{Ker } T = \frac{W}{U}$.

Finalmente, obtemos do Primeiro Teorema do Isomorfismo que

$$\frac{V/U}{\text{Ker } T} \cong \text{Im } T \Rightarrow \frac{V/U}{W/U} \cong \frac{V}{W}.$$

2.4 Exercício 4

(4) Seja V um K -espaço vetorial e sejam U e W subespaços de V tais que $\dim(V/U) = m$ e $\dim(V/W) = n$. Prove que $\dim(V/(U \cap W)) \leq m + n$.

Solução: Das informações fornecidas no enunciado, sabemos que:

$$\dim(V/U) = m \Rightarrow \dim(V) - \dim(U) = m$$

$$\dim(V/W) = n \Rightarrow \dim(V) - \dim(W) = n$$

Somando essas duas equações obtemos:

$$2 \dim(V) - (m + n) = \dim(U) + \dim(W).$$

Sabemos também que, se U e W são subespaços de V , então

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$$

Estamos interessados em encontrar $\dim(V/(U \cap W)) = \dim(V) - \dim(U \cap W)$. Observe que, como U e W são subespaços de V , então $\dim(V) \geq \dim(U + W)$. Desse modo,

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W) \leq \dim(U \cap W) + \dim(V)$$

Então:

$$\dim(U) + \dim(W) \leq \dim(U \cap W) + \dim(V) \Rightarrow 2 \dim(V) - (m + n) \leq \dim(U \cap W) + \dim(V) \Rightarrow$$

$$-(m + n) \leq \dim(U \cap W) - \dim(V) \Rightarrow \dim(V) - \dim(U \cap W) \leq m + n$$

Portanto, concluímos que

$$\dim(V/(U \cap W)) = \dim(V) - \dim(U \cap W) \leq m + n \Rightarrow \boxed{\dim(V/(U \cap W)) \leq m + n}$$

2.5 Exercício 5

(5) Mostre que

(a) $W \oplus U = W' \oplus U'$ e $W \cong W' \not\rightarrow U \cong U'$.

(b) $V \cong V', V = W \oplus U$ e $V' = W \oplus U' \not\rightarrow U \cong U'$.

Solução:

(a) Considere K um corpo, e seja

$$V = \bigoplus_{i=1}^{\infty} K e_i$$

Considere

$$W = \bigoplus_{i=1}^{\infty} K e_{2i}$$

Observe que $W \subseteq V$, e além disso, $W \cong V$. Temos também que

$$V = W \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} K e_{2i+1} \right)$$

Portanto, tomando

$$W = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i}, \quad U = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i+1}, \quad W' = V, \text{ e } U' = \{0\},$$

temos que

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i+1} \right) \cong V \cong V \oplus \{0\} \Rightarrow W \oplus U = W' \oplus U'$$

e

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i} \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_i \Rightarrow W \cong W',$$

mas

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i+1} \not\cong \{0\} \Rightarrow U \not\cong U'$$

(b) Considere $K^{\mathbb{N}} = \{(a_0, a_1, a_2, \dots) | a_i \in K\}$, e sejam:

$$V_i = \{(0, a_1, 0, a_3, \dots) | a_{2i+1} \in K\} \quad \text{e} \quad V_p = \{(a_0, 0, a_2, 0, \dots) | a_{2i} \in K\}.$$

Tome $V = K^{\mathbb{N}}$, $V' = V_i$, $U = V_p$ e $U' = \{0\}$. Temos então que $V \cong V'$, pois $K^{\mathbb{N}} \cong V_i$, e também

$$V = V_i \oplus V_p = W \oplus U \quad \text{e} \quad V' = V_i \oplus \{0\} = W \oplus U',$$

mas

$$V_p \not\cong \{0\} \Rightarrow U \not\cong U'.$$

Portanto, temos que

$$\left. \begin{array}{l} V \cong V' \\ V = W \oplus U \\ V' = W \oplus U' \end{array} \right\} \not\Rightarrow U \cong U'$$

Observação: Cabe salientar que ambos os itens dessa questão são válidos quando V é um espaço vetorial de dimensão finita.

2.6 Exercício 6

(6) Seja V um espaço vetorial e seja W um subespaço de V . Suponha que $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ e $S = S_1 \oplus \dots \oplus S_n$, com $S_i \subseteq V_i$ subespaços de V para todo $i = 1, \dots, n$. Mostre que

$$\frac{V}{S} \cong \frac{V_1}{S_1} \oplus \dots \oplus \frac{V_n}{S_n}.$$

Solução: Sabemos que, se V é soma direta de $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$, então todo $v \in V$ pode ser escrito como soma de elementos de V_i **de maneira única**. Podemos escrever então

$$v = \sum_{i=1}^n v_i$$

O mesmo se aplica a S . Dito isso, considere a aplicação

$$\begin{aligned} T : V = \bigoplus_{i=1}^n V_i = V_1 \oplus \dots \oplus V_n &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n \frac{V_i}{S_i} = \frac{V_1}{S_1} \oplus \dots \oplus \frac{V_n}{S_n} \\ v = \sum_{i=1}^n v_i &\longmapsto T(v) = \sum_{i=1}^n (v_i + S_i) \end{aligned}$$

Verifiquemos que T é uma transformação linear:

- Para todo $u, v \in V$, podemos escrever de maneira única $u = \sum_{i=1}^n u_i$ e $v = \sum_{i=1}^n v_i$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} T(u) + T(v) &= T\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) + T\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) = \sum_{i=1}^n (u_i + S_i) + \sum_{i=1}^n (v_i + S_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n ((u_i + S_i) + (v_i + S_i)) = T(u + v) \Rightarrow T(u) + T(v) = T(u + v). \end{aligned}$$

- Para todo $v \in V$, podemos escrever de maneira única $v = \sum_{i=1}^n v_i$; assim, para $\alpha \in K$:

$$\begin{aligned} T(\alpha v) &= T\left(\alpha \sum_{i=1}^n v_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha v_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha v_i\right) = \sum_{i=1}^n (\alpha v_i + S_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha (v_i + S_i) = \alpha \sum_{i=1}^n (v_i + S_i) = \alpha T(v) \Rightarrow T(\alpha v) = \alpha T(v) \end{aligned}$$

Logo, T é uma transformação linear. Vamos utilizar o Primeiro Teorema do Isomorfismo em T . Para isso, calculemos o núcleo e a imagem de T :

- $\text{Im}(T)$: Dado $u \in \bigoplus_{i=1}^n \frac{V_i}{S_i}$, temos que esse elemento pode ser escrito de maneira única como

$$u = \sum_{i=1}^n (u_i + S_i),$$

onde $u_i \in V_i$. Então temos que

$$u = \sum_{i=1}^n (u_i + S_i) = T\left(\sum_{i=1}^n u_i\right).$$

Logo, T é sobrejetora, e

$$\text{Im}(T) = \bigoplus_{i=1}^n \frac{V_i}{S_i} = \frac{V_1}{S_1} \oplus \dots \oplus \frac{V_n}{S_n}$$

- $\text{Ker}(T)$: Considere $v \in \text{Ker}(T)$. Então, tomando $v = \sum_{i=1}^n v_i$, temos que

$$\begin{aligned} v \in \text{Ker}(T) &\Rightarrow T(v) = 0 \Rightarrow T\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (v_i + S_i) = 0 \Rightarrow \\ &v_i + S_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow v_i \in S_i, \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow v \in S \end{aligned}$$

Assim, $\text{Ker}(T) \subseteq S$. Agora, tome $s \in S$. Então, como $S = \bigoplus_{i=1}^n S_i$, então podemos escrever s de maneira única como

$$s = \sum_{i=1}^n s_i,$$

onde $s_i \in S_i$, para $i = 1, \dots, n$. Desse modo,

$$T(s) = T\left(\sum_{i=1}^n s_i\right) = \sum_{i=1}^n (s_i + S_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^n (0 + S_i)}_{\text{pois } s_i \in S_i \ \forall i} = 0.$$

Assim, $S \subseteq \text{Ker}(T)$. Concluimos que $\text{Ker}(T) = S$.

Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos que

$$\frac{V}{\text{Ker}(T)} \cong \text{Im}(T) \Rightarrow \frac{V}{S} \cong \bigoplus_{i=1}^n \frac{V_i}{S_i}$$

Então:

$$\frac{V}{S} \cong \frac{V_1}{S_1} \oplus \dots \oplus \frac{V_n}{S_n},$$

como queríamos.

2.7 Exercício 7

(7) Seja V um K -espaço vetorial e seja W um subespaço de V . Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ e defina $\bar{T}: V/W \rightarrow V/W$ por

$$\bar{T}(v + W) = T(v) + W, \text{ para todo } v + W \in V/W.$$

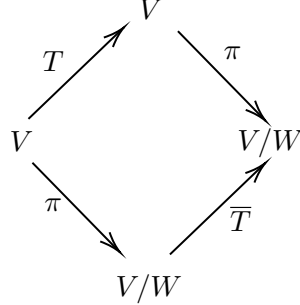
- (a) Determine uma condição necessária e suficiente sobre W para que \bar{T} esteja bem definida.
- (b) Se \bar{T} estiver bem definida, mostre que ela é linear e determine seu núcleo e sua imagem.

Solução:

(a) Seja

$$\begin{aligned} \pi &: V \longrightarrow V/W \\ v &\longmapsto \pi(v) = v + W \end{aligned}$$

A projeção canônica de V em V/W . Então, podemos considerar o seguinte diagrama:



Note que $\pi \circ T = \bar{T} \circ \pi$. Daí, \bar{T} estará bem-definida se $\text{Ker}(\pi) \subseteq \text{Ker}(\pi \circ T)$. Claramente, temos que $\text{Ker}(\pi) = W$. Vamos calcular $\text{Ker}(\pi \circ T)$. Temos que

$$v \in \text{Ker}(\pi \circ T) \Leftrightarrow \pi(T(v)) = \bar{0} \Leftrightarrow T(v) \in W \Leftrightarrow v \in T^{-1}$$

Logo, temos que

$$\text{Ker}(\pi) \subseteq \text{Ker}(\pi \circ T) \Rightarrow W \subseteq T^{-1}(W) \Rightarrow T[W] \subseteq W.$$

Portanto, uma condição necessária e suficiente para \bar{T} estar bem definida é que para todo $v \in W$, tenhamos $T(v) \in W$, ou seja, $T(W) \subseteq W$.

Em outras palavras, \bar{T} está bem definida se W for um subespaço T -invariante de V .

(b) Verifiquemos que \bar{T} é uma transformação linear. Temos:

♦ Para todos $u + W, v + W \in V/W$, lembrando que T é linear, temos que

$$\begin{aligned} \bar{T}((u + W) + (v + W)) &= \bar{T}((u + v) + W) = T(u + v) + W = T(u) + T(v) + W = \\ &= (T(u) + W) + (T(v) + W) = \bar{T}(u + W) + \bar{T}(v + W) \end{aligned}$$

Logo, $\bar{T}(\bar{u} + \bar{v}) = \bar{T}(\bar{u}) + \bar{T}(\bar{v})$.

♣ Para todo $v + W \in V/W$, e para todo $\alpha \in K$, temos que

$$\begin{aligned}\overline{T}(\alpha(v + W)) &= \overline{T}((\alpha v) + W) = T(\alpha v) + W = \alpha T(v) + W = \\ &= \alpha(T(v) + W) = \alpha \overline{T}(v + W)\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{T}(\alpha \bar{v}) = \alpha \overline{T}(\bar{v})$.

Vamos encontrar o núcleo e a imagem de \overline{T} .

♥ Sendo $\bar{v} = v + W \in V/W$, observe que

$$\overline{T}(\bar{v}) = 0 \Rightarrow \overline{T(v)} = 0 \Rightarrow T(v) \in W \Rightarrow v \in T^{-1}(W).$$

Portanto, temos que

$$\text{Ker}(\overline{T}) = \{\bar{v} | v \in T^{-1}(W)\}.$$

♠ Vamos verificar que \overline{T} é sobrejetora. Sabemos que π é sobrejetora. Então, temos que

$$\begin{aligned}\text{Im}(\overline{T}) &= \text{Im}(\overline{T} \circ \pi) \\ &= \text{Im}(\pi \circ T) \\ &= \{\pi(T(v)) : v \in V\} \\ &= \{\overline{T(v)} : v \in V\}\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\text{Im}(\overline{T}) = V/W.$$

2.8 Exercício 8

(8) Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ o operador linear definido por $T(x, y, z) = (x, x, x)$. Seja $T: \mathbb{R}^3/W \rightarrow \mathbb{R}^3/W$ tal que $\overline{T}((x, y, z) + W) = T(x, y, z) + W$, em que $W = \text{Ker } T$. Descreva \overline{T} .

Solução: Veja que \overline{T} está bem definida, pois $W = \text{Ker}(T)$ é um subespaço T -invariante de V . Vamos encontrar o núcleo e a imagem de \overline{T} .

• Do exercício anterior, temos que

$$\text{Ker}(\overline{T}) = \{\bar{v} | v \in T^{-1}(W)\}.$$

Em particular,

$$\text{Ker}(\overline{T}) = \{\bar{v} | v \in T^{-1}(\text{Ker } T)\} = \{\bar{v} | v \in T^{-1}(\text{Ker } T)\}$$

Então segue que

$$v \in T^{-1}(\text{Ker } T) \Rightarrow T(v) \in \text{Ker}(T) \Leftrightarrow T(T(v)) = 0.$$

Mas $T(T(v)) = T(v)$. De fato, para $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$T(T(v)) = T(T(x, y, z)) = T(x, x, x) = (x, x, x) = T(x, y, z) = T(v)$$

Daí, como para $v \in T^{-1}(\text{Ker } T)$, temos $T(T(v)) = 0$,

$$T(T(v)) = 0 \Rightarrow T(v) = 0$$

Além disso, se $v \in \text{Ker}(T) = W$, temos $\bar{v} = 0$.

Portanto, concluímos que $\text{Ker}(\overline{T}) = \{0\}$, ou seja, \overline{T} é injetora.

- Do exercício anterior, temos

$$\text{Im}(\overline{T}) = V/W.$$

Logo, $\text{Im}(\overline{T}) = \mathbb{R}^3 / \text{Ker } T$. Podemos também descrever $\text{Im}(\overline{T})$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Im}(\overline{T}) &= \{\overline{T(v)} : v \in V\} \\ &= \{T(v) + \text{Ker } T \mid v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x, x, x) + \text{Ker } T \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, x, x) + (0, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, x + y, x + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

2.9 Exercício 9

(9) Sejam V e U K -espaços vetoriais. Seja W um subespaço de V e $\pi: V \rightarrow V/W$ a projeção canônica. Mostre que a função $\mathcal{L}(V/W, U) \rightarrow \mathcal{L}(V, U)$, dada por $T \mapsto T \circ \pi$, é injetora.

Solução: Temos a função

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}(V/W, U) &\longrightarrow \mathcal{L}(V, U) \\ T &\longmapsto T \circ \pi \end{aligned}$$

Para mostrar que φ é injetora, precisamos verificar que, para $T \in \mathcal{L}(V/W, U)$, se $\varphi(T) = 0$, então $T \cong 0$. Note que

$$\varphi(T) = 0 \Rightarrow T \circ \pi = 0 \Rightarrow T(\pi(v)) = 0.$$

Vamos mostrar que $T(u) = 0 \forall u \in V/W$. Sabemos que π é sobrejetora. Assim, dado $u \in V/W$, existe $v \in V$ tal que $u = \pi(v)$. Logo,

$$T(u) = T(\pi(v)) = (T \circ \pi)(v) = 0.$$

Portanto, $T(u) = 0 \forall u \in V/W$. Daí, $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

Concluimos que φ é injetora.

2.10 Exercício 10

(10) Seja V um K -espaço vetorial e seja W um subespaço de V . Mostre que $(V/W)^* \cong W^0$ e que $V^*/W^0 \cong W^*$.

Solução: Mostremos que $(V/W)^* \cong W^0$. Para isso, a ideia será utilizar a aplicação canônica de V em V/W e sua transposta, e depois aplicar o Primeiro Teorema do Isomorfismo para obter o resultado desejado. Começamos considerando a aplicação canônica

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow V/W \\ v &\longmapsto T(v) = v + W \end{aligned}$$

Veja que T é sobrejetora (isto é, $\text{Im } T = V/W$), e $\text{Ker } T = W$. Consideremos a aplicação transposta

$$\begin{aligned} T^t : (V/W)^* &\longrightarrow V^* \\ f &\longmapsto T^t(f) = f \circ T \end{aligned}$$

Das propriedades da transformação transposta, sabemos que

$$\text{Ker } T^t = (\text{Im } T)^0 = (V/W)^0 = \{0\}$$

$$\text{Im } T^t = (\text{Ker } T)^0 = W^0$$

Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos que

$$\frac{(V/W)^*}{\text{Ker } T^t} \cong \text{Im } T^t \Rightarrow \frac{(V/W)^*}{\{0\}} \cong W^0 \Rightarrow \boxed{(V/W)^* \cong W^0}$$

Mostremos agora que $V^*/W^0 \cong W^*$. Utilizaremos a mesma estratégia, mas considerando agora a inclusão. Tome a inclusão de W em V , isto é:

$$\begin{aligned} \iota &: W \longrightarrow V \\ w &\longmapsto \iota(w) = w \end{aligned}$$

Note que $\text{Ker } \iota = \{0\}$ e $\text{Im } \iota = W$. Seja

$$\begin{aligned} \iota^t &: V^* \longrightarrow W^* \\ f &\longmapsto \iota(f) = f \circ \iota \end{aligned}$$

a transposta de ι . Observe que

$$\begin{aligned} \text{Ker } \iota^t &= (\text{Im } \iota)^0 = W^0 \\ \text{Im } \iota^t &= (\text{Ker } \iota)^0 = \{0\}^0 = W^* \end{aligned}$$

Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo,

$$\frac{V^*}{\text{Ker } \iota^t} \cong \text{Im } \iota^t \Rightarrow \frac{V^*}{W^0} \cong W^* \Rightarrow \boxed{V^*/W^0 \cong W^*}$$

2.11 Exercício 11

(11) Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_n(K)$. Prove que

$$\det \begin{bmatrix} 0 & C \\ A & B \end{bmatrix} = (-1)^n \det(A) \det(C).$$

Solução: Considere

$$\begin{aligned} F_1 &: \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow K \\ X &\longmapsto F_1(X) = \det \begin{bmatrix} 0 & X \\ A & B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Observe que F_1 é n -linear e alternada nas linhas de X . Logo, existe um $\lambda_1 \in K$ tal que

$$F_1(X) = \lambda_1 \det(X).$$

Em particular,

$$\lambda_1 = \lambda_1 \cdot \mathbf{1} = \lambda_1 \det(I_n) = F_1(I_n) = \det \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A & B \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A & B \end{bmatrix}}$$

Considere agora

$$\begin{aligned} F_2 &: \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow K \\ Y &\longmapsto F_2(Y) = \det \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ Y & B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Temos que F_2 é n -linear e alternada nas colunas de Y . Logo, existe um $\lambda_2 \in K$ tal que

$$F_2(Y) = \lambda_2 \det(Y).$$

Além disso,

$$\lambda_2 = \lambda_2 \cdot \mathbf{1} = \lambda_2 \det(I_n) = F_2(I_n) = \det \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & B \end{bmatrix} = (-1)^n \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = (-1)^n}$$

Logo,

$$\lambda_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A & B \end{bmatrix} = F_2(A) = \lambda_2 \det(A) = (-1)^n \det(A)$$

Consequentemente,

$$\det \begin{bmatrix} 0 & C \\ A & B \end{bmatrix} = F_1(C) = \lambda_1 \det(C) = (-1)^n \det(A) \det(C)$$

Portanto, concluímos que

$$\det \begin{bmatrix} 0 & C \\ A & B \end{bmatrix} = (-1)^n \det(A) \det(C).$$

Observação: Mas porquê $\det \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & B \end{bmatrix} = (-1)^n$? Vamos explicitar essa matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{array} \right]$$

Por definição, temos que

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn}(\sigma) m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \dots m_{2n\sigma(2n)}.$$

Mas observe que $m_{1\sigma(1)} \neq 0$ apenas quando $\sigma(1) = n+1$. Também temos que $m_{2\sigma(2)} \neq 0$ apenas quando $\sigma(2) = n+2$. Analogamente, concluímos que, para todo $k \leq n$,

$$m_{k\sigma(k)} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma(k) = n+k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases},$$

já que $m_{k\sigma(k)}$ estará na área em verde na matriz. Portanto, os somandos serão não nulos somente para as permutações que satisfazem $\sigma(k) = n+k$, para $k \leq n$. Então, temos que para $n < \ell \leq 2n$, $\sigma(\ell) = p$, onde $p \in \{1, 2, \dots, n\}$. Agora, veja que $m_{\ell\sigma(\ell)}$ se encontrará na área em vermelho na matriz, e portanto

$$m_{\ell\sigma(\ell)} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma(\ell) = \ell - n; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, a única permutação para a qual $m_{g\sigma(g)} \neq 0 \forall g \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ será a permutação

$$\rho = (1 \ n+1)(2 \ n+2) \dots (n \ 2n),$$

que é composta por uma quantidade ímpar de transposições, se n é ímpar, ou por uma quantidade par de transposições, se n é par. Logo, $\text{sgn}(\rho) = (-1)^n$. Portanto, concluímos que

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn}(\sigma) m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \dots m_{2n\sigma(2n)} = \text{sgn}(\rho) m_{1\rho(1)} m_{2\rho(2)} \dots m_{2n\rho(2n)} =$$

$$(-1)^n m_{1(n+1)} m_{2(n+2)} \dots m_{2n(n)} = (-1)^n$$

2.12 Exercício 12

(12) Calcule o determinante da matriz de Vandermonde, isto é, prove que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \dots & c_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (c_j - c_i)$$

Solução: Vamos provar o resultado por indução sobre $n \geq 2$. Para $n = 2$, é fácil ver que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} = c_2 - c_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 2} (c_j - c_i)$$

Assuma o resultado válido para $n - 1$, ou seja,

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{n-2} & c_2^{n-2} & \dots & c_n^{n-2} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (c_j - c_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (c_j - c_i)$$

Provemos para a matriz $n \times n$. Utilizando a matriz transposta, vamos aplicar operações nas colunas da matriz de modo a obter zeros na primeira linha. Para isso, vamos multiplicar cada coluna C_i por $-c_1$ e somaremos com a coluna C_{i+1} , obtendo

$$\begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \dots & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-1} \\ 1 & c_3 & c_3^2 & \dots & c_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-1} \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{i+1} = C_{i+1} - c_1 C_i} \begin{bmatrix} 1 & c_1 - c_1 1 & c_1^2 - c_1 c_1 & \dots & c_1^{n-1} - c_1 c_1^{n-2} \\ 1 & c_2 - c_1 1 & c_2^2 - c_1 c_2 & \dots & c_2^{n-1} - c_1 c_2^{n-2} \\ 1 & c_3 - c_1 1 & c_3^2 - c_1 c_3 & \dots & c_3^{n-1} - c_1 c_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_n - c_1 1 & c_n^2 - c_1 c_n & \dots & c_n^{n-1} - c_1 c_n^{n-2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & c_2 - c_1 & c_2(c_2 - c_1) & \dots & c_2^{n-2}(c_2 - c_1) \\ 1 & c_3 - c_1 & c_3(c_3 - c_1) & \dots & c_3^{n-2}(c_3 - c_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_n - c_1 & c_n(c_n - c_1) & \dots & c_n^{n-2}(c_n - c_1) \end{bmatrix}$$

Utilizando o Teorema de Laplace, temos que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & c_2 - c_1 & c_2(c_2 - c_1) & \dots & c_2^{n-2}(c_2 - c_1) \\ 1 & c_3 - c_1 & c_3(c_3 - c_1) & \dots & c_3^{n-2}(c_3 - c_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_n - c_1 & c_n(c_n - c_1) & \dots & c_n^{n-2}(c_n - c_1) \end{bmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} c_2 - c_1 & c_2(c_2 - c_1) & \dots & c_2^{n-2}(c_2 - c_1) \\ c_3 - c_1 & c_3(c_3 - c_1) & \dots & c_3^{n-2}(c_3 - c_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n - c_1 & c_n(c_n - c_1) & \dots & c_n^{n-2}(c_n - c_1) \end{bmatrix}$$

Como cada linha está multiplicada por $c_i - c_1$, por propriedades do determinante, temos que

$$\det \begin{bmatrix} c_2 - c_1 & c_2(c_2 - c_1) & \dots & c_2^{n-2}(c_2 - c_1) \\ c_3 - c_1 & c_3(c_3 - c_1) & \dots & c_3^{n-2}(c_3 - c_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n - c_1 & c_n(c_n - c_1) & \dots & c_n^{n-2}(c_n - c_1) \end{bmatrix} =$$

$$(c_2 - c_1)(c_3 - c_1) \cdot \dots \cdot (c_n - c_1) \det \begin{bmatrix} 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-2} \\ 1 & c_3 & c_3^2 & \dots & c_3^{n-2} \\ 1 & c_4 & c_4^2 & \dots & c_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-2} \end{bmatrix} =$$

$$\prod_{j=2}^n (c_j - c_1) \det \begin{bmatrix} 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-2} \\ 1 & c_3 & c_3^2 & \dots & c_3^{n-2} \\ 1 & c_4 & c_4^2 & \dots & c_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

Como a matriz resultante tem tamanho $n - 1 \times n - 1$, da hipótese de indução, vem

$$\det \begin{bmatrix} 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-2} \\ 1 & c_3 & c_3^2 & \dots & c_3^{n-2} \\ 1 & c_4 & c_4^2 & \dots & c_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-2} \end{bmatrix} = \prod_{2 \leq i < j \leq n} (c_j - c_i).$$

Daí,

$$\left(\prod_{j=2}^n (c_j - c_1) \right) \det \begin{bmatrix} 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-2} \\ 1 & c_3 & c_3^2 & \dots & c_3^{n-2} \\ 1 & c_4 & c_4^2 & \dots & c_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-2} \end{bmatrix} =$$

$$\left(\prod_{j=2}^n (c_j - c_1) \right) \left(\prod_{2 \leq i < j \leq n} (c_j - c_i) \right) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (c_j - c_i)$$

Assim, segue o resultado.

2.13 Exercício 13

(13) Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

Solução: Considere

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix},$$

e seja

$$C = \det \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz CC^t é diagonal, já que as colunas são ortogonais. Como $\det(C) = \det(C^t)$, temos que

$$\det(C^2) = \det(C)\det(C) = \det(C)\det(C^t) = \det(CC^t)$$

De fato, temos que

$$CC^t = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

Daí,

$$\det(CC^t) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$$

Portanto,

$$(\det(C))^2 = \det(CC^t) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4 \Rightarrow \det(C) = \pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

Mas observe que o coeficiente de a^4 no determinante de C deve ser 1, o que impossibilita a opção $\det(C) = -(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$, já que nesse caso o coeficiente de a^4 seria -1 . Logo, segue que

$$\det(C) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

Outra solução: (assumindo $K = \mathbb{C}$) Primeiramente, vamos mostrar que, para $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, temos que

$$\det \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = |\det(A + Bi)|^2$$

De fato:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ B + iA & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ i(A - iB) & A \end{pmatrix} = \\ \det \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ i(A - iB) - i(A - iB) & A + iB \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ 0 & A + iB \end{pmatrix} = |\det(A + Bi)|^2 \end{aligned}$$

Portanto, escrevendo

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix},$$

segue que

$$\det \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = |\det(A + Bi)|^2.$$

Como

$$A + Bi = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix} i = \begin{bmatrix} a + ci & -b + di \\ b + di & a - ci \end{bmatrix},$$

temos que

$$\begin{aligned} |\det(A + Bi)|^2 &= \left| \det \begin{bmatrix} a + ci & -b + di \\ b + di & a - ci \end{bmatrix} \right|^2 = |(a + ci)(a - ci) - (di - b)(di + b)|^2 = \\ &= |a^2 + c^2 - (-b^2 - d^2)|^2 = |a^2 + c^2 + b^2 + d^2|^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \end{aligned}$$

2.14 Exercício 14

(14) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Mostre que se A é inversível então existem no máximo n escalares c tais que $cA + B$ não é inversível.

Solução: Se $cA + B$ é inversível, isso quer dizer que

$$(cA + B)A^{-1} = cI + BA^{-1}$$

é inversível.¹

Considere portanto a função

$$\begin{aligned} p &: K \longrightarrow K \\ c &\longmapsto p(c) = \det(cI + BA^{-1}) \end{aligned}$$

Veja que essa função na verdade é um polinômio de grau n na variável c . De fato, chamando

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

temos que

$$\begin{aligned} cI + BA^{-1} &= \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n b_{1k}a_{k1} & \sum_{k=1}^n b_{1k}a_{k2} & \sum_{k=1}^n b_{1k}a_{k3} & \dots & \sum_{k=1}^n b_{1k}a_{kn} \\ \sum_{k=1}^n b_{2k}a_{k1} & \sum_{k=1}^n b_{2k}a_{k2} & \sum_{k=1}^n b_{2k}a_{k3} & \dots & \sum_{k=1}^n b_{2k}a_{kn} \\ \sum_{k=1}^n b_{3k}a_{k1} & \sum_{k=1}^n b_{3k}a_{k2} & \sum_{k=1}^n b_{3k}a_{k3} & \dots & \sum_{k=1}^n b_{3k}a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n b_{nk}a_{k1} & \sum_{k=1}^n b_{nk}a_{k2} & \sum_{k=1}^n b_{nk}a_{k3} & \dots & \sum_{k=1}^n b_{nk}a_{kn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c + \sum_{k=1}^n b_{1k}a_{k1} & \sum_{k=1}^n b_{1k}a_{k2} & \sum_{k=1}^n b_{1k}a_{k3} & \dots & \sum_{k=1}^n b_{1k}a_{kn} \\ \sum_{k=1}^n b_{2k}a_{k1} & c + \sum_{k=1}^n b_{2k}a_{k2} & \sum_{k=1}^n b_{2k}a_{k3} & \dots & \sum_{k=1}^n b_{2k}a_{kn} \\ \sum_{k=1}^n b_{3k}a_{k1} & \sum_{k=1}^n b_{3k}a_{k2} & c + \sum_{k=1}^n b_{3k}a_{k3} & \dots & \sum_{k=1}^n b_{3k}a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n b_{nk}a_{k1} & \sum_{k=1}^n b_{nk}a_{k2} & \sum_{k=1}^n b_{nk}a_{k3} & \dots & c + \sum_{k=1}^n b_{nk}a_{kn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

¹De fato, $cA + B$ é inversível se e somente se $cI + BA^{-1}$ é inversível.

Assim, temos que

$$\det(cI + BA^{-1}) = \det \begin{pmatrix} c + \sum_{k=1}^n b_{1k}a_{k1} & \sum_{k=1}^n b_{1k}a_{k2} & \sum_{k=1}^n b_{1k}a_{k3} & \dots & \sum_{k=1}^n b_{1k}a_{kn} \\ \sum_{k=1}^n b_{2k}a_{k1} & c + \sum_{k=1}^n b_{2k}a_{k2} & \sum_{k=1}^n b_{2k}a_{k3} & \dots & \sum_{k=1}^n b_{2k}a_{kn} \\ \sum_{k=1}^n b_{3k}a_{k1} & \sum_{k=1}^n b_{3k}a_{k2} & c + \sum_{k=1}^n b_{3k}a_{k3} & \dots & \sum_{k=1}^n b_{3k}a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n b_{nk}a_{k1} & \sum_{k=1}^n b_{nk}a_{k2} & \sum_{k=1}^n b_{nk}a_{k3} & \dots & c + \sum_{k=1}^n b_{nk}a_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \dots \alpha_{n\sigma(n)} = \alpha_{11} \alpha_{22} \dots \alpha_{nn} + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq 1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \dots \alpha_{n\sigma(n)} =$$

$$\left(c + \sum_{k=1}^n b_{1k}a_{k1} \right) \left(c + \sum_{k=1}^n b_{2k}a_{k2} \right) \dots \left(c + \sum_{k=1}^n b_{nk}a_{kn} \right) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq 1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \dots \alpha_{n\sigma(n)} =$$

$$c^n + \left(\sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{mk}a_{km} \right) \right) c^{n-1} + \dots + \left(\prod_{m=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{mk}a_{km} \right) \right) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq 1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{r=1}^n \alpha_{r\sigma(r)}$$

Logo, p é um polinômio de grau n com coeficientes no corpo K .

Observe que $cA + B$ não será inversível quando $\det(cI + BA^{-1}) = 0$, ou seja, quando c for uma raiz de p . Como o grau de p é n , segue que este possui no máximo n raízes em K , e daí temos que existem no máximo n escalares tais que $cA + B$ não é inversível.

2.15 Exercício 15

(15) Sejam $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(K)$ com D inversível.

(a) Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BD^{-1}CD)$$

(b) Se $CD = DC$, mostre que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC).$$

O que acontece quando D não é inversível?

(c) Se $DB = BD$, calcule $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.

Solução: Pelo Teorema de Binet, sabemos que o determinante de um produto de duas matrizes quadradas é o produto de seus determinantes, ou seja, se $X, Y \in \mathcal{M}_n(K)$, então

$$\det(X) \det(Y) = \det(XY)$$

Além disso, lembramos que, para $U, V, X, Y \in \mathcal{M}_n(K)$, temos

$$\det \begin{bmatrix} U & 0 \\ X & Y \end{bmatrix} = \det U \det Y$$

e

$$\det \begin{bmatrix} U & V \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \det U \det Y$$

Feitas essas observações, estamos aptos a resolver a questão.

- (a) Para obter o resultado desejado, a ideia será multiplicar a matriz em questão por uma matriz conveniente cujo determinante é 1. Dessa forma, utilizando as observações acima, sendo I_n a notação para a matriz identidade $n \times n$, e lembrando que D é invertível, temos que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Calculando os determinantes, vem

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{bmatrix} \right) &= \det \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) \cdot \det \left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{bmatrix} \right) &= \det \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) \cdot \det I_n \cdot \det I_n &= \det (A - BD^{-1}C) \det(D) \Rightarrow \\ \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) \cdot \det(I_n I_n) &= \det((A - BD^{-1}C)D) \Rightarrow \\ \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) \cdot \det(I_n) &= \det(AD - BD^{-1}CD) \Rightarrow \\ \boxed{\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BD^{-1}CD)} \end{aligned}$$

- (b) Utilizando as observações acima, sendo I_n a notação para a matriz identidade $n \times n$, e usando o fato de que $CD = DC$, temos que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ \textcolor{red}{CD} - \textcolor{red}{DC} & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ \textcolor{red}{0} & D \end{pmatrix}$$

Como D é invertível, temos $\det D \neq 0$. Portanto, segue que

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{bmatrix} \right) &= \det \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) \cdot \det \left(\begin{bmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{bmatrix} \right) &= \det \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) \cdot \det(D) \det(I_n) &= \det(AD - BC) \det(D) \Rightarrow \\ \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \det(AD - BC) \det(D) \cdot \frac{1}{\det(D)} \Rightarrow \\ \boxed{\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC)} \end{aligned}$$

- (c) Para resolver este item, vamos utilizar as propriedades das matrizes transpostas. Lembrando que, se $X, Y \in \mathcal{M}_n(K)$, então

- $(X^t)^t = X$;
- $(X + Y)^t = X^t + Y^t$;
- $(XY)^t = Y^t X^t$;
- $\det(X^t) = \det(X)$.

De posse dessas propriedades, observe que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix}$$

Daí, utilizando a notação I_n para a matriz identidade $n \times n$, e usando o fato de que $DB = BD$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^t & 0 \\ -B^t & I_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A^t D^t - B^t C^t & C^t \\ B^t D^t - D^t B^t & D^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (DA)^t - (CB)^t & C^t \\ (DB)^t - (BD)^t & D^t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (DA - CB)^t & C^t \\ \textcolor{red}{(DB - BD)}^t & D^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (DA - CB)^t & C^t \\ \textcolor{red}{0} & D^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Novamente, sendo D invertível, então D^t também é invertível. Logo, temos

$$\det \left(\begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^t & 0 \\ -B^t & I_n \end{bmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} (DA - CB)^t & C^t \\ 0 & D^t \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \det \left(\begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} \right) \det \left(\begin{bmatrix} D^t & 0 \\ -B^t & I_n \end{bmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} (DA - CB)^t & C^t \\ 0 & D^t \end{pmatrix} \Rightarrow \\
& \det \left(\begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} \right) \det(D^t) \det(I_n) = \det \left((DA - CB)^t \right) \det(D^t) \Rightarrow \\
& \det \begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} = \det \left((DA - CB)^t \right) \det(D^t) \cdot \frac{1}{\det(D^t)} \Rightarrow \\
& \det \begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} = \det \left((DA - CB)^t \right) \Rightarrow \boxed{\det \begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} = \det(DA - CB)}
\end{aligned}$$

2.16 Exercício 16

(16) Seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$. Prove que

$$\det(I_m + AA^t) = \det(I_n + A^t A)$$

Observação: Tal identidade é um caso particular da conhecida como *identidade de Weinstein-Aronszajn*.

Solução: Se A é uma matriz:

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ A^T & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m + AA^T & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -A^T & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n + A^T A \end{pmatrix}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
& \det \left(\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ A^T & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m + AA^T & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -A^T & I_n \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n + A^T A \end{pmatrix} \Rightarrow \\
& \det \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ A^T & I_n \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} I_m + AA^T & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -A^T & I_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n + A^T A \end{pmatrix} \Rightarrow \\
& \det(I_m) \det(I_n) \det(I_m + AA^T) \det(I_n) \det(I_m) \det(I_n) = \det(I_m) \det(I_n + A^T A) \Rightarrow \\
& \boxed{\det(I_m + AA^T) = \det(I_n + A^T A)}
\end{aligned}$$

Outra solução: Vamos utilizar uma versão estendida do item a do exercício 15: Sendo $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$, $C \in \mathcal{M}_{n \times m}(K)$ e $D \in \mathcal{M}_n$, com D invertível, temos que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(D) \det(A - BD^{-1}C)$$

Daí, tomando $A = I_m$, $B = A$, $C = -A^t$ e $D = I_n$, temos que

$$\det \begin{bmatrix} I_m & A \\ -A^t & I_n \end{bmatrix} = \det(I_n) \det(I_m - A I_n^{-1} (-A^t)) = \underbrace{\det(I_n)}_{=1} \det(I_m + AA^t) = \det(I_m + AA^t)$$

Por outro lado, observando que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix},$$

temos

$$\det \begin{bmatrix} I_n & -A^t \\ A & I_m \end{bmatrix} = \det(I_m) \det(I_n - (-A^t)I_m^{-1}A) = \underbrace{\det(I_m)}_{=1} \det(I_n + A^t A) = \det(I_n + A^t A)$$

Portanto, concluímos que $\det(I_m + AA^t) = \det(I_n + A^t A)$.

2.17 Exercício 17

(17) Seja $\sigma \in S_n$ e defina

$$\begin{aligned} T_\sigma &: K^n \longrightarrow K^n \\ e_i &\longmapsto T_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}, \end{aligned}$$

para $i = \{1, 2, \dots, n\}$ e $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é a base canônica de K^n . Calcule $\det(T_\sigma)$.

Solução: Observe que T_σ está permutando as colunas da matriz cujas colunas são os elementos da base canônica. Assim, para cada coluna i , vamos associar o vetor $e_{\sigma(i)}$. Então, sendo A a matriz de T_σ na base canônica, temos que $a_{\ell k} = 1$ se e somente se $k = \sigma(\ell)$. Da definição de determinante, sabemos que

$$\det A = \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}$$

Mas observe que os somandos acima serão todos não nulos apenas se $\tau = \sigma$. Então,

$$\det A = \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} = \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \text{sgn}(\sigma) 1 \cdot 1 \cdots 1 = \text{sgn}(\sigma).$$

Portanto, $\det(T_\sigma) = \text{sgn}(\sigma)$.

2.18 Exercício 18

(18) Seja $C \in \mathcal{M}_n(K)$ a matriz

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x + c_{n-1} \end{bmatrix}$$

Prove que $\det C = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$.

Solução: Vamos provar o resultado por indução sobre $n \geq 2$.

Para $n = 2$, temos que

$$C = \begin{bmatrix} x & c_0 \\ -1 & x + c_1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\det C = x(x + c_1) + c_0 = x^2 + c_1x + c_0.$$

Seja agora $n > 2$ e admita que o resultado é verdadeiro para matrizes $n - 1 \times n - 1$ desse tipo. Usando o desenvolvimento de $\det C$ por Laplace, pela primeira linha, temos que

$$\det \left[\begin{array}{c|ccccc|c} x & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \\ \hline -1 & x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x + c_{n-1} \end{array} \right] =$$

$$x \cdot \det \left[\begin{array}{ccccc|c} x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x + c_{n-1} \end{array} \right] + (-1)^{n+1} c_0 \det \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Pela hipótese de indução, segue que

$$\det C = x(x^{n-1} + c_{n-1}x^{n-2} + \dots + c_2x + c_1) + (-1)^{n+1}c_0(-1)^{n-1} = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0,$$

como queríamos.

2.19 Exercício 19

(19) Seja K um corpo e A_1, \dots, A_n matrizes quadradas sobre K . Seja B a matriz triangular por blocos

$$\begin{bmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{bmatrix}$$

Mostre que $\det B = \det(A_1) \det(A_2) \dots \det(A_n)$.

Solução: A demonstração de tal resultado se dará por indução em n . Para $n = 2$, temos a matriz

$$\begin{bmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

na qual sabemos que seu determinante é $\det(A_1) \det(A_2)$.

Suponha que o resultado é verdadeiro para certo $n = k$. Dessa forma, temos que

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix} = \det(A_1) \det(A_2) \dots \det(A_k) = \prod_{i=1}^k \det(A_i)$$

Calculemos o determinante de B para $n = k + 1$. Dividindo a matriz em blocos, e utilizando que, para $U \in \mathcal{M}_\ell(K)$, $V \in \mathcal{M}_{\ell \times m}(K)$, $Y \in \mathcal{M}_m(K)$, temos que

$$\det \begin{pmatrix} U & V \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \det(U) \det(Y),$$

Em particular, tomando $\ell = k$ e $m = 1$, podemos considerar

$$\det \left[\begin{array}{ccccc|c} A_1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & A_2 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_k & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{k+1} \end{array} \right] = \det \begin{pmatrix} U & V \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \det(U) \det(Y) =$$

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix} \det(A_{k+1}) = \left(\prod_{i=1}^k \det(A_i) \right) \cdot \det(A_{k+1}) =$$

$$\prod_{i=1}^{k+1} \det(A_i) = \det(A_1) \det(A_2) \dots \det(A_k) \det(A_{k+1})$$

Segue então o resultado desejado.

2.20 Exercício 20

(20) Seja K um corpo e $a, b, c, d, e, f, g \in K$. Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} a & b & b \\ c & d & e \\ f & g & g \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b & b \\ e & c & d \\ f & g & g \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b & b \\ d & e & c \\ f & g & g \end{bmatrix} = 0$$

Solução: Temos que o determinante é uma forma 3-linear das linhas da matriz, então:

$$\det \begin{bmatrix} a & b & b \\ c & d & e \\ f & g & g \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b & b \\ e & c & d \\ f & g & g \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b & b \\ d & e & c \\ f & g & g \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & b \\ c+d+e & d+c+e & e+d+c \\ f & g & g \end{bmatrix}$$

Note que a segunda e a terceira coluna são iguais. Como o determinante é 3-linear e alternado nas colunas da matriz, segue que

$$\det \begin{bmatrix} a & b & b \\ c+d+e & d+c+e & e+d+c \\ f & g & g \end{bmatrix} = 0.$$

2.21 Exercício 21

(21) Sabendo que os números inteiros 23028, 31882, 86469, 6327 e 61902 são todos múltiplos de 19, mostre que o número inteiro

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 8 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 9 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é múltiplo de 19.

Solução: Utilizaremos as propriedades dos determinantes. Multiplicando a primeira coluna por 10^4 , a segunda por 10^3 , a terceira por 10^2 , e a quarta por 10, chamando

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 8 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 9 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\det \begin{bmatrix} 20000 & 3000 & 0 & 20 & 8 \\ 30000 & 1000 & 800 & 80 & 2 \\ 80000 & 6000 & 400 & 60 & 9 \\ 0 & 6000 & 300 & 20 & 7 \\ 60000 & 1000 & 900 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^4 & 3 \cdot 10^3 & 0 \cdot 10^2 & 2 \cdot 10 & 8 \\ 3 \cdot 10^4 & 1 \cdot 10^3 & 8 \cdot 10^2 & 8 \cdot 10 & 2 \\ 8 \cdot 10^4 & 6 \cdot 10^3 & 4 \cdot 10^2 & 6 \cdot 10 & 9 \\ 0 \cdot 10^4 & 6 \cdot 10^3 & 3 \cdot 10^2 & 2 \cdot 10 & 7 \\ 6 \cdot 10^4 & 1 \cdot 10^3 & 9 \cdot 10^2 & 0 \cdot 10 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$10^4 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 10 \det A = 10^{10} \det A$$

Agora, somando as quatro primeiras colunas à quinta coluna, isso não altera o valor do determinante, e como todos os elementos são múltiplos de 19, temos

$$\det \begin{bmatrix} 20000 & 3000 & 0 & 20 & 23028 \\ 30000 & 1000 & 800 & 80 & 31882 \\ 80000 & 6000 & 400 & 60 & 86469 \\ 0 & 6000 & 300 & 20 & 6327 \\ 60000 & 1000 & 900 & 0 & 61902 \end{bmatrix} = 10^{10} \det A \Rightarrow$$

$$\det \begin{bmatrix} 20000 & 3000 & 0 & 20 & 23028 \\ 30000 & 1000 & 800 & 80 & 31882 \\ 80000 & 6000 & 400 & 60 & 86469 \\ 0 & 6000 & 300 & 20 & 6327 \\ 60000 & 1000 & 900 & 0 & 61902 \end{bmatrix} = 10^{10} \det A \Rightarrow$$

$$\det \begin{bmatrix} 20000 & 3000 & 0 & 20 & 19 \cdot 1212 \\ 30000 & 1000 & 800 & 80 & 19 \cdot 1678 \\ 80000 & 6000 & 400 & 60 & 19 \cdot 4551 \\ 0 & 6000 & 300 & 20 & 19 \cdot 333 \\ 60000 & 1000 & 900 & 0 & 19 \cdot 3258 \end{bmatrix} = 10^{10} \det A \Rightarrow$$

$$19 \det \begin{bmatrix} 20000 & 3000 & 0 & 20 & 1212 \\ 30000 & 1000 & 800 & 80 & 1678 \\ 80000 & 6000 & 400 & 60 & 4551 \\ 0 & 6000 & 300 & 20 & 333 \\ 60000 & 1000 & 900 & 0 & 3258 \end{bmatrix} = 10^{10} \det A$$

Desse modo, temos que $19 \mid 10^{10} \det A$, mas como $\text{mdc}(10^{10}, 19) = 1$, ou seja, 19 e 10^{10} são primos entre si, temos que $19 \mid \det A$. Portanto, o determinante de A é um múltiplo de 19.

2.22 Exercício 22

(22) Seja K corpo e $a, b, c \in K$. Usando a matriz $\begin{bmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$, calcule

$$\det \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & ab & ac \\ ab & a^2 + c^2 & bc \\ ac & bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

Solução: Chamando

$$A = \begin{bmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & ab & ac \\ ab & a^2 + c^2 & bc \\ ac & bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix},$$

observe que

$$AA^t = \begin{bmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & ab & ac \\ ab & a^2 + c^2 & bc \\ ac & bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix} = B.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(AA^t) \Rightarrow \det(B) = \det(A) \det(A^t) \Rightarrow \\ \det(B) &= \det(A) \det(A) \Rightarrow \boxed{\det(B) = (\det(A))^2} \end{aligned}$$

2.23 Exercício 23

(23) Seja K um corpo e n um inteiro positivo. Dadas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ mostre que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A + B) \det(A - B)$$

Solução: Como somar elementos das colunas e somar elementos das linhas não altera o determinante da matriz, temos que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+B & B \\ B+A & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+B & B \\ B+A-(A+B) & A-B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{pmatrix}$$

Utilizando o fato de que, para $U, V, X, Y \in \mathcal{M}_n(K)$, temos

$$\det \begin{bmatrix} U & V \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \det U \det Y$$

Ficamos com

$$\det \begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{pmatrix} = \det(A+B) \det(A-B) \Rightarrow \det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A+B) \det(A-B)$$

2.24 Exercício 24

(24) Seja K um corpo e V um espaço vetorial de dimensão finita n . Sejam $B = (e_1, \dots, e_n)$ e $C = (d_1, \dots, d_n)$ duas bases de V . Sejam φ a única forma n -linear tal que $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$ e ψ a única forma n -linear tal que $\psi(d_1, \dots, d_n) = 1$. Qual o valor de $\psi(e_1, \dots, e_n)$ e de $\varphi(d_1, \dots, d_n)$? Use isso para dar uma relação entre ψ e φ .

2.25 Exercício 25

(25) Seja K um corpo, n um inteiro positivo e $K_n[t]$ o conjunto de polinômios de grau menor ou igual que n com coeficientes em K . Sejam $t_1, \dots, t_{n+1} \in K$ dois a dois distintos. Considere para $i = 1, \dots, n+1$ as funções de avaliação

$$\begin{aligned} \tau_i &: K_n[t] \longrightarrow K \\ p(t) &\longmapsto \tau_i(p(t)) = p(t_i) \end{aligned}$$

(a) Mostre que $\mathcal{B} = \{\tau_1, \dots, \tau_{n+1}\}$ é base de $K_n[t]^*$. (Sugestão: use o exercício 12.)

(b) Mostre que os *polinômios de Lagrange*

$$L_i(t) = \prod_{j \neq i} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, i = 1, \dots, n+1,$$

formam uma base dual de \mathcal{B} .

(c) Mostre que para quaisquer $a_1, \dots, a_{n+1} \in K$ existe um único polinômio $p(t)$ de grau menor ou igual que n tal que $p(t_i) = a_i$, para $i = 1, \dots, n+1$. (O resultado do item (c) é a conhecida *Fórmula de Interpolação de Lagrange*)

Solução:

- (a) Como $K_n[t]$ é um K -espaço vetorial de dimensão finita, temos que $\dim K_n[t]^* = \dim K_n[t] = n + 1$. Logo, para provar que \mathcal{B} é base, basta mostrar que \mathcal{B} é LI.

Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in K$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_i = \alpha_1 \tau_1 + \dots + \alpha_{n+1} \tau_{n+1} = 0$$

Vamos mostrar que $\alpha_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, n+1\}$. Avaliemos $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_i$ em $1, t, \dots, t^n$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_i(1) = \alpha_1 \tau_1(1) + \dots + \alpha_{n+1} \tau_{n+1}(1) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_i(t) = \alpha_1 \tau_1(t) + \dots + \alpha_{n+1} \tau_{n+1}(t) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_i(t^n) = \alpha_1 \tau_1(t^n) + \dots + \alpha_{n+1} \tau_{n+1}(t^n) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \mathbf{1} + \dots + \alpha_{n+1} \mathbf{1} = 0 \\ \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_{n+1} t_{n+1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 t_1^n + \dots + \alpha_{n+1} t_{n+1}^n = 0 \end{array} \right.$$

Logo, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$ é solução do sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^n & t_2^n & \dots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como t_1, t_2, \dots, t_{n+1} são diferentes, observe que a matriz obtida é uma matriz de Vandermonde. Assim, pela questão 12, temos que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^n & t_2^n & \dots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (t_j - t_i) \neq 0,$$

o que resulta que a única solução possível para este sistema é a trivial. Consequentemente, temos $t_1 = t_2 = \dots = t_{n+1} = 0$. Daí, \mathcal{B} é LI, e portanto uma base para $K_n[t]^*$.

2.26 Exercício 26

(26) Seja $n > 1$ um inteiro e $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Seja $\mathcal{C}^{(n-1)}(I, \mathbb{R})$ o conjunto das funções de classe $n-1$, i.e. deriváveis $n-1$ vezes com derivada $n-1$ contínua. Dadas $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^{(n-1)}(I, \mathbb{R})$, o *Wronskiano* de f_1, \dots, f_n é a função

$$\begin{aligned} W(f_1, \dots, f_n) &: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (W(f_1, \dots, f_n))(t) \end{aligned}$$

definida como

$$(W(f_1, \dots, f_n))(t) = \det \begin{bmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \dots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Mostre que se existir $t \in I$ tal que $(W(f_1, \dots, f_n))(t) \neq 0$ então $\{f_1, \dots, f_n\} \subset \mathcal{C}^{(n-1)}(I, \mathbb{R})$ é \mathbb{R} -linearmente independente.

Observe que a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, seja $I = (-1, 1)$, $f_1: t \rightarrow t^3$, $f_2: t \rightarrow |t^3|$. O conjunto $\{f_1, f_2\}$ é \mathbb{R} -linearmente independente, mas $(W(f_1, f_2))(t) = 0$ para todo $t \in (-1, 1)$.

Solução:

2.27 Exercício 27

(27) Seja V um K -espaço vetorial de dimensão finita n e sejam $f_1, f_2, \dots, f_r \in V^*$. Defina

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r: V \times V \times \dots \times V \rightarrow K$$

por $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r(v_1, v_2, \dots, v_r) = \det f_i(v_j)$.

- (a) Verifique que $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r$ é r -linear e alternada.
- (b) Mostre que $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r \neq 0$ se, e somente se $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ é linearmente independente.
- (c) Prove que se $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ é uma base de V^* então o conjunto

$$\{f_J = f_{j_1} \wedge f_{j_2} \wedge \dots \wedge f_{j_r}\}, \text{ para todo } J = \{j_1 < j_2 < \dots < j_r\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$$

é uma base de $\mathcal{A}_r(V)$.

- (d) Sejam B de uma base de V e $B^* = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ sua base dual. Descreva a base de $\mathcal{A}_r(V)$ que obtemos usando o item anterior. (A forma linear $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r$ é chamada de *produto exterior* dos funcionais f_1, f_2, \dots, f_r .)

Solução:

Questões Suplementares

2.28 Exercício 28

(28) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \frac{1}{x_1+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \frac{1}{x_2+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \frac{1}{x_3+y_1} & \frac{1}{x_3+y_2} & \frac{1}{x_3+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_3+y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \frac{1}{x_n+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{pmatrix},$$

onde $x_i + y_j \neq 0$ para $1 \leq i, j \leq n$. Mostre que o determinante dessa matriz, conhecido por *determinante de Cauchy*, é dado por

$$\det A = \frac{\prod_{i>j}^n (x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j=1}^n (x_i + y_j)}$$

Solução:

2.29 Exercício 29

(29) O determinante da *matriz circulante* $n \times n$ é dado por

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{bmatrix} = (-1)^{n-1} \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^n \zeta^{jk} a_k \right),$$

onde $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Encontre o determinante da matriz circulante $n \times n$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & \dots & n^2 \\ n^2 & 1 & 4 & \dots & (n-1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 9 & 16 & 25 & \dots & 4 \\ 4 & 9 & 16 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução:

2.30 Exercício 30

(30) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ duas matrizes invertíveis, tais que

$$A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}$$

(a) Se $K = \mathbb{R}$, mostre que $\det A = \det B$.

(b) Se $K = \mathbb{C}$, mostre que pode ocorrer $\det A \neq \det B$, mas é válido que $|\det A| = |\det B|$.

Solução:

2.31 Exercício 31

(31) Prove a identidade de Woodbury: para $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $U \in \mathcal{M}_{n \times m}(K)$, $C \in \mathcal{M}_{m \times m}(K)$ e $V \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$, temos que

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U \left(C^{-1} + VA^{-1}U \right)^{-1} VA^{-1}$$

Solução:

2.32 Exercício 32

(32) [Teorema do Determinante de Gasper] Seja $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, s a soma das entradas da matriz e q a soma dos quadrados das entradas dessa matriz. Considere $\alpha = \frac{s}{n}$ e $\beta = \frac{q}{n}$. O Teorema do Determinante de Gasper afirma que $|\det A| \leq \beta^{\frac{n}{2}}$, e no caso em que $\alpha^2 \geq \beta$:

$$|\det A| \leq |\alpha| \left(\frac{n\beta - \alpha^2}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

Solução:

2.33 Exercício 33

- (33) Considere a matriz quadrada A_n cujas entradas são os n^2 primeiros números primos.
- (a) Mostre que o maior valor possível para $\det(A_2)$ é um número primo.
 - (b) Encontre todos os valores de n para os quais o maior determinante possível para $\det(A_n)$ é um número primo.

3 Lista 2

3.1 Exercício 1

(1) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e $T \in \mathcal{L}(V)$. Sejam $\lambda \in K$ um autovalor de T e $f(t) \in K[t]$. Mostre que $f(\lambda)$ é um autovalor de $f(T)$.

Solução:

Considere $f(t) = \alpha^n t^n + \alpha^{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha_0$. Sendo λ um autovalor de T , sabemos que existem um $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$. Lembrando que $T^n(v) = \lambda^n v$, temos que

$$\begin{aligned} (f(T))(v) &= (\alpha^n T^n + \alpha^{n-1} T^{n-1} + \dots + \alpha_1 T + \alpha_0)(v) \\ &= \alpha^n T^n(v) + \alpha^{n-1} T^{n-1}(v) + \dots + \alpha_1 T(v) + \alpha_0 I(v) \\ &= \alpha^n \lambda^n v + \alpha^{n-1} \lambda^{n-1} v + \dots + \alpha_1 \lambda v + \alpha_0 \lambda^0 v \\ &= \alpha^n \lambda^n v + \alpha^{n-1} \lambda^{n-1} v + \dots + \alpha_1 \lambda v + \alpha_0 \lambda^0 v \\ &= (\alpha^n \lambda^n + \alpha^{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0)v = f(\lambda)v \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $(f(T))(v) = f(\lambda)v$. Como $v \neq 0$, temos que $f(\lambda)$ é autovalor de $f(T)$.

3.2 Exercício 2

(2) Seja V um K -espaço de dimensão finita n e seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Mostre que se T tem n autovalores distintos então T é diagonalizável.

Solução:

Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalores distintos. Para cada i existe um $v_i \neq 0$ tal que $T(v_i) = \lambda_i v_i$.

Se:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0,$$

então para todo polinômio $p \in K[t]$ temos:

$$p(T)(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = p(T)(0),$$

aí:

$$\alpha_1 p(T)(v_1) + \dots + \alpha_n p(T)(v_n) = 0,$$

aí, pelo exercício 1 temos:

$$\alpha_1 p(\lambda_1) v_1 + \dots + \alpha_n p(\lambda_n) v_n = 0.$$

Seria muito bom podermos encontrar um polinômio p tal que:

$$p(\lambda_1) = 1, \quad p(\lambda_2) = 0, \quad \dots, \quad p(\lambda_n) = 0.$$

Sabemos que o polinômio:

$$q(t) = (t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_n)$$

satisfaz:

$$q(\lambda_2) = 0, \quad \dots, \quad q(\lambda_n) = 0.$$

O valor de $q(\lambda_1)$ pode não ser 1, mas sabemos que $q(\lambda_1) \neq 0$, aí basta considerarmos:

$$p(t) = \frac{q(t)}{q(\lambda_1)}.$$

Aplicando este p na equação:

$$\alpha_1 p(\lambda_1) v_1 + \dots + \alpha_n p(\lambda_n) v_n = 0,$$

então obtemos:

$$\alpha_1 v_1 = 0,$$

mas $v_1 \neq 0$, assim $\alpha_1 = 0$. Analogamente $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Logo a sequência (v_1, \dots, v_n) é linearmente independente, mas $\dim V = n$, aí o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ forma uma base de V . Logo T é diagonalizável.

3.3 Exercício 3

(3) Sejam V um K -espaço de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(V)$ e $\lambda \in K$ um autovalor de T . Chamamos de *multiplicidade algébrica* de λ ao maior inteiro m tal que $(t - \lambda)^m$ divida o polinômio característico $p_T(t)$ de T . A dimensão do autoespaço $V_T(\lambda)$ é a *multiplicidade geométrica* de λ .

- (a) Mostre que a multiplicidade geométrica de λ é sempre menor ou igual à multiplicidade algébrica de λ .
- (b) Mostre que T é diagonalizável se, e somente se, $p_T(t)$ é produto de fatores lineares e, para cada autovalor λ de T , as multiplicidades algébrica e geométrica de λ coincidem.

Solução:

- (a) Seja m a multiplicidade geométrica de λ . Então $V_T(\lambda)$ tem uma base $\{e_1, \dots, e_m\}$. Podemos completar para a base $B = \{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ de V . Assim temos:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda I_m & X \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

Calculando o polinômio característico de T , temos

$$\begin{aligned} p_T(t) &= \det(tI - [T]_B) = \det \left(\begin{pmatrix} tI_m & 0 \\ 0 & tI \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda I_m & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} (t - \lambda)I_m & X \\ 0 & tI - Y \end{pmatrix} = (t - \lambda)^m \det(tI - Y), \end{aligned}$$

então $(t - \lambda)^m \mid p_T(t)$, e portanto m é menor ou igual à multiplicidade algébrica de λ .

- (b) (\Rightarrow) Se T é diagonalizável, então, sendo $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ os autovalores distintos, existe uma base:

$$B = \{v_{1,1}, \dots, v_{1,m_1}, \dots, v_{k,1}, \dots, v_{k,m_k}\}$$

de autovetores tais que $T(v_{l,j}) = \lambda_l v_{l,j}$ para todo $l = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, m_l$, e portanto:

$$p_T(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_k)^{m_k},$$

aí para $i = 1, \dots, k$, para v tal que $T(v) = \lambda_i v$, sendo:

$$v = \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} v_{l,j},$$

então temos:

$$\begin{aligned} T(v) &= T \left(\sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} v_{l,j} \right) = \lambda_i \left(\sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} v_{l,j} \right) \Rightarrow \\ &= \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} T(v_{l,j}) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} \lambda_l v_{l,j} \Rightarrow \\ &= \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} \lambda_i v_{l,j} = \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} \lambda_l v_{l,j} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} (\lambda_l - \lambda_i) v_{l,j} = 0,$$

e portanto para $l \neq i$ temos $\lambda_l \neq \lambda_i$, temos $\alpha_{l,j}(\lambda_l - \lambda_i) = 0$, o que acarreta $\alpha_{l,j} = 0$. Daí:

$$v = \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{i,j} v_{i,j}.$$

Com isso podemos concluir que o conjunto:

$$\{v_{i,1}, \dots, v_{i,m_i}\}$$

é uma base de $V_T(\lambda_i)$, ou seja, $m_i = \dim V_T(\lambda_i)$.

(\Leftarrow) Por outro lado, se:

$$p_T(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_k)^{m_k}$$

e $m_i = \dim V_T(\lambda_i)$, então seja:

$$\{v_{i,1}, \dots, v_{i,m_i}\}$$

uma base de $V_T(\lambda_i)$. Como $m_1 + \dots + m_k = n$, basta mostrarmos que o conjunto

$$B = \{v_{1,1}, \dots, v_{1,m_1}, \dots, v_{k,1}, \dots, v_{k,m_k}\}$$

é linearmente independente. De fato, para quaisquer escalares $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,m_1}, \dots, \alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{k,m_k} \in K$, se

$$\sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} v_{l,j} = 0,$$

então, para todo $i = 1, \dots, k$, seguindo a ideia do exercício 2, podemos considerar o polinômio

$$q(t) = \prod_{l \neq i} (t - \lambda_l) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_{i-1})(t - \lambda_{i+1}) \dots (t - \lambda_k)$$

e depois:

$$p(t) = \frac{q(t)}{q(\lambda_i)},$$

assim, aplicando $p(T)$, obtemos:

$$p(T) \left(\sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} v_{l,j} \right) = 0 \Rightarrow \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} p(T) (v_{l,j}) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{m_l} \alpha_{l,j} p(\lambda_l) (v_{l,j}) = 0,$$

aí, como $p(\lambda_i) = 1$ e $p(\lambda_l) = 0$ para $l \neq i$, então:

$$\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{i,j} (v_{i,j}) = 0,$$

mas o conjunto:

$$\{v_{i,1}, \dots, v_{i,m_i}\}$$

é linearmente independente, assim:

$$\alpha_{i,1} = \dots = \alpha_{i,m_i} = 0;$$

logo temos:

$$\alpha_{1,1} = \dots = \alpha_{1,m_1} = \dots = \alpha_{k,1} = \dots = \alpha_{k,m_k} = 0.$$

Assim, B é linearmente independente.

3.4 Exercício 4

(4) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule A^{2019} .

Solução: Calculemos o polinômio característico de A :

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - 4\lambda - 5 \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, temos que $p_A(A) = 0$. Daí:

$$p_A(A) = 0 \Rightarrow A^2 - 4A - 5I = 0 \Rightarrow A^2 = 4A + 5I.$$

Portanto, podemos utilizar essa identidade para obter A^n em função de A . Por exemplo:

$$A^3 = A^2 \cdot A = (4A + 5I) \cdot A = 4A^2 + 5A = 4(4A + 5I) + 5A = 21A + 20I$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (21A + 20I) \cdot A = 21A^2 + 20A = 21(4A + 5I) + 20A = 104A + 105I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (104A + 105I) \cdot A = 104A^2 + 105A = 104(4A + 5I) + 105A = 521A + 520I$$

Em geral, pode-se verificar por indução que

$$A^n = \left(\frac{5^n + 5(-1)^n}{6} + 1 \right) A + \frac{5^n + 5(-1)^n}{6} I$$

Logo, temos que

$$A^{2019} = \left(\frac{5^{2019} - 5}{6} + 1 \right) A + \frac{5^{2019} - 5}{6} I$$

Outra solução: Observe que a matriz A é diagonalizável, e portanto podemos obter P invertível e D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$. Daí, teremos que $A^n = PD^nP^{-1}$. Realizando os cálculos, obtemos

$$P = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

e portanto,

$$A^n = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$A^{2019} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5^{2019} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

3.5 Exercício 5

(5) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear inversível. Prove que:

- (a) Se λ é um valor próprio de T , então $\lambda \neq 0$.
- (b) λ é um valor próprio de T se, e somente se, λ^{-1} é um valor próprio de T^{-1} (onde T^{-1} é o operador inverso de T).
- (c) Se λ é um valor próprio de T , mostre que a multiplicidade algébrica de λ é igual à multiplicidade algébrica de $\frac{1}{\lambda}$.

Solução:

- (a) Se λ é um autovalor de T , então sabemos que existe $v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v$. Como T é inversível, temos que

$$T^{-1}(T(v)) = T^{-1}(\lambda v) \Rightarrow v = \lambda T^{-1}(v)$$

Sendo $v \neq 0$, temos que $\lambda T^{-1}(v) \neq 0$, o que implica $\lambda \neq 0$.

(b)

(\Rightarrow) Se λ é autovalor de T , existe $v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v$. Temos então que

$$T^{-1}(T(v)) = T^{-1}(\lambda v) \Rightarrow v = \lambda T^{-1}(v) \Rightarrow \lambda^{-1}v = \lambda^{-1}(\lambda T^{-1}(v)) \Rightarrow T^{-1}(v) = \lambda^{-1}v$$

Portanto, como $v \neq 0$ é tal que $T^{-1}(v) = \lambda^{-1}v$, temos que λ^{-1} é autovalor de T^{-1} .

(\Leftarrow) A recíproca é análoga.

- (c) Se λ é autovalor de T então, sendo B uma base e $A = [T]_B$, então seja:

$$p_T(t) = (t - \lambda)^m q(t), \quad q(\lambda) \neq 0,$$

então:

$$\begin{aligned} \det(tI - A) &= (t - \lambda)^m q(t) \\ \det\left(\frac{1}{t}I - A\right) &= \left(\frac{1}{t} - \lambda\right)^m q\left(\frac{1}{t}\right) \\ \frac{1}{t^n} \det(I - tA) &= \left(\frac{1}{t} - \lambda\right)^m q\left(\frac{1}{t}\right) \\ \det(A^{-1} - tI) \det(A) &= t^n \left(\frac{1}{t} - \lambda\right)^m q\left(\frac{1}{t}\right) \\ \det(tI - A^{-1}) &= \frac{(-1)^{n-m} t^{n-m} \left(t - \frac{1}{\lambda}\right)^m q\left(\frac{1}{t}\right)}{\lambda^m \det(A)} \end{aligned}$$

aí sendo:

$$r(t) = t^{n-m} q\left(\frac{1}{t}\right),$$

então r é um polinômio e aí:

$$\det\left(tI - A^{-1}\right) = \frac{(-1)^{n-m} \left(t - \frac{1}{\lambda}\right)^m r(t)}{\lambda^m \det(A)}$$

e também:

$$r\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-m} q\left(\frac{1}{\frac{1}{\lambda}}\right) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-m} q(\lambda) \neq 0.$$

3.6 Exercício 6

(6) Seja V um espaço vetorial de dimensão n e seja $T \in \mathcal{L}(V)$ de posto 1. Prove que ou T é diagonalizável ou T é nilpotente.

Solução: Como T tem posto 1, então existe uma base $\{e_1\}$ de $T[V]$. Assim podemos completar uma base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de V , e aí para cada i existe c_i tal que $T(e_i) = c_i e_1$. Temos dois casos a considerar:

- Se $c_1 = 0$, então para todo i temos:

$$T(T(e_i)) = T(c_i e_1) = c_i T(e_1) = c_i c_1 e_1 = 0;$$

logo $T^2 = 0$, aí T é nilpotente.

- Se $c_1 \neq 0$, então consideremos a matriz:

$$A = [T]_B = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & & c_n \\ 0 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que A tem posto 1, aí A tem nulidade $n - 1$, e consequentemente a multiplicidade geométrica de 0 é $n - 1$. Também temos:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} x - c_1 & -c_2 & & -c_n \\ 0 & x & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & x \end{vmatrix} = x^{n-1}(x - c_1).$$

Portanto os autovalores são 0 e c_1 com multiplicidades algébricas respectivamente $n - 1$ e 1. Assim T é diagonalizável.

3.7 Exercício 7

(7) Seja $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ a matriz em que $a_{ij} = a \neq 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. A matriz A é diagonalizável? Qual é o seu polinômio minimal?

Solução:

(a) Se $n \geq 2$, então a matriz é diagonalizável se e só se $na \neq 0$. De fato, sendo:

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ & \ddots & \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

com $a \neq 0$, então é fácil ver que A tem posto 1, aí a multiplicidade geométrica de 0 é $n - 1$. Além disso:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det \begin{pmatrix} x-a & -a & -a \\ -a & x-a & -a \\ & \ddots & \\ -a & -a & x-a \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x-na & -a & -a \\ x-na & x-a & -a \\ & \ddots & \\ x-na & -a & x-a \end{pmatrix} \\ &= (x-na) \det \begin{pmatrix} 1 & -a & -a \\ 1 & x-a & -a \\ & \ddots & \\ 1 & -a & x-a \end{pmatrix} \\ &= (x-na) \det \begin{pmatrix} 1 & -a & -a \\ 0 & x & -a \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \\ &= (x-na)x^{n-1}. \end{aligned}$$

Assim:

- Se $na \neq 0$, então a multiplicidade algébrica de 0 é $n - 1$, aí A é diagonalizável.
- Se $na = 0$, então a multiplicidade algébrica de 0 é n , aí A não é diagonalizável.

(b) Se $n \geq 2$, então o polinômio minimal de A é $x^2 - nax$. De fato, A não é múltiplo de identidade, aí o polinômio minimal deve ter grau pelo menos 2. Porém temos o seguinte:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & a \\ & \ddots \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ & \ddots \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na^2 & na^2 \\ & \ddots \\ na^2 & na^2 \end{pmatrix} = naA,$$

assim $A^2 - naA = 0$. Assim o polinômio minimal de A é $x^2 - nax$.

3.8 Exercício 8

(8) Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times 1}(K)$. A matriz AA^t é diagonalizável?

Solução:

Seja:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Se $n \geq 2$ e $A \neq 0$, então mostraremos que AA^t é diagonalizável se e só se $a_1^2 + \dots + a_n^2 \neq 0$. De fato:

$$AA^t = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_n \\ & & \ddots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & a_n a_n \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que AA^t tem posto 1, aí A tem nulidade $n - 1$, aí a multiplicidade geométrica de 0 é $n - 1$. Além disso, se tivermos $a_i \neq 0$ para todo i , então:

$$\begin{aligned} p_{AA^t}(x) &= \det \begin{pmatrix} x - a_1^2 & -a_1 a_2 & -a_1 a_n \\ -a_2 a_1 & x - a_2^2 & -a_2 a_n \\ & & \ddots \\ -a_n a_1 & -a_n a_2 & x - a_n^2 \end{pmatrix} \\ &= a_1 \dots a_n \det \begin{pmatrix} \frac{x}{a_1} - a_1 & -a_2 & -a_n \\ -a_1 & \frac{x}{a_2} - a_2 & -a_n \\ & & \ddots \\ -a_1 & -a_2 & \frac{x}{a_n} - a_n \end{pmatrix} \\ &= a_1 \dots a_n \det \begin{pmatrix} \frac{x}{a_1} - a_1 & -a_2 & -a_n \\ -\frac{x}{a_1} & \frac{x}{a_2} & 0 \\ & & \ddots \\ -\frac{x}{a_1} & 0 & \frac{x}{a_n} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x - a_1^2 & -a_2^2 & -a_n^2 \\ -x & x & 0 \\ & & \ddots \\ -x & 0 & x \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) & -a_2^2 & -a_n^2 \\ 0 & x & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \\ &= \left(x - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \right) x^{n-1}. \end{aligned}$$

Agora, no caso em que $a_i = 0$ para algum i , então seja B a matriz obtida de A retirando-se todas as entradas nulas, suponhamos que sejam k entradas, então é fácil ver que:

$$p_{AA^t}(x) = p_{BB^t}(x)x^k = \left(x - \sum_{a_i \neq 0} a_i^2 \right) x^{n-k-1} x^k = \left(x - \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^{n-1}.$$

De qualquer modo temos:

$$p_{AA^t}(x) = \left(x - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \right) x^{n-1}.$$

Assim, temos o seguinte:

- Se $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$, então a multiplicidade algébrica de 0 é $n - 1$, aí AA^t é diagonalizável.
- Se $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0$, então a multiplicidade algébrica de 0 é n , aí AA^t não é diagonalizável.

Um contraexemplo é o seguinte: considere $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Então

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix},$$

mas essa matriz não é diagonalizável.

3.9 Exercício 9

(9) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Prove que se $I - AB$ é inversível, então $I - BA$ é inversível e que

$$(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A.$$

Solução: Suponha que $I - AB$ é inversível. Vamos mostrar que $B(I - AB)^{-1}A + I$ é o inverso de $I - BA$. De fato,

$$\begin{aligned} (I - BA)(B(I - AB)^{-1}A + I) &= B(I - AB)^{-1}A + I - BAB(I - AB)^{-1}A - BA \\ &= B((I - AB)^{-1} - AB(I - AB)^{-1})A + I - BA \\ &= B((I - AB)(I - AB)^{-1})A + I - BA \\ &= BA + I - BA \\ &= I \end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $(B(I - AB)^{-1}A + I)(I - BA) = I$. Logo, $I - BA$ é inversível.

3.10 Exercício 10

(10) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Prove que AB e BA têm os mesmos autovalores em K . Elas têm o mesmo polinômio característico? E o minimal?

Solução:

- (a) Mostraremos que AB e BA têm os mesmos autovalores. O item (b) fornecerá uma outra demonstração disso. De fato, se λ é autovalor de AB , então existe um $v \neq 0$ tal que $ABv = \lambda v$, aí $BABv = B(\lambda v) = \lambda Bv$, assim: (i) se $Bv \neq 0$, então λ é um autovalor de BA ; (ii) se $Bv = 0$, então $\lambda v = ABv = 0$, aí $\lambda = 0$ e $\det(AB) = 0$, aí $\det(A)\det(B) = 0$, aí $\det(B)\det(A) = 0$, aí $\det(BA) = 0$, aí existe $u \neq 0$ tal que $BAu = 0 = \lambda u$, aí λ é autovalor de BA ; de qualquer modo λ é autovalor de BA . A recíproca é análoga.

- (b) Mostraremos que AB e BA têm o mesmo polinômio característico. De fato, existem matrizes inversíveis P e Q tais que:

$$A = P \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q,$$

aí seja:

$$B = Q^{-1} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} P^{-1},$$

então temos:

$$AB = P \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{e} \quad BA = Q^{-1} \begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & 0 \end{pmatrix} Q,$$

assim:

$$p_{AB}(x) = p_X(x)x^{n-k} \quad \text{e} \quad p_{BA}(x) = p_X(x)x^{n-k}.$$

- (c) Nem sempre AB e BA têm o mesmo polinômio minimal. De fato, seja:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim $AB \neq 0$ e $BA = 0$, e $m_{AB}(t) = t^2$, mas $m_{BA}(t) = t$.

- (d) **(Bônus)** Se A é inversível, então AB e BA têm o mesmo polinômio minimal. De fato temos $A(BA)^n = (AB)^n A$ para todo n , aí:

$$\begin{aligned} m_{AB}(BA) &= A^{-1} A m_{AB}(BA) \\ &= A^{-1} m_{AB}(AB) A \\ &= 0, \end{aligned}$$

de modo que $m_{BA}(x) \mid m_{AB}(x)$, e também:

$$\begin{aligned} m_{BA}(AB) &= m_{BA}(AB) A A^{-1} \\ &= A m_{BA}(BA) A^{-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

de modo que $m_{AB}(x) \mid m_{BA}(x)$, assim concluímos que $m_{AB}(x) = m_{BA}(x)$. Analogamente, se B é inversível, então AB e BA têm o mesmo polinômio minimal.

Outra solução: Se uma das matrizes é inversível, digamos A por exemplo, então AB e BA são semelhantes. Então

$$BA = A^{-1}(AB)A.$$

Neste caso, AB e BA possuirão o mesmo polinômio característico e o mesmo polinômio minimal. Caso contrário, considere as matrizes

$$C = \begin{bmatrix} tI & A \\ B & I \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} I & A \\ B & tI \end{bmatrix}$$

Temos que

$$CD = \begin{bmatrix} tI - AB & tA \\ 0 & tI \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad DC = \begin{bmatrix} tI & A \\ 0 & -BA + tI \end{bmatrix}$$

Então veja que

$$\det(CD) = \det(DC) \Rightarrow t^n \det(tI - AB) = t^n \det(tI - BA) \Rightarrow t^n p_{AB}(t) = t^n p_{BA}(t) \Rightarrow \boxed{p_{AB}(t) = p_{BA}(t)}.$$

3.11 Exercício 11

(11) Seja $A \in \mathcal{M}_n(K)$ uma matriz diagonalizável. Mostre que A^r é diagonalizável para todo inteiro $r \geq 1$. Exiba uma matriz *não diagonalizável* tal que A^2 é diagonalizável.

Solução:

(a) Se A é diagonalizável, então K^n tem uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ tal que para todo i exista λ_i tal que $Av_i = \lambda_i v_i$, aí $A^r(v_i) = \lambda_i^r v_i$; logo A^r é diagonalizável.

(b) Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então A tem posto 1, aí tem nulidade 1, aí a multiplicidade geométrica de 0 é 1, mas:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = x^2,$$

aí a multiplicidade algébrica de 0 é 2, aí A não é diagonalizável. Porém, é fácil ver que $A^2 = 0$, de modo que A^2 é diagonalizável.

3.12 Exercício 12

(12) Seja $D \in \mathcal{M}_n(K)$ uma matriz diagonal com polinômio característico

$$p_D(t) = (t - c_1)^{d_1} \cdots (t - c_k)^{d_k},$$

em que c_1, \dots, c_k são distintos. Seja

$$W = \{A \in \mathcal{M}_n(K) : DA = AD\}.$$

Prove que

$$\dim W = d_1^2 + \dots + d_k^2.$$

Solução: Como D é diagonal e $p_D(x) = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$, sendo a matriz representada assim:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix},$$

então devemos ter:

$$\{1, \dots, n\} = X_1 \cup \dots \cup X_k,$$

em que:

$$X_i = \{r \in \{1, \dots, n\} : d_r = c_i\}.$$

Para todo $A \in W$, então na entrada (r, s) devemos ter $(DA)_{r,s} = (AD)_{r,s}$, aí $d_r a_{r,s} = a_{r,s} d_s$, aí $(d_r - d_s) a_{r,s} = 0$, aí $d_r = d_s$ ou $a_{r,s} = 0$. Assim, para i, j com $i \neq j$, então para $r \in X_i$ e $s \in X_j$ devemos ter $d_r = c_i \neq c_j = d_s$, aí $a_{r,s} = 0$. Assim, sendo $E_{r,s}$ a matriz que vale 1 na entrada (r, s) e 0 nas outras, então é fácil ver que A deve ser combinação linear do conjunto:

$$M = \bigcup_{i=1}^k \{E_{r,s} : r, s \in X_i\},$$

que tem $d_1^2 + \dots + d_n^2$ elementos e é linearmente independente. Por outro lado, é fácil ver que qualquer combinação linear de M está em W . Assim a conclusão segue.

3.13 Exercício 13

(13) Seja $D \in \mathcal{L}(P_n(\mathbb{R}))$ o operador derivação. Encontre o polinômio minimal de D .

Solução: É fácil ver que $D^{n+1} = 0$. Além disso, para todo:

$$p(t) = a_n t^n + \dots + a_0,$$

então:

$$\begin{aligned} p(D)(x^n) &= (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_{n-2} D^{n-2} + \dots + a_0 I)(x^n) \\ &= a_n D^n(x^n) + a_{n-1} D^{n-1}(x^n) + a_{n-2} D^{n-2}(x^n) + \dots + a_0 I(x^n) \\ &= a_n \frac{n!}{0!} + a_{n-1} \frac{n!}{1!} x + a_{n-2} \frac{n!}{2!} x^2 + \dots + a_0 \frac{n!}{n!} x^n, \end{aligned}$$

assim se $p(t) \neq 0$, então $p(D)(x^n) \neq 0$, aí $p(D) \neq 0$. Logo o polinômio minimal deve ter grau $\geq n+1$, aí deve ser igual a x^{n+1} .

3.14 Exercício 14

(14) Determine o polinômio minimal de cada uma das seguintes matrizes:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Solução:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Temos o seguinte:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x(x-2) - 1(-1) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Assim $m_A(x) \mid (x-1)^2$, porém $A - I \neq 0$, aí $m_A(x) = (x-1)^2$.

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos o seguinte:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-2)(x-1).$$

Assim é fácil ver que $m_A(x) = (x-2)(x-1)$.

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos o seguinte:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = x(x-1)(x-2).$$

Assim é fácil ver que $m_A(x) = x(x-1)(x-2)$.

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos o seguinte:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^3.$$

Assim $m_A(x) \mid (x-1)^3$. Porém:

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que não é nulo, assim $m_A(x) = (x-1)^3$.

(e)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Temos o seguinte:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-a & -b & -c \\ 0 & x-a & -b \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} = (x-a)^3.$$

Assim $m_A(x) \mid (x-a)^3$. Porém:

$$(A - aI)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

assim:

- Se $b = 0$ e $c = 0$, então $m_A(x) = x - a$.
- Se $b = 0$ e $c \neq 0$, então $m_A(x) = (x - a)^2$.
- Se $b \neq 0$ e $c \neq 0$, então $m_A(x) = (x - a)^3$.

3.15 Exercício 15

(15) Seja $C \in \mathcal{M}_n(K)$ a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

Prove que o polinômio característico de C é

$$p_C(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_1t + c_0.$$

Mostre que este é também o polinômio minimal de C . A matriz C é chamada de **matriz companheira** do polinômio $c_0 + c_1t + \dots + c_{n-1}t^{n-1} + t^n$.

Solução:

- (a) Fazendo o desenvolvimento de Laplace sobre a linha superior e “repetindo” o processo, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
p_C(x) &= \det \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x + c_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= x \det \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x + c_{n-1} \end{pmatrix} + (-1)^{n+1} c_0 \det \begin{pmatrix} -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \\
&= x \det \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x + c_{n-1} \end{pmatrix} + (-1)^{n+1} c_0 (-1)^{n-1} \\
&= x \det \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x + c_{n-1} \end{pmatrix} + c_0 \\
&= x \left(x \det \begin{pmatrix} x & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & \dots & -1 & x + c_{n-1} \end{pmatrix} + c_1 \right) + c_0 \\
&= \dots \\
&= x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0
\end{aligned}$$

- (b) Consideremos a base canônica $\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ de K^n . Então temos:

$$\begin{aligned}
C(e_0) &= e_1 \\
C(e_1) &= e_2 \\
&\vdots \\
C(e_{n-2}) &= e_{n-1} \\
C(e_{n-1}) &= -c_{n-1}e_{n-1} - c_{n-2}e_{n-2} - \dots - c_0e_0.
\end{aligned}$$

Para $p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ temos:

$$\begin{aligned}
p(C)(e_0) &= (a_{n-1}C^{n-1} + \dots + a_0)(e_0) \\
&= a_{n-1}C^{n-1}(e_0) + \dots + a_0e_0 \\
&= a_{n-1}e_{n-1} + \dots + a_0e_0,
\end{aligned}$$

áí se $p(x) \neq 0$ então $p(C)(e_0) \neq 0$, áí $p(C) \neq 0$. Logo o polinômio minimal deve ter grau $\geq n$, áí ele deve ser igual ao polinômio característico.

3.16 Exercício 16

(16) *Verdadeiro ou falso?*² Se $A \in \mathcal{M}_n(K)$ é uma matriz triangular superior e A é diagonalizável, então A já é uma matriz diagonal.

Solução: Falso. De fato, considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que A tem posto 1, portanto nulidade 1 e aí a multiplicidade algébrica de 0 é 1. Além disso:

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = (x-1)x,$$

de modo que a multiplicidade algébrica de 0 é 1. Assim A é triangular superior e diagonalizável, mas não é diagonal.

Comentário:

Apesar da resposta ao exercício, ainda podemos concluir que, se $A = (a_{xy})$ é uma matriz triangular superior, então A é diagonalizável se e só se, para $r < s$ tais que $a_{rr} = a_{ss}$, tivermos $a_{rs} = 0$.

De fato, sejam c_1, \dots, c_k os valores distintos que aparecem na diagonal. Então devemos ter:

$$\{1, \dots, n\} = X_1 \cup \dots \cup X_k,$$

em que:

$$X_i = \{r \in \{1, \dots, n\} : d_r = c_i\}.$$

Para i , seja $d_i = |X_i|$. Então o polinômio característico de A é:

$$p_A(x) = (x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k},$$

de modo que para cada i então a multiplicidade algébrica de c_i é d_i . Para cada i , então é fácil ver que a matriz $A - c_i I$, ao ser escalonada, terá nulidade d_i se e só se para $r, s \in X_i$ tais que $r < s$ tivermos $a_{r,s} = 0$. Nisso a conclusão segue.

3.17 Exercício 17

(17) Sejam K um corpo, n um inteiro positivo e $A \in \mathcal{M}_n(K)$ uma matriz de posto $r \leq n$. Mostre que o polinômio minimal de A tem grau menor ou igual a $r + 1$.

Solução: Se $A \in \mathcal{M}_n(K)$ tem posto $r \leq n$, então consideremos a imagem da transformação $x \mapsto Ax$, então ela tem uma base $\{b_1, \dots, b_r\}$, aí completamos uma base $B = \{b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n\}$ de K^n , aí, sendo $C = [A]_B$, existe uma matriz inversível P tal que $C = PAP^{-1}$, e também temos:

$$C = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil provar por indução que para todo $n \geq 0$ temos:

$$C^{n+1} = \begin{pmatrix} X^{n+1} & X^n Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

²Só de perguntar isso tem uma grande chance de ser falso XD

Assim, sendo $p(x) = a_r x^r + \cdots + a_0$ o polinômio característico da matriz X , então, pelo teorema de Cayley-Hamilton, temos $p(X) = 0$, aí:

$$\begin{aligned}
 p(C)C &= \sum_{k=0}^r a_k C^{k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^r a_k \begin{pmatrix} X^{k+1} & X^k Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^r a_k X^{k+1} & \sum_{k=0}^r a_k X^k Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} p(X)X & p(X)Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

assim $p(C)C = 0$, aí $p(A)A = 0$, logo, como $p(x)x$ é um polinômio de grau $r+1$, então o polinômio minimal de A tem grau menor ou igual a $r+1$.

3.18 Exercício 18

(18) Seja K um corpo de característica diferente de 2 e $T: \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K)$ o operador linear definido por $T(A) = A^t$. Mostre que T é diagonalizável, determine os autovalores de T , as dimensões dos autoespaços e uma base de $\mathcal{M}_n(K)$ formada por autovetores de T .

Solução: Seja V_+ o conjunto das matrizes simétricas e seja V_- o conjunto das matrizes antissimétricas. Seja $E_{i,j}$ a matriz que vale 1 na entrada (i,j) e 0 nas demais. Então é fácil ver que o conjunto:

$$B_+ = \{E_{i,i} : 1 \leq i \leq n\} \cup \{E_{i,j} + E_{j,i} : 1 \leq i < j \leq n\}$$

tem $\frac{n^2+n}{2}$ elementos e é uma base de V_+ , e, como a característica do corpo é diferente de 2, então é fácil ver que o conjunto:

$$B_- = \{E_{i,j} - E_{j,i} : 1 \leq i < j \leq n\}$$

tem $\frac{n^2-n}{2}$ elementos e é uma base de V_- . Além disso, para cada $A \in V_+ \cap V_-$, então $A = A^t = -A$, aí $2A = 0$, aí $A = 0$. Logo V_+ e V_- são independentes. Assim $B_+ \cup B_-$ é uma base de n^2 elementos do espaço $V_+ + V_-$. Porém a dimensão de $\mathcal{M}_n(K)$ é n^2 , assim $\mathcal{M}_n(K) = V_+ + V_-$. Com isso temos as respostas para todas as questões do exercício. Mais especificamente, T é diagonalizável, os autovalores são 1 e -1 , a dimensão dos autoespaços $V_T(1)$ e $V_T(-1)$ são respectivamente $\frac{n^2+n}{2}$ e $\frac{n^2-n}{2}$, e $B_+ \cup B_-$ é uma base de autovetores de T .

3.19 Exercício 19

(19) Mostre que uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ é inversível se, e somente se, o termo constante de seu polinômio minimal é diferente de zero.

Solução: Temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
 A \text{ não é inversível} &\Leftrightarrow -A \text{ não é inversível} \\
 &\Leftrightarrow \det(-A) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \det(0I - A) = 0 \\
 &\Leftrightarrow p_A(0) = 0 \\
 &\Leftrightarrow m_A(0) = 0.
 \end{aligned}$$

3.20 Exercício 20

(20) Seja $A \in \mathcal{M}_n(K)$ uma matriz inversível.

(a) Mostre que existe um polinômio $p(t) \in K[t]$ tal que $A^{-1} = p(A)$.

(b) Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontre $p(t)$ tal que $p(A) = A^{-1}$.

Solução:

(a) Sabemos que a soma dos autovalores de uma matriz corresponde à seu traço, e o produto dos autovalores corresponde ao determinante. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, também é conhecido que $p_A(A) = 0$. Assim, seja o polinômio característico dado por:

$$p_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \dots + a_1t + a_0.$$

Sendo A invertível, então $a_0 = p_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) \neq 0$ e também:

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0I = 0,$$

portanto temos:

$$A \cdot \frac{-1}{a_0} \left(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1 \right) = I.$$

Logo, considerando o polinômio $p(t) \in K[t]$ dado por

$$p(t) = \frac{-1}{a_0} \left(t^{n-1} + a_{n-1}t^{n-2} + a_{n-2}t^{n-3} + \dots + a_1 \right),$$

então:

$$A \cdot p(A) = I,$$

de modo que:

$$p(A) = A^{-1}.$$

(b) Encontremos primeiramente o polinômio característico de A :

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(xI - A) \\ &= \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 & -4 \\ -3 & x & -1 \\ -2 & 0 & x-1 \end{pmatrix} \\ &= x^3 - 3x^2 - 9x + 1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$p_A(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1.$$

Pelo item anterior, o polinômio $p(t)$ procurado é

$$p(t) = \frac{-1}{1}(t^2 - 3t - 9) \Rightarrow p(t) = \boxed{p(t) = -t^2 + 3t + 9}$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} p(A) &= -A^2 + 3A + 9 \\ &= -\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + 3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 15 & 2 & 13 \\ 8 & 3 & 13 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 9 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -10 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e basta verificar que a matriz é inversa de A .

3.21 Exercício 21

(21) Determine todas as matrizes $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nilpotentes e calcule $\det(A + I)$ e $\det(A - I)$.

Solução: Se A é nilpotente, então existe $k \geq 1$ tal que $A^k = 0$, aí o polinômio minimal deve ser da forma $m_A(x) = x^l$ com $l \leq k$, mas, pelo teorema de Cayley-Hamilton, o grau de $m_A(x)$ deve ser ≤ 2 , aí $l \leq 2$, aí $A^2 = 0$. Agora, sendo:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

então:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \beta(\alpha + \delta) \\ \gamma(\alpha + \delta) & \beta\gamma + \delta^2 \end{pmatrix},$$

assim é fácil ver que $A^2 = 0$ se e somente se $\alpha + \delta = 0$ e $\alpha^2 + \beta\gamma = 0$. Assim, as matrizes nilpotentes em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ são as matrizes da forma:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta\gamma = -\alpha^2.$$

Calculemos $\det(A + I)$ e $\det(A - I)$:

- Temos

$$\det(A + I) = \det \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} \alpha + 1 & \beta \\ \gamma & -\alpha + 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$(\alpha + 1)(1 - \alpha) - \beta\gamma = 1 - \alpha^2 - (-\alpha^2) = 1 - \alpha^2 + \alpha^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\det(A + I) = 1}$$

- Temos

$$\det(A - I) = \det \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} \alpha - 1 & \beta \\ \gamma & -\alpha - 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$(\alpha - 1)(-1 - \alpha) - \beta\gamma = 1 - \alpha^2 - (-\alpha^2) = 1 - \alpha^2 + \alpha^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\det(A - I) = 1}$$

3.22 Exercício 22

(22) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} e $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V . Seja $T: V \rightarrow V$ o operador linear definido por

$$T(e_1) = e_2 - e_1, T(e_2) = e_3 - e_1, T(e_3) = e_3 - e_2.$$

- (a) Mostre que T não é diagonalizável.
- (b) Calcule T^{212} (Dica: utilize o Teorema de Cayley-Hamilton)

Solução:

- (a) Em relação à base canônica, temos:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim temos:

$$p_T(x) = \det \begin{pmatrix} x + 1 & 1 & 0 \\ -1 & x & +1 \\ 0 & -1 & x - 1 \end{pmatrix} = x(x^2 + 1).$$

Assim é fácil ver que T não é diagonalizável sobre \mathbb{R} , pois o polinômio característico não se decompõe em fatores lineares.

- (b) Pelo teorema de Cayley-Hamilton, temos $T(T^2 + 1) = 0$, assim $T^3 = -T$, desse modo para todo $n \geq 1$ temos $T^{n+2} = -T^n$. Temos:

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que $T^{212} = -T^{210} = T^{208} = \dots = T^4 = -T^2$, assim:

$$T^{212} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Aviso:

De agora em diante, utilizaremos o fato de que um operador T sobre um espaço V de dimensão finita é diagonalizável se e somente se o polinômio minimal é produto de fatores lineares distintos.

3.23 Exercício 23

(23) Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador diagonalizável e seja W um subespaço de V T -invariante. Prove que a restrição de T a W , $T|_W \in \mathcal{L}(W)$ é diagonalizável.

Solução: É fácil ver que um operador é diagonalizável se e somente se todo elemento $v \in V$ for uma soma de autovetores. Se T é um operador diagonalizável e W for um subespaço T -invariante, então basta mostrar que se v_1, \dots, v_n são autovetores associados a autovalores distintos c_1, \dots, c_n e $v_1 + \dots + v_n \in W$, então $v_1 \in W$ e \dots e $v_n \in W$. Faremos isto por indução em n . Se $n = 1$, então é fácil. Se é válida para $n - 1$, então para v_1, \dots, v_{n-1}, v_n autovetores associados a autovalores distintos c_1, \dots, c_{n-1}, c_n , se:

$$w = v_1 + \dots + v_{n-1} + v_n \in W,$$

então temos:

$$T(w) = T(v_1) + \dots + T(v_{n-1}) + T(v_n),$$

aí:

$$T(w) = c_1 v_1 + \dots + c_{n-1} v_{n-1} + c_n v_n,$$

assim:

$$T(w) - c_n w = (c_1 - c_n) v_1 + \dots + (c_{n-1} - c_n) v_{n-1},$$

mas $T(w) - c_n w \in W$ e os $(c_1 - c_n) v_1, \dots, (c_{n-1} - c_n) v_{n-1}$ são autovetores associados a autovalores distintos c_1, \dots, c_{n-1} , aí pela hipótese de indução temos $(c_1 - c_n) v_1 \in W, \dots, (c_{n-1} - c_n) v_{n-1} \in W$, mas $c_1 - c_n \neq 0, \dots, c_{n-1} - c_n \neq 0$, aí $v_1 \in W, \dots, v_{n-1} \in W$, aí $v_n = w - (v_1 + \dots + v_{n-1}) \in W$. Assim todo elemento $w \in W$ é soma de autovetores de $T|_W$. Logo $T|_W$ é diagonalizável.

Solução alternativa: (Válida somente para espaços de dimensão finita)

Seja $B' = \{e_1, \dots, e_m\}$ uma base de W e completemos uma base $B = \{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ de V . Então o operador T está representado por uma matriz da forma:

$$T = \begin{pmatrix} X & ? \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

É fácil provar por indução que, para todo n então T^n é uma matriz da forma:

$$\begin{pmatrix} X^n & ? \\ 0 & Y^n \end{pmatrix},$$

assim para todo polinômio $p(x)$ temos:

$$p(T) = \begin{pmatrix} p(X) & ? \\ 0 & p(Y) \end{pmatrix},$$

em particular temos:

$$0 = m_T(T) = \begin{pmatrix} m_T(X) & ? \\ 0 & m_T(Y) \end{pmatrix},$$

logo temos $m_T(X) = 0$, aí $m_X(x) \mid m_T(x)$. Assim, se T é diagonalizável, então $m_T(x)$ é um produto de fatores lineares distintos, aí $m_X(x)$ é um produto de fatores lineares distintos, mas X representa a transformação $T|_W$, aí $T|_W$ é diagonalizável.

3.24 Exercício 24

(24) Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear tal que todo subespaço de V é T -invariante. Mostre que T é um múltiplo do operador identidade.

Solução: Seja B uma base de V .

Para $b \in B$ então Kb é T -invariante, aí existe um único $\lambda_b \in K$ tal que $T(b) = \lambda_b b$.

Para $b, c \in B$ tais que $b \neq c$, então $K(b + c)$ é T -invariante, aí existe um $\lambda \in K$ tal que $T(b + c) = \lambda(b + c)$, aí $T(b) + T(c) = \lambda b + \lambda c$, aí $\lambda_b b + \lambda_c c = \lambda b + \lambda c$, aí $\lambda_b = \lambda$ e $\lambda_c = \lambda$, aí $\lambda_b = \lambda_c$.

Logo existe um $\lambda \in K$ tal que $\forall b \in B : \lambda_b = \lambda$, aí para todo $b \in B$ temos $T(b) = \lambda b$; logo $T = \lambda I$.

3.25 Exercício 25

(25) Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear e seja W um subespaço de V . Prove que W é T -invariante se, e somente se, W^0 é T^t -invariante.

Solução: Primeiramente, lembremos que

$$W^0 = \{f \in V^* \mid \forall w \in W : f(w) = 0\}$$

(a) Se W é T -invariante, então temos que $T(W) \subseteq W$. Dado $f \in W^0$, veja que

$$T^t(f) = f \circ T$$

e temos também para $w \in W$:

$$(f \circ T)(w) = f(T(w)) \in f(T(W)) \subseteq f(W) = 0,$$

aí:

$$(f \circ T)(w) = 0;$$

logo:

$$T^t(W^0) \subseteq W^0.$$

Logo, W^0 é T^t -invariante.

(b) Se W^0 é T^t -invariante, então

$$T^t(W^0) \subseteq W^0 = \{f \in \mathcal{L}(V) \mid f(W) = 0\}.$$

Seja $w \in W$. Para $f \in W^0$, temos $T^t(f) \in W^0$, aí $f \circ T \in W^0$, aí $(f \circ T)(w) = 0$. Ou seja, $\forall f \in W^0 : f(T(w)) = 0$. Suponhamos por absurdo que $T(w) \notin W$. Consideremos $(v_i)_{i \in J}$ uma base para W e completemo-la para uma base $(v_i)_{i \in I}$ de V . Seja:

$$T(w) = \sum_{j \in K} \alpha_j v_j,$$

em que K seja um subconjunto finito de I . Tome $k \in K \setminus J$ tal que $\alpha_k \neq 0$, que existe, pois $T(w) \notin W$. Considere $\varphi_k : V \rightarrow K$ tal que:

$$\varphi(v_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k \\ 0, & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

Note que $\varphi_k \in W^0$. Mas teremos o seguinte:

$$\varphi_k(T(w)) = \varphi_k\left(\sum_{j \in K} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j \in K} \alpha_j \varphi_k(v_j) = \alpha_k \neq 0.$$

3.26 Exercício 26

(26) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que T é diagonalizável se, e somente se, para todo subespaço T -invariante W de V existe um subespaço T -invariante U tal que

$$V = W \oplus U$$

Observação: Um operador linear T é dito *semi-simples* quando todo subespaço T -invariante de V tem um complemento que é também T -invariante.

Solução:

(a) Se T é diagonalizável, então seja B uma base de autovetores, aí, para subespaço W que seja T -invariante, seja C uma base de W . Então existe uma base E de V tal que $C \subseteq E \subseteq B \cup C$, aí para $e \in E \setminus C$ então $e \in B$, aí e é autovetor. Assim seja U o subespaço gerado por $E \setminus C$, então para $e \in E \setminus C$ então $e \in B$, aí existe $\lambda \in K$ tal que $T(e) = \lambda e$, aí $T(e) \in U$; logo U é T -invariante, e além disso é fácil ver que $V = W \oplus U$.

- (b) Se todo subespaço T -invariante tiver complemento vetorial T -invariante então sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ os autovalores distintos, e seja:

$$W = V_T(\lambda_1) + \dots + V_T(\lambda_k),$$

então W é T -invariante, aí existe U subespaço T -invariante tal que $V = W \oplus U$, aí existe uma base B tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

aí $p_T(x) = p_X(x)p_Y(x)$, mas:

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \dots (x - \lambda_k)^{r_k},$$

aí:

$$p_Y(x) = (x - \lambda_1)^{s_1} \dots (x - \lambda_k)^{s_k}$$

com $s_i \leq r_i$ para todo i , aí se existe i tal que $s_i > 0$ então $p_Y(\lambda_i) = 0$, aí existe $u \neq 0$ tal que $u \in U$ e $T(u) = \lambda_i u$, aí $u \in W$, contradição; logo $\forall i : s_i = 0$, aí $p_Y(x) = 1$, aí $U = 0$, aí $W = V$, aí T é diagonalizável.

3.27 Exercício 27

(27) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{C} e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) T é diagonalizável e $T^{2n} = T^n$.
 (b) $T^{n+1} = T$.

Solução:

- (a) Se T é diagonalizável e $T^{2n} = T^n$, então existe uma base B tal que T seja representada pela matriz:

$$T = \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_k \end{pmatrix}.$$

Como $T^{2n} = T^n$, então para todo i temos $c_i^{2n} = c_i^n$, aí $c_i^{n+1} = c_i$; logo $T^{n+1} = T$.

- (b) Se $T^{n+1} = T$, então, sendo $m_T(x)$ o polinômio minimal de T , temos:

$$m_T(x) \mid x^{n+1} - x = x(x^n - 1) = x \prod_{k=0}^{n-1} \left(x - \operatorname{cis} \left(\frac{2k\pi}{n} \right) \right),$$

assim $m_T(x)$ é produto de fatores lineares distintos, aí T é diagonalizável.

3.28 Exercício 28

(28) Seja $A \in \mathcal{M}_n(K)$ e o operador

$$\begin{aligned} T_A &: \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K) \\ M &\longmapsto T_A(M) = AM - MA \end{aligned}$$

Prove que se A é diagonalizável então T_A é diagonalizável.

Solução: Se A é diagonalizável, então existem uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D tais que $A = PDP^{-1}$. Consideremos primeiro o operador T_D . Seja:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}.$$

Então, para matriz $M = (m_{i,j})$ e para $i, j = 1, \dots, n$, a entrada (i, j) da matriz $DM - MD$ é $(d_i - d_j)m_{i,j}$; assim, para $i, j = 1, \dots, n$, sendo $E_{i,j}$ a matriz que vale 1 na entrada (i, j) e 0 nas demais, então é fácil ver que $T_D(E_{i,j}) = (d_i - d_j)E_{i,j}$, assim $E_{i,j}$ é autovetor de T_D . Porém, para $M \in \mathcal{M}_n(K)$, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} T_A(M) &= AM - MA \\ &= PDP^{-1}M - MPDP^{-1} \\ &= P(DP^{-1}MP - P^{-1}MPD)P^{-1} \\ &= PT_D(P^{-1}MP)P^{-1}. \end{aligned}$$

Logo, para $i, j = 1, \dots, n$, é fácil ver que $PE_{i,j}P^{-1}$ é autovetor de T_A . Além disso, as matrizes $PE_{i,j}P^{-1}$ em que $i, j = 1, \dots, n$ formam uma base de $\mathcal{M}_n(K)$. Portanto T_A é diagonalizável.

3.29 Exercício 29

(29) Seja V um K -espaço de dimensão finita e sejam $E_1, E_2, \dots, E_k \in \mathcal{L}(V)$ tais que $E_1 + E_2 + \dots + E_k = I$.

- (a)** Prove que se $E_i E_j = 0$, para $i \neq j$, então $E_i^2 = E_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$.
- (b)** Prove que se $E_i^2 = E_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$ e a característica de K é zero, então $E_i E_j = 0$, sempre que $i \neq j$.

Solução:

- (a)** Se $E_i E_j = 0$ para $i \neq j$, então para todo i temos:

$$\begin{aligned} E_i &= E_i I \\ &= E_i (E_1 + \dots + E_n) \\ &= E_i E_1 + \dots + E_i E_n \\ &= E_i E_i, \end{aligned}$$

ou seja, $E_i^2 = E_i$.

- (b) Se $E_i^2 = E_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$ e a característica de K é zero, então seja $P_i = \text{Im}(E_i)$ e $K_i = \text{Ker}(E_i)$, então é fácil ver que $V = P_i \oplus K_i$, aí existe base B_i de V tal que:

$$[E_i]_{B_i} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que $\text{tr}(E_i) = \dim(P_i) \cdot 1_K$. Além disso, $\text{tr}(I) = \dim(V) \cdot 1_K$. Como:

$$I = E_1 + \dots + E_k,$$

então:

$$V = P_1 + \dots + P_k$$

e também:

$$\text{tr}(I) = \text{tr}(E_1) + \dots + \text{tr}(E_k),$$

aí:

$$\dim(V) \cdot 1_K = \dim(P_1) \cdot 1_K + \dots + \dim(P_k) \cdot 1_K,$$

mas a característica de K é zero, aí:

$$\dim(V) = \dim(P_1) + \dots + \dim(P_k).$$

Portanto, para k , temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \dim(\sum_i P_i) \\ &= \dim(P_k) + \dim(\sum_{i \neq k} P_i) - \dim(P_k \cap \sum_{i \neq k} P_i) \\ &\leq \dim(P_k) + \sum_{i \neq k} \dim(P_i) - \dim(P_k \cap \sum_{i \neq k} P_i) \\ &= \sum_i \dim(P_i) - \dim(P_k \cap \sum_{i \neq k} P_i) \\ &= \dim(V) - \dim(P_k \cap \sum_{i \neq k} P_i), \end{aligned}$$

aí:

$$\dim(P_k \cap \sum_{i \neq k} P_i) \leq 0,$$

aí:

$$P_k \cap \sum_{i \neq k} P_i = 0;$$

logo:

$$V = P_1 \oplus \dots \oplus P_k.$$

Assim, para $i \neq j$, então para v temos:

$$E_j(v) = E_1 E_j(v) + \dots + E_k E_j(v),$$

aí:

$$0 = \sum_{l \neq j} E_l E_j(v),$$

mas:

$$\forall l \neq j : E_l E_j(v) \in P_l,$$

aí:

$$\forall l \neq j : E_l E_j(v) = 0,$$

aí:

$$E_i E_j(v) = 0;$$

logo:

$$E_i E_j = 0.$$

3.30 Exercício 30

(30) Seja $A \in \mathcal{M}_n(K)$ e seja

$$p_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$$

o polinômio característico de A . Mostre que $a_{n-1} = -\text{tr}(A)$, o traço de A , e $a_0 = (-1)^n \det(A)$.

Solução: Temos o seguinte:

$$p_A(x) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n (x\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)})$$

Para $\sigma \in S_n$, se $\sigma \neq I$, então existe j tal que $\sigma(j) \neq j$, aí sendo $k = \sigma(j)$ temos $j \neq k$ e $\sigma(j) \neq j$ e $\sigma(k) \neq k$, assim temos:

$$\text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n (x\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)}) = \text{sgn}(\sigma) a_{j,\sigma(j)} a_{k,\sigma(k)} \prod_{i \neq j,k} (x\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)}),$$

que tem grau no máximo $n - 2$. Assim, o coeficiente de grau $n - 1$ do polinômio:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n (x\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)})$$

é igual ao coeficiente de grau $n - 1$ do polinômio:

$$\text{sgn}(I) \prod_{i=1}^n (x\delta_{i,I(i)} - a_{i,I(i)}) = \prod_{i=1}^n (x - a_{i,i}),$$

que é igual a $-(a_1 + \dots + a_n)$, que é $-\text{tr}(A)$. Além disso, é fácil ver que:

$$a_0 = p_A(0) = \det(0I - A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A).$$

Questões Suplementares

3.31 Exercício 31

(31) [Algoritmo de Faddeev-LeVerrier] Nesse exercício, vamos apresentar um algoritmo para o cálculo direto dos coeficientes do polinômio característico de uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$, conhecido como Algoritmo de Faddeev-LeVerrier.³

Solução:

3.32 Exercício 32

(32) Seja $K = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^3+x+1 \rangle}$. Dada a matriz

encontre uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D em $\mathbb{M}_3(K)$ tais que $PAP^{-1} = D$.

Solução:

³A título de curiosidade, Urbain Le Verrier (1811-1877) foi quem descobriu Netuno, ao prever sua existência matematicamente.

3.33 Exercício 33

(33) Seja $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Prove que

$$P_A(x) = \frac{1}{6}[\text{tr}^3(A) + 2\text{tr}(A^3) - 3\text{tr}(A)\text{tr}(A^2)] - \frac{1}{2}[\text{tr}^2(A) - \text{tr}(A^2)]x + \text{tr}(A)x^2 - x^3,$$

onde $P_A(x)$ denota o polinômio característico de A .

Solução:

3.34 Exercício 34

(34) Seja $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ uma matriz não inversível tal que $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(A^3)$. Prove que se $\text{tr}(A)$ é um número natural maior do que 1, então $\text{tr}(A^3) \in \mathbb{Q}$.

Solução:

3.35 Exercício 35

(35) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(a) Prove que A é semelhante à matriz

$$N = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Encontre uma matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $PAP^{-1} = N$ e satisfaz as seguintes condições: a soma dos elementos de P é n , $\text{tr}(P) = 1$ e $\det(P) = -(n^{n-1})$.

Solução:

4 Lista 3

Aviso:

De agora em diante, utilizaremos o fato de que um operador T sobre um espaço V de dimensão finita é triangularizável se e somente se o polinômio minimal é produto de fatores lineares.

4.1 Exercício 1

(1) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $[T]_{can} = A$. Encontre a decomposição primária de T .

Solução: Para encontrar a decomposição primária de T , precisamos encontrar seu polinômio característico, escrevê-lo na forma $p(t) = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$, com p_1, \dots, p_k irredutíveis mônicos distintos.

(a) Encontrando o polinômio característico de A :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda - 6 & 3 & 2 \\ -4 & \lambda + 1 & 2 \\ -10 & 5 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1) \end{aligned}$$

(b) Decompondo $V = \mathbb{R}^3$ em soma direta: Como $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)$, podemos escrever

$$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2,$$

onde $V_1 = \text{Ker}(A - 2I)$ e $V_2 = \text{Ker}(A^2 + I)$.

(c) Encontrando geradores para V_1 e V_2 : Temos que

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 10 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 10x_1 - 5x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{x_3}{2}, x_2 = 0.$$

Logo, se $v \in V_1 = \text{Ker}(A - 2I)$, temos: $v = \left(\frac{x_3}{2}, 0, x_3\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$.

Podemos tomar $v_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$, e temos que $V_1 = \langle v_1 \rangle$, o que mostra que V_1 tem dimensão 2.

E também temos que:

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - 5x_2 = 0 \\ 10x_1 - 10x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Logo, se $v \in V_1 = \text{Ker}(A^2 + I)$, temos:

$$v = (x_2, x_2, x_3) = x_2(1, 1, 0) + x_3(0, 0, 1).$$

Daí, podemos escolher os vetores

$$v_2 = (1, 1, 0) \quad \text{e} \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

E então $V_2 = \langle v_2, v_3 \rangle$. Além disso, V_2 tem dimensão 2.

- (d) Compor uma base com os geradores de V_1 e V_2 e escrever a matriz de T nessa base:

Podemos considerar a base

$$B = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\right\}$$

Calculemos T nessa base:

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2v_1 + 0v_2 + 0v_3$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 0v_1 + 3v_2 + 5v_3$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = 0v_1 - 2v_2 - 3v_3$$

Logo, temos a representação de T na base B como uma matriz diagonal em blocos como se vê abaixo:

$$[T]_B = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \end{array} \right]$$

O bloco (2) corresponde à restrição de T ao subespaço invariante $V_1 = \text{Ker}(T - 2I)$, enquanto o bloco

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

é produzido pela restrição de T ao subespaço invariante $V_2 = \text{Ker}(T^2 + I)$.

4.2 Exercício 2

(2) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo K . Seja \mathcal{F} uma família de operadores triangularizáveis que comutam. Prove que:

- (a) Existe um autovetor comum a todos os operadores de \mathcal{F} , isto é, existe $v \in V$ não nulo tal que, para cada $T \in \mathcal{F}$, $T(v) = \lambda_T v$, para algum $\lambda_T \in K$. (*Sugestão:* Use indução na dimensão de V .)

- (b) Mostre que a família

$$\mathcal{G} = \{T^t \in \mathcal{L}(V^*) | T \in \mathcal{F}\}$$

é uma família de operadores lineares que comutam.

- (c) Use o item (a) para obter $f \in V^*$ autovetor comum à família \mathcal{G} . Prove que $\ker f$ é invariante sob T , para todo $T \in \mathcal{F}$.
- (d) Use indução na dimensão de V (e o item (c)) para provar que existe uma base B de V tal que $[T]_B$ é triangular, para todo $T \in \mathcal{F}$.

Solução:

(a) Suponhamos a afirmação para espaços vetoriais de dimensão menor que n . Seja V um espaço com $\dim(V) = n$. Seja \mathcal{F} conjunto de operadores triangularizáveis que comutam. Se todo elemento de \mathcal{F} é múltiplo da identidade, então acaba. Senão, então existe $T \in \mathcal{F}$ que não é múltiplo da identidade, então, como T é triangularizável, então existe um autovalor c , aí, sendo $W = \text{Ker}(T - cI)$, então $W \neq 0$ e $\dim(W) < n$, aí, como os elementos de \mathcal{F} se comutam, então W é invariante para todo elemento de \mathcal{F} . Para $U \in \mathcal{F}$, então m_U é produto de fatores lineares, aí, como $m_{U|_W} \mid m_U$, então $m_{U|_W}$ é produto de fatores lineares, aí $U|_W$ é triangularizável. Como $\dim(W) < n$, então existe um $v \in W$ não nulo tal que para cada $U \in \mathcal{F}$ exista um $\lambda \in K$ tal que $(U|_W)(v) = \lambda v$, aí $U(v) = \lambda v$; aí acaba.

(b) Para $T, U \in \mathcal{F}$ temos $T \circ U = U \circ T$, aí para $f \in V^*$ temos:

$$\begin{aligned} T^t(U^t(f)) &= T^t(f \circ U) \\ &= (f \circ U) \circ T \\ &= f \circ (U \circ T) \\ &= f \circ (T \circ U) \\ &= (f \circ T) \circ U \\ &= U^t(f \circ T) \\ &= U^t(T^t(f)); \end{aligned}$$

logo $T^t U^t = U^t T^t$. Além disso, para todo $T \in \mathcal{F}$, então é fácil ver que T^t é triangularizável.

(c) Pelo item (a), então existe $f \in V^*$ não nulo tal que para todo $T \in \mathcal{F}$ exista $\lambda \in K$ tal que $T^t(f) = \lambda f$, aí $f \circ T = \lambda f$, aí para $v \in \text{Ker}(f)$ então $f(v) = 0$, aí $\lambda f(v) = 0$, aí $f(T(v)) = 0$, aí $T(v) \in \text{Ker}(f)$; aí $\text{Ker}(f)$ é T -invariante.

(d) Suponhamos a afirmação válida para espaços com dimensão menor que n . Seja V tal que $\dim(V) = n$. Pegue um $f \in V^*$ não nulo tal que $\text{Ker}(f)$ seja invariante para todo elemento de \mathcal{F} , aí seja $W = \text{Ker}(f)$, então temos $n = \dim(V) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(W) + 1$, aí $\dim(W) = n - 1$. Para $T \in \mathcal{F}$, então m_T é produto de fatores lineares, mas $m_{T|_W} \mid m_T$, aí $m_{T|_W}$ é produto de fatores lineares, aí $T|_W$ é triangularizável. Assim pela hipótese de indução existe base B de $\text{Ker}(f)$ tal que para todo $T \in \mathcal{F}$ então $[T|_W]_B$ seja triangular, aí pegando um e_n tal que $e_n \notin W$, então $C = B \cup \{e_n\}$ é uma base e aí para todo $T \in \mathcal{F}$ existe um $\lambda \in K$ tal que:

$$[T]_C = \begin{pmatrix} [T|_W]_B & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

aí $[T]_C$ é triangular.

4.3 Exercício 3

(3) Sejam V um K -espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear que comuta com todo operador diagonalizável de $\mathcal{L}(V)$. Prove que T é um múltiplo escalar do operador identidade.

Solução: Seja $A \in M_n(K)$ uma matriz que comute com toda matriz diagonalizável.

Para todo i , considerando a matriz:

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & & 1 & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que vale 1 na entrada (i, i) e 0 nas outras, então B_i é diagonal, aí $B_i A = A B_i$, mas:

$$B_i A = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ a_{i,1} & & a_{i,i} & a_{i,n} \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$A B_i = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,i} & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & a_{i,i} & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & a_{n,i} & 0 \end{pmatrix},$$

assim para todo $j \neq i$ temos $a_{i,j} = 0$ e $a_{j,i} = 0$. Portanto A é uma matriz diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix},$$

aí para i, j tais que $i < j$, consideremos a matriz:

$$C_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & & 1 & 1 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que vale 1 nas entradas (i, i) e (i, j) e vale 0 nas outras, então $C_{i,j}$ é diagonalizável, aí $C_{i,j} A = A C_{i,j}$, mas:

$$C_{i,j} A = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & a_i & a_j & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$AC_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \ddots \\ 0 & a_i & & a_i & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ai $a_i = a_j$. Logo A é múltiplo da identidade.

4.4 Exercício 4

(4) Seja $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ uma matriz não nula tal que $A^3 = -A$. Mostre que A é semelhante à matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução: Considerando o polinômio $f(x) = x^3 + x$, então $f(A) = 0$. Ai, como a decomposição em fatores irredutíveis é $f(x) = x(x^2 + 1)$, então seja $V_1 = \text{Ker}(A)$ e $V_2 = \text{Ker}(A^2 + I)$, então pela decomposição primária temos $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2$ e os subespaços V_1 e V_2 são A -invariantes. Assim sejam $A_1 = A|_{V_1}$ e $A_2 = A|_{V_2}$. Como $A \neq 0$, então $V_1 \neq V$, ai $\dim(V_1) \leq 2$, ai $\dim(V_2) \geq 1$. Além disso, temos $A_2^2 + I = 0$, ai $A_2^2 = -I$, ai $\det(A_2)^2 = (-1)^{\dim(V_2)}$, ai $\dim(V_2)$ deve ser par, ai $\dim(V_2) = 2$, ai $\dim(V_1) = 1$. Logo, pegue um $u \in V_1$ não nulo qualquer, então $\{u\}$ é base de V_1 . Pegue $e \in V_2$ não nulo, então mostraremos que $\{e, A_2(e)\}$ é base de V_2 . De fato, para $a, b \in \mathbb{R}$, se $ae + bA_2(e) = 0$, então $A_2(ae + bA_2(e)) = 0$, ai $-be + A_2(e) = 0$, ai:

$$0 = a0 - b0 = a(ae + bA_2(e)) - b(-be + A_2(e)) = (a^2 + b^2)e,$$

ai $a^2 + b^2 = 0$, ai $a = b = 0$. Assim temos uma base B tal que:

$$[A]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.5 Exercício 5

(5) Sejam V um K -espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V)$ com polinômio minimal

$$m_T(t) = p_1(t)^{m_1} \cdot \dots \cdot p_k(t)^{m_k},$$

onde $p_i(t)$ são distintos e irredutíveis em $K[t]$. Seja $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ a decomposição primária de V , isto é, $V_i = \text{Ker}(p_i(T)^{m_i})$. Seja W um subespaço T -invariante de V . Mostre que

$$W = (W \cap V_1) \oplus \dots \oplus (W \cap V_k).$$

Solução: Seja:

$$f_i(t) = \frac{m_T(t)}{p_i(t)^{m_i}}.$$

Então f_1, \dots, f_k são primos entre si, aí existem g_1, \dots, g_k tais que:

$$f_1 g_1 + \dots + f_k g_k = 1.$$

Assim, para $w \in W$, então:

$$w = f_1(T)g_1(T)(w) + \dots + f_k(T)g_k(T)(w),$$

e também:

$$p_i(T)^{m_i} f_i(T)g_i(T)(w) = m_T(T)g_i(T)(w) = 0,$$

aí:

$$f_i(T)g_i(T)(w) \in V_i,$$

mas W é T -invariante, aí:

$$f_i(T)g_i(T)(w) \in W,$$

aí:

$$f_i(T)g_i(T)(w) \in W \cap V_i.$$

Portanto:

$$W = (W \cap V_1) + \dots + (W \cap V_k),$$

e é fácil ver que esta soma é direta.

4.6 Exercício 6

(6) Sejam V um K -espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V)$ com polinômio característico

$$p_T(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} (t - \lambda_2)^{n_2} \dots (t - \lambda_k)^{n_k}$$

e polinômio minimal

$$m_T(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} (t - \lambda_2)^{m_2} \dots (t - \lambda_k)^{m_k},$$

com λ_i distintos.

(a) Prove que, para cada $i = 1, 2, \dots, k$, temos que

$$\dim \text{Ker}(T - \lambda_i I)^{m_i} = n_i.$$

(b) Seja

$$W_i = \{v \in V : (T - \lambda_i I)^r(v) = 0, \text{ para algum inteiro } r \geq 0\}.$$

Prove que $W_i = \text{Ker}(T - \lambda_i I)^{m_i}$, para todo $i = 1, \dots, k$.

Solução:

(a) Sendo $V_i = \text{Ker}(T - \lambda_i I)^{m_i}$, então pela decomposição primária temos $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ e cada V_i é T -invariante. Além disso, sendo $V'_i = \text{Ker}(T - \lambda_i I)^{n_i}$, então pela decomposição primária temos $V = V'_1 \oplus \dots \oplus V'_k$ e cada V'_i é T -invariante. Mas também temos $V_i \subseteq V'_i$ para cada i . Logo é fácil ver que $V_i = V'_i$ para todo i . Para cada i seja $T_i = T|_{V_i}$. Então $p_T = p_{T_1} \dots p_{T_k}$. Além disso, para cada i temos $m_{T_i}(t) = (t - \lambda_i)^{m_i}$. Assim λ_i é o único autovalor de T_i em V_i , mas p_{T_i} é produto de fatores lineares, assim $p_{T_i}(t) = (t - \lambda_i)^{r_i}$ para algum r_i . Assim $p_T(t) = (t - \lambda_1)^{r_1} \dots (t - \lambda_k)^{r_k}$, aí, pela fatoração única de polinômios, para todo i temos $r_i = n_i$, aí $p_{T_i} = (t - \lambda_i)^{n_i}$, aí $\dim(V_i) = n_i$, aí $\dim(\text{Ker}(T - \lambda_i I)^{m_i}) = n_i$.

(b) É fácil ver que para todo i temos $V_i \subseteq W_i$. Agora, para cada i , então para $v \in W_i$ então existe r tal que $(T - \lambda_i I)^r(v) = 0$, mas seja $v = v_1 + \dots + v_k$ com $v_j \in V_j$, então $0 = \sum_j (T - \lambda_i I)^r(v_j)$ e para todo j temos $(T - \lambda_i I)^r(v_j) \in V_j$, aí para todo $j \neq i$ temos $(T - \lambda_i I)^r(v_j) = 0$, mas $(T - \lambda_j I)^{m_j}(v_j) = 0$ e $(t - \lambda_i)^r$ e $(t - \lambda_j)^{m_j}$ são primos entre si, aí por Bézout temos $v_j = 0$; logo $v = v_i$, aí $v \in V_i$. Logo, $V_i = W_i$, ou seja, $W_i = \text{Ker}(T - \lambda_i I)^{m_i}$.

4.7 Exercício 7

(7) Seja N um operador linear nilpotente em um espaço vetorial de dimensão finita n . Prove que o polinômio característico de N é $p_N(t) = t^n$.

Solução: Seja N um operador linear nilpotente. Então existe um $r \geq 1$ tal que $N^r = 0$.

Primeiro mostraremos que, se W é um subespaço tal que $W \neq V$, então existe um $\alpha \in V$ tal que $\alpha \notin W$ e $N(\alpha) \in W$. De fato, pegue um $\beta \in V$ tal que $\beta \notin W$, aí seja s o menor tal que $N^s(\beta) \in W$, então $s \geq 1$ e também $s \leq r$, assim $N^{s-1}(\beta) \notin W$ e $N(N^{s-1}(\beta)) \in W$.

Agora, apliquemos repetidamente o discurso do parágrafo anterior para chegarmos numa base ordenada (a_1, \dots, a_n) . Seja $W_0 = 0$. Se $W_0 \neq V$, então pegue um $\alpha_1 \in V$ tal que $\alpha_1 \notin W_0$ e $N(\alpha_1) \in W_0$, e aí seja W_1 o subespaço gerado por α_1 . Se $W_1 \neq V$, então pegue um $\alpha_2 \in V$ tal que $\alpha_2 \notin W_1$ e $N(\alpha_2) \in W_1$, e aí seja W_2 o subespaço gerado por α_1, α_2 . Continue dessa maneira até obtermos n vetores $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. É fácil ver que, sendo $B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ a base ordenada obtida, então $[N]_B$ é uma matriz estritamente triangular, assim seu polinômio característico é t^n .

Solução Alternativa 1: Faremos a resolução por indução na dimensão de V . Suponhamos o exercício válido para $\dim(V) < n$. Seja V espaço vetorial tal que $\dim(V) = n$ e seja $N \in L(V)$ tal que exista r tal que $N^r = 0$. Se $V = 0$, é fácil. Senão, então tome um $v \neq 0$ qualquer. Consideremos:

$$m_{N,v}(t) = t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + \dots + \alpha_1t + \alpha_0,$$

o polinômio mônico de menor grau tal que $m_{N,v}(N)(v) = 0$. Então $B_1 = \{v, N(v), \dots, N^{m-1}(v)\}$ é linearmente independente. Além disso, como $N^r(v) = 0$, então $m_{N,v}(t) \mid t^r$, aí $m_{N,v}(t) = t^m$. Seja W o subespaço gerado por ele. Note que W é N -invariante e ainda:

$$[N \restriction_W]_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

assim $p_{N \restriction_W}(t) = t^m$. Seja B uma base de V tal que $B_1 \subseteq B$ e seja $B_2 = \{\bar{b} : b \in B \setminus B_1\}$. Então B_2 é uma base de V/W e, sendo $\bar{N} \in L(V/W)$ o operador induzido, temos:

$$[N]_B = \begin{pmatrix} [N \restriction_W]_{B_1} & * \\ 0 & [\bar{N}]_{B_2} \end{pmatrix},$$

assim é fácil ver que $p_N(t) = p_{N \restriction_W}(t)p_{\bar{N}}(t)$, mas também é fácil ver que $\bar{N}^r = 0$, aí por hipótese de indução temos $p_{\bar{N}}(t) = t^{n-m}$, aí $p_N(t) = t^n$.

Solução Alternativa 2: Seja K um corpo algebricamente fechado. Nesse caso, sendo N a matriz que representa este operador nilpotente, temos que $N^r = 0$ para algum $r \geq 1$. Então, sendo λ um autovalor de N , para $v \neq 0$, temos

$$N(v) = \lambda v \Rightarrow N^r(v) = \lambda^r v \Rightarrow 0 = \lambda^r v \Rightarrow \lambda^r = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Portanto, todos os autovalores de N são nulos, e o polinômio característico de N será

$$p_N(t) = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n) = t^n$$

Se K não for algebricamente fechado, podemos fazer uma extensão L de K de modo que L seja algebricamente fechado, e considerar N e seu respectivo polinômio característico nesse corpo.

4.8 Exercício 8

(8) Seja V um K -espaço de dimensão finita e sejam $T, N \in L(V)$ tais que N é nilpotente e $TN = NT$. Prove que

(a) T é inversível se, e somente se, $T + N$ é inversível.

(b) $\det(T) = \det(T + N)$ e $p_T(t) = p_{T+N}(t)$.

Solução:

(a)

(\Rightarrow) Como N é nilpotente, sabemos que existe $m > 0$ tal que $N^m = 0$. Assumindo que $N \neq 0$ (pois do contrário não há o que demonstrar), então $m > 1$. Se T é inversível, podemos escrever

$$T + N = T(I + T^{-1}N)$$

Note também que

$$TN = NT \Rightarrow T^{-1}N = NT^{-1}.$$

e conseqüentemente

$$(-T^{-1}N)^m = (-1)^m T^{-m} N^m = 0.$$

Lembrando da identidade polinomial

$$x^m - 1 = (x - 1) \sum_{i=0}^{m-1} x^{m-1-i},$$

que podemos reescrever como

$$1 - x^m = (1 - x) \sum_{i=0}^{m-1} x^{m-1-i},$$

podemos aplicá-la tomando $x = -T^{-1}N$, obtendo

$$1 - x^m = (1 - x) \sum_{i=0}^{m-1} x^{m-1-i} \Rightarrow 1 - (-T^{-1}N)^m = (1 - (-T^{-1}N)) \sum_{i=0}^{m-1} (-T^{-1}N)^{m-1-i} \Rightarrow$$

$$I - (-T^{-1}N)^m = (I + T^{-1}N) \sum_{i=0}^{m-1} (-T^{-1}N)^{m-1-i}.$$

Mas por outro lado, temos que

$$I - (-T^{-1}N)^m = I - 0 = I,$$

donde segue que

$$I - (-T^{-1}N)^m = (I + T^{-1}N) \sum_{i=0}^{m-1} (-T^{-1}N)^{m-1-i} \Rightarrow I = (I + T^{-1}N) \sum_{i=0}^{m-1} (-T^{-1}N)^{m-1-i}.$$

Logo, isso mostra que $(I + T^{-1}N)$ possui uma inversa, respectivamente:

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-T^{-1}N)^{m-1-i}.$$

Daí, concluímos que ambos T e $I + T^{-1}N$ são inversíveis; logo seu produto também o é. Mas

$$T(I + T^{-1}N) = T + N.$$

Portanto, segue que $T + N$ é inversível.

(\Leftarrow) Se $T + N$ é inversível, como $-N$ é nilpotente e $(T + N)(-N) = (-N)(T + N)$, então basta aplica (\Rightarrow) para $T + N$ e $-N$ em vez de T e N e concluir que $(T + N) - N$ é inversível, aí T é inversível.

(b)

Se $\det(T) = 0$, então T não é inversível, aí, pelo item (a), a matriz $T + N$ não é inversível, aí temos $\det(T + N) = 0$, aí $\det(T) = \det(T + N)$. Se $\det(T) \neq 0$, então T é inversível, aí utilizando que

$$T + N = T(I + T^{-1}N),$$

podemos inferir que:

$$\det(T + N) = \det(T) \det(I + T^{-1}N),$$

porém $TN = NT$ e N é nilpotente, aí $T^{-1}N$ é nilpotente, assim, pela resolução do Exercício 7 da Lista 3, existe uma base B tal que a matriz de $T^{-1}N$ seja estritamente triangular superior, assim $I + T^{-1}N$ é triangular superior com todas as entradas na diagonal valendo 1, assim $\det(I + T^{-1}N) = 1$, aí $\det(T + N) = \det(T)$.

(c)

Para todo t , então $-N$ é nilpotente e também:

$$(tI - T)(-N) = (-N)(tI - T),$$

aí pelo item (b) temos:

$$\begin{aligned} p_T(t) &= \det(tI - T) \\ &= \det(tI - T - N) \\ &= \det(tI - (T + N)) \\ &= p_{T+N}(t) \end{aligned}$$

4.9 Exercício 9

(9) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $[T]_{can} = A$. Escreva $T = D + N$, com D diagonalizável, N nilpotente e $DN = ND$.

Solução: Vamos encontrar a decomposição de Jordan-Chevalley de A . Para isso, calculemos primeiramente o polinômio característico de A :

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -2 & \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 \\ &= (\lambda - 2)^2(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$. Consideremos então para cada autovalor λ_i , com $i = 1, 2, \dots, k$, os polinômios da forma $W_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (t - \lambda_j)^{\alpha_j}$. Temos então

$$W_1(t) = (t - 1) \quad \text{e} \quad W_2(t) = (t - 2)^2$$

Vamos encontrar agora polinômios $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$ tais que $Q_1(t)W_1(t) + Q_2(t)W_2(t) = 1$.

Para este caso, observe que $(t - 2)^2 = t^2 - 4t + 4 = (t - 1)(t - 3) + 1$, o que pode ser obtido dividindo-se W_2 por W_1 . Daí,

$$(3 - t)(t - 1) + 1 \cdot (t - 2)^2 = 1 \Rightarrow Q_1(t) = (3 - t) \quad \text{e} \quad Q_2(t) = 1$$

Calculemos o polinômio $D(t) = \sum_{i=1}^k \lambda_i Q_i(t) W_i(t)$. Temos para nosso caso:

$$\begin{aligned} D(t) &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i Q_i(t) W_i(t) \\ &= \lambda_1 Q_1(t) W_1(t) + \lambda_2 Q_2(t) W_2(t) \\ &= 2(3 - t)(t - 1) + 1 \cdot (t - 2)^2 \cdot 1 \\ &= -t^2 + 4t - 2 \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$D = D(A) = -A^2 + 4A - 2I = \begin{bmatrix} -9 & -3 & 4 \\ -8 & -4 & 4 \\ -10 & -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 4 & -4 \\ 8 & 8 & -4 \\ 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Daí,

$$N = A - D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

De fato, pode-se verificar que $N^2 = 0$, e que D é diagonalizável. Além disso,

$$DN = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = ND$$

Portanto, $A = D + N$.

Observação: Em resumo, o processo para se encontrar a decomposição de Jordan-Chevalley de uma matriz A é o seguinte:

♣ Encontre o polinômio característico de A e seus respectivos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$;

♥ Para cada autovalor λ_i , escreva um polinômio da forma

$$W_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (t - \lambda_j)^{\alpha_j} = (t - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_{i-1})^{\alpha_{i-1}} \cdot (t - \lambda_{i+1})^{\alpha_{i+1}} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

♠ Encontre polinômios $Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_r(t)$ tais que

$$Q_1(t)W_1(t) + Q_2(t)W_2(t) + \dots + Q_k(t)W_k(t) = 1$$

♥ Determine o polinômio

$$D(t) = \sum_{i=1}^k \lambda_i Q_i(t) W_i(t),$$

e encontre $D = D(A)$.

♣ Calcule $N = A - D$.

4.10 Exercício 10

(10) Sejam $A \in \mathcal{M}_n(K)$ e $T_A: \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K)$ o operador definido por $T_A(M) = AM - MA$.

- (a) Prove que se A é nilpotente, então T_A é nilpotente. Vale a recíproca?
- (b) Prove que se K é algebricamente fechado e se T_A é diagonalizável, então A é diagonalizável. (Sugestão: Para cada matriz $M \in \mathcal{M}_n(K)$ seja $\tilde{M} \in \mathcal{L}(K^n)$ o operador tal que $[\tilde{M}]_{can} = M$. Seja $v \in K^n$ um autovetor de \tilde{A} . Considere a transformação linear $\varphi: \mathcal{M}_n(K) \rightarrow K^n$ definida por $\varphi(M) = \tilde{M}(v)$. Prove que φ é sobrejetora.)

Solução:

- (a) Se A é nilpotente, então existe um $r > 0$ tal que $A^r = 0$. Observe que

$$\begin{aligned} T_A^2(M) &= T_A(T_A(M)) \\ &= T_A(AM - MA) \\ &= A(AM - MA) - ((AM - MA))A \\ &= A^2M - 2AMA + MA^2 \end{aligned}$$

Também temos que

$$\begin{aligned} T_A^3(M) &= T_A(T_A^2(M)) \\ &= T_A(A^2M - 2AMA + MA^2) \\ &= A(A^2M - 2AMA + MA^2) - (A^2M - 2AMA + MA^2)A \\ &= A^3M - 3A^2MA + 3AMA^2 - MA^3 \end{aligned}$$

Em geral, procedendo analogamente, temos que

$$T_A^k(M) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} A^{k-i} M A^i$$

Logo, a menor potência de A que aparecerá em $T_A^k(M)$ será $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$.

Portanto, para $k \geq 2r$, a menor potência de A que aparecerá em $T_A^k(M)$ será no mínimo $\left\lfloor \frac{2r}{2} \right\rfloor = r$. Portanto, teremos $T_A^k(M) = 0$ para todo M , e portanto o operador T_A será nilpotente.

Observe que a recíproca não é verdadeira. Tome por exemplo $A = I_n$. Então nesse caso, temos que

$$T_{I_n}(M) = I_n M - M I_n = 0.$$

Logo, $T_{I_n} = 0$, que obviamente é nilpotente, mas $A = I_n$ não é nilpotente.

- (b) Suponhamos que A possua um autovalor λ e T_A seja diagonalizável. Seja $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ os autovalores de T_A . Para toda $M \in \mathcal{M}_n(K)$, então existem M_1, \dots, M_r tais que:

$$M = M_1 + \dots + M_r$$

e para todo i tenhamos:

$$T_A(M_i) = \lambda_i M_i,$$

assim temos:

$$\begin{aligned} T_A(M_i)v &= \lambda_i M_i v \Rightarrow AM_i v - M_i A v = \lambda_i M_i v \\ &\Rightarrow AM_i v - \lambda M_i v = \lambda_i M_i v \\ &\Rightarrow AM_i v = (\lambda_i + \lambda) M_i v, \end{aligned}$$

aí $M_i v$ é autovetor de A ; logo todo vetor da forma Mv pode ser expresso como soma de autovetores de A . Além disso, como $v \neq 0$, então existe j tal que $v_j \neq 0$, assim para i seja $E_i \in \mathcal{M}_n(K)$ a matriz que vale v_j^{-1} na entrada (i, j) e 0 nas outras, então $E_i v = e_i$, em que $e_i \in K^n$ é o vetor que vale 1 na entrada i e 0 nas demais. Portanto toda matriz em $\mathcal{M}_n(K)$ é da forma Mv para alguma $M \in \mathcal{M}_n(K)$, aí pode ser expressa como soma de autovalores de A . Logo A é diagonalizável.

Observação: T_A na verdade é um operador de derivação em $\mathcal{M}_n(K)$. Veja que $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(K)$, temos que

•

$$\begin{aligned} T_A(M + N) &= A(M + N) - (M + N)A \\ &= AM - MA + AN - NA \\ &= T_A(M) + T_A(N); \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} T_A(MN) &= AMN - MNA \\ &= AMN - \cancel{MAN} + \cancel{MAN} - MNA \\ &= (AMN - MAN) + (MAN - MNA) \\ &= T_A(M)N + MT_A(N). \end{aligned}$$

4.11 Exercício 11

(11) Encontre duas matrizes nilpotentes de ordem 4 que tenham o mesmo polinômio minimal, mas que não sejam semelhantes.

Solução: Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que $A^2 = B^2 = 0$, e A e B possuem o mesmo polinômio minimal, mas A e B não são semelhantes. De fato, para matriz $P \in M_4(K)$, sendo:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix},$$

então:

$$PA = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 & p_{33} \\ 0 & 0 & 0 & p_{43} \end{pmatrix}$$

e

$$BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & p_{1,4} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & p_{2,4} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} & p_{3,4} \\ p_{4,1} & p_{4,2} & p_{4,3} & p_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

assim, se $PA = BP$, então:

$$p_{21} = p_{22} = p_{23} = p_{41} = p_{42} = p_{43} = 0, \quad p_{13} = p_{24}, \quad p_{33} = p_{44},$$

logo P deve ser da forma:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & a & p_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a \\ p_{31} & p_{32} & b & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

aí fica fácil ver que P não é inversível. Portanto, não existe matriz inversível P tal que $PAP^{-1} = B$, ou seja, A e B não são semelhantes.

Observação: Para ver que A e B não são semelhantes, também podemos olhar sua forma normal de Jordan e observar que elas possuem decomposições em blocos distintas.

Questões Suplementares

4.12 Exercício 12

(12) O teorema de Fine-Herstein estabelece que a quantidade de matrizes nilpotentes em $\mathbb{M}_n(\mathbb{F}_q)$ é q^{n^2-n} . Prove-o.

Solução:

4.13 Exercício 13

(13) Encontre uma matriz nilpotente $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de ordem 3 que possui todas as entradas não-nulas.

Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

4.14 Exercício 14

(14) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ duas matrizes tais que

$$A^2B + AB^2 = 2ABA$$

(a) Para

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

encontre $k \in \mathbb{N}$ tal que $(AB - BA)^k = 0$.

(b) Prove que existe um inteiro k tal que $(AB - BA)^k = 0$.

Solução:

5 Lista 4

5.1 Exercício 1

(1) Sejam V um K -espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$.

- (a) Prove que se existe um vetor cíclico para T então todo subespaço próprio T -invariante de V também tem um vetor cíclico.
- (b) Vale a recíproca do item (a)? (Isto é, se todo subespaço próprio T -invariante W de V tem um vetor cíclico para $T|_W$, é verdade que existe um vetor cíclico para T ?)

Solução:

- (a) Sabemos que um vetor $v \in V$ é cíclico se $Z(v, T) = V$, onde

$$Z(v, T) = \{g(T)(v) \mid g(t) \in K[t]\}.$$

Para subespaço W que seja T -invariante, então seja $\{e_1, \dots, e_m\}$ uma base de W . Para todo i então existe um polinômio p_i tal que $e_i = p_i(T)(v)$. Seja $p = \text{mdc } p_1, \dots, p_m$. Então por Bézout existem polinômios q_1, \dots, q_m tais que $p_1 q_1 + \dots + p_m q_m = p$, assim

$$p(T)(v) = q_1(T)(e_1) + \dots + q_m(T)(e_m) \in W,$$

aí, como $p \mid p_i$ para todo i , então, sendo $w = p(T)(v)$, temos $W = Z(w, T)$.

- (b) A recíproca não é verdadeira. Seja $V = K^2$ e $T = I$. Então para todo $v \in V$ temos $Z(v, T) = Kv$. Todo subespaço próprio T -invariante tem dimensão no máximo 1, assim é da forma $Ke = Z(e, T)$. Por outro lado, é fácil ver que para todo $v \in V$ temos $Z(v, T) = Kv \neq V$.

5.2 Exercício 2

(2) Sejam V um K -espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que se T^2 tem um vetor cíclico, então T tem um vetor cíclico. Vale a recíproca?

Solução: Seja $n = \dim V$. Se v é um vetor cíclico para T^2 , isso quer dizer que $V = Z(v, T^2)$. Vejamos que $Z(v, T^2) \subseteq Z(v, T)$.

$$Z(v, T^2) = \{g(T^2)(v) \mid g(t) \in K[t]\} = \langle v, T^2(v), T^4(v), \dots \rangle \subseteq \langle v, T(v), T^2(v), \dots \rangle = Z(v, T).$$

Logo, concluímos que

$$Z(v, T^2) \subseteq Z(v, T) \Rightarrow V \subseteq Z(v, T) \Rightarrow \boxed{Z(v, T) = V}$$

Assim, v é um vetor cíclico para T .

Observe que a recíproca não é verdadeira. Tome:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então $v = (1, 0)$ é um vetor cíclico para T , mas $T^2 = I$, que não possui um vetor cíclico.

5.3 Exercício 3

- (3) Sejam V um K -espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador diagonalizável.
- (a) Mostre que existe um vetor cíclico para T se, e somente se, T tem n autovalores distintos.
- (b) Mostre que se T tem n autovalores distintos e se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de autovetores de T , então $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ é um vetor cíclico para T .

Solução:

- (a) Se existe $v \in V$ tal que $V = Z(v, T)$, então $\{v, T(v), \dots, T^{n-1}(v)\}$ é base de V , aí m_T tem grau n , e sendo $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ os autovalores distintos, então:

$$m_T(t) = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_r),$$

aí m_T tem grau r , aí $r = n$, assim T tem n autovalores distintos. A recíproca será resolvida no item (b).

- (b) Se T tem n autovalores distintos e se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de autovetores de T , então para cada i existe λ_i tal que $T(v_i) = \lambda_i v_i$; assim $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ devem ser distintos, aí para cada i seja:

$$q_i(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j), \quad p_i(t) = \frac{q_i(t)}{q_i(\lambda_i)},$$

então:

$$\begin{aligned} v_i &= p_i(\lambda_1)v_1 + \dots + p_i(\lambda_n)v_n \\ &= p_i(T)v_1 + \dots + p_i(T)v_n \\ &= p_i(T)(v_1 + \dots + v_n); \end{aligned}$$

logo $v_1 + \dots + v_n$ é um vetor cíclico para T .

5.4 Exercício 4

- (4) Prove que duas matrizes de ordem 3 são semelhantes se, e somente se, elas têm o mesmo polinômio característico e o mesmo polinômio minimal.

Solução:

5.5 Exercício 5

- (5) Prove que toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ é semelhante à sua transposta A^t .

Solução:

5.6 Exercício 6

- (6) Sejam V um K -espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V)$.
- (a) Prove que $\text{Im } T$ tem um complementar T -invariante se, e somente se, $\text{Im } T \cap \text{Ker } T = 0$.
- (b) Se $\text{Im } T \cap \text{Ker } T = 0$, prove que $\text{Ker } T$ é o único complementar de $\text{Im } T$ que é T -invariante.

Solução:

5.7 Exercício 7

(7) Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Encontre uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP$ esteja na forma racional.

Solução:

5.8 Exercício 8

(8) Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Encontre vetores $\{v_1, \dots, v_r\}$ que satisfazem as condições do Teorema da Decomposição Cíclica.

Solução:

5.9 Exercício 9

(9) Sejam N_1 e N_2 matrizes de ordem 6 nilpotentes. Suponha que elas têm o mesmo polinômio minimal e o mesmo posto. Prove que elas são semelhantes. Mostre que o mesmo resultado não é verdadeiro para matrizes de ordem 7.

Solução:

5.10 Exercício 10

(10) Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tal que $A^2 + I = 0$. Prove que $n = 2k$ e que A é semelhante à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix},$$

onde $I \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ é a matriz identidade.

Solução:

5.11 Exercício 11

(11) Sejam V um K -espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que T tem um vetor cíclico se, e somente se a seguinte afirmação é verdadeira: “Todo operador linear que comuta com T é um polinômio em T .”

Solução:

- (a) Se T tem um vetor cíclico, então, para todo operador linear U que comuta com T , o conjunto $W = \text{Im}(U)$ é um subespaço T -invariante, aí pelo Exercício 1 da Lista 4 existe w tal que $W = Z(w, T)$, aí existe um polinômio p tal que $U(v) = p(T)(w)$, aí para todo k temos:

$$UT^k(v) = T^kU(v) = T^kp(T)(v) = p(T)T^k(v);$$

logo, como $\{v, T(v), T^2(v) \dots\}$ gera V , então $U = p(T)$.

5.12 Exercício 12

- (12) Sejam V um K -espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que todo vetor não nulo $v \in V$ é um vetor cíclico para T se, e somente se, o polinômio característico de T é irredutível em $K[t]$.

Solução:

5.13 Exercício 13

- (13) Sejam V um K -espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Suponha que o polinômio minimal de T é igual ao polinômio característico de T e é uma potência de um polinômio irredutível. Prove que nenhum subespaço não trivial de V invariante sob T tem um complementar que também é invariante sob T .

Solução:

5.14 Exercício 14

- (14) Determine a forma racional R da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

e encontre uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = R$.

Solução:

5.15 Exercício 15

- (15) Seja $T \in \mathcal{L}(K^6)$ com polinômio minimal $m_T(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 1)$. Ache as possibilidades para a forma racional de T para $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$ e $K = \mathbb{C}$.

Solução:

5.16 Exercício 16

- (16) Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ um operador linear tal que $t^2 + 3$ é um divisor do polinômio minimal de T e 1 é o único autovalor de T . Quais são as possíveis formas racionais de T ?

Solução:

5.17 Exercício 17

(17) Classifique, a menos de semelhança, as matrizes reais de ordem 6 com polinômio minimal

$$(t-1)^2(t+1)(t-2).$$

Solução:

5.18 Exercício 18

(18) Determine quais das matrizes seguintes são semelhantes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 13 & -16 & 2 & -1 \\ -9 & -13 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -8 & -6 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & -8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solução:

5.19 Exercício 19

(19) Mostre que as matrizes complexas

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

são semelhantes.

Solução:

5.20 Exercício 20

(20) Classifique, a menos de semelhança, todas as matrizes de ordem 6 nilpotentes.

Solução:

5.21 Exercício 21

(21) Encontre a forma de Jordan real J da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

e a matriz P tal que $P^{-1}AP = J$.

Solução:

5.22 Exercício 22

(22) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine a forma de Jordan J de A e encontre uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = J$.

Solução: Para encontrar a forma de Jordan de A , vamos primeiramente encontrar o polinômio característico e o minimal de A . Temos que

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^4 + \lambda^2 \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda + i)(\lambda - i) \end{aligned}$$

Sabemos que o polinômio minimal é o polinômio de menor grau que anula T . Além disso, $m_A(t) \mid p_A(t)$. Nesse caso, uma inspeção direta mostra que $m_A(t) = p_A(t) = \lambda^2(\lambda + i)(\lambda - i)$. Portanto, os autovalores de A são $0, i$ e $-i$. A quantidade de vezes que cada um aparecerá em J é exatamente sua multiplicidade algébrica, ou seja, a multiplicidade em $p_A(t)$. Desse modo, já sabemos que 0 aparecerá duas vezes, enquanto i e $-i$ aparecerão uma vez cada. Resta-nos agora determinar quantos blocos de Jordan estão associados a cada autovalor.

Para isso, vamos calcular a dimensão de cada autoespaço associado. Temos:

- $\dim(\text{Ker}(A^2)) = 2$. Observe que A^2 possui 2 linhas linearmente independentes:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4=L_4+L_2]{L_3=L_3+L_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, $\text{posto}(A) = 2$, e portanto

$$\dim(\text{Ker}(A)) = 4 - \text{posto}(A) \Rightarrow \dim(\text{Ker}(A)) = 4 - 2 \Rightarrow \dim(\text{Ker}(A)) = 2$$

Encontremos os autovetores que geram $\text{Ker}(A^2)$. Temos que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x, y, z, w) = x \cdot (1, 0, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0, 0)$$

Logo, $\text{Ker}(A) = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle$.

- $\dim(\text{Ker}(A - iI)) = 1$. Temos que

$$A - iI = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4=L_4-iL_3} \begin{bmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $\text{posto}(A - iI) = 3$, e $\dim(\text{Ker}(A - iI)) = 1$. Encontremos agora um autovetor que gera $\text{Ker}(A - iI)$. Para isso, basta resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x, y, z, w) = w \cdot (i, -1, -i, 1)$$

Portanto, $\text{Ker}(A - iI) = \langle (i, -1, -i, 1) \rangle$.

- $\dim(\text{Ker}(A + iI)) = 1$. Temos que

$$A + iI = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & i \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4=L_4+iL_3} \begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $\text{posto}(A + iI) = 3$, e $\dim(\text{Ker}(A + iI)) = 1$. Encontremos agora um autovetor que gera $\text{Ker}(A + iI)$. Para isso, basta resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x, y, z, w) = w \cdot (-i, -1, i, 1)$$

Portanto, $\text{Ker}(A + iI) = \langle (-i, -1, i, 1) \rangle$.

Portanto, a forma de Jordan de A será

$$J = \begin{bmatrix} J_0 & 0 & 0 \\ 0 & J_i & 0 \\ 0 & 0 & J_{-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

Para encontrar a matriz P , basta colocar na i -ésima coluna o autovetor que gera o respectivo autoespaço associado ao autovalor da i -ésima coluna de J . Assim,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i & -i \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & -i \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

5.23 Exercício 23

(23) Seja V um espaço vetorial de dimensão n , com $n \geq 2$ e seja T um operador linear em V de posto 2. Determine todas as possíveis formas de Jordan de T .

Solução:

5.24 Exercício 24

(24) Seja $T: \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ o operador linear definido por

$$T(p(t)) = p(t+1).$$

- (a) Determine a forma de Jordan de T .
- (b) Se $n = 4$, encontre uma base B de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ tal que $[T]_B$ esteja na forma de Jordan.

Solução:

5.25 Exercício 25

(25) Determine o número de matrizes não semelhantes A em $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$(A - 2I)^3 = 0.$$

Solução:

5.26 Exercício 26

(26) Seja $T: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ um operador linear com polinômio característico

$$p_T(t) = (t-a)^3(t-b)^3,$$

polinômio minimal

$$m_T(t) = (t-a)^2(t-b)$$

e $a \neq b$. Determine a forma racional e a forma de Jordan de T .

Solução:

5.27 Exercício 27

(27) Classifique, a menos de semelhança, todas as matrizes reais de ordem 7 com polinômio característico

$$p_T(t) = (t-1)^4(t-2)^2(t-3).$$

Solução: Sabemos que duas matrizes são semelhantes se, e somente se, possuem a mesma forma de Jordan. Logo, todas as matrizes reais de ordem 7 serão semelhantes a uma das formas de Jordan determinadas pelo operador $T: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ que possui o polinômio característico acima. Daí, observe que

- Como $t-1$ tem expoente 4 em $p_T(t)$, o autovalor 1 deve aparecer quatro vezes na diagonal principal;
- Como $t-2$ tem expoente 2 em $p_T(t)$, o autovalor 2 deve aparecer duas vezes na diagonal principal;
- Como $t-3$ tem expoente 1 em $p_T(t)$, o autovalor 3 deve aparecer uma vez na diagonal principal.

Assim, as formas canônicas de Jordan possíveis são:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5.28 Exercício 28

(28) Determine a forma racional e a forma de Jordan da matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução:

5.29 Exercício 29

(29) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre o corpo K e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Seja $f \in K[t]$ um polinômio mônico, irredutível e de grau $d \geq 1$.

- (a) Suponha que $d \mid n$. Prove que existe $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que o polinômio minimal de T é f .
- (b) Se $T \in \mathcal{L}(V)$ é tal que seu polinômio minimal tem grau d e é irredutível em $K[t]$, é verdade que $d \mid n$? Justifique.

Solução:

5.30 Exercício 30

(30) Dê a forma de Jordan de um operador linear $T: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ com polinômio característico $p_T(t) = (t-1)^2(t-2)^4(t-3)$ e tal que $\dim(\text{Ker}(T-2I)) = 2$, $\dim(\text{Ker}(T-I)) = 1$ e $\text{Ker}(T-2I)^3 \neq \text{Ker}(T-2I)^2$.

Solução:

Questões Suplementares

5.31 Exercício 31

(31) Seja V um espaço vetorial de dimensão n e considere $T: V \rightarrow V$ cuja matriz na base canônica é $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que possui como polinômio característico

$$p_A(t) = (t - \lambda_1)^{P(a_1)} \cdot (t - \lambda_2)^{P(a_2)} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_k)^{P(a_k)},$$

onde $P(k)$ representa o k -ésimo número pentagonal, e $(a_n)_{n \geq 1}$ é a sequência definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = 7n - a_n - 9, \forall n > 1 \end{cases}$$

(a) Prove que n não pode ser 2019.

(b) Mostre que a quantidade de formas de Jordan que a matriz A pode ter é um múltiplo de 7.

Solução:

6 Lista 5

6.1 Exercício 1

(1)

Solução:

Questões Suplementares

6.2 Exercício 31

(31)

Solução:

7 Lista 6

7.1 Exercício 1

(1)

Questões Suplementares

7.2 Exercício 31

(31)

Solução: