Álgebra Linear

Douglas Smigly

MAT5730

2º semestre de 2019

Conteúdo

Infromações da Disciplina

Informações Básicas

Essas são as notas de aula de Álgebra Linear(MAT5730), as aulas acontecem na sala B-134 às terças 10h e às quintas 8h.

Informações do Professor

O professor é o Ivan Shestakov, sua sala é a 290-A e o seu e-mail é shestak@ime.usp.br

Bibliografia

Avaliação

A nota final da disciplina será a média aritimética de P1, P2, e P3. Todos os alunos poderão fazer a prova sub para substituir a menor das suas notas (Sub aberta). As datas das provas são as seguintes:

Prova	**Data**
P1	10-09
P2	15-10
P3	12-11
SUB	19-11

Outras Informações

(i) Teremos listas, que não contarão para a nota

(ii) As listas serão publicadas em

(iii) Não haverá monitoria

Capítulo 1

Espaços vetoriais

Durante este capítulo, sempre adotaremos K como sendo um corpo qualquer.

1.1 Base e Dimensão

Definição 1.1. Seja $\mathrm{V} \neq 0$ um espaço vetorial sobre um corpo K. Uma *base* de V é um conjunto $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{V}$ tal que:

(i) B é linearmente independente (LI).

(ii) B gera V.

Lembramos aqui que B é linearmente independente se todo subconjunto finito $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{B}$ é linearmente independente. Isto é, se $\alpha \colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ e

$$\sum_{\mathrm{b} \in \mathrm{I}} \alpha_{\mathrm{b}} \mathrm{b} = 0, \text{ então } \alpha_{\mathrm{j}} = 0 \text{ para cada } \mathrm{j} \in \mathrm{J}.$$

Além disso, dizemos que B gera V se para cada $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$ existem exatamente um subconjunto finito $\mathrm{I_v} \subseteq \mathrm{B}$ e uma função $\alpha \colon \mathrm{I_v} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\mathrm{v} = \sum_{\mathrm{b} \in \mathrm{I_v}} \alpha_{\mathrm{b}} \mathrm{b}.$$

Teorema 1.2. Seja V um espaço vetorial e sejam $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{V}$ linearmente independente e $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{V}$ gerador de V tais que $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{S}$. Então existe uma base B de V tal que

$$\mathrm{I} \subseteq \mathrm{B} \subseteq \mathrm{S}.$$

Demonstração. Consideremos o conjunto:

$$\mathcal{M} = \{\mathrm{M} \subseteq \mathrm{S} \mid \mathrm{M} \text{ é linearmente independente e } \mathrm{I} \subseteq \mathrm{M}\}$$

Então $\langle \mathcal{M}, \subseteq \rangle$ é um conjunto parcialmente ordenado indutivo (ou seja, todo subconjunto totalmente ordenado possui uma cota superior). De fato, $\mathrm{I} \in \mathcal{M}$, o que nos mostra que $\mathcal{M} \neq \emptyset$, e para subconjunto totalmente ordenado não vazio $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$ então $\bigcup\limits_{\mathrm{M} \in \mathcal{C}} \mathrm{M} \in \mathcal{M}$.

Logo, pelo Lema de Zorn, $\mathcal{M}$ possui um elemento maximal B. Vamos provar que esse elemento maximal é de fato uma base para V.

- B **é linearmente independente:** segue da definição de $\mathcal{M}$.
- B **gera** V**:** Suponha por absurdo que B não gera V. Então existe $\mathrm{v} \in \mathrm{S}$ que não é combinação linear de elementos de B, aí $\mathrm{B} \cup \{\mathrm{v}\}$ é linearmente independente e $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{B} \cup \{\mathrm{v}\} \subseteq \mathrm{S}$. Então $\mathrm{B} \cup \sqsubseteq \in \mathcal{M}$, uma contradição, pois B já é um elemento maximal de $\mathcal{M}$ e obviamente $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{B} \cup \{\mathrm{v}\}$. Logo B gera V. Portanto, B é uma base de V e $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{B} \subseteq \mathrm{S}$.

□

O resultado acima mostra que todo espaço vetorial tem base, bastando para isso tomar $I = \{v\}$ e $S = V$.

Corolário 1.3. Temos o seguinte:

- Todo espaço vetorial V tem uma base.
- Para todo $I \subseteq V$ linearmente independente, existe uma base B de V que contém I.
- Para todo $S \subseteq V$ gerador de V, existe uma base B de V tal que $B \subseteq S$.

Lema 1.4. Sejam $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}}$ linearmente independente e $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}_{\leq m}}$ um conjunto gerador de V. Então $n \leq m$.

Sublema 1.5. Um conjunto $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}}$ é linearmente dependente se e somente se existem $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$ e um $\alpha : i \to K$ tais que

$$v_i = \sum_{j<i} \alpha_j v_j$$

Demonstração. Se $\{v_i\}_{i \in n}$ é linearmente dependente, então existe $\alpha : n \to K$ tal que $\exists i \in n : \alpha_n$ e $\sum_{i \in n} \alpha_i v_i = 0$. Seja i o maior elemento de n tal que $\alpha_i \neq 0$. Então

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{i-1} v_{i-1} = -\alpha_i v_i \Rightarrow$$

$$v_i = -\sum_{j \in i} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} v_j$$

□

Vamos relembrar o que fizemos até aqui com um exemplo:

Exemplo 1.6. Considere $V = \mathbb{R}^4$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Sejam os vetores:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0, 0) \\ v_2 &= (0, 1, 0, -1) \\ v_3 &= (0, 0, 1, -1) \\ v_4 &= (1, -1, 0, 0) \\ v_5 &= (1, 2, 1, 0) \end{aligned}$$

Considere $I = \{v_1, v_2\}$ e $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Observe que I é LI; de fato,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1(1, 0, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, -1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Ademais, tomando $v = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, temos que

$$(x - z + w + y)v_1 + (z - w - \varepsilon)v_2 + (z - \varepsilon)v_3 + (z - w - y + \varepsilon)v_4 + \varepsilon_5 = v,$$

para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Logo, S gera V.

Então, existe uma base B de $\mathbb{R}^4$ tal que

$$\{v_1, v_2\} \subseteq B \subseteq \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

De fato, esta base é $B\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, pois percebe-se que

$$v_5 = \frac{5}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 - \frac{1}{2} v_3 - \frac{3}{2} v_4$$

Para trabalhar com a cardinalidade das bases, utilizaremos alguns fatos conhecidos, enunciados na

Proposição 1.7. Se λ e μ são cardinais, então:

- Se $\lambda \leq \mu$ e $\mu \leq \lambda$, então $\lambda = \mu$. (Teorema de Cantor-Bernstein)
- Se λ e μ são infinitos, então
$$\lambda + \mu = \lambda\mu = \max\{\lambda, \mu\}.$$

Teorema 1.8. Seja V um espaço vetorial, então duas bases quaisquer têm o mesmo cardinal.

Demonstração. Sejam B e C bases de V. Para $u \in C$ existem um conjunto finito $I_u \subseteq B$ e uma função $\alpha_u : I_u \to K$ tais que $u = \sum_{i \in I_u} \alpha_{u,i} i$. Seja $I \subseteq \bigcup_{u \in C} \subseteq B$. Então I gera V, assim $I = C$. Desse modo:
$$|B| = |I| = \left|\bigcup_{u \in C} I_u\right| \leq \sum_{u \in C} |I_u| \leq \aleph_0 \cdot |C| = |C|,$$
assim $|B| \leq |C|$. Analogamente $|C| \leq |B|$. Portanto $|B| = |C|$. □

Definição 1.9. Dizemos que a **dimensão** de um espaço vetorial é a cardinalidade de sua base.

1.2 Subespaços

Proposição 1.10. Seja V um espaço vetorial e seja $\mathcal{W}$ um conjunto de subespaços. Então $\bigcap \mathcal{M}$ é um subespaço de V.

Definição 1.11. Se S é subconjunto de V, definimos:
$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{v \in I} \alpha_v v \mid I \subseteq S \text{ e } I \text{ é finito e } \alpha \in K^I \right\}$$
e chamamos de **subespaço gerado** por S.

Proposição 1.12. Se S é subconjunto de V, então:
$$\langle S \rangle = \{W \mid W \text{ é subespaço de } V \text{ e } W \subseteq S\}.$$

A intersecção de subsespaços sempre é um subespaço, mas o mesmo não acontece com a união de subespaços.

Proposição 1.13. Se A e B são subespaços de V tais que $A \nsubseteq B$ e $B \nsubseteq A$, então $A \cup B$ não é subespaço de V.

Demonstração. Nesse caso, existe $a \in A$ tal que $a \notin B$ e existe $b \in B$ tal que $b \notin A$. Seja $c = a + b$. Então:

- Se $c \in A$, $b = c - a \in A$, o que é impossível.
- Se $c \in B$, $a = c - b \in b$, o que é impossível.

Logo, concluímos que $c \notin A \cup B$, absurdo.

□

Na verdade, $A \cup B$ é um subespaço se e somente se $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.

Observação 1.14. Seja $K = F_2 = \{0, 1\}$, e tome $V = K^2$. Então,

$$V = \langle(0, 1)\rangle \cup \langle(1, 0)\rangle \cup \langle(1, 1)\rangle$$

Na verdade, V só pode ser escrito como união de seus subespaços se K for um corpo finito.

Apesar de não podermos trabalhar com a união, podemos realizar a soma de subespaços, e esta sim é um subespaço:

Definição 1.15. Sejam $W_i \subseteq V$, $i \in I$, subespaços de V. Definimos:

$$\sum_{i \in I} W_i = \{w_{i_1} + \ldots + w_{i_k} | k \in \mathbb{N}, w_i \in W_i\}$$

Pode-se mostrar que $\sum\limits_{i \in I} W_i$ é subespaço de V.

Definição 1.16. Uma soma $\sum\limits_{i \in I} W_i$ chama-se **soma direta** se para todo $i \in I$

$$W_i \cap \left(\sum_{j \neq i} W_j \right) = 0$$

Teorema 1.17. Para subespaço A de V, então existe subespaço $B \subseteq V$ tal que $V = A \oplus B$.

Teorema 1.18.

$$\dim(A + B) + \dim(A \cap B) = \dim(A) + \dim(B).$$

Demonstração. Seja E base de $A \cap B$. Então existe F tal que $B \cap F = \emptyset$ e $E \cup F$ seja base de A e existe G tal que $A \cap G = \emptyset$ e $E \cup G$ seja base de B. Então $E \cup F \cup G$ é base de $A + B$. Daí:

$$\dim(A + B) + \dim(A \cap B) = |E| + |F| + |G| + |E| = |E| + |F| + |E| + |G| = \dim(A) + \dim(B)$$

□

Exemplo 1.19. Considere novamente $V = \mathbb{R}^4$. Sejam

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | y + z + t = 0\}$$

$$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y = 0 \text{ e } z - 2t = 0\}$$

W_1 e W_2 são subespaços de V. Assim, $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$ são subespaços de V. Vamos encontrar bases para eles. Note que

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | y + z + t = 0\} \\ &= \{(x, y, z, -y - z) \in \mathbb{R}^4 | x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, 0, 0, 0) + (0, y, 0 - y) + (0, 0, z, -z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0 - 1), (0, 0, 1, -1)\rangle \end{aligned}$$

Verifica-se também que $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0 - 1), (0, 0, 1, -1)$ são linearmente independentes. Logo, $B_1 = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0 - 1), (0, 0, 1, -1)\}$ é base para W_1. Analogamente, mostra-se que $B_2 = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\}$ é base para W_2. Agora, para determinar uma base de $W_1 + W_2$, podemos escalonar a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, o conjunto

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1),(1,-1,0,0)\}$$

é base de $W_1 + W_2$.

Para determinar uma base de $W_1 \cap W_2$, basta resolver o sistema

$$\begin{cases} y + z + t = 0 \\ x + y = 0 \\ z - 2t = 0 \end{cases}$$

Assim, $W_1 \cap W_2 = \langle (3,-3,2,1) \rangle$.

Observe que

$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = 1 + 4 = 5 = 3 + 2 = \dim(W_1) + \dim(W_2)$$

Como $\dim(W_1 + W_2) = 4$, temos que $W_1 + W_2 = V = \mathbb{R}^4$. Observe também que, como $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, a soma $W_1 + W_2$ não é direta.

1.3 Coordenadas

Definição 1.20. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Seja B uma base de V. Então para $v \in V$ existe um único $\alpha : B \to K$ tal que

$$v = \sum_{b \in B} \alpha_b b,$$

e chamamos esse α de $[v]_B$.

Capítulo 2

Transformações Lineares

2.1 Definições

Definição 2.1. Uma função $\mathrm{T} : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ se chama uma **transformação linear** se para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$ e $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathrm{V}$ tivermos $\mathrm{T}(\alpha\mathrm{u} + \beta\mathrm{v}) = \alpha\mathrm{T}(\mathrm{u}) + \beta\mathrm{T}(\mathrm{v})$.

Definição 2.2. Para espaços vetoriais U e V, denotamos o conjunto das transformações lineares de U a V por $\mathcal{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$.

Teorema 2.3. Sejam U e V espaços vetoriais sobre K, seja B uma base de U e $\mathrm{f} : \mathrm{B} \to \mathrm{V}$ uma função. Então existe uma única transformação linear $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ tal que $\forall \mathrm{b} \in \mathrm{B} : \mathrm{T}(\mathrm{b}) = \mathrm{f}(\mathrm{b})$.

Definição 2.4. Seja $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$. Definimos $\mathrm{Ker}(\mathrm{T}) = \{\mathrm{u} \in \mathrm{U} : \mathrm{T}(\mathrm{u}) = 0\}$. Definimos $\mathrm{Rank}(\mathrm{T}) = \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{T}))$.

Proposição 2.5. Seja $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$. Então:

- $\mathrm{Ker}(\mathrm{T})$ é um subespaço de U.
- $\mathrm{Im}(\mathrm{T})$ é um subespaço de V.
- T é injetora se e só se $\mathrm{Ker}(\mathrm{T}) = 0$.
- Se T é bijetora, então $\mathrm{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{V}, \mathrm{U})$.

Teorema 2.6. Seja $\mathcal{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$, seja B uma base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{T})$, e seja C um conjunto tal que $\mathrm{T}[\mathrm{C}]$ seja base de $\mathrm{Im}(\mathrm{T})$. Então $\mathrm{B} \cup \mathrm{C}$ é base V.

Demonstração. Para $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$ então $\mathrm{T}(\mathrm{v}) \in \mathrm{Im}(\mathrm{T})$, então existem um conjunto finito $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{C}$ e $\alpha : \mathrm{F} \to \mathrm{K}$ tais que $\mathrm{T}(\mathrm{v}) = \sum_{\mathrm{w} \in \mathrm{F}} \alpha_{\mathrm{w}}\mathrm{T}(\mathrm{w})$, assim $\mathrm{T}\left(\mathrm{v} - \sum_{\mathrm{w} \in \mathrm{F}} \alpha_{\mathrm{w}}\mathrm{w}\right) = 0$, aí $\mathrm{v} - \sum_{\mathrm{w} \in \mathrm{F}} \alpha_{\mathrm{w}}\mathrm{w} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T})$, assim existem conjunto finito $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{B}$ e função $\beta : \mathrm{B} \to \mathrm{K}$ tal que $\mathrm{v} - \sum_{\mathrm{w} \in \mathrm{F}} \alpha_{\mathrm{w}}\mathrm{w} = \sum_{\mathrm{u} \in \mathrm{E}} \beta_{\mathrm{u}}\mathrm{u}$, aí $\mathrm{v} = \sum_{\mathrm{u} \in \mathrm{E}} \beta_{\mathrm{u}}\mathrm{u} + \sum_{\mathrm{w} \in \mathrm{F}} \alpha_{\mathrm{w}}\mathrm{w}$.

Por outro lado, para subconjunto finito $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{B} \cup \mathrm{C}$ e função $\alpha : \mathrm{E} \to \mathrm{K}$ tal que $\sum_{\mathrm{e} \in \mathrm{E}} \alpha_{\mathrm{e}}\mathrm{e} = 0$, então $\sum_{\mathrm{e} \in \mathrm{E} \cap \mathrm{C}} \alpha_{\mathrm{e}}\mathrm{T}(\mathrm{e}) = 0$, aí $\forall \mathrm{E} \cap \mathrm{C} : \alpha_{\mathrm{e}} = 0$, aí bla. □

Teorema 2.7 (Teorema do Núcleo-Imagem)**.** Seja $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$. Então

$$\mathrm{U} = \mathrm{Ker}(\mathrm{T}) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{T})$$

Corolário 2.8.

$$\dim \mathrm{V} = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{T})) + \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{T})).$$

Definição 2.9. Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ é bijetora, dizemos que T é um **isomorfismo** de U a V.

Proposição 2.10. $T \in \mathcal{L}(U, V)$ é isomorfismo se e somente se T^{-1} também o é.

Proposição 2.11. dois espaços vetoriais U e V são isomorfos se e somente se quaisquer duas bases $\mathcal{B}$ de U e $\mathcal{C}$ de V possuem a mesma cardinalidade.

Teorema 2.12. Para espaços vetoriais U e V, então U é isomorfo a V se e só se $\dim(U) = \dim(V)$.

2.2 Espaço Dual

Definição 2.13. Seja V um espaço vetorial sobre K. Denotamos $V^* = \mathcal{L}(V, K)$. O espaço V^* chama-se o **espaço dual** de V. Os elementos de V chama-se **funcionais lineares**.

Se $\dim(V) = n$, então $\dim(V^*) = n \cdot 1 = n$. Assim, V e V^* são isomorfos (no caso de $\dim(V) = n < \aleph_0$).

Teorema 2.14. Seja V um espaço vetorial com $\dim(V) = n$ e $B = \{v_i\}_{i \in n}$ uma base de V. Então existe uma base $B^* = \{f_i\}_{i \in n}$ de V^* tal que $f_i(v_j) = \delta_{i,j}$ para $i, j \in n$. Além disso, $\forall v \in V : v = \sum_{i \in n} f_i(v) v_i$ e $\forall f \in V^* : f = \sum_{i \in n} f(v_i) f_i$.

Demonstração. Para todo $i \in n$, existe uma única função linear $f_i : V \to K$ tal que:

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Seja $\alpha : n \to K$ tal que:

$$\sum_{i \in n} \alpha_i f_i = 0.$$

Para $j \in n$, aplicando este funcional para o vetor $v_j \in B$, então:

$$0 = 0(v_j) = \sum_{i \in n} \alpha_i f_i(v_j) = \alpha_j,$$

ou seja, $\alpha_j = 0$. Portanto B^* é linearmente independente.

Além disso, para $v \in V$ existe $\alpha : n \to K$ tal que $v = \sum_{i \in n} \alpha_i v_i$, aí para $i \in n$ temos $f_i(v) = \alpha_i f_i(v_i) = \alpha_i$; logo $f(v) = \sum_{i \in n} \alpha_i f(v_i) = \sum_{i \in n} f(v_i) f_i(v)$. □

Definição 2.15. A base B^* chama-se a **base dual** da base B.

2.3 Espaço Bidual

Definição 2.16. Seja V um espaço vetorial sobre K. O espaço $V^{**} = (V^*)^*$ chama-se o **espaço bidual** do espaço V.

Definição 2.17. Para $v \in V$, definamos $\varphi_v : V^* \to K$ assim:

$$\forall f \in V^* : \varphi_v(f) = f(v).$$

Então $\varphi_v \in V^{**}$.

Proposição 2.18. $\varphi \in \mathcal{L}(V, V^{**})$ e φ é injetora.

Demonstração. Para $v \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, então $\varphi_v = 0$, aí para todo $f \in V^*$ temos $f(v) = \varphi_v(f) = 0$, aí para todo $i \in n$ temos $f_i(v) = 0$, aí $v = \sum_{i \in n} f_i(v) v_i = 0$, aí $v = 0$. □

Seja B uma base de V, então para cada $\mathrm{a} \in \mathrm{B}$ definimos a transformação linear $\mathrm{f_a} \in \mathrm{V}^*$ por $\mathrm{f_a(b)} = \delta_{\mathrm{a,b}}$, então $(\mathrm{f_a})_{\mathrm{a}\in\mathrm{B}}$ é linearmente independente em V^* e para todo $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$ existem um conjunto finito $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{B}$ tal que $\mathrm{v} = \sum_{\mathrm{b}\in\mathrm{F}} \mathrm{f_b(v)b}$.

Corolário 2.19. Se $\dim(\mathrm{V}) = \mathrm{n} < \aleph_0$ então $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}^{**}$ é um isomorfismo.

Demonstração.

$$\dim(\mathrm{V}) = \dim(\mathrm{V}^*) = \dim(\mathrm{V}^{**}).$$

□

Observação 2.20. Nesse caso φ é um isomorfismo natural, ou seja, não depende da escolha de uma base.

Corolário 2.21. Se $\dim(\mathrm{V}) < \aleph_0$, então toda base de V^* é a base dual para uma base de V.

Demonstração. Seja C uma base de V^*. Consideremos a base dual C^* de V^{**}. Mas $\mathrm{V}^{**} \cong \mathrm{V}$, então existe $\mathrm{v} : \mathrm{C} \to \mathrm{V}$ tal que $\forall \mathrm{c} \in \mathrm{C} : \mathrm{f_c} = \varphi_{\mathrm{v_c}}$, assim:

$$\mathrm{c(v_d)} = \varphi_{\mathrm{v_d}}(\mathrm{c}) = \mathrm{f_d(v_c)} = \delta_{\mathrm{d,c}} = \delta_{\mathrm{c,d}},$$

logo C é base dual da base $(\mathrm{v_c})_{\mathrm{c}\in\mathrm{C}}$ de V. □

2.4 Anuladores

Definição 2.22. Seja V um espaço vetorial e seja $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{V}$ um subconjunto. Então definimos:

$$\mathrm{S}^0 = \{\mathrm{f} \in \mathrm{V}^* \mid \forall \mathrm{s} \in \mathrm{S} : \mathrm{f(s)} = 0\}.$$

O conjunto S^0 chama-se o **anulador** de S.

Proposição 2.23. S^0 é um subespaço de V.

Teorema 2.24. Seja V um espaço com $\dim(\mathrm{V}) < \aleph_0$ e $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{V}$ um subespaço. Então:

$$\dim(\mathrm{V}) = \dim(\mathrm{W}) + \dim(\mathrm{V}^0).$$

Demonstração. Seja $\dim(\mathrm{V}) = \mathrm{n}$ e $\dim(\mathrm{W}) = \mathrm{m}$. Escolhemos uma base $(\mathrm{v_i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{m}}$ de W e completemo-la até uma base $(\mathrm{v_i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{n}}$ de V. Consideremos a base dual $(\mathrm{f_{v_i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{n}}$ de V^*. Mostraremos que $(\mathrm{f_{v_i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{n}\setminus\mathrm{m}}$ é uma base de W^0. É claro que $\forall \mathrm{i} \in \mathrm{n} \setminus \mathrm{m} : \mathrm{f_{v_i}} \in \mathrm{W}^0$. Seja $\mathrm{f} \in \mathrm{W}^0$, então $\mathrm{f} = \sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{n}} \mathrm{f(v_i)f_{v_i}} = \sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{n}\setminus\mathrm{m}} \mathrm{f(v_i)f_{v_i}}$. □

Teorema 2.25. Se $\dim(\mathrm{V}) < \aleph_0$ e $\mathrm{V} = \mathrm{U} \oplus \mathrm{W}$, então $\mathrm{V}^* = \mathrm{U}^0 \oplus \mathrm{W}^0$ e $\mathrm{U}^0 \cong \mathrm{W}^*$ e $\mathrm{W}_0 \cong \mathrm{U}^*$.

Demonstração. Seja $\mathrm{B} = \mathrm{B_U} \cup \mathrm{B_W}$ uma base de V, em que $\mathrm{B_U}$ é base de U e $\mathrm{B_W}$ é base de W. Então na base dual temos $\mathrm{B}^* = \mathrm{B_U^*} \cup \mathrm{B_V^*}$, e pelo teorema anterior temos $\langle \mathrm{B_U^*} \rangle = \mathrm{W}^0$ e $\langle \mathrm{B_V^*} \rangle = \mathrm{U}^0$. □

2.5 Transpostas

Definição 2.26. Sejam U e V espaços vetoriais sobre K, e $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$. Então definimos a **transposta** de T como a função:

$$\begin{aligned} \mathrm{T^t} : \mathrm{V^t} &\to \mathrm{U^t} \\ \mathrm{f} &\mapsto \mathrm{T^t(f)} = \mathrm{f} \circ \mathrm{T} \end{aligned}$$

Proposição 2.27. Se $\dim(\mathrm{U}) < \aleph_0$ e $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$, então:

a) $\mathrm{Ker(T^t)} = (\mathrm{Im(T)})^0$.

b) $\mathrm{Rank}(T^t) = \mathrm{Rank}(T)$.

c) $\mathrm{Im}(T^t) = (\mathrm{Ker}(T))^0$.

Demonstração. Temos o seguinte:

a) Temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(T^t) &= \{f \in V^* \mid T^t(f) = 0\} \\ &= \{f \in V^* \mid f \circ T = 0\} \\ &= \{f \in V^* \mid \forall u \in U : f(T(u)) = 0\} \\ &= \{f \in V^* \mid f[\mathrm{Im}(T)] = 0\} \\ &= (\mathrm{Im}(T))^0. \end{aligned}$$

b) Temos $\mathrm{Rank}(T^t) = \dim(\mathrm{Im}(T^t))$ e $\mathrm{Rank}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T))$. Além disso:

$$\dim(V^*) = \dim(\mathrm{Im}(T^t)) + \dim(\mathrm{Ker}(T^t))$$

$$\dim(V^*) = \dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))^0$$

mas $\dim(V^*) = \dim(V)$ e $\dim(\mathrm{Ker}(T^t)) + \dim(\mathrm{Im}(T))^0$.

c) Temos $\mathrm{Im}(T^t) \subseteq (\mathrm{Ker}(T))^0$. Seja $\varphi \in \mathrm{Im}(T^t)$, então existe $g \in V^*$ tal que $\varphi = T^t(g)$, aí para todo $u \in U$ nós temos $\varphi(u) = T^t(g)(u) = g(T(u))$. Se $u \in \mathrm{Ker}(T)$ então $T(u) = 0$, aí $\varphi(u) = 0$; logo $\varphi \in (\mathrm{Ker}(T))^0$. Além disso:

$$\dim(U) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Ker}(T))^0$$

$$\dim(U) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$$

aí $\dim(\mathrm{Ker}(T))^0 = \dim(\mathrm{Im}(T))$, aí $(\mathrm{Ker}(T))^0 = \mathrm{Im}(T)$.

□

Teorema 2.28. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita com bases B e C e bases duais B^* e C^*. Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$, então:

$$([T]_{B,C})^t = [T^t]_{C^*,B^*}$$

Corolário 2.29. Se $A \in M_{m,n}(K)$, então:

$$\mathrm{RowRank}(A) = \mathrm{ColumnRank}(A).$$

Demonstração. Consideremos $T : K^n \to K^m$ dada por $T(v) = Av$. Sejam B e C as bases canônicas de K^n e K^m, então $[T]_{B,C} = A$. Temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rank}(T) &= \mathrm{ColumnRank}(A) \\ \mathrm{Rank}(T^t) &= \mathrm{ColumnRank}(A^t) = \mathrm{RowRank}(A). \end{aligned}$$

□

2.6 Espaços Quocientes

Definição 2.30. Seja V um espaço, $W \subseteq V$ um subespaço. Para $u, v \in V$, digamos que $u \sim v$ se e só se $u - v \in W$. Então $\sim$ é uma relação de equivalência, ou seja:

- Reflexiva, ou seja, $v \sim v$ sempre.
- Simétrica, ou seja, se $v \sim u$ então $u \sim v$.
- Transitiva, ou seja, se $v \sim u$ e $u \sim w$, então $v \sim w$.

Seja V/W o conjunto das classes de equivalência relativamente a $\sim$. Para $v \in V$ seja $\overline{v}$ a classe de equivalência de v.

- Definamos em V/W uma estrutura de espaço vetorial. Para $\overline{v}, \overline{w} \in V/W$ definamos $\overline{v} + \overline{w} = \overline{v + w}$.
- Para $\alpha \in K$ e $\overline{v} \in V$ definamos $\alpha \cdot \overline{v} = \overline{\alpha v}$. Então V/W é um espaço vetorial chamado **espaço quociente**.

Observação 2.31. As operações estão "bem definidas" pois:

- Se $\overline{v} = \overline{v'}$ e $\overline{u} = \overline{u'}$, então $v \sim v'$ e $u \sim u'$, aí $v - v', u - u' \in W$, aí $(v + u) - (v' + u') = (v - v') + (u - u') \in W$, aí $\overline{v + u} = \overline{v' + u'}$, aí $\overline{v} + \overline{u} = \overline{v'} + \overline{u'}$.
- Analogamente para a outra propriedade.

Também verificaremos algumas propriedades, deixando o resto ao leitor.

- Temos a comutatividade da adição, pois $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$ equivale a $\overline{u + v} = \overline{v + u}$, que é verdade pois $u + v = v + u$.
- O que é o $\overline{0}$ de V/W? Temos $\overline{0} = W$, e também para todo $w \in W$ temos $w \sim 0$, aí $\overline{w} = \overline{0} = W$.

Também temos o seguinte:

- Se $W = V$, então $V/V = \{\overline{0}\}$.
- Se $W = \{0\}$, então $V/\{0\} \cong V$.

Proposição 2.32. Consideremos a aplicação:

$$\pi : V \to V/W, \qquad v \mapsto \overline{v}.$$

Então $\pi \in \mathcal{L}(V, V/W)$, com $\operatorname{Ker}(\pi) = W$.

Notação 2.33. π chama-se a **projeção canônica** de V para V/W.

Demonstração. Temos o seguinte:

- $\pi(v + u) = \overline{v + u} = \overline{v} + \overline{u} = \pi(v) + \pi(u)$.
- $\pi(\alpha v) = \overline{\alpha v} = \alpha \overline{v} = \alpha \pi(v)$.

Além disso, se $w \in W$ então $\pi(w) = \overline{w} = W$ □

Proposição 2.34. Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $W \subseteq U$ tal que $W \subseteq \operatorname{Ker}(T)$. Então existe um único $\overline{T} \in \mathcal{L}(U/W, V)$ tal que para todo $u \in U$ tenhamos:

$$\overline{T}(\overline{u}) = T(u).$$

Demonstração. Temos o seguinte:

1) Mostraremos que $\overline{T}$ está "bem definida". Se $\overline{u} = \overline{v}$, então $u - v \in W \in \operatorname{Ker}(T)$, aí $T(u - v) = 0$, aí $T(u) = T(v)$.

2) Mostraremos que $\overline{T}$ é uma transformação linear.

- $\overline{T}(\overline{u} + \overline{v}) = \overline{T}(\overline{u + v}) = T(u + v) = T(u) + T(v) = \overline{T}(\overline{u}) + \overline{T}(\overline{v})$.
-

□

Teorema 2.35. Sejam U e V espaços vetoriais sobre K, e seja $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$. Então $\mathrm{U}/\mathrm{Ker}(\mathrm{T}) \cong \mathrm{Im}(\mathrm{T})$.

Demonstração. Pela proposição anterior, existe uma única $\overline{\mathrm{T}} : \mathrm{U}/\mathrm{Ker}(\mathrm{T}) \to \mathrm{V}$ tal que para todo $\mathrm{u} \in \mathrm{U}$ tenhamos:

$$\overline{\mathrm{T}}(\overline{\mathrm{u}}) = \mathrm{T}(\mathrm{u}).$$

Observemos que $\mathrm{Im}(\overline{\mathrm{T}}) = \mathrm{Im}(\mathrm{T}) = \{\mathrm{T}(\mathrm{u}) \mid \mathrm{u} \in \mathrm{U}\}$.

Além disso, para $\overline{\mathrm{u}} \in \mathrm{Ker}(\overline{\mathrm{T}})$, então $\mathrm{T}(\mathrm{u}) = \overline{\mathrm{T}}(\overline{\mathrm{u}}) = 0$, aí $\mathrm{u} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T})$, aí $\overline{\mathrm{u}} = \overline{0}$, de modo que $\overline{\mathrm{T}}$ é injetora. ☐

Teorema 2.36. Seja W subespaço de V. Então todos os complementos de W em V são isomorfos ao V/W.

Demonstração. Seja $\mathrm{V} = \mathrm{W} \oplus \mathrm{U}$. Consideremos a projeção canônica:

$$\pi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}/\mathrm{W}.$$

Seja $\overline{\pi} = \pi \restriction \mathrm{U}$. Então $\mathrm{Ker}(\overline{\pi}) = \mathrm{U} \cap \mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{U} \cap \mathrm{W} = \{0\}$. Logo $\overline{\pi}$ é injetora.

Para $\overline{\mathrm{v}} \in \mathrm{V}/\mathrm{W}$, seja $\mathrm{v} = \mathrm{w} + \mathrm{u}$, com $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$ e $\mathrm{u} \in \mathrm{U}$. Então $\pi(\mathrm{v}) = \pi(\mathrm{w}) + \pi(\mathrm{u}) = \pi(\mathrm{u}) = \overline{\pi}(\mathrm{u})$, aí $\overline{\mathrm{v}} = \overline{\pi}(\mathrm{u})$, assim $\overline{\pi}$ é sobre V/W. ☐

Corolário 2.37. Seja $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{V}$ um subespaço. Então $\dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{W} + \dim \mathrm{V}/\mathrm{W}$.

Demonstração. Seja $\mathrm{V} = \mathrm{W} \oplus \mathrm{U}$, então $\dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{W} + \dim \mathrm{U}$, mas $\mathrm{U} \cong \mathrm{V}/\mathrm{W}$, aí $\dim \mathrm{U} = \dim \mathrm{V}/\mathrm{W}$. ☐

Observação 2.38. Existem espaços vetoriais W e U e W' e U' tais que $\mathrm{W} \oplus \mathrm{U} \cong \mathrm{W}' \oplus \mathrm{U}'$ e $\mathrm{W} \cong \mathrm{W}'$, mas $\mathrm{U} \ncong \mathrm{U}'$. De fato podemos tomar $\mathrm{W} = \bigoplus_{\mathrm{i}=0}^{\infty} \mathrm{K}\mathrm{e}_{2\mathrm{i}}$ e $\mathrm{U} = \bigoplus_{\mathrm{i}=0}^{\infty} \mathrm{K}\mathrm{e}_{2\mathrm{i}+1}$ e $\mathrm{W}' = \bigoplus_{\mathrm{i}=0}^{\infty} \mathrm{K}\mathrm{e}_{\mathrm{i}}$ e $\mathrm{U}' = \{0\}$.

Capítulo 3

Determinantes

3.1 Formas Multilineares

Definição 3.1. Seja V um espaço vetorial e $V^r = V \times \cdots \times V$. Uma **forma r-linear** sobre V é uma função:

$$F : V^r \to K, \qquad (v_i)_{i \in r} \mapsto F((v_i)_{i \in r}) \in K$$

que é linear em cada argumento, ou seja, para $i \in r$ temos:

$$F(v_0, \ldots, \alpha v_i + \beta v_i', \ldots, v_{r-1}) = \alpha F(v_0, \ldots, v_i, \ldots, v_{r-1}) + \beta F(v_0, \ldots, v_i', \ldots, v_{r-1}).$$

Denotamos por $L_r(V)$ o conjunto das formas r-lineares sobre V.

Exemplo 3.2. Seja $V = K^2$ e:

$$F((x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_0 y_1 x_2 - x_0 x_1 x_2.$$

Então F é uma forma 3-linear.

Definição 3.3. Uma forma $F \in L_r(V)$ chama-se **alternativa** se e só se para $v \in V^r$, se v não é injetora, então $F(v) = 0$. Denotamos por $A_r(V)$ o conjunto das formas r-lineares alternativas.

Definição 3.4. Uma forma F é chamada **antissimétrica** se para $v \in V^r$ e para $i, j \in r$ tais que $i \neq j$, então:

$$F(v_0, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_{r-1}) = -F(v_0, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_{r-1}).$$

Proposição 3.5. Toda forma alternativa é antissimétrica.

Demonstração. Seja $F \in A_r(V)$. Sejam $v \in V^r$ e $i, j \in r$ tais que $i \neq j$. Então:

$$\begin{aligned} 0 &= F(v_0, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_{r-1}) \\ &= F(v_0, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_{r-1}) + F(v_0, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_{r-1}) \\ &\quad + F(v_0, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_{r-1}) + F(v_0, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_{r-1}) \\ &= F(v_0, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_{r-1}) + F(v_0, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_{r-1}) \end{aligned}$$

□

Proposição 3.6. Se a característica do corpo é $\neq 2$, então toda forma antissimétrica é reflexiva.

Demonstração. Para F antissimétrica e $v \in V^r$ e $i, j \in r$ tais que $i \neq j$, se $v_i = v_j$, sendo $v = v_i$, então:

$$F(v_0, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_{r-1}) = -F(v_0, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_{r-1}),$$

aí:

$$2F(v_0, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_{r-1}) = 0,$$

aí:

$$F(v_0, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_{r-1}) = 0.$$

□

Definição 3.7. Seja $F \in L_r(V)$ e $\sigma \in S_r$ uma permutação. Então, para $v \in V^r$, definamos $(\sigma F)(v) = F(v \circ \sigma)$. Então é fácil ver que $\sigma F \in L_r(V)$.

Observação 3.8. Para $F \in L_r(V)$, então F é antissimétrica se e somente se para toda transposição $\tau \in S_r$ tivermos $\tau F = -F$.

Proposição 3.9. Seja $F \in L_r(V)$ uma forma antissimétrica. Então para $\sigma \in S_r$, temos $\sigma F = (\operatorname{sgn}\sigma)F$.

Demonstração. Para $\sigma \in S_r$, então σ pode ser escrita como $\sigma = \tau_0 \dots \tau_{k-1}$, em que τ_i são transposições, e σ é par se e só se k é par.

Temos $\sigma F = (\tau_0 \dots \tau_{k-1})F = (-1)^k F = (\operatorname{sgn}\sigma)F$, pois $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^k$. □

Proposição 3.10. Toda forma r-linear determina uma forma r-linear alternada da seguinte maneira:

$$F \mapsto \varphi(F) = \sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sgn}\sigma(\sigma F).$$

Demonstração. Seja $v_i = v_j = v$ com $i \neq j$. Precisamos provar que $\varphi(F)(v) = 0$. Seja τ a transposição (i, j), então $S = A_r \cup A_r\tau$ e $A_r \cap A_r\tau = \emptyset$. Então temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\varphi(F)(v) &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_r} (\operatorname{sgn}\sigma)(\sigma F(v)) \\
&= \textstyle\sum_{\sigma \in A_r} (\sigma F(v)) - \sum_{\sigma \in A_r} (\sigma\tau F(v)) \\
&= \textstyle\sum_{\sigma \in A_r} (\sigma F(v)) - \sum_{\sigma \in A_r} (\sigma F(v)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Observação 3.11. Se $F \in A_r(V)$ e $v \in V^r$ é linearmente dependente, então:

$$F(v) = 0.$$

Lema 3.12. Seja $\dim V = n$ e $F \in A_n(V)$. Seja $(e_i)_{i \in n}$ uma base de V, então F é completamente determinada pelo valor $F(e)$.

Demonstração. Seja $v \in V^n$. Então existe $\alpha : n \times n \to K$ tal que:

$$v_i = \sum_{j \in n} \alpha_{i,j} e_j.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
F(v) &= F((\textstyle\sum_{j \in n} \alpha_{i,j} e_j)_{j \in n}) \\
&= \textstyle\sum_{j \in n^n} \prod_{i \in n} \alpha_{i,j(i)} F(e \circ j) \\
&= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i \in n} \alpha_{i,\sigma(i)} F(e \circ \sigma) \\
&= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \textstyle\prod_{i \in n} \alpha_{i,\sigma(i)} \operatorname{sgn}\sigma \right) F(e).
\end{aligned}$$

□

Note então que o valor $\sum\limits_{\sigma \in S_n} \prod_{i \in n} \alpha_{i,\sigma(i)} \operatorname{sgn}\sigma$ *determina* F para qualquer $v \in V^n$. Chamaremos este valor de **determinante** de F.

Exemplo 3.13.

3.2 Determinantes

Seja K um corpo e consideremos o anel das matrizes $\mathrm{M_n(K)}$. Identificaremos os elementos de $\mathrm{M_n(K)}$ com os elementos de $(\mathrm{K^n})^{\mathrm{n}}$ assim:

$$\mathrm{A} = (\mathrm{a_{i,j}})_{(\mathrm{i,j})\in \mathrm{n}\times\mathrm{n}} \leftrightarrow ((\mathrm{a_{i,j}})_{\mathrm{j}\in\mathrm{n}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{n}}$$

Portanto, uma função n-linear aqui é uma função n-linear nas linhas da matriz.

Definição 3.14. Uma função $\det : \mathrm{M_n(K)} \to \mathrm{K}$ é dita uma função **determinante** se e só se det é n-linear alternada e $\det(\mathrm{I}) = 1$.

Pelo que vimos, existe e é única a função determinante: É a forma n-linear alternada que vale 1 na base canônica de $\mathrm{K^n}$.

Logo, se $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{i,j}}) \in \mathrm{M_n(K)}$, então:

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{\sigma\in \mathrm{S_n}} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{n}} \mathrm{a}_{\mathrm{i},\sigma(\mathrm{i})}.$$

Exemplo 3.15. Para $\mathrm{n} = 2$, temos $\mathrm{S_2} = \{\mathrm{I}, (0, 1)\}$, e assim, sendo:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a_{0,0}} & \mathrm{a_{0,1}} \\ \mathrm{a_{1,0}} & \mathrm{a_{1,1}} \end{pmatrix},$$

então temos:

$$\det(\mathrm{A}) = \mathrm{a_{0,0}a_{1,1}} - \mathrm{a_{0,1}a_{1,0}}.$$

Exemplo 3.16. Agora, se $\mathrm{n} = 3$, então $\mathrm{S_3} = \{\mathrm{I}, (0, 1, 2), (0, 2, 1), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$, e assim, sendo:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a_{0,0}} & \mathrm{a_{0,1}} & \mathrm{a_{0,2}} \\ \mathrm{a_{1,0}} & \mathrm{a_{1,1}} & \mathrm{a_{1,2}} \\ \mathrm{a_{2,0}} & \mathrm{a_{2,1}} & \mathrm{a_{2,2}} \end{pmatrix},$$

então temos:

$$\det(\mathrm{A}) = \mathrm{a_{0,0}a_{1,1}a_{2,2}} + \mathrm{a_{0,1}a_{1,2}a_{2,0}} + \mathrm{a_{0,2}a_{1,0}a_{2,1}} - \mathrm{a_{0,1}a_{1,0}a_{2,2}} - \mathrm{a_{0,2}a_{1,1}a_{2,0}} - \mathrm{a_{0,0}a_{1,2}a_{2,1}}.$$

Proposição 3.17. Temos as seguintes propriedades:

1) Para todo $\mathrm{A} \in \mathrm{M_n(K)}$ temos $\det(\mathrm{A}) = \det\left(\mathrm{A^t}\right)$.

2) Para $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M_n(K)}$ vale $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$.

3) Para $\mathrm{A} \in \mathrm{M_n(K)}$, então A é inversível se e só se $\det(\mathrm{A}) \neq 0$. Neste caso, temos $\det\left(\mathrm{A^{-1}}\right) = (\det(\mathrm{A}))^{-1}$.

Demonstração. Temos o seguinte:

1) Sendo $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{i,j}})_{(\mathrm{i,j})\in\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$, então temos:

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{A}) &= \textstyle\sum_{\sigma\in\mathrm{S_n}} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{n}} \mathrm{a}_{\mathrm{i},\sigma(\mathrm{i})} \\ &= \textstyle\sum_{\sigma\in\mathrm{S_n}} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{n}} \mathrm{a}_{\sigma^{-1}(\mathrm{i}),\mathrm{i}} \\ &= \textstyle\sum_{\tau\in\mathrm{S_n}} \mathrm{sgn}(\tau^{-1}) \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{n}} \mathrm{a}_{\tau(\mathrm{i}),\mathrm{i}} \\ &= \textstyle\sum_{\tau\in\mathrm{S_n}} \mathrm{sgn}(\tau) \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{n}} \mathrm{a}^{\mathrm{t}}_{\mathrm{i},\tau(\mathrm{i})} \\ &= \det\left(\mathrm{A^t}\right). \end{aligned}$$

2) Seja $F_A : M_n(K) \to K$ tal que $\forall X \in M_n(K) : F_A(X) = \det(AX)$. Então a função F_A é uma função n-linear alternada sobre as colunas, mas também $F_A(I) = \det(A)$, aí $F_A(B) = \det(A)\det(B)$, assim $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

3) Se A é inversível, então existe a inversa A^{-1}, assim $1 = \det(I) = \det\left(AA^{-1}\right) = \det(A)\det(A)^{-1}$, aí $\det(A) \neq 0$ e $\det\left(A^{-1}\right) = (\det(A))^{-1}$. Por outro lado, se $\det(A) \neq 0$, então $\det\left(A^t\right) \neq 0$, aí as colunas de A são linearmente independentes, aí consideremos $T : K^n \to K^n$ tal que $[T]_{can} = A$, então T é inversível, assim $A = [T]_{can}$ é inversível.

□

Assim lembremo-nos do seguinte: a função det é uma função n-linear e alternada nas linhas (ou nas colunas) da matriz, logo:

1) Trocar duas linhas (ou colunas) da matriz muda o sinal do determinante.

2) Somar a uma linha (ou coluna) uma combinação linear das demais linhas (colunas) não altera o valor do determinante.

3) Ao multiplicar uma linha (ou coluna) por um escalar, o determinante fica multiplicado por esse escalar.

Proposição 3.18. Temos o seguinte:

1) O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal da matriz.

2) Se:
$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$
em que $B \in M_r(K)$ e $D \in M_{n-r}(K)$ e $C \in M_{n-r,r}(K)$ e $0 \in M_{r,n-r}(K)$, então:
$$\det(A) = \det(B)\det(D).$$

Demonstração. Temos o seguinte:

1) Seja $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in n\times n}$ uma matriz triangular inferior, então para $i, j \in n$ tais que $i < j$ temos $a_{i,j} = 0$, mas a única permutação $\sigma \in S_n$ tal que $\forall i \in n : i \geq \sigma(i)$ é a identidade, assim temos:
$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i\in n} a_{i,\sigma(i)} = \operatorname{sgn}(I) \prod_{i\in n} a_{i,I(i)} = \prod_{i\in n} a_{i,i}.$$

2) Seja $F : M_r(K) \to K$ tal que:
$$F(X) = \det\begin{pmatrix} X & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$
Então F é r-linear alternada nas linhas de X, assim $F(X) = F(I)\det(X)$.

Agora consideremos $G : M_{n-r}(K) \to K$ tal que:
$$G(Y) = \det\begin{pmatrix} I & 0 \\ C & Y \end{pmatrix}$$
Então G é $(n-r)$-linear alternada nas colunas de Y, logo $G(Y) = G(I)\det(Y)$. Mas:
$$G(I) = \det\begin{pmatrix} I & 0 \\ C & I \end{pmatrix} = 1,$$
assim $G(Y) = \det(Y)$, aí $F(I) = G(D) = \det(D)$, assim $F(X) = F(I)\det(X) = \det(X)\det(D)$, aí acaba.

□

Agora temos a **regra de Laplace**:

Teorema 3.19. Dada $A \in M_n(K)$, indicaremos por $M_{i,j}$ a matriz quadrada de tamanho $n-1$ obtida a partir de A eliminando a linha i e a coluna j.

Para cada $i \in n$, então vale:

$$\det(A) = \sum_{j \in n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(M_{i,j}\right).$$

Para cada $j \in n$, então vale:

$$\det(A) = \sum_{i \in n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(M_{i,j}\right).$$

Demonstração. Provaremos a primeira afirmação pois a segunda é análoga. □

AULA DE 19 DE AGOSTO (COLOCAREI ASSIM QUE CONSEGUIR)- FICOU FALTANDO A PROVA DA REGRA DE LAPLACE E A PARTE DE MATRIZES SOBRE ANEIS COMUTATIVOS Bláa blá blá

Capítulo 4

Formas Canônicas

,

4.1 Autovalores e Autovetores

Definição 4.1. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Um vetor $v \in V$ é um *vetor próprio* ou *autovetor* de T se existe $\lambda \in K$ tal que $T(v) = \lambda v$. O escalar λ é um *valor próprio* ou *autovalor* do operador T. Dizemos que v é um autovetor associado com o autovalor λ.

Exemplo 4.2. Seja $V = \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ e considere o operador linear $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T(v) = v'$ para cada $v \in V$. Considere $v = e^{\lambda x}$ com $\lambda \in K$. Então $T(v) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda v$. Ou seja v é um autovetor associado com o autovalor λ.

Definição 4.3. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. O *spectrum* do operador T é o conjunto

$$\mathrm{Spec}(T) := \{\lambda \in K : \lambda \text{ é autovalor de } T\}.$$

Para cada $\lambda \in \mathrm{Spec}(T)$, denotamos o conjunto dos autovetores associados a λ como $V_T(\lambda)$.

No contexto da definição anterior, considere $\lambda \in \mathrm{Spec}(T)$. Então

$$\begin{aligned} v \in V_T(\lambda) &\iff T(v) = \lambda v \\ &\iff (T - \lambda I)(v) = 0 \\ &\iff v \in \mathrm{Ker}(T - \lambda I). \end{aligned}$$

ALGUMA COISA QUE EU PERDI

Ainda no mesmo contexto, vamos assumir agora que $\dim(V) = n < \infty$. Então temos que

$$\lambda \in \mathrm{Spec}(T) \implies \mathrm{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\} \implies \det(T - \lambda I) = 0.$$

Reciprocamente, se $\det(T - \lambda I) = 0$ então $V_T(\lambda) = \mathrm{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}$.

Definição 4.4. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. O *polinômio característico* de T é a função $p_T(\lambda) \colon K \to K$ dada por

$$p_T(\lambda) := \det(T - \lambda I), \text{ para cada } \lambda \in K.$$

Note que $\lambda \in \mathrm{Spec}(T)$ se e só se λ é raiz de $p_T(\lambda)$. Além disso, note que se B e B′ são bases V, então $p_T(\lambda) = p_{[T]_B}(\lambda)$. De fato, se P é a matriz de mudança da base B para a base B′, então

$$[\lambda I - T]_{B'} = P^{-1}[\lambda I - T]_B P$$

Isso implica que

$$\det([\lambda I - T]_{B'}) = \det(P^{-1})\det([\lambda I - T]_B)\det(P).$$

Ou seja, $\det([\lambda I - T]_{B'}) = \det([\lambda I - T]_B)$.

Exemplo 4.5. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é, $T((x,y)) = (-y,x)$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Então

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \lambda^2 + 1. \end{aligned}$$

Dessa forma, $\mathrm{Spec}(T) = \varnothing$ pois $p_T(\lambda)$ não possui raízes em $K = \mathbb{R}$.

Exemplo 4.6. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= (\lambda-1)^2(\lambda-2). \end{aligned}$$

Isso implica que $\mathrm{Spec}(T) = \{1,2\}$. Além disso, temos que

$$V_T(1) = \mathrm{Ker}(T-I) = \mathrm{Ker}(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}) = \langle(1,0,2)\rangle.$$

e ainda

$$V_T(2) = \mathrm{Ker}(T-2I) = \mathrm{Ker}(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}) = \langle(1,1,2)\rangle$$

Exemplo 4.7. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Neste caso temos que

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & -3-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}) \\ &= (\lambda+1)^2(\lambda+2). \end{aligned}$$

Isso implica que $\mathrm{Spec}(T) = \{-1,-2\}$ e ainda

$$V_T(-1) = \langle\{(1,0,2),(0,1,2)\}\rangle$$

e

$$V_T(-2) = \langle(1,-1,1)\rangle$$

. Uma vez que os autovetores acima são L.I, eles formam uma base B de $\mathbb{R}^3$ e

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

é uma matriz diagonal.

Teorema 4.8. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K tal que $\dim(V) = n < \infty$ e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. São equivalentes:

1. T é diagonalizável.
2. $p_T(t) = (t-\lambda_1)^{n_1} \dots (t-\lambda_k)^{n_k}$ e $\dim(V_T(\lambda_i)) = n_i$ para cada $i \in [k]$.
3. $\dim((V_T(\lambda_1)) + \dots + \dim(V_T(\lambda_k)) = \dim(V) = n$.

Lema 4.9. Seja $\{\lambda_i\}_{i\in[k]} \subseteq \mathrm{Spec}(T)$.

1. Se $v_i \in V_T(\lambda_i)$ para cada $i \in [k]$ e $v_1 + \dots + v_k = 0$, então $v_1 = \dots = v_k = 0$.
2. Se $B_i \subseteq V_T(\lambda_i)$ é L.I para cada $i \in [k]$, então $\bigcup_{i\in[k]} B_i$ é L.I.

Demonstração do Lema.

1. Vamos provar essa afirmação por indução em k. Primeiro note que o resultado é trivial quando $k = 1$. Agora seja $k \in \mathbb{N}$ e assuma que o resultado vale para cada natural $i < k$. Sejam $v_1, \dots, v_k$ tais que $v_i \in V_T(\lambda_i)$ para cada ß $\in [k]$ e $v_1 + \dots + v_k = 0$. Então temos que

   $$\lambda_1(v_1 + \dots + v_k) = 0\lambda_1 = 0. \tag{4.1}$$

   Além disso, é claro que

   $$T(v_1 + \dots + v_k) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0. \tag{4.2}$$

   Subtraindo a Equação 4.1 de 4.2, obtemos

   $$(\lambda_1 - \lambda_1)v_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + (\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0. \tag{4.3}$$

   Agora notamos que cada termo no lado esquerdo é um autovetor de T e aplicamos a hipótese de indução para concluir que $v_2 = \dots = v_k = 0$. Finalmente, como sabemos que $v_1 + \dots + v_k = 0$ e $v_2 = \dots = v_k = 0$, obtemos que $v_1 = 0$ também, o que conclui nossa prova.

2. Seja $S \subseteq \bigcup_{i\in[k]} B_i$ finito e seja $\alpha \colon S \to \mathbb{R}$. Note que $V_T(\lambda_i) \cap V_T(\lambda_j) = \{0\}$ sempre que $i, j \in [k]$ e $i \neq j$ e então podemos escrever

   $$\sum_{v\in S} \alpha_i v_i = \sum_{v\in S_1} \alpha_v v + \dots + \sum_{v \in S_k} \alpha_v v,$$

   onde $S_i \subseteq B_i$ é finito para cada $i \in [k]$. Utilizan do o fato de que o termo $\sum_{v\in S_i} \alpha_v v \in V_T(\lambda_i)$ para cada $i \in [k]$ e aplicando o item anterior, obtemos que

   $$\sum_{v\in S_1} \alpha_v v = \dots = \sum_{v\in S_k} \alpha_v v = 0.$$

   Finalmente como como $S_i \subseteq B_i$ para cada $i \in [k]$ e B_i é sempre L.I por hipótese segue que a restrição de α a cada S_i é identicamente nula. Como $S = \bigcup_{i\in[k]} S_i$ segue que α é indenticamente nula. □

Demonstração.

(i)⇒(ii): Sejam $(v_{i,j})_{j \in n_i}$ autovetores associados a $\lambda_i \in \mathrm{Spec}(T)$TERMINAR ESSA IMPLICAÇÃO

- (ii)⇒(iii):

$$\dim(V_T(\lambda_1)) + \ldots + \dim(V_T(\lambda_k)) = n_1 + \ldots + n_k = \deg(p_T(t)) = \dim(V) = n.$$

- (iii)⇒(i): Para cada $i \in [k]$ considere uma base B_i de $V_T(\lambda_i)$. Seja $B = \bigcup_{i \in [k]} B_i$. Pelo lema anterior, temos que B é L.I. Como $|B| = n$ segue que B é uma base de V. Além disso, B é uma base de autovetores de T. Logo, T é diagonalizável.

□

4.2 Polinômio Minimal

Definição 4.10. Seja V um espaço sobre K, $\dim V = n < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V)$. Definamos por recursão $T^0 = I$ e $T^{k+1} = T^k \circ T$. Se $p(t) \in K[t]$, $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdot + a_m t^m$, então está bem definido o operador $p(T) = a_0 \cdot I + a_1 \cdot I + \cdots + a_m \cdot T^m \in \mathcal{L}(V)$.

Lembremo-nos de que, se $\dim(U) = m$ e $\dim(V) = n$, então $\dim \mathcal{L}(U, V) = mn$. Assim, se V é um espaço vetorial tal que $\dim(V) = n < \infty$, então $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$, de modo que existe $m \leq n^2 + 1$ tal que os operadores $I, T, T^2, \dots, T^m$ sejam linearmente dependentes. Seja m um número minimal tal que $T^m \in \langle I, T, \dots, T^{m-1} \rangle$. Então $T^m = a_0 \cdot I + a_1 \cdot T + \dots a_{m-1} T^{m-1}$, com $a_i \in K$. Seja $m_T(t) = t^m - a_{m-1} t^{m-1} - \cdots - a_1 t - a_0$, então $m_T(t) = 0$, e $m_T(t)$ é um polinômio de menor grau tal que $m_T(t) = 0$.

Definição 4.11. Um polinômio mônico de grau mínimo tal que $m_T(t) \in K[t]$ tal que $m_T(t) = 0$ chama-se um **polinômio minimal** do operador T. Chamemos um polinômio $f(t) \in K[t]$ de um **polinômio anulador** de T se $f(T) = 0$.

Lema 4.12. Seja $f(t) \in K[t]$ tal que $f(T) = 0$. Então $m(t) \mid f(t)$.

Demonstração. Dividimos f(t) por m(t) (com resto):

$$f(t) = m_T(t) \cdot q(t) + r(t), \qquad \deg(r(t)) < \deg(m_T(t)) \text{ ou } r(t) = 0.$$

Como $f(T) = 0$ e $m_T(t) = 0$, então $r(T) = 0$, aí $r(t) = 0$. □

Corolário 4.13. O polinômio $m_T(t)$ é único.

Se V é um espaço vetorial e $T \in \mathcal{L}(V)$, então V tem uma estrutura de K[t] módulo à esquerda: Se $f(t) \in K[t]$, para $v \in V$ definimos:

$$f(t) \cdot v = f(T)(v).$$

Além disso, se considerarmos:

$$\begin{aligned} \varphi : K[t] &\to \operatorname{End}(V) \\ f(t) &\mapsto f(T), \end{aligned}$$

então φ é um homomorfismo de K-álgebras e portanto $\operatorname{Ker}(\varphi)$ é um ideal de K[t].

Teorema 4.14. Os polinômios $p_T(t)$ e $m_T(t)$ têm as mesmas raízes em K (a menos de multiplicidade). Em outras palavras, $m_T(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \operatorname{Spec}(T)$.

Demonstração. Se $m_T(\lambda) = 0$, então $m_T(t) = (t - \lambda)q(t)$. Por minimalidade de $m_T(t)$, $q(T) \neq 0$, então existe $w \in V$ tal que $q(T)(w) \neq 0$, aí seja $v = q(T)(w)$, então $v \neq 0$ e:

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)(v) &= (T - \lambda I) q(T)(w) \\ &= m_T(t)(w) = 0, \end{aligned}$$

aí $T(v) = \lambda v$, aí $\lambda \in \operatorname{Spec}(T)$.

Por outro lado, se $\lambda \in \operatorname{Spec}(T)$, seja $v \in V$ tal que $v \neq 0$ e $T(v) = \lambda v$, então $T(T(v)) = \lambda^2 v, \dots, T^m(v) = \lambda^m v, \dots$, aí para $f(t) \in K[t]$ temos $f(T)(v) = f(\lambda) \cdot v$, aí $0 = m_T(T)(v) = m_T(\lambda) \cdot v$, aí $m_T(\lambda) = 0$. □

Corolário 4.15. Se T é diagonalizável e $\operatorname{Spec}(T) = \{\lambda_i\}_{i \in r}$, então $m_T(t) = \prod_{i \in r} (t - \lambda_i)$.

Se $\operatorname{Spec}(T) = \{\lambda_i\}_{i \in r}$, então:

$$V = \sum_{i \in r} V_T(\lambda_i).$$

Demonstração. Já sabemos que $m_T(t) = \left(\prod_{i \in r} (t - \lambda_i)^{k_i}\right)$ em que q(t) não tem raízes em K. Basta provar que $(T - \lambda_0 I) \dots (T - \lambda_{r-1} I) = 0$. Seja $v \in V$, $v = v_0 + \cdots + v_{r-1}$, com $v_i \in V_T(\lambda_i)$, então temos $(T - \lambda_i I)(v_i) = 0$, portanto $()(v_i) = 0$, e logo $()(v) = 0$. Então o polinômio $f(t) = (t - \lambda_0) \dots$ é um polinômio anulador para T, aí $m_T(t) \mid f(t)$, aí $m_T(t) = f(t)$. □

4.3 Subespaços Invariantes

Definição 4.16. Seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Um subespaço $W \subseteq V$ chama-se **T-invariante** se $T(W) \subseteq W$.

Observação 4.17. Um subespaço é T-invariante se e só se é um $K[t]$-submódulo.

Exemplo 4.18. Seja $V = \mathbb{C}(\mathbb{R})$ e considere o operador $D \colon f \to f'$. Então o subespaço

$$P_n := \{f(t) \in \mathbb{R}[t] : \deg(f) \leq n\}$$

é D-invariante.

Seja $\dim(V) = n$ e $T \in \mathcal{L}(V)$, $W \subseteq V$ um subespaço T-invariante. Escolhemos uma base $B_1 = \{v_i\}_{i \in m}$ de W e completemo-la até uma base $B = \{v_i\}_{i \in n}$ do espaço V. Qual é a matriz $[T]_B$?

Vamos começar notando que T é W-invariante e então

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \sum_{i \in m} \alpha_{1i} v_i \\ T(v_2) &= \sum_{i \in m} \alpha_{2i} v_i \\ &\dots \\ T(v_m) &= \sum_{i \in m} \alpha_{mi} v_i \\ T(v_{m+1}) &= \sum_{i \in n} \alpha_{(m+1)i} v_i \\ &\dots \\ T(v_n) &= \sum_{i \in n} \alpha_{ni} v_i. \end{aligned}$$

Dessa forma segue que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} & \alpha_{1(m+1)} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mm} & \alpha_{m(m+1)} & \dots & \alpha_{mn} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{(m+1)(m+1)} & \dots & \alpha_{(m+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{n(m+1)} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Isto é, a matriz de T na base B tem a forma

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

onde $A \in M_m(K)$ e $B \in M_{n-m}(K)$. Note que A é a matriz da restrição de T a W na base B_1.

Vamos agora considerar a restrição de T a W, denotada por $T \restriction W$. Claramente, temos que $T \restriction W \in \mathcal{L}(W)$. Considere $\bar{V} := \frac{V}{W}$ e seja $\pi \colon V \to \bar{V}$ uma projeção. Seja $\bar{T} := \pi \circ T$. Então $\bar{T} \in \mathcal{L}(V, \bar{V})$ e $W \subseteq \operatorname{Ker}(\bar{T})$. De fato, para cada $w \in W$ temos

$$\pi(T(w)) \in \pi(W) = 0.$$

Além disso, $\bar{T}$ induz um operador linear $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\bar{V})$ definido por $\tilde{T}(v + W) = \bar{T}(v)$.

Proposição 4.19. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K, seja $T \in \mathcal{L}(V)$ e seja W um subespaço T-invariante de V. Considere $B := B_1 \cup B_2$ onde B é uma base de V e B_1 é uma base de W. Então

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

onde $A = [T \restriction W]_{B_1}$ e $X = [\tilde{T}]_{B_2}$.

Demonstração. COMPLETAR □

Lema 4.20. Seja $\dim(V) = n$, $T \in \mathcal{L}(V)$ e $W \subseteq V$ um subespaço T-invariante. Então:

$$p_T(t) = p_{T_1}(t) \cdot p_{T_2}(t)$$

em que $T_1 \in \mathcal{L}(W)$ e $T_2 \in \mathcal{L}(W)$ com $T_1(w) = T(w)$ e $T_2(v + W) = T(v) + W$.

Demonstração. Escolhamos B_1 e B como bases de W e V tais que $B_1 \subseteq B$, então:

$$\begin{aligned} p_T(t) &= \det[tI - T]_B \\ &= \det \begin{pmatrix} tI_m - A & * \\ 0 & tI_{n-m} - B \end{pmatrix} \\ &= \det(tI_m - A)\det(tI_{n-m} - B) \\ &= p_A(t)p_B(t) = p_{T_1}(t)p_{T_2}(t) \end{aligned}$$

□

Observação 4.21. O mesmo não ocorre para polinômios minimais. De fato, seja $T = I_V$ e seja W um subespaço T-invariante (De fato, quando T é a identidade, todo subespaço de V é T-invariante), então $T_1 = I_W$ e $T_2 = I_{V/W}$ e aí $m_T(t) = m_{T_1}(t) = m_{T_2}(t) = t - 1$.

Teorema 4.22 (Teorema da Cayley-Hamilton)**.** Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K, e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Então $p_T(T) = 0$, onde $p_T(t) \in K[t]$ é um polinômio característico de T.

Demonstração. Basta provar que $p_T(T)(v) = 0$ para cada $v \in V$. Se $v = 0$ o resultado é evidente. Então seja $0 \neq v \in V$. Note que como V tem dimensão finita temos que existe um $m \leq n = \dim(V)$ mínimo tal que existem coeficientes $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}$ tais que $T^m(v) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i T^i(v)$. Para tal $m \in \mathbb{N}$, considere o conjunto $\{v, T(v), \ldots, T^{m-1}\}$ e seja W o subespaço gerado por ele. Note que W é T-invariante e ainda

$$[T \restriction W]_B] \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix} = A.$$

Então, pelo Exercício 18 da lista 1, segue que

$$p_A(t) = p_{T_{\restriction W}}(t) = t^m - \alpha_{m-1}t^{m-1} - \ldots - \alpha_1 t - \alpha_0.$$

E também

$$p_{T_{\restriction W}}(T) = T^m - \alpha_{m-1}T^{m-1} - \ldots - \alpha_1 T - \alpha_o I.$$

Aplicando essa última função a v segue:

$$p_{T_{\restriction W}}(T)(v) = T^m(v) - \alpha_{m-1}T^{m-1}(v) - \ldots - \alpha_1 T(v) - \alpha_o v = 0.$$

Para concluir que $p_t(T)(v) = 0$ escrevemos $p_T(T) = p_{T_{\restriction W}} q(T)$. □

Corolário 4.23. Se $A \in M_n(K)$ então $P_A(A) = 0$, onde $P_A(t) = \det(tI - A)$.

Exemplo 4.24. Considere a matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Então temos que $p_A(t) = t^2 - (a+d)t + (ad - bc)$ e também

$$\begin{aligned} P_A(A) &= A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+ad \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} + \det(A)I \\ &= \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Teorema 4.25 (Decomposição Primária)**.** Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K tal que $\dim(V) = n < \infty$ e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Suponhamos que $f(T) = 0$, onde

$$f(t) = p_1^{k_1}(t) \dots p_r^{k_r}(t)$$

e cada $p_i(t) \in K[t]$ é irredutível. Então $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ onde cada V_i é T-invariante e $p_i^{k_i}(T_{\restriction V_i}) = 0$.

Lema 4.26. Seja $f(T) = 0$ onde $f(t) = f_1(t)f_2(t)$ com f_1 e f_2 primas entre si. Então $V = V_1 \oplus V_2$ onde V_1 e V_2 são T-invariantes, $f_1(T_{\restriction V_1}) = 0$ e $f_2(T_{\restriction V_2}) = 0$.

Sublema 4.27 (Identidade de Bezout)**.** Se $\text{m.d.c}(f_1(t), f_2(t)) = 1$ então existem $r(t), s(t) \in K[t]$ tais que

$$f_1(t)r(t) + f_2(t)s(t) = 1.$$

Demonstração do Lema. Considere $V_2 := \operatorname{Im}(f_1(T))$ e $V_1 := \operatorname{Im}(f_1(T))$. Vamos verificar que que V_1 e V_2 são T-invariantes. Seja $v \in V_1$. Então $v = f_2(T)(w)$ para algum $w \in V$. Dessa forma,

$$T(v) = Tf_2(T)(w) = f_2(T)(T(w)) = f_2(T)(T(w)) \in \operatorname{Im}(f_2(T)) = V.$$

e analogamente para V_2. Além disso, mostremos que $V = V_1 + V_2$. De fato, para cada $v \in V$ temos

$$v = f_1(T)r(T)(v) + f_2(T)s(T)(v).$$

Como $f_1(T)r(T)(v) \in V_2$ e $f_2(T)s(T)(v) \in V_1$ concluímos que $v \in V_1 + V_2$. Agora vamos mostrar que $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Para tal, vamos verificar que $V_1 \subseteq \operatorname{Ker}(f_1)(T)$ e $V_2 \subseteq \operatorname{Ker}(f_2(T))$. Seja $v \in V_1$. Então $v = f_2(T)(w)$ para algum $w \in V$.

$$f1(T)(v) = f_1(T)f_2(T)(w) = f(T)(w) = 0.$$

Também vejamos que que $\operatorname{Ker}(f_1)(T) \cap \operatorname{Ker}(f_2)(T) = \{0\}$. Seja $v \in \operatorname{Ker}(f_1(T)) \cap \operatorname{Ker}(f_2(T))$. Então temos por definição que $f_1(T)(v) = f_2(T)(v) = 0$. Segue

$$v = r(T)f_1(T)(v) + s(T)f_2(T)(v) = 0$$

. Assim concluímos que $V = V_1 \oplus V_2$. Finalmente, note que como $V_1 \subseteq \operatorname{Ker}(f_1(T))$ e $V_2 \subseteq \operatorname{Ker}(f_2(T))$ segue que $f_1(T_{\restriction V_1}) = 0$ e $f_2(T_{\restriction V_2}) = 0$. ☐

Demonstração do Teorema. Vamos mostrar este resultado por indução sobre r. Note que o resultado é óbvio para $r = 1$. Agora suponhamos que o resultado vale para o caso $r - 1$. Então consideramos $f(t) = f_1(t)f(t)$, onde $f_1(t) = p_1^{k_1}(t) \dots p_{r-1}^{k_{r-1}}(t)$ e $f_2(t) = p_r^{k_r}(t)$. Então $\text{m.d.c}\{f_1(t), f_2(t)\} = 1$. Aplicando o lema o resultado segue. ☐

Corolário 4.28. Seja V um espaço vetorial tal que $\dim(V) = n < \infty$, seja $T \in \mathcal{L}(V)$, e seja $m_T(t) = p_1^{k_1}(t) \dots p_r^{k_r}(t)$ com $p_i(t)$ irredutíveis e primos entre si. Então $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ onde V_i são T-invariantes e $m_{T_{\restriction V_i}}(t) = p_i^{k_i}(t)$.

Demonstração. Temos por definição que $m_T(T) = 0$. Portanto, pelo teorema temos que $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$, onde cada V_i é T-invariante. Considere $T_i := T_{\restriction V_i}$ para cada $i \in [r]$. Temos que $p_i^{k_i}(T_i) = 0$. Então segue que $M_{T_i}(v) | p_i^{k_i}(t)$, ou seja, $m_{T_i}(t) = p_i(t)^{m_i}$, onde $m_i \leq k_i$. Suponhamos que $m_i < k_i$ e consideremos $g(t) = p_1^{k_1}(t) \dots p_i^{m_i}(t) \dots p_r^{k_r}(t)$, e então $\deg(g(t)) < \deg(m_T(t))$. Provaremos que $g(T) = 0$, o que irá contradizer a minimalidade do grau de $m_t(t)$. Se $v \in V_j$ com $j \neq i$ então $p_j^{k_j}(v) = 0$ e portanto $g(T)(v) = 0$. Se $v \in V_i$ então $p_i^{m_i}(T)(v) = 0$ e $g(T)(v) = 0$.Assim concluímos que $g(T_k) = 0$ para cada $k = 1, \dots, r$ e logo $g(T) = 0$. Isso implica que $g(T)$ é o polinômio minimal de T, absurdo. $\square$

Corolário 4.29. Seja V um espaço vetorial tal que $\dim(V) = n < \infty$, seja $T \in \mathcal{L}(V)$, e seja $p_t(t) = p_1^{k_1}(t) \dots p_r^{k_r}(t)$ com $p_i(t)$ irredutíveis e primos entre si. Então $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$, com V_i T-invariantes e $p_{T_{\restriction V_i}}(t) = p_i(t)^{k_i}$.

Demonstração. PROF NÃO TERMINOU ESSA PROVA $\square$

Corolário 4.30. Um operador $T \in \mathcal{L}(V)$ é diagonalizável se, e somente se $m_T = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_r)$ com $\lambda_i \neq \lambda_j$ sempre que $i \neq j$.

Demonstração. A ida já foi provada em algum momento do passado, então vamos mostrar apenas a volta. Pelo primeiro Corolário, temos que $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ com $m_{T_{\restriction v_i}} = t - \lambda_i$, ou seja $T_{\restriction V_i} = \lambda_i I_{V_i}$ e ainda $V_i = V_T(\lambda_i)$. $\square$

Considere $\{T_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}(V)$. Quando os operadores T_i podem ser diagonalizados simultaneamente?

Teorema 4.31. Um conjunto $\{T_i : i \in I\}$ pode ser diagonalizado simultaneamente se, e somente se cada T_i é diagonalizável e $T_i T_j = T_j T_i$ para todo $i, j \in I$.

Demonstração. PROF TB NÃO TERMINOU ESSA PROVA $\square$

Índice