Álgebra Linear

MAT5730

2 semestre de 2019

Sumário

1 Lista 0

1.1 Exercício 1

(1)

2 Lista 1

2.1 Exercício 1

(1) Sejam V um K-espaço vetorial e W um subespaço de V. Seja $S = \{v_i\}_{i\in I} \subset V$ tal que $\overline{S} = \{v_i + W\}_{i\in I}$ é linearmente independente no espaço quociente V/W. Mostre que se A é um conjunto linearmente independente de W então $S \cup A$ é um conjunto linearmente independente de V.

Solução: Se $\overline{S} = \{\overline{v_i} = v_i + W\}_{i\in I}$ é LI em V/W, isso significa que, para todo $M \subseteq I$ finito, temos que, para $\alpha_m \in K$, com $m \in M$, ocorre

$$\sum_{m\in M} \alpha_m \overline{v_m} = 0 \Rightarrow \alpha_m = 0 \;\forall\; m \in M$$

Seja $A = \{w_j\}_{j\in J}$. Por hipótese, sabemos também que A é um conjunto linearmente independente, ou seja, para todo $N \subseteq I$ finito, temos que, para $\alpha_n \in K$, com $n \in N$, ocorre

$$\sum_{n\in N} \alpha_n w_n = 0 \Rightarrow \alpha_n = 0, \;\forall\; n \in N$$

Para mostrar que $S \cup A = \{v_i\}_{i\in I} \cup \{w_j\}_{j\in J} = \{u_p\}_{p\in I\cup J}$ é um conjunto linearmente independente de V, precisamos mostrar que, para todo $L \subset I \cup J$ finito, temos que, para $\alpha_\ell \in L$, com $\ell \in L$, ocorre

$$\sum_{\ell\in L} \alpha_\ell u_\ell = 0 \Rightarrow \alpha_\ell = 0, \;\forall\; \ell \in L$$

Para fazer isso, precisamos antes verificar se existem vetores que são comuns aos dois subconjuntos, ou seja, calcular $S \cap A$. Observe que

$$s \in S \Rightarrow \overline{s} \in \overline{S}$$

Como $\overline{S}$ é um conjunto linearmente independente em W, temos que $\overline{s} \neq \overline{0}$. Portanto, segue que $s - 0 \notin W \Rightarrow s \notin W$. Mas como $A \subseteq W$, então isso quer dizer que $s \notin A$. Portanto, concluímos que $S \cap A = \emptyset$. Isso quer dizer que todos os v_i's são diferentes dos w_j's, e mais ainda, que $I \cup J$ é uma união disjunta.
Logo, considerando novamente $S \cup A = \{v_i\}_{i\in I} \cup \{w_j\}_{j\in J}$, para todo $L \subseteq I \cup J$ finito, existem $I' \subseteq I$ e $J' \subseteq J$ tais que $I' \cup J' = L$. Desse modo, temos que

$$\sum_{\ell\in L} \alpha_\ell u_\ell = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i\in I'} \alpha_i v_i + \sum_{j\in J'} \alpha_j w_j = 0 \quad \text{em } V \Rightarrow$$

$$\overline{\sum_{i\in I'} \alpha_i v_i + \sum_{j\in J'} \alpha_j w_j} = \overline{0} \quad \text{em } V/W \Rightarrow$$

$$\sum_{i\in I'}\alpha_i\overline{v_i}+\underbrace{\sum_{j\in J'}\alpha_j\overline{w_j}}_{=0,\text{ pois } w_j\in W}=\overline{0}\Rightarrow\sum_{i\in I'}\alpha_i\overline{v_i}=\overline{0}\Rightarrow\alpha_i=0\ \forall\ i\in I',$$

pois $\{v_i\}_{i\in I'}\subseteq\overline{S}$ é um conjunto linearmente independente.
Assim, usando agora o fato de que $\{w_j\}_{j\in J'}\subseteq A$ é um conjunto linearmente independente em W, temos que

$$\sum_{i\in I'}\alpha_iv_i+\sum_{j\in J'}\alpha_jw_j=0\Rightarrow 0+\sum_{j\in J'}\alpha_jw_j=0\Rightarrow\sum_{j\in J'}\alpha_jw_j=0\Rightarrow\alpha_j=0\ \forall\ j\in J'$$

Concluímos portanto que

$$\sum_{\ell\in L}\alpha_\ell u_\ell=0\Rightarrow\alpha_\ell=0\ \forall\ \ell\in L$$

Daí, $S\cup A$ é um conjunto linearmente independente em V.

2.2 Exercício 2

(2) Sejam V um K-espaço vetorial e W um subespaço de V. Seja $S=\{v_i\}_{i\in I}\subset V$ tal que $S=\{v_i+W\}_{i\in I}$ gera o espaço quociente V/W. Mostre que se A é um conjunto gerador de W então $S\cup A$ é um conjunto gerador de V.

Solução: Se $\overline{S}=\{\overline{v_i}=v_i+W\}_{i\in I}$ gera em V/W, isso significa que, para todo $\overline{v}\in V/W$, existem $M\subseteq I$ finito e $\alpha_m\in K$, com $m\in M$, tais que

$$\overline{v}=\sum_{m\in M}\alpha_m\overline{v_m}$$

Seja $A=\{w_j\}_{j\in J}$. Por hipótese, sabemos também que A gera W, ou seja, para todo $w\in W$, existem $N\subseteq J$ finito e $\alpha_n\in K$, com $n\in N$, tais que

$$w=\sum_{n\in N}\alpha_nw_n$$

Precisamos mostrar que $S\cup A=\{v_i\}_{i\in I}\cup\{w_j\}_{j\in J}=\{u_p\}_{p\in I\cup J}$ é um conjunto gerador para V, ou seja, que para todo $v\in V$, existem $L\subset I\cup J$ finito e $\alpha_\ell\in K$, com $\ell\in L$, tais que

$$v=\sum_{\ell\in L}\alpha_\ell u_\ell$$

Note que, como $\overline{S}$ é um conjunto gerador de V/W, temos como já foi explicitado acima que, para $\overline{v}\in V/W$,

$$\overline{v}=\sum_{m\in M}\alpha_m\overline{v_m}\Rightarrow\overline{v}-\sum_{m\in M}\alpha_m\overline{v_m}=\overline{0}\Rightarrow v-\sum_{m\in M}\alpha_mv_m\in W$$

Como $A = \{w_j\}_{j \in J}$ é conjunto gerador para W, temos que existem $N \subseteq J$ finito e $\alpha_n \in K$, com $n \in N$, tais que

$$v - \sum_{m \in M} \alpha_m v_m = \sum_{n \in N} \alpha_n w_n$$

Assim, tomando $L = N \cup M$:

$$v = \sum_{m \in M} \alpha_m v_m + \sum_{n \in N} \alpha_n w_n \Rightarrow v = \sum_{\ell \in L} \alpha_\ell u_\ell$$

Portanto, $S \cup A$ é um conjunto gerador para V.

2.3 Exercício 3

(3) Seja V um K-espaço vetorial e sejam U e W subespaços de V. Prove:

(a) O Segundo Teorema do Isomorfismo:

$$\frac{U + W}{W} \cong \frac{U}{U \cap W}.$$

(b) O Terceiro Teorema do Isomorfismo: Se $U \subset W$,

$$\frac{V}{W} \cong \frac{V/U}{W/U}$$

Solução:

2.4 Exercício 4

(4) Seja V um K-espaço vetorial e sejam U e W subespaços de V tais que $\dim(V/U) = m$ e $\dim(V/W) = n$. Prove que $\dim(V/(U \cap W)) \leq m + n$.

Solução: Das informações fornecidas no enunciado, sabemos que:

$$\dim(V/U) = m \Rightarrow \dim(V) - \dim(U) = m$$

$$\dim(V/W) = n \Rightarrow \dim(V) - \dim(W) = n$$

Somando essas duas equações obtemos:

$$2\dim(V) - (m + n) = \dim(U) + \dim(W).$$

Sabemos também que, se U e W são subespaços de V, então

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$$

Estamos interessados em encontrar $\dim(V/(U \cap W)) = \dim(V) - \dim(U \cap W)$. Observe que, como U e W são subespaços de V, então $\dim(V) \geq \dim(U + W)$. Desse modo,

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W) \leq \dim(U \cap W) + \dim(V)$$

Então:

$$\dim(U) + \dim(W) \leq \dim(U \cap W) + \dim(V) \Rightarrow 2\dim(V) - (m+n) \leq \dim(U \cap W) + \dim(V) \Rightarrow$$

$$-(m+n) \leq \dim(U \cap W) - \dim(V) \Rightarrow \dim(V) - \dim(U \cap W) \leq m + n$$

Portanto, concluímos que

$$\dim(V/(U \cap W)) = dim(V) - \dim(U \cap W) \leq m + n \Rightarrow \boxed{\dim(V/(U \cap W)) \leq m + n}$$

2.5 Exercício 5

(5) Mostre que

(a) $W \oplus U = W' \oplus U'$ e $W \cong W' \nrightarrow U \cong U'$.

(b) $V \cong V', V = W \oplus U$ e $V' = W \oplus U' \nrightarrow U \cong U'$.

Solução:

(a) Considere K um corpo, e seja

$$V = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_i$$

Considere

$$W = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i}$$

Observe que $W \subseteq V$, e além disso, $W \cong V$. Temos também que

$$V = W \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i+1} \right)$$

Portanto, tomando

$$W = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i}, \; U = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i+1}, \; W' = V, \text{ e } U' = \{0\},$$

temos que

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i+1} \right) \cong V \cong V \oplus \{0\} \Rightarrow W \oplus U = W' \oplus U'$$

e

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i} \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_i \Rightarrow W \cong W\prime,$$

mas

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} Ke_{2i+1} \ncong \{0\} \Rightarrow U \ncong U'$$

(b)

Observação: Cabe salientar que ambos os itens dessa questão são válidos quando V é um espaço vetorial de dimensão finita.

2.6 Exercício 6

(6) Seja V um espaço vetorial e seja W um subespaço de V. Suponha que $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ e $S = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$, com $S_i \subseteq V_i$ subespaços de V para todo $i = 1, \ldots, n$. Mostre que

$$\frac{V}{S} \cong \frac{V_1}{S_1} \oplus \ldots \oplus \frac{V_n}{S_n}.$$

Solução: Sabemos que, se V é soma direta de $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, então todo $v \in V$ pode ser escrito como soma de elementos de V_i **de maneira única**. Podemos escrever então

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

O mesmo se aplica a S. Dito isso, considere a aplicação

$$\begin{aligned} T \quad : \quad V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n \quad &\longrightarrow \quad \bigoplus_{i=1}^{n} \tfrac{V_i}{S_i} = \tfrac{V_1}{S_1} \oplus \ldots \oplus \tfrac{V_n}{S_n} \\ v = \sum_{i=1}^{n} v_i \quad &\longmapsto \quad T(v) = \sum_{i=1}^{n} (v_i + S_i) \end{aligned}$$

Verifiquemos que T é uma transformação linear:

- Para todo $u, v \in V$, podemos escrever de maneira única $u = \sum_{i=1}^{n} u_i$ e $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$. Portanto, temos

$$T(u) + T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) + T\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(u_i + S_i) + \sum_{i=1}^{n}(v_i + S_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}((u_i + S_i) + (v_i + S_i)) = T(u+v) \Rightarrow T(u) + T(v) = T(u+v).$$

- Para todo $v \in V$, podemos escrever de maneira única $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$; assim, para $\alpha \in K$:

$$T(\alpha v) = T\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} v_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha v_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha v_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha v_i + S_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(v_i + S_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n}(v_i + S_i) = \alpha T(v) \Rightarrow T(\alpha v) = \alpha T(v)$$

Logo, T é uma transformação linear. Vamos utilizar o Primeiro Teorema do Isomorfismo em T. Para isso, calculemos o núcleo e a imagem de T :

- $\mathrm{Im}(T)$: Dado $u \in \bigoplus_{i=1}^{n} \frac{V_i}{S_i}$, temos que esse elemento pode ser escrito de maneira única como

$$u = \sum_{i=1}^{n}(u_i + S_i),$$

onde $u_i \in V_i$. Então temos que

$$u = \sum_{i=1}^{n}(u_i + S_i) = T\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right).$$

Logo, T é sobrejetora, e

$$\mathrm{Im}(T) = \bigoplus_{i=1}^{n} \frac{V_i}{S_i} = \frac{V_1}{S_1} \oplus \ldots \oplus \frac{V_n}{S_n}$$

- $\mathrm{Ker}(T)$: Considere $v \in \mathrm{Ker}(T)$. Então, tomando $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$, temos que

$$v \in \mathrm{Ker}(T) \Rightarrow T(v) = 0 \Rightarrow T\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (v_i + S_i) = 0 \Rightarrow$$

$$v_i + S_i = 0, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow v_i \in S_i, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow v \in S$$

Assim, $\mathrm{Ker}(T) \subseteq S$. Agora, tome $s \in S$. Então, como $S = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$, então podemos escrever s de maneira única como

$$s = \sum_{i=1}^{n} s_i,$$

onde $s_i \in S_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Desse modo,

$$T(s) = T\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (s_i + S_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (0 + S_i)}_{\text{pois } s_i \in S_i \ \forall i} = 0.$$

Assim, $S \subseteq \mathrm{Ker}(T)$. Concluímos que $\mathrm{Ker}(T) = S$.

Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos que

$$\frac{V}{\mathrm{Ker}(T)} \cong \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \frac{V}{S} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \frac{V_i}{S_i}$$

Então:

$$\frac{V}{S} \cong \frac{V_1}{S_1} \oplus \ldots \oplus \frac{V_n}{S_n},$$

como queríamos.

2.7 Exercício 7

(7) Seja V um K-espaço vetorial e seja W um subespaço de V. Seja $T \in \mathscr{L}(V)$ e defina $\overline{T} \colon V/W \to V/W$ por

$$\overline{T}(v + W) = T(v) + W, \text{ para todo } v + W \in V/W.$$

(a) Determine uma condição necessária e suficiente sobre W para que $\overline{T}$ esteja bem definida.

(b) Se $\overline{T}$ estiver bem definida, mostre que ela é linear e determine seu núcleo e sua imagem.

Solução:

(a) Seja

$$\begin{array}{rcccl} \pi & : & V & \longrightarrow & V/W \\ & & v & \longmapsto & \pi(v) = v + W \end{array}$$

A projeção canônica de V em V/W. Então, podemos considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "\pi"] & \\ V \arrow[ur, "T"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V/W \\ & V/W \arrow[ur, "\overline{T}"'] & \end{tikzcd}$$

Note que $\pi \circ T = \overline{T} \circ \pi$. Daí, $\overline{T}$ estará bem-definida se $\text{Ker}(\pi) \subseteq \text{Ker}(\pi \circ T)$. Claramente, temos que $\text{Ker}(\pi) = W$. Vamos calcular $\text{Ker}(\pi \circ T)$. Temos que

$$v \in \text{Ker}(\pi \circ T) \Leftrightarrow \pi(T(v)) = \overline{0} \Leftrightarrow T(v) \in W \Leftrightarrow v \in T^{-1}$$

Logo, temos que

$$\text{Ker}(\pi) \subseteq \text{Ker}(\pi \circ T) \Rightarrow W \subseteq T^{-1}(W) \Rightarrow T[W] \subseteq W.$$

Portanto, uma condição necessária e suficiente para $\overline{T}$ estar bem definida é que para todo $v \in W$, tenhamos $T(v) \in W$, ou seja, $T(W) \subseteq W$.

Em outras palavras, $\overline{T}$ está bem definida se W for um subespaço T-invariante de V.

(*b*) Verifiquemos que $\overline{T}$ é uma transformação linear. Temos:

- ♦ Para todos $u+W, v+W \in V/W$, lembrando que T é linear, temos que

$$\overline{T}((u+W)+(v+W)) = \overline{T}((u+v)+W) = T(u+v)+W = T(u)+T(v)+W =$$
$$(T(u)+W)+(T(v)+W) = \overline{T}(u+W)+\overline{T}(v+W)$$

Logo, $\overline{T}(\overline{u}+\overline{v}) = \overline{T}(\overline{u})+\overline{T}(\overline{v})$.

- ♣ Para todo $v+W \in V/W$, e para todo $\alpha \in K$, temos que

$$\overline{T}(\alpha(v+W)) = \overline{T}((\alpha v)+W) = T(\alpha v)+W = \alpha T(v)+W =$$
$$\alpha(T(v)+W) = \alpha\overline{T}(v+W)$$

Portanto, $\overline{T}(\alpha\overline{v}) = \alpha\overline{T}(\overline{v})$.

Vamos encontrar o núcleo e a imagem de $\overline{T}$.

- ♥ Sendo $\overline{v} = v+W \in V/W$, observe que

$$\overline{T}(\overline{v}) = 0 \Rightarrow \overline{T(v)} = 0 \Rightarrow T(v) \in W \Rightarrow v \in T^{-1}(W).$$

Portanto, temos que

$$\operatorname{Ker}(\overline{T}) = \{\overline{v} | v \in T^{-1}(W)\}.$$

- ♠ Vamos verificar que $\overline{T}$ é sobrejetora. Sabemos que π é sobrejetora. Então, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\overline{T}) &= \operatorname{Im}(\overline{T}\circ\pi) \\ &= \operatorname{Im}(\pi\circ T) \\ &= \{\pi(T(v)) : v \in V\} \\ &= \{\overline{T(v)} : v \in V\} \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\operatorname{Im}(\overline{T}) = V/W.$$

2.8 Exercício 8

(8) Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ o operador linear definido por $T(x,y,z) = (x,x,x)$. Seja $T\colon \mathbb{R}^3/W \to \mathbb{R}^3/W$ tal que $\overline{T}((x,y,z)+W) = T(x,y,z)+W$, em que $W = \operatorname{Ker} T$. Descreva $\overline{T}$.

Solução: Veja que $\overline{T}$ está bem definida, pois $W = \operatorname{Ker}(T)$ é um subespaço T-invariante de V. Vamos encontrar o núcleo e a imagem de $\overline{T}$.

- Do exercício anterior, temos que

$$\text{Ker}(\overline{T}) = \{\overline{v} | v \in T^{-1}(W)\}.$$

Em particular,

$$\text{Ker}(\overline{T}) = \{\overline{v} | v \in T^{-1}(\text{Ker}T)\} = \{\overline{v} | v \in T^{-1}(\text{Ker}T)\}$$

Então segue que

$$v \in T^{-1}(\text{Ker}T) \Rightarrow T(v) \in \text{Ker}(T) \Leftrightarrow T(T(v)) = 0.$$

Mas $T(T(v)) = T(v)$. De fato, para $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$T(T(v)) = T(T(x, y, z)) = T(x, x, x) = (x, x, x) = T(x, y, z) = T(v)$$

Daí, como para $v \in T^{-1}(\text{Ker}T)$, temos $T(T(v)) = 0$,

$$T(T(v)) = 0 \Rightarrow T(v) = 0$$

Além disso, se $v \in \text{Ker}(T) = W$, temos $\overline{v} = 0$.

Portanto, concluímos que $\text{Ker}(\overline{T}) = \{0\}$, ou seja, $\overline{T}$ é injetora.

- Do exercício anterior, temos

$$\text{Im}(\overline{T}) = V/W.$$

Logo, $\text{Im}(\overline{T}) = \mathbb{R}^3/\text{Ker}T$. Podemos também descrever $\text{Im}(\overline{T})$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\text{Im}(\overline{T}) &= \{\overline{T(v)} : v \in V\} \\
&= \{T(v) + \text{Ker}T | v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \{(x, x, x) + \text{Ker}T | x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x, x, x) + (0, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x, x + y, x + z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

2.9 Exercício 9

(9) Sejam V e U K-espaços vetoriais. Seja W um subespaço de V e $\pi \colon V \to V/W$ a projeção canônica. Mostre que a função $\mathscr{L}(V/W, U) \to \mathscr{L}(V, U)$, dada por $T \to T \circ \pi$, é injetora.

Solução: Temos a função

$$\begin{aligned}
\varphi \quad : \quad \mathscr{L}(V/W, U) &\longrightarrow \mathscr{L}(V, U) \\
T &\longmapsto T \circ \pi
\end{aligned}$$

Para mostrar que φ é injetora, precisamos verificar que, para $T \in \mathscr{L}(V/W, U)$, se $\varphi(T) = 0$, então $T \cong 0$. Note que

$$\varphi(T) = 0 \Rightarrow T \circ \pi = 0 \Rightarrow T(\pi(v)) = 0.$$

Vamos mostrar que $T(u) = 0\ \forall u \in V/W$. Sabemos que π é sobrejetora. Assim, dado $u \in V/W$, existe $v \in V$ tal que $u = \pi(v)$. Logo,

$$T(u) = T(\pi(v)) = (T \circ \pi)(v) = 0.$$

Portanto, $T(u) = 0\ \forall u \in V/W$. Daí, $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$.
Concluímos que φ é injetora.

2.10 Exercício 10

(10) Seja V um K-espaço vetorial e seja W um subespaço de V. Mostre que $(V/W)^* \cong W^0$ e que $V^*/W^0 \cong W^*$.

Solução: Mostremos que $(V/W)^* \cong W^0$. Para isso, a ideia será utilizar a aplicação canônica de V em V/W e sua transposta, e depois aplicar o Primeiro Teorema do Isomorfismo para obter o resultado desejado. Comecemos considerando a aplicação canônica

$$\begin{array}{cccl} T & : & V & \longrightarrow & V/W \\ & & v & \longmapsto & T(v) = v + W \end{array}$$

Veja que T é sobrejetora (isto é, $\text{Im}\ T = V/W$), e $\text{Ker}\ T = W$. Consideremos a aplicação transposta

$$\begin{array}{cccl} T^t & : & (V/W)^* & \longrightarrow & V^* \\ & & f & \longmapsto & T^t(f) = f \circ T \end{array}$$

Das propriedades da transformação transposta, sabemos que

$$\text{Ker}\ T^t = (\text{Im}\ T)^0 = (V/W)^0 = \{0\}$$

$$\text{Im}\ T^t = (\text{Ker}\ T)^0 = W^0$$

Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos que

$$\frac{(V/W)^*}{\text{Ker}\ T^t} \cong \text{Im}\ T^t \Rightarrow \frac{(V/W)^*}{\{0\}} \cong W^0 \Rightarrow \boxed{(V/W)^* \cong W^0}$$

Mostremos agora que $V^*/W^0 \cong W^*$. Utilizaremos a mesma estratégia, mas considerando agora a inclusão. Tome a inclusão de W em V, isto é:

$$\begin{array}{cccl} \iota & : & W & \longrightarrow & V \\ & & w & \longmapsto & \iota(w) = w \end{array}$$

Note que Ker $\iota = \{0\}$ e Im $\iota = W$. Seja

$$\begin{array}{cccc} \iota^t & : & V^* & \longrightarrow & W^* \\ & & f & \longmapsto & \iota(f) = f \circ \iota \end{array}$$

a transposta de ι. Observe que

$$\text{Ker } \iota^t = (\text{Im } \iota)^0 = W^0$$

$$\text{Im } \iota^t = (\text{Ker } \iota)^0 = \{0\}^0 = W^*$$

Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo,

$$\frac{V^*}{\text{Ker } \iota^t} \cong \text{Im } \iota^t \Rightarrow \frac{V^*}{W^0} \cong W^* \Rightarrow \boxed{V^*/W^0 \cong W^*}$$

2.11 Exercício 11

(11) Sejam $A, B, C \in \mathscr{M}_n(K)$. Prove que

$$\det \begin{bmatrix} 0 & C \\ A & B \end{bmatrix} = (-1)^n \det(A) \det(C).$$

Solução:

2.12 Exercício 12

(12) Calcule o determinante da matriz de Vandermonde, isto é, prove que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \dots & c_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (c_j - c_i)$$

Solução: Vamos provar o resultado por indução sobre $n \geq 2$. Para $n = 2$, é fácil ver que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} = c_2 - c_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 2} (c_j - c_i)$$

Assuma o resultado válido para $n-1$, ou seja,

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{n-2} & c_2^{n-2} & \dots & c_n^{n-2} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (c_j - c_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (c_j - c_i)$$

Provemos para a matriz $n \times n$. Utilizando a matriz transposta, vamos aplicar operações nas colunas da matriz de modo a obter zeros na primeira linha. Para isso, vamos multiplicar cada coluna C_i por $-c_1$ e somaremos com a coluna C_{i+1}, obtendo

$$\begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \dots & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-1} \\ 1 & c_3 & c_3^2 & \dots & c_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-1} \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{i+1}=C_{i+1}-c_1C_i} \begin{bmatrix} 1 & c_1 - c_1 1 & c_1^2 - c_1 c_1 & \dots & c_1^{n-1} - c_1 c_1^{n-2} \\ 1 & c_2 - c_1 1 & c_2^2 - c_1 c_2 & \dots & c_2^{n-1} - c_1 c_2^{n-2} \\ 1 & c_3 - c_1 1 & c_3^2 - c_1 c_3 & \dots & c_3^{n-1} - c_1 c_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_n - c_1 1 & c_n^2 - c_1 c_n & \dots & c_n^{n-1} - c_1 c_n^{n-2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & c_2 - c_1 & c_2(c_2 - c_1) & \dots & c_2^{n-2}(c_2 - c_1) \\ 1 & c_3 - c_1 & c_3(c_3 - c_1) & \dots & c_3^{n-2}(c_3 - c_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_n - c_1 & c_n(c_n - c_1) & \dots & c_n^{n-2}(c_n - c_1) \end{bmatrix}$$

Utilizando o Teorema de Laplace, temos que

$$\det \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 1 & c_2 - c_1 & c_2(c_2 - c_1) & \dots & c_2^{n-2}(c_2 - c_1) \\ 1 & c_3 - c_1 & c_3(c_3 - c_1) & \dots & c_3^{n-2}(c_3 - c_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_n - c_1 & c_n(c_n - c_1) & \dots & c_n^{n-2}(c_n - c_1) \end{array}\right] =$$

$$\det \begin{bmatrix} c_2 - c_1 & c_2(c_2 - c_1) & \dots & c_2^{n-2}(c_2 - c_1) \\ c_3 - c_1 & c_3(c_3 - c_1) & \dots & c_3^{n-2}(c_3 - c_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n - c_1 & c_n(c_n - c_1) & \dots & c_n^{n-2}(c_n - c_1) \end{bmatrix}$$

Como cada linha está multiplicada por $c_i - c_1$, por propriedades do determinante, temos que

$$\det \begin{bmatrix} c_2 - c_1 & c_2(c_2 - c_1) & \dots & c_2^{n-2}(c_2 - c_1) \\ c_3 - c_1 & c_3(c_3 - c_1) & \dots & c_3^{n-2}(c_3 - c_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n - c_1 & c_n(c_n - c_1) & \dots & c_n^{n-2}(c_n - c_1) \end{bmatrix} =$$

$$(c_2 - c_1)(c_3 - c_1) \cdot \ldots \cdot (c_n - c_1) \det \begin{bmatrix} 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-2} \\ 1 & c_3 & c_3^2 & \dots & c_3^{n-2} \\ 1 & c_4 & c_4^2 & \dots & c_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-2} \end{bmatrix} =$$

$$\prod_{j=2}^{n}(c_j - c_1)\det\begin{bmatrix} 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-2} \\ 1 & c_3 & c_3^2 & \dots & c_3^{n-2} \\ 1 & c_4 & c_4^2 & \dots & c_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

Como a matriz resultante tem tamanho $n-1 \times n-1$, da hipótese de indução, vem

$$\det\begin{bmatrix} 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-2} \\ 1 & c_3 & c_3^2 & \dots & c_3^{n-2} \\ 1 & c_4 & c_4^2 & \dots & c_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-2} \end{bmatrix} = \prod_{2\leq i<j\leq n}(c_j - c_i).$$

Daí,

$$\left(\prod_{j=2}^{n}(c_j - c_1)\right)\det\begin{bmatrix} 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-2} \\ 1 & c_3 & c_3^2 & \dots & c_3^{n-2} \\ 1 & c_4 & c_4^2 & \dots & c_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-2} \end{bmatrix} =$$

$$\left(\prod_{j=2}^{n}(c_j - c_1)\right)\left(\prod_{2\leq i<j\leq n}(c_j - c_i)\right) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(c_j - c_i)$$

Assim, segue o resultado.

2.13 Exercício 13

(13) Mostre que

$$\det\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

Solução: Primeiramente, vamos mostrar que, para $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, temos que

$$\det\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = \left|\det(A+Bi)\right|^2$$

De fato:

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ B+iA & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ i(A-iB) & A \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ i(A-iB)-i(A-iB) & A+iB \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ 0 & A+iB \end{pmatrix} = \left|\det(A+Bi)\right|^2$$

Portanto, escrevendo

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix},$$

segue que

$$\det\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = \left|\det(A+Bi)\right|^2.$$

Como

$$A+Bi = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix} i = \begin{bmatrix} a+ci & -b+di \\ b+di & a-ci \end{bmatrix},$$

temos que

$$\left|\det(A+Bi)\right|^2 = \left|\det\begin{bmatrix} a+ci & -b+di \\ b+di & a-ci \end{bmatrix}\right|^2 = \left|(a+ci)(a-ci)-(di-b)(di+b)\right|^2 =$$

$$\left|a^2+c^2-(-b^2-d^2)\right|^2 = \left|a^2+c^2+b^2+d^2\right|^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

2.14 Exercício 14

(14) Sejam $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Mostre que se A é inversível então existem no máximo n escalares c tais que $cA+B$ não é inversível.

Solução: Se $cA+B$ é inversível, isso quer dizer que

$$(cA+B)A^{-1} = cI + BA^{-1}$$

é inversível.[1]

Considere portanto a função

$$\begin{array}{rccl} p : & K & \longrightarrow & K \\ & c & \longmapsto & p(c) = \det(cI + BA^{-1}) \end{array}$$

[1] De fato, $cA+B$ é inversível se e somente se $cI+BA^{-1}$ é inversível.

Veja que essa função na verdade é um polinômio de grau n na variável c. De fato, chamando

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

temos que

$$cI+BA^{-1} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c+\sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{k1} & c+\sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{k2} & c+\sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{k3} & \dots & c+\sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{kn} \end{pmatrix}$$

Assim, temos que

$$\det(cI+BA^{-1}) = \det \begin{pmatrix} c+\sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^n b_{1k}a_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{k1} & c+\sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^n b_{2k}a_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{k2} & c+\sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{k3} & \dots & \sum\limits_{k=1}^n b_{3k}a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{k2} & \sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{k3} & \dots & c+\sum\limits_{k=1}^n b_{nk}a_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)}\dots\alpha_{n\sigma(n)} = \alpha_{11}\alpha_{22}\dots\alpha_{nn} + \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma\neq 1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)}\dots\alpha_{n\sigma(n)} =$$

$$\left(c+\sum_{k=1}^{n} b_{1k}a_{k1}\right)\left(c+\sum_{k=1}^{n} b_{2k}a_{k2}\right)\dots\left(c+\sum_{k=1}^{n} b_{nk}a_{kn}\right)+\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma\neq 1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)}\alpha_{2\sigma(2)}\dots\alpha_{n\sigma(n)} =$$

$$c^n+\left(\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{mk}a_{km}\right)\right)c^{n-1}+\dots+\left(\prod_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{mk}a_{km}\right)\right)+\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma\neq 1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{r=1}^{n}\alpha_{r\sigma(r)}$$

Logo, p é um polinômio de grau n com coeficientes no corpo K.
Observe que $cA+B$ não será inversível quando $\det(cI+BA^{-1})=0$, ou seja, quando c for uma raiz de p. Como o grau de p é n, segue que este possui no máximo n raízes em K, e daí temos que existem no máximo c escalares tais que $cA+B$ não é inversível.

2.15 Exercício 15

(15) Sejam $A, B, C, D \in \mathscr{M}_n(K)$ com D inversível.

(a) Mostre que

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix} = \det(AD - BD^{-1}CD)$$

(b) Se $CD = DC$, mostre que

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix} = \det(AD - BC).$$

O que acontece quando D não é inversível?

(c) Se $DB = BD$, calcule $\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}$.

Solução: Pelo Teorema de Binet, sabemos que o determinante de um produto de duas matrizes quadradas é o produto de seus determinantes, ou seja, se $X, Y \in \mathscr{M}_n(K)$, então

$$\det(X)\det(Y) = \det(XY)$$

Além disso, lembramos que, para $U, V, X, Y \in \mathscr{M}_n(K)$, temos

$$\det\begin{bmatrix} U & 0 \\ X & Y\end{bmatrix} = \det U \det Y$$

e

$$\det \begin{bmatrix} U & V \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \det U \det Y$$

Feitas essas observações, estamos aptos a resolver a questão.

(a) Para obter o resultado desejado, a ideia será multiplicar a matriz em questão por uma matriz conveniente cujo determinante é 1. Dessa forma, utilizando as observações acima, sendo I_n a notação para a matriz identidade $n \times n$, e lembrando que D é invertível, temos que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Calculando os determinantes, vem

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{bmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{bmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) \cdot \det I_n \cdot \det I_n = \det\left(A - BD^{-1}C\right) \det(D) \Rightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) \cdot \det(I_n I_n) = \det\left((A - BD^{-1}C)D\right) \Rightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) \cdot \det(I_n) = \det(AD - BD^{-1}CD) \Rightarrow$$

$$\boxed{\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det\left(AD - BD^{-1}CD\right)}$$

(b) Utilizando as observações acima, sendo I_n a notação para a matriz identidade $n \times n$, e usando o fato de que $CD = DC$, temos que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ CD - DC & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Como D é invertível, temos $\det D \neq 0$. Portanto, segue que

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{bmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{bmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) \cdot \det(D)\det(I_n) = \det(AD - BC)\det(D) \Rightarrow$$

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC)\det(D) \cdot \frac{1}{\det(D)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC)}$$

(c) Para resolver este item, vamos utilizar as propriedades das matrizes transpostas. Lembrando que, se $X, Y \in \mathscr{M}_n(K)$, então

- $(X^t)^t = X$;
- $(X+Y)^t = X^t + Y^t$;
- $(XY)^t = Y^t X^t$;
- $\det(X^t) = \det(X)$.

de posse dessas propriedades, observe que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix}$$

Daí, utilizando a notação I_n para a matriz identidade $n \times n$, e usando o fato de que $DB = BD$,

$$\begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^t & 0 \\ -B^t & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^t D^t - B^t C^t & C^t \\ B^t D^t - D^t B^t & D^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (DA)^t - (CB)^t & C^t \\ (DB)^t - (BD)^t & D^t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (DA - CB)^t & C^t \\ (DB - BD)^t & D^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (DA - CB)^t & C^t \\ 0 & D^t \end{pmatrix}$$

Novamente, sendo D invertível, então D^t também é invertível. Logo, temos

$$\det\left(\begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^t & 0 \\ -B^t & I_n \end{bmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} (DA - CB)^t & C^t \\ 0 & D^t \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} \right) \det\left(\begin{bmatrix} D^t & 0 \\ -B^t & I_n \end{bmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} (DA - CB)^t & C^t \\ 0 & D^t \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} \right) \det(D^t)\det(I_n) = \det\left((DA - CB)^t\right) \det\left(D^t\right) \Rightarrow$$

$$\det \begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} = \det\left((DA - CB)^t\right) \det\left(D^t\right) \cdot \frac{1}{\det\left(D^t\right)} \Rightarrow$$

$$\det \begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} = \det\left((DA - CB)^t\right) \Rightarrow \boxed{\det \begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} = \det(DA - CB)}$$

2.16 Exercício 16

(16) Seja $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(K)$. Prove que

$$\det(I_m + AA^t) = \det(I_n + A^t A)$$

Observação: Tal identidade é conhecida como *identidade de Weinstein-Aronszajn.*

Solução: Se A é uma matriz:

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ A^T & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m + AA^T & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -A^T & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n + A^T A \end{pmatrix}.$$

Desse modo,

$$\det\left(\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ A^T & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m + AA^T & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -A^T & I_n \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n + A^T A \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ A^T & I_n \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} I_m + AA^T & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -A^T & I_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n + A^T A \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(I_m)\det(I_n)\det\left(I_m + AA^T\right)\det(I_n)\det(I_m)\det(I_n) = \det(I_m)\det(I_n + A^T A) \Rightarrow$$

$$\boxed{\det\left(I_m + AA^T\right) = \det(I_n + A^T A)}$$

2.17 Exercício 17

(17) Seja $\sigma \in S_n$ e defina

$$\begin{array}{rccl} T_\sigma & : & K^n & \longrightarrow & K^n \\ & & e_i & \longmapsto & T_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \end{array},$$

para $i = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de K^n. Calcule $\det(T_\sigma)$.

Solução: Observe que T_σ está permutando as colunas da matriz cujas colunas são os elementos da base canônica. Assim, para cada coluna i, vamos associar o vetor $e_{\sigma(i)}$.
Então,
Portanto, $\det(T_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

2.18 Exercício 18

(18) Seja $C \in \mathscr{M}_n(K)$ a matriz

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x+c_{n-1} \end{bmatrix}$$

Prove que $\det C = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0$.

Solução: Vamos provar o resultado por indução sobre $n \geq 2$.
Para $n = 2$, temos que

$$C = \begin{bmatrix} x & c_0 \\ -1 & x+c_1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\det C = x(x+c_1) + c_0 = x^2 + c_1x + c_0.$$

Seja agora $n > 2$ e admita que o resultado é verdadeiro para matrizes $n-1 \times n-1$ desse tipo.
Usando o desenvolvimento de $\det C$ por Laplace, pela primeira linha, temos que

$$\det \left[\begin{array}{c|cccc|c} x & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \\ \hline -1 & x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x+c_{n-1} \end{array}\right] =$$

$$x \cdot \det \begin{bmatrix} x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x+c_{n-1} \end{bmatrix} + (-1)^{n+1}c_0 \det \begin{bmatrix} -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Pela hipótese de indução, segue que

$$\det C = x(x^{n-1}+c_{n-1}x^{n-2}+\ldots+c_2x+c_1)+(-1)^{n+1}c_0(-1)^{n-1} = x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_1x+c_0,$$

como queríamos.

2.19 Exercício 19

(19) Seja K um corpo e $A_1, \dots, A_n$ matrizes quadradas sobre K. Seja B a matriz triangular por blocos

$$\begin{bmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{bmatrix}$$

Mostre que $\det B = \det(A_1)\det(A_2)\dots\det(A_n)$.

Solução: A demonstração de tal resultado se dará por indução em n. Para $n = 2$, temos a matriz

$$\begin{bmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

na qual sabemos que seu determinante é $\det(A_1)\det(A_2)$.
Suponha que o resultado é verdadeiro para certo $n = k$. Dessa forma, temos que

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix} = \det(A_1)\det(A_2)\dots\det(A_k) = \prod_{i=1}^{k}\det(A_i)$$

Calculemos o determinante de B para $n = k+1$. Dividindo a matriz em blocos, e utilizando que, para $U \in \mathscr{M}_\ell(K)$, $V \in \mathscr{M}_{\ell\times m}(K), Y \in \mathscr{M}_m(K)$, temos que

$$\det\begin{pmatrix} U & V \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \det(U)\det(Y),$$

Em particular, tomando $\ell = k$ e $m = 1$, podemos considerar

$$\det \left[\begin{array}{ccccc|c} A_1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & A_2 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_k & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{k+1} \end{array}\right] = \det\begin{pmatrix} U & V \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \det(U)\det(Y) =$$

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix} \det(A_{k+1}) = \left(\prod_{i=1}^{k}\det(A_i)\right)\cdot\det(A_{k+1}) =$$

$$\prod_{i=1}^{k+1} \det(A_i) = \det(A_1)\det(A_2)\ldots\det(A_k)\det(A_{k+1})$$

Segue então o resultado desejado.

2.20 Exercício 20

(20) Seja K um corpo e $a, b, c, d, e, f, g \in K$. Mostre que

$$\det\begin{bmatrix} a & b & b \\ c & d & e \\ f & g & g \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a & b & b \\ e & c & d \\ f & g & g \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a & b & b \\ d & e & c \\ f & g & g \end{bmatrix} = 0$$

Solução: Temos que o determinante é uma forma 3-linear das linhas da matriz, então:

$$\det\begin{bmatrix} a & b & b \\ c & d & e \\ f & g & g \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a & b & b \\ e & c & d \\ f & g & g \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a & b & b \\ d & e & c \\ f & g & g \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & b & b \\ c+d+e & d+c+e & e+d+c \\ f & g & g \end{bmatrix}$$

Note que a segunda e a terceira coluna são iguais. Como o determinante é 3-linear e alternado nas colunas da matriz, segue que

$$\det\begin{bmatrix} a & b & b \\ c+d+e & d+c+e & e+d+c \\ f & g & g \end{bmatrix} = 0.$$

2.21 Exercício 21

(21) Sabendo que os números inteiros $23028, 31882, 86469, 6327$ e 61902 são todos múltiplos de 19, mostre que o número inteiro

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 8 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 9 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é múltiplo de 19.

Solução: Utilizaremos as propriedades dos determinantes. Multiplicando a primeira coluna por 10^4, a segunda por 10^3, a terceira por 10^2, e a quarta por 10, chamando

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 8 & 8 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 9 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\det \begin{bmatrix} 20000 & 3000 & 0 & 20 & 8 \\ 30000 & 1000 & 800 & 80 & 2 \\ 80000 & 6000 & 400 & 60 & 9 \\ 0 & 6000 & 300 & 20 & 7 \\ 60000 & 1000 & 900 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2\cdot 10^4 & 3\cdot 10^3 & 0\cdot 10^2 & 2\cdot 10 & 8 \\ 3\cdot 10^4 & 1\cdot 10^3 & 8\cdot 10^2 & 8\cdot 10 & 2 \\ 8\cdot 10^4 & 6\cdot 10^3 & 4\cdot 10^2 & 6\cdot 10 & 9 \\ 0\cdot 10^4 & 6\cdot 10^3 & 3\cdot 10^2 & 2\cdot 10 & 7 \\ 6\cdot 10^4 & 1\cdot 10^3 & 9\cdot 10^2 & 0\cdot 10 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$10^4 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 10 \det A = 10^{10} \det A$$

Agora, somando as quatro primeiras colunas à quinta coluna, isso não altera o valor do determinante, e como todos os elementos são múltiplos de 19, temos

$$\det \begin{bmatrix} 20000 & 3000 & 0 & 20 & 23028 \\ 30000 & 1000 & 800 & 80 & 31882 \\ 80000 & 6000 & 400 & 60 & 86469 \\ 0 & 6000 & 300 & 20 & 6327 \\ 60000 & 1000 & 900 & 0 & 61902 \end{bmatrix} = 10^{10} \det A \Rightarrow$$

$$\det \begin{bmatrix} 20000 & 3000 & 0 & 20 & 23028 \\ 30000 & 1000 & 800 & 80 & 31882 \\ 80000 & 6000 & 400 & 60 & 86469 \\ 0 & 6000 & 300 & 20 & 6327 \\ 60000 & 1000 & 900 & 0 & 61902 \end{bmatrix} = 10^{10} \det A \Rightarrow$$

$$\det \begin{bmatrix} 20000 & 3000 & 0 & 20 & 19\cdot 1212 \\ 30000 & 1000 & 800 & 80 & 19\cdot 1678 \\ 80000 & 6000 & 400 & 60 & 19\cdot 4551 \\ 0 & 6000 & 300 & 20 & 19\cdot 333 \\ 60000 & 1000 & 900 & 0 & 19\cdot 3258 \end{bmatrix} = 10^{10} \det A \Rightarrow$$

$$19 \det \begin{bmatrix} 20000 & 3000 & 0 & 20 & 1212 \\ 30000 & 1000 & 800 & 80 & 1678 \\ 80000 & 6000 & 400 & 60 & 4551 \\ 0 & 6000 & 300 & 20 & 333 \\ 60000 & 1000 & 900 & 0 & 3258 \end{bmatrix} = 10^{10} \det A$$

Desse modo, temos que $19 \mid 10^{10} \det A$, mas como $\operatorname{mdc}(10^{10}, 19) = 1$, ou seja, 19 e 10^{10} são primos entre si, temos que $19 \mid \det A$. Portanto, o determinante de A é um múltiplo de 19.

2.22 Exercício 22

(22) Seja K corpo e $a, b, c \in K$. Usando a matriz $\begin{bmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$, calcule

$$\det \begin{bmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

Solução: Chamando

$$A = \begin{bmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{bmatrix},$$

observe que

$$AA^t = \begin{bmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{bmatrix} = B.$$

Logo, temos que

$$\det(B) = \det(AA^t) \Rightarrow \det(B) = \det(A)\det(A^t) \Rightarrow$$

$$\det(B) = \det(A)\det(A) \Rightarrow \boxed{\det(B) = (\det(A))^2}$$

2.23 Exercício 23

(23) Seja K um corpo e n um inteiro positivo. Dadas matrizes $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ mostre que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$$

Solução: Como somar elementos das colunas e somar elementos das linhas não altera o determinante da matriz, temos que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+B & B \\ B+A & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+B & B \\ B+A-(A+B) & A-B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{pmatrix}$$

Utilizando o fato de que, para $U, V, X, Y \in \mathscr{M}_n(K)$, temos

$$\det \begin{bmatrix} U & V \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \det U \det Y$$

Ficamos com

$$\det \begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B) \Rightarrow \det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$$

2.24 Exercício 24

(24) Seja K um corpo e V um espaço vetorial de dimensão finita n. Sejam $B = (e_1, \ldots, e_n)$ e $C = (d_1, \ldots, d_n)$ duas bases de V. Sejam φ a única forma n-linear tal que $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = 1$ e ψ a única forma n-linear tal que $\psi(d_1, \ldots, d_n) = 1$. Qual o valor de $\psi(e_1, \ldots, e_n)$ e de $\varphi(d_1, \ldots, d_n)$? Use isso para dar uma relação entre ψ e φ.

Solução:

2.25 Exercício 25

(25) Seja K um corpo, n um inteiro positivo e $K_n[t]$ o conjunto de polinômios de grau menor ou igual que n com coeficientes em K. Sejam $t_1, \ldots, t_{n+1} \in K$ dois a dois distintos. Considere para $i = 1, \ldots, n+1$ as funções de avaliação

$$\begin{array}{rcccl} \tau_i & : & K_n[t] & \longrightarrow & K \\ & & p(t) & \longmapsto & \tau_i(p(t)) = p(t_i) \end{array}$$

(a) Mostre que $\mathscr{B} = \{\tau_1, \ldots, \tau_{n+1}\}$ é base de $K_n[t]^*$. (Sugestão: use o exercício 12.)

(b) Mostre que os *polinômios de Lagrange*

$$L_i(t) = \prod_{j \neq i} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, i = 1, \ldots, n+1,$$

formam uma base dual de $\mathscr{B}$.

(c) Mostre que para quaisquer $a_1, \ldots, a_{n+1} \in K$ existe um único polinômio $p(t)$ de grau menor o igual que n tal que $p(t_i) = a_i$, para $i = 1, \ldots, n+1$. (O resultado do item (c) é a conhecida *Fórmula de Interpolação de Lagrange*)

Solução:

(a) Como $K_n[t]$ é um K-espaço vetorial de dimensão finita, temos que $\dim K_n[t]^* = \dim K_n[t] = n+1$. Logo, para provar que $\mathscr{B}$ é base, basta mostrar que $\mathscr{B}$ é LI.

Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in K$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_i = \alpha_1 \tau_1 + \ldots + \alpha_{n+1}\tau_{n+1} = 0$$

Vamos mostrar que $\alpha_i = 0\ \forall i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Avaliemos $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_i$ em $1, t, \ldots, t^n$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_i(1) = \alpha_1 \tau_1(1) + \ldots + \alpha_{n+1}\tau_{n+1}(1) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_i(t) = \alpha_1 \tau_1(t) + \ldots + \alpha_{n+1}\tau_{n+1}(t) = 0 \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_i(t^n) = \alpha_1 \tau_1(t^n) + \ldots + \alpha_{n+1}\tau_{n+1}(t^n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 1 + \ldots + \alpha_{n+1} 1 = 0 \\ \alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_{n+1} t_{n+1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 t_1^n + \ldots + \alpha_{n+1} t_{n+1}^n = 0 \end{cases}$$

Logo, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})$ é solução do sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^n & t_2^n & \ldots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ são diferentes, observe que a matriz obtida é uma matriz de Vandermonde. Assim, pela questão 12, temos que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^n & t_2^n & \ldots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (t_j - t_i) \neq 0,$$

o que resulta que a única solução possível para este sistema é a trivial. Consequentemente, temos $t_1 = t_2 = \ldots = t_{n+1} = 0$. Daí, $\mathscr{B}$ é LI, e portanto uma base para $K_n[t]^*$.

2.26 Exercício 26

(26) Seja $n > 1$ um inteiro e $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Seja $\mathscr{C}^{(n-1)}(I, \mathbb{R})$ o conjunto das funções de classe $n-1$, i.e. deriváveis $n-1$ vezes com derivada $n-1$ contínua.

Dadas $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{C}^{(n-1)}(I, \mathbb{R})$, o *Wronskiano* de $f_1, \dots, f_n$ é a função

$$\begin{array}{rcrcl} W(f_1, \dots, f_n) & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & (W(f_1, \dots, f_n))(t) \end{array}$$

definida como

$$(W(f_1, \dots, f_n))(t) = \det \begin{bmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \dots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Mostre que se existir $t \in I$ tal que $(W(f_1, \dots, f_n))(t) \neq 0$ então $\{f f_1, \dots, f_n\} \subset \mathscr{C}^{(n-1)}(I, \mathbb{R})$ é $\mathbb{R}$-linearmente independente.
Observe que a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, seja $I = (-1, 1), f_1 \colon t \to t^3, f_2 \colon t \to \left| t^3 \right|$. O conjunto $\{f_1, f_2\}$ é $\mathbb{R}$-linearmente independente, mas $(W(f_1, f_2))(t) = 0$ para todo $t \in (-1, 1)$.

Solução:

2.27 Exercício 27

(27) Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita n e sejam $f_1, f_2, \dots, f_r \in V^*$. Defina

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r \colon V \times V \times \dots \times V \to K$$

por $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r(v_1, v_2, \dots, v_r) = \det f_i(v_j)$.

- **(*a*)** Verifique que $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r$ é r-linear e alternada.
- **(*b*)** Mostre que $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r \neq 0$ se, e somente se $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ é linearmente independente.
- **(*c*)** Prove que se $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$é uma base de V^* então o conjunto

  $$\{f_J = f_{j_1} \wedge f_{j_2} \wedge \dots \wedge f_{j_r}\}, \text{ para todo } J = \{j_1 < j_2 < \dots j_r\} \subset \{1, 2, \dots, n\}\}$$

  é uma base de $\mathscr{A}_r(V)$.
- **(*d*)** Sejam B de uma base de V e $B^* = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ sua base dual. Descreva a base de $\mathscr{A}_r(V)$ que obtemos usando o item anterior. (A forma linear $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_r$ é chamada de *produto exterior* dos funcionais $f_1, f_2, \dots, f_r$.)

Solução:
Questões Suplementares

2.28 Exercício 28

(28) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \frac{1}{x_1+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \frac{1}{x_2+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \frac{1}{x_3+y_1} & \frac{1}{x_3+y_2} & \frac{1}{x_3+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_3+y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \frac{1}{x_n+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{pmatrix},$$

onde $x_i + y_j \neq 0$ para $1 \leq i, j \leq n$. Mostre que o determinante dessa matriz, conhecido por *determinante de Cauchy*, é dado por

$$\det A = \frac{\prod_{i>j}^{n} (x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j=1}^{n} (x_i + y_j)}$$

Solução:

2.29 Exercício 29

(29) O determinante da *matriz circulante* $n \times n$ é dado por

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{bmatrix} = (-1)^{n-1} \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n} \zeta^{jk} a_k \right),$$

onde $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Encontre o determinante da matriz circulante $n \times n$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & \dots & n^2 \\ n^2 & 1 & 4 & \dots & (n-1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 9 & 16 & 25 & \dots & 4 \\ 4 & 9 & 16 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução:

2.30 Exercício 30

(30) Sejam $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ duas matrizes invertíveis, tais que

$$A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1}$$

- **(*a*)** Se $K = \mathbb{R}$, mostre que $\det A = \det B$.
- **(*b*)** Se $K = \mathbb{C}$, mostre que pode ocorrer $\det A \neq \det B$, mas é válido que $|detA| = |\det B|$.

Solução:

2.31 Exercício 31

(31) Prove a identidade de Woodbury: para $A \in \mathscr{M}_n(K)$, $U \in \mathscr{M}_{n\times m}(K)$, $C \in \mathscr{M}_{m\times m}(K)$ e $V \in \mathscr{M}_{m\times n}(K)$, temos que

$$(A+UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U\left(C^{-1} + VA^{-1}U\right)^{-1} VA^{-1}$$

Solução:

2.32 Exercício 32

(32) [Teorema do Determinante de Gasper] Seja $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, s a soma das entradas da matriz e q a soma dos quadrados das entradas dessa matriz. Considere $\alpha = \frac{s}{n}$ e $\beta = \frac{q}{n}$. O Teorema do Determinante de Gasper afirma que $|\det A| \leq \beta^{\frac{n}{2}}$, e no caso em que $\alpha^2 \geq \beta$:

$$|\det A| \leq |\alpha| \left(\frac{n\beta - \alpha^2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

Solução:

2.33 Exercício 33

(33) Considere a matriz quadrada A_n cujas entradas são os n^2 primeiros números primos.

- **(*a*)** Mostre que o maior valor possível para $\det(A_2)$ é um número primo.
- **(*b*)** Encontre todos os valores de n para os quais o maior determinante possível para $\det(A_n)$ é um número primo.

3 Lista 2 (Provável)

3.1 Exercício 1

(1) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e $T \in \mathscr{L}(V)$. Sejam $\lambda \in K$ um autovalor de T e $f(t) \in K[t]$. Mostre que $f(\lambda)$ é um autovalor de $f(T)$.

Solução:

3.2 Exercício 2

(2) Seja V um K-espaço de dimensão finita n e seja $T\colon V \to V$ um operador linear. Mostre que se T tem n autovalores distintos então T é diagonalizável.

Solução:

3.3 Exercício 3

(3) Sejam V um K-espaço de dimensão finita, $T \in \mathscr{L}(V)$ e $\lambda \in K$ um autovalor de T. Chamamos de *multiplicidade algébrica* de λ ao maior inteiro m tal que $(t-\lambda)^m$ divida o polinômio característico $p_T(t)$ de T. A dimensão do autoespaço $V_T(\lambda)$ é a *multiplicidade geométrica* de λ.

(a) Mostre que a multiplicidade geométrica de λ é sempre menor ou igual à multiplicidade algébrica de λ.

(b) Mostre que T é diagonalizável se, e somente se, $p_T(t)$ é produto de fatores lineares e, para cada autovalor λ de T, as multiplicidades algébrica e geométrica de λ coincidem.

Solução:

3.4 Exercício 4

(4) Seja

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule A^{2019}.

Solução:

3.5 Exercício 5

(5) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ um operador linear inversível. Prove que:

(*a*) Se λ é um valor próprio de T, então $\lambda \neq 0$.

(*b*) λ é um valor próprio de T se, e somente se, λ^{-1} é um valor próprio de T^{-1} (onde T^{-1} é o operador inverso de T).

(*c*) Se λ é um valor próprio de T, mostre que a multiplicidade algébrica de λ é igual à multiplicidade algébrica de $\frac{1}{\lambda}$.

Solução:

3.6 Exercício 6

(6) Seja V um espaço vetorial de dimensão n e seja $T \in \mathscr{L}(V)$ de posto 1. Prove que ou T é diagonalizável ou T é nilpotente.

Solução:

3.7 Exercício 7

(7) Seja $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$ a matriz em que $a_{ij} = a \neq 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. A matriz A é diagonalizável? Qual é o seu polinômio minimal?

Solução:

3.8 Exercício 8

(8) Seja $A \in \mathscr{M}_{n\times 1}(K)$. A matriz AA^t é diagonalizável?

Solução:

3.9 Exercício 9

(9) Sejam $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Prove que se $I - AB$ é inversível, então $I - BA$ é inversível e que

$$(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A.$$

Solução:

3.10 Exercício 10

(10) Sejam $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Prove que AB e BA têm os mesmos autovalores em K. Elas têm o mesmo polinômio característico? E o minimal?

Solução:

3.11 Exercício 11

(11) Seja $A \in \mathscr{M}_n(K)$ uma matriz diagonalizável. Mostre que A^r é diagonalizável para todo inteiro $r \geq 1$. Exiba uma matriz *não diagonalizável* tal que A^2 é diagonalizável.

Solução:

3.12 Exercício 12

(12) Seja $D \in \mathscr{M}_n(K)$ uma matriz diagonal com polinômio característico

$$p_D(t) = (t - c_1)^{d_1} \cdots (t - c_k)^{d_k},$$

em que $c_1, \ldots, c_k$ são distintos. Seja

$$W = A \in \mathscr{M}_n(K) : DA = AD.$$

Prove que

$$\dim W = d_1^2 + \ldots + d_k^2.$$

Solução:

3.13 Exercício 13

(13) Seja $D \in \mathscr{L}(P_n(\mathbb{R}))$ o operador derivação. Encontre o polinômio minimal de D.

Solução:

3.14 Exercício 14

(14) Determine o polinômio minimal de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(e)** $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Solução:

3.15 Exercício 15

(15) Seja $C \in \mathscr{M}_n(K)$ a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

Prove que o polinômio característico de C é

$$p_C(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_1 t + c_0.$$

Mostre que este é também o polinômio minimal de C. A matriz C é chamada de **matriz companheira** do polinômio $c_0 + c_1 t + \dots + c_{n1}t^{n1} + t^n$.

Solução:

3.16 Exercício 16

(16) *Verdadeiro ou falso?*[2] Se $A \in \mathscr{M}_n(K)$ é uma matriz triangular superior e A é diagonalizável, então A já é uma matriz diagonal.

Solução:

3.17 Exercício 17

(17) Sejam K um corpo, n um inteiro positivo e $A \in \mathscr{M}_n(K)$ uma matriz de posto $r \leq n$. Mostre que o polinômio minimal de A tem grau menor ou igual a $r + 1$.

Solução:

3.18 Exercício 18

(18) Seja K um corpo de característica diferente de 2 e $T : \mathscr{M}_n(K) \to \mathscr{M}_n(K)$ o operador linear definido por $T(A) = A^t$. Mostre que T é diagonalizável, determine os autovalores

[2] Só de perguntar isso tem uma grande chance de ser falso XD

de T, as dimensões dos autoespaços e uma base de $\mathscr{M}_n(K)$ formada por autovetores de T.

Solução:

3.19 Exercício 19

(19) Mostre que uma matriz $A \in \mathscr{M}_n(K)$ é inversível se, e somente se, o termo constante de seu polinômio minimal é diferente de zero.

Solução:

3.20 Exercício 20

(20) Seja $A \in \mathscr{M}_n(K)$ uma matriz inversível.

(*a*) Mostre que existe um polinômio $p(t) \in K[t]$ tal que $A^{-1} = p(A)$.

(*b*) Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontre $p(t)$ tal que $p(A) = A^{-1}$.

Solução:

3.21 Exercício 21

(21) Determine todas as matrizes $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ nilpotentes e calcule $\det(A+I)$ e $\det(AI)$.

Solução:

3.22 Exercício 22

(22) Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V. Seja $T\colon V \to V$ o operador linear definido por

$$T(e_1) = e_2e_1, T(e_2) = e_3e_1, T(e_3) = e_3e_2.$$

(*a*) Mostre que T não é diagonalizável.

(*b*) Calcule T^{212} (Dica: utilize o Teorema de Cayley-Hamilton)

Solução:

3.23 Exercício 23

(23) Seja $T \in \mathscr{L}(V)$ um operador diagonalizável e seja W um subespaço de V T-invariante. Prove que a restrição de T a W, $T\restriction_W \in \mathscr{L}(W)$ é diagonalizável.

Solução:

3.24 Exercício 24

(24) Seja $T \in \mathscr{L}(V)$ um operador linear tal que todo subespaço de V é T-invariante. Mostre que T é um múltiplo do operador identidade.

Solução:

3.25 Exercício 25

(25) Seja $T \in \mathscr{L}(V)$ um operador linear e seja W um subespaço de V. Prove que W é T-invariante se, e somente se, W^0 é T^t-invariante.

Solução:

3.26 Exercício 26

(26) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e seja $T \in \mathscr{L}(V)$. Prove que T é diagonalizável se, e somente se, para todo subespaço T-invariante W de V existe um subespaço T-invariante U tal que

$$V = W \oplus U$$

Observação: Um operador linear T é dito *semi-simples* quando todo subespaço T-invariante de V tem um complemento que é também T-invariante.

Solução:

3.27 Exercício 27

(27) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e seja $T \in \mathscr{L}(V)$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) T é diagonalizável e $T^{2n} = T^n$.

(b) $T^{n+1} = T$.

Solução:

3.28 Exercício 28

(28) Seja $A \in \mathscr{M}_n(K)$ e o operador

$$\begin{array}{rcccl} T_A & : & \mathscr{M}_n(K) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(K) \\ & & M & \longmapsto & T_A(M) = AM - MA \end{array}$$

Prove que se A é diagonalizável então T_A é diagonalizável.

Solução:

3.29 Exercício 29

(29) Seja V um K-espaço de dimensão finita e sejam $E_1, E_2, \ldots E_k \in \mathscr{L}(V)$ tais que $E_1 + E2 + \ldots + E_k = I$.

(*a*) Prove que se $E_i E_j = 0$, para $i \neq j$, então $E_i^2 = E_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

(*b*) Prove que se $E_i^2 = E_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ e a característica de K é zero, então $E_i E_j = 0$, sempre que $i \neq j$.

Solução:

3.30 Exercício 30

(30) Seja $A \in \mathscr{M}_n(K)$ e seja

$$p_A(t) = t^n + a_{n1} t^{n1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

o polinômio característico de A. Mostre que $a_{n1} = \mathrm{tr}(A)$, o traço de A, e $a_0 = (1)^n \det(A)$.

Solução:
Questões Suplementares

3.31 Exercício 31

(31)