

Entrega TERR

Antonio Sevilla Sastre

30 de abril de 2023

Ejercicio 1

1.1

Modelo matemático:

Las magnitudes que queremos determinar son las alturas de los puntos V, W, X, Y, Z . Estas se han observado indirectamente como función lineal de los desniveles $\Delta h_{AV}, \Delta h_{BV}, \dots, \Delta h_{XZ}$.

Consideramos el sistema de ecuaciones de observación $L - L_0 = Ax$. Tiene $m = 14$ observaciones y $n = 5$ incógnitas. Está compuesto por:

- Los valores de los desniveles, $L \in \mathbb{R}^{14}$
- El vector de términos constantes conocidos, $L_0 \in \mathbb{R}^{14}$
- La matriz de diseño que relaciona funcionalmente las incógnitas y las observaciones, $A \in \mathbb{R}^{14 \times 5}$
- El vector de incógnitas o parámetros independientes, que representa las alturas de los puntos, $x \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$

Resulta trivial comprobar que el rango de la matriz A es completo, $Rg(A) = 5 = n$. También es menor que m , el número de ecuaciones. Este sistema tiene una única solución, que no podemos determinar porque desconocemos la magnitud L .

Sin embargo, se ha podido observar dicha magnitud. Consideramos ahora el sistema $l - L_0 = t = Ax$, siendo $l \in \mathbb{R}^{14}$ el vector de las observaciones de las magnitudes del vector L .

Introduciendo los datos del problema nos queda:

$$\begin{pmatrix} \Delta h_{AV} \\ \Delta h_{BV} \\ \Delta h_{VX} \\ \Delta h_{VY} \\ \Delta h_{BY} \\ \Delta h_{AX} \\ \Delta h_{YX} \\ \Delta h_{YZ} \\ \Delta h_{WZ} \\ \Delta h_{VW} \\ \Delta h_{AW} \\ \Delta h_{BX} \\ \Delta h_{WX} \\ \Delta h_{XZ} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -H_A \\ -H_B \\ 0 \\ 0 \\ -H_B \\ -H_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -H_A \\ -H_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V \\ W \\ X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Este sistema es incompatible porque $t \notin \text{Col}(A)$. Para comprobar dicha hipótesis, basta con sustituir las dos primeras observaciones en las ecuaciones del sistema.

Modelo estocástico:

Suponemos que se han eliminado errores groseros y sistemáticos, y por tanto los que quedan en las observaciones son aleatorios. Equivalentemente, $E[l] = L$.

Expresamos además la varianza de las observaciones como $\Sigma_{ll} = \sigma^2 P^{-1}$, siendo σ^2 la varianza de referencia y P la matriz de pesos de las observaciones.

Resolución:

Bajo las condiciones del problema la mejor estimación posible de las incógnitas es la solución mínimos cuadrados ponderados del sistema $Ax = t$. Ciertamente el resultado teórico garantiza que esta viene dada por $\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P t$.

Realizamos su cálculo en Matlab mediante el siguiente código:

```
1 % datos
2 l = [25.102; -6.287; 10.987; 24.606; 17.993; 36.085;
      -13.295; -20.732; 18.455; -14.896; 10.218; 4.693;
      25.883; -7.456];
3 L_0 = [-263.453; -294.837; 0; 0; -294.837; -263.453; 0;
        0; 0; 0; -263.453; -294.837; 0; 0];
4 t = l - L_0;
5 A = [1 0 0 0 0;
      1 0 0 0 0;
      -1 0 1 0 0;
      -1 0 0 1 0;
      0 0 0 1 0;
      0 0 1 0 0;
      0 0 1 -1 0;
      0 0 0 -1 1;
      0 -1 0 0 1;
      -1 1 0 0 0;
      0 1 0 0 0;
      0 0 1 0 0;
      0 -1 1 0 0;
      0 0 -1 0 1];
19 precis_l = diag
      ([0.018,0.019,0.016,0.021,0.017,0.021,0.018, ...
       0.022,0.022,0.021,0.017,0.020,0.018,0.020,]);
21 vars_l = precis_l.^2;
22 P = inv(vars_l);
23 m = 14; n = 5;
24 % solucion
25 x_hat = inv(A'*P*A)*A'*P*t;
26 format long;
27 disp(x_hat);
```

Obteniendo así, todavía sin truncar:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{V} \\ \hat{W} \\ \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 288,5125766027789 \dots \\ 273,6559531569661 \dots \\ 299,5452012776613 \dots \\ 312,8971447890793 \dots \\ 292,1196359788210 \dots \end{pmatrix} \text{ m}$$

De la Ley de propagación de varianzas covarianzas se desprende que la varianza del estimador mínimos cuadrados ponderados viene dada por $\text{var}[\hat{x}] = \sigma^2(A^T P A)^{-1}$. La precisión es su raíz. Conocemos ya nuestra varianza de referencia.

Procedemos al cálculo mediante el siguiente código:

```

1 % varianza de la solucion mmcc
2 var_x_hat = 1*inv(A'*P*A);
3 % precision de la solucion mmcc
4 precis_x_hat = sqrt(var_x_hat);
5 format short
6 disp(precis_x_hat);

```

Obteniendo así la matriz de precisiones de \hat{x} . Tomando los términos de la diagonal de la misma y truncando adecuadamente para la presentación los valores obtenidos previamente, se tiene:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{V} \\ \hat{W} \\ \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 288,5125 \\ 273,6559 \\ 299,5452 \\ 312,8971 \\ 292,1196 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0,0096 \\ 0,0112 \\ 0,0096 \\ 0,0112 \\ 0,0147 \end{pmatrix} \text{ m}$$

Teniendo en cuenta la magnitud del valor de las incógnitas y de su precisión, el ajuste resulta bastante preciso.

1.2

Es conocido que la precisión de las observaciones ajustadas viene dada por $\sqrt{V[\hat{l}]} = \sqrt{\text{diag}(\sigma^2 A A_p^+ P^{-1})}$, siendo $A_p^+ = (A^T P A)^{-1} A^T P$.

Aplicamos el código:

```

1 % A_p^+
2 A_plus = inv(A'*P*A)*A'*P
3 % varianza de l
4 V_l = diag(1*A*A_plus*inv(P));
5 % precision de l
6 precis_l = sqrt(V_l)

```

Obteniendo el vector de precisiones:

$$\text{precis}(\hat{l}) = \begin{pmatrix} 0,0096 \\ 0,0096 \\ 0,0102 \\ 0,0119 \\ 0,0112 \\ 0,0096 \\ 0,0111 \\ 0,0144 \\ 0,0144 \\ 0,0119 \\ 0,0112 \\ 0,0096 \\ 0,0111 \\ 0,0134 \end{pmatrix} m$$

Por otro lado, es conocido que la precisión de las observaciones ajustadas viene dada por $\sqrt{V[\hat{v}]} = \sqrt{\text{diag}(\sigma^2(I_m - AA_p^+)P^{-1})}$. Aplicamos el código:

```

1 % varianza de v
2 V_v = diag(1*(eye(m,m) - A*A_plus)*inv(P));
3 % precision de v
4 precis_v = sqrt(V_v)

```

Obteniendo así:

$$\text{precis}(\hat{v}) = \begin{pmatrix} 0,0151 \\ 0,0163 \\ 0,0122 \\ 0,0172 \\ 0,0127 \\ 0,0186 \\ 0,0141 \\ 0,0166 \\ 0,0166 \\ 0,0172 \\ 0,0127 \\ 0,0175 \\ 0,0141 \\ 0,0147 \end{pmatrix} m$$

Teniendo en cuenta la magnitud de las observaciones ajustadas y los residuales frente a la de su precisión, el ajuste resulta relativamente preciso.

1.3

Si queremos encontrar los intervalos de confianza para \hat{x}_i , debemos encontrar un valor de q de manera que $P(T_{m-n} \leq q) = \frac{\alpha}{2}$; y nuestros intervalos serán para cada \hat{x}_i , de la forma

$$(\hat{x}_i \pm q \cdot \text{precis}(\hat{x}_i))$$

Empleando el código

```

1 % IC para x_hat
2 alpha = 0.05;
3 q = tinv(1 - alpha/2, m-n); % es simetrica
4 IC_x_1 = x_hat - q*diag(precis_x_hat)
5 IC_x_2 = x_hat + q*diag(precis_x_hat)

```

se obtienen directamente los intervalos

$$IC_{1-\alpha}(x) = \begin{pmatrix} 288,4188 \dots, 288,6063 \dots \\ 273,5469 \dots, 273,7651 \dots \\ 299,4517 \dots, 299,6387 \dots \\ 312,7880 \dots, 313,0062 \dots \\ 291,9764 \dots, 292,2628 \dots \end{pmatrix} m$$

Aunque tenemos el valor exacto de la varianza de referencia, podemos estimar otro a partir de los datos que tenemos y los pesos de las observaciones. Se ha demostrado que $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{V}^T P \hat{V}}{m-n}$ es centrado respecto a σ^2 , siendo \hat{V} el vector de residuales $\hat{t} - t$.

Para conseguir el intervalo de confianza de la varianza, necesitaremos q_1, q_2 tales que $P(\chi_{m-n}^2 \leq q_1) = P(\chi_{m-n}^2 \geq q_2) = \frac{\alpha}{2}$; y con esto nuestro intervalo será

$$\left(\frac{(m-n) \cdot \hat{\sigma}^2}{q_2}, \frac{(m-n) \cdot \hat{\sigma}^2}{q_1} \right)$$

Calculándolo mediante

```

1 % IC para sigma^2
2 q1 = chi2inv(alpha/2, m-n)
3 q2 = chi2inv(1 - alpha/2, m-n)
4 IC_sigma_square_1 = ((m-n)*(sigma_square))/q2)
5 IC_sigma_square_2 = ((m-n)*(sigma_square))/q1)

```

se consigue

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = (8,7381 \dots, 61,5552 \dots) m^2$$

De aquí se puede obtener fácilmente un intervalo de confianza para la precisión de referencia

$$IC_{1-\alpha}(\sigma) = (\sqrt{8,7381 \dots}, \sqrt{61,5552 \dots}) = (2,9560 \dots, 7,8457 \dots) \text{ m}$$

El tamaño del intervalo y sobre todo el hecho de que ni siquiera contiene al σ real pueden ser indiciarios de la presencia de errores groseros en las observaciones.

Finalmente, si queremos un intervalo de confianza para la precisión del ajuste podemos utilizar que $precis(\hat{x}_i) = \sigma \sqrt{n_{ii}}$, siendo n_{ii} el elemento i -ésimo de la diagonal de la matriz N^{-1} . Llamamos N al resultado $A^T P A$. De nuevo, empleamos la varianza de referencia conocida, no la estimación de la misma. Así

$$IC_{1-\alpha}(precis(\hat{x}_i)) = IC_{1-\alpha}(\sigma \cdot \sqrt{n_{ii}}) = (2,9560 \dots, 7,8457 \dots) \cdot \sigma \sqrt{n_{ii}} \text{ m}$$

Procediendo al cálculo usando el script

```

1 % IC para precis ajuste
2 a = sqrt( IC_sigma_square_1 )
3 b = sqrt( IC_sigma_square_2 )
4 N = A'*P*A
5 ctes = diag( sqrt(1)*sqrt(inv(N)) )
6 IC_precis_1 = a*ctes
7 IC_precis_2 = b*ctes

```

se consigue

$$IC_{1-\alpha}(precis(\hat{x})) = (2,9560 \dots, 7,8457 \dots) \cdot \begin{pmatrix} 0,0096 \\ 0,0112 \\ 0,0096 \\ 0,0112 \\ 0,0147 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0066, & 0,0176 \\ 0,0077, & 0,0205 \\ 0,0066, & 0,0176 \\ 0,0077, & 0,0205 \\ 0,0101, & 0,0269 \end{pmatrix} \text{ m}$$

1.4

Si notamos como λ_i los 3 primeros autovalores e $N = A^T P A$ y obtenemos q de manera que $P(F_{n,m-n} \leq q) = 1 - \alpha$ siendo $F_{n,m-n}$ la función F de Fisher de $n, m - n$ grados de libertad; el centro de la elipse es la estimación mínimos cuadrados y sus radios son los

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda_i}{nq\sigma^2}}}$$

De nuevo, usamos el σ que conocemos realizamos el cálculo en Matlab para el nivel de significación $\alpha = 0,1$ mediante el código

```

1 % elipsoide de confianza
2 N = A'*P*A
3 alpha = 0.1;
4 autovalores = eig(N)
5 q = finv(1 - alpha, n, m-n)
6 betha = autovalores/(n*q*1)
7 radiox = 1/sqrt(betha(1))
8 radioy = 1/sqrt(betha(2))
9 radioz = 1/sqrt(betha(3))

    obteniendo los radios

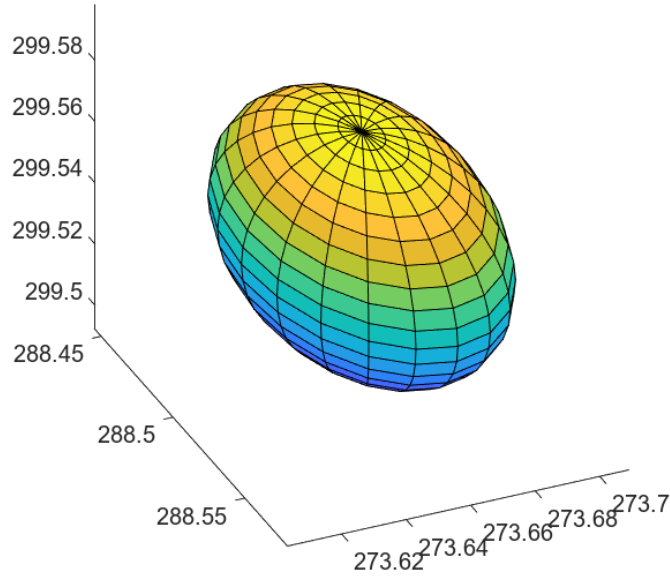
1 radiox = 0.0672
2 radioy = 0.0373
3 radioz = 0.0346

    Si representamos el elipsoide de confianza mediante

1 % representacion de la elipse
2 clf; hold on;
3
4 x0=x_hat(1)
5 y0=x_hat(2)
6 z0=x_hat(3)
7
8 [x, y, z] = ellipsoid( x0, y0, z0, radiox,radioy,radioz);
9 axis equal
10 surf(x, y, z)
11 view([66.0914 30.0621])

    conseguimos la siguiente figura

```

Los radios para $\alpha = 0,05$ son

- ₁ radiox = 0.0776
- ₂ radioy = 0.0431
- ₃ radioz = 0.0400

y la figura obtenida es muy similar.

1.5

Como conocemos la varianza de referencia de las observaciones, realizaremos el Test de Baarda.

Este consiste en tomar los

$$W_i := \frac{\hat{v}_i}{\sigma \cdot \sqrt{q_{ii}}}$$

que han de distribuirse como una t de Student de parámetro $m - n - 1$, siendo

$$q_i = p_i^{-1} - a_{(i)} \mathbf{N}^{-1} a_{(i)}^T$$

Tamamos el máximo de los valores absolutos de los W_i y comparamos con aquel q tal que $P(N(0, 1) \leq q) = 1 - \alpha$, siendo α el nivel de significación y $N(0, 1)$ la distribución normal de media 0 y desviación típica 1.

Si lo hacemos en Matlab

```

1 % deteccion de errores groseros
2 Q = [eye(m) - A*A_plus]*inv(P);
3 Wi = zeros(1,m)
4 for i = 1:m
5     Wi(i) = v_hat(i)/(sqrt(1) * sqrt(Q(i,i)));
6 end
7 Wi
8 max(abs(Wi))
9 alpha = 0.05
10 q = norminv(1-alpha/2, 0, 1)

resultan

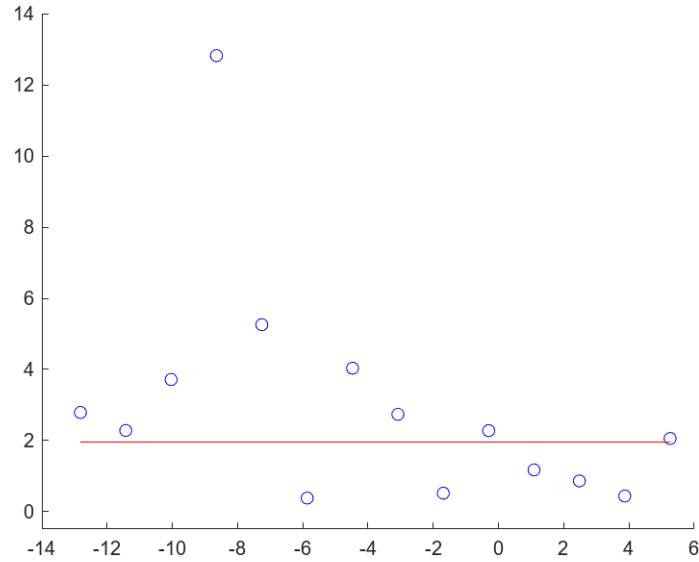
```

$$W_i = \begin{pmatrix} -2,7913 \\ -2,2860 \\ 3,7167 \\ -12,8195 \\ 5,2583 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

El máximo en valor absoluto 12,8195 y q vale 1,96. Como este es mayor que q , consideramos que la cuarta observación contiene un error grosero. Podíamos sospecharlo observando que su residual era anómalamente grande en valor absoluto respecto a los de las demás observaciones:

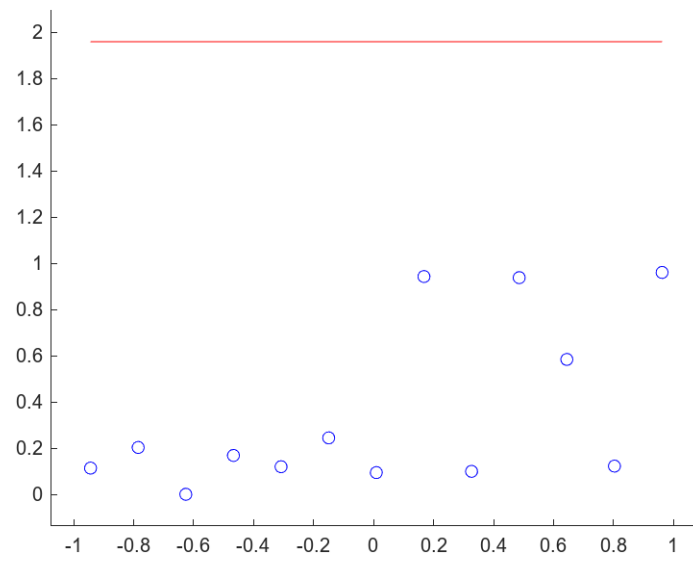
$$\hat{v} = \begin{pmatrix} -0,0424 \\ -0,0374 \\ 0,0456 \\ -0,2214 \\ 0,0671 \\ 0,0072 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Se ofrece una representación de los valores absolutos de los W_i en azul frente a q en rojo



Eliminando la observación nociva para el ajuste obtendremos mejores valores de precisión. Particularmente, para σ . Podemos aplicar nuevamente el Test de Baarda hasta que la observación asociada al máximo de los $|W_i|$ no sea un error para nuestro nivel de significación α .

Aplicando de nuevo el test, nos queda el máximo $|W_i| = 0,9618 \leq q = 1,9600$, con lo que ya no hay más errores groseros.



Ejercicio 2

Modelo matemático

Primeramente expresamos el sistema de ecuaciones asociado al problema a través de la relación funcional entre las magnitudes y las incógnitas. Se tiene

$$D_{ip} = F_i(X_p, Y_p) = \sqrt{(X_p - X_i)^2 + (Y_p - Y_i)^2}$$

para cada $i \in \{a, b, c\}$ siendo

- D_{ip} la distancia real y desconocida del punto i al punto p
- (X_i, Y_i) las coordenadas reales y conocidas del punto i
- (X_p, Y_p) las coordenadas desconocidas del punto p

Dicho sistema consta de 3 observaciones y 2 incógnitas y tiene una única solución, que no podemos determinar al desconocer los valores reales de la distancia.

Sustituyendo ahora las observaciones de la distancia:

$$d_{ip} = \sqrt{(X_p - X_i)^2 + (Y_p - Y_i)^2} \quad \forall i \in \{a, b, c\}$$

Dicho sistema consta de 3 observaciones y 2 incógnitas, pero se puede comprobar que carece de solución. Queremos pues ofrecer una estimación adecuada de las incógnitas. Como la relación funcional entre las magnitudes y las incógnitas es no lineal, debemos linealizar el sistema. Consideramos entonces:

$$\Delta F = J \cdot \Delta x$$

siendo

- $\Delta F = l - F(x^0) \in \mathbb{R}^3$
- $x^0 \in \mathbb{R}^2$ un vector aproximado de las incógnitas
- $F(x^0) \in \mathbb{R}^3$ la evaluación en cada función no lineal de dicho vector
- $J \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ la matriz de derivadas parciales de las funciones sobre cada variable del vector de incógnitas
- $\Delta x = x - x^0 \in \mathbb{R}^2$ con $x \in \mathbb{R}^2$ el vector de incógnitas, es decir las coordenadas del punto

Es fácil demostrar que este sistema sí que es lineal. También que J es de rango completo y menor al número de observaciones. Por tanto, la mejor estimación de Δx que podemos ofrecer es la mínimos cuadrados ponderados. Para encontrar la estimación asociada de x bastará con deshacer el cambio $x = \Delta x + x^0$

Modelo estocástico

Como $F(x^0)$ es un vector de términos constantes, la varianza de ΔF coincide con la de l . Desconocemos explícitamente esta última, pero podemos expresarla en términos de la varianza de d_{ap} . Fijando $d_{ap} = \sigma_0^2$ varianza de referencia y sabiendo que son independientes, la varianza de las observaciones es

$$\text{var}[l] = \sigma_0^2 \cdot P^{-1} = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ m}^2$$

con lo que la matriz de pesos es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución mínimos cuadrados

Para el cálculo de la solución mmcc empleamos el siguiente código, en el que se incluye la linealización del sistema:

```
1 % obtencion de los datos
2 Xabc = [865.40 2432.55 2865.22];
3 Yabc = [4527.15 2047.25 27.15];
4 l = [6049.00; 4736.83; 5446.49];
5 m = 3; n = 2;
6
7 % puntos iniciales dados
8 x_0 = 6821.325;
9 y_0 = 3727.596;
10
11 % planteamiento del sistema linealizado
12 Fi = @(x, y, i) sqrt((x - Xabc(i)).^2 + (y - Yabc(i)).^2)
13 ;
14 DeltaF = 1 - [Fi(x_0, y_0, 1); Fi(x_0, y_0, 2); Fi(x_0,
15 y_0, 3)]
16 dFidx = @(x, y, i) (2*x-2*Xabc(i))/(2*sqrt((x - Xabc(i))
17 .^2 + (y - Yabc(i)).^2));
18 dFidy = @(x, y, i) (2*y-2*Yabc(i))/(2*sqrt((x - Xabc(i))
19 .^2 + (y - Yabc(i)).^2));
20 J = [dFidx(x_0, y_0, 1) dFidy(x_0, y_0, 1);
21 dFidx(x_0, y_0, 2) dFidy(x_0, y_0, 2);
22 dFidx(x_0, y_0, 3) dFidy(x_0, y_0, 3)]
23 P = diag([1, 3, 2])
24
25 % solucion del sistema linealizado
26 Deltax_hat = inv(J'*P*J)*J'*P*DeltaF
```

```

23
24 % solucion del sistema no lineal deshaciendo el cambio
25 x_hat = Deltax_hat + [x_0; y_0]

```

Se pueden calcular además las observaciones ajustadas, los residuales y la precisión del ajuste mediante el código:

```

1 l_hat = [Fi(x_hat(1), x_hat(2), 1); Fi(x_hat(1), x_hat(2),
      , 2); Fi(x_hat(1), x_hat(2), 3)]
2 v_hat = l_hat - l
3 sigma_square_hat = v_hat' * P * v_hat / (m - n)
4 N = J' * P * J
5 var_x_hat = sigma_square_hat * inv(N)
6 precis_x_hat = sqrt(diag(var_x_hat))

```

Resultando así:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6861,2790 \\ 3727,9404 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0,0993 \\ 0,1872 \end{pmatrix} \text{ m}$$

Por la precisión que se tiene respecto al tamaño de los valores de las incógnitas, el ajuste sobre el sistema linealizado parece ser muy adecuado. Sin embargo, no debemos olvidar que se ha perdido cierta información y creado cierto error al linealizar el sistema.

Podemos emplear la estimación obtenida, \hat{x} , para realizar una nueva linealización alrededor de ella. Esta estimación será más precisa que la anterior porque el vector aproximado considerado es también más preciso. Aplicando el código de nuevo con la salvedad de que redefinimos

```

1 % puntos iniciales obtenidos tras la primera iteracion
2 x_0 = 1.0e+03 * 6.86127900;
3 y_0 = 1.0e+03 * 3.72794041;

```

se obtiene:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6861,2791 \\ 3727,8548 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0,0993 \\ 0,1872 \end{pmatrix} \text{ m}$$

Estamos ante un resultado similar y de similar precisión sobre el sistema linealizado. Se puede aplicar el ajuste sobre la solución obtenida por el anterior de forma recursiva las veces que sea necesario hasta obtener la precisión deseada sobre el problema planteado o hasta que las soluciones se estabilicen suficiente.

Elipse de error

Siendo λ_i los 2 autovalores e $N = J^T P J$ y obteniendo q de manera que $P(F_{n,m-n} \leq q) = 1 - \alpha$, el centro de la elipse es la estimación mínimos cuadrados ponderados y sus radios son

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda_i}{nq\hat{\sigma}^2}}}$$

Tomar $\alpha = 0,1$ resulta conveniente debido a que $m - n = 1$ es un valor muy pequeño, con lo que el intervalo no debería ser demasiado estricto. Su cálculo computacional puede realizarse mediante

```
1 % ellipse de error
2 alpha = 0.1;
3 autovalores = eig(N);
4 q = finv(1 - alpha, n, m - n);
5 betha = autovalores / (n * q * sigma_square_hat);
6 radiox = 1 / sqrt(betha(1)); radioy = 1 / sqrt(betha(2));
```

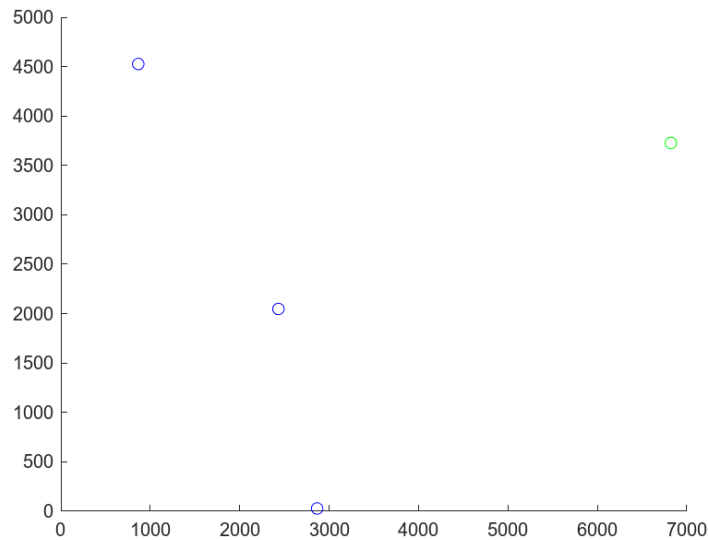
obteniéndose así los radios

```
1 radiox = 0.733480509851949
2 radioy = 2.439035539350785
```

Aplicando el código

```
1 % representacion de los puntos
2 clf; hold on;
3 scatter(Xabc, Yabc, "blue"); scatter(x_0, y_0, "green")
```

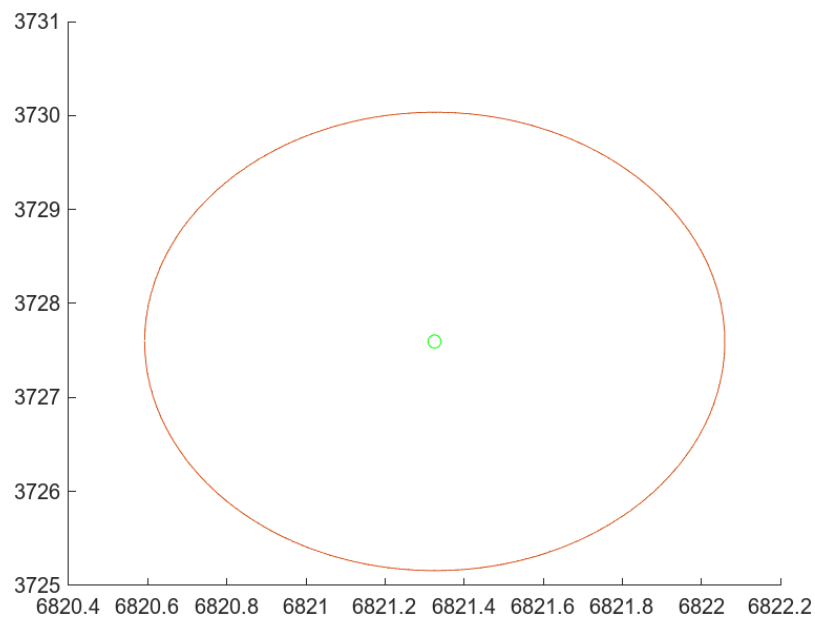
podemos representar los puntos en el espacio. En verde figura el estimado y en azul los lugares de observación.



Procedemos a la representación de la elipse

```
1 % representacion de la elipse
2 hold on;
3 scatter(x_0,y_0, "green")
4 a=radiox; %horizontal radius
5 b=radioy;
6 x0=x_0;
7 y0=y_0;
8 t=-pi:0.01:pi;
9 x=x0+a*cos(t);
10 y=y0+b*sin(t);
11 plot(x,y);
```

la cual al ser tan pequeña no se aprecia en el gráfico de los puntos. Esto indica la bondad del ajuste respecto al tamaño de las observaciones, incluso en la primera iteración y con un α relativamente alto. Se representa ahora en una figura aparte.



Ejercicio 3

Medidas de electricidad

Un primer acercamiento al problema puede ser realizar una regresión lineal de la electricidad sobre alguno de los datos dados. Por ejemplo, uno que a priori parece ser relevante es la población. Consideramos pues la recta

$$electricidad = a \cdot poblacion + b$$

El sistema a plantear para dicha regresión sería $l = Ax$, con $l \in \mathbb{R}^{27}$ las observaciones de las demandas históricas de electricidad, $x \in \mathbb{R}^2$ los parámetros de la recta; y $A \in \mathbb{R}^{27 \times 2}$ la matriz de diseño pertinente. Asumimos además, como modelo estocástico, todas las observaciones independientes y de igual precisión.

$$\begin{pmatrix} 295,75 \\ 292,83 \\ 303,92 \\ 319,78 \\ 321,07 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{TWh} = \begin{pmatrix} 57,7 & 1 \\ 57,9 & 1 \\ 58,0 & 1 \\ 58,2 & 1 \\ 58,3 & 1 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \frac{\text{TWh}}{\text{M de personas}}$$

Si n es el número de incógnitas y m el de ecuaciones, el rango de A es $2 = n < m = 27$. Como además l no pertenece al espacio columna de A , el sistema $l = Ax$ es incompatible.

Bajo estas hipótesis, la mejor estimación posible de las incógnitas es la solución mínimos cuadrados ponderados del sistema $l = Ax$. Como se tienen además observaciones independientes y de igual precisión, cierto resultado teórico garantiza que esta viene dada por $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T l$.

El siguiente código realiza la importación de los datos del problema a partir del fichero dado.

```
1 % obtencion de los datos
2 datos = load("DatosProblema2.txt");
3 year = datos(:,1);
4 pob = datos(:,2);
5 pib = datos(:,3);
6 temp = datos(:,4);
7 sol = datos(:,5);
8 lluv = datos(:,6);
9 aire = datos(:,7);
10 lELEC = datos(:,8);
11 lENER = datos(:,9);
```

A continuación se procede al cálculo de la solución mínimos cuadrados junto con el de las observaciones ajustadas y los residuales. Así mismo, se calculan sus respectivas varianzas. Los procedimientos son análogos a los realizados en el primer ejercicio de esta entrega. Por razones de extensión, los valores obtenidos no han sido incluidos en este documento.

```

1 % calculo
2 A = [pob ones(length(pob),1)];
3 A_plus = inv(A'*A)*A';
4 mn = size(A); m = mn(1); n = mn(2);
5
6 x_hat_ELEC = inv(A'*A)*A'*l_ELEC
7 l_hat_ELEC = A*x_hat_ELEC
8 v_hat_ELEC = l_hat_ELEC - l_ELEC;
9
10 A_plus = inv(A'*A)*A';
11 sigma_square = (v_hat_ELEC'*v_hat_ELEC)/(m-n);
12
13 V_x_hat_ELEC = diag(sigma_square*inv(A'*A));
14 precis_x_hat_ELEC = sqrt(V_x_hat_ELEC)
15
16 V_l_hat_ELEC = diag(sigma_square*A*A_plus);
17 precis_l_hat_ELEC = sqrt(V_l_hat_ELEC)
18
19 V_v_hat_ELEC = diag(sigma_square*(eye(m,m) - A*A_plus));
20 precis_v_hat_ELEC = sqrt(V_v_hat_ELEC)
21
22 norma_residuales = sum(v_hat_ELEC.^2)

```

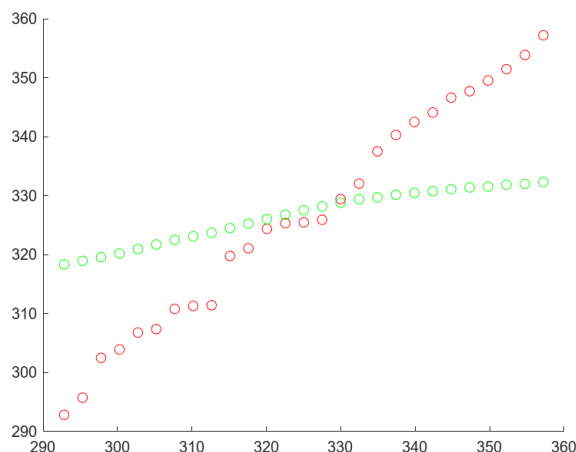
Se adjunta así mismo el código para la representación de las observaciones dadas y las ajustadas.

```

1 % representacion
2 clf
3 hold on
4
5 eje_x = linspace(min(l_ELEC),max(l_ELEC),m);
6
7 scatter(eje_x, sort(l_ELEC), "red");
8 scatter(eje_x, sort(l_hat_ELEC), "green");

```

Se representa en rojo el vector de observaciones dadas ordenadas, frente a las ajustadas ordenadas en verde. Al haber sido ajustadas mediante una regresión lineal, parecen relativamente alineadas.



La norma del vector de residuales nos informa de la bondad del ajuste. Esta vale entorno a 3100, por lo que estamos ante un ajuste bastante limitado.

A continuación, vamos a realizar una regresión que tenga en cuenta todos los factores dados. Esto nos dará información acerca de cuáles son los más relevantes. La ecuación de la misma es

$$electricidad = x_1 \cdot poblacion + x_2 \cdot PIB + \dots + x_6 \cdot aire + b$$

Ahora en nuestro sistema $l = Ax$ las observaciones son las mismas, pero las incógnitas son x_1, \dots, x_6, b y la matriz de diseño tiene por columnas los datos recogidos acerca de *poblacion*, *PIB*, \dots , *aire* además de una columna de unos. El modelo estocástico tampoco varía.

A también es de rango completo y menor que el número de observaciones. l tampoco puede ser generado por las columnas de A . Por tanto, estamos ante un S.I. y la mejor estimación es igualmente la mmcc.

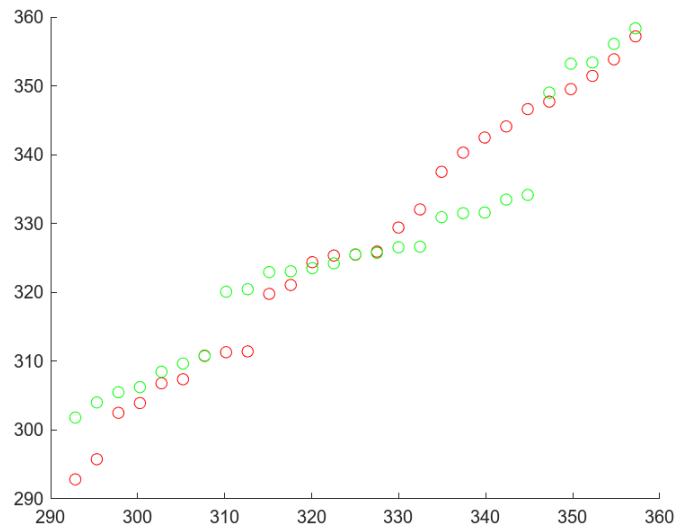
El código anterior puede emplearse íntegramente, a salvedad de la definición de A como

```
1 A = [pob pib temp sol lluv aire ones(length(pob),1)];
```

La solución obtenida es:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8,7986 \\ 38,5030 \\ 26,3042 \\ -0,0615 \\ 0,0228 \\ 1,1705 \\ 536,6330 \end{pmatrix} \pm 100 \cdot \begin{pmatrix} 0,014122 \\ 0,071747 \\ 0,132548 \\ 0,000402 \\ 0,000306 \\ 0,005190 \\ 1,770068 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{\text{TWh}}{\text{M de personas}} \\ \frac{\text{TWh}}{\text{B\$}} \\ \frac{\text{TWh}}{\text{°C}} \\ \frac{\text{TWh}}{\text{h de sol}} \\ \frac{\text{TWh}}{\text{mm}} \\ \frac{\text{TWh}}{\text{días de aire}} \\ \text{TWh} \end{matrix}$$

Esto evidencia la gran influencia de la población, el PIB y la temperatura en el consumo de electricidad. Así mismo, queda patente que los demás factores ambientales no influyen demasiado.



Hemos obtenido una norma de los residuales de entorno a 2360, con lo que este es un mejor ajuste. Tiene sentido que lo sea porque tiene en cuenta todos los valores.

Todavía podemos proponer más ajustes a fin de encontrar alguno mejor. De ahora en adelante para todos los modelos propuestos el sistema asociado se construye de forma análoga, resulta incompatible y el modelo estocástico es el mismo. Ofrecemos su correspondiente solución mínimos cuadrados y ajustamos

las observaciones en base a ella.

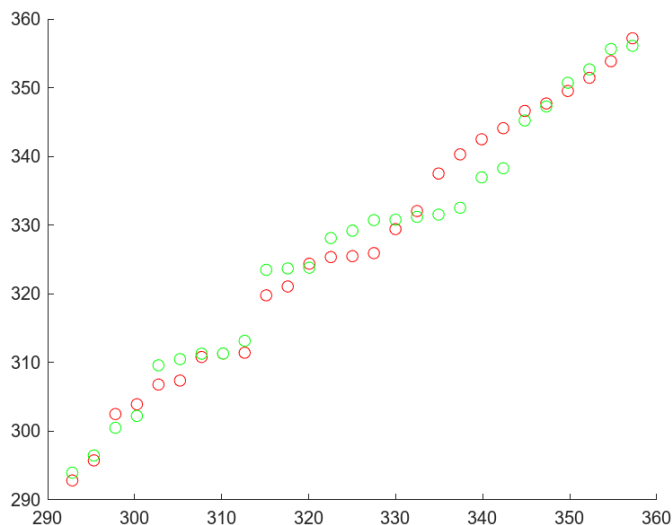
Ya que los factores ambientales no tienen demasiada influencia, podríamos descartarlos y considerar la regresión

$$electricidad = x_1 \cdot poblacion + x_2 \cdot PIB + b$$

Sin embargo, la norma de los residuales sigue siendo de la misma magnitud.

Un ajuste que parece dar mejores resultados es la siguiente regresión, que tiene en cuenta los tres factores más determinantes, sus cuadrados y sus productos dos a dos:

$$elec = x_1 \cdot pob + x_2 \cdot pib + x_3 \cdot temp + x_4 \cdot pob^2 + x_5 \cdot pib^2 + x_6 \cdot temp^2 + x_7 \cdot pob \cdot pib + x_8 \cdot pob \cdot temp + x_9 \cdot pib \cdot temp + b$$



En este caso la norma de los residuales es de solamente 731. Hemos conseguido una mejoría considerable.

Se puede proponer cualquier ajuste y estudiar su bondad a través de los residuales. El mejor que he encontrado es el descrito por todas las combinaciones de la forma

$$pob^p \cdot pib^q$$

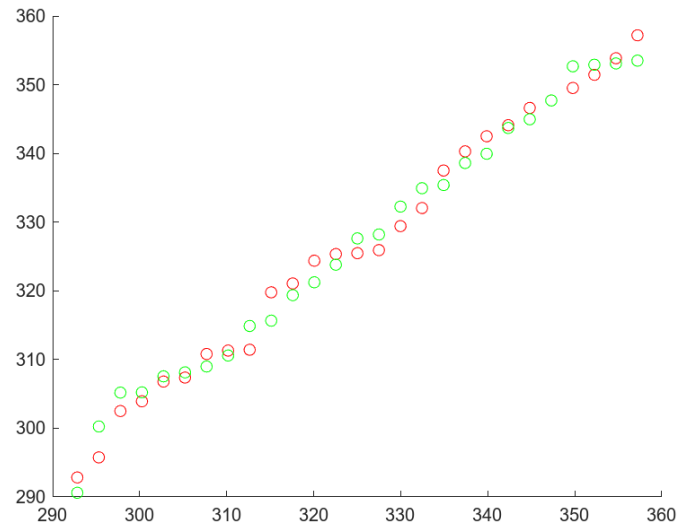
con $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $p + q \leq 3$; como columnas de A .

Explícitamente:

```

1 A = [ pob pob pob.*pob pob.*pib pib.*pib pob.*pob.*pob
      pob.*pob.*pib pob.*pib.*pib pib.*pib.*pib ones(
      length(pob),1) ]

```



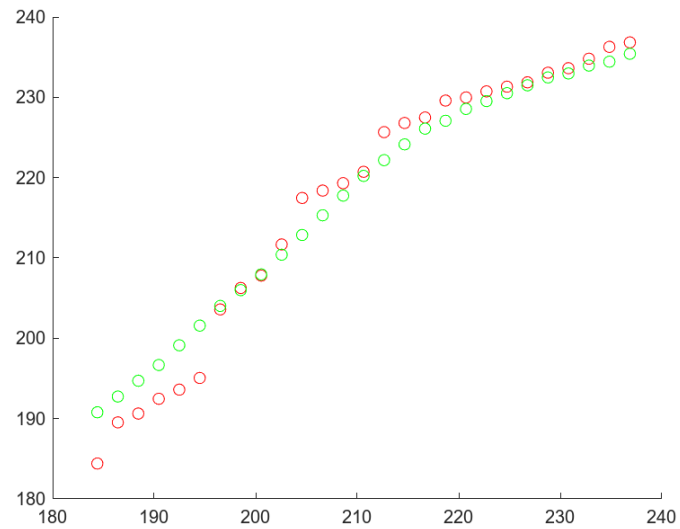
La norma para este ajuste es tan solo 418 y la figura parece indicar que el ajuste es muy preciso.

La mejor propuesta que puedo ofrecer por el momento para estimar la demanda eléctrica en los años futuros es sustituir en esta última regresión los datos de los que se disponga acerca de población y PIB.

Medidas de energía

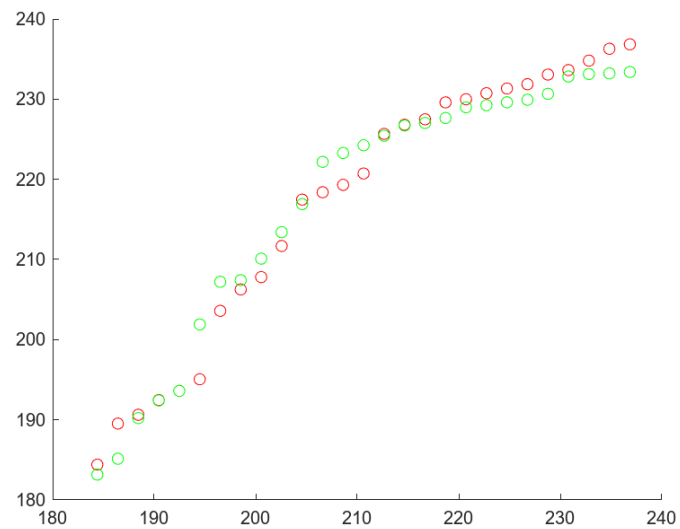
Ahora vamos a buscar el modelo que mejor pronostique el consumo de energía.

Realizamos la misma regresión lineal sobre la población de la primera parte, esta vez con los datos de energía.



La norma de los residuales es de entorno a 1800, lo cual nos indica que la influencia de la población en el consumo de energía es mayor que en la de electricidad.

Procedemos a la regresión con todos los factores conocidos.



La norma de los residuales es 560. Este ajuste parece ofrecer un resultado mucho mejor para estudiar el consumo de energía que de electricidad.

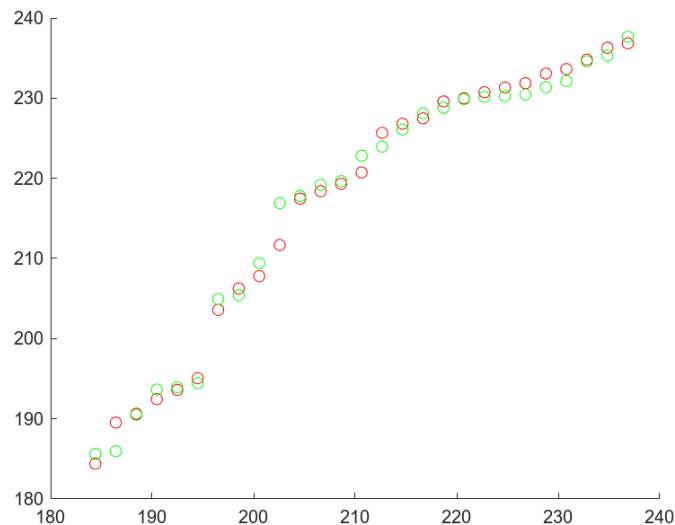
La solución mmcc obtenida es, en las unidades pertinentes:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7,9957 \\ 16,9304 \\ 12,1773 \\ -0,0376 \\ 0,0117 \\ 0,6405 \\ 563,6002 \end{pmatrix}$$

Aplicando los dos últimos ajustes empleados para el consumo de electricidad se obtienen normas de los residuales de 210 y 286 respectivamente.

El mejor modelo que he encontrado es el ajuste que tiene en cuenta todos los factores linealmente, además de los cuadrados y productos dos a dos de población, PIB y temperatura. La norma de los residuales es de tan solo 196.

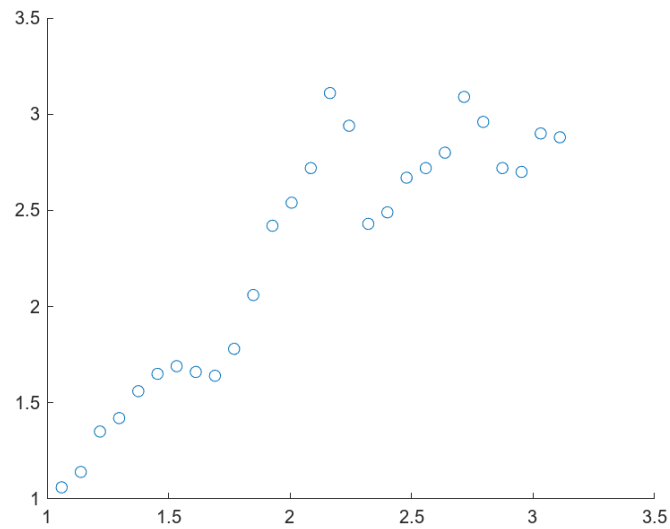
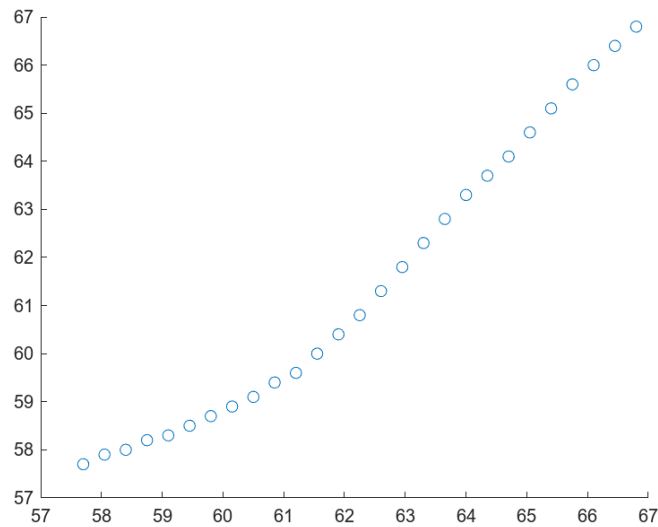
```
1 A = [pob pib temp sol lluv aire pob.*pob pib.*pib temp.*
      temp pob.*pib pob.*temp pib.*temp pib.*pob.*temp ones(
      length(pob),1)]
```

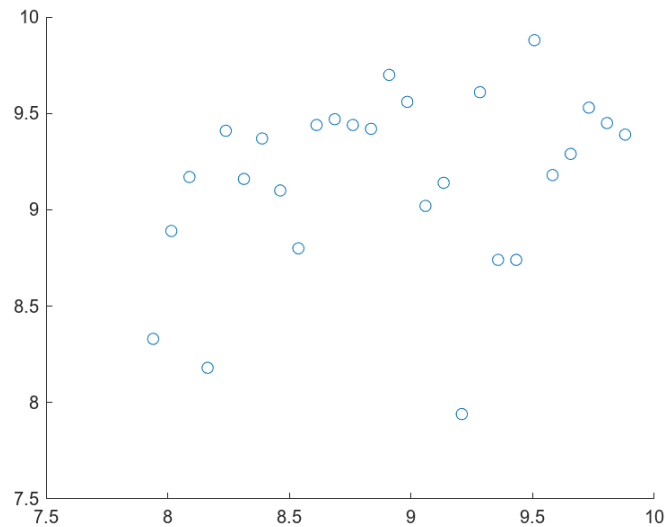


La propuesta para la estimación de la energía en años futuros conociendo los datos de población, PIB y temperatura es análoga a la propuesta en el apartado anterior, utilizando esta última regresión.

Estimación explícita

Una propuesta para deducir el consumo de electricidad y energía si solo se tiene el dato del año es realizar una regresión de ciertos factores sobre el año. Los que habíamos determinado que eran más relevantes eran la población, el PIB y la temperatura. Se representan los datos históricos de estas variables contando desde el primer año desde el que se tiene registro.





El crecimiento poblacional, aunque parece más rápido, puede aproximarse relativamente bien a una recta. El PIB tiene mayor variación por el funcionamiento de la economía pero luce también lineal. La temperatura aunque (por desgracia) presenta una distribución creciente, sigue siendo muy aleatoria e imprecisa de aproximar. Debido a esto, para nuestro método, emplearemos el ajuste

```
1 A = [pob pib pob.*pob pob.*pib pib.*pib pob.*pob.*pob
      pob.*pob.*pib pob.*pib.*pib pib.*pib.*pib ones(
      length(pob),1)]
```

que daba buenos resultados tanto para electricidad como para energía; estimando a su vez la población y el PIB mediante la sustitución en las regresiones

$$población = a \cdot año + b$$

$$PIB = a \cdot año + b$$

realizables mediante el código

```
1 % regresion sobre year para pob
2 A = [year ones(length(pob),1)]
3 A_plus = inv(A'*A)*A';
4 mn = size(A); m = mn(1); n = mn(2);
5 x_hat_pob = inv(A'*A)*A'*pob
6 l_hat_pob = A*x_hat_pob
7
8 % regresion sobre year para pib
9 A = [year ones(length(pib),1)]
10 A_plus = inv(A'*A)*A';
11 mn = size(A); m = mn(1); n = mn(2);
12 x_hat_pib = inv(A'*A)*A'*pib
13 l_hat_pib = A*x_hat_pib
```

El método propuesto es, en resumen, estimar la población y el PIB mediante una regresión lineal sobre el año y posteriormente introducir esos datos en las regresiones no lineales de la electricidad y la energía propuestas en el apartado anterior. Es importante tener en cuenta que este método arrastra errores de ambos ajustes.

También se podría proponer el ajuste de la población sobre el año como una regresión cuadrática. Otra opción podría ser estimar primero la población desde el año y posteriormente el PIB teniendo en cuenta el año y la población; para luego emplear esos datos en la regresión no lineal.

Se puede emplear también el dato del año como número para el ajuste si conocen los demás parámetros. Aunque se obtienen buenos resultados al probarlo, este finalmente no se ha tenido en cuenta porque al ser un valor en principio tan poco relacionado con el consumo eléctrico podría incurrirse en un sobreajuste.

Aunque el desarrollo del problema concluye aquí, se pueden probar muchas más opciones. De entre todas las propuestas razonables que pudieran suponer un perfeccionamiento del ajuste sin incurrir en sobreajuste, escogeríamos la opción que indujera una mejor precisión estimada y la implementaríamos en el método.