Descripcción de los modelos: Hipótesis, formulación y resultados

Antonio Sevilla

Febrero 2023

Introducción

Este documento, aunque presentado en formato *report*, constituye un borrador del capítulo del TFG dedicado a los modelos empleados. Cuenta con su propio índice de modelos, el cual será embebido en el índice del documento final del TFG.

Índice de modelos

1 Modelos de rutas **4**
1.1 Modelo con periodos o problema de rutas (M-R) 4
1.2 Modelo con periodos, vehículos y coste fijo por vehículo (M-Rv) 7
1.3 Implementación de la fiabilidad (M-Rvf) 11
1.4 Implementación del coste variable (M-Rvfc) 12

2 Modelos de flujo **14**
2.1 Modelo sin periodos o problema de flujo (M-F) 14
2.2 Modelo sin periodos discretizado, con vehículos y coste fijo por vehículo (M-Fv) 17
2.3 Implementación de la fiabilidad (M-Fvf) 21
2.4 Implementación del coste variable (M-Fvfc) 22

Hipótesis generales

Todos los modelos estudian la recuperación de elementos dañados de la red de distribución. Se pueden aplicar en un momento avanzado de la catástrofe, tras la evacuación y el rescate; en la fase de recuperación y distribución. Las decisiones al respecto de ambas labores se toman de forma coordinada.

Se conoce la existencia de todas las rutas y si es posible utilizar las mismas antes de realizar las labores de reconstrucción. Toda reconstrucción es instantánea y tiene coste nulo. Sin embargo, se puede reconstruir una cantidad cantidad limitada de rutas. Se asume que la distribución se inicia una vez se ha realizado la reconstrucción total de las rutas. Las rutas habilitadas lo están en los dos sentidos. Pasa lo mismo para las inhabilitadas.

Se estudia la distribución de un único recurso. La demanda del mismo en cada asentamiento es conocida y constante.

1

Modelos de rutas

1.1 Modelo con periodos o problema de rutas (M-R)

Hipótesis

La ayuda en forma de mercancía viaja en camiones. Cada camión transporta una unidad de ayuda. Su carga es indivisible e inpermutable en todo momento.

Todos los periodos son de la misma duración y todas las rutas se recorren en exactamente un periodo.

El asentamiento inicial tiene almacenada la totalidad de la flotas. Se puede enviar a la misión un número acotado de camiones. No se considera coste alguno, ni de mercancía ni de transporte.

Por una ruta en cierto periodo puede pasar cualquier cantidad de camiones. Estos pueden parar en cualquier asentamiento cada periodo o seguir su recorrido a otro asentamiento. Tampoco se incluye limitación de capacidad de camiones que pueden aprar en los asentamientos.

Toda la mercancía se reparte al final del útimo periodo. Cada camión reparte su mercancía en el asentamiento en el que está al final del último periodo.

Formulación

Conjuntos

Variable	**Subíndices**	**Descripción**
j, i	*	Nodos. Representan los asentamientos.
t	*	Periodos. Se asumen de misma duración ademas de que todos los arcos se pueden recorrer en uno de estos periodos

Parámetros

Variable	**Subíndices**	**Descripción**
dem	j	Demanda por cada asentamiento de un único recurso en cierta unidad discreta
max_camiones		Máximo número de camiones que podemos mandar en total a la misión. Se asume que cada camión transporta exactamente una unidad del recurso a repartir
max_puentes		Máximo número de puentes que podemos reconstruir previo paso a los camiones (un puente por cada sentido. consideramos un grafo orientado)
E	i, j	Existe la ruta de i a j
U	i, j	Al inicio es utilizable la ruta de i a j

Variables

Variable	**Subíndices**	**Descripción**
X	i, j, t	Camiones que van de i a j en el periodo t
Y	j, t	Camiones que hay en j en el periodo t. Se asume que pueden seguir su ruta, quedarse en j para proseguir su ruta en otro periodo o permanecer en j hasta el final del último periodo
Z	j	Camiones totales emplazados en j al final del último periodo. Se asume que en ese momento hacen el reparto a j
auxZ	j	Variable binaria que representa si se reparte al menos una unidad de recurso a j
H	i, j	Variable binaria que determina si habilitamos el puente de i a j

Restricciones

definir_Y$_{j,t}$

Restricción de almacenamiento. En cierto nodo permanece lo almacenado en el anterior periodo más lo que entra a él en el presente menos lo que sale de él. No se incluye otra limitación de capacidad pues los nodos son asentamientos. El almacenaje debe ser discreto, no se bajan suministros de los camiones.

$$\mathrm{Y}_{j,t} = \mathrm{Y}_{j,t-1} + \sum_i \mathrm{X}_{i,j,t} - \sum_i \mathrm{X}_{j,i,t} \qquad \forall j, t \mid (\mathrm{ord(t)} > 1)$$

---

definir_Z$_j$

Determina lo repartido como lo ubicado en cierto nodo en el último periodo.

$$\mathrm{Z}_j = \mathrm{Y}_{j,3} \qquad \forall j$$

---

definir_auxZ$_j$

$\text{auxZ}_j \leq \text{Z}_j \qquad \forall j$

---

lim_salida$_{j,t}$

Limita las unidades que pueden salir de un nodo a las almacenadas en el mismo.

$$\sum_i \text{X}_{j,i,t} \leq \text{Y}_{j,t-1} \qquad \forall j, t$$

---

flujo_ini$_j$

No hay almacenado nada en ningún nodo no inicial.

$\text{Y}_{j,\mathsf{0}} = 0 \qquad \forall j \mid (\text{ord(j)} > 1)$

---

flujo_ini_0

En el nodo inicial esta almacenada la totalidad de los camiones.

$\text{Y}_{\mathsf{0},\mathsf{0}} = \text{max\_camiones}$

---

existencia_ruta$_{i,j,t}$

$\text{X}_{i,j,t} \leq M \cdot \text{E}_{i,j} \qquad \forall i, j, t$

---

usabilidad_ruta$_{i,j,t}$

$\text{X}_{i,j,t} \leq M \cdot (\text{U}_{i,j} + \text{H}_{i,j}) \qquad \forall i, j, t$

---

orientacion$_{i,j}$

Si se habilita un sentido se ha de habilitar el opuesto.

$\text{H}_{i,j} = \text{H}_{j,i} \qquad \forall i, j$

---

lim_puentes

Límite de rutas que podemos reconstruir.

$$\sum_i (\sum_j \text{H}_{i,j}) \leq \text{max\_puentes}$$

---

lim_demanda$_j$

No se puede superar la demanda.

$\mathrm{Z}_j \leq \mathrm{dem}_j \qquad \forall j$

---

f_ayuda

Función objetivo 1. Cantidad total del recurso repartida, en cierta unidad.

$$\mathrm{Ayuda} = \sum_j (\mathrm{Z}_j - \mathrm{dem}_j)$$

---

f_equidad

Función objetivo 2. Criterio de equidad. Número de nodos a los que se les reparte al menos una unidad del recurso.

$$\mathrm{Eq} = \sum_j \mathrm{auxZ}_j$$

$\mathrm{Y}_{j,t} \in \mathbb{Z}_+ \forall j, t$
$\mathrm{X}_{i,j,t} \in \mathbb{Z}_+ \forall i, j, t$
$\mathrm{Z}_j \in \mathbb{Z}_+ \forall j$
$\mathrm{auxZ}_j \in \{0, 1\} \ \forall j$
$\mathrm{H}_{i,j} \in \{0, 1\} \ \forall i, j$

Resultados

Tener en cuenta periodos implica mayor coste computacional. Al incluir más restricciones crece mucho más rápido la dimensión del problema y el tiempo de resolución. Como ventaja, permitiría implementar el factor seguridad como un problema de rutas así como hacer depender otros factores del tiempo o incluir eventos.

1.2 Modelo con periodos, vehículos y coste fijo por vehículo (M-Rv)

Hipótesis

Se basa en el modelo 1.1, pero se le han implementado vehículos.

Cada tipo de vehículo tiene asociado una capacidad discreta en toneladas (la cantidad de recurso del modelo anterior) y un coste fijo por unidad enviada a la misión.
Se obvian los costes variables. El coste total en el que se puede incurrir mandando vehículos está planteado como una restricción de presupuesto.

Formulación

Conjuntos

Variable	Subíndices	Descripción
j, i	*	Nodos. Representan los asentamientos.
t	*	Periodos. Se asumen de misma duracion ademas de que todos los arcos se pueden recorrer en uno de estos periodos
v	*	Tipos de vehiculo

Parámetros

Variable	Subíndices	Descripción
dem	j	Demanda por cada asentamiento de un unico recurso en toneladas
max_coste		Maximo presupuesto que se puede invertir
max_puentes		Maximo numero de puentes que podemos reconstruir previo paso (un puente por cada sentido consideramos un grafo orientado)
capacidad_vehiculo	v	Capacidad de hacer partir 1 vehiculo de tipo v
coste_vehiculo	v	Coste total y fijo de hacer partir 1 vehiculo de tipo v
E	i, j	Existe la ruta de i a j
U	i, j	Al inicio es utilizable la ruta de i a j

Variables

Variable	Subíndices	Descripción
X	i, j, t, v	Vehiculos de tipo v que van de i a j en el periodo t
Y	j, t, v	Vehiculos de tipo v que hay en j en el periodo t. Pueden seguir su ruta o bien quedarse en j para proseguir su ruta en otro periodo o bien permanecer en j hasta el final del ultimo periodo
Z	j, v	Vehiculos de tipo v totales emplazados en j al final del ultimo periodo. se asume que en ese momento hacen el reparto a j
Z_	j	Ayuda total repartida a j
auxZ	j	Variable binaria que representa si se reparte al menos un vehiculo de recurso a j
H	i, j	variable binaria que determina si habilitamos el puente de i a j
Ayuda		Total demanda satisfecha
Eq		Criterio de equidad. Numero de nodos a los que se reparte al menos un vehiculo

Ecuaciones

Aunque tengan un significado muy similar, bastantes ecuaciones del modelo 1.1 son reformuladas para tener en cuenta cada tipo de vehículo.

definir_Y$_{j,t,v}$

$$\mathrm{Y}_{j,t,v} = \mathrm{Y}_{j,t-1,v} + \sum_i \mathrm{X}_{i,j,t,v} - \sum_i \mathrm{X}_{j,i,t,v} \qquad \forall j,t,v \mid (\mathrm{ord(t)} > 1)$$

---

definir_Z$_{j,v}$

$$\mathrm{Z}_{j,v} = \mathrm{Y}_{j,\mathsf{3},v} \qquad \forall j,v$$

---

definir_Z_$_{j}$

$$\mathrm{Z\_}_{j} = \sum_v (\mathrm{Z}_{j,v} \cdot \mathrm{capacidad\_vehiculo}_v) \qquad \forall j$$

---

definir_auxZ$_{j}$

$$\mathrm{auxZ}_j \leq \mathrm{Z\_}_j \qquad \forall j$$

---

lim_salida$_{j,t,v}$

$$\sum_i \mathrm{X}_{j,i,t,v} \leq \mathrm{Y}_{j,t-1,v} \qquad \forall j,t,v$$

---

flujo_ini$_{j,v}$

$$\mathrm{Y}_{j,\mathsf{0},v} = 0 \qquad \forall j,v \mid (\mathrm{ord(j)} > 1)$$

---

flujo_ini_0

$$\sum_v (\mathrm{Y}_{\mathsf{0},\mathsf{0},v} \cdot \mathrm{coste\_vehiculo}_v) \leq \mathrm{max\_coste}$$

---

existencia_ruta$_{i,j,t,v}$

$$\mathrm{X}_{i,j,t,v} \leq M \cdot \mathrm{E}_{i,j} \qquad \forall i,j,t,v$$

---

usabilidad_ruta$_{i,j,t,v}$

$$\mathrm{X}_{i,j,t,v} \leq M \cdot (\mathrm{U}_{i,j} + \mathrm{H}_{i,j}) \qquad \forall i,j,t,v$$

---

orientacion$_{i,j}$

$$\mathrm{H}_{i,j} = \mathrm{H}_{j,i} \qquad \forall i,j$$

---

lim_puentes

$$\sum_i (\sum_j \mathrm{H}_{i,j}) \leq \mathrm{max\_puentes}$$

---

lim_demanda$_j$

$$\mathrm{Z}_{\text{-}j} \leq \mathrm{dem}_j \qquad \forall j$$

---

f_ayuda

$$\mathrm{Ayuda} = \sum_j (\mathrm{Z}_{\text{-}j} - \mathrm{dem}_j)$$

---

f_equidad

$$\mathrm{Eq} = \sum_j \mathrm{auxZ}_j$$

$\mathrm{Y}_{j,t,v} \in \mathbb{Z}_+ \forall j, t, v$
$\mathrm{X}_{i,j,t,v} \in \mathbb{Z}_+ \forall i, j, t, v$
$\mathrm{Z}_{j,v} \in \mathbb{Z}_+ \forall j, v$
$\mathrm{auxZ}_j \in \{0, 1\} \ \forall j$
$\mathrm{H}_{i,j} \in \{0, 1\} \ \forall i, j$

Resultados

Obviar los costes variables resulta en que el problema tenga muchas soluciones óptimas, pues no se tiene en cuenta la suboptimalidad real de realizar trayectos innecesarios. Esto supone resoluciones muy lentas al aplicar el algoritmo Branch-and-Bound.

Esta implementación supone multiplicar muchas de las restricciones, pues se estudia cuántos vehículos de cada tipo pasan por un arco o se almacenan en un nodo. Incluir periodos ya implicaba cierto coste en este sentido, si además se consideran vehículos este crece multiplicativamente.

Aplicando el modelo a un ejemplo con 6 nodos, 6 arcos y 2 tipos de vehículos, la resolución con MIP en GAMS es rápida pero la cantidad de restricciones empleadas está cerca del máximo que permite la licencia de estudiante (unas 1600 filas de las 2000 permitidas). Si en el mismo ejemplo se consideran 3 tipo de vehículos, ya excede el límite.

1.3 Implementación de la fiabilidad (M-Rvf)

Hipótesis

Cada arco tiene asignada una medida que determina la probabilidad de que la ruta no sea segura.

Se añade la restricción de que la totalidad de los convoys deben poder cruzar la totalidad de los arcos con como mínimo cierta probabilidad prefijada.

Una ruta inhabilitada en el sentido de los anteriores modelos tiene (sea rehabilitada o no) medida de fiabilidad 1.

Formulación

Partimos del modelo 1.2, al que le añadimos los siguientes elementos

Parámetros

Variable	Subíndices	Descripción
P_total		Probabilidad aceptable de que todos los convoys puedan pasar por todas las rutas elegidas
P	i, j	Probabilidad de que la ruta de i a j sea usable

Variables

Variable	Subíndices	Descripción
Used	i, j	Determina si existe flujo no nulo en el arco de i a j

Ecuaciones

arco_usado$_{i,j}$

Determina sin pasa algún vehículo por cierto nodo.

$$M \cdot \mathrm{Used}_{i,j} \geq \sum_t (\sum_v \mathrm{X}_{i,j,t,v}) \qquad \forall i, j$$

---

arco_usado_orientacion$_{i,j}$

Si se usa el arco de i a j, se usa el de j a i.

$$\mathrm{Used}_{i,j} = \mathrm{Used}_{j,i} \qquad \forall i, j$$

---

fiabilidad

Fijamos el valor aceptable de probabilidad de que todos los convoys puedan pasar por todas las rutas elegidas en la solución óptima. La fiabilidad del conjunto final de rutas se calcula multiplicado la fiabilidad de todas las rutas que lo componen por el Teorema de la Probabilidad total. Para transformar esta relación multiplicativa en una lineal empleamos el logaritmo de las probabilidades. Este es calculado previa realización del algoritmo de optimización. Se emplea el logaritmo en base 2 para obtener una eficiencia numérica ligeramente superior.

$$\sum_i (\sum_j (\mathrm{Used}_{i,j} \cdot \mathrm{log2}(\mathrm{P}_{i,j}))) \geq \mathrm{log2}(\mathrm{P\_total})$$

$$\mathrm{Used}_{i,j} \in \{0,1\} \; \forall i,j$$

1.4 Implementación del coste variable (M-Rvfc)

Hipótesis

Se incluye sobre el modelo anterior el coste variable de transporte dependiente de la ruta a seguir. Cada ruta tiene una distancia y para calcular el coste total esta es multiplicada por un factor en unidades gasto/distancia.

Formulación

Parámetros

Se añaden los siguientes parámetros al modelo 1.3

Name	Domains	Description
max_coste		Máximo presupuesto que se puede invertir
Dist	i, j	Matriz de distancias de las rutas de i a j

Ecuaciones

Se cambia la exuación de flujo inicial de 1.3 por la siguiente

$$\sum_v (\mathrm{Y}_{\mathtt{0,0},v} \cdot \mathrm{coste\_vehiculo}_v) + \sum_i (\sum_j (\sum_t (\sum_v (\mathrm{X}_{i,j,t,v} \cdot \mathrm{Dist}_{i,j} \cdot \mathrm{coste\_variable})))) \leq \mathrm{max\_coste}$$

Resultados

Incluir los costes variables en el modelo elimina la existencia de soluciones duplicadas y aumenta la capacidad de resolución del problema.

El servidor NEOS tarda unos minutos en resolver ejemplos de 50 nodos, 100 arcos y 3 tipos de vehículo si se recorta a 20 los periodos posibles. Esta es una cota bastante razonable que disminuye considerablemente el tamaño del problema sin eliminar posibles óptimos.

```
BLOCKS OF EQUATIONS            16     SINGLE EQUATIONS      772,652
BLOCKS OF VARIABLES             9     SINGLE VARIABLES      387,752
NON ZERO ELEMENTS       2,671,952     DISCRETE VARIABLES    387,700
6000 iterations 30 nodes
RESOURCE USAGE, LIMIT        9.454   10000000000.000
ITERATION COUNT, LIMIT        5229        2147483647
```

Para un ejemplo de 60 nodos tarda horas.

```
441131 iterations , 27181 nodes
RESOURCE USAGE, LIMIT        791.160  10000000000.000
ITERATION COUNT, LIMIT        441131       2147483647
```

Para un ejemplo de 100 nodos excede el tiempo de ejecución que permite NEOS.

Cuanto más denso es el grafo planteado más óptimos duplicados hay y más tarda en resolverse. De igual manera sucede si se consideran demasiados periodos de tiempo.

2

Modelos de flujo

2.1 Modelo sin periodos o problema de flujo (M-F)

Hipótesis

Los modelos de flujo no tienen en cuenta los periodos de tiempo como índices.

Los asentamientos son catalogados en tres tipos según si emiten, reciben suministros o son transitorios. Suponemos que los n primeros son iniciales y los m últimos finales.

Solamente se consideran la mitad de los arcos dirigidos, es decir las rutas en un solo sentido.

El flujo se consdiera contínuo.

Se ha obviado la limitación de no superar la demanda para conseguir mayor factibilidad.

Formulación

Conjuntos

Variable	Subíndices	Descripción
j, i	*	Nodos. Representan los asentamientos. En este modelo hemos de distinguir entre transitorios, destino y origen

Parámetros

Variable	Subíndices	Descripción
dem	j	Demanda por cada asentamiento de un único recurso en cierta unidad contínua
max_ayuda		Máxima cantidad de ayuda que podemos mandar en total a la misión. Se asume que se puede transportar cualquier cantidad sin coste temporal o económico alguno
max_puentes		Máximo número de puentes que podemos reconstruir previo paso al transporte de la ayuda

Variable	Subíndices	Descripción
E	i, j	Existe la ruta de i a j
U	i, j	Al inicio es utilizable la ruta de i a j

Variables

Variable	Subíndices	Descripción
X	i, j	Flujo de i a j. Es contínuo. Puede ser negativo si el de j a a i es positivo
Y	j	Flujo que se queda en j
auxZ	j	Variable binaria que determina si llega alguna ayuda a j
H	i, j	Variable binaria que determina si habilitamos el puente (i,j)
Insatisaux		Variable auxiliar para definir la demanda insatisfecha

Ecuaciones

definir_Y$_j$

Ecuación de flujo.

$$\mathrm{Y}_j = \sum_i \mathrm{X}_{i,j} - \sum_i \mathrm{X}_{j,i} \qquad \forall j$$

---

solo_arcos_buenos$_{i,j}$

Consideramos de flujo nulo la mitad de los nodos. Así consideramos un grafo no orientado.

$$\mathrm{X}_{j,i} = 0 \qquad \forall i, j \mid (\mathrm{ord(i)} \leq \mathrm{ord(j)})$$

---

lim_provisiones

Límite en la cantidad de ayuda que podemos enviar.

$$\mathrm{Y}_{\mathsf{0}} \geq -\mathrm{max\_ayuda}$$

---

flujo_nulo$_j$

En los nodos transitorios el flujo es nulo.

$$\mathrm{Y}_j = 0 \qquad \forall j \mid ((\mathrm{ord(j)} > 1) \land (\mathrm{ord(j)} \leq n))$$

---

existencia_ruta$_{i,j}$

$$\mathrm{X}_{i,j} \leq M \cdot \mathrm{E}_{i,j} \qquad \forall i, j$$

---

usabilidad_ruta$_{i,j}$

$$\mathrm{X}_{i,j} \leq M \cdot (\mathrm{U}_{i,j} + \mathrm{H}_{i,j}) \qquad \forall i, j$$

---

existencia_ruta_min$_{i,j}$

En este modelo son necesarias 2 restricciones para que el flujo sea nulo y no negativo en los arcos no existentes.

$\mathrm{X}_{i,j} \geq -(M \cdot \mathrm{E}_{i,j})$ $\forall i, j$

---

usabilidad_ruta_min$_{i,j}$

Ídem con los no usables.

$\mathrm{X}_{i,j} \geq -(M \cdot (\mathrm{U}_{i,j} + \mathrm{H}_{i,j}))$ $\forall i, j$

---

lim_puentes

$\sum_i (\sum_j \mathrm{H}_{i,j}) \leq \text{max\_puentes}$

---

def_insatisaux$_j$

Definimos la demanda insatisfecha.

$\text{Insatisaux} \geq \text{dem}_j - \mathrm{Y}_j$ $\forall j \mid (\text{ord(j)} \geq m)$

---

def_auxZ1$_j$

Definimos los nodos a los que llega alguna ayuda.

$\text{auxZ}_j \leq M \cdot \mathrm{Y}_j$ $\forall j \mid (\text{ord(j)} \geq m)$

---

def_auxZ2$_j$

A los nodos transitorios no puede llegar ninguna ayuda por lo que no se tienen en cuenta para la función objetivo.

$\text{auxZ}_j = 0$ $\forall j \mid (\text{ord(j)} \leq n)$

---

f_eq

Función objetivo 2. Criterio de equidad. Número de nodos a los que se les reparte alguna cantidad de ayuda.

$\text{Eq} = \sum_j \text{auxZ}_j$

---

f_insatis

Función objetivo 1. Demanda insatisfecha total.

$\text{Insatis} = \sum_j \text{Insatisaux}$

$\text{H}_{i,j} \in \{0,1\}\ \forall i,j$
$\text{Insatisaux} \geq 0\ \forall$
$\text{auxZ}_j \in \{0,1\}\ \forall j$

Resultados

No tener en cuenta periodos ni la mitad de los nodos permite manejar ejemplos más grandes. Sacrificamos determinar en qué instante sucede qué evento. Sin embargo, criterios como el tiempo que tarda en llegar la ayuda se pueden implementar de otras formas más eficientes que incluir convertir muchas restricciones en familias dependientes del periodo. Esta propuesta es más parecida al modelo RecHADS.

2.2 Modelo sin periodos discretizado, con vehículos y coste fijo por vehículo (M-Fv)

Hipótesis

Los vehículos y el coste de los mismos incluyen, similarmente al modelo 1.2, como restricciones pero esta vez sobre el modelo de flujo 2.1.

Para la implementación de vehículos es necesario discretizar el modelo 2.1. Como GAMS no permite utilizar variables enteras sino naturales se incluyen algunas variables de holgura.

Formulación

Conjuntos

Variable	Subíndices	Descripción
j, i	*	Nodos. representan los asentamientos. En este modelo hemos de distinguir entre transitorios-destino-origen
v	*	Tipos de vehículo

Parámetros

Variable	Subíndices	Descripción
dem	j	Demanda por cada asentamiento de un único recurso en cierta unidad ahora discreta
max_coste		Máximo presupuesto que se puede invertir
max_puentes		Máximo numero de puentes que podemos reconstruir previo paso a los camiones
capacidad_vehiculo	v	Capacidad de hacer partir 1 vehiculo de tipo v
coste_vehiculo	v	Coste total y fijo de hacer partir 1 vehiculo de tipo v
E	i, j	Existe la ruta de i a j
U	i, j	Al inicio es utilizable la ruta de i a j

Variables

Variable	Subíndices	Descripción
Xmas	i, j, v	El flujo es discreto. esta variable sirve para denotar el flujo positivo
Xmenos	i, j, v	Esta variable sirve para denotar el flujo negativo
Y	j, v	Flujo de vehiculos que se queda en j
Z_	j	Unidades que se quedan en j
auxZ	j	Variable binaria que determina si llega alguna ayuda a j
H	i, j	Variable binaria que determina si habilitamos el puente de i a j
Insatis		
Insatisaux		
Eq		

Ecuaciones

definir_Y$_{j,v}$

Ecuación de flujo.

$$\mathrm{Y}_{j,v} = \sum_i (\mathrm{Xmas}_{i,j,v} - \mathrm{Xmenos}_{i,j,v}) - \sum_i (\mathrm{Xmas}_{j,i,v} - \mathrm{Xmenos}_{j,i,v}) \qquad \forall j, v$$

---

solo_arcos_buenos_mas$_{i,j,v}$

Consideramos de flujo nulo la mitad de los nodos. Así consideramos un grafo no orientado.

$$\mathrm{Xmas}_{j,i,v} = 0 \qquad \forall i, j, v \mid (\mathrm{ord(i)} \leq \mathrm{ord(j)})$$

---

solo_arcos_buenos_menos$_{i,j,v}$

$$\mathrm{Xmenos}_{j,i,v} = 0 \qquad \forall i, j, v \mid (\mathrm{ord(i)} \leq \mathrm{ord(j)})$$

---

lim_provisiones

Restricción que fija la cantidad de ayuda que podemos enviar.

$$\sum_v (\mathrm{Y}_{0,v} \cdot \text{coste\_vehiculo}_v) \geq -\text{max\_coste}$$

---

flujo_nulo$_{j,v}$

En los nodos transitorios el flujo es nulo.

$$\mathrm{Y}_{j,v} = 0 \qquad \forall j, v \mid ((\text{ord(j)} > 1) \wedge (\text{ord(j)} \leq n))$$

---

flujo_destinos$_{j,v}$

En los nodos de destino el flujo es positivo.

$$\mathrm{Y}_{j,v} \geq 0 \qquad \forall j, v \mid (\text{ord(j)} \geq m)$$

---

existencia_ruta$_{i,j,v}$

$$\text{Xmas}_{i,j,v} - \text{Xmenos}_{i,j,v} \leq M \cdot \mathrm{E}_{i,j} \qquad \forall i, j, v$$

---

usabilidad_ruta$_{i,j,v}$

$$\text{Xmas}_{i,j,v} - \text{Xmenos}_{i,j,v} \leq M \cdot (\mathrm{U}_{i,j} + \mathrm{H}_{i,j}) \qquad \forall i, j, v$$

---

existencia_ruta_min$_{i,j,v}$

$$\text{Xmas}_{i,j,v} - \text{Xmenos}_{i,j,v} \geq -(M \cdot \mathrm{E}_{i,j}) \qquad \forall i, j, v$$

---

usabilidad_ruta_min$_{i,j,v}$

$$\text{Xmas}_{i,j,v} - \text{Xmenos}_{i,j,v} \geq -(M \cdot (\mathrm{U}_{i,j} + \mathrm{H}_{i,j})) \qquad \forall i, j, v$$

---

lim_puentes

$$\sum_i (\sum_j \mathrm{H}_{i,j}) \leq \text{max\_puentes}$$

---

def_insatisaux$_j$

Definimos la demanda insatisfecha.

$$\text{Insatisaux} \geq \text{dem}_j - \mathrm{Z}_{\text{-}j} \qquad \forall j \mid (\text{ord(j)} \geq m)$$

---

def_auxZ1$_j$

Definimos los nodos a los que llega alguna ayuda.

$\text{auxZ}_j \leq M \cdot \text{Z\_}_j \qquad \forall j \mid (\text{ord(j)} \geq m)$

---

def_auxZ2$_j$

Los nodos no finales no cuentan.

$\text{auxZ}_j = 0 \qquad \forall j \mid (\text{ord(j)} \leq n)$

---

def_Z_$_j$

$$\text{Z\_}_j = \sum_v (\text{Y}_{j,v} \cdot \text{capacidad\_vehiculo}_v) \qquad \forall j$$

---

f_eq

$$\text{Eq} = \sum_j \text{auxZ}_j$$

---

f_insatis

$$\text{Insatis} = \sum_j \text{Insatisaux}$$

$\text{Xmas}_{i,j,v} \in \mathbb{Z}_+ \forall i,j,v$
$\text{Xmenos}_{i,j,v} \in \mathbb{Z}_+ \forall i,j,v$
$\text{H}_{i,j} \in \{0,1\}\ \forall i,j$
$\text{Insatisaux} \geq 0\ \forall$
$\text{auxZ}_j \in \{0,1\}\ \forall j$

Resultados

No existen costes por transporte, por lo que aún se generan soluciones duales que incluyen transportes ficticios entre nodos no provistos.

En las soluciones, al igual que en 1.2, dependiendo del criterio de optimalidad utilizado se proponen distintos vehículos.

El problema excede el límite de ecuaciones permitidas por la licencia en ejemplos con 10 nodos, 10 arcos y 2 vehículos. Aun así, el problema es aplicable a ejemplos más grandes que el modelo M-Rv, como por ejemplo el antes mencionado de 6 nodos, 6 arcos y 3 vehículos.

2.3 Implementación de la fiabilidad (M-Fvf)

Hipótesis

Las hipótesis añadidas son idénticas a las del modelo 1.3.

Formulación

La fiabilidad se incluye, similarmente al modelo 1.3, como restricción pero esta vez sobre el modelo de flujo 2.2. Esta implementación no añade demasiadas ecuaciones al modelo. A continuación se detallan los elementos añadidos a 2.2 para llegar a este.

Parámetros

Variable	Subíndices	Descripción
P_total		Probabilidad aceptable de que todos los convoys puedan pasar por todas las rutas elegidas
P	i, j	Probabilidad de que la ruta de i a j sea usable

Variables

Variable	Subíndices	Descripción
Used	i, j	Determina si el arco es usado en algún momento

Ecuaciones

arco_usado$_{i,j}$

$$M \cdot \text{Used}_{i,j} \geq \sum_v (\text{Xmas}_{i,j,v} + \text{Xmenos}_{i,j,v}) \qquad \forall i, j$$

---

arco_usado_orientacion$_{i,j}$

$$\text{Used}_{i,j} = \text{Used}_{j,i} \qquad \forall i, j$$

---

fiabilidad

$$\sum_i (\sum_j (\text{Used}_{i,j} \cdot \text{log2}(\text{P}_{i,j}))) \geq \text{log2}(\text{P\_total})$$

$\text{Used}_{i,j} \in \{0, 1\}\ \forall i, j$

2.4 Implementación del coste variable (M-Fvfc)

Hipótesis

Las hipótesis añadidas son idénticas a las del modelo 1.4

Formulación

Parámetros

Se añaden los siguientes parámetros al modelo 2.3

Name	**Domains**	**Description**
max_coste		Máximo presupuesto que se puede invertir
Dist	i, j	Matriz de distancias de las rutas de i a j

Ecuaciones

Se cambia la exuación de provisiones inicial de 2.3 por la siguiente

$$\sum_v(\mathrm{Y}_{0,0,v} \cdot \text{coste\_vehiculo}_v) + \sum_i(\sum_j(\sum_v(\mathrm{X}_{i,j,v} \cdot \mathrm{Dist}_{i,j} \cdot \text{coste\_variable}))) \leq \text{max\_coste}$$

Resultados

Similarmente a lo ocurrido en 1.4, considerar costes de transporte elimina soluciones duplicadas, aumentando la velocidad de resolución.

Este problema es significativamente más pequeño en cuanto a número de variables y restricciones y más rápido de resolver que 1.4, pero con todas las limitaciones al respecto del mismo que se plantean en 2.1.

Para un ejemplo de 60 nodos, NEOS lo resuelve en 40 minutos. Para un problema con 100 nodos, 100 puentes rotos y 1000 arcos tarda pocas horas y no excede el límite de recursos permitido por el servidor.

```
BLOCKS OF EQUATIONS          20     SINGLE EQUATIONS      171,048
BLOCKS OF VARIABLES          10     SINGLE VARIABLES       80,503
NON ZERO ELEMENTS       551,537     DISCRETE VARIABLES     80,100
2.83018e+07 iterations, 247009 nodes
```

La resolución también se ve fuertemente afectada por la densidad del grafo, sobre un árbol de 100 nodos tarda segundos en devolver la solución.