Los teoremas de De Rham en cohomología de variedades

Trabajo de fin de máster 2021-2022

por Miguel Martínez González

dirigido por Otto-Rutwig Campoamor Stursberg

Abstract

Differential forms allow us to construct certain invariants. We start by defining the de Rham cohomology and studying its most important properties. We also state de Rham theorem and Poincaré duality. We give some results about the cohomology of Lie groups by means of bi-invariant forms. This agrees with de Rham in the compact case. In complex manifolds we also have Dolbeault cohomology. We introduce Hodge theory to characterize cohomology classes by harmonic forms. We go through the Serre duality to then focus on the Kähler case where we can relate this cohomology with that of de Rham in the compact case. We finish the section with a reasonable explanation of hard Lefschetz. In the last part of the text we focus on the construction of characteristic classes as well as some of their applications. Specifically, we define the class of Pontryagin, Chern and Euler. These are related to each other. Stable classes allow to give some results on manifold immersions. On the other hand, the Euler class of the tangent bundle of a differentiable manifold gives us topological information about the manifold.

Resumen

Las formas diferenciales nos permiten construir ciertos invariantes. Comenzamos definiendo la cohomología De Rham y estudiando sus propiedades más importantes. También enunciamos el teorema de De Rham y la dualidad de Poincaré. Damos algunos resultados acerca de la cohomología de los grupos de Lie mediante formas biinvariantes. Esta coincide con De Rham en el caso compacto. En variedades complejas tenemos además la cohomología Dolbeault. Introducimos la teoría de Hodge para caracterizar las clases de cohomología mediante formas armónicas. Pasamos por la dualidad de Serre para después centrarnos en el caso Kähler donde podremos relacionar esta cohomología con De Rham en el caso compacto. Finalizamos la sección entendiendo *hard* Lefschetz. En la última parte del texto nos centramos en la construcción de las clases características así como en algunas de sus aplicaciones. Concretamente definimos las clases de Pontryagin, Chern y Euler. Estas guardan relaciones entre sí. Las clases estables nos permiten dar algunos resultados sobre inmersión de variedades. Por otro lado la clase de Euler del fibrado tangente de una variedad diferenciable nos da información topológica de la misma.

AUTORIZACIÓN DE DIFUSIÓN

El autor del documento, Miguel Martínez González, matriculado en Trabajo Fin de Máster de la Facultad de Ciencias Matemáticas, autoriza a la Universidad Complutense de Madrid a difundir y utilizar con fines académicos y no comerciales, mencionando expresamente a su autor, el presente Trabajo Fin de Máster Los teoremas de De Rham en cohomología de variedades, realizado durante el curso académico 2021-2022 bajo la supervisión y dirección del Profesor R. Campoamor Stursberg en el Departamento de Álgebra, Geometría y Topología.

Se autoriza asimismo a la Biblioteca Complutense a depositarlo en el Archivo Institucional E-prints Complutense con el objeto de incrementar la difusión de este trabajo, así como para garantizar su conservación y acceso a largo plazo.

Índice

Introducción **1**

1. Cohomología **3**
1.1. Cohomología De Rham . . . 3
1.2. Grupos de Lie . . . 10
1.3. Cohomología Dolbeault . . . 13

2. Teoría de Hodge **17**
2.1. Teoría de Hodge en variedades diferenciables . . . 17
2.2. Teoría de Hodge en variedades complejas . . . 21
2.3. Teoría de Hodge en variedades Kähler . . . 24

3. Geometría diferencial **30**
3.1. Fibrados vectoriales . . . 30
3.2. Clases características . . . 34

Introducción

La topología y la geometría guardan una estrecha relación. Especialmente si nos restringimos a variedades diferenciables compactas. La teoría de formas diferenciales en una variedad nos permite definir de manera natural invariantes topológicos de la misma. La cohomología De Rham no solamente es un invariante homotópico sino que además coincide con la singular. Esto se debe a que localmente es trivial y a la sucesión de Mayer-Vietoris. Con este enfoque extendemos nuestra caja de herramientas a la hora de estudiar variedades diferenciables.

Es sorprendente la cantidad de resultados que podemos obtener cuando nos restringimos al caso compacto. Un primer ejemplo es el cómputo del n-ésimo grupo de cohomología de cualquier variedad compacta y conexa. Este depende únicamente de la orientabilidad de la variedad. De hecho en una variedad compacta y orientable tenemos ciertas restricciones sobre los números de Betti. Esto es lo que se conoce como dualidad de Poincaré. En particular la característica de Euler-Poincaré en dimensión impar dejará de ser un invariante que nos interese para el caso compacto y orientable pues siempre será nula. De hecho cualquier variedad no orientable compacta de dimensión impar también tiene característica nula pues así lo es la de su recubridor doble.

Otra de las utilidades de la cohomología es el cómputo del primer grupo de homotopía no trivial. En este caso perdemos la información de la torsión pues trabajamos con coeficientes reales. En un grupo de Lie tenemos la ventaja de que el grupo fundamental siempre es abeliano. Teniendo esto en cuenta y que los grupos de homotopía de orden superior coinciden con los de su recubridor universal podremos explotar un poco más esta herramienta.

Desarrollamos una nueva cohomología a partir de las formas invariantes en un grupo de Lie. Estamos trabajando con el espacio dual del álgebra de Lie. La cohomología del álgebra no tiene por qué coincidir con la del grupo. Sin embargo en el caso compacto y conexo sí que obtenemos este curioso resultado. De hecho en este caso el anillo de formas biinvariantes es isomorfo al anillo de cohomología. Si además nuestra álgebra es semisimple podremos dar resultados generales acerca de los primeros grupos de cohomología y, como el grupo fundamental de un grupo de Lie compacto es finito si y solo si este es semisimple, llegamos a una prueba de que las esferas $\mathbb{S}^0$, $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^3$ son las únicas esferas grupos de Lie.

Aunque las cohomologías que nos interesan son las que guardan información topológica desarrollamos también la cohomología Dolbeault. Se trata de un invariante birracional. De nuevo en el caso compacto llegaremos a resultados más generales. Mientras que en variedades diferenciables tenemos la dualidad de Poincaré en variedades complejas aparece la dualidad de Serre. Para lograr estas identificaciones debemos introducir la teoría de Hodge. Esta nos da una interesante aplicación de los teoremas de existencia y unicidad de soluciones a operadores elípticos. Fijada una métrica tendremos una forma armónica representando a cada clase de cohomología.

Para relacionar esta última cohomología con De Rham debemos pedir otra propiedad además de la compacidad. En el caso Kähler conseguimos restringir todavía más los posibles valores de números de Hodge. Además de que las formas armónicas complexifixadas en Dolbeault se relacionan con las de la cohomología De Rham. Esto nos permite relacionar directamente ambos anillos de cohomología. Sin embargo esto no es todo, la forma fundamental tiene una virtud y es que nos permite ver el anillo de cohomología como una representación finita de $sl(2)$. Este resultado se conoce como hard Lefschetz. Una consecuencia de la dualidad de Serre en variedades Kähler es que las superficies de Riemann compactas y conexas tienen característica de Euler par y menor o igual que 2. Es más, podemos usar el recubridor doble para estudiar las superficies compactas no orientables aunque desde la topología algebraica podamos clasificarlas sin necesidad de estas herramientas.

El último capítulo es puramente geométrico. Introducimos la noción de fibrado vectorial diferenciable. No tardamos en darnos cuenta de que derivar una sección no es tan sencillo luego definimos el transporte paralelo. El enfoque del texto es precisamente hacer la construcción de las conexiones a partir del transporte paralelo pues ganamos en comprensión. Poder elegir previamente cómo se van a derivar las secciones nos da una nueva herramienta como vemos con la conexión de Levi-Civita, la conexión de Chern y en la prueba de Gauss-Bonnet generalizado. En el proceso construimos la geometría riemanniana desde el enfoque de Cartan reduciendo considerablemente las cuentas.

Hay distintas maneras de clasificar fibrados como estudiar el tipo de homotopía de ciertos grupos de Lie. En el texto nos centraremos en las clases características pues su construcción mediante formas diferenciales es completamente natural. Comenzamos definiendo la curvatura asociada a una conexión. Esta es invariante por conjugación independientemente de qué base tomemos luego podemos buscar invariantes. Estos son las clases características. Son invariantes cohomológicos del fibrado permitiéndonos de nuevo relacionar cohomología y geometría. Algunas de ellas son estables, por ejemplo las de Chern y Pontryagin, a priori puede parecer una patología. Sin embargo es una nueva herramienta que podemos usar para saber cuándo existe una inmersión de nuestra variedad en $\mathbb{R}^{n+1}$ o para estudiar cobordismo.

Concluimos el texto con la clase de Euler en fibrados de rango par y orientables. Si tenemos una variedad compacta, orientable y de dimensión par podremos integrar la clase de Euler de su fibrado tangente obteniendo la característica de Euler-Poincaré de la variedad. Esta es la generalización de Gauss-Bonnet y nos muestra una vez más hasta qué punto están relacionadas ambas ramas de las matemáticas. La clase de Euler también nos permite saber, independientemente de la paridad de la dimensión de nuestra variedad, si existe una sección no nula en nuestro fibrado tangente. Esto es útil pues en dimensión impar siempre podremos encontrar estas secciones pudiendo centrarnos solo en la clasificación de fibrados de rango par.

A lo largo del texto se van exponiendo ejemplos que nos ayudan a entender mejor el contenido del mismo. Para un entendimiento de este se aconseja haber visto en algún momento alguna introducción al álgebra tensorial además de a la teoría de formas diferenciales.

1. Cohomología

En este primer capítulo desarrollamos las herramientas que vamos a usar durante el texto. Las formas diferenciales nos permiten construir la cohomología De Rham, se trata de un invariante homotópico y en el caso compacto coincide con la usual tomando coeficientes reales. Por otro lado la cohomología Dolbeault no es un invariante topológico. Sin embargo en variedades Kähler sí llegaremos a cierta información topológica. Por último estudiaremos la cohomología de formas invariantes en grupos de Lie compactos, que también está relacionada con De Rham.

1.1. Cohomología De Rham

Dada una variedad diferenciable M de dimensión n construimos la cohomología De Rham mediante la diferencial exterior $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$. Como $d^2 \equiv 0$ es natural preguntarse qué formas diferenciales cerradas son al mismo tiempo exactas. Denotamos por $Z^k_{\text{dR}}(M)$ al $\mathbb{R}$-espacio vectorial de k-formas cerradas en M y por $B^k_{\text{dR}}(M)$ al $\mathbb{R}$-espacio vectorial de k-formas exactas.
El k-ésimo grupo de cohomologhía De Rham se construye como $H^k_{\text{dR}}(M) := \frac{Z^k_{\text{dR}}(M)}{B^k_{\text{dR}}(M)}$, se trata de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Si $H^k_{\text{dR}}(M) \equiv 0$ podremos asegurar que toda k forma cerrada admite una antiderivada. Teniendo en cuenta el teorema de Frobenius, dada cualquier $\omega \in \Omega^k(M)$ que cumpla que $\omega \wedge d\omega = 0$ podremos encontrar un factor integrante de manera que ω admita antiderivada local.
De hecho, sabiendo que existen $f \in \mathcal{F}(M), \theta \in \Omega^{k-1}(M) : \ \omega = f \wedge d\theta :$

$$d\omega = df \wedge d\theta = \frac{df}{f} \wedge \omega = d(\log f) \wedge \omega.$$

Podemos encontrar fácilmente factores integrantes a nivel local. Para hacerlo globalmente necesitamos precisamente que el k-ésimo grupo de cohomología sea trivial.
El producto exterior baja bien al cociente, está bien definido sobre los grupos de cohomología pues dadas cualesquiera $\omega, \theta \in \Omega^\bullet(M), \ |\omega| = k$ se tiene que

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta.$$

Claramente si ω y θ son cerradas $\omega \wedge \theta$ también lo será y, si alguna de las dos es además exacta, por ejemplo $\omega : \ \exists \alpha \in \Omega^{k-1}(M) : \ d\alpha = \omega$ tendremos que

$$d(\alpha \wedge \theta) = d\alpha \wedge \theta + (-1)^{k-1} \alpha \wedge d\theta = \omega \wedge \theta.$$

Esto nos permite definir el anillo de cohomología, se trata de otro invariante algebraico.
Definición 1.1. Dada una variedad diferenciable M de dimensión n, denotamos por

$$H^\bullet_{\text{dR}}(M) := \bigoplus_{k=0}^{n} H^k_{\text{dR}}(M).$$

$H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$ tiene estructura de anillo graduado con la suma y el producto exterior. A $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$ se le llama anillo de cohomología de M.
Ejemplo 1.2. Cohomología de $\mathbb{R}^n$ En $H^0_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}$, $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}) \equiv 0$. Para tratar con $H^0_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R})$ nos fijamos en que $\mathbb{R}$ es conexo y que dada $f \in \mathcal{F}(0)$ sabemos que $df = 0 \Leftrightarrow f$ es constante. En cambio para $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R})$ usamos el teorema fundamental del cálculo, dada $\omega \in \Omega^1(M)$ se define $f_\omega(p) := \int_0^p \omega$ y sabemos que $df_\omega = \omega$.
Usando la fórmula de Künneth podemos deducir fácilmente que $H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n) \equiv 0 \ \forall k \neq 0$ y que $H^0_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{R}$.
Ejemplo 1.3. $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^4$ y $\mathbb{CP}^2$ Daremos los detalles del cálculo de la cohomología de $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{CP}^n$ después. El objetivo de este ejemplo es ver precisamente la utilidad del anillo de cohomología como invariante. $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^4$ no es una variedad pues existe un punto en el que no es localmente euclídeo. Esto no nos impide computar su cohomología pues podemos tratar $\mathbb{S}^4$ y $\mathbb{S}^2$ por separado. Descubrimos que ambos espacios tienen los mismos grupos de cohomología: $H^0_{\mathrm{dR}}(M) \equiv H^2_{\mathrm{dR}}(M) \equiv H^4_{\mathrm{dR}}(M) \equiv \mathbb{R}$, $H^1_{\mathrm{dR}}(M) \equiv H^3_{\mathrm{dR}}(M) \equiv 0$. Sin embargo

$$H^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^4) \equiv \frac{\mathbb{R}[x,y]}{(x^2, y^2, xy)}, \qquad H^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathbb{CP}^2) \equiv \frac{\mathbb{R}[x]}{(x)^3}.$$

Destacamos algunas propiedades que nos permiten computar más fácilmente los grupos de cohomología: funtorialidad, invariancia por homotopía, sucesión de Mayer-Vietoris y trivialidad local.

Funtorialidad Sean variedades diferenciables M, N y $f : M \to N$ diferenciable. Entonces $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$, es un morfismo de fibrados.[1] Además $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$ luego cualquier forma cerrada en N define otra forma cerrada en M. Sucede lo mismo con las exactas y $f^*(\omega \wedge \theta) = f^*\omega \wedge f^*\theta$. Por tanto f^* está bien definida en el cociente y, usando la misma notación, deducimos que $f^* : H^\bullet_{\mathrm{dR}}(N) \to H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$ es homomorfismo de anillos graduados.
Además podemos componer aplicaciones, dada otra variedad diferenciable P y $g : N \to P$ diferenciable tenemos que $g \circ f : M \to P$ es diferenciable. Como $(g \circ f)^* = f^* g^*$ llegamos a que

$$(g \circ f)^* = f^* g^* : H^\bullet_{\mathrm{dR}}(P) \to H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$$

es homomorfismo de anillos graduados.
Si suponemos que f es un difeomorfismo. Como $1_N = f \circ f^{-1} \Rightarrow 1_{T^*N} = f^{-1*} f^*$. Haciendo lo mismo con $1_M = f^{-1} \circ f$ deducimos que $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M) \equiv H^\bullet_{\mathrm{dR}}(N)$. Por tanto $H^\bullet_{\mathrm{dR}}$ es invariante por difeomorfismos. Sin embargo es mucho más como veremos a continuación.

Invariancia por homotopía La cohomología que hemos definido no solamente es un invariante en la categoría de las variedades diferenciables. Se trata de un invariante homotópico, dos variedades M, N son homotópicamente equivalentes si existen aplicaciones continuas $f : M \to N$, $g : N \to M$ tales que $g \circ f \sim 1_M$, $f \circ g \sim 1_N$. En particular dos variedades homeomorfas son homotópicas luego también es un invariante topológico. En [6] podemos ver que trabajar con homotopías diferenciables es equivalente al caso continuo.
Para probar la invariancia por homotopía comenzamos viendo que existe una aplicación $h : \Omega^p(M \times I) \to \Omega^{p-1}(M)$ cumpliendo que

$$h(d\omega) + d(h\omega) = i_1^*\omega - i_0^*\omega \quad \text{donde } i_t : M \to M \times I, \ i_t(p) = (p, t).$$

La ecuación es de especial interés cuando ω es cerrada. Definimos h como

$$h\omega := \int_0^1 \iota_{\partial_t} \omega \, dt.$$

[1]Repasaremos estos conceptos en el último capítulo.

Tomando coordenadas locales comprobamos que efectivamente cumple la ecuación buscada. Desde aquí es inmediato ver que dadas $f_0, f_1 : M \to N$ homótopas se tiene que $f_1^*[\omega] - f_2^*[\omega] = 0 \in H^k_{\mathrm{dR}}(M)\ \forall \omega \in H^k_{\mathrm{dR}}(N)$. Esto se debe a que si existe una homotopía $H : M \times I \to N$ diferenciable con $H_0 = f_0,\ H_1 = f_1$. Entonces $i_t \circ H : M \to N$ y

$$\widetilde{h} := h \circ H^* : \Omega^p(N) \to \Omega^p(M), \qquad \widetilde{h}(d\omega) + d(\widetilde{h}\omega) = h(H^* d\omega) + d(h(H^*\omega)) =$$

$$(h \circ d + d \circ h)(H^*\omega) = (i_1^* - i_0^*)(H^*\omega) = (H \circ i_1)^*\omega - (H \circ i_0)^*\omega = f_1^*\omega - f_0^*\omega.$$

Dada cualquier forma cerrada ω tenemos que $f_1^*\omega - f_0^*\omega = d(\widetilde{h}\omega)$ luego efectivamente $f_1^*[\omega] = f_2^*[\omega]$. Finalmente probamos la invariancia por homotopía. Dada $F : M \to N$ equivalencia homotópica con inversa G, como $G \circ F \sim 1_M$ se tiene que $F^* \circ G^* = 1_{H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)}$. Considerando ahora $F \circ G \sim 1_N$ llegamos a que efectivamente G^* es inversa de $F^* : H^\bullet_{\mathrm{dR}}(N) \to H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M)$ y por tanto F^* es isomorfismo de anillos.

Mayer-Vietoris Trabajamos con cubiertas por abiertos U_1, U_2 de M y denotamos por $i_h : U_1 \cap U_2 \to U_h,\ j_h : U_h \to M$ a las inclusiones.

Teorema 1.4. Mayer-Vietoris Dada M variedad diferenciable y $U_1, U_2 \subset M$ abiertos cuya unión es M. Para cada k existe una aplicación lineal $\delta : H^p_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \to H^{p+1}_{\mathrm{dR}}(M)$ de manera que la siguiente sucesión es exacta:

$$\ldots \xrightarrow{\delta} H^p_{\mathrm{dR}}(M) \xrightarrow{j_1^* \oplus j_2^*} H^p_{\mathrm{dR}}(U_1) \oplus H^p_{\mathrm{dR}}(U_2) \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} H^p_{\mathrm{dR}}(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}_{\mathrm{dR}}(M) \xrightarrow{j_1^* \oplus j_2^*} \ldots.$$

A esta sucesión se le llama sucesión de Mayer-Vietoris para la cubierta U_1, U_2.

Demostración. Usando álgebra homológica podemos reducir el resultado a ver que la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow \Omega^p(M) \xrightarrow{j_1^* \oplus j_2^*} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0$$

La parte no trivial es comprobar que $i_1^* - i_2^*$ es sobreyectiva. Usando una partición diferenciable de la unidad φ_1, φ_2 subordinada a U_1, U_2 y dada cualquier $\omega \in U \cap V$. Definimos $\omega_i := (-1)^{i+1}\omega\varphi_i$ en $U \cap V$ y efectivamente:

$$i_1^*\omega_1 - i_2^*\omega_2 = \varphi_1\omega + \varphi_2\omega = \omega.$$

$\square$

Trivialidad local Ya hemos visto la invariancia por homotopía. Si comprobamos que localmente toda forma cerrada es exacta tendremos todo lo necesario para comprobar que esta cohomología es equivalente a la usual.

Con localmente nos estamos refiriendo a abiertos U simplemente conexos. Vamos a ver es que si $\pi_1(M) = 0$ entonces toda forma cerrada será exacta. El resultado se puede probar directamente per es más rápido usar las herramientas que ya tenemos.

Comencemos con una variedad diferenciable conexa, al calcular $H^0(M)$ tenemos que $B^0_{\mathrm{dR}}(p) \equiv 0$ y $Z^0_{\mathrm{dR}}(M)$ son las funciones $f : M \to \mathbb{R}$ con diferencial nula. Como M es conexa claramente $Z^0_{\mathrm{dR}}(M)$ son las funciones constantes en M luego

$$H^0_{\mathrm{dR}}(M) \equiv Z^0_{\mathrm{dR}}(M) \equiv \mathbb{R}.$$

Si M es además de dimensión 0 las k-formas con $k \geq 1$ son nulas luego $H^k_{\mathrm{dR}}(M) \equiv 0\ \forall k \geq 1$. Como cualquier variedad conexa y simplemente conexa M es homótopa a un punto deducimos que efectivamente la cohomología a nivel local es trivial.

Los grupos $H^0_{\mathbf{dR}}(M)$ y $H^n_{\mathbf{dR}}(M)$ Hemos visto que $H^0_{\mathrm{dR}}(M) \equiv \mathbb{R}$ cuando M es conexa y es normal preguntarse qué sucede si M no lo es. Dada una colección numerable[2] de variedades diferenciables conexas M_j, $j \in J$ y denotando por $M := \bigsqcup_{j\in J} M_j$ se tiene que $H^k_{\mathrm{dR}}(M) \equiv \prod_{j\in J} H^k_{\mathrm{dR}}(M_j)$. Así que la dimensión de $H^0(M)$ nos da la cantidad de componentes conexas de M.

Ejemplo 1.5. Cohomología de $\mathbb{S}^n$

$\mathbb{S}^n$ es conexa para $n \geq 1$ luego para estas esferas tendremos que $H^0_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^n) \equiv \mathbb{R}$. Por otro lado es orientable así que existe $\mu \in \Omega^n(\mathbb{S}^n),\ \mu(p) \neq 0\ \forall p \in \mathbb{S}^n$. Al integrar la forma obtenemos un escalar no nulo, no puede ser exacta pues usando Stokes llegaríamos a una contradicción.

Ahora justificamos que $H^1(\mathbb{S}^2) \equiv 0$ y que $H^1(\mathbb{S}^1) \equiv \mathbb{R}$. Para estudiar $\mathbb{S}^2$ tomamos el recubrimiento $U := \mathbb{S}^2 - \{N\},\ V := \mathbb{S}^2 - \{S\}$, dada $\alpha \in Z^1(M)$ sabemos que existen $f_U \in \mathcal{F}(U),\ f_V \in \mathcal{F}(V)$ tales que $df_U = \alpha_{|U},\ df_V = \alpha_{|V}$. Luego $d(f_U - f_V) = 0$ en $U \cap V$. Por tanto $f_V = f_U + c,\ c \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in B^1(\mathbb{S}^2)$. Por otro lado $H^1(\mathbb{S}^1) \equiv \mathbb{R}$. Hay que ver que si $\int_{\mathbb{S}^1} \omega = 0$ entonces $\omega \in B^1(\mathbb{S}^1)$. Tomando un recubridor de $\mathbb{S}^1$, $\gamma(t) = e^{i2\pi t}$ podemos trabajar con $\gamma^*\omega \in Z^1(\mathbb{R})$.

Se define $f(x) = \int_0^x \gamma^*\omega$. Por hipótesis $f(x) = f(x+1)$ luego f está bien definida sobre $\mathbb{S}^1$ y concluimos que $H^1(\mathbb{S}^1) \equiv \mathbb{R}$.

Por otro lado usamos Mayer-Vietoris para llegar a que

$$H^p_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^{n-1}) \equiv H^{p+1}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^n)\ \forall p \geq 1.$$

En consecuencia, para $n \geq 1$ tendremos que $H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^n) \equiv \mathbb{R},\ k = 0, n$ y es trivial en cualquier otro caso.

$H^0(M)$ está directamente relacionado con las componentes conexas de la variedad. Si M es compacta podremos dar bastante información sobre $H^n(M)$ dependiendo de la orientabilidad de cada componente conexa.

Teorema 1.6. Sea M una variedad diferenciable compacta y conexa de dimensión n. Entonces:

- Si M es orientable la aplicación $I : H^n_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathbb{R}$ dada por $I[\omega] := \int_M \omega$ es un isomorfismo.
- Si M no es orientable se tiene que $H^n_{\mathrm{dR}}(M) \equiv 0$.

Demostración. **Caso orientable** Dada cualquier n-forma ω no nula en todo punto se tiene que $I[\omega] \neq 0$. Como $I[\lambda\omega] = \lambda I[\omega]\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ sabemos que I es sobreyectiva. Para ver la inyectividad debemos tener más cuidado y utilizar lo que ya sabemos de las esferas.

Comenzamos viendo qué sucede en $\mathbb{R}^n$, sea una n-forma ω con soporte compacto que integre 0. Si $n = 1$ calculamos directamente la primitiva $f(x) := \int_{-\infty}^x \omega(x)$. En cambio si $n \geq 2$ la construcción es más tediosa. Sabemos que existe $\eta_0 \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ cumpliendo que $d\eta_0 = \omega$ pero no tiene por qué tener soporte compacto. La idea entonces es considerar bolas B, B' tales que el soporte de ω esté contenido en B y $B \subset \overline{B} \subset B'$.

Por Stokes afirmamos que

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\overline{B}'} \omega = \int_{\partial\overline{B}'} \eta_0.$$

Concluimos que η_0 es exacta en $\mathbb{R}^n - \overline{B}$ pues el espacio se puede retractar sobre $\partial\overline{B}'$. Existe $\gamma \in \Omega^{n-2}(\mathbb{R}^n - B)$: $d\gamma = \eta_0$. Tomamos finalmente una función meseta ψ con soporte en $\mathbb{R} - \overline{B}$ que valga 1 en $\mathbb{R}^n - B'$.

Definimos $\eta := \eta_0 - d(\psi\eta)$ que cumple que $d\eta = d\eta_0 = \omega$ y en $\mathbb{R}^n - B'$ se tiene que $\eta_0 - d(\psi\eta) = \eta_0 - \eta_0 = 0$ luego $\eta \in \Omega^{n-1}_c(\mathbb{R}^n)$.

Ahora pasamos a una variedad diferenciable compacta, conexa y orientable M. Comenzamos con una cubierta finita $U_1, \ldots, U_r$ por abiertos difeomorfos a $\mathbb{R}^n$ y los ordenamos de manera que $M_k := \bigcup_{j=1}^k U_j$ cumpla que $M_k \cap U_{k+1} \neq \emptyset$. El objetivo es demostrar por inducción que si una forma ω

[2] Pedimos que nuestras variedades cumplan el segundo axioma de numerabilidad así que no tiene sentido ver cardinalidades mayores para J.

con soporte compacto en M_k integra 0 entonces existe otra forma η con soporte compacto tal que $d\eta = \omega$.
Para $k = 1$ ya hemos visto cómo hacerlo. Supongamos que el resultado es cierto para M_k y veámoslo para $M_{k+1} = M_k \cup U_{k+1}$. La idea es tomar $\Omega \in \Omega^n(M_{k+1})$ con soporte compacto en $M_k \cap U_{k+1}$ y que integre 1. Consideramos también una partición diferenciable de la unidad $\{\varphi, \psi\}$ subordinada a M_k, U_{k+1} y denotamos por $I_{\varphi\omega} := \int_{M_{k+1}} \varphi\omega$. Se tiene que

$$\int_{M_k} \varphi\omega - I_{\varphi\omega}\Omega = \int_{M_{k+1}} \varphi\omega - I_{\varphi\omega}\Omega = 0 \ \Rightarrow\ \exists\alpha \in \Omega_c^{n-1}(M):\ d\alpha = \varphi\omega - I_{\varphi\omega}\Omega.$$

Por cómo hemos tomado Ω sabemos que $\psi\omega + I_{\varphi\omega}\Omega$ tiene soporte compacto en U_{k+1} :

$$\int_{M_{U_{k+1}}} \psi\omega + I_{\varphi\omega}\Omega = \int_{M_{k+1}} (1-\varphi)\omega + I_{\varphi\omega}\Omega = \int_{M_{k+1}} \omega = 0 \ \Rightarrow\ \exists\beta \in \Omega_c^{n-1}(M):\ d\beta = \psi\omega + I_{\varphi\omega}\Omega.$$

Extendemos la definición de α, β como 0 fuera de su dominio a todo M_{k+1} y, como $d(\alpha+\beta) = \omega$, hemos construido una forma en M_{k+1} con soporte compacto cuya diferencial exterior es ω.
Caso no orientable Consideramos la cubierta doble $\widetilde{M}$. Llamamos α al elemento no trivial del grupo recubridor, este invierte la orientación. Tomamos una n-forma ω y la elevamos a $\widetilde{M}$ usando $\pi : \widetilde{M} \to M$. $\Omega := \pi^*\omega$, además $\alpha^*\Omega = \Omega$ pero entonces al integrar nos queda

$$\int_{\widetilde{M}} \Omega = -\int_{\widetilde{M}} \alpha^*\Omega = -\int_{\widetilde{M}} \Omega \ \Rightarrow \int_{\widetilde{M}} \Omega = 0.$$

Por tanto Ω es exacta, existe $\eta \in \Omega^{n-1}(\widetilde{M}):\ d\eta = \Omega$ nos falta bajar η a M. Para ello construimos una simetrización de esta: $\widetilde{\eta} := \frac{1}{2}(\eta + \alpha^*\eta)$. Haciendo cuentas vemos que

$$\alpha^*\widetilde{\eta} = \widetilde{\eta}, \quad d\widetilde{\eta} = \Omega.$$

Dado cualquier $p \in M$ se toma un entorno suyo U lo suficientemente pequeño para que $\pi^{-1}(U)$ sea unión disjunta de dos abiertos $\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2$ difemorfos a él y denotamos por $\sigma_i : U \to \widetilde{U}_i$ a los difeomorfismos. Volvemos a hacer cuentas para comprobar que $\gamma := \sigma_2^*\widetilde{\eta} = \sigma_1^*\widetilde{\eta}$. De esta forma γ está bien definida en U y como $p \in M$ es arbitrario sabemos que también lo está en todo M. Como $d\gamma = \omega$ hemos demostrado que ω es exacta luego $H^n_{\mathrm{dR}}(M) = 0$. □

1.1.1. Relación con otras cohomologías

Cohomología singular Vamos a exponer un argumento que nos permite ver equivalencias entre cohomologías. Dada una variedad diferenciable M tomamos una colección numerable de entornos coordenados $V_j,\ j \in J$. Usando Mayer-Vietoris con $U_1 = V_1,\ U_2 = \bigcup_{\substack{j\in J\\ j\neq 1}}$ sabemos que la siguiente sucesión es exacta

$$\to H^p_{\mathrm{dR}}(U_1) \oplus H^p_{\mathrm{dR}}(U_2) \to H^p_{\mathrm{dR}}(U_1 \cap U_2) \to H^{p+1}_{\mathrm{dR}}(M) \to H^{p+1}_{\mathrm{dR}}(U_1) \oplus H^{p+1}_{\mathrm{dR}}(U_2) \to H^{p+1}_{\mathrm{dR}}(U_1 \cap U_2) \to$$

Por otro lado computamos los grupos de cohomología singular con coeficientes en $\mathbb{R}$ para llegar a que la siguiente sucesión también es exacta

$$\to H^p(U_1;\mathbb{R}) \oplus H^p(U_2;\mathbb{R}) \to H^p(U_1 \cap U_2;\mathbb{R}) \to H^{p+1}(M;\mathbb{R}) \to H^{p+1}(U_1;\mathbb{R}) \oplus H^{p+1}(U_2;\mathbb{R}) \to H^{p+1}(U_1 \cap U_2;\mathbb{R}) \to$$

Sea ahora N cualquier variedad diferenciable. Si encontramos una aplicación lineal $J : H^p_{\mathrm{dR}}(N) \to H^p(N;\mathbb{R})$ de manera que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^p_{\mathrm{dR}}(U_1) \oplus H^p_{\mathrm{dR}}(U_2) \arrow[r] \arrow[d, "J"] & H^p_{\mathrm{dR}}(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "J"] & H^{p+1}_{\mathrm{dR}}(M) \arrow[r] \arrow[d, "J"] & H^{p+1}_{\mathrm{dR}}(U_1) \oplus H^{p+1}_{\mathrm{dR}}(U_2) \arrow[r] \arrow[d, "J"] & H^{p+1}_{\mathrm{dR}}(U_1 \cap U_2) \arrow[r] \arrow[d, "J"] & {} \\
{} \arrow[r] & H^p(U_1;\mathbb{R}) \oplus H^p(U_2;\mathbb{R}) \arrow[r] & H^p(U_1 \cap U_2;\mathbb{R}) \arrow[r, "\partial^*"] & H^{p+1}(M;\mathbb{R}) \arrow[r] & H^{p+1}(U_1;\mathbb{R}) \oplus H^{p+1}(U_2;\mathbb{R}) \arrow[r] & H^{p+1}(U_1 \cap U_2;\mathbb{R}) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

y de forma que $H^p_{\mathrm{dR}}(U_1)\oplus H^p_{\mathrm{dR}}(U_2)\equiv_J H^p(U_1;\mathbb{R})\oplus H^p(U_2;\mathbb{R}),\ H^p_{\mathrm{dR}}(U_1\cap U_2)\equiv_J H^p(U_1\cap U_2;\mathbb{R})\ \forall p\geq 0$ tendremos inmediatamente que $H^p_{\mathrm{dR}}(M)\equiv_J H^p(M)$. Para construir J usamos el teorema de Stokes. Dada $[w]\in H^p_{\mathrm{dR}}(N)$ y $[c]\in H_p(N)$ tomamos un representante diferenciable $\widetilde{c}\in[c]$ y definimos

$$J[w][c]=\int_{\widetilde{c}}\omega\in\mathbb{R}.$$

Esta aplicación está bien definida ya que dado otro representante $\widetilde{c}'$ existe un $(p+1)$-ciclo diferenciable $\widetilde{b}:\ \partial b=\widetilde{c}-\widetilde{c}'$ luego

$$\int_{\widetilde{c}}\omega-\int_{\widetilde{c}'}\omega=\int_{\partial\widetilde{b}}\omega=\int_b d\omega=0.$$

De igual manera, si ω fuese exacta existiría $\theta\in\Omega^p(N):\ d\theta=\omega$ y por tanto

$$\int_{\widetilde{c}}\omega=\int_{\widetilde{c}}d\theta=\int_{\partial\widetilde{c}}\theta=\int_{\emptyset}\theta=0.$$

Claramente $J[\omega]:H_p(M)\to\mathbb{R}$ y $J[\omega_1+\lambda\omega_2]=J[\omega_1]+\lambda J[\omega_2]$ luego $J[\omega]\in H^p(N;\mathbb{R})$.
Este homomorfismo es natural pues dada $f:M\to N$ diferenciable y dada cualquier $[\omega]\in H^{\bullet}_{\mathrm{dR}}(N)$ se tiene para cualquier p-símplice suave σ en M que:

$$Jf^*[\omega][\sigma]=\int_\sigma f^*\omega=\int_{\Delta_p}\sigma^*f^*\omega=\int_{\Delta_p}(f\circ\sigma)^*\omega=\int_{f\circ\sigma}\omega=$$

$$J[\omega][f\circ\sigma]=J[\omega][f_*\sigma]=f^*(J[\omega])[\sigma]\ \Rightarrow\ f^*J=Jf^*.$$

También se tiene que $J\circ\delta=\partial^*\circ J$.
Aunque quedan algunos detalles por puntualizar la idea de la prueba es esencialmente esta y la podemos encontrar en [6]. Hacemos un argumento inductivo para ver que, si ambas cohomologías son además son localmente triviales entonces coinciden.
Teorema 1.7. de De Rham Dada una variedad diferenciable M se tiene que

$$H^p_{\mathrm{dR}}(M)\equiv H^p(M;\mathbb{R})\ \forall p.$$

⊠

Cohomología De Rham con soporte compacto La construcción de esta cohomología es exactamente igual que la de De Rham pero usando formas con soporte compacto. Dada una variedad diferenciable M de dimensión n denotamos por $\Omega^k_c(M)$ a las k-formas diferenciales con soporte compacto en M. Aunque a priori pueda parecernos que no nos va a aportar nada nuevo, hay dos hechos clave que nos permitirán desarrollar una nueva herramienta.
En primer lugar dadas $\omega\in\Omega^p(M),\theta\in\Omega^q_c(M)$ se tiene que $\omega\wedge\theta\in\Omega^{p+q}_c(M)$. Por otro lado, una n-forma con soporte compacto siempre se podrá integrar en M si nuestra variedad es orientable.

Ejemplo 1.8. Cohomología con soporte compacto de $\mathbb{R}^n$
En este caso $H^n_c(\mathbb{R}^n)\equiv\mathbb{R}$. Al trabajar con soporte compacto podemos usamos Stokes para deducir que toda forma que no integre 0 no puede ser exacta. Por otro lado el argumento para ver que toda forma que integra 0 sí que es exacta ya lo hemos dado en la prueba de 1.6.
Al igual que en el resto de cohomologías tenemos funtorialidad, Mayer-Vietoris y trivialidad local. Esto nos permite buscar estrategias similares a la seguida en el teorema de De Rham. En este caso si nuestra variedad es orientable definimos

$$\mathrm{PD}:\Omega^p(M)\Rightarrow\Omega^{n-p}_c(M)^*,\quad \mathrm{PD}(\omega)(\eta):=\int_M\omega\wedge\eta.$$

Claramente esta aplicación es lineal. Si restringimos el codominio a formas cerradas y consideramos $\omega\in B^p_{\mathrm{dR}}(M)$, $\exists\theta\in\Omega^{p-1}(M):\ d\theta=\omega$ tendremos por Stokes que:

$$0=\int_\emptyset\theta\wedge\eta=\int_M d(\theta\wedge\eta)=\int_M d\theta\wedge\eta+(-1)^{p-1}\int_M\theta\wedge d\eta=\int_M\omega\wedge\eta\ \Rightarrow\ \mathrm{PD}(\omega)(\eta)=0.$$

De igual manera, si $\omega\in Z^p_{\mathrm{dR}}(M),\ \eta\in B^{n-p}_c(M)$ se tiene que $\mathrm{PD}(\omega)(\eta)=0$.
Así que PD baja bien a las clases de cohomología, denotándola igual:

$$\mathrm{PD}:H^p_{\mathrm{dR}}(M)\Rightarrow H^{n-p}_c(M)^*,\quad \mathrm{PD}[\omega][\eta]:=\int_M\omega\wedge\eta.$$

Dualizando Mayer-Vietoris para $H^{\bullet}_c(M)$ y usando la misma estrategia que en el teorema de De Rham podemos ver que $H^p_{\mathrm{dR}}(M)\equiv_{\mathrm{PH}}H^{n-p}_c(M)^*$. Esto se conoce como la dualidad de Poincaré.
En el caso compacto la dimensión de los grupos de cohomología es finita.

Teorema 1.9. Dada una variedad diferenciable M compacta y orientable de dimensión n se tiene que

$$\dim H^p_{\mathrm{dR}}(M) = \dim H^{n-p}_{\mathrm{dR}}(M)\ \forall p.$$

Demostración. En primer lugar, toda forma en M tiene soporte compacto luego $H^{n-p}_{\mathrm{dR}}(M) = H^{n-p}_c(M)$. Además, como la dimensión es finita $\dim(H^{n-p}_c(M)) = \dim(H^{n-p}_c(M)^*)$ y como $H^{n-p}_c(M)^*$ es isomorfo a $H^p_{\mathrm{dR}}(M)$ se tiene la igualdad. $\square$

Aunque los números de Betti se definen a partir de la homología. En el caso compacto y orientable tenemos la dualidad de Poincaré luego $b_k(M) := \dim(H^k_{\mathrm{dR}}(M))$.
Un corolario inmediato es que la característica de Euler de cualquier variedad compacta y orientable de dimensión impar es 0.
Ejemplo 1.10. Aplicación del teorema de Hurewicz Aunque usaremos la versión absoluta más general cuando la necesitemos. De momento nos fijamos en que $\mathrm{Ab}(\pi_1(M)) \equiv H_1(M)$ siendo M conexa. Si además es orientable y compacta tomamos coeficientes reales para llegar a que

$$\mathrm{Ab}(\pi_1(M)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \equiv H_1(M, \mathbb{R}) \equiv H^{n-1}_{\mathrm{dR}}(M)^*.$$

En particular si $\pi_1(M)$ es finito tendremos que $H^1_{\mathrm{dR}}(M)$ es trivial pues $\dim(H^1_{\mathrm{dR}}(M)) = \dim(H^{n-1}_{\mathrm{dR}}(M)) = 0$.

1.2. Grupos de Lie

Los grupos de Lie nos ayudan a calcular los grupos de cohomología. Nos centraremos en los de compactos y conexos. Para estudiar en mayor profundidad la topología de los grupos de Lie podemos consultar [7].
Un primer inmediato resultado es que el grupo fundamental de un grupo de Lie conexo es abeliano. Esto es interesante pues nos facilita el trabajo al aplicar Hurewicz. También manera nos podemos ir al recubridor universal y computar en él los grupos de homotopía de orden superior. El primer no trivial vendrá dado por un grupo de homología luego lo podremos calcular de una manera más sencilla. Para justificar que el grupo fundamental de la componente conexa de la identidad de un grupo de Lie $(G, \odot)$ es abeliano damos explícitamente la homotopía.
Sean dos caminos σ_1, σ_2 con punto base e, identidad del grupo:

$$H(s,t) = \begin{cases} \sigma_1((1-s)(2t)) & \odot \quad \sigma_2(s(2t)), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \sigma_1(s(2t-1)+(1-s)) & \odot \quad \sigma_2((1-s)(2t-1)+s), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Comprobamos que $H(0,t) = \sigma_1 * \sigma_2(t),\ H(1,t) = \sigma_2 * \sigma_1(t),\ H(s,0) = e,\ H(s,1) = e.$
Solamente usado que la operación $\odot$ es continua y que existe un elemento neutro así que el argumento nos vale para estructuras más débiles.
Al aplicar Hurewicz no hace falta abelianizar el primer grupo de homotopía, directamente $\pi_1(G) \equiv H_1(G)$. Aunque no lo vamos a justificar, el segundo grupo de homotopía es siempre trivial[8]. Como $\pi_k(G) \equiv \pi_k(\widetilde{G})\ \forall k \geq 2$ podemos calcular $\pi_3(G)$ a partir de la homología. Si además pedimos que G sea compacto podremos usar la cohomología.
El problema es que como trabajamos con coeficientes reales perdemos la torsión. Solo podremos calcular el tercer grupo de homotopía racional.

Cohomología de grupos de Lie Una de las ventajas de trabajar con un grupo de Lie G es que su fibrado tangente es trivial. Tomamos un punto cualquiera, preferiblemente la identidad calculamos su espacio tangente T_eG y lo trasladamos a cada punto. Es normal preguntarse entonces si podemos deducir la cohomología del grupo a partir de su álgebra.
Veremos un resultado un poco más general. Dada una variedad diferenciable M y un grupo de Lie G, diremos que G actúa por la izquierda sobre M si existe $\rho : G \times M \to M$ diferenciable tal que

$$\rho(e,p) = p\ \forall p \in M, \qquad \rho(g, \rho(h,p)) = \rho(L_g(h), p)\ \forall g, h \in G.$$

La construcción que vamos a realizar también se puede hacer por acciones por la derecha de manera totalmente análoga.
Vamos a generalizar la idea de formas invariantes por la izquierda. Para ello denotamos por $\rho_g(p) := \rho(g,p)$ y definimos

$$\Omega^k_L(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) :\ \rho_g^*\omega = \omega\ \forall g \in G\}.$$

La diferencial exterior está bien definida en $d : \Omega^k_L(M) \to \Omega^{k+1}_L(M)$ pues $d(\rho_g^*\omega) = \rho_g^* d\omega$. Consideramos entonces

$$Z^k_L(G) := \{\omega \in \Omega^k_L(G) :\ d\omega = 0\}, \qquad B^k_L(G) := \{\omega \in \Omega^k_L(G) :\ \exists \theta \in \Omega^k_L(G),\ d\theta = \omega\}.$$

Definimos el k-ésimo grupo de cohomología de formas invariantes por la izquierda como

$$H^k_L(G) := \frac{Z^k_L(G)}{B^k_L(G)}.$$

El producto exterior se puede restringir al espacio de formas invariantes luego tiene sentido definir el anillo de cohomología de formas invariantes por la izquierda.
Veamos qué sucede cuando G es compacto y conexo.
Teorema 1.11. Sea G un grupo de Lie compacto y conexo actuando por la izquierda en una variedad diferenciable M. Entonces

$$H^k_L(M) \equiv H^k_{\mathrm{dR}}(M)\ \forall k.$$

Demostración. Tenemos que comprobar que dada $[\omega] \in H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ existe $\omega' \in H^k_L(M) :\ [\omega'] = [\omega]$. Tomando una medida bi-invariante μ en G proponemos como candidato

$$\omega' := \frac{1}{\mu(G)} \int_G \rho_g^* \omega d\mu.$$

Por ser μ invariante tenemos que $\rho_h^*\omega' = \omega'\ \forall h \in G$. Si ω ya es invariante es obvio que ω' también lo será.
Por otro lado, dado cualquier $g \in G$ existe $v^g \in T_eG$ tal que $\exp(v^g) = g$ por ser G compacto y conexo. De hecho $\exp(tv^g)$ es una homotopía diferenciable entre e y g luego $\rho^*_{\exp(g)} = \rho^*_e = 1 \in H^k(M)$ para cada $k \geq 0$ y por tanto

existe $\eta_g \in \Omega^{k-1}(M)$: $d\eta_g = \rho^*_{\exp(g)}\omega - \omega$.
Cuando vimos la invarianza por homotopía construimos explícitamente η_g :

$$\eta_g := h \circ H^*, \ H(g,t) = \rho_{\exp_{t\exp^{-1}(g)}}.$$

En todo grupo de Lie podemos definir una métrica plana invariante trasladando, por ejemplo por la izquierda, los vectores a T_eG. Como G es compacto, será completa y tomamos $E \subset T_eM$ de manera que el *cut locus* de G sea $G - \exp(E)$. Entonces $g \mapsto \eta_g$ restringida a $\exp(E)$ es diferenciable y localmente se puede extender al *cut locus*. Teniendo en cuenta también que $\mu(G - \exp(E)) = 0$:

$$\omega' - \omega = \int_{\exp(E)} \rho_g^*\omega - \omega \, d\mu = \int_{\exp(E)} d(\eta_g)\, d\mu = d\left(\int_{\exp(E)} \eta_g \, d\mu\right).$$

□

Una aplicación interesante es tomar $M = G$. Claramente $G \times G$ sigue siendo grupo de Lie y la aplicación ρ : $(G \times G) \times G \to G$ dada por

$$\rho((g,h),x) := gxh^{-1}$$

es una acción por la izquierda. Además las formas invariantes de G por ρ son las bi-invariantes de G. A las que denotaremos por $\Omega_I^k(G)$.
Una forma bi-invariante $\omega \in \Omega_I^k(G)$ es cerrada. Denotando por $\psi : G \to G, \ \psi(g) = g^{-1}$ sabemos que una forma $\omega \in \Omega^k(M)$ es invariante por la izquierda si y solo si $\psi^*\omega$ lo es por la derecha. Al evaluarla en la identidad: $\omega_e \in T_eG^*$ se tiene que $\psi^*\omega_e = (-1)^k\omega_e$. Como es bi-invariante $\psi^*\omega$ y $d\omega$ también lo son y

$$\psi^*\omega = (-1)^k\omega \ \Rightarrow \ \psi^*d\omega = d(\psi^*\omega) = (-1)^k d\omega, \quad \psi^*d\omega = (-1)^{k+1}d\omega,$$

Por tanto $d\omega = 0$.
Teorema 1.12. Dado un grupo de Lie G compacto y conexo se tiene que

$$H^k_{\mathrm{dR}}(G) \equiv \Omega_I^k(G) \ \forall k.$$

Demostración. $\Omega_I^k(G) = Z_I^k(G)$ donde por $Z_I^k(G)$ nos referimos a las formas bi-invariantes cerradas de G. Esto es lo mismo que decir que $B_I^k(G) \equiv 0$. En consecuencia

$$H^k_{\mathrm{dR}}(G) \equiv \frac{Z_I^k(G)}{B_I^k(G)} =: H_I^k(G).$$

Por tanto $H^k_{\mathrm{dR}}(G) \equiv H_I^k(G) \equiv \Omega_I^k(G)$. □

Si queremos calcular los anillos de cohomología de los grupos de Lie debemos usar otras estrategias. Sin embargo, con esta herramienta ya podemos llegar a algunos resultados.

Primeros grupos de cohomología Sea G un grupo de Lie compacto, conexo y semisimple. Sea ahora $\omega \in \Omega_I^1(G)$ y cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{g}$, se tiene que

$$0 = d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) = \omega([Y,X]).$$

Pero como $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ se tiene que $\omega(\mathfrak{g}) = 0$ luego $H^1_{\mathrm{dR}}(G) \equiv 0$.
Sucede lo mismo con el segundo grupo de cohomología. $\mathrm{Ad}_g^*\,\omega = \omega \ \forall g \in G \ \forall \omega \in \Omega_I^2(G)$ luego dado cualquier $g \in G$ existe $Z \in \mathfrak{g}$: $\exp(Z) = g$ y $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\mathrm{Ad}^*_{\exp(tZ)}\,\omega(X,Y)\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \omega(\mathrm{Ad}_{\exp(tZ)}\,X, \mathrm{Ad}_{\exp(tZ)}\,Y) = \omega([Z,X],Y) + \omega(X,[Z,Y]).$$

Con esto en mente calculamos $d\omega$:

$$0 = d\omega(X,Y,Z) = \omega([Z,Y],X) + \omega([X,Z],Y) + \omega([Y,X],Z) = \omega([Y,X],Z).$$

De nuevo, como $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ y $\omega([Y,X],\lambda Z) = \lambda\omega([Y,X],Z) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ deducimos que $H^2_{\mathrm{dR}}(G) \equiv 0$.
Sin embargo este resultado no es cierto para el tercer grupo de cohomología pues $\mathbb{S}^3$ es grupo de Lie compacto, conexo y semisimple pero $H^3_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^3) \equiv \mathbb{R}$. De hecho lo que sí que es cierto es que este grupo nunca es trivial. Una propiedad que tiene la forma de Killing Ω es que

$$\Omega([X,Y],Z) + \Omega(X,[Y,Z]) = 0.$$

Podemos comprobarlo directamente haciendo las cuentas. Vamos a ver parte de estas. Trabajamos en $\mathfrak{g}$ con base $e_1, \ldots, e_n$ y base dual $e^1, \ldots, e^n$:

$$\mathrm{ad}_{e_j} = C^l_{jk} e_l \otimes e^k \Rightarrow \mathrm{ad}_{e_i} \circ \mathrm{ad}_{e_j} = (C^h_{im} e_h \otimes e^m)(C^l_{jk} e_l \otimes e^k) = C^h_{im} C^l_{jk} \delta^m_l e_h \otimes e^k = C^h_{il} C^l_{jk} e_h \otimes e^k.$$

Así que $\Omega_{ij} e^i \otimes e^j = C^h_{il} C^l_{jk} \delta^k_h e^i \otimes e^j = C^k_{il} C^l_{jk} e^i \otimes e^j$. Entonces

$$\Omega([e_\alpha, e_\beta], e_\gamma) = \Omega(C^\mu_{\alpha\beta} e_\mu, e_\gamma) = C^k_{il} C^l_{jk} C^\mu_{\alpha\beta} \delta^i_\mu \delta^j_\gamma = C^k_{\mu l} C^l_{\gamma k} C^\mu_{\alpha\beta}.$$

El truco ahora es fijarse en que no estamos sumando en α, β, γ pero una de las constantes de estructura tiene tanto a α como a β y otra $C^k_{\mu l}$ a ninguna. Usamos Jacobi para redistribuir los índices:

$$C^k_{\mu l} C^\mu_{\alpha\beta} = C^k_{\alpha\mu} C^\mu_{\beta l} + C^k_{\beta\mu} C^\mu_{l\alpha}.$$

Si hacemos lo mismo con $\Omega(e_\alpha, [e_\beta, e_\gamma])$ vemos que efectivamente la identidad es cierta.
Una consecuencia inmediata de esta identidad es que si $\mathfrak{g}$ es semisimple inmediatamente Ω es no degenerada. $\mathfrak{g}$ descompone en suma directa de álgebras simples $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_r$ por definición. Esto se traduce en que Ω descompone en bloques diagonales $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$ cada uno asociado a un álgebra simple.
Consideramos el ideal $J := \{X \in \mathfrak{g}_j : \ \Omega_j(X, Y) = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{g}_j\}$. La identidad que hemos probado nos permite ver que es un ideal, pero $\mathfrak{g}_j$ es simple luego $J = (0)$.
Ahora que hemos comprobado que efectivamente Ω es no degenerada, definimos $\omega \in \Omega^3(G)$ como

$$\omega(X, Y, Z) := \Omega(X, [Y, Z]) \ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Como Ω es no degenerada y $\mathfrak{g}$ semisimple sabemos que $\omega \neq 0$. Por otro lado el corchete y la forma de Killing son invariantes por la adjunta luego $\omega \in \Omega^3_I(G)$. En consecuencia $H^3_{\mathrm{dR}}(G) \not\equiv 0$.

El grupo fundamental Hemos pedido que nuestro álgebra sea semisimple y hemos visto que $H^1_{\mathrm{dR}}(G) \equiv H^1(G; \mathbb{R}) \equiv 0$. Hurewicz nos dice que el abelianizado del grupo fundamental de una variedad conexa coincide con su primer grupo de homología singular.
Como $\pi_1(G)$ ya es abeliano afirmamos que $\pi_1(G)$ es finito si y solamente si $H_1(G)$ lo es. G es compacto y, sin necesidad de usar teoría de Hodge como haremos después, podemos ver que $H_1(G)$ es finitamente generado.[3] De esta manera aplicamos el teorema del coeficiente universal para obtener que

$$H^1(G; \mathbb{R}) \equiv H^1(G) \otimes \mathbb{R}, \quad H^1(G) \equiv \hom(H_1(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}).$$

Luego $H^1(G; \mathbb{R})$ es trivial si y solamente $H_1(G)$ lo es. Por tanto $H^1_{\mathrm{dR}}(G)$ es trivial si y solo si $\pi_1(G)$ es finito.
En consecuencia todo grupo de Lie G compacto, conexo y semisimple tiene grupo fundamental finito. El recíproco también es cierto, supongamos que G es un grupo de Lie compacto, conexo y que $H^1_{\mathrm{dR}}(G) \equiv 0$.
Una función invariante debe ser constante y por tanto $B^1_I(G) \equiv 0$. Por otro lado cualquier 1-forma invariante ω cumple que $d\omega(X, Y) = -\omega[Y, X]$ así que será cerrada si y solo si $\omega([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$. Por tanto $H^1_L(G)$ es el dual de $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Como hemos supuesto que $H^1_L \equiv 0$ tenemos que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. El álgebra es compacta y por tanto se puede escribir como suma directa de un álgebra semisimple $\mathfrak{h}$ y su centro. Pero entonces $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{g}$ y por tanto $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$.
Un grupo de Lie compacto y conexo es semisimple si y solo si su grupo fundamental es finito.
Teorema 1.13. Las únicas esferas que son grupos de Lie son $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^3$.

Demostración. Supongamos que $\mathbb{S}^n$ es grupo de Lie con $n \geq 2$. Al ser simplemente conexa sabemos que $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$ luego debería tratarse de un grupo semisimple. La única esfera con tercer grupo de cohomología no trivial es $\mathbb{S}^3$ luego $\mathbb{S}^n$ no puede ser grupo de Lie para $n \neq 0, 1, 3$. □

Si queremos ver en mayor profundidad la cohomología y homología de los grupos de Lie clásicos no nos queda otro remedio que usar herramientas más sofisticadas.

[3] Por un lado tendríamos que descomponer una sucesión exacta larga en varias cortas y por otro usar la sucesión de Mayer-Vietoris con un recubrimiento por abiertos contractibles.

1.3. Cohomología Dolbeault

Podemos ver cualquier variedad compleja M de dimensión n como una variedad diferenciable de dimensión $2n$. En el proceso perdemos la estructura casi compleja integrable. Vamos a usar un pequeño truco para trabajar de manera cómoda con M y no perder información.
Dado un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión m definimos su complexificado $V^{\mathbb{C}}$ como $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, queremos que sea un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión m así que definimos un producto por escalares escalares complejos

$$w(v \otimes z) := v \otimes wz.$$

Dado cualquier $v \otimes (x + yi) \in V^{\mathbb{C}},\ a, b \in \mathbb{R}$

$$v \otimes (x + yi) = v \otimes x + v \otimes yi = v \otimes x + v \otimes yi = (vx) \otimes 1 + (vy) \otimes i.$$

Dada una base $e_1, \ldots, e_m$ de V tenemos que $vx = a^j e_j,\ vy = b^j e_j$ y por tanto:

$$v \otimes (x + yi) = a^j e_j \otimes 1 + b^j e_j \otimes i = e_j \otimes a^j + e_j \otimes (b^j i) = (a^j + b^j i)(e_j \otimes 1).$$

Los elementos $e_j \otimes 1$ generan $V^{\mathbb{C}}$. Si suponemos que $v \otimes (x + yi) = 0$ es porque tanto vx como vy son 0. Por tanto $a^j = b^j = 0\ \forall j = 1, \ldots, m$ y deducimos que $e_1 \otimes 1, \ldots, e_m \otimes 1$ es base de $V^{\mathbb{C}}$. Por tanto $V^{\mathbb{C}}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión m. Además $\mathbb{R}\langle e_1 \otimes 1, \ldots, e_m \otimes 1\rangle \equiv V$.
Para simplificar la notación denotaremos por $e_j := e_j \otimes 1\ \forall j = 1, \ldots, m$.
Llevamos esta idea al espacio tangente de una variedad compleja M de dimensión n, aunque hemos trabajado solo en un espacio vectorial la construcción para variedades es equivalente. Dado $p \in M$ denotamos por $\mathcal{T}_p M$ a su espacio tangente complejo de dimensión n con base $\partial_{z^1}, \ldots, \partial_{z^n}$ y por $T_p M$ a su espacio tangente real de dimensión $2n$ con base $\partial_{x^1}, \ldots, \partial_{x^n}, \partial_{y^1}, \ldots, \partial_{y^n}$ donde $z^j = x^j + iy^j\ \forall j = 1, \ldots, n$. Por tanto $T_p M^{\mathbb{C}}$ es un espacio vectorial complejo de dimensión $2n$ con base $\partial_{x^1} \otimes 1, \ldots, \partial_{x^n} \otimes 1, \partial_{y^1} \otimes 1, \ldots, \partial_{y^n} \otimes 1$.
Dada cualquier $f \in \mathcal{O}_{M,z},\ f = f_x + i f_y$ se tiene que

$$\partial_{z^j}(f) = \partial_{x^j}(f_x) + i\partial_{y^j}(f_x) = \partial_{y^j}(f_y) - i\partial_{x^j}(f_y).$$

Es lógico definir las derivaciones asociadas a $\partial_{x^j} \otimes 1,\ \partial_{y^j} \otimes 1$ como

$$(\partial_{x^j} \otimes \{1\})(f) := \partial_{x^j}(f_x) + i\partial_{x^j}(f_y), \quad (\partial_{y^j} \otimes \{1\})(f) := \partial_{y^j}(f_x) + i\partial_{y^j}(f_y).$$

Denotando por $\partial_{x^j} := \partial_{x^j} \otimes 1,\ \partial_{y^j} := \partial_{y^j} \otimes 1,\ \partial_{z^j} \otimes 1 := \frac{1}{2}(\partial_{x^j} - i\partial_{y^j})$ y evaluando en las funciones coordenadas

$$\frac{1}{2}(\partial_{x^j} - i\partial_{y^j})(z^k) = \delta^k_j.$$

Encontramos ∂_{z^j} dentro de $T_p M^{\mathbb{C}}$ luego usamos la misma notación ∂_{z^j}.
Estamos construyendo n elementos y nos faltan otros n para completar la base. Lo más cómodo es tomar

$$\partial_{\bar{z}^j} := \frac{1}{2}(\partial_{x^j} + i\partial_{y^j}), \qquad \partial_{\bar{z}^j}(z^k) = 0\ \forall j, k = 1, \ldots, n.$$

Claramente $\partial_{z^1}, \ldots, \partial_{z^n}, \partial_{\bar{z}^1}, \ldots, \partial_{\bar{z}^n}$ es base de n.
Identificamos entonces $\mathcal{T}_z M$ con $T_z M^{1,0} := \mathbb{C}\langle \partial_{z^1}, \ldots, \partial_{z^n}\rangle$ y denotamos por $T_z M^{0,1} := \mathbb{C}\langle \partial_{\bar{z}^1}, \ldots, \partial_{\bar{z}^n}\rangle$:

$$T_z M^{\mathbb{C}} = T_z M^{1,0} \oplus T_z M^{0,1}.$$

Para construir la cohomología Dolbeault debemos trabajar con formas. Dado V $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión m se tiene que

$$V^{\mathbb{C}*} \equiv V^{*\mathbb{C}}.$$

De esta manera $T^*_p M^{\mathbb{C}*} \equiv \Omega^1_p(M)^{\mathbb{C}}$ con base $dx^1 \otimes 1, \ldots, dx^n \otimes 1,\ dy^1 \otimes 1, \ldots, dy^n \otimes 1$. Notacionalmente es más cómodo trabajar con $dx^1, \ldots, dx^n, dy^1, \ldots, dy^n$. Definiendo $dz^j := dx^j + idy^j,\ d\bar{z}^j := dx^j - idy^j,\ j = 1, \ldots, m$. Claramente

$$dz^j(\partial_{z^k}) = \frac{1}{2}(dx^j + idy^j)(\partial_{x^k} - i\partial_{y^k}) = \delta^j_k,\ dz^j(\partial_{\bar{z}^k}) = 0,\ d\bar{z}^j(\partial_{z^k}) = 0,\ d\bar{z}^j(\partial_{\bar{z}^k}) = \delta^j_k.$$

En consecuencia $dz^1, \ldots, dz^n, d\bar{z}^1, \ldots, d\bar{z}^n$ es base dual de $\partial_{z^1}, \ldots, \partial_{z^n}, \partial_{\bar{z}^1}, \ldots, \partial_{\bar{z}^n}$.
Aunque hemos hecho esta construcción a nivel local nada nos impide definirlo extender las formas mediante particiones diferenciables de la unidad. Separamos el espacio de 1-formas complexificadas en

$$\Omega^{1,0}(M) := \langle dz^1, \ldots, dz^n\rangle,\ \Omega^{0,1}(M) := \langle d\bar{z}^1, \ldots, d\bar{z}^n\rangle\ \Rightarrow \Omega^1(M)^{\mathbb{C}} = \Omega^{1,0}(M) \oplus \Omega^{0,1}(M).$$

Para construir formas complexificadas de orden superior tomamos el producto exterior:

$$\Omega^{p,q}(M) := \left(\bigwedge^{p}\Omega^{1,0}(M)\right) \wedge \left(\bigwedge^{p}\Omega^{0,1}(M)\right).$$

$\Omega^k(M)^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M)$ donde una forma $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$ tiene expresión local

$$\omega = \omega_{IJ} dz^I \wedge dz^J, \ |I| = p, \ |J| = q.$$

Es el momento de construir la diferencial exterior, dada $f \in \mathcal{F}(M)^{\mathbb{C}} = \Omega^0(M)^{\mathbb{C}}$:

$$d(f) = \partial_{x^j}(f)dx^j + \partial_{y^j}(f)dy^j = \partial_{z^j}(f)dz^j + \partial_{\bar{z}^j}(f)d\bar{z}^j.$$

Esta última expresión nos sugiere construir los siguientes operadores

$$\partial : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q}(M), \qquad \bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M).$$

que vienen dados localmente para $\omega = \omega_{IJ} dz^I \wedge dz^J$ como

$$\partial\omega := \partial_{z^k}(\omega_{IJ})dz^k \wedge dz^I \wedge dz^J, \qquad \bar{\partial}\omega := \partial_{\bar{z}^k}(\omega_{IJ})d\bar{z}^k \wedge dz^I \wedge dz^J.$$

Como $d = \partial + \bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q+1}(M)$ sabemos que

$$0 = d^2 = \partial^2 + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial) + \bar{\partial}^2 \ \Rightarrow$$

$$\partial^2 = 0, \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0.$$

En particular nos queda el siguiente diagrama anticonmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{p-1,q-1}(M) \arrow[r, "\bar{\partial}"] \arrow[d, "\partial"] & \Omega^{p-1,q}(M) \arrow[r, "\bar{\partial}"] \arrow[d, "\partial"] & \Omega^{p-1,q+1}(M) \arrow[d, "\partial"] \\
\Omega^{p,q-1}(M) \arrow[r, "\bar{\partial}"] \arrow[d, "\partial"] & \Omega^{p,q}(M) \arrow[r, "\bar{\partial}"] \arrow[d, "\partial"] & \Omega^{p,q+1}(M) \arrow[d, "\partial"] \\
\Omega^{p+1,q-1}(M) \arrow[r, "\bar{\partial}"] & \Omega^{p+1,q}(M) \arrow[r, "\bar{\partial}"] & \Omega^{p+1,q+1}(M)
\end{tikzcd}$$

Como $\partial^2 = 0, \ \bar{\partial}^2 = 0$ podemos definir grupos de cohomología con ambos operadores al igual que hicimos con d. Sin embargo para trabajar con fibrados vectoriales complejos el operador que funciona bien es $\bar{\partial}$. Si quisiésemos usar ∂ tendríamos que tratar con fibrados vectoriales antiholomorfos lo que acaba siendo más engorroso.
Denotamos por

$$Z^{p,q}(M) := \{\omega \in \Omega^{p,q}(M) : \ \bar{\partial}\omega = 0\}, \qquad B^{p,q}(M) := \{\omega \in \Omega^{p,q}(M) : \ \exists\theta \in \Omega^{p,q-1}(M) : \ \bar{\partial}\theta = \omega\}.$$

Definición 1.14. Cohomología Dolbeault Dada una variedad compleja M se define el (p,q)-ésimo grupo de cohomología Dolbeault como el $\mathbb{C}$-espacio vectorial

$$H^{p,q}(M) = \frac{Z^{p,q}(M)}{B^{p,q}(M)}.$$

Además, si $\dim(H^{p,q})(M) < \infty$ denotaremos por $h^{p,q} := \dim(H^{p,q})(M)$.
Los $h^{p,q}$ se llaman números de Hodge de M.
Al igual que con De Rham podemos construir un anillo. En este caso dadas $[\omega] \in H^{p,q}(M), \ [\theta] \in H^{p',q'}(M)$ tendremos que $[\omega] \wedge [\theta] \in H^{p+p',q+q'}(M)$. Cuando veamos teoría de Hodge empezaremos a dar resultados sobre esta cohomología en el caso compacto.
Debemos tener cuidado pues los números de Hodge no son invariantes topológicos. La trivialidad local sí que es cierta, de hecho, a esta propiedad se la conoce como el lema de $\bar{\partial}$-Poincaré ó Dolbeault–Grothendieck.
Teorema 1.15. Lema de $\bar{\partial}$-Poincaré Dada una variedad compleja contractible M se tiene que

$$H^{p,q}(M) \equiv 0 \ \forall q > 0.$$

Demostración. Nos saltaremos algunos detalles de la prueba, esta se puede encontrar en [12].
En primer lugar veamos cómo es la fórmula integral de Cauchy para una función diferenciable. Tomamos $D := D_r(z_0) \subset \mathbb{C}$ y $f : \bar{D} \to \mathbb{C}$ diferenciable. Para cada $0 < \varepsilon < r$ definimos $D_\varepsilon := D_\varepsilon(z_0)$:

$$\eta := \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \in \Omega^{1,0}(D - D_\varepsilon).$$

Ahora calculamos $d\eta = \bar{\partial}\eta = \frac{1}{2\pi i}\frac{\bar{\partial}(f)}{z-z_0} d\bar{z} \wedge dz$ y aplicamos Stokes:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \int_{\partial(D-D_\varepsilon)} \eta = \int_{D-D_\varepsilon} d\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_{D-D\varepsilon} \frac{\bar{\partial}(f)}{z-z_0}\, d\bar{z} \wedge dz.$$

Si cambiamos a coordenadas polares vemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = f(z_0), \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{D_\varepsilon} \frac{\bar{\partial}(f)}{z-z_0}\, d\bar{z} \wedge dz = 0.$$

De esta manera obtenemos la fórmula integral de Cauchy para funciones diferenciables

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{D} \frac{\bar{\partial}(f)}{z-z_0}\, dz \wedge d\bar{z}.$$

Con ella podemos ver que el resultado es cierto para $M \subset \mathbb{C}$ conexa, simplemente conexa y posiblemente con borde. Solo tenemos que fijarnos en $H^{0,1}(M),\ H^{1,1}(M)$. El primer grupo es trivial por ser M conexo por caminos. Veamos qué sucede entonces con $g(z)dz \in \Omega^1(M),\ g \in \mathcal{F}(M) \otimes \mathbb{C}$. Usando particiones diferenciables de la unidad suponemos sin pérdida de generalidad que g tiene soporte compacto.
Dado cualquier $z_0 \in M$ tomamos $\varepsilon > 0$ de forma que $D_{2\varepsilon} := D_{2\varepsilon}(z_0) \in M$ y otra partición diferenciable de la unidad $\{\varphi, \psi\}$ subordinada a $\{D - D_\varepsilon, D_{2\varepsilon}\}$:

$$f_\psi(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{g(w)\psi(w)}{w-z}\, dw \wedge d\bar{w}.$$

Como $g(w)\psi(w)$ es idénticamente nula en D_ε no tenemos polos al integrar y sabemos que f_ψ es diferenciable. Si calculamos $\bar{\partial}(f_\psi)$ podemos conmutar la derivada con el signo integral y como $\frac{1}{w-z}$ es holomorfa en el soporte de $g\psi$ deducimos que $\bar{\partial}(f_\psi) = 0$.
Por otro lado definimos $f_\varphi(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{g(w)\varphi(w)}{w-z} dw \wedge d\bar{w}$ y, aprovechando que tiene soporte compacto, hacemos un cambio de variables $u := w - z$. Derivamos bajo el signo integral y deshacemos el cambio:

$$\frac{\partial f_\varphi}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial(g\varphi)}{\partial \bar{w}}(w)\, \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z}.$$

Usando la fórmula de Cauchy llegamos a que efectivamente $\frac{\partial f_\varphi}{\partial \bar{z}}(w) = g(w)\varphi(w) \ \Rightarrow\ \bar{\partial}(f_\varphi + f_\psi) = g$.
En el caso multivariable también tenemos en cuenta el borde. Esto hace que haya que dividir la demostración es dos partes. Primer construimos la antiderivada en una región más pequeña sin borde cualquiera y después usamos un argumento de convergencia para llegar al borde. Daremos por terminada la prueba después de ver la primera.
Sea $\omega = \omega_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J \in \Omega^{|I|,|J|}(M)$. También la podemos escribir como $\omega = \omega_I dz^I$ donde $\omega_I := \omega_{IJ} d\bar{z}^J \in \Omega^{0,|J|}(M)$. Como $\bar{\partial}(\omega) = \bar{\omega}_I dz^I = \bar{\omega}_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J$ se tiene que $\omega \in Z^{|I|,|J|}(M) \ \Leftrightarrow\ \omega_I \in Z^{0,|J|}(M)\ \forall J$. De igual manera $\omega \in B^{|I|,|J|}(M) \ \Leftrightarrow\ \omega_I \in B^{0,|J|}(M)\ \forall J$.
Sea entonces $\omega \in Z^{0,q}(M),\ q \geq 1$. Construiremos inductivamente la antiderivada sobre cada índice. Diremos que $\omega = \omega_J d\bar{z}^J \equiv_k 0$ si

$$\sum_{J \not\subset \{1,\ldots,k\}} \omega_J d\bar{z}^J = 0.$$

El objetivo es ver que si $\omega \equiv_k 0$ entonces existe $\eta \in \Omega^{0,q-1}(M) :\ \omega - \bar{\partial}\eta \equiv_{k-1} 0$. Como $J \subset \{1,\ldots,n\}\ \forall J$ sabemos que $\omega \equiv_n 0$. De igual manera $\omega = 0 \ \Leftrightarrow\ \omega \equiv_0 0$.
Sea entonces $\omega \in Z^{0,q}(M),\ \omega \equiv_k 0$. Podemos escribirla como

$$\omega = \omega^1 \wedge d\bar{z}^k + \omega^2,\ \omega^2 \equiv_{k-1} 0.$$

Sabemos que $0 = \bar{\partial}\omega = \bar{\partial}\omega^1 \wedge d\bar{z}^k + \bar{\partial}\omega^2$. Tomando $n \geq s > k$ llegamos a que

$$0 = \partial_{\bar{z}^s}(\omega_J) dz^s \wedge d\bar{z}^J = \sum_{k\in J} \partial_{\bar{z}^s}(\omega_J^1) dz^s \wedge dz^k \wedge d\bar{z}^{J-\{k\}} + \sum_{k \notin J} \partial_{\bar{z}^s}(\omega_J^2) dz^s \wedge d\bar{z}^I.$$

Como los ω_J^2 cumplen que $k \notin J$ deducimos que $\partial_{\bar{z}^s}(\omega_J^1) dz^s \wedge d\bar{z}^{J-\{k\}} = 0\ \forall s > k$.
Ya tenemos todo lo necesario, definimos para cada $J :\ k \in J$ y $r_k > 0$ lo suficientemente pequeño $\eta := (-1)^{q-1}\eta_J d\bar{z}^{J-\{k\}}$ como

$$\eta_J(z^1,\ldots,z^n) := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|\leq r_k} \omega_J^1(z^1,\ldots,z^{k-1},\xi,z^{k+1},\ldots,z^n)\, \frac{d\xi \wedge d\bar{\xi}}{\xi - z}.$$

Sabemos que $\frac{\partial \eta_J}{\partial \bar{z}^k} = \omega_J^1$ y que al derivar respecto de $s > k$ y conmutar por el signo integral acabamos integrando la función nula.
De esta manera $\bar{\partial}(\eta) = \sum_{k \in J} (-1)^{q-1} \omega_J^1 d\bar{z}^k \wedge d\bar{z}^J + \omega^3,\ \omega^3 \equiv_{k-1} 0$ luego

$$\omega - \bar{\partial}(\eta) = \omega^2 - \omega^3 + \sum_{k \in J} \omega_J^1 d\bar{z}^J \wedge d\bar{z}^k - (-1)^{q-1} \omega_J^1 d\bar{z}^k \wedge d\bar{z}^J = \omega^2 - \omega^3 \equiv_{k-1} 0.$$

$\square$

2. Teoría de Hodge

En una variedad diferenciable compacta, conexa y orientable M de dimensión n se tiene que $b_k = b_{n-k}$ $\forall k$. Este resultado se puede ver de una manera más general mediante una métrica riemanniana. Usando particiones diferenciables de la unidad podemos construir dicha métrica sobre cualquier variedad diferenciable. Otra manera menos elemental para ver que toda variedad diferenciable admite alguna métrica riemanniana es mediante el embebimiento de Whitney.
Usando esta métrica definimos una nueva clase de formas diferenciales: las armónicas. Para el caso complejo podemos hacer una construcción similar con una métrica hermítica. Esta nos permite ver los grupos de cohomología Dolbeault de una variedad compleja compacta son de dimensión finita además de la dualidad de Serre.
Por último nos centramos en las variedades Kähler donde podemos relacionar de manera directa De Rham y Dolbeault.

2.1. Teoría de Hodge en variedades diferenciables

Sea (M, g) una variedad riemanniana. Nuestro objetivo es construir poco a poco una nueva métrica riemanniana sobre $\Omega^*(M)$ que funcione bien con $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}$. Además usaremos la métrica para crear cierta dualidad entre $\Omega^k(M)$ y $\Omega^{n-k}(M)$.
Definimos un nuevo producto escalar sobre $\Omega^k(M)$. Para ello repasaremos algo de álgebra tensorial. En coordenadas locales $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. $g \in T_2^0(M)$ nos permite transformar vectores en formas:

$$\omega^v = \omega_i^v dx^i := (g_{ij} dx^i \otimes dx^j)(v^k \partial_{x^k}) = g_{ij} v^k dx^i \delta_k^j = g_{ij} v^j dx^i \quad \forall v = v^k \partial_{x^k} \in T_p M.$$

Veamos g_{ij} como una matriz y denotemos por g^{ij} a su inversa: es decir $g^{jk} g_{ik} = g_{ki} g^{kj} := \delta_i^j$. Claramente g^{ij} sigue siendo simétrica y definida positiva luego $\bar{g} := g^{ij} \partial_{x^i} \otimes \partial_{x^j}$ es una métrica riemanniana sobre $\Omega^1(M)$.
Usando la misma idea que hemos visto para transformar vectores en formas pero al revés vemos que:

$$\omega_i^v g^{ij} \partial_{x^j} = (g_{ik} v^k)(g^{ij} \partial_{x^j}) = v^k \delta_k^j \partial_{x^j} = v^j \partial_{x^j}.$$

Hemos establecido una dualidad entre las formas y las vectores mediante g.
Introducimos el símbolo de Levi-Civita $\epsilon_{i_1,\ldots,i_n} := \det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$, donde $e_1, \ldots, e_n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Claramente $\epsilon : \{1, \ldots, n\}^n \to \{-1, 0, 1\}$ pues $\epsilon_{1,2,\ldots,n} = 1$ y, dada cualquier permutación $\sigma \in S^n$, con signo $\varepsilon(\sigma)$ tendremos que $\epsilon_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(n)}} = (-1)^{\varepsilon} \epsilon_{i_1,\ldots,i_n}$. Si $i_j = i_k$ para algún $j \neq k$ tomamos la trasposición que intercambia j, k y

$$\epsilon_{i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_k,\ldots,i_n} = -\epsilon_{i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_j,\ldots,i_n} = -\epsilon_{i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_k,\ldots,i_n} \;\Rightarrow\; \epsilon_{i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_k,\ldots,i_n} = 0.$$

Con esta notación el elemento de volumen $\mu = \sqrt{\det(g)} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ se puede escribir como

$$\mu = \mu_{i_1,\ldots,i_n} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}, \qquad \mu_{i_1,\ldots,i_n} := \frac{\sqrt{\det(g)}}{n!} \epsilon_{i_1,\ldots,i_n}.$$

Si denotamos por $\epsilon^{i_1,\ldots,i_n} := \det(e^{i_1}, \ldots, e^{i_n})$ donde $e^1, \ldots, e^n$ es la base dual de la canónica en $\mathbb{R}^n$:

$$\epsilon^{i_1,\ldots,i_n} \det(g)^{-1} := g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_n j_n} \epsilon_{j_1,\ldots,j_n}.$$

Tenemos la notación necesaria para extender el producto que tenemos en $\Omega^1(M)$ a $\Omega^k(M)$, lo definimos para una base y luego extendemos por linealidad:

$$\langle\langle dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k} \rangle\rangle := \det(g^{i_l j_h})_{l,h=1}^k.$$

Se trata de un producto escalar pues $\bar{g}$ vista como matriz es simétrica luego $g^{i_l j_h}$, $1 \leq l, h \leq k$ también. Al diagonalizarlas nos quedan autovalores positivos pues los de $\bar{g}$ lo son.

Existe una manera más sencilla de definir este producto escalar. Dadas coordenadas locales $x^1,\dots,x^n$ aplicamos Gram-Schmidt:

$$\partial_y^i := \partial_{x^i} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{g(\partial_{x^i},\partial_{y^j})}{g(\partial_{y^j},\partial_{y^j})}\partial_{y^j}.$$

De esta manera podremos suponer siempre que g es una matriz diagonal. Es importante recalcar que aunque encontremos esta base ortogonal los corchetes $[\partial_y^i,\partial_y^j]$ no tienen por qué anularse. No podremos afirmar que van a existir coordenadas de forma que g sea diagonal. Esta idea nos permite ganar elegancia y en algún momento la usaremos, trabajaremos desde el primer enfoque para entender mejor qué está sucediendo.
Definimos el operador estrella de Hodge $*:\Omega^k(M)\to\Omega^{n-k}(M)$ como

$$*(dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}) = \frac{\sqrt{\det(g)}}{(n-k)!}g^{i_1j_1}\ldots g^{i_kj_k}\epsilon_{j_1,\dots,j_n}dx^{j_{k+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{j_n}.$$

Con una base ortogonal $\phi^1,\dots,\phi^n$ denotamos por $g^j := g^{jj}$:

$$*(\phi^{i_1}\wedge\ldots\wedge\phi^{i_k}) = \frac{\sqrt{\det(g)}}{(n-k)!}g^{j_1}\ldots g^{j_k}\epsilon_{j_1,\dots,j_n}\phi^{j_{k+1}}\wedge\ldots\wedge\phi^{j_n}.$$

Veamos que este operador funciona bien con el producto escalar que definimos previamente:

$$(dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k})\wedge*(dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_k}) = \frac{\sqrt{\det(g)}}{(n-k)!}g^{j_1\kappa_1}\ldots g^{j_k\kappa_k}\epsilon_{\kappa_1,\dots,\kappa_n}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{\kappa_{k+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{\kappa_n} =$$

$$\frac{1}{(n-k)!}g^{j_1\kappa_1}\ldots g^{j_k\kappa_k}\epsilon_{\kappa_1,\dots,\kappa_n}\epsilon^{i_1,\dots,i_k,\kappa_{k+1},\dots,\kappa_n}\ \mu = g^{j_1\kappa_1}\ldots g^{j_k\kappa_k}\delta^{i_1,\dots,i_k}_{\kappa_1,\dots,\kappa_k}\ \mu = \det(g^{i_lj_h})_{l,h=1}^k\ \mu.$$

Por tanto sabemos que $\omega\wedge*\eta = \langle\langle\omega,\eta\rangle\rangle\mu\ \forall\omega,\eta\in\Omega^k(M)$.
Ahora componemos $*$ consigo mismo para ver que $*^2 = (-1)^{k(n-k)}1_{\Omega^k(M)}$:

$$*^2(dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}) = *\left(\frac{\sqrt{\det(g)}}{(n-k)!}g^{i_1j_1}\ldots g^{i_kj_k}\epsilon_{j_1,\dots,j_n}dx^{j_{k+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{j_n}\right) =$$

$$\frac{(-1)^{k(n-k)}\det(g)}{k!(n-k)!}g^{i_1j_1}\ldots g^{i_kj_k}\epsilon_{j_1,\dots,j_n}g^{j_{k+1}h_{k+1}}\ldots g^{j_nh_n}\epsilon_{h_1,\dots,h_n}dx^{h_1}\wedge\ldots\wedge dx^{h_k} =$$

$$\frac{(-1)^{k(n-k)}}{k!(n-k)!}\epsilon^{i_1,\dots,i_k,h_{k+1},\dots,h_n}\epsilon_{h_1,\dots,h_n}dx^{h_1}\wedge\ldots\wedge dx^{h_k} = (-1)^{k(n-k)}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}.$$

La última identidad nos dice que $*^{-1} := (-1)^{k(n-p)}*$. Calculando $\langle\langle\mu,\mu\rangle\rangle = 1$:

$$1\wedge(*1) = \langle\langle 1,1\rangle\rangle\mu, \qquad \mu\wedge(*\mu) = \langle\langle\mu,\mu\rangle\rangle\mu.$$

Luego $*\mu = 1,\ *1 = \mu$. Al principio hemos mencionado que nos interesaba definir un producto escalar en $\Omega^k(M)$ que funcionase bien con la diferencial exterior. $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ no es el operador que buscamos. De hecho vamos a pedir que M sea compacta y orientable pues usaremos una integral para definirlo.

$$(\,\cdot\,,\,\cdot\,):\Omega^k(M)\times\Omega^k(M)\to\mathbb{R}, \quad (\omega,\eta) := \int_M \langle\langle\omega,\eta\rangle\rangle\,\mu.$$

Está claro que se trata de un otro producto escalar pues al calcular (ω,ω) estamos integrando una función no negativa. Busquemos su operador adjunto, dadas cualesquiera $\omega\in\Omega^k,\ \eta\in\Omega^{k+1}(M)$ usamos Stokes:

$$(d\omega,\eta) = \int_M d\omega\wedge*\eta = (-1)^{k+1}\int_M \omega\wedge d*\eta = (-1)^{k+1}\int_M \omega\wedge*(*^{-1}d*\eta) = (-1)^{k+1}(\omega,*^{-1}d*\eta).$$

Recordemos que $\eta\in\Omega^{k+1}(M)$ luego definimos $d^*\omega = (-1)^k *^{-1} d*\omega\ \forall\omega\in\Omega^k(M)$. De esta manera la identidad $(d\omega,\eta) = (\omega,d^*\eta)$ es cierta y d^* es el operador adjunto de d para el producto escalar $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$.
Recalcamos que d^* se puede definir sobre toda variedad riemanniana, la compacidad solo la necesitamos

para la construcción de $(\cdot\,,\cdot)$. Con d y d^* podemos generalizar el operador de Laplace a cualquier k-forma en una variedad riemanniana. Se define el laplaciano para cada k como

$$\Delta := d^*d + dd^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M).$$

Dada $\omega = \omega_I dx^I \in \Omega^k(M)$ y tomando coordenadas locales $x^1, \ldots, x^n$:

$$d^*d\omega = (-1)^{k+1} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x^k \partial x^j} *^{-1} (dx^k \wedge *(dx^j \wedge dx^I)), \quad dd^*\omega = (-1)^k \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x^k \partial x^j} dx^k \wedge *^{-1}(dx^j \wedge *dx^I)$$

Veamos qué pasa al trabajar en $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual. Para simplificar las cuentas comenzamos probando:

$$*^{-1}(dx^j \wedge *(dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k})) = \frac{(-1)^{(k-1)(n-k+1)}}{(n-k)!(k-1)!} \epsilon^{j_1,\ldots,j_n} \delta^{jh} \epsilon_{h,j_{k+1},\ldots,j_n,h_1,\ldots,h_{k-1}} dx^{h_1} \wedge \ldots \wedge dx^{h_{k-1}} =$$

$$\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \delta^{j_1,\ldots,j_k}_{h,h_1,\ldots,h_{k-1}} \delta^{jh} dx^{h_1} \wedge \ldots \wedge dx^{h_{k-1}} = (-1)^{j+k} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k} = (-1)^{k-1} \iota_{\partial_{x^j}} (dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}).$$

Luego dada $\omega = \omega_I dx^I \in \Omega^k(M)$ calculamos rápidamente

$$\Delta\omega = -\frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x^k \partial x^j} \left(\iota_{\partial x^k}(dx^j \wedge dx^I) + dx^k \wedge \iota_{\partial x^j} dx^I \right) =$$

$$-\frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x^k \partial x^j} \left(\delta^k_j dx^I - dx^j \wedge \iota_{\partial x^k} dx^I + dx^k \wedge \iota_{\partial x^j} dx^I \right) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x^k \partial x^k} dx^I.$$

Para la última igualdad separamos en dos sumas y usamos la regla de Schwarz.
Efectivamente el laplaciano que hemos definido generaliza el usual.
También podemos calcular el laplaciano con una métrica cualquiera para funciones. Como $dd^*f = 0\ \forall f \in \mathcal{F}(M)$ se tiene que

$$\Delta f = d^*(\partial_{x^j}(f)dx^j) = -\frac{1}{(n-1)!} * d(\partial_{x^j}(f) g^{ji} \epsilon_{i,i_1,\ldots,i_{n-1}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}) =$$

$$-\frac{1}{(n-1)!} * \partial_{x^j} \partial^{x^i}(f) \epsilon_{i,i_1,\ldots,i_{n-1}} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{n-1}} =$$

$$-\frac{\det(g)^{-1}}{(n-1)!} \partial_{x^j} \partial^{x^i}(f) \delta^{j,i_1,\ldots,i_{n-1}}_{i,i_1,\ldots,i_{n-1}} = -\det(g)^{-1} \partial_{x^j} \partial^{x^j}(f).$$

Veamos la importancia de este operador, para ello definimos qué es una forma armónica.
Definición 2.1. Forma armónica Dada una variedad riemanniana (M, g) diremos que $\omega \in \Omega^k(M)$ es armónica si $\omega \in \operatorname{Ker} \Delta$. Denotaremos por $\mathcal{H}^k(M) := \Omega^k(M) \cap \operatorname{Ker}(\Delta)$.
Cuando M es compacta y orientable podemos caracterizar las formas armónicas. Supongamos que tenemos $\omega \in \mathcal{H}^k(M)$:

$$0 \leq (d\omega, d\omega) = (d^*d\omega, \omega) = -(dd^*\omega, \omega) = -(d^*, d^*\omega) \geq 0 \ \Rightarrow d\omega = 0,\ d^*\omega = 0.$$

Es evidente que el recíproco es cierto. Estas formas todavía tienen un sentido más geométrico.
Proposición 2.2. Sea M una variedad riemanniana, compacta y orientable. Entonces son equivalentes

- $\omega \in \mathcal{H}^k(M)$.
- $d\omega = 0,\ d^*\omega = 0$.
- $d\omega = 0$ y es el único representante de su clase de homología que minimiza la norma $\|\theta\| := (\theta, \theta)^{1/2}$.

Demostración. Sea $\omega \in Z^p(M)$ y supongamos que $d^*\omega = 0$. Consideremos cualquier $\theta \in \Omega^{k-1}(M)$:

$$(\omega + d\theta, \omega + d\theta) = (\omega, \omega) + 2(\omega, d\theta) + (d\theta, d\theta) = (\omega, \omega) + 2(d^*\omega, \theta) + (d\theta, d\theta) = (\omega, \omega) + (d\theta, d\theta).$$

De aquí deducimos que ω minimiza la norma dentro de su clase de cohomología. Recíprocamente suponemos que $\omega \in Z^p(M)$ minimiza y tomamos $f(t) := \|\omega + td\eta\|^2$. f tiene un mínimo en 0 luego

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(t) = 2\,(\omega, d\eta) = 2\,(d^*\omega, \eta)\,.$$

Como η es arbitraria y $(\cdot\,,\cdot)$ es no degenerado sabemos que $d^*\omega = 0$. $\square$

Supongamos por un momento que toda clase de cohomología admite un representante armónico. Veremos que esto es cierto cuando M es compacta y orientable y por tanto tendremos $\mathcal{H}^k(M) \equiv H^k_{\mathrm{dR}}(M)$. Sin embargo debemos tener cuidado ya que en general el producto de dos formas armónicas no nos da una nueva forma armónica.
Operando bien con los signos comprobamos que

$$*\Delta = \Delta * .$$

Dada $\omega \in \mathcal{H}^k(M)$ sabemos que $*\omega \in \mathcal{H}^{n-k}(M)$. Aunque no tengamos el anillo de cohomología representado con formas armónicas sí que tenemos la dualidad de Poincaré. Dada M variedad diferenciable compacta, orientable y conexa toda función armónica es constante. Esto se debe a que debe cumplirse que $df = 0$. Análogamente, si $\omega = f\mu$ siendo μ el elemento de volumen y suponemos que ω es armónica entonces $*\omega$ también lo es. Pero $*\omega = f$ luego $\mathcal{H}^n(M) = \{k\mu : \ k \in \mathbb{R}\}$.

2.2. Teoría de Hodge en variedades complejas

Sea (M, J) una variedad compleja de dimensión n. Diremos que un tensor $h \in \Omega^{1,0}(M) \otimes \Omega^{0,1}(M)$ es una métrica hermítica si al expresarlo en coordenadas locales $h = h_{ij} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ y evaluar en p se tiene que $(h_{ij}(p))_{i,j=1}^n$ es una matriz hermítica y definida positiva.
Al ser un tensor de orden 2 descompone en parte simétrica y antisimétrica luego definimos

$$g := \frac{1}{2}(h + \bar{h}) = h_{ij} \frac{dz^i \otimes d\bar{z}^j + dz^j \otimes d\bar{z}^i}{2}, \qquad \omega := \frac{i}{4}(h - \bar{h}) = \frac{i}{2} h_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j.$$

g es una métrica riemanniana y $\omega \in \Omega^{1,1}(M)$. Aunque podemos trabajar directamente con $\frac{1}{2}(h - \bar{h})$ multiplicamos por $\frac{i}{2}$ para simplificar las expresiones que vendrán después. Llamaremos a ω forma fundamental de h. Claramente $h = g - 2i\omega$.
Al igual que en el caso riemanniano, usando particiones diferenciables de la unidad, vemos que toda variedad compleja admite una métrica hermítica. Por tanto cuando digamos que M es una variedad hermítica queremos decir que hemos fijado alguna métrica h.
Si fijamos un punto $p \in M$ y tomamos $h_p : \Omega_p^{1,0}(M) \otimes \Omega_p^{0,1}(M)$ sabemos por Sylvester que existe una base $e^1, \ldots, e^n$ de $\Omega_p^{1,0}(M)$ tal que

$$h_p = \sum_{j=1}^n e^j \otimes \bar{e}^j \;\Rightarrow \omega_p = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n e^j \wedge \bar{e}^j.$$

Tomando ahora $e_x^j := \frac{e^j + \bar{e}^j}{2}$, $e_y^j := \frac{e^j - \bar{e}^j}{2i}$ llegamos a que

$$\omega_p = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n e^j \wedge \bar{e}^j = \sum_{j=1}^n e_x^j \wedge e_y^j.$$

Podemos calcular fácilmente $\omega_p^n = n!\, e_x^1 \wedge e_y^1 \wedge \ldots \wedge e_x^n \wedge e_y^n$. Como $g_p = \sum_{j=1}^n e_x^j \otimes e_x^j + e_y^j \otimes e_y^j$ cumple que su determinante es 1 llegamos a que que $\frac{\omega^n}{n!} = \mu$.
Como las coordenadas van a pares llegamos a que $\frac{\omega^n}{n!}$ siempre tiene signo positivo y por tanto toda variedad casi compleja es orientable. De hecho la estructura casi compleja determina una orientación canónica.
Otro detalle en que fijarse es que dado g producto escalar en M y compatible con la estructura casi compleja $J :\ \ g(Ju, Jv)) = g(u, v)\ \forall u, v \in T_pM$. Definimos $\omega(u, v) := \frac{1}{2} g(Ju, v)$. Fijando p y tomando una base adecuada:

$$g = \sum_{j=1}^n e_x^j \otimes e_x^j + e_y^j \otimes e_y^j \;\Rightarrow\; \omega_p = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n -e_y^j \otimes e_x^j + e_x^j \otimes e_y^j = \sum_{j=1}^n e_x^j \wedge e_y^j.$$

Dada ω no degenerada y compatible con la métrica también podemos construir la métrica riemanniana.

El operador $*$ Al igual que en las variedades riemnnianas podemos construir el operador estrella de Hodge. Veremos dos formas distintas de hacerlo.
Comenzamos tomando la h métrica hermítica y construimos $g := \frac{1}{2}(h + \bar{h})$. Vemos M como una variedad diferenciable real de dimensión $2n$ que con g es variedad riemanniana. De esta forma se puede definir $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{2n-k}(M)$. Recordemos que trabajamos con formas complexificadas y con la base $dz^1, \ldots, dz^n, d\bar{z}^1, \ldots, d\bar{z}^n$. Debemos extender el operador estrella de Hodge a $\Omega^k(M)^{\mathbb{C}}$. Para ello comenzamos extendiendo $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$:

$$\langle\langle v_1 \otimes \lambda_1,\ v_2 \otimes \lambda_2 \rangle\rangle_{\mathbb{C}} := \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle \qquad \forall v_1, v_2 \in TM,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Obtenemos un producto hermitiano. Es necesario que sea así para acabar teniendo un espacio de Hilbert. Al extender $*$ a las formas complexificadas nos queda que

$$\langle\langle \omega, \eta \rangle\rangle_{\mathbb{C}}\, \mu = (\langle\langle \omega_x, \eta_x \rangle\rangle + \langle\langle \omega_y, \eta_y \rangle\rangle - i\langle\langle \omega_x, \eta_y \rangle\rangle + i\langle\langle \omega_y, \eta_x \rangle\rangle)\mu =$$

$$\omega_x \wedge *\eta_x + \omega_y \wedge *\eta_y - i\omega_x \wedge *\eta_y + y\omega_y \wedge *\eta_x = \omega \wedge *\bar{\eta}.$$

Por tanto $*: \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{n-q,n-p}(M)$ y cumple

$$\omega \wedge *\bar{\eta} = \langle\langle \omega, \eta \rangle\rangle_{\mathbb{C}}\, \mu.$$

Al igual que hicimos en el caso riemanniano definimos un nuevo producto, en este caso hermítico, sobre $\Omega^{*,*}(M)$. Para ello debemos pedir que M sea compacta

$$(\omega, \eta) := \int_M \langle\langle \omega, \eta \rangle\rangle_{\mathbb{C}}\, \mu.$$

Buscamos los operadores adjuntos de ∂ y $\bar{\partial}$. Sea $\omega \in \Omega^{p-1,q}(M),\ \eta \in \Omega^{p,q}(M)$:

$$(\partial\omega, \eta) = \int_M \partial\omega \wedge *\bar{\eta} = \int_M \partial(\omega \wedge *\bar{\eta}) + (-1)^{p+q} \int_M \omega \wedge \partial(*\bar{\eta}).$$

Como $\omega \wedge *\bar{\eta} \in \Omega^{n-1,n}(M)$ sabemos que $\partial(\omega \wedge *\bar{\eta}) = d(\omega \wedge *\bar{\eta})$ y usamos Stokes. Recordando que $*^2 = (-1)^k 1_{\Omega^k(M)}$:

$$(\partial\omega, \eta) = (-1)^{p+q} \int_M \langle\langle \omega, \bar{\partial}(*\eta) \rangle\rangle_{\mathbb{C}}\, \mu = -\int_M \langle\langle \omega, **\,\partial(*\bar{\eta}) \rangle\rangle_{\mathbb{C}}\, \mu = (\omega, -*\bar{\partial}*\eta).$$

Por tanto $\partial^* := -*\bar{\partial}*$. Los cálculos con $\bar{\partial}^* := -*\partial*$ son exactamente igual. Definimos los laplacianos

$$\Delta_\partial := \partial\partial^* + \partial^*\partial, \qquad \Delta_{\bar{\partial}} := \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}.$$

Usando las misma ideas que vimos con Δ podemos probar distintas identidades para estos nuevos laplacianos. Por ejemplo fijémonos en que como ∂^* es el operador adjunto de ∂ sabemos que Δ_∂ es autoadjunto:

$$(\Delta_\partial\omega, \eta) = (\partial\partial^*\omega, \eta) + (\partial^*\partial\omega, \eta) = (\partial^*\omega, \partial^*\eta) + (\partial\eta, \partial\omega) = (\partial\partial^*\eta, \omega) + (\omega, \partial^*\partial\eta) = (\omega, \Delta_\partial\eta).$$

Definimos los espacios de (p,q)-formas $\bar{\partial}$-armónicas como

$$\mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}(M) := \{\omega \in \Omega^{p,q}(M) :\ \Delta_{\bar{\partial}} = 0\}.$$

Podemos hacer lo mismo con Δ_∂. Observamos que en el caso compacto ω $\bar{\partial}$-armónica si y solo si $\bar{\partial}\omega = 0,\ \bar{\partial}^*\omega = 0$.
En ese caso sabemos que $\partial * \omega = 0,\ \partial^* * \omega = 0$ luego $*\omega$ sería ∂-armónica. En consecuencia

$$\mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}(M) \equiv_* \mathcal{H}^{n-q,n-p}_{\partial}(M).$$

Veamos el resultado principal del capítulo.
Teorema 2.3. de Hodge Sea M una variedad compleja y compacta. Entonces $\dim(\mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)) < \infty$ y

$$\Omega^{p,q}(M) = \bar{\partial}\Omega^{p,q-1}(M) \oplus \mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}(M) \oplus \bar{\partial}^*\Omega^{p,q+1}(M).$$

⊠

La demostración del resultado requiere hacer una introducción previa a la teoría de operadores diferenciales elípticos. Esto se alejaría del contenido del texto además que ocuparía una buena parte del mismo. Tenemos la versión más general en [14] aunque podemos consultarlo tanto [12] como en [17], en este último se contempla el caso riemanniano.
Estudiemos qué nos está diciendo el teorema. En primer lugar dada $\omega \in \mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$ es $\bar{\partial}$-cerrada luego representa a algún elemento de la cohomología Dolbeault de M : $[\omega] \in H^{p,q}(M)$.
Por otro lado dada $\beta \in \Omega^{p,q}(M)$, si suponemos que $\bar{\partial}\bar{\partial}^*\beta = 0$ llegamos a que

$$0 = (\bar{\partial}\bar{\partial}^*\beta, \beta) = (\bar{\partial}^*\beta, \bar{\partial}^*\beta) \ \Rightarrow\ \bar{\partial}^*\beta = 0.$$

Luego

$$\mathrm{Ker}\,(\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M)) = \bar{\partial}\Omega^{p,q-1}(M) \oplus \mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}(M).$$

En consecuencia

$$\mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}(M) \equiv H^{p,q}(M).$$

Toda clase de cohomología tendrá un representante armónico. Veamos el análogo complejo a la dualidad de Poincaré. Se define:

$$\mathrm{Se} : \mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}(M) \times \mathcal{H}^{n-p,n-q}_{\bar{\partial}}(M) \to \mathbb{C}, \qquad \mathrm{Se}(\omega,\eta) := \int_M \omega \wedge \eta.$$

Esto se conoce como dualidad de Serre. Al tomar $\omega, *\bar{\omega}$ sabemos que $\mathrm{Se}(\omega, *\bar{\omega}) \geq 0$ y que alcanza la igualdad si y solo $\omega = 0$. El producto es no degenerado luego:

$$H^{p,q}(M) \equiv \mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}(M) \equiv \mathcal{H}^{n-p,n-q}_{\bar{\partial}}(M)^* \equiv H^{n-p,n-q}(M)^*.$$

Por tanto $h^{p,q} = h^{n-p,n-q}$.
Al igual que en el caso real tenemos Künneth. Dadas M, N variedades hermíticas compactas:

$$\mathcal{H}^{p,q}(M \times N) \equiv \bigoplus_{r+u=ps+v=q} \mathcal{H}^{r,s}(M) \otimes \mathcal{H}^{u,v}(N).$$

Tomando dimensiones llegamos a que:

$$h^{p,q}(M \times N) = \bigoplus_{\substack{r+u=p \\ s+v=q}} h^{r,s}(M) h^{u,v}(N).$$

2.3. Teoría de Hodge en variedades Kähler

Diremos que una variedad hermítica (M,h) es Kähler si su forma fundamental ω es cerrada en el sentido usual. Tal y como hemos definido ω podemos considerarla no complexificada. Si M es compacta tendremos que $0 \neq [\omega^n] \in H^{2n}_{\mathrm{dR}}(M)$ siendo $n = \dim_{\mathbb{C}}(M)$.
En consecuencia $0 \neq [\omega]^k \in H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M)$ $\forall k = 1, \ldots, n$.
Ejemplo 2.4. El espacio proyectivo $\mathbb{PC}^n$ Hay una forma natural de darle a $\mathbb{PC}^n$ una estructura Kähler. En $\mathbb{C}^{n+1}$ tomamos estructura Kähler natural $\omega = \sum_{j=0}^n e^j \wedge \bar{e}^j$ donde $e^j = x^j + iy^j$.
Complexificamos $\mathbb{R}^{2n+2} \equiv \mathbb{C}^{n+1}$ y, al multiplicar el vector $(e_0, \bar{e}_0, \ldots, e_n, \bar{e}_n)$ por un complejo unitario vemos que ω es invariante. Sin embargo, al multiplicarlo por un real ω no.
Tomamos $f : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{S}^{2n+1}$ dada por $f(z) = \frac{z}{|z|}$. Consideramos $\widetilde{\omega} := f^*\omega$ que, por cómo la hemos construido está bien definida sobre $\mathbb{CP}^n \equiv \mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C} \equiv \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$. De hecho obtendremos la métrica de Fubini-Study:

$$df_z = \frac{dz}{|z|} - \frac{1}{2}\frac{z}{|z|^3}(z \cdot d\bar{z} + \bar{z} \cdot dz).$$

De esta manera:

$$f^*\omega = \frac{1}{|z|^2}\left(dz - \frac{1}{2}\frac{z}{z \cdot \bar{z}}(z \cdot d\bar{z} + \bar{z} \cdot dz)\right) \wedge \left(d\bar{z} - \frac{1}{2}\frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}(z \cdot d\bar{z} + \bar{z} \cdot dz)\right).$$

Haciendo las cuentas llegamos a que

$$\widetilde{\omega} = f^*\omega = \frac{(1 + z \cdot \bar{z})\delta_{ij} - \bar{z}_i z_j}{(1 + z \cdot \bar{z})^2} dz^i \wedge d\bar{z}^j.$$

La métrica de Fubini-Study, como su nombre indica, es una métrica: $h = \frac{(1+z\cdot\bar{z})\delta_{ij} - \bar{z}_i z_j}{(1+z\cdot\bar{z})^2} dz^i \otimes d\bar{z}^j$.
Lo importante es que es no degenerada por cómo la hemos definido. Además $d\widetilde{\omega} = f^*d\omega = 0$ luego efectivamente $\mathbb{CP}^n$ es Kähler. Es compacto pues es cociente de una esfera, conexo y variedad compleja luego orientable: $H^0_{\mathrm{dR}}(\mathbb{CP}^n) \equiv H^{2n}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{CP}^n) \equiv \mathbb{R}$. Además $\mathbb{CP}^0$ es un punto y $\mathbb{CP}^1$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^2$.
Usamos Mayer-Vietoris tomando el siguiente recubrimiento por abiertos de $\mathbb{CP}^n$. Se toma $U \approx \mathbb{C}^n$. Ahora tomamos $p \in U$ y $V := \mathbb{CP}^n - \{p\} \approx \mathbb{CP}^{n-1}$. La intersección $U \cap V \equiv \mathbb{S}^{2n-1}$:

$$\cdots \to H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{CP}^n) \to H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{CP}^{n-1}) \to H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^{2n-1}) \to H^{k+1}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{CP}^n) \to \cdots$$

Podemos asegurar entonces que para $0 < 2k < 2n - 1$:

$$0 \to H^{2k}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{CP}^n) \to H^{2k}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{CP}^{n-1}) \to 0 \to H^{2k+1}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{CP}^n) \to H^{2k+1}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{CP}^{n-1}) \to 0$$

De aquí deducimos que $H^k_{\mathrm{dR}}\mathbb{CP} \equiv \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } 0 \leq k \leq 2n,\ k \equiv_2 0, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$ Lo que nos aporta la estructura Kähler inmediatamente es el cómputo del anillo de cohomología pues $0 \neq [\omega]^k \in H^{2k}(\mathbb{CP}^n)$ para $1 \leq k \leq n$ luego

$$H^\bullet_{\mathrm{dR}}(\mathbb{CP}^n) \equiv \frac{\mathbb{R}[x]}{(x)^{n+1}}.$$

Hemos avisado varias veces de que en general no podemos tomar coordenadas de forma que nuestra métrica sea diagonal. Sin embargo, este tipo de variedades son localmente triviales a nivel geométrico.
Lema 2.5. Trivialidad de la geometría simpléctica Sea (M, ω) una variedad simpléctica con forma fundamental ω. Dado cualquier $p \in M$ existen coordenadas $z^1, \ldots, z^n$ de forma que

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} + \mathcal{O}(|z^2|))d\omega^i \wedge d\bar{z}^j.$$

Demostración. Supongamos que existen coordenadas $z^1, \ldots, z^n$ de forma que $\omega = \frac{i}{2}\sum_{i,j=1}^n(\delta_{ij} + \mathcal{O}(|z^2|))d\omega^i \wedge d\bar{z}^j$. Entonces

$$\left.\frac{\partial}{\partial z^j}\right|_{z=0} (\delta_{ij} + \mathcal{O}(|z^2|) = 0, \quad \left.\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right|_{z=0} (\delta_{ij} + \mathcal{O}(|z^2|) = 0 \quad \Rightarrow \quad dw_p = 0.$$

Para ver el recíproco tomamos $p \in M$ y coordenadas $w^1, \dots, w^n$ que lleven p a $0 \in \mathbb{C}^n$ y tales que $h_{ij}(0) = \mathrm{id}$. Entonces

$$h_{ij} = \delta_{ij} + a_{ij,k} w^k + a_{ij,\bar{k}} \bar{w}^k + \mathcal{O}(|w|^2).$$

$a_{ij,k} = \frac{h_{ij}}{\partial w^k}(0),\ a_{ij,\bar{k}} = \frac{h_{ij}}{\partial \bar{w}^k}(0)$ y $\omega = \frac{i}{2} h_{ij} dw^i \wedge d\bar{w}^j$. Suponemos que $d\omega = 0$ luego

$$0 = d\omega = i \frac{h_{ij}}{\partial w^k} dw^k \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^j + i \frac{h_{ij}}{\partial \bar{w}^k} d\bar{w}^k \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^j.$$

Por tanto $a_{ij,k} = a_{kj,i},\ k \neq i$ y $a_{ij,\bar{k}} = a_{ik,\bar{j}},\ k \neq j$. Además $h_{ij} = \bar{h}_{ji}$ luego $a_{ij,k} = \bar{a}_{ji,\bar{k}}$.
Definimos las coordenadas

$$z^j := w^j + \frac{1}{2} a_{ij,k} z^i z^k \ \Rightarrow dz^j = dw^j + \frac{1}{2} a_{ij,k}(z^i dz^k + z^k dz^i) = dw^j + a_{ij,k} w^k dw^i.$$

De igual manera $\bar{z}^j = \bar{w}^j + \frac{1}{2}\bar{a}_{ij,k} \bar{w}^i \bar{w}^k \ \Rightarrow d\bar{z}^j = d\bar{w}^j + a_{ji,\bar{k}} \bar{z}^k d\bar{z}^i$. La notación de Einstein puede parecer liosa, las únicas sumas que no indicamos son en i, k :

$$\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n} dz^j \wedge d\bar{z}^j = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n} dw^j \wedge d\bar{w}^j + a_{ji,\bar{k}} \bar{w}^k dw^j \wedge d\bar{w}^i + a_{ij,k} w^k dw^i \wedge d\bar{w}^j + \mathcal{O}(|w|^2) =$$

$$\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} + a_{ij,\bar{k}} \bar{w}^k + a_{ij,k} w^k) dw^i \wedge d\bar{w}^j + \mathcal{O}(|w|^2) = \omega + \mathcal{O}(|h|^2).$$

□

Toda identidad válida para $\mathbb{C}^n$ con la métrica usual que involucre tanto a la métrica como a sus primeras derivadas es válida para cualquier variedad simpléctica a nivel local, eso sí, en coordenadas adecuadas. Como toda variedad Kähler es simpléctica el resultado se aplica a nuestro objeto de estudio.
Hay dos resultados principales que queremos ver. El primero consiste en encontrar nuevas identidades en los números de Hodge. El segundo es estudiar en mayor profundidad la cohomología De Rham de estas variedades.

2.3.1. Los operadores de Lefschetz en $\mathbb{C}^n$

Dada M variedad compleja compacta disponemos los números de Hodge $h^{p,q} := h^{p,q}(M)$ de la siguiente manera para entender mejor las identidades que encontremos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & h^{n,n} & & & & \\
 & & & h^{n,n-1} & & h^{n-1,n} & & & \\
 & & h^{n,n-2} & & h^{n-1,n-1} & & h^{n-2,n} & & \\
 & \iddots & & & \vdots & & & \ddots & \\
h^{n,0} & & \cdots & & & & \cdots & & h^{0,n} \\
 & \ddots & & & \vdots & & & \iddots & \\
 & & h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} & & \\
 & & & h^{1,0} & & h^{0,1} & & & \\
 & & & & h^{0,0} & & & &
\end{array}$$

Ya sabemos que $h^{p,q} = h^{n-p,n-q}$. El cuadrado que hemos dibujado admite una simetría axial. Veamos ahora qué sucede si M es Kähler. Comenzaremos trabajando en un espacio vectorial complejo de dimensión n con su estructura Kähler natural. Lo podemos ver como un espacio vectorial real de dimensión $2n$ con una estructura casi compleja integrable y considerar su complexificado cuando sea necesario.
Aquí $\omega = i \sum_{j=1}^{n} e^j \wedge \bar{e}^j$ donde $e^j = x^j + iy^j \in V^{*\mathbb{C}}$ pero ω es una forma real.

Definición 2.6. Operadores de Lefschetz En $V := \mathbb{C}^n$ definimos $L : \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{k+2} V^*$ como $L(\alpha) := \alpha \wedge \omega \ \forall \alpha \in \bigwedge^k V^*$. De igual manera definimos su adjunto como $\Lambda := *^{-1} L * : \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{k-2} V^*$.
Nos saltaremos algunas demostraciones por requerir gran cantidad de cuentas. A pesar de ello intentaremos que las ideas principales queden claras. Definimos también el operador $H : \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^k V^*$ como $H(\alpha) = (k-n)\alpha$ para cada $\alpha \in \bigwedge^k V^*$. Extendemos linealmente estos operadores a $\bigwedge^k V^{*\mathbb{C}} \equiv \bigoplus_{0 \leq i \leq k} \Omega^{i,k-i}(\mathbb{C}^n)$. Es inmediato comprobar que $[H, L] = 2L, \ [H, \Lambda] = -2\Lambda$. Lo que es más tedioso de ver es que $[L, \Lambda] = H$. Si lo demostramos sabremos que estamos ante una representación finita de $\mathfrak{sl}(2)$. La idea consiste en descomponer V como suma directa de subespacios y comprobar que en $\mathbb{C}$ es cierto. Tomamos la base e_1, e_2 de $\mathbb{R}^2$, entonces $\omega = e^1 \wedge e^2$ y:

$$\bigwedge^* \mathbb{R}^{2*} = \bigwedge^0 \mathbb{R}^{2*} \oplus \bigwedge^1 \mathbb{R}^{2*} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^{2*} = \mathbb{R} \oplus (e^1\mathbb{R} \oplus e^2\mathbb{R}) \oplus \omega\mathbb{R}.$$

Ahora $L(1) = \omega, \ \Lambda(\omega) = *L*\omega = 1$ y vemos que $[L, \Lambda] = H$. Al descomponer $V = W_1 \oplus W_2$ en subespacios y suponer que la identidad es cierta para W_1, W_2 llegamos a que dadas $\alpha_i \in \bigwedge^{k_i} W_i^*, \ n_i := \dim(W_i), \ i = 1, 2 :$

$$[L, \Lambda](\alpha_1 \otimes \alpha_2) = [L_1, \Lambda_1](\alpha_1) \otimes \alpha_2 + \alpha_1 \otimes [L_2, \Lambda_2](\alpha_2) = H_1(\alpha_1) \otimes \alpha_2 + \alpha_1 \otimes H_2(\alpha_2) =$$

$$(k_1 - n_1)\alpha_1 \otimes \alpha_2 + (k_2 - n_2)\alpha_1 \otimes \alpha_2 = (k_1 + k_2 - n)\alpha_1 \otimes \alpha_2 = H(\alpha_1 \otimes \alpha_2).$$

Además se ve inductivamente que $[L^j, \Lambda](\alpha) = j(k-n+j-1)L^{j-1}(\alpha) \ \forall \alpha \in \bigwedge^k V^*$ pues para $j = 1$ es cierto y si asumimos que la identidad es cierta para $j - 1$:

$$[L^j, \Lambda](\alpha) = L[L^{j-1}, \Lambda](\alpha) + [L, \Lambda](L^{j-1}\alpha) = j(k - n + j - 1)L^{j-1}(\alpha).$$

Ya tenemos gran parte de las herramientas para dar una primera versión del primer resultado importante. Diremos que $\alpha \in \bigwedge^k V^*$ es primitiva si $\Lambda\alpha = 0$ y denotamos por $P^k(M) := \operatorname{Ker}\left(\Lambda : \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{k-2} V^*\right)$.
Teorema 2.7. Descomposición de Leftchetz en espacios vectoriales de dimensión finita. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $2m$ con su estructura Kähler natural. Entonces

$$\bigwedge^k V^* = \bigoplus_{j \geq 0} L^j(P^{k-2j}).$$

Además se tiene que

1. $P^k = 0$ para $k > n$.
2. $L^{n-k} : P^k \to \bigwedge^{2n-k} V^*$ es inyectiva para $k \leq n$.
3. $L^{n-k} : \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{2n-k} V^*$ es biyectiva para $k \leq n$.
4. Si $k \leq n$ entonces $P^k = \{\alpha \in \bigwedge^k V^* : \ L^{n-k+1}\alpha = 0\}$.

Antes de probar el resultado vamos a visualicemos qué está sucediendo:

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^{n-2} V^* \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rrrr, bend right, "\equiv_{L^2}"'] & \bigwedge^{n-1} V^* \arrow[rr, bend right, "\equiv_L"'] & \bigwedge^{n} V^* \arrow[rr, bend left, "L"] & \bigwedge^{n+1} V^* & \bigwedge^{n+2} V^*
\end{tikzcd}$$

Demostración. Como $\bigwedge^* V^{*\mathbb{C}}$ es una representación finita de $\mathfrak{sl}(2)$ sabemos que es suma directa de representaciones irreducibles. Además por ser finita existe algún v primitivo. De hecho dado cualquier $v \in \bigwedge^k V^*$ en algún momento $\Lambda^l v = 0$ para $l > k$.
Como $[L^j, \Lambda](\alpha) = j(k-n+j-1)L^{j-1}(\alpha) \ \forall \alpha \in \bigwedge^k V^*$ sabemos que $v, Lv, L^2v, \ldots$ es una subrepresentación y por tanto toda representación irreducible será de esta forma.
Supongamos que tenemos $\alpha \in \bigwedge^{k_1} V^*, \ \beta \in \bigwedge^{k_2} V^*$ primitivas con $k_1 \neq k_2$. Supongamos que además existe $l : \ L^l\alpha = \beta$, es decir $l = k_2 - k_1 > 0$. Entonces

$$0 = [L^l, \Lambda](\alpha) = (k_2 - k_1)(k_2 - n - 1)L^{l-1}(\alpha) = .$$

Si $\beta \neq 0$ necesariamente $L^{j-1}(\alpha) \neq 0$ luego $\beta = 0$. Se tiene entonces que

$$\bigwedge^k V^* = \bigoplus_{j\geq 0} L^j(P^{k-2j}).$$

(i)
Sea $\alpha \in P^k$ con $k > n$ y sea j mínimo tal que $L^j\alpha = 0$. Entonces $0 = [L^j, \Lambda](\alpha) = j(k-n+j-1)L^{j-1}\alpha$. Hemos tomado j mínimo luego la única opción es $j = 0$.
(ii)
Tomemos $0 \neq \alpha \in P^k$, supongamos que $k \leq n$ y sea $j > 0$ mínimo tal que $L^j\alpha = 0$. Lo tomamos mayor que 0 pues L^0 es la identidad y obviamente va a ser inyectiva.
Igual que antes $0 = j(k-n+j-1)L^{j-1}\alpha$ luego $j = n-k+1$ y por tanto $L^{n-k}\alpha \neq 0$.
(iii)
Dada cualquier $0 \neq \alpha \in \bigwedge^{2n-k} V^*,\ k \leq n$ existe $\beta \in P^{2n-k-2l}$ tal que $L^l(\beta) = \alpha$. Si $n-l \leq k$ ya está pues $L^{n-k}(L^{l-n+k}\beta) = 0$ con $L^{l-n-k}\beta \in \bigwedge^k V^*$. En cambio si $n-l > k$ sabemos que $L^{k+2l-n+1}\beta = 0 \in \bigwedge^{k+2l+2} V^*$ pero $k+2l+2 < 2n-k+2$ luego necesariamente α tendría que ser 0.
(iv)
Ya sabemos que $P_p^k \subset \mathrm{Ker}\,(L^{n-k+1})$ para $k \leq n$. Sea ahora $\alpha \in \bigwedge^k V^* :\ L^{n-k+1}\alpha = 0$. Sabemos que L^{n-k+2} es inyectivo en $\bigwedge^{k-2} V^*$ y como

$$L^{n-k+2}\Lambda\alpha = L^{n-k+2}\Lambda\alpha - \Lambda L^{n-k+2}\alpha = (n-k+2)L^{n-k+1}\alpha = 0 \ \Rightarrow\ \alpha = 0.$$

□

Trabajemos ahora con $V^{\mathbb{C}}$. Denotamos también por $P^{p,q}$ a las (p,q)-formas complexificadas de V. Inductivamente sobre la dimensión de V podemos comprobar que dada $\alpha \in P^{p,q}$ se tiene que

$$*L^j\alpha = (-1)^{\frac{(p+q)(p+q+1)}{2}} \frac{j!}{(n-k-j)!} L^{n-k-j}\mathbf{I}\alpha.$$

El operador $\mathbf{I} : \Omega^*(M)^{\mathbb{C}} \to \Omega^*(M)^{\mathbb{C}}$ está definido como $I(\alpha) = i^{p-q}\alpha$ para cada $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$.
Antes de ver los resultados finales nos fijamos en que

$$\bigwedge^{0} V^{*\mathbb{C}} = P^{0,0} = P^{0\mathbb{C}} \equiv \mathbb{C},\ \bigwedge^{1} V^{*\mathbb{C}} = P^{1,0} \oplus P^{0,1},$$

$$\bigwedge^{2} V^{*\mathbb{C}} = \bigwedge^{2,0} V^* \oplus \bigwedge^{1,1} V^* \oplus \bigwedge^{0,2} V^* = P^{2,0} \oplus (P^{1,1} \oplus \omega\mathbb{C}) \oplus P^{0,2}.$$

2.3.2. Identidades de Kähler

La última identidad, aunque usase el operador $*$, la hemos probado para un espacio vectorial. Sin embargo queremos trabajar con variedades Kähler más generales. Los operadores L, Λ se definen fibra a fibra pero ω es una forma diferencial luego L es diferenciable, como Λ se define a partir de L y $*$ también lo es. Ahora necesitaremos nuestra condición Kähler: $d\omega = 0$.
Proposición 2.8. Identidades Kähler Sea M una variedad Kähler. Entonces se cumple que

- $[\bar{\partial}, L] = [\partial, L] = 0,\ [\bar{\partial}^*, \Lambda] = [\partial^*, \Lambda] = 0.$
- $[\bar{\partial}^*, L] = i\partial,\ [\partial^*, L] = -i\bar{\partial},\ [\Lambda, \bar{\partial}] - i\partial^*,\ [\Lambda, \partial] = i\bar{\partial}^*.$
- $\Delta_\partial = \Delta_{\bar{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta$. Además Δ conmuta con $*, \partial, \bar{\partial}, \partial^*, \bar{\partial}^*, L$ y Λ.

Demostración. Para facilitar las cuentas comenzamos definiendo

$$d^c := \mathbf{I}^{-1}d\mathbf{I},\ d^{c*} := - * d^c * .$$

Observamos que $d^c = -i(\partial - \bar{\partial})$. Si asumimos (ii) como cierto llegamos a que

$$[\Lambda, d] = i(\bar{\partial}^* - \partial^*) = -d^{c*}.$$

Además
$$dd^c\alpha = -i(\partial+\bar\partial)(\partial-\bar\partial)(\alpha) = i\partial\bar\partial\alpha - i\bar\partial\partial\alpha = 2i\partial\bar\partial\alpha.$$
(i)
Sea $\alpha \in \Omega^k(M)$. Entonces
$$[\bar\partial, L] = [\partial, L](\alpha) = \bar\partial(\omega\wedge\alpha) - \omega\wedge\bar\partial\alpha = \bar\partial\omega\wedge\alpha = 0.$$
En la última igualdad hemos usado que $0 = d\omega = \partial\omega + \bar\partial\omega$. De igual manera probamos que $[\partial, L] = 0$.
Por otro lado
$$[\bar\partial, \Lambda](\alpha) = - * \partial L * \alpha - *L\partial * \alpha = - * [\partial, L] * \alpha = 0.$$
$[\partial^*, \Lambda] = 0$ se puede probar de la misma forma o usando la conjugación compleja.
(ii)
Usando la descomposición de Lefschetz nos vale con probar el resultado para formas del tipo $L^j\alpha$ siendo α primitiva. Sabemos que
$$d\alpha = \alpha_0 + L\alpha_1 + L^2\alpha_2 + \dots$$
donde $\alpha_j \in P^{k+1-2j}(M)$. L y $d = \partial + \bar\partial$ conmutan y $L^{n-k+1}\alpha = 0$:
$$0 = L^{n-k+1}\alpha_0 + L^{n-k+2}\alpha_1 + L^{n-k+3}\alpha_2 + \dots$$
Lefschetz descompone en suma directa así que $L^{n-k+j+1}\alpha_j = 0$. Recordemos que L^l es inyectiva en $\Omega^i(M)$ para $l \le n-i$ luego para $j \ge 2$ sabemos que $\alpha_j = 0$ y por tanto
$$d\alpha = \alpha_0 + L\alpha_1, \ \Lambda\alpha_0 = \Lambda\alpha_1 = 0.$$
Ahora calculamos $[\Lambda, d](L^j\alpha)$ para $\alpha \in P^k(M)$, hay que desarrollar las cuentas llegando a:
$$[\Lambda, d](L^j\alpha) = -jL^{j-1}\alpha_0 - (k-n+j-1)L^j\alpha_1.$$
Por otro lado, usando $*L^j\alpha = (-1)^{\frac{(p+q)(p+q+1)}{2}}\frac{j!}{(n-k-j)!}L^{n-k-j}\mathbf{I}\alpha$ sobre α y después sobre α_0, α_1 llegamos a que
$$-d^{c*}L^j\alpha = -jL^{j-1}\alpha_0 - (k-n+j-1)L^j\alpha_1 = [\Lambda, d](L^j\alpha).$$
Como la identidad es cierta para cada j deducimos que efectivamente $[\Lambda, d] = -d^{c*}$ de donde sacamos (ii).
(iii)
Nos comenzamos fijando en que en que $i(\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial) = \partial[\Lambda, \partial] + [\Lambda, \partial]\partial == 0$. Ahora comprobamos que
$$\Delta_\partial = \partial^*\partial + \partial\partial^* = i([\Lambda, \bar\partial]\partial + \partial[\Lambda, \bar\partial]) = i(\Lambda\bar\partial\partial - \bar\partial\Lambda\partial + \partial\Lambda\bar\partial - \partial\bar\partial\Lambda) =$$
$$i(\Lambda\bar\partial\partial - (\bar\partial[\Lambda, \partial] + \bar\partial\partial\Lambda) + ([\partial, \Lambda]\bar\partial + \Lambda\partial\bar\partial) - \partial\bar\partial\Lambda) = i(\Lambda\bar\partial\partial - i\bar\partial\bar\partial^* - \bar\partial\partial\Lambda - i\bar\partial^*\bar\partial + \Lambda\partial\bar\partial - \partial\bar\partial\Lambda) = \Delta_{\bar\partial}.$$
Por otro lado
$$\Delta = (\partial+\bar\partial)(\partial^* + \bar\partial^*) + (\partial^* + \bar\partial^*)(\partial + \bar\partial) =$$
$$\Delta_\partial + \Delta_{\bar\partial} + (\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial) + \overline{(\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial)} = 2\Delta_\partial.$$
Probar la conmutatividad de Δ con los operadores es mecánico. si nos fijamos en la estructura de las identidades, usamos la primera tanda para probar la segunda y esta para probar la última. □

Ahora sabemos que en una variedad Kähler ω es ∂-armónica si y solo si es $\bar\partial$-armónica. Así que dada $\omega \in \mathcal{H}^{p,q}_\partial(M)$ sabemos que $\partial\omega = \bar\partial\omega = \partial^*\omega = \bar\partial\omega = 0$ luego $\omega \in \mathcal{H}^{p+q}(M)^{\mathbb{C}}$.
Corolario 2.9. Sea M una variedad Kähler compacta. Entonces
$$H^{p,q}(M) \equiv \mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial}(M) \equiv \mathcal{H}^{p,q}_{\partial}(M) \equiv \mathcal{H}^{n-q,n-p}_{\bar\partial}(M) \equiv (\mathcal{H}^{q,p}_{\bar\partial}(M))^* \equiv (H^{q,p}(M))^*.$$
Por tanto $h^{p,q} = h^{q,p}$.
Como $\mathcal{H}^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial}(M)$ sabemos además que $b_k(M) = \sum_{p+q=k} h^{p,q}(M)$.

Este es el primer resultado al que queríamos llegar. La cohomología Dolbeault no es un invariante topológico pero $H^{\bullet}_{\mathrm{dR}}(M)^{\mathbb{C}}$ sí. Denotamos por

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M)_p := \mathrm{Ker}\,\left(\Lambda : H^k_{\mathrm{dR}}(M) \to H^{k-2}_{\mathrm{dR}}(M)\right).$$

El operador Λ está bien definido en $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ pues $*$ y L lo están. Este último si M es Kähler.
Teorema 2.10. ***Hard* Lefschetz** Dada M variedad Kähler compacta de dimensión n se tiene para cada $k \leq n$ que

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) \equiv_{L^{n-k}} H^{2n-k}_{\mathrm{dR}}(M).$$

Además para cada k :

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) = \bigoplus_{j\geq 0} L^j H^{k-2j}_{\mathrm{dR}}(M)_p.$$

$\boxtimes$

Traducimos este resultado a cohomología Dolbeault: Sean M, N variedades Kähler homeomorfas de dimensión n y supongamos que existe $\alpha \in \mathcal{H}^{p,q}(M) \cap P^k,\ k := p+q$. Genera una representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2)$: $s_{\frac{n-k-1}{2}}$. Entonces podemos asegurar que existen p', q' con $p'+q' = k$ y $\alpha' \in \mathcal{H}^{p,q}(M) \cap P^k$ que también genera $s_{\frac{n-k-1}{2}}$ pero no necesariamente tiene que darse $p = p'$.

Superficies de Riemann Sea M una superficie de Riemann conexa. Es decir, M es una variedad compleja compacta de dimensión compleja 1.
Sabemos que admite métrica hermítica $h = hdz \otimes d\bar{z}$ con forma fundamental $\omega = hdz \wedge d\bar{z}$. Claramente $d\omega = 0$ luego toda superficie de Riemann es Kähler. Supongamos que M además es compacta y dibujamos el diamante de Hodge con los números de Betti a la derecha

$$\begin{array}{ccccl} & h^{1,1}=1 & & & b_2 = 1 \\ h^{1,0} & & h^{0,1} & & b_1 = h^{1,0}+h^{0,1} = 2h^{1,0} \\ & h^{0,0}=1 & & & b_0 = 1 \end{array}$$

El género de M se define precisamente como $g := b_1/2 = h^{1,0} = h^{0,1}$. Entonces $\chi(M) = 2-2g$.
Podemos construir representantes de estas superficies mediante cocientes de la esfera de Riemann, el plano euclídeo y el disco de Poincaré. Precisamente los modelos de superficies de Riemann simplemente conexas según el teorema de uniformización [16].

3. Geometría diferencial

Este capítulo es una introducción a las clases características en fibrados vectoriales desde el punto de vista de la geometría diferencial. Estas son invariantes cohomológicos del fibrado luego nos ayudarán en su clasificación. En el proceso vemos la geometría riemanniana desde el enfoque de Cartan. Terminaremos dando la generalización de Gauss-Bonnet.

3.1. Fibrados vectoriales

Llevamos ya bastante tiempo trabajando con fibrados así daremos una definición rigurosa de los mismos. Podríamos introducir directamente los fibrados principales pero solo nos centraremos solo en los vectoriales para evitar extendernos. Aunque trabajaremos en las categoría de las variedades diferenciables y complejas comenzaremos definiendo un fibrado vectorial a nivel topológico.

Nuestro objetivo es pegar en cada punto de una variedad M otro espacio V para construir una nueva variedad E. Esto debe hacerse siguiendo distintas reglas. De hecho podemos definir el conjunto E como $\bigsqcup_{p\in X}\{p\}\times V$ pero debemos darle una topología para que sea variedad. Introducimos directamente la definición. En este caso el espacio V será un fibrado vectorial.

Definición 3.1. Dadas variedades topológicas E, M. $\pi : E \to M$ continua y un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V de dimensión r. Diremos que $E \xrightarrow{\pi} X$ es un $\mathbb{K}$-fibrado vectorial de rango r si

1. $E_p := \pi^{-1}(p)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión r $\forall p \in X$.
2. Para cada $p \in M$ existe un entorno suyo U y un homeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{K}^r$ de manera que para cada $q \in U$ tengamos que $\varphi_{|E_q} : E_q \to \{q\} \times \mathbb{K}^n$ sea un isomorfismo lineal.

Dado un $\mathbb{K}-$fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} X$ de rango r llamaremos a E espacio total, a X espacio base, a E_p fibra sobre p y a φ trivialización sobre U.

Si queremos hablar de fibrados diferenciables pediremos que M, E sean variedades diferenciable, π diferenciable y que φ sea difeomorfismo. En el texto vamos a centrarnos en este tipo de fibrados, diferenciables y vectoriales, aunque no lo explicitemos.

Ejemplo 3.2. Fibrado trivial Podemos tomar cualquier variedad diferenciable M y considerar el espacio producto $M \times \mathbb{R}^n$ con $\pi(p, x) = p$ $\forall p \in M, x \in \mathbb{R}^n$. En este caso para cada $p \in M$ podemos tomar la propia M como entorno abierto. Es lógico que encaje con la definición pues un fibrado es un producto cartesiano a nivel local.

Sean dos abiertos U_α, U_β que admitan respectivas trivializaciones $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$. Consideramos $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$. Entonces $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(p, v) =: (p, g_{\alpha\beta}(p)(v))$ $\forall p \in M,\ v \in E_p$ donde $g_{\alpha\beta}(p)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Se dice que $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Gl(\mathbb{R}^k)$ es una función de transición. Nos fijamos en que estas funciones forman un cociclo de Čech, es decir, dado otro abierto U_γ con trivialización φ_γ tenemos que:

- $g_{\alpha\alpha}(p) = I$ $\forall p \in U_\alpha$.
- $g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p)$ $\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Dada una variedad diferenciable M podemos definir un fibrado sobre ella tomando un recubrimiento por abiertos $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ y eligiendo funciones de transición diferenciables $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ de forma que se cumplan las dos condiciones anteriores.

Desde este enfoque podemos dar otros dos ejemplos con los que ya hemos trabajado múltiples veces y observar

la diferencia entre covariancia y contravariancia.
Ejemplo 3.3. Fibrado tangente y cotangente Una de las formas de definir una variedad diferenciable M es tomar una variedad topológica junto con una estructura diferenciable. Sin entrar en la condición de maximalidad tomamos un recubrimiento por abiertos $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de M junto con una familia de funciones $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda},\ \psi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^n$ y de forma que

$$\psi_{\alpha\beta} := \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \text{ sea un difeomorfismo.}^1$$

Ahora nos fijamos en qué sucede con las bases del fibrado tangente y cotangente al cambiar de coordenadas:

$$\partial_{x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\partial_{y^j} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial z^k}{\partial y^j}\partial_{z^k} = \frac{\partial z^k}{\partial x^i}\partial_{z^k}, \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}dy^j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial z^k}dz^k = \frac{\partial x^i}{\partial z^k}dz^k.$$

Esta es la forma en la que cambian las bases. Sin embargo las coordenadas van al revés luego $g_{\alpha\beta} := d\psi_{\alpha\beta}$ son las funciones de transición del cotangente mientras que $g_{\alpha,\beta} := \psi^*_{\beta\alpha}$ son las del tangente. Por tanto al hablar de covariancia nos referimos al cotangente y al mencionar contravariancia al tangente.
Hemos definido un nuevo objeto de estudio así que debemos dar la noción de cuándo dos objetos distintos son el *mismo*. Dados fibrados $E \xrightarrow{\pi} M,\ F \xrightarrow{\pi} N$, un homomorfismo entre ellos es un par de aplicaciones $(\widetilde{f}, f)$ diferenciables $\widetilde{f} : E \to F,\ f : M \to N$ que respete la estructura del fibrado. Con esto queremos decir que $\pi' \circ \widetilde{f} = f \circ \pi$ y que $\widetilde{f} : E_p \to F_{f(p)}$ sea lineal. Por comodidad denotaremos directamente al fibrado por E y al homomorfismo por $\widetilde{f}$.
Tanto la construcción del homomorfismo identidad como la composición surgen de forma natural. Un homomorfismo $\widetilde{f} : E \to F$ se dirá isomorfismo si existe otro homomorfismo $\widetilde{g} : F \to E$ de forma que $\widetilde{f} \circ \widetilde{g} = 1_F,\ \widetilde{g} \circ \widetilde{f} = 1_E$. Consecuentemente dos fibrados deberán tener el mismo rango y dimensión de sus espacios base para poder ser isomorfos. Sin embargo esta condición no es suficiente.
Ejemplo 3.4. La banda de Möbius Tomamos $\mathbb{S}^1$, vamos a construir dos fibrados de rango 1 sobre ella. En primer lugar tenemos el fibrado trivial $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$. Ahora veamos cómo construir la banda de Möbius, para ello tomamos los dos puntos $p, q \in \mathbb{S}^1$ con $p \neq q$. Al quitar por ejemplo p obtenemos una curva U difeomorfa a $\mathbb{R}$ mientras que al quitar q obtenemos V también difeomorfa a $\mathbb{R}$. Por tanto $U \cap V \equiv_\varphi \mathbb{R} - \{0\}$ donde $\varphi : \mathbb{S} - \{p, q\} \to \mathbb{R} - \{0\}$. Consideramos $U \times \mathbb{R},\ V \times \mathbb{R}$ luego $U \cap V \equiv (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$, tomamos como función de transición $g(p) = \frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|}$.
Para comprobar que efectivamente este fibrado no es trivial extendemos la definición de orientabilidad a un fibrado. La idea es que podamos tomar todas las funciones de transición de forma que sus imágenes estén contenidas en la componente conexa de la identidad de $Gl(\mathbb{R}^n)$. Efectivamente la banda de Möbius es no orientable.
Queremos generalizar la noción de campo vectorial ó forma diferenciable. Esto es inmediato.
Definición 3.5. Sección Dado un fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$. Una sección es una aplicación diferenciable $s : M \to E$ de forma que $\pi \circ s = 1_M$. Denotamos por $\Gamma(M, E)$ al conjunto de secciones.
Sabemos que $\mathbb{S}^n$ admite un campo vectorial no nulo si y solo si n es impar. Dicho con otras palabras $T\mathbb{S}^n$ admite una sección no nula si y solo si n es impar.
Otro ejemplo es el de la orientabilidad. Trabajando con variedades diferenciables podemos definirla en función de cómo cambia la orientación de una base al cambiar de carta. Estamos calculando el determinante de la base. Al ser este una aplicación multilineal antisimétrica podemos representarla mediante el producto exterior y deducimos que M es orientable si y solo si $\Gamma(\Omega^n(M), E)$ admite una sección no nula.
Los fibrados vectoriales son invariantes por homotopía. Dados fibrados $E \xrightarrow{\pi} M,\ E \xrightarrow{\pi} N$, si M y N son homotópicas entonces los fibrados son isomorfos. Otra forma de verlo es que si $f, g : X \to M$ son homotópicas entonces $f^*E \equiv g^*E$. Por tanto todo fibrado construido sobre una variedad contráctil M será trivial.
Se pueden construir nuevos fibrados a partir de otros. Estas construcciones son análogas a las que hacemos con los espacios vectoriales. No vamos a detallarlas una por una. Algunos ejemplos son la suma directa, el producto tensorial y el fibrado dual.

3.1.1. Conexiones

Nuestro objetivo es derivar secciones, comencemos ilustrando un ejemplo. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ se puede entender como un fibrado trivial $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n$ donde $\pi(x, y) = x\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m$. Una sección es una función

[1]Se entiende que la función vacía es trivialmente difeomorfismo aunque carece de interés estudiar estas cuestiones.

diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ de manera que $f(x) = (x, y^1(x), \ldots, y^m(x))\ \forall x \in \mathbb{R}^m$. En este caso podemos definir $\widetilde{f}(x) := (y^1(x), \ldots, y^m(x))$ y dado cualquier campo $X = X^j \partial_{x^j} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ obtener otra sección $f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$:

$$f'(x) = (x, X(\widetilde{f})) = \left(x, X^j \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x^j}(x) \right).$$

Este es un fibrado muy cómodo. Sin embargo en un fibrado más abstracto van a surgir problemas cuando queramos derivar secciones respecto un campo. Observamos que en el ejemplo expuesto

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x^j}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x^1 + \delta^1_j h, \ldots, x^n + \delta^n_j h) - f(x)}{h}.$$

Estamos restando puntos en fibras distintas, realmente están en espacios vectoriales distintos en este caso consideremos que $\pi^{-1}(x) \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \equiv \pi^{-1}(x^1, \ldots, x^j + h, \ldots, x^n)$. Esto nos indica que en un fibrado vectorial general debemos decidir previamente cómo se *conectan* las fibras. De aquí surge la noción de transporte paralelo.

Tomemos un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ de rango m. Denotamos por $E_p := \pi^p$ para cada $p \in M$. Dada una curva diferencible $\gamma : I \to M,\ s := \gamma(0)$ queremos una función diferenciable

$$\parallel (\gamma)^t_s : E_{\gamma(s)} \to E_{\gamma(t)}.$$

La diferenciabilidad de $\parallel$ debe ser respecto γ, t, s. Además le pedimos que $\parallel (\gamma)^s_s = 1_{Gl(E_{\gamma(s)})}$ y que $\gamma^t_u(\gamma) \circ \gamma^u_s(\gamma) = \gamma^t_s(\gamma)$. Obviamente queremos que sea lineal, es decir: $\|^t_s (\gamma)(fv + w) = f \|^t_s (\gamma)(v) + \|^t_s (w)$. Sea $p \in M$ y una base de E_p : $e_1, \ldots, e_m$. Dado un entorno coordenado $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ que mande $p \mapsto 0$ y tal que $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$. Se considera una familia de curvas que parta de p a cualquier punto de U : $\gamma_q := \varphi^{-1}(t\varphi(q))$ para cada $q \in U$ y trasportamos la base $e_1, \ldots, e_m$ a cada punto de U obteniendo la base $\|^q_0 (\gamma_q)e_1, \ldots, \|^q_0 (\gamma_q)e_m$ de E_q.

Llamamos a esto transporte paralelo dada $s \in \Gamma(M, E)$ podremos escribir $s = \xi^j e_j$ donde las ξ^j son diferenciables y se han obtenido mediante trasporte paralelo. Esto es importante pues localmente podremos expresar cualquier sección en función de una base.

Ahora ya podemos definir la derivada de una sección como hicimos en el caso de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Definición 3.6. Derivada covariante

Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado diferenciable y supongamos que existe $\parallel$ transporte paralelo. Dados cualquiera $s \in \Gamma(M, E),\ X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos la derivada covariante de s respecto X en cada $p \in M$

$$\nabla_X s(p) := \lim_{h \to 0} \frac{\|^0_h (\gamma)s(\gamma(h)) - s(\gamma(0))}{h} \in E_p,$$

donde γ es cualquier curva diferenciable cumpliendo que $\gamma(0) = p,\ \gamma'(0) = X(p)$.

Suponiendo que esta aplicación esté bien definida vemos que $\Gamma_X s \in \Gamma(M, E)$. Por tanto

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, E).$$

Comencemos justificando que $\nabla_X s(p)$ no depende de la curva elegida. Elegimos $\gamma : I \to M,\ \gamma(0) = p,\ \gamma'(0) = X(p)$. Ahora tomamos una base $e_1, \ldots, e_m$ base local de E_p y la transportamos a través de γ para obtener una base de $E_{\gamma(t)}$. La sección $s \in \Gamma(M, E)$ tendrá expresión local $s(\gamma(t)) = \xi^j(\gamma(t))e_j(\gamma(t))$. Luego

$$\nabla_X s(p) = \frac{d}{dh}\Big|_{h=0} \|^0_h (\gamma)s(\gamma(h)) = \lim_{h \to 0} \frac{\|^0_h (\gamma)s(\gamma(h)) - s(\gamma(0))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\xi^j(\gamma(h)) \|^0_h (\gamma)e_j(\gamma(h)) - \xi^j(p)e_j(p)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\xi^j(\gamma(h))e_j(p) - \xi^j(p)e_j(p)}{h} = e_j(p) \frac{d}{dh}\Big|_{h=0} (\xi^j(\gamma(h)) = e_j(p)d\xi^j \gamma'(0) = e_j(p)d\xi^j X(p).$$

Claramente γ es $\mathbb{R}$-bilineal y $\nabla_{fX} s = f \nabla_X s$. Sin embargo debemos tener cuidado con la regla de Leibniz pues $fs = f\xi^j e_j$ luego

$$\nabla_X(fs) = e_j d(f\xi^j)X = fe_j d\xi^j X + e_j df X \xi^j = f\nabla_X s + df(X)s = f\nabla_X s + \mathcal{L}_X(f)s.$$

Definición 3.7. Conexión

Sea un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$. Una conexión es toda aplicación $\mathbb{R}$-bilineal $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, E)$ cumpliendo que para cualesquiera $f \in \mathcal{F}(M),\ X \in \mathfrak{X}(M),\ s \in \Gamma(M, E)$ se tiene que:

$$\nabla_{fX} s = f\nabla_X s, \qquad \nabla_X(fs) = f\nabla_X s + \mathcal{L}_X(f)s.$$

Dada una conexión podemos definir un transporte paralelo cuya conexión asociada es ella misma. Sea $p \in M$ y $v \in E_p$, $\gamma : I \to M$ diferenciable, $p = \gamma(0)$, definimos el transporte paralelo de v a lo largo de γ como aquella sección $s \in \Gamma(M, E)$ que cumple que

$$\begin{cases} s(p) &= v, \\ \nabla_{\dot{\gamma}} s &= 0. \end{cases}$$

Tenemos existencia y unicidad y la conexión asociada a este trasnsporte paralelos es precisamente ∇. Tomamos $v \in E_p$ con la que definimos la correspondiente sección $s \in \Gamma(\gamma(I), E)$ cumpliendo que $s(p) = v$ y $\nabla_{\dot{\gamma}} s = 0$. Denotamos por $\widetilde{\nabla}$ a la conexión que define el transporte paralelo.

Supongamos que tenemos otro fibrado $E \xrightarrow{\pi^E} X,\ F \xrightarrow{\pi^F} X$ y conexiones ∇^E, ∇^F. Es lógico definir una nueva conexión $\nabla^{E\otimes F}$ sobre $E \otimes F$ dada por

$$\nabla^{E\otimes F}(s^E \otimes s^F) := \nabla^E(s^E) \otimes s^F + s^E \otimes \nabla^F(s^F), \quad \forall s^E \in \Gamma(M, E), s^F \in \Gamma(M, F).$$

Esto se ve intuitivamente al trabajar sobre el transporte paralelo en lugar de la conexión.

3.1.2. Curvatura

La conexión no es un tensor como se observa de $\nabla_X(fs) = f\nabla_X s + \mathcal{L}_X(f)s$. Si evitamos multiplicar la sección por funciones sí que tendremos un tensor. Dada una una base local $e_1, \ldots, e_m$ de $\Gamma(M, E)$ tendremos que

$$\nabla_X(e_i) = \omega_i^j(X)e_j, \qquad \omega_j^i \in \Omega^1(M).$$

Podemos escribir las formas ω_i^j como una matriz a la que llamamos forma de conexión. También podemos ver ω_i como una 1-forma evaluada en E. Estos espacios se definen como $\Omega^k(M, E) := \Gamma\left(M, \bigwedge^k T^*M \otimes E\right)$.

Podremos trabajar de una manera más cómoda con el conocido tensor de curvatura $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, E)$ dado por

$$R_{X,Y}s = \nabla_X\nabla_Y s - \nabla_Y\nabla_X s - \nabla_{[X,Y]}s.$$

Como lo hemos definido a partir de ∇ y el corchete de Lie solo tenemos que comprobar que $R_{fX,Y}s = R_{X,fY}s = R_{X,Y}(fs) = fR_{X,Y}s\ \forall f \in \mathcal{F}(M)$. Usando la definición de derivada covariante, que $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$ y que $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}$ llegamos a que efectivamente R es un tensor. Por comodidad estudiaremos R desde el punto de vista covariante. $R \in \Omega^2(M, \mathrm{End}(E))$. Además es 0 si y solo si $\nabla_{[X,Y]} = [\nabla_X, \nabla_Y]\ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definimos una nueva diferencial exterior $\mathbb{R}$-lineal $d_\nabla : \Omega^k(M, E) \to \Omega^{k+1}(M, E)$ dada por

$$d_\nabla(w \otimes s) = d\omega \otimes s + (-1)^k\omega \wedge \nabla s \in \Omega^{k+1}(M, E).$$

Sabemos que $d^2 = 0$ y es razonable preguntarse si sucede lo mismo con esta nueva diferencial. Comenzamos viendo qué pasa en $\Omega^0(M, E)$, como R es un tensor:

$$R_{\partial_{x^i},\partial_{x^j}}e_k = \nabla_{\partial_{x^i}}\nabla_{\partial_{x^j}}e_k - \nabla_{\partial_{x^j}}\nabla_{\partial_{x^i}}e_k = \nabla_{\partial_{x^i}}(\omega_k^l(\partial_{x^j})e_l) - \nabla_{\partial_{x^j}}(\omega_k^l(\partial_{x^i})e_l) =$$

$$\partial_{x^i}(\omega_k^l(\partial_{x^j}))e_l - \partial_{x^j}(\omega_k^l(\partial_{x^i}))e_l + \omega_k^l(\partial_{x^j})\omega_l^\mu(\partial_{x^i})e_\mu - \omega_k^l(\partial_{x^i})\omega_l^\mu(\partial_{x^j})e_\mu = (d\omega_k^\mu + \omega_l^\mu \wedge \omega_k^l)(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})e_\mu.$$

Si lo vemos como matrices pondremos $\Omega := d\omega - \omega \wedge \omega$, esta es la forma de curvatura. Además

$$d_\nabla^2(e_k) = d_\nabla(\omega_k^l \otimes e_l) = (d\omega_k^\mu - \omega_k^l \wedge \omega_l^\mu)e_\mu.$$

A partir de esto es inmediato ver para cualquier k-forma E-valuada $\alpha = \alpha^j \otimes e_j \in \Omega^k(M, E)$ que

$$d_\nabla^2(\alpha) = \alpha^l \wedge \Omega_l^j \otimes e_j.$$

Hemos obtenido la ecuación de estructura de Maurer-Cartan: $\Omega = d\omega - \omega\wedge\omega$, en ella estamos codificando la geometría.

3.2. Clases características

Todo fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ admite alguna conexión, esto se puede ver tomando particiones diferenciables de la unidad. Fijada una conexión ∇ buscaremos cómo afectan los cambios de base de E a Ω. Esto nos permite deducir que ciertas formas de $\Omega^*(M)$ son invariantes por estos cambios de referencia. Finalmente veremos que las clases de cohomología de estas formas son siempre las mismas independientemente de la conexión elegida. Por último nos centraremos en algunas clases características concretas.
Proposición 3.8. Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial con una conexión ∇. Dadas dos bases $e_1, \dots, e_m$ y $\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{w}_m$ con expresamos la formas de conexión y curvatura respecto estas dos bases:

$$d_\nabla(e_j) = \omega^i_j e_i, \quad d_\nabla(\widetilde{e}_j) = \widetilde{w}^i_j \widetilde{e}_i, \qquad \Omega = d\omega - \omega \wedge \omega, \quad \widetilde{\Omega} = d\widetilde{\omega} - \widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\omega}.$$

Sea $A^i_j \in \mathcal{F}(M)$ tal que $\widetilde{e}_j = A^i_j e_i$ con inversa $(A^{-1})^i_j \widetilde{A}^i_j : \ e_j = \widetilde{A}^i_j \widetilde{e}_i$.
Entonces

$$\widetilde{\omega} = dAA^{-1} + A\omega A^{-1}, \qquad \widetilde{\Omega} = A\Omega A^{-1}.$$

Demostración. La primera identidad es inmediata:

$$d_\nabla(\widetilde{e}_j) = d_\nabla(A^i_j e_i) = dA^i_j e_i + A^i_j \omega^h_i e_h = (dA^i_j \widetilde{A}^k_i + A^i_j \omega^h_i \widetilde{A}^k_h)\widetilde{e}_k \ \Rightarrow \ \widetilde{\omega} = dAA^{-1} + A\omega A^{-1}.$$

La segunda también, comenzamos calculando

$$\begin{array}{rcllll} d\widetilde{\omega} & = & -dA \wedge d(A^{-1}) + & dA \wedge \omega A^{-1} + & Ad\omega A^{-1} - & A\omega \wedge d(A^{-1}), \\ \widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\omega} & = & dAA^{-1} \wedge dAA^{-1} + & dA \wedge \omega A^{-1} + & A\omega \wedge \omega A^{-1} + & A\omega A^{-1} \wedge dAA^{-1}. \end{array}$$

Como $d(A^{-1}) = -A^{-1}dAA^{-1}$ llegamos a que

$$d\widetilde{\Omega} = d\widetilde{\omega} - \widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\omega} = Ad\omega A^{-1} - A\omega \wedge \omega A^{-1} = A\Omega A^{-1}.$$

□

Es buena idea buscar los invariantes por conjugación de una matriz pues no dependerán de la base elegida. Ejemplos de estos son la traza o el determinante: $\mathrm{tr}(\Omega) \in \Omega^2(M), \ \det(\Omega) \in \Omega^{2m}(M)$.
$P : Gl(\mathbb{K}^m) \to \mathbb{K}$ se dice simétrico si para toda $A \in Gl(\mathbb{K}^m)$ tenemos que $P(ABA^{-1}) = B$. Claramente $\det(tI + B)$ es invariante por conjugación, desarrollando la expresión tendremos que

$$t^m + \dots tP_{m-1}(B) + P_m(B) = \det(tI + B) = \det(tI + ABA^{-1}) = t^m + \dots tP_{m-1}(ABA^{-1}) + P_m(ABA^{-1}).$$

En el caso complejo sabemos que el conjunto de matrices diagonalizables es denso dentro de $Gl(\mathbb{C}^m)$. Esto es sencillo de ver viendo el conjunto de matrices diagonalizables con autovalores distintos es denso en $Gl(\mathbb{C}^m)$. De hecho es un resultado más fuerte. Se justifica observando que $P(t)$ tiene raíces repetidas si y solo si el discriminante de $P(t)$ se anula. Estudiando los invariantes por conjugación de las matrices diagonales podremos encontrar polinomios invariantes en $Gl(\mathbb{C}^n)$, para el caso real también obtendremos invariantes.
Consideremos cualquier matriz diagonal D. Para cada par $i, j \ i \neq j$ conjugamos con el cambio de base $e_k \mapsto e_k$ para $k \neq i, j$ y que manda $e_i \mapsto e_j, \ e_j \mapsto e_i$. Entonces habremos cambiado las entrada i-ésima por la j-ésima en D. Deducimos entonces que cualquier polinomio invariante por conjugación debe ser homogéneo y simétrico. Usando el teorema fundamental de los polinomios simétricos sabemos que todo invariante podrá expresarse como combinación lineal de polinomios simétricos elementales.
Denotamos por

$$\Sigma_p(v_1, \dots, v_m) := \sum_{j=1}^m v_j^p, \qquad \sigma_p(v_1, \dots, v_m) = \sum_{j_1 < \dots < j_p} v_{j_1} \dots v_{j_m}, \qquad \Sigma_1 = \sigma_1.$$

A cada uno de estos polinomios le asociamos un operador invariante:

$$\Sigma_p(B) := \mathrm{tr}(B^p), \qquad \det(t + B) =: t^m + t^{m-1}\sigma_1(B) + \dots + t\sigma_{m-1}(B) + \sigma_m(B).$$

Fijémonos en que si B es la matriz diagonal con entradas $b := (b_1, \dots, b_m)$ entonces

$$\Sigma_p(b) = b_1^p + \dots + b_m^p = \mathrm{tr}(B^p), \quad \det(t + B) = \prod_{k=1}^m (t + b_k) = t^n + t^{n-1}\sigma_1(b) + \dots + t\sigma_{m-1}(b) + \sigma_m(b).$$

Además $\sigma_m(b) = \det(B)$.
Esta es la forma de definir clases características, calcularemos la traza de una potencia de Ω, el mismo determinante de Ω ó una combinación lineal de estos obteniendo formas diferenciales de M de grado par.
Realmente las clases características son invariantes cohomológicos del fibrado. Para verlo comenzaremos probando la identidad de Bianchi. ∇ induce naturalmente una nueva conexión sobre $\mathrm{End}(E)$. Fijado un transporte paralelo $\|$ en E la idea es la siguiente. No podemos desplazar los endomorfismos pero sí los vectores luego definimos el transporte paralelo de un endomorfismo $T \in E_p^* \otimes E_p$ a lo largo de una curva $\gamma : I \to M,\ \gamma(0) = p$ como:

$$(\|_0^h (\gamma)T)(v) := \|_0^h (\gamma)(T \|_h^0 (\gamma)v)\ \forall v \in E_{\gamma(h)}.$$

Sea entonces $T \in \Gamma(M, \mathrm{End}(E))$, dado $s \in \Gamma(M, E)$:

$$\left(\widetilde{\nabla}_{\gamma'(0)}T\right)(s) = \frac{d}{dh}\bigg|_{h=0} \|_h^0 (\gamma)T(\gamma(h))(s) = \lim_{h\to 0} \frac{\|_h^0 (\gamma)T(\gamma(h))(s) - T(s)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|_h^0 (\gamma)(T \|_0^h (\gamma)s) - Ts}{h} = \left[\frac{d}{dh}\bigg|_{h=0} \|_h^0 (\gamma)s, T\right] = [\nabla_{\gamma'(0)}, T].$$

Luego dados $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $T \in \Gamma(M, \mathrm{End}(E))$ tenemos que

$$\widetilde{\nabla}T(s) = \nabla(T(s)) - T(\nabla s) = [\nabla, T](s)\ \forall s \in \Gamma(M, E).$$

Tenemos otra diferencial exterior $d_{\widetilde{\nabla}} : \Omega^k(M, \mathrm{End}(E)) \to \Omega^{k+1}(M, \mathrm{End}(E))$:

$$d_{\widetilde{\nabla}}T(s) = [d_\nabla, T](s).$$

Para cada $\omega \in \Omega^k(M)$:

$$d_{\widetilde{\nabla}}(\omega \otimes T)(s) = d\omega \otimes T(s) + (-1)^k \omega \wedge d_{\widetilde{\nabla}}T(s) = d\omega \otimes T(s) + (-1)^k \omega \wedge [d_\nabla, T](s) =$$

$$d\omega \otimes T(s) + (-1)^k \omega \wedge (d_\nabla(Ts) - Td_\nabla s) = d_\nabla(\omega \otimes T)(s) + (-1)^{k+1} \omega \wedge Td_\nabla s.$$

Denotamos por comodidad

$$[d_\nabla, \omega \otimes T](s) := d_\nabla(\omega \otimes T)(s) + (-1)^{k+1} \omega \wedge Td_\nabla s\ \Rightarrow d_{\widetilde{\nabla}}(\omega \otimes T) = [d_\nabla, \omega \otimes T].$$

Enunciemos la identidad de Bianchi, será necesaria para el resultado principal.
Teorema 3.9. Identidad de Bianchi
Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial y ∇ una conexión. Entonces

$$d_{\widetilde{\nabla}}(\Omega) = 0.$$

Demostración. Dada $K \in \Omega^k(M, \mathrm{End}(E))$ de la forma $K = \omega \otimes T,\ T \in \Gamma(M, \mathrm{End}(E)),\ \omega \in \Omega^k(M)$ sabemos que $d_{\widetilde{\nabla}}K = [d_\nabla, K]$.
Por tanto

$$d_{\widetilde{\nabla}}\Omega(s) = [d_\nabla, \Omega](s) = d_\nabla(\Omega(s)) - \Omega(d_\nabla(s)) = d_\nabla^3(s) - d_\nabla^3(s) = 0.$$

□

Podemos escribir la identidad de Bianchi en función de ω, Ω :

$$d\Omega = -d\omega \wedge \omega + \omega \wedge d\omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega.$$

Antes de llegar al resultado que queremos comprobamos que $\mathrm{tr}\, d_{\widetilde{\nabla}} = d\,\mathrm{tr}$. Tomamos $\omega \otimes T \in \Omega^k M, \mathrm{End}(E)$, $T \in \Gamma(M, \mathrm{End}(E)),\ \omega \in \Omega^k(M)$:

$$\mathrm{tr}\, d_{\widetilde{\nabla}}(\omega \otimes T) = d\omega\, \mathrm{tr}(T) - \omega \wedge \mathrm{tr}([\nabla, T]) = d\omega\, \mathrm{tr}(T) - \omega \wedge d\,\mathrm{tr}(T) = d\,\mathrm{tr}(\omega \otimes T).$$

Efectivamente las clases características son invariantes cohomológicos del fibrado.

Teorema 3.10. Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un $\mathbb{K}$-fibrado vectorial con una conexión ∇ de rango m con forma de curvatura Ω. Dado un polinomio simétrico de grado p $P \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$ y $\widetilde{P} : Gl(\mathbb{K}^n) \to \mathbb{K}$ su operador asociado tendremos que

$$\widetilde{P}(\Omega) \in Z^{2p}(M).$$

Dada otra conexión ∇' con matriz de curvatura Ω' :

$$[\widetilde{P}(\Omega')] = [\widetilde{P}(\Omega)] \in H^{2p}_{\mathrm{dR}}(M).$$

Demostración. Para la primera parte del resultado solo tenemos que ver que $\operatorname{tr}(\Omega^p)$ es cerrada pues este es el operador asociado a Σ_p y cualquier otro polinomio simétrico P de grado p lo podemos expresar como $P = \sum_{j=1}^{p} \lambda^j \Sigma_j^{p-j},\ \lambda^j \in \mathbb{K}$. Por tanto

$$d\operatorname{tr}(\Omega) = \operatorname{tr}(d_{\widetilde{\nabla}}\Omega) = 0 \ \Rightarrow\ d\operatorname{tr}(\Omega^k) = \operatorname{tr}(d_{\widetilde{\nabla}}\Omega^k) = 0.$$

Para la segunda parte veremos que la identidad es cierta para cada operador asociado a Σ_p. Queremos ver que existe una forma cuya diferencial es la diferencia entre $\operatorname{tr}(\Omega^p_{\nabla'})$ y $\operatorname{tr}(\Omega^p_{\nabla})$ así que la vamos a construir integrando sobre un camino que una ambas conexiones:
Definimos el tensor $R \in \Gamma(\Omega, \operatorname{End}(E))$ dado por

$$R = \nabla' - \nabla.$$

Construimos la diferencial exterior $d_R := d_{\nabla'} - d_{\nabla}$.
La idea ahora es definir la conexión $\nabla^t := \nabla + tR$ con diferencial asociada $d_{\nabla^t} = d_{\nabla} + t d_R$. Teniendo en cuenta que R sí es un tensor, $d_R \in \Omega^1(M, \operatorname{End}(E))$, su matriz de curvatura es

$$\Omega_{\nabla^t} = \Omega_{\nabla} + t[d_{\nabla}, d_R] + \frac{1}{2}t^2[d_R, d_R] \ \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\Omega_{\nabla^t}) = [d_{\nabla}, d_R] + t[d_R, d_R] = d_{\widetilde{\nabla}^t} d_R.$$

También derivamos $\Omega^k_{\nabla^t}$ teniendo en cuenta que no deja de ser una matriz:

$$\frac{d}{dt}\Omega^k_{\nabla^t} = \sum_{j=1}^{k} \Omega^{j-1}_{\nabla^t}(d_{\widetilde{\nabla}^t} d_R)\Omega^{k-i} \ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}\operatorname{tr}(\Omega^k_{\nabla^t}) = k\operatorname{tr}(\Omega^{k-1}_{\nabla^t} d_{\widetilde{\nabla}^t} d_R).$$

Tenemos un candidato a integrar, antes nos aseguramos de que esta forma es exacta:

$$d\operatorname{tr}(\Omega^{k-1}_{\nabla^t} d_R) = \operatorname{tr} d_{\widetilde{\nabla}^t}(\Omega^{k-1}_{\nabla^t} d_R) = \operatorname{tr}\left(d_{\widetilde{\nabla}^t}(\Omega^{k-1}_{\nabla^t})d_R + \Omega^{k-1}_{\nabla^t} d_{\widetilde{\nabla}^t} d_R\right) = \operatorname{tr}\left(\Omega^{k-1}_{\nabla^t} d_{\widetilde{\nabla}^t} d_R\right)$$

Por tanto

$$\operatorname{tr}(\Omega^k_{\nabla'}) - \operatorname{tr}(\Omega^k_{\nabla}) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(\Omega^k_{\nabla^t})\, dt = k\int_0^1 \operatorname{tr}(\Omega^{k-1}_{\nabla^t} d_{\widetilde{\nabla}^t} d_R)\, dt = d\left(k\int_0^1 \operatorname{tr}(\Omega^{k-1}_{\nabla^t} d_R)\, dt\right).$$

□

Antes de nombrar algunas clases características concretas veremos cómo encontrar alguna forma de conexión en un fibrado. Nos comenzamos fijando en el fibrado tangente. El único operador que tenemos que opere campos con campos es el corchete de Lie y no es $\mathcal{F}(M)$-lineal en ninguna de sus entradas. En el cotangente tenemos el análogo:

$$\mathcal{L}_X\omega = \iota_X d\omega + d(\iota_X\omega).$$

El segundo sumando rompe la $\mathcal{F}(M)$-linealidad.

3.2.1. Métrica riemanniana

Veamos qué sucede si tenemos una métrica riemannianas. En este caso buscamos una conexión que transporte paralelamente bases ortonormales. Al trabajar con el fibrado tangente, cuyo rango es la dimensión de la variedad, surge el concepto de torsión.
Cuando podemos establecer un isomorfismo entre el fibrado con el que estemos trabajando y el tangente

podemos preguntarnos si $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. Cuando esto suceda para todo campo diremos que la torsión es nula.
Al tener una conexión compatible con la métrica y sin torsión las cuentas se simplificarán. Esta conexión, la de Levi-Civita, siempre existe y además es única. Podemos dar directamente su matriz de curvatura como

$$\omega_i^j = \frac{1}{2} g^{jl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^l} \right) dx^k.$$

Sin embargo, el enfoque de Cartan simplifica notablemente las cuentas. Como el transporte paralelo preserva la ortonormalidad de la base podemos afirmar que $\nabla g = 0$:

$$dg_{ij} = (\nabla g)(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) + g(\nabla \partial_{x^i}, \partial_{x^j}) + g(\partial_{x^i}, \nabla \partial_{x^j}) = g(\nabla \partial_{x^i}, \partial_{x^j}) + g(\partial_{x^i}, \nabla \partial_{x^j}) \;\Rightarrow\; dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + g_{ik} \omega_j^k.$$

Tomemos una base ortonormal del tangente $e_1, \ldots, e_n$ En primer lugar llegamos a que $0 = \omega_i^j + \omega_j^i$. Sea ahora $\omega^1, \ldots, \omega^n$ base la base dual:

$$\omega^1 \otimes e_1 + \ldots + \omega^n \otimes e_n = dx^1 \otimes \partial_{x^1} + \ldots + dx^n \otimes \partial_{x^n}.$$

Usando la antisimetría y que no hay torsión:

$$d_\nabla (dx^j \otimes \partial_{x^j}) = dx^j \wedge d_\nabla \partial_{x^j} = dx^j \wedge dx^i \nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = 0.$$

Por otro lado

$$0 = d_\nabla (dx^j \otimes \partial_{x^j}) = d_\nabla (\omega^j \otimes e_j) = d\omega^i e_i - \omega^j \wedge \omega_j^i e_i \;\Rightarrow d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i.$$

Tenemos dos ecuaciones que nos permitirán encontrar la forma de conexión:

$$\begin{cases} \omega_j^i & = & -\omega_i^j, \\ d\omega^i & = & \omega^j \wedge \omega_j^i. \end{cases}$$

Veamos cómo encontrarla. Comenzamos desarrollando $d\omega^i = a_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k,\; a_{jk}^i + a_{kj}^i = 0$. Ahora nos fijamos en que al cambiar j por k en $a_{ki}^j + a_{ji}^k$ nos queda lo mismo luego

$$(a_{ki}^j + a_{ji}^k) \omega^j \wedge \omega^k = 0 \;\Rightarrow d\omega^i = (a_{jk}^i + a_{ki}^j + a_{ji}^k) \omega^j \wedge \omega^k.$$

Definimos $\omega_j^i := \sum_k (a_{jk}^i + a_{ki}^j + a_{ji}^k) \omega^k$. Ahora solo debemos calcular

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega.$$

Una propiedad de Ω que debemos tener en cuenta a la hora de calcular trazas es que es antisimétrica:

$$\Omega_i^j + \Omega_j^i = d\omega_i^j + d\omega_j^i - \omega_i^k \wedge \omega_k^j - \omega_j^k \wedge \omega_k^j = 0.$$

Podemos afirmar que si n es impar el determinante es 0, si n es par nos queda el cuadrado de la pfaffiana y en cualquier caso la traza de Ω es nula.
Definición 3.11. Clases de Pontryagin Dado un fibrado vectorial E de rango m sobre una variedad M de dimensión n. Se define la k-ésima clase de Pontryagin como $p_k(E) \in H_{\mathrm{dR}}^{4k}(M)$ dada por

$$p(E) := \det \left(tI + \frac{1}{2\pi} \Omega \right) = t^m + t^{m-2} p_1(E) + \ldots + p_{[m/2]}(E) \in H_{\mathrm{dR}}^{\bullet}(M).^2$$

Están asociadas al polinomio $\frac{1}{(2\pi)^{2k}} \sigma_{2k}$.

[2] Realmente no es necesario escribir la t pero nos ayuda a visualizar mejor que obtenemos formas de distintos grados.

Cada polinomio σ_k se puede calcular a partir de los $\Sigma_j,\ j \leq k$. Por ejemplo

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\Sigma_1^2 - \Sigma_2), \quad \sigma_3 = \frac{1}{6}(\Sigma_1^3 - 3\Sigma_1\Sigma_2 + 2\Sigma_3).$$

No tiene sentido calcular una clase de Pontryagin asociada a σ_{2k+1}. Como es un polinomio de grado impar, al expresar σ_{2k+1} como suma de productos de polinomios Σ_j tendremos que en cada producto habrá un Σ_j de grado impar, será nulo pues una potencia impar de una matriz antisimétrica sigue siendo antisimétrica. Otro detalle es que hemos multiplicado al polinomio por una constante. Solo mencionaremos que la construcción de las clases característica se puede hacer desde la topología algebraica obteniendo elementos de $H^\bullet(M)$ en lugar de $H^\bullet(M, \mathbb{R})$.

Ejemplo 3.12. Las esferas

$\mathbb{S}^4$ es la única esfera candidata a tener primera clase de Pontryagin no trivial pues es la única con cuarto grupo de cohomología no nulo. Consideramos en $\mathbb{S}^4$ la métrica inducida por $\mathbb{R}^5$ y tomamos coordenadas estereográficas:

$$g = \delta_{ij}\frac{4dx^i \otimes dx^j}{(1+|x|^2)^2}.$$

Claramente $e_k := \frac{1}{2}(1+|x|^2)\partial_{x^k}$ es ortonormal y tomamos $\omega^k = 2\frac{dx^k}{1+|x|^2} \ \Rightarrow\ \omega_i^j = x^j\omega^i - x^i\omega^j$

$$d\omega_i^j = 2dx^j \wedge \omega^i - x^j\sum_{k=1}^n x^k\omega^k \wedge \omega^i + x^i\sum_{k=1}^n x^k\omega^k \wedge \omega^j.$$

$$\omega_i^k \wedge \omega_k^j = x^k x^j \omega^i \wedge \omega^k + x^i x^k \omega^k \wedge \omega^j - (x^k)^2\omega^i \wedge \omega^j.$$

Por tanto

$$\Omega_i^j = 2dx^j \wedge \omega^i + |x|^2\omega^i \wedge \omega^j = (1+|x|^2)\omega^j \wedge \omega^i + |x|^2\omega^i \wedge \omega^j = \omega^j \wedge \omega^i.$$

Llegamos entonces a que

$$\operatorname{tr}(\Omega \wedge \Omega) = \Omega_i^j \wedge \Omega_j^i = -\Omega_i^j \wedge \Omega_i^j = -\omega^j \wedge \omega^i \wedge \omega^j \wedge \omega^i = 0.$$

De hecho, como la clase k-ésima de Pontryagin se puede construir mediante trazas y potencias de estas deducimos que en una esfera siempre serán triviales. Esto se debe a que las clases de Pontryagin son estables y a que, tomando como fibrado normal asociado a la métrica que induce $\mathbb{R}^{n+1}$ tenemos que $T\mathbb{S}^n \oplus \mathbb{R} \equiv T\mathbb{S}^n \oplus N\mathbb{S}^n$ es el fibrado trivial.

Definición 3.13. Estabilidad de una clase característica Una clase característica c se dice estable si $c(E) = c(E \oplus \mathbb{K})$ para todo fibrado E.

Dados dos fibrados E, F sobre M tomamos conexiones ∇^E, ∇^F con formas de curvaturas asociadas Ω^E, Ω^F. Entonces

$$\Omega^{E\times F} = \left(\begin{array}{c|c} \Omega^E & 0 \\ \hline 0 & \Omega^F \end{array}\right).$$

Luego

$$\det\left(tI + \frac{1}{2\pi}\Omega^{E\oplus F}\right) = \det\left(tI + \frac{1}{2\pi}\Omega^E\right)\det\left(tI + \frac{1}{2\pi}\Omega^F\right).$$

En consecuencia $p_k(E \oplus F) = \sum_{j=0}^k p_j(E)p_{k-j}(F)$ donde definimos $p_0(F) := 1$.

Efectivamente las clase de Pontryagin son estables pues

$$p_k(E \oplus \mathbb{R}) = \sum_{j=0}^k p_j(E)p_{k-j}(\mathbb{R}) = p_k(E).$$

3.2.2. Métrica hermítica

Nuestro objetivo es realizar la misma construcción de las clases de Pontryagin pero en variedades complejas. Partimos de un fibrado complejo E sobre M. Extendiendo por linealidad ∇ al complexificado tendremos que $\nabla(is) = i\nabla s$. Toda la construcción de la forma de conexión y curvatura es análoga al caso real.

Tomemos un fibrado complejo E sobre M. Este admite estructura hermítica, veamos si existe alguna conexión compatible con la métrica y que nos permita simplificar los cálculos. Igual que en el caso riemanniano buscamos que $\nabla(h) = 0$ luego tomando la base holomorfa $\partial_{z^1}, \ldots, \partial_{z^n}$ del fibrado tangente y una base $e_1, \ldots, e_m$ de E queremos que

$$\partial_{z^k}(h_{ij}) = h(\nabla_{\partial_{z^k}} e_i, e_j) + h(e_i, \nabla_{\partial_{\bar{z}^k}} e_j).$$

Por otro lado $\nabla e_j = (\omega^k_{j\alpha} dz^\alpha + \omega^k_{j\bar{\alpha}} d\bar{z}^\alpha) \otimes e_k$. Un objetivo es que ∇ se identifique de cierta manera con ∂. Para lograr esto debemos pedir que el fibrado sea holomorfo. En particular las funciones de transición son holomorfas. Dada una base local holomorfa $e_1, \ldots, e_m$ del fibrado:[3]

$$\bar{\partial}(s^j e_j) := \bar{\partial} s^j \otimes e_j \ \forall s^j \in \Omega^k(M)^{\mathbb{C}}.$$

El operador está bien definido pues dada otra base holomorfa $f_1, \ldots, f_m$ con $e_k = g_{kj} f_j$ tendremos que $\widetilde{s}^k f_k = s = s^j e_j = s^j g_{jk} f_k \ \Rightarrow \ \widetilde{s}^k = s^j g_{jk}$. Por tanto

$$\bar{\partial}(\widetilde{s}^k f_k) = \bar{\partial}\widetilde{s}^k \otimes f_k = \bar{\partial}(s^j g_{jk}) \otimes f_k = g_{jk} \bar{\partial} s^j \otimes f_k = \bar{\partial} s^j \otimes e_j.$$

La elección de $\bar{\partial}$ para definir la cohomología Dolbeault se debe a esto. Podemos construir una cohomología, que no vamos a estudiar, sobre fibrados holomorfos. De igual manera podríamos trabajar con ∂ sobre fibrados antiholomorfos pero por es más cómodo el primer enfoque.
Diremos que una conexión ∇ en un fibrado holomorfo E es compatible con la estructura compleja si dada una cualquier base holomorfa $e_1, \ldots, e_m$ de E se tiene que

$$\nabla e_j = \omega^k_{ji} dz^i \otimes e_k.$$

Dicho de otra forma tenemos que $\omega^k_j \in \Omega^{1,0}(M)$. Ahora supongamos que la conexión es compatible con la métrica:

$$dh_{ij} = \omega^k_i h_{kj} + h_{ik} \bar{\omega}^k_j.$$

Por tanto $\partial h_{ij} = \omega^k_i h_{kj}, \ \bar{\partial} h_{ij} = h_{ik} \bar{\omega}^k_j$. Llegamos entonces a que

$$\omega^k_i = \partial h_{ij} h^{kj} \ \Rightarrow \ \omega = \partial h h^{-1}.$$

Veamos que efectivamente $\omega = \partial h h^{-1}$ define una conexión. Para ello debemos ver qué sucede al cambiar de base holomórficamente. Sea $\widetilde{h} = A h A^* \ \Rightarrow \ \partial \widetilde{h} = dA h A^* + A \partial h A^*$:

$$\partial \widetilde{h} \widetilde{h}^{-1} = dA A^{-1} + A \partial h h^{-1} A^{-1}.$$

Efectivamente hemos obtenido una forma de conexión. Calculemos la curvatura

$$d\omega = d(\partial h h^{-1}) = \bar{\partial}(\partial h h^{-1}) + \partial(\partial h h^{-1}) = \bar{\partial}(\partial h h^{-1}) - \partial h \wedge \partial(h^{-1}) = \bar{\partial}(\partial h h^{-1}) + \partial h h^{-1} \wedge \partial h h^{-1} \ \Rightarrow$$

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega = \bar{\partial}(\partial h h^{-1}).$$

Si estamos tratando con un fibrado lineal tendremos que $\Omega = \bar{\partial}\partial \log h$. Veamos un primer ejemplo.
Ejemplo 3.14. El fibrado tautológico $\mathbb{CP}^n$ Aunque se puede generalizar a cualquier grassmaniana nos centraremos en los espacios proyectivos. Consideramos $\mathbb{KP}^n$, el fibrado tautológico se define tomando las fibras $E_{(p_0:\ldots:p_n)} := \mathbb{K}\langle p \rangle \subset \mathbb{K}^{n+1}$ donde $p = (p_0, \ldots, p_n)$.
Para el ejemplo que nos interesa tomamos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Entonces $E \subset \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$. Se trata de un fibrado lineal pues $\dim_{\mathbb{C}}(E_p) = 1$ y podemos aplicar lo que hemos deducido. Debemos encontrar antes una métrica hermítica en E, para ello usamos que $E \subset \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ dándole la estructura hermítica natural de $\mathbb{C}^{n+1}$. Se toman por ejemplo las coordenadas $(z^1, \ldots, z^n) = \left(\frac{p_1}{p_0}, \ldots, \frac{p_n}{p_0}\right)$. La fibra en $p(p_0 : \ldots : p_n)$ es $\mathbb{C}(p_0, \ldots, p_n)$ luego dados $\lambda(p_0, \ldots, p_n), \ \mu(p_0, \ldots, p_n)$ su producto hermítico será $\lambda\bar{\mu} \sum\limits_{k=0}^{n} p_k^2$.
Si lo expresamos en función de las coordenadas nos queda $h(z) = 1 + |z|^2$. Por tanto

$$\omega = \partial h h^{-1} = \frac{\bar{z}^j dz^j}{1 + |z|^2}, \quad \Omega = \bar{\partial}\partial \log h = \frac{\delta_{jk}(1 + |z|^2) - \bar{z}^j z^k}{(1 + |z|^2)^2} d\bar{z}^k \wedge dz^j.$$

Hemos obtenido de nuevo Fubini-Study. La ventaja es que si queremos calcular las clases características es bastante más sencillo pues realmente tratamos con una matriz de orden 1.

[3] La base se dice holomorfa si se obtiene mediante alguna trivialización.

Definición 3.15. Clases de Chern Dado un fibrado vectorial complejo E de rango m sobre una variedad M variedad n. Se define la k-ésima clase de Chern como $c_k(E) \in H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M)$ dada por

$$c(E) := \det \left(tI - \frac{1}{2\pi i}\Omega \right) = t^m + t^{m-1}c_1(E) + \ldots + c_n(E) \in H^{\bullet}_{\mathrm{dR}}(M).$$

Están asociadas al polinomio $\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^k \sigma_k$.
Las formas con las que estamos trabajando están complexificadas pero afirmamos que las clases de Chern están en $H^{\bullet}_{\mathrm{dR}}(M)$. La conexión es compatible con la métrica luego al tomar una base unitaria llegamos a que

$$dh_{ij} = \omega_i^k h_{kj} + h_{ik}\bar{\omega}_j^k \;\Rightarrow\; \omega_i^j + \bar{\omega}_j^i = 0.$$

Igual que en el caso riemanniano tenemos para la curvatura:

$$\Omega + \Omega^* = 0.$$

$tI - \frac{1}{2\pi i}\Omega$ es antihermítica y el determinante de una matriz antihermítica es real luego efectivamente las clases de Chern se encuentran en De Rham. Hemos definido las clases de Chern de forma análoga a las de Pontryagin luego

$$c_k(E \oplus F) = \sum_{j=0}^{k} c_j(E)c_{k-j}(F).$$

Podemos afirmar que estas clases son estables. Volvamos a nuestro ejemplo.
Ejemplo 3.16. Clases de Chern del fibrado tautológico sobre $\mathbb{CP}^n$ Denotamos al fibrado tautológico sobre $\mathbb{CP}^n$ por $\mathcal{O}(n)$. Se trata de un fibrado lineal luego

$$c_1(\mathcal{O}(n)) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{\delta_{jk}(1+|z|^2) - \bar{z}^j z^k}{(1+|z|^2)^2} d\bar{z}^k \wedge dz^j.$$

Para ver qué elemento de $H^2_{\mathrm{dR}}(\mathbb{CP}^n)$ es este nos comenzamos fijando en $\mathbb{CP}^1$. Solo tenemos que integrar:

$$\int_{\mathbb{CP}^1} c_1(\mathcal{O}(1)) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{(1+|z|^2)^2} d\bar{z} \wedge dz = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{r}{(1+r^2)^2} dr d\theta = -1.$$

De hecho denotamos por $-x := c_1(\mathcal{O}(1))$.
Podemos calcular la n-ésima potencia de la primera clase de Chern para después integrarla y, usando la estructura del anillo de cohomología de $\mathbb{CP}^n$, deducir que la clase es no trivial

$$c_1(\mathcal{O}(n))^n = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^n \frac{n! d\bar{z}^1 \wedge dz^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^n \wedge dz^n}{(1+|z|^2)^{n+1}} \;\Rightarrow\; \int_{\mathbb{CP}^n} c_1(\mathcal{O}(n))^n = (-1)^n \neq 0.$$

Ejemplo 3.17. Clases de Chern de $T\mathbb{CP}^n$ Podemos definir un isomorfismo de fibrados entre $T\mathbb{CP}^n$ y $\hom(\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(n)^{\perp})$. Para hacer esto usamos la traslación $z \mapsto \lambda z,\ \lambda \neq 0$ con $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ para mover los espacios tangentes a un punto en una trivialización a cualquier representante. De esta manera identificamos el espacio tangente en un punto $p \in \mathbb{CP}^n$ con $\mathcal{O}(n)_p^{\perp}$. No vamos a entrar en los detalles.
Partiendo de que $T\mathbb{CP}^n \equiv \hom(\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(n)^{\perp})$. Dado cualquier fibrado ξ de rango 1 el fibrado $\hom(\xi, \xi)$ es trivial luego

$$T\mathbb{CP}^n \oplus \mathbb{C} \equiv \hom(\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(n)^{\perp}) \oplus \hom(\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(n)) \equiv \hom(\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(n)^{\perp} \oplus \mathcal{O}(n)).$$

Como $\mathcal{O}(n)^{\perp} \oplus \mathcal{O}(n) \equiv \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ tenemos que

$$\hom(\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(n)^{\perp} \oplus \mathcal{O}(n)) \equiv \hom(\mathcal{O}(n), \mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}) \equiv \hom(\mathcal{O}(n), \mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus \hom(\mathcal{O}(n), \mathbb{C}).$$

Concluimos entonces que

$$T\mathbb{CP}^n \oplus \mathbb{C} \equiv \bigoplus^{n+1} \mathcal{O}(1)^*.$$

Para tratar con el dual tenemos en cuenta que una conexión ∇ en un fibrado E define otra $\widetilde{\nabla}$ sobre E^*. Tomando una conexión adecuada conseguimos que Ω sea antihermítica luego $\widetilde{\Omega} = -\Omega^t$. En consecuencia $c_k(\widetilde{E}) = (-1)^m c_k(\widetilde{E})$ siendo k el rango del fibrado. Juntando esto con lo anterior tenemos que

$$c_k(T\mathbb{CP}^n) = c_k(T\mathbb{CP}^n \oplus \mathbb{C}) = c_k\left(\bigoplus^{n+1} \mathcal{O}(1)^*\right) \ \Rightarrow$$

$$\det\left(tI - \frac{1}{2\pi i}\Omega^{T\mathbb{CP}^n}\right) = (t+x)^{n+1} \ \Rightarrow \ c_k(\mathbb{CP}^n) = \binom{n+1}{k} x^k.$$

Relación entre las clases de Chern y Pontryagin Hemos visto que las clases de Chern y Pontryagin se definen de la misma manera. Sin embargo debemos tener en cuenta que las clases de Pontryagin se constuyen para fibrados reales mientras que las de Chern para fibrados complejos.
Nada nos impide tomar un fibrado real E y fijarnos en su complexificado $E^{\mathbb{C}}$. Al extender linealmente a $\mathbb{C}$ una conexión ∇ en E acabamos obteniendo las mismas formas ω, Ω pero extendidas a $\mathbb{C}$. Entonces

$$p_k(E) := \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2k} \sigma_{2k}(\Omega) = (-1)^k \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^{2k} \sigma_{2k}(\Omega) = (-1)^k c_{2k}(E \otimes \mathbb{C}).$$

Como $\sigma_{2k+1}(E) = 0$ deducimos además que $c_{2k+1}(E \otimes \mathbb{C}) = 0$.
Podemos realizar el proceso inverso, dado un fibrado vectorial complejo E de rango m interpretarlo como uno real $E_{\mathbb{R}}$ de rango $2m$. Entonces $E_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \equiv E \oplus \bar{E}$ luego $p_k(E_{\mathbb{R}}) = (-1)^k c_{2k}(E_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C})$:

$$c(E_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}) = c(E \oplus \bar{E}) = c(E)c(\bar{E}) \ \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k p_k(E_{\mathbb{R}}) = \left(\sum_{k=0} c_k(E)\right)\left(\sum_{k=0} (-1)^k c_k(E)\right).$$

Aplicación de las clases características estables Hemos calculado las clases de Pontryagin de $T\mathbb{S}^n$ y hemos visto que son siempre 0. En los casos en los que $T\mathbb{S}^n$ no es trivial no podemos justificarlo con mediante clases. Sin embargo podemos encontrarle otra utilidad. Supongamos que tenemos una variedad M de dimensión n inmersa es $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces $TM \oplus \mathbb{R}$ es un fibrado trivial y $p_h(TM) = 0 \ \forall h \neq 0$.
Para el caso real necesitamos las clases de Stiefel–Whitney. Estas se definen sobre el anillo de cohomología con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$. Por ejemplo $H^{2k}(\mathbb{RP}^n) \equiv \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, \ 0 < 2k \leq n$ y al tomar coeficientes en $\mathbb{R}$ anulamos el grupo luego las clases de Pontryagin no nos dirían nada.
Estamos encontrando condiciones necesarias. Con la teoría de Hirsch-Smale podemos ver que tampoco debemos pedir mucho más para que además sean suficientes.
Ahora entendemos mejor por qué las clases de Pontryagin de $\mathbb{S}^n$ eran triviales. Volvamos a trabajar con $\mathbb{CP}^n$:

$$p_k(T\mathbb{CP}^n) = (-1)^k c_{2k}(T\mathbb{CP}^{n\mathbb{C}}) = \binom{n+1}{2k} x^{2k} \in \frac{\mathbb{R}[x]}{(x)^{n+1}}$$

Para $2k \geq n+1$ la clase es nula. De aquí deducimos que para $n \geq 2$ la clase $p_1(T\mathbb{CP}^n)$ es no trivial luego no tenemos inmersiones de $\mathbb{CP}^n$ en $\mathbb{R}^{2n+1}$. Para el caso $n = 1 :\ \mathbb{CP}^1 \equiv \mathbb{S}^2$ y obviamente podemos embeber la esfera de dimensión n en el espacio euclídeo de dimensión inmediatamente superior.
Las clases características tienen más aplicaciones. Desde la clasificación de fibrados hasta cobordismo. Por desgracia no podemos centrarnos en todas. Acabamos dando un resultado que de cierta manera nos permite unir geometría y topología.

3.2.3. Gauss-Bonnet generalizado

Hemos justificado mediante la dualidad de Poincaré que la característica de Euler-Poincaré es siempre 0 para una variedad compacta y orientable de dimensión impar. Concluiremos el texto definiendo una clase característica no estable que lleva el nombre de Euler.
Para definir esta clase característica necesitamos que el fibrado E sea orientable.

La clase característica de Euler Sea E un fibrado real de rango $k \equiv_2 0$ sobre M. Elegimos una métrica riemanniana cualquiera en E y su correspondiente conexión de Levi-Civita. La mayor clase de Pontryagin es $p_{k/2}(E) \in H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M)$.
De hecho $p_{k/2}(E)$ se corresponde con el determinante de la forma de curvatura:

$$p_{k/2}(E) = \frac{1}{(2\pi)^k}\sigma_k(E) = \frac{1}{(2\pi)^k}\det(\Omega).$$

Ω es una matriz antisimétrica de rango par así que podemos trabajar directamente con el pfaffiano de la matriz. Este existe siempre a nivel local, para que esté bien definido globalmente necesitamos que E sea orientable. *Diagonalizando* obtenemos una expresión cómoda del pfaffiano:

$$\widetilde{J} := P\Omega P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|cc} \lambda_1 J & & & \\ \hline & \lambda_2 J & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{k/2} J \end{array}\right), \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente $\det(\widetilde{J}) = \lambda_1^2\lambda_2^2\dots\lambda_{k/2}^2$ y $\mathrm{pf}(\widetilde{J}) := \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{k/2}$. Si queremos calcularlo directamente a partir de los coeficientes de Ω : $\mathrm{pf}(\Omega) = \frac{1}{2^{n/2}(n/2)!}\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\prod_{i=1}^{n/2}\Omega_{\sigma(i)}^{\sigma(2i+1)}$. Para matrices de orden 4 nos quedaría

$$\mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} = af - be + cd.$$

Lo importante es que es invariante por conjugación y por tanto nos permite definir una nueva clase característica. No va a ser estable pues $\mathrm{pf}\left(\begin{array}{c|c} \Omega_1 & 0 \\ \hline 0 & \Omega_2 \end{array}\right) = \mathrm{pf}(\Omega_1)\,\mathrm{pf}(\Omega_2)$.

Definición 3.18. Forma de Euler Dado un fibrado vectorial orientable E de rango $k \equiv_2 0$ sobre una variedad M se define la forma de Euler como $e(E) \in H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M)$ dada por

$$e(E) := \frac{1}{(2\pi)^k}[\mathrm{pf}(\Omega)],$$

donde Ω es la forma de curvatura asociada a la conexión de Levi-Civita dada por alguna métrica riemanniana en E.
Para ver que efectivamente $\mathrm{pf}(\Omega)$ es cerrada podemos seguir [10]. La idea es usar que

$$\mathrm{pf}(\Omega) = \sum_{j=1}^{n}\int_M \exp\left(-\frac{1}{2}x^i\Omega_i^j x^j\right)dx.$$

Si elegimos otra conexión obtendremos también el mismo representante. Hemos obtenido un nuevo invariante cohomológico.

Relación de la clase de Euler con las clases de Chern Sea E un fibrado complejo de rango k sobre M. El objetivo es comprobar que $e(E_{\mathbb{R}}) = c_n(E)$. Para ello tomamos una métrica hermítica, restringida a $E_{\mathbb{R}}$ es riemanniana. La idea es usar la identificación $a+bi \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ para en las matrices de curvatura. Después las diagonalizamos obteniendo para Ω una matriz diagonal con entradas $ib_1,\dots,ib_k$ y para $\Omega_{\mathbb{R}}$ una matriz diagonal por bloques con bloques $\begin{pmatrix} 0 & -b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}$.
De esta manera llegamos a que

$$\mathrm{pf}(\Omega_{\mathbb{R}}) = (-1)^k b_1\dots b_k = i^k\det(\Omega).$$

Luego

$$e(E_{\mathbb{R}}) = \frac{1}{(2\pi)^k}\,\mathrm{pf}(\Omega_{\mathbb{R}}) = \frac{1}{(2\pi i)^k}\det(\Omega) = c_k(E).$$

Finalmente veremos dos resultados importantes. En sus pruebas podremos ver cómo hacer argumentos geométricos en los que construimos conexiones adecuadas.

Proposición 3.19. Obstrucción de la forma de Euler

Sea E un fibrado vectorial de rango $k \equiv_2 0$. Si existe una sección no nula entonces $e(E) = 0$.

Demostración. Si existe una sección no nula $s \in \Gamma(M, E)$ tendremos que $E = \mathbb{R} \oplus E'$. Ahora tomamos una métrica riemanniana en E' que extendemos a E haciendo que $g(s(p), s(p)) = 1$. De igual manera extendemos la conexión de Levi-Civita de E' a E. En el proceso podemos perder la torsión pero el transporte paralelo está bien definido y la conexión sigue siendo métrica. En consecuencia $\omega_1^j = \omega_j^1 = 0\ \forall j$, sucede lo mismo con Ω luego su pfaffiana es nula. □

Después veremos que el recíproco también es cierto.

Teorema 3.20. Gauss-Bonnet

Sea M una variedad orientable y compacta de dimensión $n \equiv_0 2$. Entonces

$$\int_M e(TM) = \chi(M).$$

Daremos una esbozo de la idea de Morita.[9] En la prueba de Chern[2] se aplica lo mismo pero trasladando previamente todas las singularidades al mismo punto y de manera intrínseca. En Spivak[15] encontramos un enfoque desde la topología algebraica. Aunque pueda resultar el más atractivo tendríamos que introducir nuevos conceptos.

Demostración. La idea tomar una triangulación cualquiera $\mathcal{T}$ de M y construir un campo vectorial con singularidades en cada símplice. Este campo tendrá índice 1 en las singularidades asociadas a los $2k$-símplices e índice -1 en las singularidades de los $(2k-1)$-símplices. En [9] podemos ver croquis que nos ayudan a entender la construcción del campo.
En [2] podemos ver de hecho qué forma tomar. Restringida a los vectores unitarios es exacta luego tenemos que integrarla usando Stokes en los entornos de las singularidades.
Trabajamos a nivel local y tomando coordenadas adecuadas los campos en los k-símplices son de la forma

$$X_k := -x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - \ldots - x^k \frac{\partial}{\partial x^k} + x^{k+1} \frac{\partial}{\partial x^{k+1}} + \ldots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n} =: (-1)^{\kappa(i,k)} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Tomamos $n = 2$ ya que la pfaffiana es más sencilla de calcular. Construimos una conexión métrica que se anule X_k fuera de las singularidades. Integramos $\Omega_1^2 = d\omega_1^2$ en un entorno de una singularidad. Usando Stokes vemos que es calcular la integral de ω_1^2 en $\mathbb{S}^1$. Para los $0, 2$-símplices obtenemos 2π mientras que en los 1-simplices -2π.
En dimensiones superiores nos fijamos en que $\frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto -\frac{\partial}{\partial x^i}$ define un automorfismo de $T\mathbb{R}^n$ que invierte la pfaffiana. Si vemos que al integrar la pfafiana en el entorno de una singularidad asociada a un 0-símplice obtenemos 1 sabremos que un k-símplice será $(-1)^k$.
Como trabajamos a nivel local tomamos la métrica adecuada para tratar localmente con $S_n := \mathbb{S}^2 \times \ldots \times \mathbb{S}^2$.
Construimos la singularidad asociada al 0-símplice en $\mathbb{S}^2 \times \ldots \times \mathbb{S}^2$ tomando en cada $\mathbb{S}^2$ el siguiente campo: Consideramos $\mathbb{S}^2$ como superficie de revolución de $\mathbb{S}^1$, en $\mathbb{S}^1$ asignamos tomamos el campo que a cada (x, y) le asigne $(y, -|x|)$. Denotando por $a_{n,k}$ a la integral de la forma de Euler asociada a un k-símplice en en caso n-dimensional sabemos que $a_{n,2k} = a_{n,0}$. S_n tiene exactamente 2^n singularidades todas del tipo $a_{n,2k}$ luego:

$$2^n a_{n,0} = \int_{S_n} e(TS_n) = \left(\int_{\mathbb{S}^2} e(T\mathbb{S}^2) \right)^n = 2^n.$$

□

En una variedad diferenciable compacta podemos construir un campo vectorial con una cantidad finita de singularidades. Mediante difeotopías las trasladamos todas dentro del mismo entorno coordenado. Se redefine el campo en este entorno para que tenga a lo sumo una singularidad. La característica de Euler-Poincaré nos indica cuándo tendremos la singularidad con cierta multiplicidad o cuándo la el fibrado tangente admite una sección no nula.
Las clases características nos dan una gran cantidad de aplicaciones que, por desgracia, no hemos podido llegar a ver. Esto se debe a que son invariantes del propio fibrado sin necesidad de que este sea diferenciable.

De hecho para los fibrados complejos sobre superficies de Riemann podemos usar el rango del fibrado y la primera clase de Chern para clasificarlos usando el truco de expresar un fibrado como suma directa de otro y una sección no nula.

Bibliografía

[1] M. Berger. *A Panoramic View of Riemannian Geometry.* Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[2] S. Chern. *A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds.* Annals of Mathematics, 1943.

[3] A. Hatcher. *Vector Bundles and K-Theory.* 2017. https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VB.pdf.

[4] J. Tornehave I. Madsen. *From Calculus to Cohomology.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[5] S. Kumaresan. *A Course in Differential Geometry and Lie Groups.* Hindustan Book Agency, Delhi, 2002.

[6] J. M. Lee. *Smooth Manifolds.* Springer, New York, 2012.

[7] H. Toda M. Mimura. *Topology of Lie Groups, I and II*, volume 91. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1991.

[8] J. Milnor. *Morse Theory. (AM-51).* Princeton University Press, 2016. URL: https://doi.org/10.1515/9781400881802.

[9] S. Morita. *Geometry of Differential Forms*, volume 201. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

[10] S. Moroianu. Higher transgressions of the pfaffian. 2020.

[11] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics.* Institute of Physics Publishing, Bristol, 1990.

[12] J. Harris P. Griffiths. *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley Classics Library, 1994.

[13] L. W. Tu R. Bott. *Differential Forms in Algebraic Topology.* Springer, New York, 1982.

[14] Jr R. O. Wells. *Differential Analysis on Complex Manifolds.* Springer, New York, third edition, 2008.

[15] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vols. I-V.* Publish or Perish, Incorporated, Houston, Texas, third edition, 1999.

[16] J. A. Rojo V. Muñoz, A. González-Prieto. *Geometry and Topology of Manifolds Surfaces and Beyond*, volume 208. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2020.

[17] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, third edition, 1971.