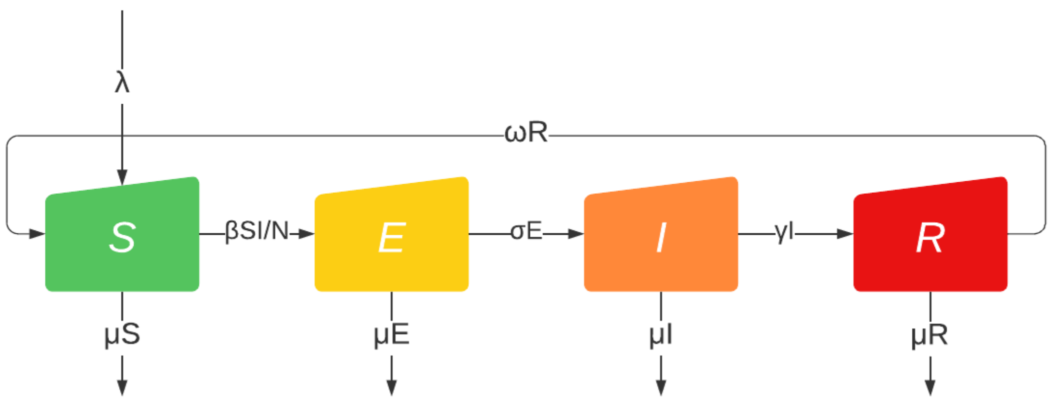
# Practica 2 TTEC

Antonio Sevilla

16 de febrero de 2023

## 1.

El diagrama de flujo del primer modelo tiene el siguiente aspecto:



## 2.

Para calcular el número básico de reproducción del modelo, empleamos el método Next-Generation-Matrix. Resultan las matrices:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \beta IS \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} (\sigma + \mu)E \\ -\sigma E + (\gamma + \mu)I \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \sigma + \mu \\ \sigma + \mu + \gamma & -\sigma \end{pmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{(\mu+\sigma)(\gamma+\mu+\sigma)} & \frac{1}{\gamma+\mu+\sigma} \\ \frac{1}{\mu+\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta S}{\gamma\mu+\mu^2+\gamma\sigma+2\mu\sigma+\sigma^2} & \frac{1}{\gamma+\mu+\sigma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El autovalor de esta última es precisamente el $R_0$ buscado:

$$\frac{\beta\sigma}{(\mu + \sigma)(\mu + \gamma)}$$

Para encontrar los puntos de equilibrio igualamos las derivadas de cada grupo a 0 y despejamos:

$$S' = \frac{-\beta IS}{N} + \lambda + \omega R - \mu S = 0 \Leftrightarrow S = \frac{\lambda + \omega R}{\mu + \frac{\beta I}{N}}$$

$$E' = \frac{\beta IS}{N} - (\mu + \sigma)E = 0 \Leftrightarrow E = \frac{\beta IS}{N(\sigma + \mu)}$$

$$I' = \sigma E - (\gamma + \mu)I = 0 \Leftrightarrow I = \frac{\sigma E}{\mu + \gamma}$$

$$R' = \gamma I - (\mu + \omega)R = 0 \Leftrightarrow R = \frac{\gamma I}{\mu + \omega}$$

Pudiendo resolver dicho sistema solamente en función de los parámetros.

## 3.

Podemos emplear distintos métodos de Matlab para estimar $\beta$:

```
N = 3930;
tmax=90;
h = 5;
b=0.9;
g=1/11;
m =1/(80*365);
lambda = 1/7;
psi = 1/60;
k = 1/3;

f = @(t,x)[-b*x(1)*x(3)/(x(1)+x(2)+x(3)+x(4)) - m*x(1) + lambda + psi*x(4);...
           b*x(3)*x(1)/(x(1)+x(2)+x(3)+x(4)) - m*x(2) - k*x(2);...
           k*x(2) - m*x(3) - g*x(3);...
           g*x(3) - m*x(4) - psi*x(4)];

x0 = [N-1,1,0,0];
[tsol, sol] = rk45(f,0,tmax,x0, h);

len=length(sol(2,:))-1;
%y_acumulados= [1 3 8 20 37 91 171 341 631 1263 1777 2397 2890 3080...
...3344 3672 3823 4105 4206];
y= [1 2 5 12 17 54 80 170 290 632 514 620 493 190 264 328 151 282 101];

obj=@(theta) norm(y-Fsir(theta,N,tmax,h,x0))^2;

theta0=1;
theta_mco=fmincon(obj,theta0)

f_mco=@(t,x)[-theta_mco*x(1)*x(3)/(x(1)+x(2)+x(3)+x(4)) -...
...m*x(1) + lambda + psi*x(4);...
           theta_mco*x(3)*x(1)/(x(1)+x(2)+x(3)+x(4)) - m*x(2) - k*x(2);...
           k*x(2) - m*x(3) - g*x(3);...
           g*x(3) - m*x(4) - psi*x(4)];

[t_mco, sol_mco] = rk45(f_mco, 0, tmax, x0, h);

function [t, sol] = rk45(f,t0,tmax,sol0, h)
    sol(:,1) = sol0(:);
    t = t0:h:tmax;
    for j=1:length(t)-1
        F1 = f(t(j), sol(:,j));
        F2 = f(t(j)+h/2, sol(:,j)+h/2*F1);
```

```
            F3 = f(t(j)+h/2, sol(:,j)+h/2*F2);
            F4 = f(t(j+1), sol(:,j)+h*F3);
            sol(:,j+1) = sol(:,j)+h/6*(F1+2*F2+2*F3+F4);
        end
    end

function z=Fsir(theta_mco,N,tmax,h,x0)
N = 3930;
tmax=90;
h = 5;
g=1/11;
m =1/(80*365);
lambda = 1/17;
psi = 1/60;
k = 1/3;
    f=@(t,x)[-theta_mco(1)*x(1)*x(3)/(x(1)+x(2)+x(3)+x(4)) -...
    ...m*x(1) + lambda + psi*x(4);...
            theta_mco(1)*x(3)*x(1)/(x(1)+x(2)+x(3)+x(4)) - m*x(2) - k*x(2);...
            k*x(2) - m*x(3) - g*x(3);...
            g*x(3) - m*x(4) - psi*x(4)];

    [tsol,sol]=rk45(f,0,tmax,x0,h);
    z=sol(2,:);
end
```

El valor del parámetro estimado dados dichos datos es

$$\beta = 0{,}3977$$

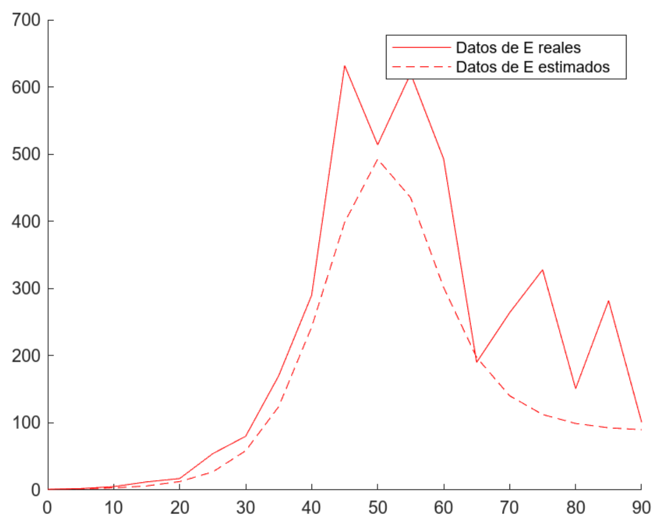
## 4.

Sustituyendo el $\beta$ estimado en la fórmula teórica de $R_0$, resulta

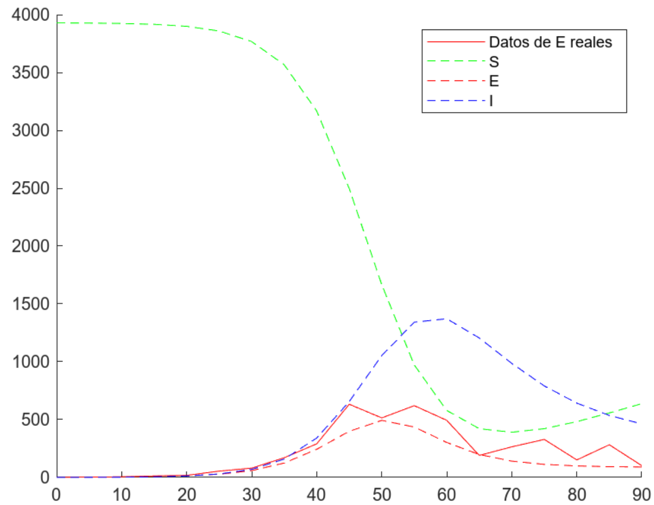
$$R_0 \approx \frac{0{,}3977 \times \frac{1}{3}}{(\frac{1}{80\times 365}+\frac{1}{3})\times(\frac{1}{80\times 365}+\frac{1}{11})} \approx 4{,}3726 > 1$$

por lo que el brote no desaparecerá y la enfermedad será endémica.

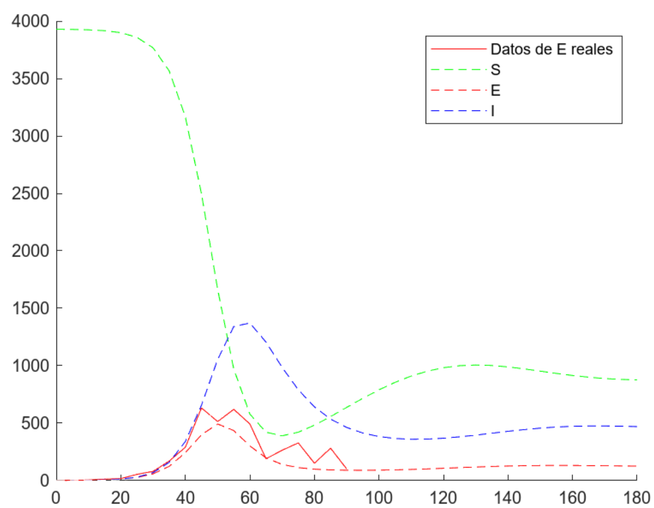
Los datos de la cantidad de enfermos representada contra el tiempo el días, comparada con la evolución del modelo empleando el parámetro estimado luce de la siguiente manera:



Representando los valores del resto de grupos:

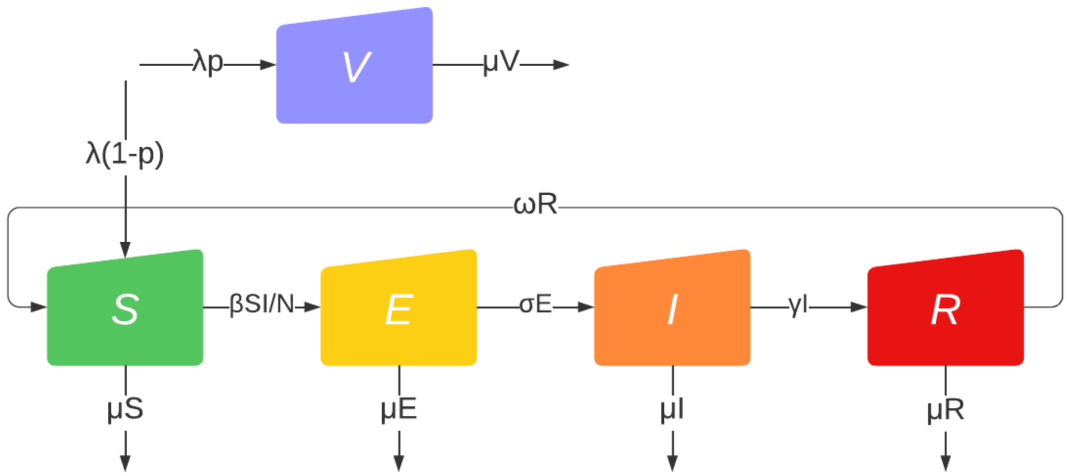



Representando la evolución del modelo durante los 6 próximos meses se puede observar que efectivamente la enfermedad tiende al endemismo:



## 5.

El diagrama de flujo del segundo modelo se puede obtener añadiendo los vacunados al del primer modelo:




## 6.

Es fácil obtener el DFE del primer modelo a través de $\mu - \lambda S = 0$ resultando

$$(S, E, I, R) = (\frac{\lambda}{\mu}, 0, 0, 0)$$

En este caso, añadiendo el grupo de vacunados se obtiene mediante un procedimiento análogo el DFE

$$(S, E, I, R, V) = (\frac{\lambda(1-\mathrm{p})}{\mu}, 0, 0, 0, \lambda\mathrm{p})$$

## 7.

Aplicando el Next-Generation-Matrix alrededor del DFE obtenido en el ejercicio 6. con cuentas muy parecidas a las del ejercicio 2. se obtiene el valor teórico

$$R_0 = \frac{\beta\sigma(1-\mathrm{p})}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)}$$

La enfermedad no será endémica si y solamente si el número básico de reproducción es menor o igual a 1. Sustituyendo los parámetros dados y el $\beta$ estimado, se tiene

$$R_0 \approx 4,3726 \times (1-\mathrm{p}) \leq 1 \Leftrightarrow \mathrm{p} \geq \frac{4{,}3726-1}{4{,}3726} \approx 0{,}7713$$

Con lo que el sistema sanitario de la isla B habrá que vacunar al menos al 77,13 % de los recién nacidos para erradicar la dolencia.

## 8.

La cantidad de vacunas suministradas depende únicamente del reclutamiento. Como $\frac{1}{7} = \lambda$ y se cubre un periodo de 3 meses, se habrá vacunado a un promedio de $\frac{90}{7} \approx 12{,}8571$ recién nacidos, de los cuales se vacunará a $\frac{90}{7} \times 0{,}8 \approx 10{,}2856$

La mortalidad es también independiente de la evolución de la pandemia, pues la tasa de mortalidad se asume constante con independencia del grupo al que un individuo pertenezca. Bajo estas hipótesis fallecen (trágicamente) en promedio $\frac{90}{7} \times 0{,}8 \times \frac{1}{80\times 360} \approx 0{,}0003$ vacunados en esos 3 primeros meses, con lo que quedan en promedio $\frac{90}{7} \times 0{,}8 - \frac{90}{7} \times 0{,}8 \times \frac{1}{80\times 360} \approx 10{,}2853$ vacunados vivos.