Нечеткие множества и нечеткий вывод

Основные понятия и определения теории нечетких множеств

Пример 1.

Допустим, что X=N – множество натуральных чисел. Определим понятие множества натуральных чисел, «близких числу 7». Это можно сделать определением следующего нечеткого множества $A \subseteq X$:

$$A = \frac{0{,}2}{4} + \frac{0{,}5}{5} + \frac{0{,}8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0{,}8}{8} + \frac{0{,}5}{9} + \frac{0{,}2}{10}. \qquad (9)$$

Пример 2.

Если X=R, где R – множество действительных чисел, то множество действительных чисел, «близких числу 7», можно определить функцией принадлежности вида

$$\mu_A(X) = \frac{1}{1+(x-7)^2}. \qquad (10)$$

Поэтому нечеткое множество действительных чисел, «близких числу 7», описывается выражением

$$A = \int_X \frac{\left[1+(x-7)^2\right]^{-1}}{x} dx. \qquad (11)$$

Нечеткие множества натуральных или действительных чисел, «близких числу 7», можно записать различными способами. Например, функцию принадлежности (10) можно заменить выражением

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{\dfrac{|x-7|}{3}} & при \;\; 4 \le x \le 10 \\ 0 & в\ противном\ случае \end{cases}. \qquad (12)$$

Пример 3.

Формализуем неточное определение «подходящая температура для купания в Балтийском море». Зададим область рассуждений в виде множества *X*= 5°,...,25° . Отдыхающий I, лучше всего чувствующий себя при температуре 21°, определил бы для себя нечеткое множество:

$$A = \frac{0{,}1}{16} + \frac{0{,}3}{17} + \frac{0{,}5}{18} + \frac{0{,}8}{19} + \frac{0{,}95}{20} + \frac{1}{21} + \frac{0{,}9}{22} + \frac{0{,}8}{23} + \frac{0{,}75}{24} + \frac{0{,}7}{25}. \qquad (13)$$

Отдыхающий II, предпочитающий температуру 20°, предположил бы другое определение этого множества:

$$B = \frac{0{,}1}{15} + \frac{0{,}2}{16} + \frac{0{,}4}{17} + \frac{0{,}7}{18} + \frac{0{,}9}{19} + \frac{1}{20} + \frac{0{,}9}{21} + \frac{0{,}85}{22} + \frac{0{,}8}{23} + \frac{0{,}75}{24} + \frac{0{,}7}{25}. \qquad (14)$$

С помощью нечетких множеств *A* и *B* формализуем неточное определение понятия «подходящая температура для купания в Балтийском море».

Функции принадлежности класса s (по виду графического представления):

$$s(x;a,b,c)=\begin{cases}0 \text{ для } x\le a,\\ 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2 \text{ для } a\le x\le b,\\ 1-2\left(\frac{x-c}{c-a}\right)^2 \text{ для } b\le x\le c,\\ 1 \text{ для } x\ge c.\end{cases} \quad (15)$$

где $b=(a+c)/2$. Форма графического представления зависит от параметра a, b и c. В точке $x=b=(a+c)/2$ функция принадлежности класса s принимает значение, равное 0,5.

1. Функция принадлежности класса π определяется через функцию принадлежности класса s:

$$\pi(x;b,c)=\begin{cases}s(x;c-b,c-b/2,c) \text{ для } x\le c,\\ 1-s(x;c,c+b/2,c+b) \text{ для } x\ge c.\end{cases} \quad (16)$$

Функции принадлежности класса π принимает нулевые значения для $x\ge c+b$ и $x\le c-b$. В точках $x=c\pm b/2$ ее значение равно 0,5.

2. Функция принадлежности класса γ задается выражением:

$$\gamma(x;a,b)=\begin{cases}0 \text{ для } x\le a,\\ \frac{x-a}{b-a} \text{ для } a\le x\le b,\\ 1 \text{ для } x\ge b.\end{cases} \quad (17)$$

Наблюдается аналогия между формами функций принадлежности классов s и γ.

3. Функция принадлежности класса t определяется в виде:

$$t(x;a,b,c)=\begin{cases}0 \ \textit{для} \ \ \mathrm{x} \le \mathrm{a}, \\ \dfrac{x-a}{b-a} \ \ \textit{для} \ \ a \le x \ge b, \\ \dfrac{c-x}{c-b} \ \textit{для} \ \ b \le x \le c. \\ 0 \ \textit{для} \ \ x \ge c.\end{cases} \qquad (18)$$

В некоторых приложениях функции принадлежности класса tможет быть альтернативой по отношению к функции класса π.

4. Функция принадлежности класса L определяется выражением

$$L(x;a,b)=\begin{cases}1 \ \textit{для} \ \ x \le a, \\ \dfrac{b-x}{b-a} \ \textit{для} \ \ a \le x \le b, \\ 0 \ \textit{для} \ \ x \ge b.\end{cases} \qquad (19)$$

Пример 4.

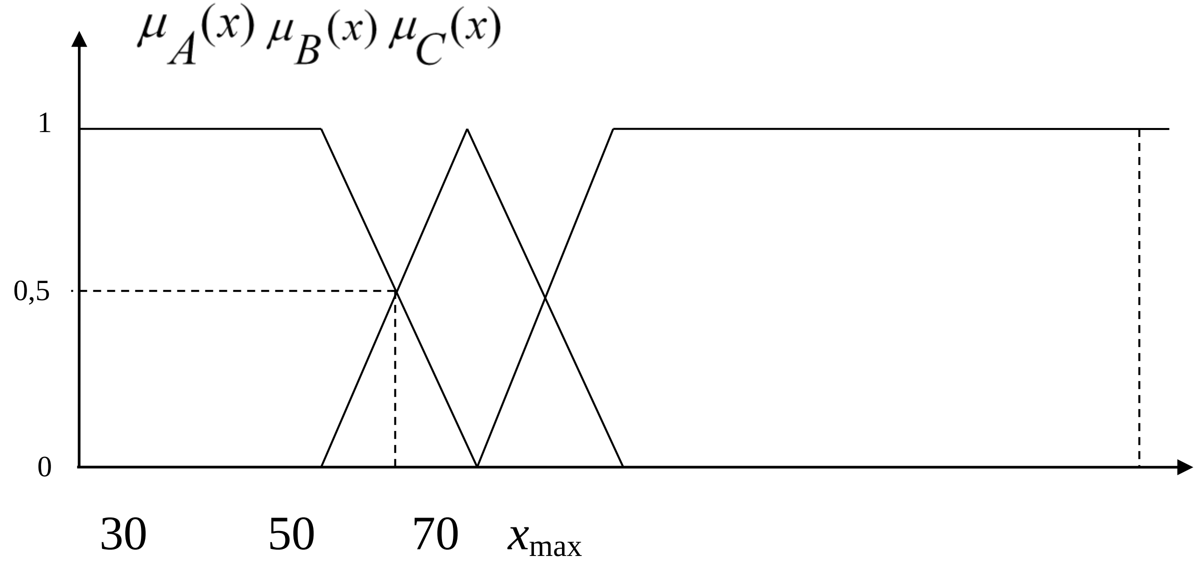
Рассмотрим три неточных формулировки:

1) «малая скорость автомобиля» – $\mu_A(x)$,

2) «средняя скорость автомобиля» – $\mu_B(x)$,

3) «большая скорость автомобиля» – $\mu_C(x)$.

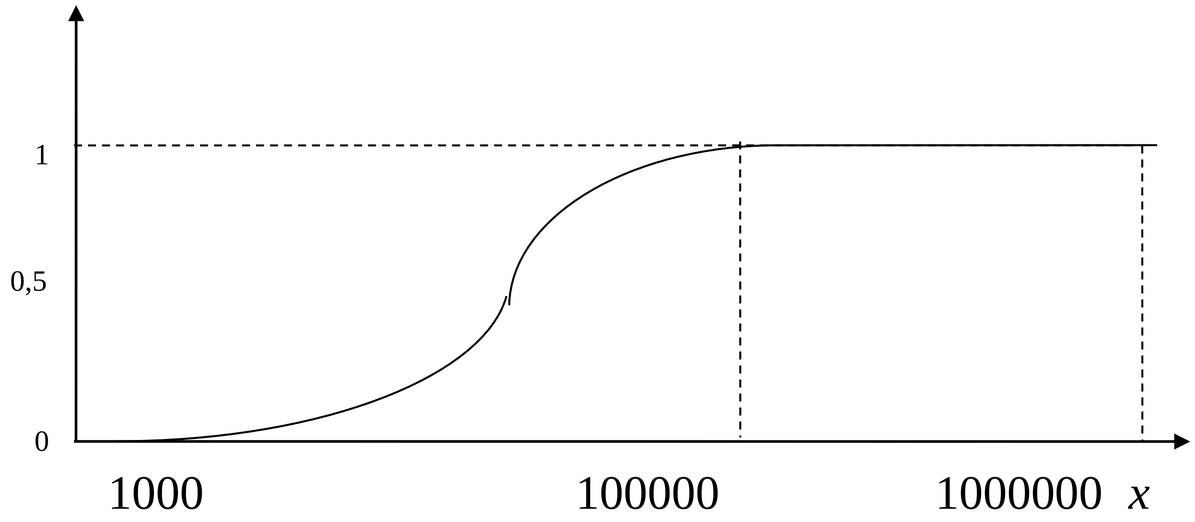
В качестве области рассуждений примем диапазон $[0, x_{max}]$, где x_{max} – это максимальная скорость. Для нечетких множеств *A*, *B* и *C* функции принадлежности имеют вид: для *A* – тип *L*, для *B* – тип *t*, для С – тип γ.



В фиксированной точке x=40 км /час функция принадлежности нечеткого множества «малая скорость автомобиля» принимает значение 0,5, т.е. $\mu_A(40)$=0,5. Такое значение принимает функция принадлежности нечеткого множества «средняя скорость автомобиля», т.е. $\mu_B(40)$ =0,5, тогда как $\mu_C(40)$=0.

Пример 5.

На рисунке показана функция принадлежности нечеткого множества «большие деньги». Это функция класса *s*, причем $X=[0, 1000000\ \text{руб.}]$, а=1000 руб., с=100000 руб.. Следовательно, суммы, превышающие 100000 руб., можно совершенно определенно считать «большими», поскольку значения функции принадлежности при этом становятся равными 1.Суммы, меньшие, чем 1000 руб., не относятся к «большим», так как соответствующие им значения функции принадлежности равны 0. Такое определение нечеткого множества «большие деньги» имеет субъективный характер. Каждый человек может иметь собственное представление о неоднозначном понятии «большие деньги». Это представление будет отражаться иными значениями параметров *a* и *c* функции класса *s*.



Множество элементов пространства X, для которых $\mu_A(x) > 0$, называется носителем нечеткого множества A и обозначается supp$A$ (support). Формальная его запись имеет вид

$$A = \left\{ x \in X; \mu_A(x) > 0 \right\}. \qquad (20)$$

Высота нечеткого множества A обозначается $h(A)$ и определяется как

$$h(A) = \max_{x \in A} \mu_A(x). \qquad (21)$$

Пример 6.

Если X={1, 2, 3, 4, 5} и $A=\frac{0,2}{1}+\frac{0,4}{2}+\frac{0,7}{4}$, (22)

то supp$A$={1, 2, 4}.

Если X={1, 2, 3, 4} и $A=\frac{0,3}{2}+\frac{0,8}{3}+\frac{0,5}{4}$, (23)

то $h(A)$={0,8}.

Нечеткое множествоA называется нормальным тогда и только тогда, когда $h(A)=\{1\}$. Если нечеткое множествоA не является нормальным, то его можно нормализовать при помощи преобразования

$$\mu_{A_N}(x) = \frac{\mu_A(x)}{h(A)}, \qquad (24)$$

где $h(A)$ – высота этого множества.

Пример 7.

Нечеткое множество

$$A=\frac{0{,}1}{2}+\frac{0{,}5}{4}+\frac{0{,}3}{6} \qquad (25)$$

После нормализации принимает вид

$$A=\frac{0{,}2}{2}+\frac{1}{4}+\frac{0{,}6}{6}. \qquad (26)$$

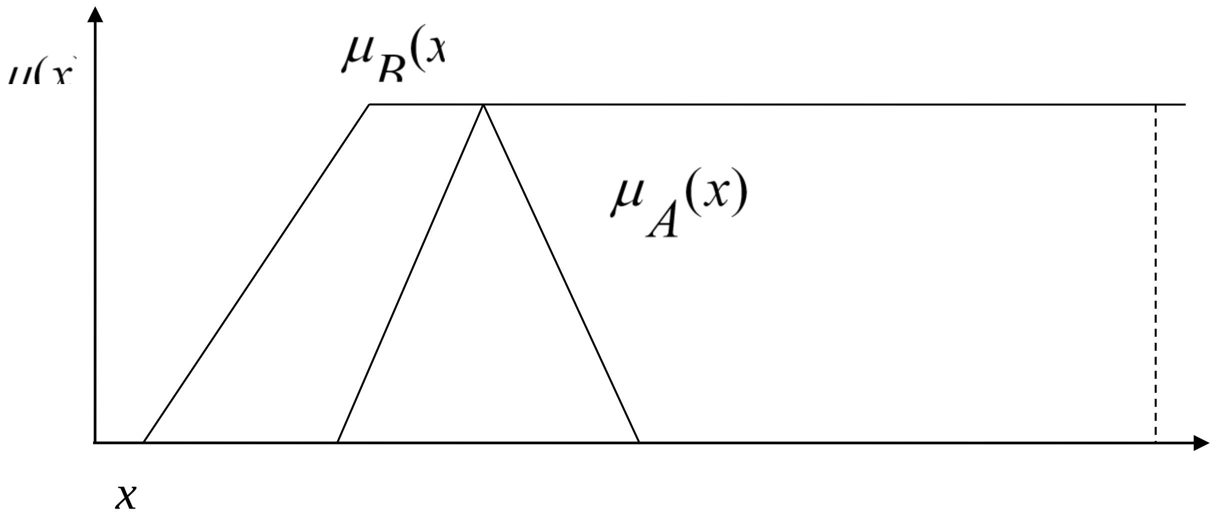
Нечеткое множество A пустым и обозначается $A=\varnothing$ тогда и только тогда, когда $\mu_A(x)=0$ для каждого $x \in X$.

Нечеткое множество Aсодержится в нечетком множестве B, что записывается как $A \subset B$, тогда и только тогда, когда

$$\mu_A(x) \le \mu_B(x) \tag{27}$$

для каждого $x \in X$.

Пример включения (содержания) нечеткого множестваA в нечетком множестве B показано на рисунке.

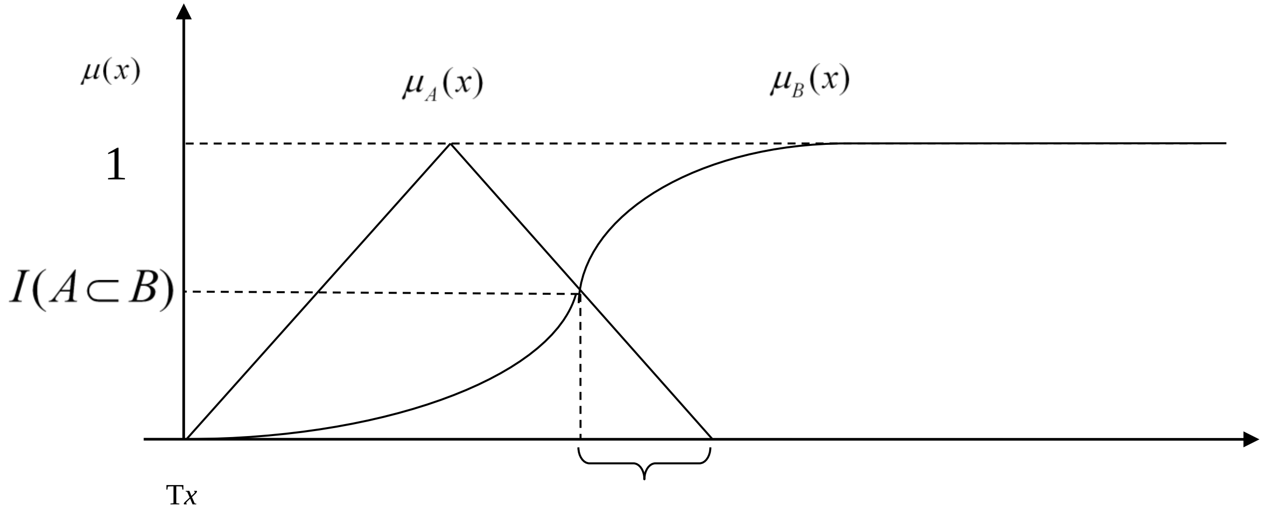


В литературе встречается также понятие степени включения нечетких множеств. Степень включения нечеткого множестваA в нечеткое множество B (полное включение, рис.) равна 1.

Нечеткие множества (рис. ниже) не удовлетворяют зависимости 27. Нечеткое множествоA содержится в нечетком множестве B в степени

$$I(A\subset B)=\min_{x\in T}\mu_B(x), \qquad (28)$$

где $T=\left\{x\in X;\mu_A(x)\le\mu_B(x),\mu_A(x)>0\right\}$.



Нечеткое множествоA равно нечеткому множеству B, т.е. A=B, тогда и только тогда, когда

$$\mu_A(x)=\mu_B(x) \qquad (29)$$

для каждого $x\in X$.

Определение не учитывает случай, когда значения функций принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ почти равны между собой. В такой ситуации можно ввести понятие степени равенства нечетких множествA и B, например, в виде

$$E(A=B)=1-\max_{x\in T}\left|\mu_A(x)-\mu_B(x)\right|, \tag{30}$$

где $T=\{x\in X;\mu_A(x)\neq\mu_B(x)\}$.

α-разрезом нечеткого множества $A\subseteq X$, обозначаемым как A_α, называется следующее четкое множество:

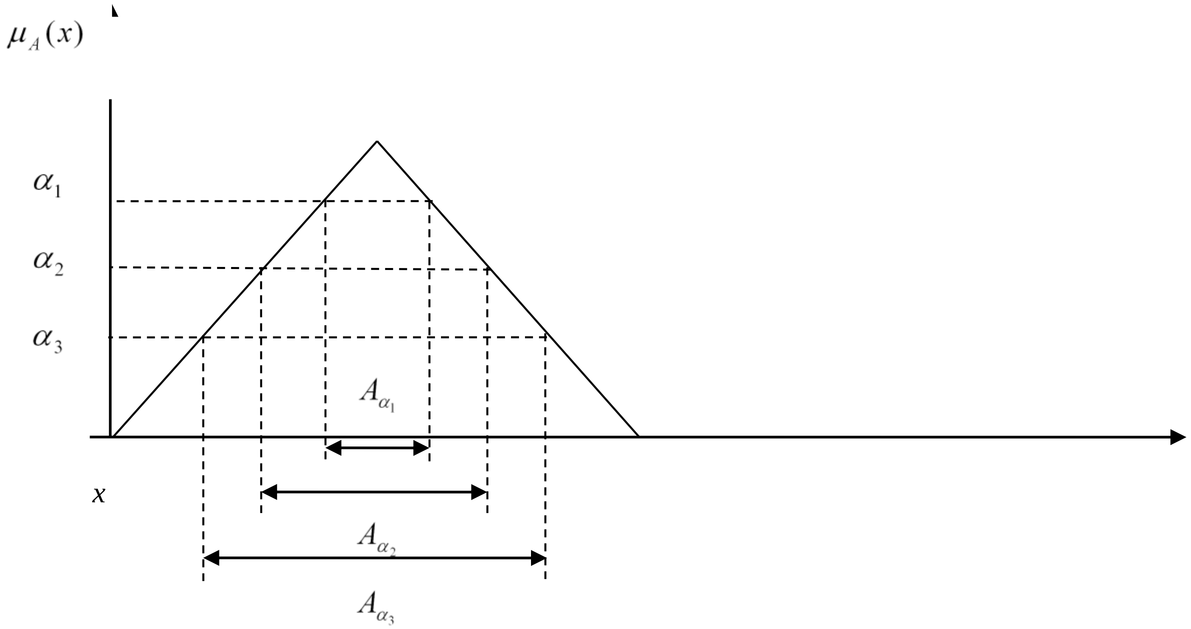
$$A_\alpha=\left\{x\in X:\mu_A(x)\geq\alpha\right\}, \tag{31}$$

т.е. множество, определяемое функцией:

$$\chi_{A_\alpha}(x)=\begin{cases}1 \ \textit{для} \ \mu_A(x)\geq\alpha,\\ 0 \ \textit{для} \ \mu_A(\mathrm{x})<\alpha.\end{cases} \tag{32}$$

Определение α-разреза нечеткого множества иллюстрирует рис. Легко заметить истинность импликации

$$\alpha_2<\alpha_1\Rightarrow A_{\alpha_1}\subset A_{\alpha_2}. \tag{33}$$



Пример 8.

Рассмотрим нечеткое множество $A \subseteq X$

$$A=\frac{0{,}1}{2}+\frac{0{,}3}{4}+\frac{0{,}7}{5}+\frac{0{,}8}{8}+\frac{1}{10}, \tag{34}$$

причем $X=\{1, \ldots, 10\}$.

В соответствии с определением α-разреза конкретные α-разрезы определяются в виде

$A_0=X=\{1, \ldots, 10\}$, $A_{0,7}=\{5, 8, 10\}$,

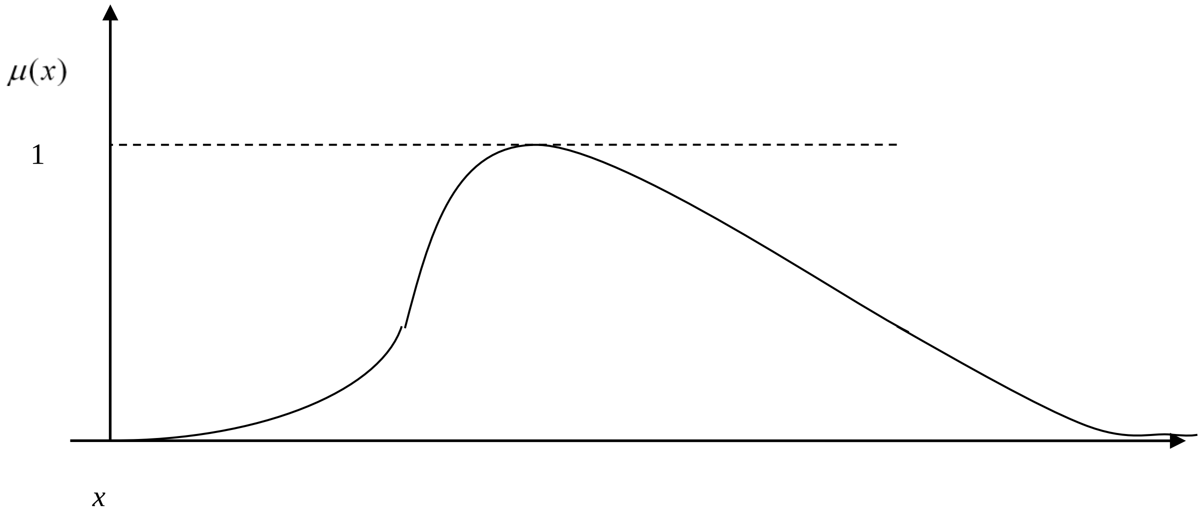
$A_{0,1}=\{2, 4, 5, 8, 10\}$, $A_{0,8}=\{8, 10\}$,

$A_{0,3}=\{4, 5, 8, 10\}$, $A_1=\{10\}$.

Нечеткое множество $A \subseteq R$ является выпуклым тогда и только тогда, когда для произвольных $x_1, x_2 \in R$ и $\lambda \in [0,1]$ выполняется условие

$$\mu_A\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \geq \mu_A(x_1) \wedge \mu_A(x_2) = \min\left\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\right\}. \tag{35}$$

Пример нечеткого выпуклого множества



Нечеткое множество $A \subseteq R$ является вогнутым тогда и только тогда, когда для произвольных $x_1, x_2 \in R$ и $\lambda \in [0,1]$ выполняется условие

$$\mu_A\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \leq \mu_A(x_1) \vee \mu_A(x_2) = \max\left\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\right\}. \tag{36}$$

Пример нечеткого вогнутого множества

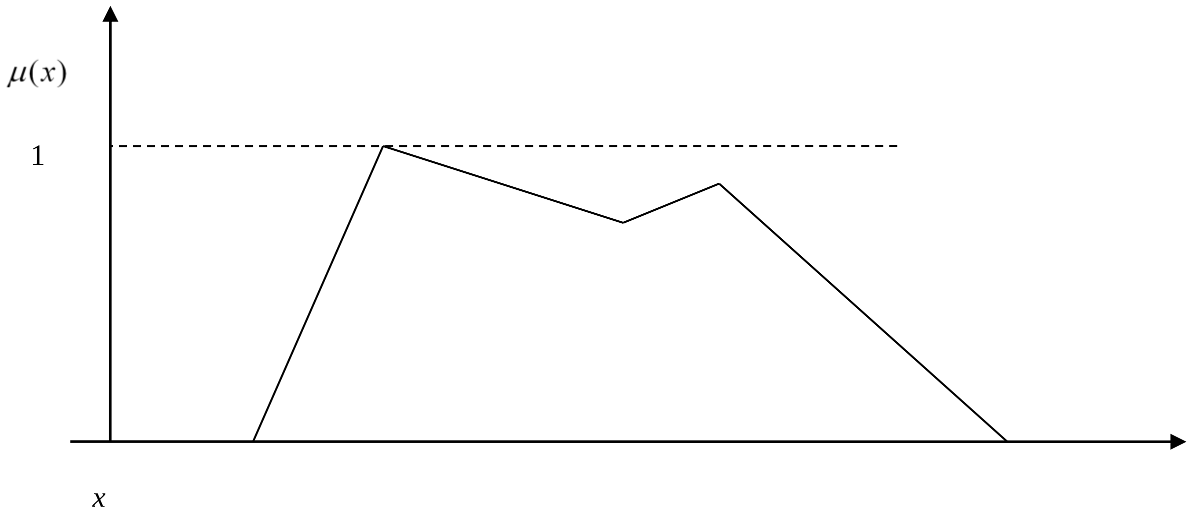


Рисунок иллюстрирует нечеткое вогнутое множество. Нечеткое множество $A \subseteq R$ является выпуклым (вогнутым), тогда и только тогда, когда являются выпуклыми (вогнутыми) все его α-разрезы.

Операции на нечетких множествах

Пересечением нечетких множеств $A,\ B \subseteq X$ называется нечеткое множество $A \bigcap B$ с функцией принадлежности

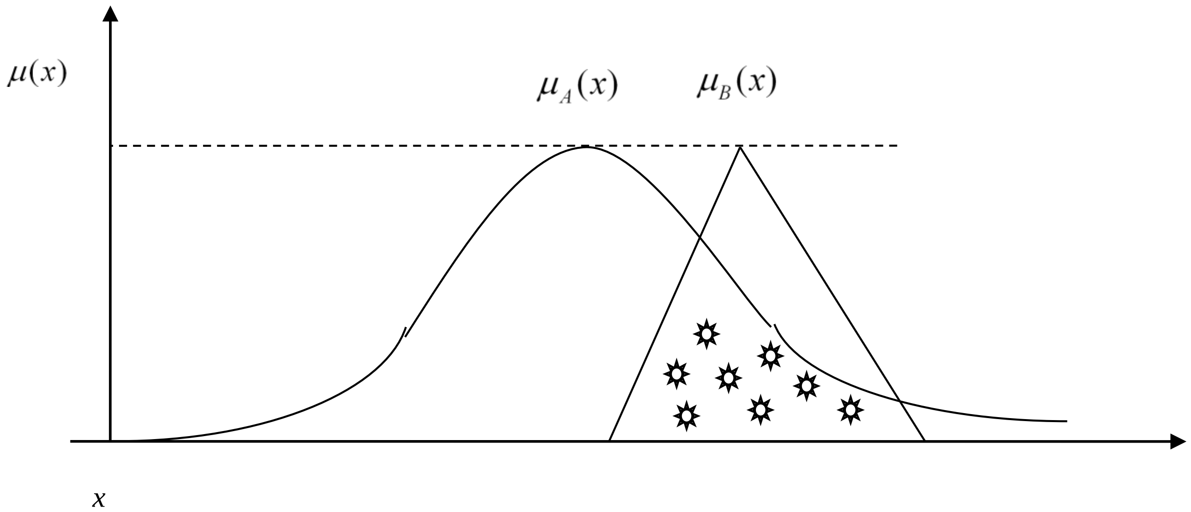
$$\mu_{A \bigcap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \qquad (37)$$

для каждого $x \in X$.

Пересечение нечетких множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ определяется функцией принадлежности

$$\mu_{A_i}(x) = \min\left[\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), ..., \mu_{A_n}(x)\right] \qquad (38)$$

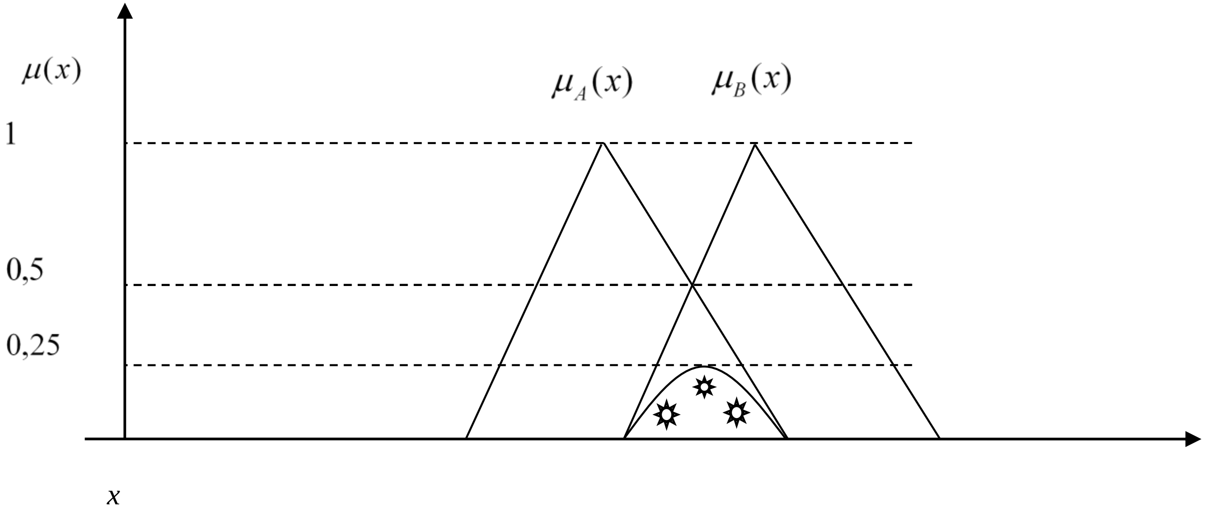
для каждого $x \in X$.



Помимо определения понятия «пересечение» нечетких множеств также встречается определение понятия «алгебраическое произведение» этих множеств. Алгебраическое произведение нечетких множествA и B – это нечеткое множество $C=A\bullet B$, определенное как

$$C=\left\{\left(x,\mu_A(x)\bullet\mu_B(x)\right)|\,x\in X\right\}. \qquad (39)$$

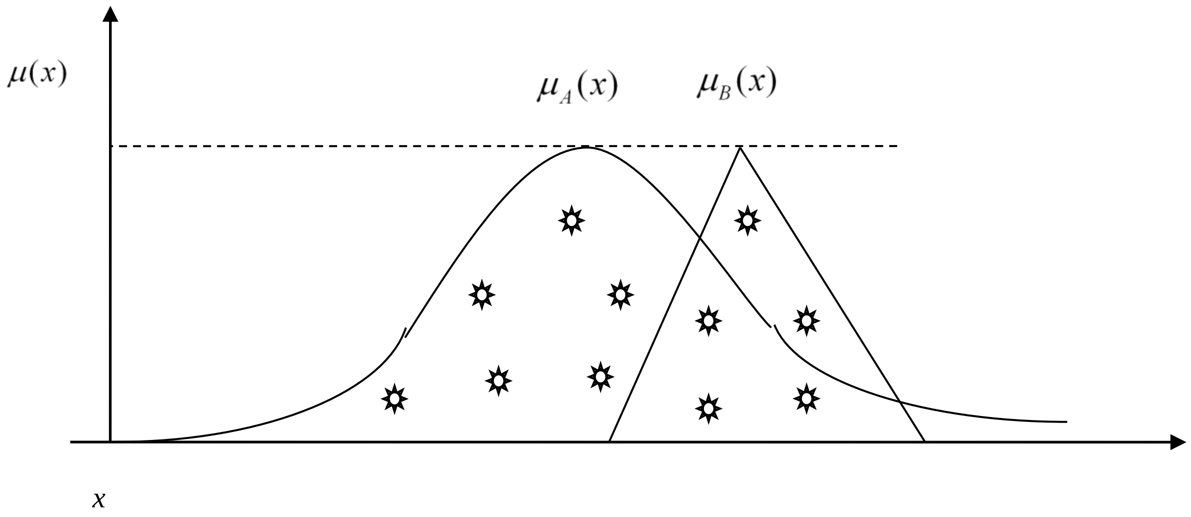
Ниже представлена графическая интерпретация.



Сумма нечетких множествA и B – нечеткое множество $C= A\cup B$, определенное функцией принадлежности

$$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\vee\mu_B(x)=\max(\mu_A(x),\mu_B(x)) \qquad (40)$$

для каждого $x\in X$.



Следует помнить, что свойство выпуклости нечетких множеств сохраняется для их пересечения, а свойство вогнутости – для их суммы, т.е.

1) Если A и B – выпуклые нечеткие множества, то $A \bigcap B$ - выпуклое нечеткое множество;
2) Если A и B – вогнутые нечеткие множества, то $A \bigcup B$ - вогнутое нечеткое множество.

Пример 9.

Допустим, что $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ и

$$A=\frac{0{,}9}{3}+\frac{1}{4}+\frac{0{,}6}{6}, \qquad (42)$$

$$B=\frac{0{,}7}{3}+\frac{1}{5}+\frac{0{,}4}{6}. \qquad (43)$$

$$A\cap B=\frac{0{,}7}{3}+\frac{0{,}4}{6}. \qquad (44)$$

$$A\cup B=\frac{0{,}9}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{0{,}6}{6}. \qquad (45)$$

$$A\bullet B=\frac{0{,}63}{3}+\frac{0{,}24}{6}. \qquad (46)$$

Любое нечеткое множество $A\subseteq X$ можно представить в виде $A=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha A_{\alpha}$, (47)

где αA_{α} означает нечеткое множество, элементам которого приписаны следующие степени принадлежности:

$$\mu_{\alpha A_{\alpha}}(x)=\begin{cases}\alpha\ \ \text{для}\ \ x\in A_{\alpha},\\ 0\ \ \text{для}\ \ x\notin A_{\alpha}.\end{cases} \qquad (48)$$

Пример 10.

Проведем декомпозицию нечеткого множества (34). В соответствии с выражением (47) получим

$$A=\left(\frac{0{,}1}{2}+\frac{0{,}1}{4}+\frac{0{,}1}{5}+\frac{0{,}1}{8}+\frac{0{,}1}{10}\right)\cup\left(\frac{0{,}3}{4}+\frac{0{,}3}{5}+\frac{0{,}3}{8}+\frac{0{,}3}{10}\right)\cup\left(\frac{0{,}7}{5}+\frac{0{,}7}{8}+\frac{0{,}7}{10}\right)\cup\left(\frac{0{,}8}{8}+\frac{0{,}8}{10}\right)\cup\left(\frac{1}{10}\right)=$$

$$=\frac{0{,}1}{2}+\frac{0{,}3}{4}+\frac{0{,}7}{5}+\frac{0{,}8}{8}+\frac{1}{10}. \qquad (49)$$

Известны и другие, отличающиеся определения пересечения и суммы нечетких множеств. Вместо продублированной формулы

$$\begin{cases}\mu_{A\cap B}(x)=\min(\mu_A(x),\mu_B(x)),\\ \mu_{A\cup B}(x)=\max(\mu_A(x),\mu_B(x)),\end{cases}$$

можно встретить и альтернативные определения.

Дополнением нечеткого множества $A\subseteq X$ называется нечеткое множество $\hat{A}$ с функцией принадлежности $\mu_{\hat{A}}(x)=1-\mu_A(x)$ для каждого $x\in X$.

Пример 11.

Допустим, что X={1, 2, 3, 4, 5, 6}, а также $A=\frac{0{,}3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0{,}7}{5}+\frac{0{,}9}{6}$.

Дополнением множестваA считается множество $\hat{A}=\frac{1}{1}+\frac{0{,}7}{2}+\frac{1}{4}+\frac{0{,}3}{5}+\frac{0{,}1}{6}$.

Обратим внимание, что $A\cap\hat{A}=\frac{0{,}3}{2}+\frac{0{,}3}{5}+\frac{0{,}1}{6}\neq\varnothing$,

а также $A\cup\hat{A}=\frac{1}{1}+\frac{0{,}7}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{0{,}7}{5}+\frac{0{,}9}{6}\neq X$.

Представленные выше операции на нечетких множествах обладают свойствами коммутативности, связности и сепарабельности, и кроме того, отвечают правилу де Моргана и абсорбции. Однако в случае нечетких множеств не выполняется условие дополнительности, т.е. $A\cap\hat{A}\neq\varnothing$, $A\cup\hat{A}\neq X$.

Следует отметить, что функция принадлежности пересечения нечетких множеств Аи $\hat{A}$отвечают неравенству $\mu_{A\cap\hat{A}}(x)=\min(\mu_A(x),\mu_{\hat{A}}(x))\leq\frac{1}{2}$.

Аналогично в случае суммирования $\mu_{A\cup\hat{A}}(x)=\max(\mu_A(x),\mu_{\hat{A}}(x))\geq\frac{1}{2}$.

Лингвистические переменные

Лингвистической называется переменная, принимающая значения из множества слов или словосочетаний некоторого естественного или искусственного языка.

Множество допустимых значений лингвистической переменной называется терм-множеством.
Задание значения переменной словами, без использования чисел, для человека более естественно.

Ежедневно мы принимаем решения на основе лингвистической информации типа: «очень высокая температура»; «длительная поездка»; «быстрый ответ» и т.п.

Понятие лингвистической переменной играет важную роль в нечетком логическом выводе и в принятии решений на основе приближенных рассуждений. Формально, лингвистическая переменная определяется следующим образом.

Лингвистическая переменная задается пятеркой $\langle x, T, U, G, M \rangle$,
где x - имя переменной;
T - терм-множество, каждый элемент которого (терм) представляется как нечеткое множество на универсальном множестве U;
G - синтаксические правила, часто в виде грамматики, порождающие название термов;
M - семантические правила, задающие функции принадлежности нечетких термов, порожденных синтаксическими правилами G.

Пример 1. Рассмотрим лингвистическую переменную с именем x=»температура в комнате». Тогда оставшуюся четверку $\langle T,U,G,M\rangle$ можно определить так:

- универсальное множество –U=[5, 35];
- терм-множество – T={«холодно», «комфортно», «жарко»} с такими функциями принадлежностями ($u \in U$):

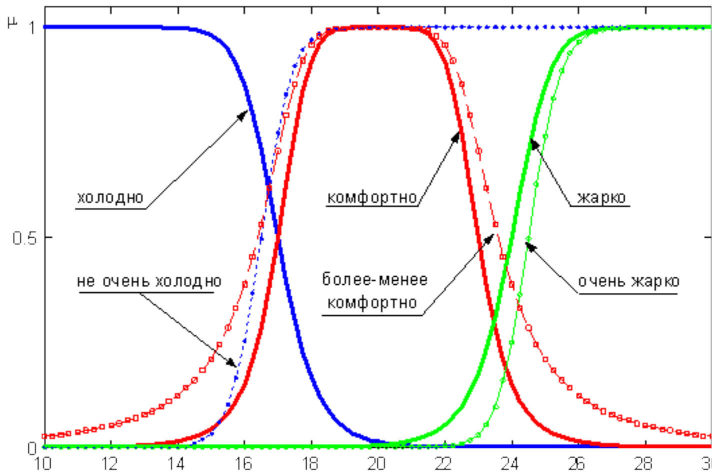
$$\mu_{\text{"холодно"}}(u)=\frac{1}{1+\left(\frac{u-10}{7}\right)^{12}},\ \mu_{\text{"комфортно"}}(u)=\frac{1}{1+\left(\frac{u-20}{3}\right)^{6}},\ \mu_{\text{"жарко"}}(u)=\frac{1}{1+\left(\frac{u-30}{6}\right)^{10}}.$$

- синтаксические правила G, порождающее новые термы с использованием квантификаторов «не», «очень» и «более-менее»;
- семантические правила M, в виде таблицы.

Таблица- Правила расчета функций принадлежности

Квантификатор	Функция принадлежности ($u \in U$)
не t	$1-\mu_t(u)$
очень t	$(\mu_t(u))^2$
более-менее t	$\sqrt{\mu_t(u)}$

Графики функций принадлежности термов «холодно», «не очень холодно», «комфортно», «более-менее комфортно», «жарко» и «очень жарко» лингвистической переменной «температура в комнате» показаны на рис.



Нечеткая истинность

В классической логике истинность может принимать только 2 значения: истинно и ложно.

В нечеткой логике истинность «размытая».

Нечеткая истинность определяется аксиоматически, причем разные авторы делают это по-разному. Интервал [0,1] используется как универсальное множество для задания лингвистической переменной «истинность». Обычная, четкая истинность м. б. представлена нечеткими множествами-синглтонами. В этом случае четкому понятию истинно будет соответствовать функция принадлежности $\mu_{"\text{истинно}"}(u)=\begin{cases}0, & u\neq 1\\ 1, & u=1\end{cases}$, а четкому понятию ложно - $\mu_{"\text{ложно}"}(u)=\begin{cases}0, & u\neq 0\\ 1, & u=0, \quad u\in[0,1]\end{cases}$. Заде предложил такие функции принадлежности термов «истинно» и «ложно»: $\mu_{"\text{ложно}"}(u)=\mu_{"\text{истинно}"}(1-u), u\in[0,1]$

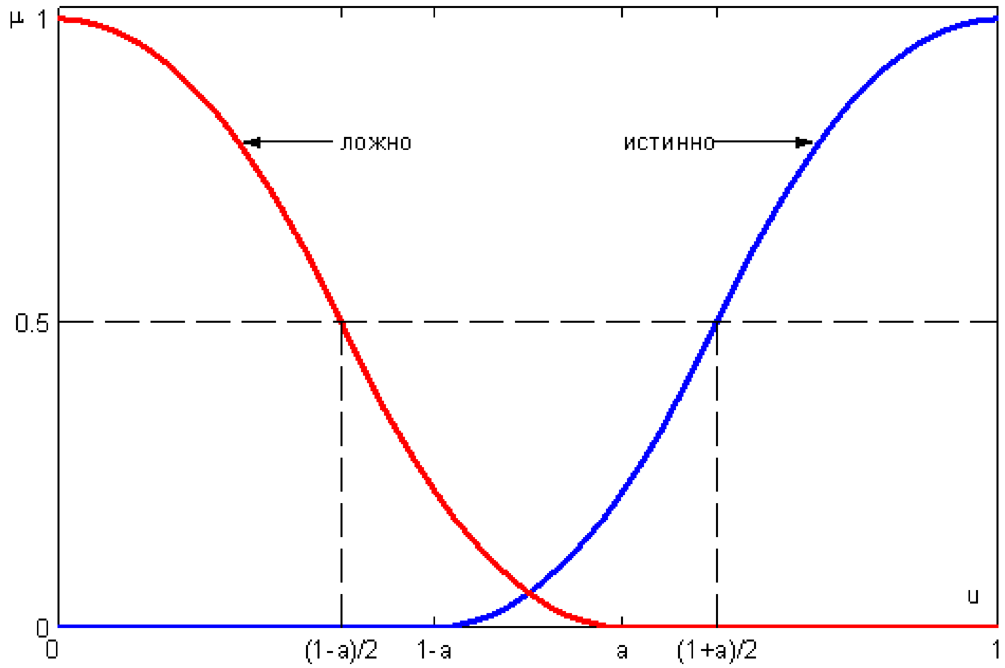
$$\mu_{"\text{истнно}"}(u)=\begin{cases}0, & 0\le u\le a\\ 2\left(\dfrac{u-a}{1-a}\right)^2, & a<u\le\dfrac{a+1}{2}\\ 1-2\left(\dfrac{u-1}{1-a}\right)^2, & \dfrac{\mathrm{a}+1}{2}<u\le 1\end{cases}$$

где $a\in[0,1]$ - параметр, определяющий носители нечетких множеств «истинно» и «ложно». Для нечеткого множества «истинно» носителем будет интервал $(a,1]$, а для нечеткого множества «ложно» - $[0,a)$.

Функции принадлежности нечетких термов «истинно» и «ложно» изображены на рис.

Они построены при значении параметраа=0,4. Как видно, графики функций принадлежности термов «истинно» и «ложно» представляют собой зеркальные отображения.

Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы



Лингвистическая переменная «истинность»по Заде

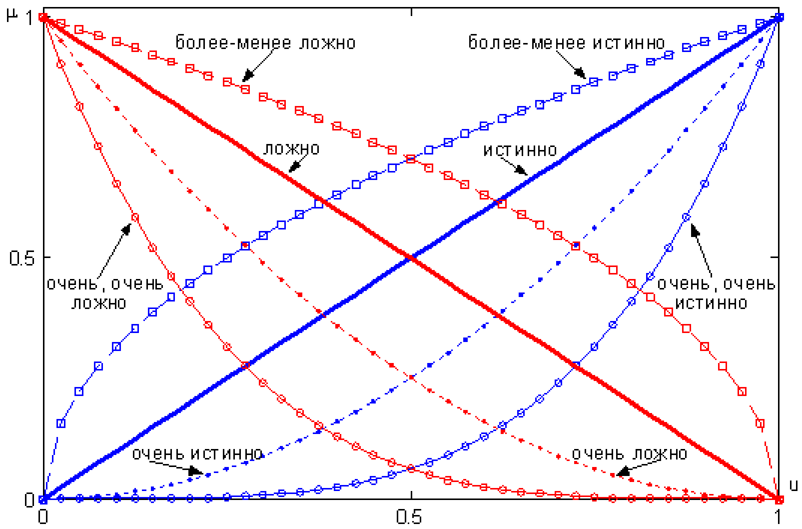
Для задания нечеткой истинности Балдвин предложил такие функции принадлежности нечетких «истинно» и «ложно»: $\mu_{"истинно"}(u) = u;\ \mu_{"ложно"}(u) = 1 - u;$ где $u \in [0,1]$.

Квантификаторы «более-менее» и «очень» часто применяют к нечеткими множествами «истинно» и «ложно», получая т.о. термы «очень ложно», «более-менее ложно», «более-менее истинно», «очень истинно», «очень, очень истинно», «очень, очень ложно» и т.п.

Функции принадлежности новых термов получают, выполняя операции концентрации и растяжения нечетких множеств «истинно» и «ложно».

Операция концентрации соответствует возведению функции принадлежности в квадрат, а операция растяжения- возведению в степень ½.

Графики функций принадлежности этих термов показаны на рис.



Лингвистическая переменная «истинность» по Балдвину

Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы

Функции принадлежности

Практическое использование теории нечетких множеств предполагает наличие функций принадлежности, которыми описываются лингвистические термы «низкий», «средний», «высокий» и т.п. Задача построения функций принадлежности ставится следующим образом. Даны два множества: множество термов $L=\{l_1, l_2, \ \ , l_m\}$ и универсальное множество $U=\{u_1, u_2, \ \ , u_n\}$. Нечеткое множество $\tilde{l}$ для задания лингвистического терма l_j на универсальном множестве U представляется в виде: $\tilde{l}_j = \left(\frac{\mu_{l_j}(u_1)}{u_1}, \frac{\mu_{l_j}(u_2)}{u_2}, \ldots, \frac{\mu_{l_j}(u_n)}{u_n}\right)$, j=$\overline{1,m}$.

Необходимо определить степени принадлежностей элементов множества U к элементам из множества L, т.е. найти $\mu_{l_j}(u_i)$ для всех $j=\overline{1,m}$ и $i=\overline{1,n}$.

Ниже рассматриваются методы построения функций принадлежности. Первый метод основан на статистической обработке мнений группы экспертов. Второй метод базируется на парных сравнениях, выполняемых одним экспертом.

1. Эксперт заполняет анкету, в которой указывает свое мнение о наличии у элементов $u_i(i=\overline{1,n})$ свойств нечеткого множества $\tilde{l}$ ($j=\overline{1,m}$). Анкета имеет следующий вид:

	u_1	u_2	…	u_n
$\tilde{l}_1$				
$\tilde{l}_2$				
…				
$\tilde{l}_m$				

Обозначения: K – количество экспертов; $b^k{}_{j,i}$ - мнение k-го эксперта о наличии у элемента u_i свойств нечеткого множества l_j, $k=\overline{1,K}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Будем считать, что экспертные оценки бинарные, т.е. $b^k{}_{j,i} \in \{0;1\}$, где 1 указывает на наличие у элемента u_i свойств нечеткого множества $\tilde{l}_j$, а 0 – на их отсутствие.По результатам анкетирования степени принадлежности нечеткому множеству $\tilde{l}_j$ рассчитываются так: $\mu_{l_j}(u_i)=\frac{1}{K}\sum_{k=\overline{1,K}} b^k{}_{j,i}$, $i=\overline{1,n}$. (1)

Результаты опроса экспертов

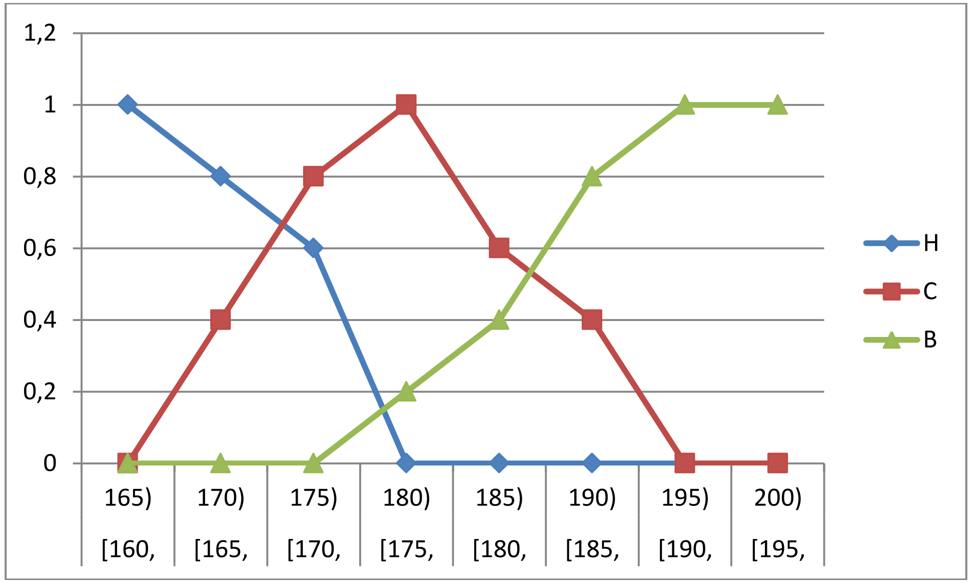
	Терм	[160,165)	[165,170)	[170,175)	[175,180)	[180,185)	[185,190)	[190,195)	[195,200)
Экс1	Низкий	1	0	1	0	0	0	0	0
	Средний	0	1	1	1	1	0	0	0
	Высокий	0	0	0	0	0	1	1	1
Экс2	Низкий	1	1	1	0	0	0	0	0
	Средний	0	0	1	1	0	0	0	0
	Высокий	0	0	0	0	1	1	1	1
Экс3	Низкий	1	0	0	0	0	0	0	0
	Средний	0	1	1	1	1	1	0	0
	Высокий	0	0	0	0	0	1	1	1
Экс4	Низкий	1	1	1	0	0	0	0	0
	Средний	0	0	0	1	1	1	0	0
	Высокий	0	0	0	0	0	0	1	1
Экс5	Низкий	1	1	0	0	0	0	0	0
	Средний	0	1	1	1	0	0	0	0
	Высокий	0	0	0	1	1	1	1	1

Пример.

Построить функции принадлежности термов «низкий», «средний», «высокий», используя для лингвистической оценки переменной «рост мужчины».

Результаты обработки экспертных мнений приведены ниже в таблице.

Терм	[160, 165)	[165, 170)	[170, 175)	[175, 180)	[180, 185)	[185, 190)	[190, 195)	[195, 200)
Низкий	5	4	3	0	0	0	0	0
	1	0,8	0,6	0	0	0	0	0
Средний	0	2	4	5	3	2	0	0
	0	0,4	0,8	1	0,6	0,4	0	0
Высокий	0	0	0	1	2	4	5	5
	0	0	0	0,2	0,4	0,8	1	1



Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы

2. При построении функций принадлежности по второму методу для каждой пары элементов универсального множества эксперт оценивает преимущество одного элемента над другим по отношению к свойству нечеткого множества. Такие парные сравнения удобно представлять следующей матрицей:

$$A= \begin{array}{cccccc} & u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1 & a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & a_{n1} & a_{\mathrm{n}2} & \dots & a_{nn} \end{array}$$

где a_{ij} – уровень преимущества элемента u_i, над u_j(i, j=$\overline{1,n}$), определяемый по девятибалльной шкале Саати:

1 – если преимущество элемента u_i над элементом u_j отсутствует;

3- если преимущество u_i над u_jслабое;

5- если преимущество u_i над u_jсущественное;

7 - если преимущество u_i над u_jявное;

9 - если преимущество u_i над u_jабсолютное;

2, 4, 6, 8–промежуточные сравнительные оценки: 2 – почти слабое преимущество; 4 – почти существенное преимущество, 6 – почти явное преимущество, 8 – почти абсолютное преимущество.

Матрица парных сравнений является диагональной (a_{ij}=1, i=$\overline{1,n}$) и обратно симметричной (a_{ij}=1/a_{ij}, i, j=$\overline{1,n}$).

Степени принадлежности принимают равными соответствующим координатам собственного вектора W=$(w_1,w_2,...,w_n)^T$ матрицы парных сравненийA:

$$\mu(u_1) = w_i, i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Собственный вектор находят из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} AW = \lambda_{\max} W, \\ w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1, \end{cases} \tag{3}$$

где $\lambda_{\max}$ - максимальное собственное значение матрицы *A*.

Пример.

Построить функцию принадлежности нечеткого множества «высокий мужчина» на универсальном множестве {170, 175, 180, 185, 190, 195}.

Предположим, что известны такие парные сравнения:

- Отсутствие преимущества 195 над 190;
- Существенное преимущество 195 над 180;
- Абсолютное преимущество 195 над 170;
- Почти существенное преимущество 190 над 170;
- Существенное преимущество 185 над 175;
- Слабое преимущество 195 над 185;
- Почти абсолютное преимущество 195 над 175;
- Слабое преимущество 190 над 175;
- Почти существенное преимущество 185 над 180;
- Почти явное преимущество 185 над 170;
- Слабое преимущество 180 над 175;
- Почти существенное преимущество 180 над 170;

- Почти слабое преимущество 175 над 170.

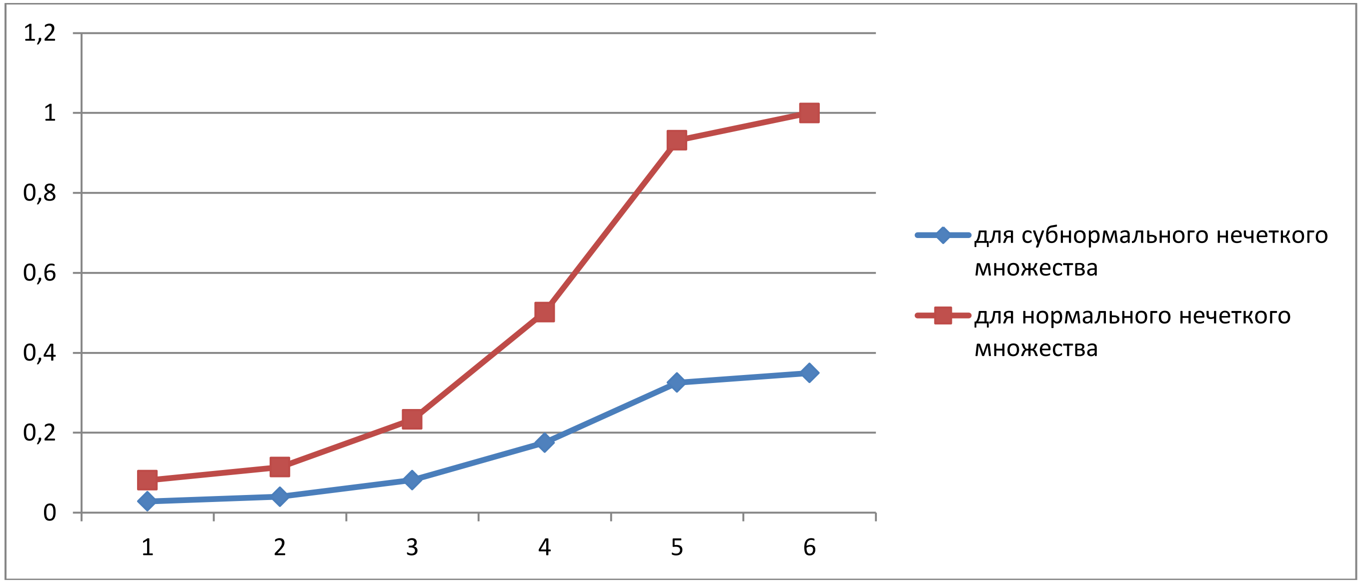
Парные сравнения запишем следующей матрицей:

$$A=\begin{array}{ccccccc} & 170 & 175 & 180 & 185 & 190 & 195 \\ 170 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/8 & 1/9 \\ 175 & 2 & 1 & 1/3 & 1/5 & 1/7 & 1/8 \\ 180 & 4 & 3 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/5 \\ 185 & 6 & 5 & 4 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 190 & 8 & 7 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 195 & 9 & 8 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{array}$$

Собственные значения матрицы парных сравнений A равны:
6,2494;
0,0318+1,2230i;
0,0318-1,2230i;
-0,1567+0,2392i;
-0,1567-0,2392i;
0,0004.
Следовательно, $\lambda_{\max} = 6{,}2494$. Степени принадлежности, найденные по формулам 3 и 2, приведены в таблице.

u_i	170	175	180	185	190	195
	1	2	3	4	5	6
$\mu_{\text{"ввысоки мужчина"}}(u_i)$ для субнормального нечеткого множества	0,0284	0,0399	0,0816	0,1754	0,3254	0,3494
$\mu_{\text{"ввысоки мужчина"}}(u_i)$ для нормального нечеткого множества	0,0813	0,1141	0,2335	0,5021	0,9314	1,0000

Нечеткое множество получилось субнормальным. Для его нормализации разделим все степени принадлежности субнормального и нормального нечетких множеств «высокий мужчина». Разница между $\lambda_{\max}$ и n служит мерой несогласованности парных сравнений эксперта. В примере $\lambda_{\max}$=6,2494, а n=6. Следовательно, мера несогласованности равна 0,2494.



Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы