R08921053 電機研一 梁峻瑋同學 TFW—HW3

(1) What are the most important advantages of (a) the S transform and (b) the generalized spectrogram when compared with the STFT?
回答:
首先, S transform 的優點在於他比 Gabor transform 多了一個變數 f, 可以用來調節 window 函數的寬度, 進而提升時間域的解析度, 或是提升頻率域的解析度.

再來, Generalized spectrogram 的優點在於他是兩個 Gabor transform 的乘積. 如果一個 Gabor 選擇寬的 window 函數(頻率域解析度高), 一個 Gabor 選擇窄的 window 函數(時間域解析度高), 那麼相乘後就可獲得時間頻率解析度都高的圖.

(2) What are the conditions that (a) Cohen's class distribution and (b) the polynomial WDF cannot remove the cross term?
回答:
首先, 柯恩族群分布(Cohen's class distribution)是對 Ambiguity 函數乘上 window 函數, 進行傅立葉轉換. 由於 Ambiguity 函數不是線性, 會產生交錯項.

其中, 主要項會集中在原點附近, 交錯項會分布於右上和左下(第一/第三象限). 如果交錯項距離原點太近, 無法使用 low-pass 的濾波器 window 函數過濾, 則此時無法消除交錯項.
→Ans: 交錯項距離原點太近, 導致交錯項和主要項相交, 則無法消除交錯項.

另一方面, WDF 也因為非線性而會產生交錯項. 而且, 主要項分布於右上與左下(第一/第三象限), 交錯項集中於(tu, fu), 靠近中間的位置. 如果主要項距離(tu, fu)太近, 則無法使用 high-pass filter 的 window 函數過濾來消除交錯項.
→Ans: 主要項距離(tu, fu)太近, 導致交錯項和主要項相交. 其中(t1, f1), (t2, f2)分別是兩個交錯項的最大值位置, 即中心點.

(3) Suppose that the WDF of $x(t)$ is …
(a) What is the WDF of $FT[\exp(j\pi 3t^2)x(2t+1)]$?
(b) How do we convert the WDF into
回答:

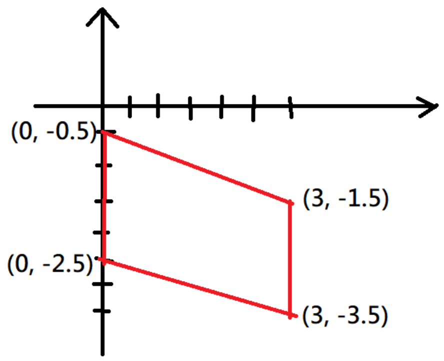
(a) 部分，對 x(t)做下列的運算

->平移, x(t+0.5). 向左 0.5 單位.

->scaling, x(2t+1). 乘 2 倍.

->shearing, exp(jπ*3tt)*x(2t+1). 直線斜率 a=3.

->旋轉, FT(exp(jπ*3tt)*x(2t+1)). 順時針旋轉 90 度.



(b) 部分，使用 Twisting—Linear Canonical Transform 的假設,

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ with } ad - bc = 1$$

(0, 0)-A->(0,0)

(4, 0)-A->(3, 3)

(0, 3)-A->(-3, 1)

所以我們有: $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3/4 & -1 \\ 3/4 & 1/3 \end{pmatrix}$.

所以答案為$X_{\{a,b,c,d\}(u)} = \sqrt{j} * e^{j\pi(-\frac{uu}{3})} * \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(-ut)} * e^{j\pi\left(-\frac{3tt}{4}\right)} x(t)dt, b \neq 0.$

(4) (a) How do we use the fractional Fourier transform to generate the following three cutoff lines on the time-frequency distribution?

$$2t + f < 6, -t + 2f < 8, \text{ and } f > -1.$$

(b) How do we generate the cutoff line of $3+2t^3 > f > 1+2t^3$?

回答:

首先(a)部分, Fractional Fourier Transform 需要輸入參數Φ, u0 才能決定.

在 2t+f<6，也就是分界線為 2t+f=6 的情況，Φ=直線和 f-axis 的夾角=acrtan(1/2), 或 tan(Φ)=1/2，可由內積公式算出 cos(). 而 u0=直線到(0,0)的距離=6/√5.

在-t+2f<8，也就是分界線為-t+2f=8. 則 tan(Φ)=-2，Φ=arctan(-2); u0=8/√5.

在 f>-1，也就是分界線為 f=-1，則 tan(Φ)=+inf，Φ=π/2, u0=1.

再來(b)部分，我們對 f>1 和 f<3 做 Generalized Shearing，取Φ (t)= πt^4，那麼 S_x(t,f)~=S_y(t. f-2t^3). 所以 f>1 會變成 f>2t^3+1, f<3 會變成 f<2t^3+3.

(5) Suppose that $x(t)$ is a stationary random process. Which of the following function is also stationary? (i) $x(5t+1)$, (b) the FT of $x(t)$, (c) exp($j\pi t^2$)x(t), (d) the Fresnel transform of $x(t)$?

回答:

首先, stationary 的定義是函數不隨著時間 t 而改變.

(i)如果 x(t)是 stationary，則 x(5t)只是改變粗細，也還是. x(5t+1)只是移動，也是.

(ii)在時頻圖上, FT{x(t)}相當於逆時針旋轉 90 度，一定會變成時間的函數，不是.

(iii)在時頻圖上，乘 chirp 函數相當於對 f 做 shearing，變成時間的函數，不是.

(iv)在時頻圖上, Fresnel 轉換(convolution with chirp)相當於對 t 做 shearing，不是.

答案是: (i).

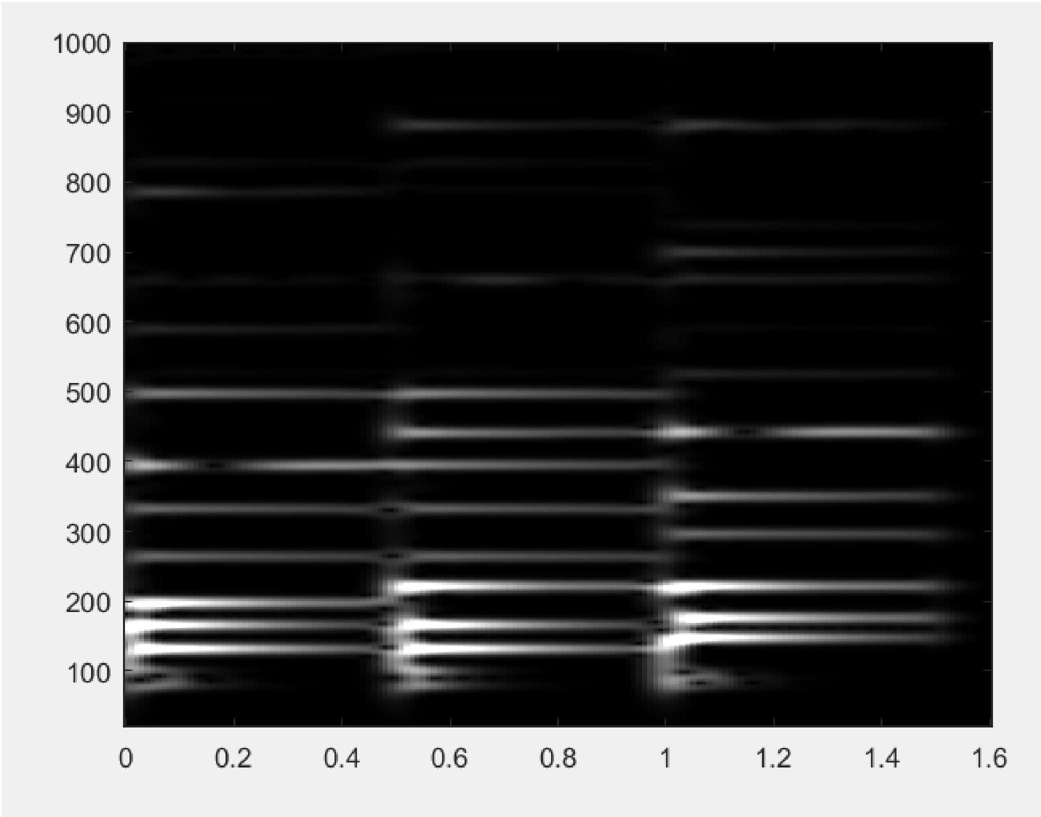
6) Write a Matlab program for <u>the scaled Gabor transform</u> (unbalanced form).

y = Gabor(x, tau, t, f, sgm)

程式碼如下:

```
function y = Gabor(x, tau, t, f, sgm)
%Step 1:Calculate c0, m0, no, C, F, T, N, Q
dtau=tau(2)-tau(1); dt=t(2)-t(1); df=f(2)-f(1);
n=round(tau./dtau);  T=length(n);
m=round(f./df);      F=length(m);
c=round(t./dt);      C=length(c);
N=round(1/(dtau*df)); Q=round(1.9143/(sqrt(sgm)*dtau)); S=round(dt/dtau);
%Step 2:n=c0
X=zeros(F,C);
for a = 1:C
    %Step3:Determine x1(q)
    x1=zeros(N-2*Q-1, 0);
    q=(0:1:2*Q)';
    x1=x(max(min(a*S-Q+q, T), 1)).*exp(-sgm*pi*((Q-q)*dtau).^2);
    x1=[x1;zeros(N-2*Q-1,1)];
    %Step4:X1(m)=FFT(x1(q))
    X1=fft(x1, N);
    %Step5:ConvertX1(m) into X(ndt, mdf)
    for b = 1:F
        X(b,a)=dtau*exp(j*2*pi*(Q-a*S)*b/N)*X1(m(b),1);
    end
end
y=X;
```

在 step1，我宣告了需要用到的常數. 在 step2, n=c0，不過我用迴圈，所以不需要. 在 step3，先求出 x(aS-Q+q)和 window 函數，再把兩個相乘，並且添零. 在 step4，我使用內建的指令做 FFT. 在 step5，我把 X(m)轉換成 X(b,a)，最後再輸出. 值得一提的是，我輸入的 tau=0:dtau:1.6 with dtau=1/44100. 底下是我以 Chord.wav 檔案測試的結果，以及速度:




```
>> main
Elapsed time is 0.147415 seconds.
>> main
Elapsed time is 0.137484 seconds.
>> main
Elapsed time is 0.141418 seconds.
```

結束本題.