R08921053 電機研一 梁峻瑋同學 TFW—HW4

(1) Illustrate the following terms. (a) color noise; (b) scaling function (about the wavelet transform); (c) scalogram.

回答:

(a) 根據定義，一個隨機程序 x(t)的 power spectral density, S_x(f), 如果可以表示成 S(f)=σ*f^α, α!=0 的形式，則稱之為 color noise. 比方說 S(f)=σ 就是 white noise, 或者是 S(f)=σ/f 就是 pink noise; S(f)=σ*f 則是 purple noise.

(b) 根據定義，對於 mexican hat function ψ(t), Φ(f)定義為

$$|\Phi(f)|^2 = \int_{f}^{\inf} \frac{|\psi(f1)|^2}{|f1|} df1, \ \Phi(-f)= \Phi^*(f) \text{ if } f>0.$$

而 scaling function: $\varphi(t) = \int_{-\inf}^{\inf} \Phi(f) e^{j2pift} df$. 就意義上來看，一方面他簡化了 inverse FT, 另一方面他則是 low frequency function, 可以用來當作 low-pass filter. 因為我們可以使用 scaling function 來當作 mother wavelet function, 進行 inverse wavelet transform.

(c) 根據定義, scalogram 就是 wavelet transform 的絕對值平方. 類似於 spectrogram 是 STFT 的絕對值平方的定義方式.

(2) What are the vanish moments of

(a) $\frac{d^6}{dt^6} e^{-\pi t^2}$

(b) $x(t)$ = 2 for -1 < t < 1, $x(t)$ = -1 for 1 < |t| < 3, $x(t)$ = 0 otherwise.

回答:

(a) 首先，命名 a(t)=$\frac{d^6}{dt^6} e^{-\pi t^2}$ ，而 b(f):=FT{a(t)}=$(2\pi f)^6$*exp(-π*t^2). 可得

m_0:=0^{th} moment=b(0)=0.

m_1=m_3=m_5=m_7=0 因為 t, t^3, t^5 或 t^7 都和 a(t)是正交的, a(t)是由高斯函數乘上偶數次方的多項式函數.

m_2=1/$(-j2\pi)^2$*d^2[b(f)]/df^2=constant*f^4*(6*5*exp(-πf^2)+f*others)$|_{f=0}$=0

m_4=1/$(-j2\pi)^4$*d^4[b(f)]/df^4=constant*f^2*(6*5*4*3*exp(-πf^2)+f*others)$|_{f=0}$=0

m_6=1/$(-j2\pi)^6$*d^6[b(f)]/df^6=constant*(6!*exp(-πf^2)+f*others)$|_{f=0}$!=0

所以, m_0=m_1=m_2=m_3= m_4=m_5=0, m_6!=0, **Answer: vanish moment=6**

(b) 首先，我們有:

$$m_0 = \int_{-inf}^{inf} x(t)dt = 2*\left(1-(-1)\right)+(-1)*(3-1)*2 = 0$$

$$m_1 = \int_{-inf}^{inf} tx(t)dt = \frac{2}{2}*(1^2-(-1)^2)+0 = 0$$

因為 t*(-1)是奇函數，在 1<|t|<3 上積分有對稱性，所以是 0.

$$m_2 = \int_{-inf}^{inf} t^2x(t)dt = \frac{2}{3}*(1^3-(-1)^3)+\frac{(-1)}{3}*(27-1)*2 = \frac{4}{3}-\frac{52}{3} = -\frac{48}{3}$$

所以, m0=m1=0, m2!=0. **Answer: vanish moment=2**

(3) (a) What is the <u>most important advantage</u> of the Haar transform nowadays?

(b) How many entries of the 2^k-point Haar transform are equal to 0, 1, and -1? Express the solutions in term of *k*.

回答:

(a) Haar transform 最大的優點在於，由於計算過程只需要加減法，甚至連乘法不用，所以速度非常快，適合做運算量很大的影像處理與分析，並且同時過濾高頻訊息.

(b) 首先我們可以觀察到，在 2^k 點的 Haar transform 當中, -1 的數目有:

$2^{k-1}+\left(2^{k-2}*2\right)+\left(2^{k-3}*4\right)+\cdots+\left(2^0*2^{k-1}\right) = k*2^{k-1}$.

分別為第 2 列，第 3-4 列，第 5-8 列, …，第 $2^{k-1}+1$~2^k 列的內容.

另一方面, 1 的數目在第一列為 2^k，除此之外完全與-1 一樣，所以是 $2^k+k*2^{k-1}=(k+2)2^{k-1}$.

最後，由於三類的數目總和要是 2^k*2^k，所以 0 的數目是 $(2^{k+1}-2k-2)2^{k-1}$.

整理如下:

	Number of -1	**Number of 1**	**Number of 0**
$\mathbf{2^k}$	$\mathbf{k*2^{k-1}}$	$\mathbf{(k+2)2^{k-1}}$	$\mathbf{(2^{k+1}-2k-2)2^{k-1}}$
$\mathbf{2^1}$	**1**	**3**	**0**
$\mathbf{2^2}$	**4**	**8**	**4**
$\mathbf{2^3}$	**12**	**20**	**32**

(4) Among the <u>STFT</u>, the <u>WDF</u>, and the <u>Hilbert-Huang transform</u>, which one is better for the applications of (a) tone analysis, (b) random process analysis, (c) multiplexing, and (d) analyzing the variation of temperature?

<u>Also illustrate the reasons</u>.

回答:
在腔調分析的部分，比方說分析中文的一,二,三,四聲聲調，由於重點在於分析訊號的走勢和變化趨勢，**因此採用 Hilbert-Huang transform 較佳**.

(a) 在隨機程序分析的部分，由於 WDF 的期望值就是訊號的 power spectral density, 因為隨機訊號與 WDF 具備高度相關的關係，**所以需要使用 WDF.**
(b) 在 multiplexing 的部分，由於有多個訊號使用不同的時間或是頻率來疊合成合訊號，所以勢必是非常複雜的多訊號成分，需要考慮 cross term 的問題，因此應該**適合採用 STFT**.
(c) 在 analyzing the variation of temperature 的部分，由於我們主要想分析溫度走勢，振幅隨著時間的變化性質等等，**所以採用 Hilbert-Huang transform 較佳**.

(5) Which of the following signal is not an IMF? Why? (a) sin(t) + t, (b) cos(t^3).
回答:
(a) **sin(t)+t 不是 IMF**. 例如，當 t=2~10, sin(t)+t>(-1)+2=1，所以根本不可能 zero-crossing，然而當 t=π/2π 時, sin(t)+t 顯然有局部最大值，違背了 IMF 定義的第一點.

(b) **cos(t^3)是 IMF**. 首先，因為 t^3 是連續的, cos(t3)發生極大值的值一定是 1，發生極小值的值一定是-1，利用介值定理就可得”#extreme=#zero-crossing+{-1,0,1}”，也就是達成 IMF 定義的第一個條件. 再來，極大值的平均是 1，極小值的平均是-1，所以上下封包的平均是 0，達成第二個條件. 所以它是 IMF.

(6) Write two concepts you learned from the oral presentation on 12/5.
回答:
第一點，我在時頻分析與鎖相迴路的報告中，認識到鎖相迴路是一種穩定又便宜的頻率合成器，並且由”Phase Frequency Detector”, “Charge Pump”, “Low pass Filter”, “Voltage Controlled Oscillator”所組成的. 更認知到可以參考品質因數這項指標來衡量鎖相迴路的好壞，以及時頻分析也可以應用在鎖相迴路的分析上.

第二點，我在 Image Segmentation 的報告中，學習到這個演算法的優點在於物體方向的追蹤，或者是資料的壓縮. 也認知到有三個方法可以來實作這個演算法，分別是”Fast scanning& adaptive merging”, “K-means”, “wavelet segmentation”. 其中 wavelet segmentation 還使用到 Haar wavelet，可以加速，也可以過濾高頻訊息.

(7) Write a Matlab program of the Hilbert-Huang transform.

y = hht(x, t, thr)

x: input, y: output (each row of y is one of the IMFs of x), t: samples on the *t*-axis, thr : the threshold used in Step 7.

In Step 8, the number of non-boundary extremes can be no more than 3.

<u>The Matlab code should be handed out by Ceiba</u>.

回答：程式碼如下

```matlab
function y=hht(x, t, thr)
%Step1: Initial
y=x; n=1; k=1; key=0; keys=0; length=size(y,2);
while n<10 && keys==0
    k=1; key=0;
    while k<30 && key==0
        %Step2: Find the local peaks/Step4: Find the local dips
        idmax=[]; idmin=[];
        for i = 2:length-1
            if (y(i)>=y(i-1)) && (y(i)>=y(i+1))
                idmax=[idmax, i];
            elseif (y(i)<=y(i-1) && y(i)<=y(i+1))
                idmin=[idmin, i];
            end
        end
        %Step3: Connect local peaks/Step5: Connect local dips
        spmax=spline(t(idmax), y(idmax), t);
        spmin=spline(t(idmin), y(idmin), t);
        %Step6: Compute the mean, the residue
        z = (spmax+spmin)*0.5;
        h = y-z;
        %Step7: Check whether h_k(t) is an IMF
        key=1;
        hidmax=[]; hidmin=[];
        for i = 2:length-1
            if (h(i)>=h(i-1)) && (h(i)>=h(i+1))
                hidmax=[hidmax, i];
            elseif (h(i)<=h(i-1) && h(i)<=h(i+1))
                hidmin=[hidmin, i];
            end
        end
        u1=spline(t(hidmax), h(hidmax), t);
        u0=spline(t(hidmin), h(hidmin), t);


        for i = hidmax
            if h(i) <= 0
                key=0;
            end
        end
        for i = hidmin
            if h(i) >= 0
                key=0;
            end
        end
        sum = abs(u1+u0);
        for i = 1:length
            if sum >= thr
                key=0;
            end
```

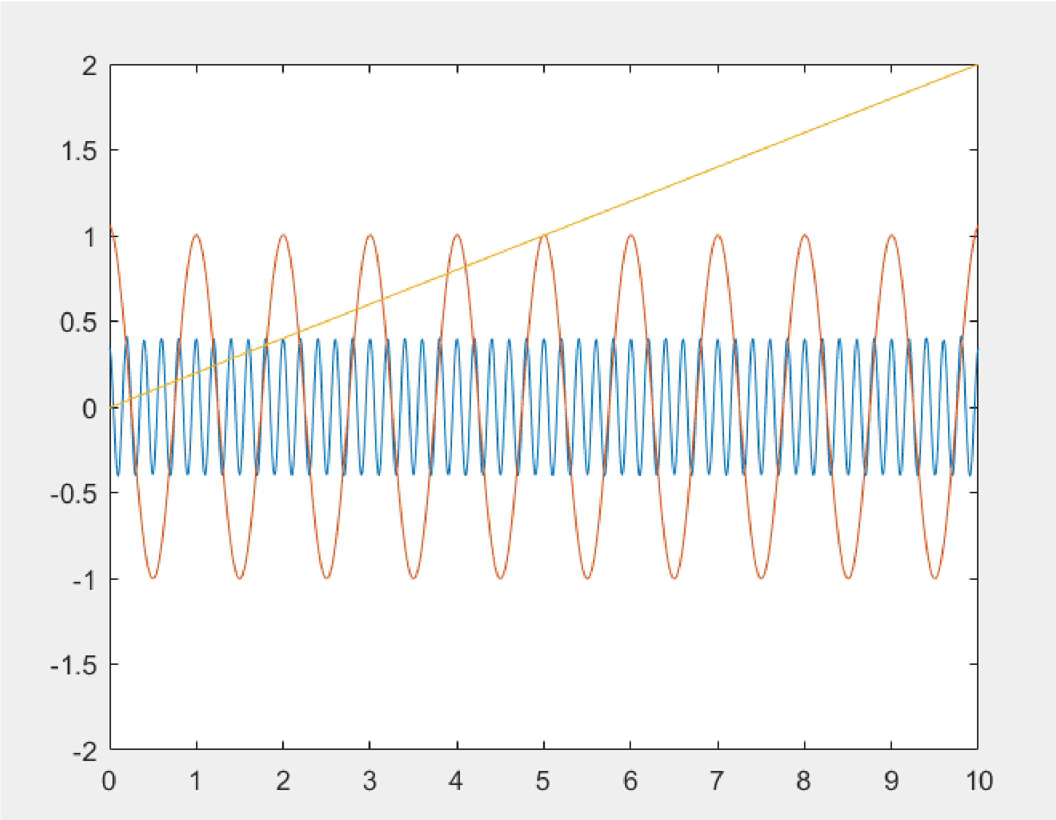
```
            end
            if ~(key==0 && k<30)
                c(n, : )=h;
            else
                y=h;
                k=k+1;
            end
        end
        %Step 8:Calculate x0(t)=x(t)-(c1(t)+...+cn(t))
        x0 = x;
        for i = 1:n
            x0=x0-c(i, :);
        end
        iter = 0;
        for i = 2:length-1
            if x0(i)>=x0(i-1) && x0(i)>=x0(i+1)
                iter=iter+1;
            elseif x0(i)<=x0(i-1) && x0(i)<=x0(i+1)
                iter=iter+1;
            end
        end
        keys=1;
        if iter>2
            keys=0;
        end
        if ~(n<10 && keys==0)
            c(n+1, : )=x0;
        end
        y=x0;
        n=n+1;
    end
    y = c;
```

參考老師在講義上提供的演算法，第一步是設定參數，第二,三步是求出最大值的 index 再畫出 spline，第四,五步是求出最小值的 index 再畫出 spline．由於兩個部分基本上是一樣邏輯的，所以我合併在一起做.

第六步則是求出上下封包平均函數，以及算出 residue 部分．第七步則是檢查 residue 是不是一個合格的 IMF，如果不合格，設定 key=0 y=h, k=k+1，讓 while 迴圈再重頭跑過．如果合格，設定 key=1, c=h，進入第八步．萬一跑太多次，比方說 30 次以上，我也放寬讓他進入第八關.

最後，在第八關，要檢查 x(t)扣除 c1~cn 所剩下的部分是不是合格的，也就是極值不超過 1 個．不合格就再從第二步的 while 迴圈開始，及格就結束．

以題目的 example 來說，輸出會有三個 row，畫成圖如下



藍色是第一列，紅色是第二列，橘色是第三列，與講義上的結果吻合．