R08921053 電機研一 TFW—HW2

(1) Compare to the FFT-based method, what are the advantage and disadvantage of (a) the recursive method and (b) the chirp Z transform method for STFT implementation?

回答: 關於(a)部分, 遞迴(recursive)的優點在於時間複雜度低於 FFT-based, 然而缺點是需要比 FFT-based 更多的限制, 基本上只能使用"rectangular window".

關於(b)部分, Chirp 的優點在於不需要 delta_t*delta_f=1/N 的條件, 但 FFT-based 需要. 然而, Chirp 的缺點在於, 大約需要 FFT-based 的三倍運算時間, 即使時間複雜度相同.

(2) Prove that (a) the Gabor transform of $\delta(\tau)$ is $G_x(t,f)=e^{-\pi t^2}$.

(b) The Gabor transform of 1 is $G_x(t,f)=e^{-j2\pi ft}e^{-\pi f^2}$.

回答: 關於(a)部分, 當 x(τ)=δ(τ)=δ(τ-0)時, 我們有,

$$G_x(t,f)=\exp(-\pi(\tau-t)^2)\exp(-j*2\pi*f*\tau)\ |_{\tau=0} = \exp(-\pi t^2).$$

第一個等式是根據講義 P117 性質四, f(τ)δ(τ-0)做積分的值為 f(0). 結束(a)小題.

關於(b)部分, 觀察當 x(t)=1, 積分項 exp 的次方,

$$-\pi(\tau-t)^2-j*2\pi*f*t = -\pi(t-\tau)^2-j*2\pi*f*(t-\tau)-j*2\pi*f*\tau.$$

使用講義 P77 頁公式, 積分的值= $\sqrt{\frac{\pi}{\pi}}$*exp(-1*4ππ*ff/4/π)*exp(-j*2π*f*τ).

也就是 exp(-1*πff)*exp(-j*2π*f*τ). 結束(b)小題.

(3) (a) Prove that the WDF of any signal is a real function. (b) How do we make Cohen's class distribution for any function always be real (show the constraint for the mask function $\Phi(\tau, \eta)$) ?

回答: 關於(a)部分,

$$W_x(t,f)^*$$

$$= [\int_{-\infty}^{\infty} x(t+0.5\tau)x^*(t-0.5\tau)\exp(-j*2\pi*f*\tau)]^* d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t+0.5\tau)x(t-0.5\tau)\exp\,(+j*2\pi*f*\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} x^*(t-0.5o)x(t+0.5o)\exp\,(-j*2\pi*f*o)-do, o:=-\tau$$

$$= W_x(t,f)$$

因此，得證 WDF 一定是實數(因為共軛前後值相同).

關於(b)部分，首先我們知道，

g(x,y)=g*(-x,-y) if and only if F{g(x,y)} is real

套用在柯恩分布(Cahen's class distribution)上，則柯恩分布為實數的 iff 條件為

$A_x(\tau, \eta)\Phi(\tau, \eta)= A_x^*(-\tau,- \eta)\Phi^*(-\tau, -\eta)$

然而根據(a)部分，可知 A_x 是實數，所以本題答案為: $\Phi(\tau, \eta)=\Phi^*(-\tau, -\eta)$...Answer

(4) Which of the following signals are suitable to be analyzed by the WDF? Why? (a) $\exp(j3t^2)$, (b) Music signal, (c) $\exp(-\pi t^4)$, (d) $\exp(j2\pi t^4 + j3t^2)$?

回答:

WDF 雖然解析度比 STFT 還高，但是會有交錯項(cross term)問題，所以要檢查順時頻率的函數圖形.

(a) $\exp(j3t^2)$，有順時頻率 3t/π，為一次函數，沒有交錯項問題，適合用 WDF.

(b) Music signal，通常會有兩個以上的訊號，會產生交錯項問題，不適合.

(c) $\exp(-\pi t^4)$，順時頻率非常複雜，不是單一的訊號,有交錯項的問題，不適合.

(d) $\exp(j2\pi t^4 + j3t^2)$，有順時頻率 $4t^3$+3t/π，有彎曲的部分(交錯項問題)，不適合

所以答案選擇(a).

(5) Why (a) the windowed Wigner distribution function, (b) Cohen's class distribution, and (c) the Gabor-Wigner transform can <u>avoid the cross term problem</u> in some cases?

回答:

關於(a)部分，在 windowed WDF，交錯項基本上只會出現在|t2-t1|~-|t2-t1|之間(以 x(t)=δ(t-a)+δ(t-b)為例)，所以使用 high-pass filter 當作 window function 可以濾除交錯項.

關於(b)部分，在柯恩分布(Cohen’s class distribution), auto term 基本上中心點一定位於(0,0)位置，所以當 t2-t1 或 f2-f1 極大時，可以用 low-pass filter 來當作 window function，濾除交錯項.

關於(c)部分，在 Gabor-Wigner transform，由於 Gabor 轉換可以過濾掉交錯項，使其值為 0，所以 Gabor 函數和 WDF 相乘以後，自然也不存在交錯項，解決掉 WDF 有交錯項的問題.

(6) Write a program for the rectangular short time Fourier transform .

y = recSTFT(x, t, f, B)

(35 scores)

x: input, *t*: samples on *t*-axis, *f*: samples on *f*-axis,

[-B, B]: interval of integration, y: output

回答:

```
function y = recSTFT(x, t, f, B)
%Restrict B<10
%Step 1:Calculate n0, m0, T, F, N, Q
dt=t(2)-t(1);
df=f(2)-f(1);
N=round( 1/(dt*df) );
n=t./dt; n=round(n); n0=n(1); T=length(n);
m=f./df; m=round(m); m0=m(1); F=length(m);
Q=round(B/dt);
fprintf('%d', Q);

X=zeros(T,F);
spacet=zeros(1,T);
spacef=zeros(1,F);
x=[x,0];
%Step 2:n=n0
for a = 1:T
    %Step 3:determine x1(q)
    zeropt= zeros(1, N-2*Q-1);
    q=[0:2*Q]; valpt=round(n(a)-Q+q); valpt(valpt<1)=T+1; valpt(valpt>T)=T+1;
    x1=[x(valpt), zeropt];
```

```
        x1=[x(valpt), zeropt];

        %Step 4:X1(m)=FFT[x1(q)]
        X1=fft(x1, N);

        %Step 5:Convert X1(m) into X(ndt, mdf)
        for b = 1:F
            spacet(1,a)=n(a)*dt;
            spacef(1,b)=m(b)*df;
            X(a,b)      =X1(1,mod(m(b),N)+1)*exp(i*2*pi*(Q-n(a))*m(b)/N)*dt;
        end

        %Step 6:Set n=n+1 and return tp Step 3 until n=n0+T-1
        a=a+1;
    end
    y=X';


    image(spacet, spacef, abs(y)/max(max(abs(y)))*400);
    colormap(gray(256));
    set(gca, 'Ydir', 'normal');
```

首先，我在 step1 還原 delta_t, delta_f，以及計算出需要的常數．在 step2，我設定迴圈，跑遍 n(1)~n(T)，在此例子也就是 0~600．在 step3，我把 x1(q)拆成兩段，開頭一小段為 x(n(a)-Q+q)，後面一大段則全部填 0．在 step4，我對 x1(q)做 FFT 求得 X1．在 step5，我跑遍 m(1)~m(F)，在此例子也就是-100~100．然而 m(b) mod N 有可能為 0，所以要再加 1 確保 index 為正整數．並且再乘上其他項後代入 X1，得到 X 函數．再 Step6，要記得把 a+1，更新迴圈．最後，由於我們習慣的圖，把 t 設定為水平(x 軸)，f 設定為垂直(y 軸)，與 matlab 矩陣的順序不同，所以要轉置矩陣．再把圖給畫出來就結束本題.

以提供的例子而言，畫出來的灰階圖如下:(20Elapsed time is 0.089662 seconds.)