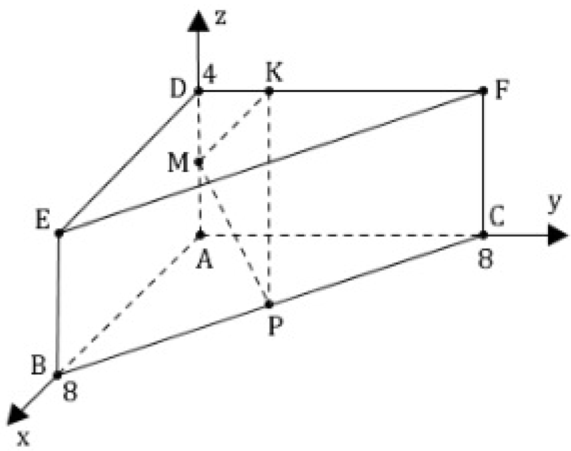
# Lösung

## Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

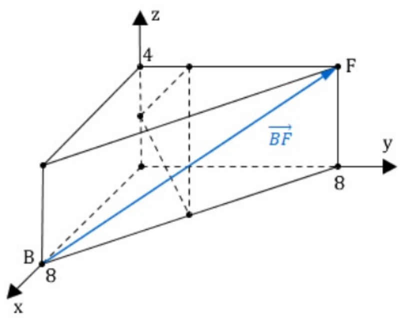
Die Abbildung zeigt ein gerades Prisma $A\,B\,C\,D\,E\,F$ mit $A(0|0|0), B(8|0|0), C(0|8|0)$ und $D(0|0|4)$.




Bestimmen Sie den Abstand der Eckpunkte B und F.

## Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

### Länge eines Vektors



$B(8|0|0), F(0|8|4)$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

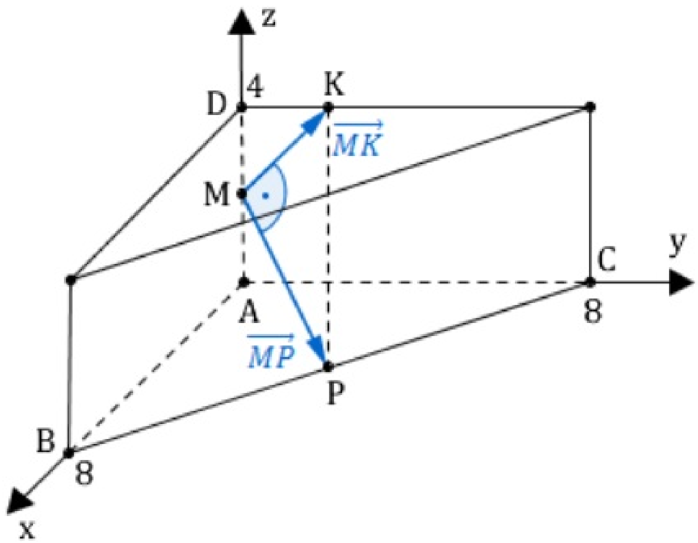
$$\overline{BF} = |\ \overrightarrow{BF}\ | = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + 4^2} = 12$$

## Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Die Punkte M und P sind die Mittelpunkte der Kanten $[AD]$ bzw. $[BC]$. Der Punkt $K(0|yK|4)$ liegt auf der Kante [DF]. Bestimmen Sie y K so, dass das Dreieck $K\ M\ P$ in $M$ rechtwinklig ist.

## Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

### Mittelpunkt einer Strecke



$A(0|0|0), D(0|0|4)$

$B(8|0|0), C(0|8|0)$

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \overrightarrow{A} + \overrightarrow{D} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow M(0|0|2)$

$$\overrightarrow{P} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow P(4|4|0)$

**Skalarprodukt**

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{K} - \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ yk \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ yk \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MK} \circ \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 0 \\ yk \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 + 4yk - 4$$

Es soll gelten: $\overrightarrow{MK} \circ \overrightarrow{MP} = 0$

$4yk - 4 = 0$

$\Longrightarrow \quad yk = 1$

## Teilaufgabe Teil A 2a (1 BE)

Gegeben ist die Ebene $\text{E} : 3x_2 + 4x_3 = 5$.

Beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem.

## Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

## Besondere Lage im Koordinatensystem

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

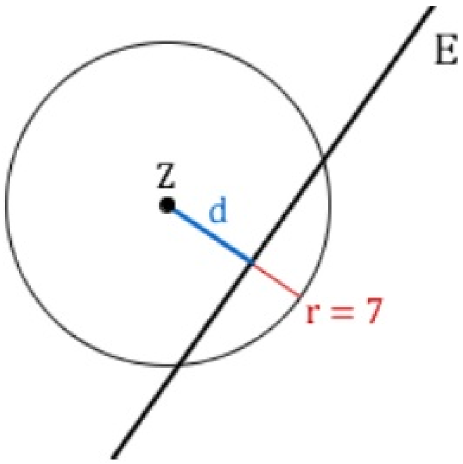
Die Ebene E ist parallel zur $x_1$-Achse, da die $x_1$-Koordinate des Normalenvektors Null ist.

## Teilaufgabe Teil A 2b (4 BE)

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Kugel mit Mittelpunkt $Z(1|6|3)$ und Radius 7 die Ebene E schneidet.

## Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

### Abstand Punkt - Ebene




$Z(1|6|3)$

$E: 3x_2 + 4x_3 = 5$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ Normalenvektor der Ebene

Betrag des Normalenvektors bestimmen:

$$|\overrightarrow{n_E}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0 + 3^2 + 4^2} = 5$$

Hesse-Normalenform $E^{HNF}$ der Ebene aufstellen:

$E^{HNF}: \frac{1}{5}(3x_2 + 4x_3 - 5) = 0$

Abstand bestimmen:

$$d = d(Z, E) = \left| \frac{1}{5}(3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 - 5) \right| = 5 < r(= 7)$$

Der Abstand des Mittelpunktes Z zur Ebene E ist kleiner als der Radius r der Kugel, also schneiden sich Kugel und Ebene.

## Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(4|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|4)$ das Dreieck AB C fest, das in der Ebene $E : x_1 + x_2 + x_3 = 4$ liegt.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $A\ B\ C$.

## Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

## Flächeninhalt eines Dreiecks

$A(4|0|0)$,$B(0|4|0)$ und $C(0|0|4)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Flächeninhalt des Dreiecks $A\ B\ C$ :

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right|$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| 16 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$A_{ABC} = 8 \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 8\sqrt{3}$$

## Teilaufgabe Teil B b (5 BE)

Das Dreieck $A\ B\ C$ stellt modellhaft einen Spiegel dar. Der Punkt $P(2|2|3)$ gibt im Modell die Position einer Lichtquelle an, von der ein Lichtstrahl ausgeht. Die Richtung dieses Lichtstrahls wird im Modell durch den Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, entlang derer der Lichtstrahl im Modell verläuft. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts R, in dem g die Ebene E schneidet, und begründen Sie, dass der Lichtstrahl auf dem dreieckigen Spiegel auftrifft.
( zur Kontrolle: $R(1,5|1,5|1)$)

## Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

## Geradengleichung aufstellen

$$g : \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{P}} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}}$$

**Schnitt Ebene und Gerade**

$E : x_1 + x_2 + x_3 = 4$

Ebene $E$ und Gerade $g$ schneiden: $E \cap g$.

$$\begin{aligned} E \cap g : (2-\lambda)+(2-\lambda)+(3-4\lambda) &= 4 \\ 7-6\lambda &= 4 \\ -6\lambda &= -3 \\ \lambda &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{R} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} \implies R(1,5|1,5|1)$$

Begründung:

Alle Koordinaten von R sind positiv.