Лабораторная работа №2

Задача о погоне

Гнатюк Анастасия Станиславовна

Содержание

Цель работы

Решить задачу о погоне.

Теоретическое введение

Задача о погоне

Приведем один из примеров построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задач поиска.

Например, рассмотрим задачу преследования браконьеров береговой охраной. На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии k км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 2 раза больше скорости браконьерской лодки.

Необходимо определить по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтоб нагнать лодку.

Постановка задачи

1. Принимает за $t_0 = 0$, $x_{л0} = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x_{к0} = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.
2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_{л0}$ ($\theta = x_{л0} = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны (рис. 5.1)

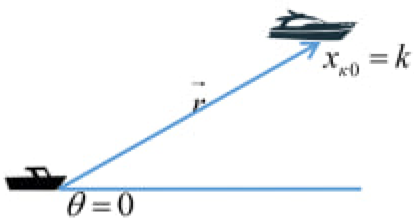

Рис.51.1. Положение катера и лодки в начальный момент времени

3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ, только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки.
   Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.
4. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер $k-x$ (или $k+x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как x/v или $k-x/2v$ (во втором

случае $x+k/2v$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние x можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v}=\frac{k-x}{2v} \text{ в первом случае или}$$

$$\frac{x}{v}=\frac{x+k}{2v} \text{ во втором.}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1=\frac{k}{3}$ и $x_2=k$, задачу будем решать для двух случаев.

5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v.

Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_τ - тангенциальная скорость (рис. 2). Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r=\frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt}=v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $v_\tau=r\frac{d\theta}{dt}$

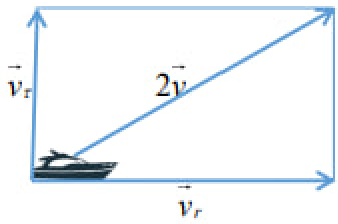

Рис. 5.2. Разложение скорости катера на тангенциальную и радиальную составляющие

Из рисунка видно: $v_\tau = \sqrt{4v^2 - v^2} = \sqrt{3}v$ (учитывая, что радиальная скорость равна v). Тогда получаем $r\dfrac{d\theta}{dt} = \sqrt{3}v$

6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = v \\ r\dfrac{d\theta}{dt} = \sqrt{3}v \end{cases}$$

с начальными условиями $\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = x_2 \end{cases}$

Исключая из полученной системы производную по *t*, можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, вы получите траекторию движения катера в полярных координатах.

Рис. 1: Рис.1.4: Теория

Выполнение лабораторной работы

1. Условие

По формуле у меня вышло число 15.

Задача №15.

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 8,1 км от катера. Затем лодка снова скрывается втумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скоростькатера в 3,2 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

1. Пусть x – расстоян. лодки, а $k-x$ – расстоян. катера.

Составим ур-е:

$$x = k - x$$

Время:

$$t_1 = \frac{x}{\vartheta} \qquad t_2 = \frac{8{,}1 - x}{3{,}2\vartheta}$$

$$\frac{x}{\vartheta} = \frac{8{,}1 - x}{3{,}2\vartheta}$$

$$3{,}2\vartheta \cdot x = 8{,}1\vartheta - x\vartheta$$

$$3{,}2\vartheta x + \vartheta x = 8{,}1\vartheta$$

$$4{,}2\vartheta x = 8{,}1\vartheta$$

$$x_1 = \frac{8{,}1}{4{,}2} \approx 1{,}9$$

2. — 1 —, а $k+x$ – расс. катера.

Составим ур-е:

$$x = k + x$$

Время:

$$t = \frac{x}{\vartheta} = \frac{8{,}1 + x}{3{,}2\vartheta}$$

$$\Longrightarrow 3{,}2\vartheta x = 8{,}1\vartheta + x\vartheta$$

$$3{,}2\vartheta x - x\vartheta = 8{,}1\vartheta$$

$$2{,}2\vartheta x = 8{,}1\vartheta$$

$$x_2 = \frac{8{,}1}{2{,}2} \approx 3{,}7$$

3. $$\vartheta_\tau = \sqrt{10{,}24\vartheta^2 - \vartheta^2} = \sqrt{9{,}24}\,\vartheta$$

$$\vartheta_r = \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{10{,}24}}$$

Нач. условия. Первый случай $\begin{cases} r_0 = 1{,}9 \\ \theta = 0 \end{cases}$ Второй случай $\begin{cases} r_0 = 3{,}7 \\ \theta = 0. \end{cases}$

lab2.jl – Блокнот

Файл Правка Формат Вид Справка

```
using Plots
using DifferentialEquations

# расстояние от лодки до катера
const a = 8.1
const n = 3.2

# расстояние начала спирали
const r0 = a/(n + 1)
const r0_2 = a/(n - 1)
# интервал
const T = (0, 2*pi)
const T_2 = (-pi, pi)

function F(u, p, t)
    return u / sqrt(n*n - 1)
end

# задача ОДУ
problem = ODEProblem(F, r0_2, T_2)

#решение
result = solve(problem, abstol=1e-8, reltol=1e-8)
@show result.u
@show result.t

dxR = rand(1:size(result.t)[1])
rAngles = [result.t[dxR] for i in 1:size(result.t)[1]]

#холст1
plt = plot(proj=:polar, aspect_ratio=:equal, dpi = 1000, legend=true, bg=:white)

#параметры для холста
plot!(plt, xlabel="theta", ylabel="r(t)", title="Задача о погоне - случай 1", legend=:outerbottom)
plot!(plt, [rAngles[1], rAngles[2]], [0.0, result.u[size(result.u)[1]]], label="Путь лодки", color=:blue, lw=1)
scatter!(plt, rAngles, result.u, label="", mc=:blue, ms=0.0005)
plot!(plt, result.t, result.u, xlabel="theta", ylabel="r(t)", label="Путь катера", color=:green, lw=1)
scatter!(plt, result.t, result.u, label="", mc=:green, ms=0.0005)

savefig(plt, "lab02_01.png")

problem = ODEProblem(F, r0_2 , T_2)
```

```
problem = ODEProblem(F, r0_2 , T_2)
result = solve(problem, abstol=1e-8, reltol=1e-8)
dxR = rand(1:size(result.t)[1])
rAngles = [result.t[dxR] for i in 1:size(result.t)[1]]

#холст2
plt1 = plot(proj=:polar, aspect_ratio=:equal, dpi = 1000, legend=true, bg=:white)

#параметры для холста
plot!(plt1, xlabel="theta", ylabel="r(t)", title="Задача о погоне - случай 2", legend=:outerbottom)
plot!(plt1, [rAngles[1], rAngles[2]], [0.0, result.u[size(result.u)[1]]], label="Путь лодки", color=:blue, lw=1)
scatter!(plt1, rAngles, result.u, label="", mc=:blue, ms=0.0005)
plot!(plt1, result.t, result.u, xlabel="theta", ylabel="r(t)", label="Путь катера", color=:green, lw=1)
scatter!(plt1, result.t, result.u, label="", mc=:green, ms=0.0005)

savefig(plt1, "lab02_02.png")
```

Стр 27, стлб 32 | 100% | UNIX (LF) | UTF-8

Рис. 1: Рис.4: Код(2)

2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

Первый случай:

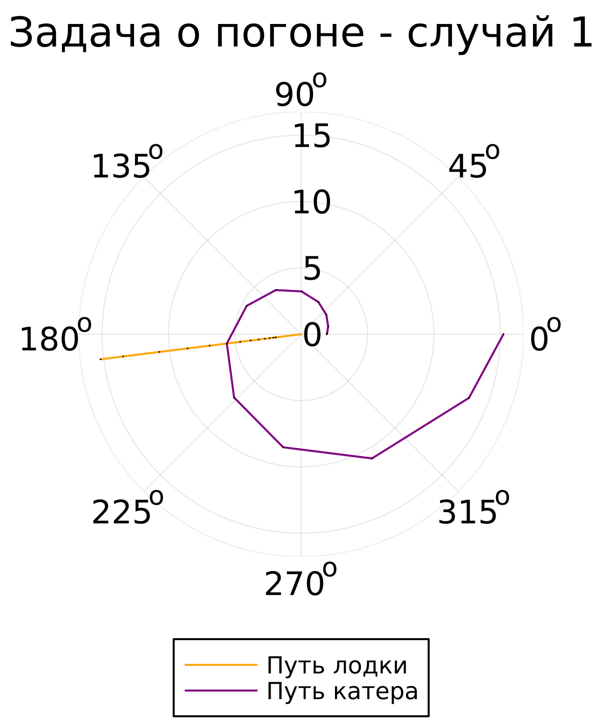

Рис. 2: Рис.5: Первый случай(x - k)

Второй случай:

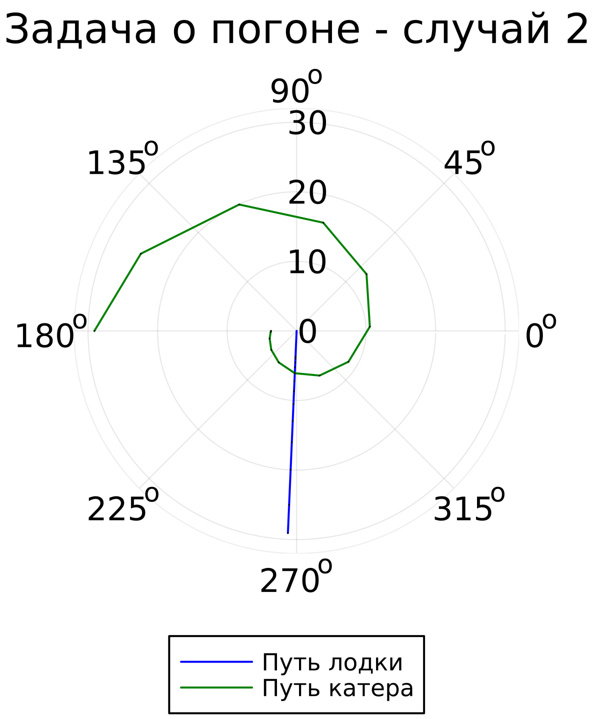

Рис. 3: Рис.6: Второй случай(x + k)

3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки.

Для первого случая это 183° и 6. Для второго - 269° и 5.

Чтобы не было грустно - посмотри на котика.

Рис. 4: Рис.7: Милый котик

Вывод

Мы решили задачу о погоне.