ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет»

На правах рукописи

УДК xxx.xxx

Воронцов Ярослав Александрович

Модели и методы решения задач с нечеткими параметрами и четкими отношениями

Специальность 05.13.18 —

«Математическое моделирование, численные методы, комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.т.н., профессор

Матвеев Михаил Григорьевич

Воронеж 2015

Содержание

Введение

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является построение и исследование моделей учёта нечёткой неопределённости, обеспечивающих требуемые свойства решения различных производственных задач.

Для достижения поставленной цели в работе решались следующие задачи.

1. Анализ существующих методик нечётких вычислений с точки зрения сохранения свойств решения задач.

2. Разработка модели представления нечётких чисел, позволяющей максимально сохранять исходную экспертную информацию и обеспечить требуемые качественные свойства решений (устойчивость, сохранение математических соотношений и т. п.).

3. Разработка методики эффективной численной реализации решения задач с нечёткими параметрами, основанной на подходящих алгебраических структурах и её тестирование на примере задачи сетевого планирования с нечёткими параметрами.

4. Разработка и верификация программного обеспечения, реализующего предложенную модель представления нечётких параметров и методики численного решения задач с нечёткими параметрами.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы исследования операций, теории принятия решений, теории нечётких множеств, мягких вычислений, теории алгебраических структур, теории графов.

При создании программного обеспечения использовались технологии модульного и объектно-ориентированного программирования.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной:

- предложена модификация метода моделирования экспертных числовых оценок, полученных в классе LR-чисел, отличающаяся наличием L-преобразования LR-числа в соответствующие LL/RR-числа;

- предложены эффективные вычислительные методы решения задач с нечёткими параметрами, отличающиеся использованием описанной в работе алгебраической структуры с групповыми свойствами (со свойствами, эквивалентными полю действительных чисел);

- разработан программный комплекс для решения задач с нечёткими параметрами, реализующий предложенные в работе вычислительные методы, модули которого используют стандартные вычислительные операции.

Достоверность научных результатов. Научные положения, теоретические выводы и практические рекомендации обоснованы корректным использованием выбранного математического аппарата и подтверждены результатами вычислительного эксперимента.

Практическая значимость исследования заключается в... Подходы к нечётким вычислениям, предложенные в диссертации, позволяют существенно упростить процедуру расчётов без значительных потерь экспертной информации, а также использовать существующее стандартное программное обеспечение для решения различных производственных задач.

Реализация и внедрение результатов работы.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на ежегодных научных сессиях Воронежского государственного университа и следующих конференциях различного уровня: международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (Воронеж, 2012 г.); международная конференция «Информатика: проблемы, методология, технологии» (Воронеж, 2012–2013 гг.); международный научно-технический семинар «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации» (Алушта, 2013–2014 гг.); научно–техническая конференция студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика» (Москва, 2014).

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 11 научных работ ([30]– [40]), в том числе 4 — в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. В работах, выполненных в соавторстве: в [34] предложено преобразование L и алгебра модифицированных нечётких чисел; в [36] выполнен анализ существующих методов сравнения нечётких чисел и предложен метод сравнения для модифицированных LL/RR-чисел; а в [39] — предложено определение устойчивости задачи нечёткого линейного программирования и разработан алгоритм решения задачи календарно-сетевого планирования и управления с нечёткими параметрами, позволяющий получать устойчивое решение.

Глава 1. Анализ современных моделей и методов решения задач с нечеткими параметрами и четкими отношениями

1.1. Краткие сведения о моделях представления нечеткой неопределенности

1.1.1. Основные понятия теории нечётких множеств

Теория нечётких множеств появилась в 1965 году с выходом статьи Лотфи Заде «Fuzzy Sets» [15]. Понятие нечёткого множества — попытка математической формализации нечёткой информации с целью её использования при построении математических моделей сложных систем [56]. В основе этого понятия лежит представление о том, что элементы некоторого множества обладают каким-то общим свойством в разной степени, и, следовательно, принадлежат этому множеству в различной степени. Ключевая идея, изложенная в статье Заде, расширяет классическое понятие множества, допуская, что функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ некоторого элемента x множеству может принимать любые значения из интервала $[0;1]$, а не только 0 или 1. Само множество в этом случае представляется в виде совокупности пар

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))\,|x \in X\} \tag{1.1}$$

где уже упомянутая функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ характеризует степень, с которой элемент x можно отнести к нечётком множеству $\tilde{A}$. При помощи нечётких множеств можно выразить неточные понятия вроде «низкий дом», «пожилой человек», «много денег», однако это требует задания чёткого множества X, которое обычно называется областью рассуждений, либо универсальным множеством.

В [26, 59] для конечных нечётких множеств применяется следующий символьный способ записи нечётких множеств. Если X – чёткое множество с конечным числом элементов, т.е. $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$, то нечёткое множество $\tilde{A} \subseteq X$ записывается в виде суммы дробей, в числителе которых стоит степень принадлежности элемента множеству, а в знаменателе — его значение, т.е.

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} \tag{1.2}$$

В формуле (1.2) дробь не несёт в себе семантики деления, а всего лишь является другой формой записи пары $(x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i))$. Аналогично, для бесконечного множества X нечёткое подмножество $\tilde{A} \subseteq X$ записывается в форме

$$\tilde{A} = \int_{x} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} dx \tag{1.3}$$

Ещё одним вариантом представления нечётких множеств является т. н. горизонтальная форма [57], т. е. их выражение в виде совокупности чётких подмножеств множества X, каждое из которых называется α–сечением.

Определение 1.1. *α–сечением (срезом, разрезом) нечёткого множества $\tilde{A}$ называется чёткое множество A_α, определяемое в [54, 55, 59] следующим образом*

$$A_\alpha = \{x \in X \,|\mu_{\tilde{A}}(x) \geqslant \alpha\} \tag{1.4}$$

где $\chi(A_\alpha)$ — характеристическая функция, определяемая выражением (1.5):

$$\chi(A_\alpha) = \begin{cases} 1, \mu_{\tilde{A}}(x) \geqslant \alpha; \\ 0, \mu_{\tilde{A}}(x) < \alpha. \end{cases} \tag{1.5}$$

Для α-сечений нечёткого множества справедлива теорема о декомпозиции, которая позволяет не только выполнять разложение нечёткого множества на совокупность чётких, но и синтезировать исходное нечёткое множество из совокупности чётких α-интервалов [49].

Теорема 1.1. *Любое нечёткое множество $\tilde{A}$ можно представить в виде объединения его α–сечений, т.е.*

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} A_\alpha \tag{1.6}$$

Например, для множества $\tilde{A} = \frac{0,1}{1} + \frac{0.4}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.9}{5} + \frac{0.5}{6}$, определённого в пространстве $X = \{1 \cdots 6\}$, декомпозиция по α-уровням выглядит следующим образом:

$$\tilde{A} = \left(\frac{0,1}{1} + \frac{0,1}{2} + \frac{0,1}{3} + \frac{0,1}{4} + \frac{0,1}{5} + \frac{0,1}{6}\right) \bigcup \left(\frac{0,4}{2} + \frac{0,4}{3} + \frac{0,4}{4} + \right.$$
$$\left. + \frac{0,4}{5} + \frac{0,4}{6}\right) \bigcup \left(\frac{0,5}{3} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,5}{5} + \frac{0,5}{6}\right) \bigcup \left(\frac{0,6}{3} + \frac{0,6}{4} + \frac{0,6}{5}\right) \bigcup$$
$$\bigcup \left(\frac{0,9}{4} + \frac{0,9}{5}\right) \bigcup \left(\frac{1}{4}\right)$$

Также для нечёткого множества в [54, 59, 70] вводятся понятия носителя и высоты.

Определение 1.2. *Носителем нечёткого множества $\tilde{A}$ называется чёткое множество $supp\left(\tilde{A}\right)$, определяемое как*

$$supp\left(\tilde{A}\right) = \left\{x \in X \left| \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\right.\right\}. \tag{1.7}$$

Иными словами, носитель является множеством строгого уровня $A_\alpha = \left\{x \in X \left| \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\right.\right\}$ при $\alpha = 0$.

Определение 1.3. *Высотой нечёткого множества $\tilde{A}$ называется величина*

$$h\left(\tilde{A}\right) = \sup_{x \in R} \left(\mu_{\tilde{A}}(x)\right). \tag{1.8}$$

Если высота $h\left(\tilde{A}\right)$ нечёткого множества равна 1, то оно является нормальным; если же $h\left(\tilde{A}\right) < 1$, то множество называется субнормальным.

1.1.2. Операции над нечёткими множествами. Принцип обобщения Заде

Операции над нечёткими множествами можно определить по-разному. При этом нужно учитывать, что нечёткие множества охватывают и множества в обычном смысле, поэтому вводимые операции не должны противоречить уже известным теоретико-множественным операциям. Рассмотрим классические максиминные формулировки объединения, пересечения и дополнения нечётких множеств, приведённые в [26, 49, 55, 56, 59].

Определение 1.4. *Пересечением нечётких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется нечёткое множество $\tilde{C} = \tilde{A}\bigcap\tilde{B}$, функция принадлежности которого*

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \min\left[\mu_{\tilde{A}}(x); \mu_{\tilde{B}}(x)\right] \tag{1.9}$$

для любых $x \in X$.

Определение 1.5. *Объединением нечётких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется нечёткое множество $\tilde{C} = \tilde{A}\bigcup\tilde{B}$, функция принадлежности которого равна*

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \max\left[\mu_{\tilde{A}}(x); \mu_{\tilde{B}}(x)\right] \tag{1.10}$$

для любых $x \in X$.

Определение 1.6. *Дополнением нечёткого множества $\tilde{A} \subseteq X$ называется нечёткое множество $\tilde{C} = \bar{\tilde{A}}$, функция принадлежности которого равна*

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \tag{1.11}$$

для любых $x \in X$.

В тех же источниках [26,49,55,59] предлагаются и альтернативные определения операций пересечения и объединения нечётких множеств, называемые алгебраическим произведением и алгебраической суммой.

Определение 1.7. *Алгебраическим произведением нечётких множеств* $\tilde{A}$ *и* $\tilde{B}$ *называется нечёткое множество* $\tilde{C} = \tilde{A} \,\hat{\cdot}\, \tilde{B}$, *функция принадлежности которого*

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \tag{1.12}$$

для любых $x \in X$.

Определение 1.8. *Алгебраической суммой нечётких множеств* $\tilde{A}$ *и* $\tilde{B}$ *называется нечёткое множество* $\tilde{C} = \tilde{A} \,\hat{+}\, \tilde{B}$, *функция принадлежности которого равна*

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \tag{1.13}$$

для любых $x \in X$.

Как отмечается в [24, 49, 59], максиминные и алгебраические операции над нечёткими множествами обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и отвечают законам де Моргана, идемпотентности и некоторым другим правилам, справедливым для чётких множеств. Если обозначить операции объединения и алгебраической суммы за $\oplus$, а пересечения и алгебраического произведения за $\otimes$, то свойства и законы будут выглядеть следующим образом:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \tilde{B} \oplus \tilde{A};\ \tilde{A} \otimes \tilde{B} = \tilde{B} \otimes \tilde{A};$$

$$\tilde{A} \oplus \left(\tilde{B} \oplus \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \oplus \tilde{B}\right) \oplus \tilde{C};\ \tilde{A} \otimes \left(\tilde{B} \otimes C\right) = \left(\tilde{A} \otimes \tilde{B}\right) \otimes \tilde{C};$$

$$\overline{\tilde{A} \oplus \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \otimes \overline{\tilde{B}};\ \overline{\tilde{A} \otimes \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \oplus \overline{\tilde{B}};$$

$$\tilde{A} \otimes \tilde{A} = \tilde{A};\ \tilde{A} \oplus \tilde{A} = \tilde{A};$$

$$\tilde{A} \otimes \varnothing = \varnothing; \; \tilde{A} \oplus \varnothing = \tilde{A};$$

$$\tilde{A} \otimes X = \tilde{A}; \; \tilde{A} \oplus X = X;$$

$$\overline{\overline{\tilde{A}}} = \tilde{A}.$$

Однако для всех операций не выполняются условие дополнения, т.е.

$$\tilde{A} \oplus \overline{\tilde{A}} \neq X;$$

$$\tilde{A} \otimes \overline{\tilde{A}} \neq \varnothing,$$

а для алгебраических — ещё и свойство дистрибутивности, которое выполняется для операций пересечения и объединения:

$$\tilde{A} \,\widehat{+}\, \left(\tilde{B} \,\widehat{\cdot}\, \tilde{C}\right) \neq \left(\tilde{A} \,\widehat{+}\, \tilde{B}\right) \,\widehat{\cdot}\, \left(\tilde{A} \,\widehat{+}\, \tilde{C}\right);$$

$$\tilde{A} \,\widehat{\cdot}\, \left(\tilde{B} \,\widehat{+}\, \tilde{C}\right) \neq \left(\tilde{A} \,\widehat{\cdot}\, \tilde{B}\right) \,\widehat{+}\, \left(\tilde{A} \,\widehat{\cdot}\, \tilde{C}\right);$$

$$\tilde{A} \bigcup \left(\tilde{B} \bigcap \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \bigcup \tilde{B}\right) \bigcap \left(\tilde{A} \bigcup \tilde{C}\right);$$

$$\tilde{A} \bigcap \left(\tilde{B} \bigcup \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \bigcap \tilde{B}\right) \bigcup \left(\tilde{A} \bigcap \tilde{C}\right).$$

Например, пусть нечёткое множество $\tilde{A}$ задано на носителе $X = [3; 8] \subset N$ совокупностью пар $\tilde{A} = \frac{0,7}{3} + \frac{0,9}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0,2}{8}$. В соответствие с определением дополнения нечёткого множества (1.11)

$$\bar{\tilde{A}} = \frac{0,3}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,1}{5} + \frac{0}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0,8}{8}$$

Пересечение множеств $\tilde{A}$ и $\overline{\tilde{A}}$ является непустым, т. к.

$$\tilde{A} \bigcap \bar{\tilde{A}} = \frac{\min(0,7; 0,3)}{3} + \frac{\min(1; 0)}{4} + \frac{\min(0,9; 0,1)}{5} + \frac{\min(1; 0)}{6} +$$
$$+ \frac{\min(0; 1)}{7} + \frac{\min(0,2; 0,8)}{8} = \frac{0,3}{3} + \frac{0,1}{5} + \frac{0,2}{8}$$

Аналогично, их объединение не даёт множества-носителя X:

$$\tilde{A} \bigcup \bar{\tilde{A}} = \frac{\max(0,7; 0,3)}{3} + \frac{\max(0; 1)}{4} + \frac{\max(0,9; 0,1)}{5} + \frac{\max(1; 0)}{6} +$$
$$+ \frac{\max(0; 1)}{7} + \frac{\max(0,2; 0,8)}{8} = \frac{0,7}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,9}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0,8}{8}$$

Ещё одна фундаментальная операция, которая переносится с чётких множеств на нечёткие — прямое (декартово) произведение. Классическое определение этой операции дано в [46], а в [24, 68] с помощью прямого произведения также вводится понятие нечёткого отношения.

Определение 1.9. *Пусть даны нечёткие множества $\tilde{A}_i \subseteq X_i,\ i = \overline{1,N}$. Декартово произведение нечётких подмножеств $\tilde{A}_i$ определяется как нечёткое подмножество множества $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ с функцией принадлежности*

$$\mu_{\tilde{A}_1 \times \cdots \times \tilde{A}_N}(x_1, \cdots, x_N) = \min\left[\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \cdots, \mu_{\tilde{A}_N}(x_N)\right]. \tag{1.14}$$

Определение 1.10. *Нечётким отношением $\tilde{R}$ на множествах $X_i,\ i = \overline{1,N}$ называется нечёткое подмножество декартова произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, которая показывается степень выполнения отношения между элементами $x_1, x_2, \ldots, x_N$.*

Задание N-арного нечёткого отношения состоит в указании значений функции принадлежности для всех кортежей вида $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Поскольку нечёткие отношения являются нечёткими множествами, над ними определены все вышеупомянутые операции (1.9)–(1.13), дополненные также операцией максиминной композиции отношений. Также для нечётких бинарных отношений справедливы те же свойства (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность), что и для обычных [56, 68].

Принцип обобщения Заде является основополагающим в теории нечётких множеств и позволяет перенести различные математические операции с чётких на нечёткие множества. Его суть состоит в следующем. Пусть дано биективное отображение $f : X \to Y$ из чёткого множества X в чёткое множество Y. Пусть $\tilde{A} \subseteq X$ – нечёткое подмножество, имеющее вид

$$\tilde{A} = \sum_{n} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} \tag{1.15}$$

В этом случае генерируемое отображением f нечёткое множество $\tilde{B} \subseteq Y$ имеет вид

$$\tilde{B} = f\left(\tilde{A}\right) = \sum_{n} \frac{\mu_{\tilde{A}}\left(x_i\right)}{f\left(x_i\right)} \tag{1.16}$$

Если отображение f не является взаимно однозначным, то степень принадлежности элемента к нечёткому множеству $\tilde{B}$ равна максимальной степени принадлежности среди всех элементов исходного множества X, которые отображаются в один и тот же $y \in Y$. В этому случае выражение (1.16) принимает вид

$$\tilde{B} = f\left(\tilde{A}\right) = \sum_{n} \frac{\sup\limits_{j=\overline{1,n}:\ f(x_i)=f(x_j)} \left(\mu_{\tilde{A}}\left(x_j\right)\right)}{f\left(x_i\right)} \tag{1.17}$$

Однако наиболее универсальной и широко употребляемой является следующая формулировка принципа обобщения, данная в [59, 70].

Определение 1.11. *Пусть* $f : X \to Y$ *— чёткое отображение, в котором* $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$*, а* $\tilde{A}_i \subseteq X_i$; $i = \overline{1,N}$ *— нечёткие множества. В этом случае нечёткое множество* $\tilde{B} = f\left(\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_N\right)$ *имеет вид*

$$\tilde{B} = \left\{(y; \mu_{\tilde{B}}\left(y\right)) \left| y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_N\right),\ x_i \in X\ \forall i = \overline{1,N}\right.\right\} \tag{1.18}$$

а его функция принадлежности равна

$$\mu_{\tilde{B}}\left(y\right) = \sup_{\substack{y=f(x_1,\cdots,x_N)\\ x_i \in supp(A_i)}} \min_{i=1\cdots N} \left\{\mu_{\tilde{A}_i}\left(x_i\right)\right\} \tag{1.19}$$

Используя принцип обобщения, вводимый формулами (1.18)–(1.19), можно переносить действие известных арифметических операций на нечёткие множества, а также определять операцию композиции нечётких отношений. Особый интерес представляет перенос арифметических операций на нечёткие подмножества множества действительных чисел $\mathbb{R}$, иначе называемые нечёткими величинами.

1.1.3. Нечёткие числа

Рассмотрим важные определения и свойства, касающиеся нечётких чисел, которые вводятся в работах [54,55,57,59] и широко используются в дальнейших параграфах.

Определение 1.12. *Нечёткое число — разновидность нечёткой величины, функция принадлежности которой* $\mu_{\tilde{A}}(x) : R \to [0;1]$ *обладает следующими свойствами:*

- *кусочная непрерывность;*
- *выпуклость*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; \forall \gamma \in [0;1]$$
$$\mu_{\tilde{A}}(\gamma x_1 + (1-\gamma)x_2) \geqslant \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}; \tag{1.20}$$

- *нормальность*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} (\mu_{\tilde{A}}(x)) = 1. \tag{1.21}$$

Нечёткие числа представляют огромный интерес с точки зрения практической применимости именно ввиду непрерывности функций принадлежности. В [16] упоминаются также нечёткие величины с дискретной функцией принадлежности, при выполнении операций над которыми возникают проблемы, показанные в [59]: результатом арифметических операций, выполненных над произвольными нечёткими величинами согласно принципу обобщения Заде, далеко не всегда будет являться нечёткое число.

Например, пусть даны две нечёткие величины $\tilde{A} = \dfrac{0,5}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{0,3}{4}$ и $\tilde{B} = \dfrac{0,7}{3} + \dfrac{0,9}{5} + \dfrac{0,6}{6}$. Найдём их произведение согласно принципу обобщения (1.18):

$$\tilde{A}\cdot\tilde{B}=\frac{\min(0,5;0,7)}{6}+\frac{\min(0,5;0,9)}{10}+\frac{\max\{\min(0,5;0,6),\min(0,3;0,7)\}}{12}+$$
$$+\frac{\min(1;0,7)}{9}+\frac{\min(1;0,9)}{15}+\frac{\min(1;0,6)}{18}+\frac{\min(0,3;0,9)}{20}+\frac{\min(0,3;0,6)}{24}=$$
$$=\frac{0,5}{6}+\frac{0,7}{9}+\frac{0,5}{10}+\frac{0,5}{12}+\frac{0,9}{15}+\frac{0,6}{18}+\frac{0,3}{20}+\frac{0,3}{24}.$$

Данный пример иллюстрирует, что в результате умножения нечётких чисел с дискретной функцией принадлежности может получиться субнормальное нечёткое множество. Ввиду этого предпочтительнее использовать нечёткие числа, поскольку принадлежность результата арифметических действий классу нечётких чисел гарантируется описанной в [59] теоремой Дюбуа и Прейда

Теорема 1.2. *(Дюбуа и Прейда). Если два нечётких числа имеют непрерывные функции принадлежности, то результатом арифметических операций над ними будут нечёткие числа.*

Арифметические операции над нечёткими числами в общем случае требуют проведения достаточно сложных вычислений. Дюбуа и Прейд в своей работе [43] предложили частную форму представления нечётких чисел с помощью двух функций с определёнными свойствами, которая позволяет существенно упростить нечёткие арифметики.

Определение 1.13. *Нечёткие числа LR-типа — разновидность нечётких чисел, функция принадлежности которых задаётся с помощью двух функций $L(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $R(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таких, что*

$$L(-x)=L(x);$$

$$R(-x)=R(x);$$

$$L(0)=R(0)=1.$$

Кроме того, L и R являются невозрастающими на интервале $[0;+\infty)$ [59].

Функция принадлежности нечёткого LR-числа выглядит следующим образом

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{a}\right); \ x \leqslant m \\ R\left(\dfrac{x-m}{b}\right); \ x > m \end{cases} \tag{1.22}$$

При известной форме функции принадлежности, LR-числа гораздо удобнее записывать как кортеж из трёх параметров $\tilde{A} = (m; a; b)$, называемых модой и левым и правым коэффициентами нечёткости соответственно.

Частным случаем нечётких чисел LR-типа являются треугольные числа, которые широко распространены во всевозможных математических задачах.

Определение 1.14. *Треугольным (триангулярным) нечётким числом называется LR-число $\tilde{A}$, задаваемое тройкой $\langle a, m, b\rangle$, с функцией принадлежности*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-m+a}{a}; \ x \in [m-a; m] \\ \dfrac{m+b-x}{b}; \ x \in (m; m+b] \\ 0; \ \textit{в остальных случаях} \end{cases} \tag{1.23}$$

Если правый (левый) коэффициент нечёткости треугольного числа равен нулю, то такое число, согласно [34], будем называть числом LL (RR)-типа.

Обозначим точки пересечения левой и правой ветвей функции принадлежности с осью Ox как $x^L_{\tilde{A}}$ и $x^R_{\tilde{A}}$ соответственно. В [26] эти точки называются границами функции принадлежности. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} x^L_{\tilde{A}} = m - a \\ x^R_{\tilde{A}} = m + b \end{array}\right. \tag{1.24}$$

и функция принадлежности (1.23) с учётом (1.24) будет выглядеть следующим образом

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{\tilde{A}}^L}{m - x_{\tilde{A}}^L}; \ x \in \left[x_{\tilde{A}}^L; m\right] \\ \dfrac{x - x_{\tilde{A}}^R}{m - x_{\tilde{A}}^R}; \ x \in \left(m; x_{\tilde{A}}^R\right] \\ 0; \ \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{1.25}$$

а само число можно записать в виде тройки $\left\langle x_{\tilde{A}}^L, m, x_{\tilde{A}}^R \right\rangle$.

Согласно теореме о декомпозиции (1.6), для нечёткого треугольного числа $\tilde{A}$ также можно использовать представление в виде совокупности чётких α-интервалов X_α, границы которых определяются как функции параметра $\alpha \in [0; 1]$:

$$\left[\begin{array}{l} x^L(\alpha) = m - a + a\alpha \\ x^R(\alpha) = m + b - b\alpha \end{array} \right. \tag{1.26}$$

Представление числа $\tilde{A}$ в виде объединения интервалов $\left[x^L(\alpha); x^R(\alpha)\right]$, концы которых определяются согласно формулам (1.26), позволяет сохранить неопределённость в интервальной форме.

Используя введённый ранее принцип обобщения Заде, можно расширить четыре арифметические действия на множество нечётких чисел. Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — нечёткие числа с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ и $\mu_{\tilde{B}}(x)$ соответственно, а $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая функция двух действительных переменных. Согласно принципу обобщения Заде, результат $\tilde{C} = g\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right)$ будет определяться следующей функцией принадлежности [54, 55, 59, 70]:

$$\begin{gathered} \mu_{\tilde{C}}(x) = \sup_{g(a,b)=x} \min\left\{\mu_{\tilde{A}}(a); \mu_{\tilde{B}}(b)\right\} \\ a \in supp\left(\tilde{A}\right), \ b \in supp\left(\tilde{B}\right) \end{gathered} \tag{1.27}$$

Если в качестве g берётся одна из арифметических операций, то (1.27) определяет результат арифметической операции над нечёткими числами:

$$\tilde{A} + \tilde{B} \leftrightarrow \sup_{x+y} \min\left(\mu_{\tilde{A}}\left(x\right), \mu_{\tilde{B}}\left(y\right)\right)$$
$$\tilde{A} - \tilde{B} \leftrightarrow \sup_{x-y} \min\left(\mu_{\tilde{A}}\left(x\right), \mu_{\tilde{B}}\left(y\right)\right)$$
$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} \leftrightarrow \sup_{x \cdot y} \min\left(\mu_{\tilde{A}}\left(x\right), \mu_{\tilde{B}}\left(y\right)\right)$$
$$\tilde{A} / \tilde{B} \leftrightarrow \sup_{x/y} \min\left(\mu_{\tilde{A}}\left(x\right), \mu_{\tilde{B}}\left(y\right)\right)$$

Как отмечается в [54, 55, 70], [146], операции сложения и умножения, вводимые с помощью (1.27), обладают следующими свойствами:

1. коммутативность $\tilde{A} + \tilde{B} = \tilde{B} + \tilde{A}$, $\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \tilde{B} \cdot \tilde{A}$;
2. ассоциативность $\tilde{A} + \left(\tilde{B} + \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} + \tilde{B}\right) + \tilde{C}$; $\tilde{A} \cdot \left(\tilde{B} \cdot \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \cdot \tilde{B}\right) \cdot \tilde{C}$;
3. дистрибутивность умножения относительно сложения при совпадении знаков $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$: $\tilde{A} \cdot \left(\tilde{B} + \tilde{C}\right) = \tilde{A} \cdot \tilde{B} + \tilde{A} \cdot \tilde{C}$.

Сравнение нечётких чисел производится как сравнение двух нечётких подмножеств множества $\mathbb{R}$. Очевидно, числа $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ считаются равными тогда и только тогда, когда их функции принадлежности совпадают [47]:

$$\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}\left(x\right) = \mu_{\tilde{B}}\left(x\right). \tag{1.28}$$

Также тривиален случай, когда носители чисел не пересекаются — то нечёткое число, носитель которого расположен правее по оси действительных чисел, будет больше [47]:

$$supp\left(\tilde{A}\right) \bigcap supp\left(\tilde{B}\right) = \varnothing,\ \forall x \in \mathbb{R}\ \mu_{\tilde{A}}\left(x\right) \leqslant \mu_{\tilde{B}}\left(x\right) \Rightarrow \tilde{A} < \tilde{B}. \tag{1.29}$$

В остальных случаях, не описываемых формулами (1.28) и (1.29), числа либо считаются несравнимыми, и в случае близости функций принадлежности друг к другу вычисляется степень равенства множеств [59]

$$E\left(\tilde{A} = \tilde{B}\right) = 1 - \max_{x \in T} \left|\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)\right|;$$
$$T = \left\{x \in X: \ \mu_{\tilde{A}}(x) \neq \mu_{\tilde{B}}(x)\right\},$$

либо производится их сравнение на основании методов одного из семейств, описанных в [4, 36], суть которых в основном сводится к вычислению некоторой оценочной функции и упорядочиванию чисел на основании её значений.

Классическим вариантом такой оценочной функции является индекс ранжирования. Для нечётких чисел, удовлетворяющих условию $supp\left(\tilde{A}\right) \bigcap supp\left(\tilde{B}\right) \neq \varnothing$, вычисляется индекс ражирования $H\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right)$, конкретный вид которого зависит от вида сравниваемых чисел [55]. Значение индекса позволяет вычислить степень, с которой одно из чисел больше/меньше другого, а результатом сравнения является нечёткое подмножество множества *{да, нет}*. Таким образом, результат сравнения нечётких чисел также может быть нечётким.

1.2. Классификация нечетких моделей

Модели статических и динамических систем, построение, использование и анализ которых базируется на положениях теории нечётких множеств, называют нечёткими моделями [25]. Многие исследователи отмечают тот факт, что нечёткие модели могут рассматриваться как обобщение интервальных, которые, в свою очередь, обобщают известные чёткие модели. К примеру, рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$, которую с точки зрения дискретной математики можно представить как отношение на декартовом произведении $X \times Y$. Вне зависимости от типа модели, вычисление выходного значения y для заданного значения входного параметра x происходит в три этапа [25]:

- задание значения входной переменной $x \in X$;

- нахождение пересечения x с отношением f;
- проецирование пересечения x и f на Y.

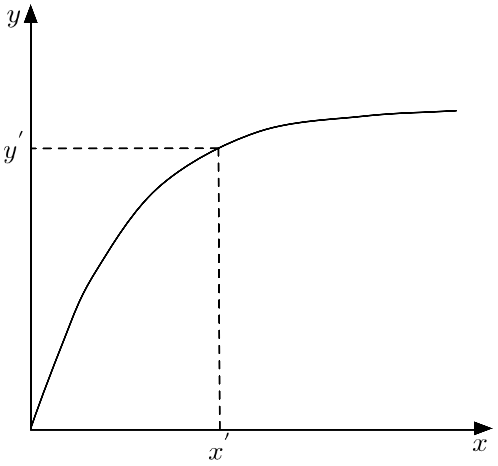
Однако результаты во всех случаях различны по своему роду. На рис. 1.1 приведены результаты вычислений для чёткой, интервальной и нечёткой функций при различных видах аргументов.

На основании этого примера можно выделить взаимосвязи между описаниями и переменными чётких и нечётких моделей, а также математические методы, которые применимы для описания моделей. Выделенные взаимосвязи изображены в таблице 1.1.

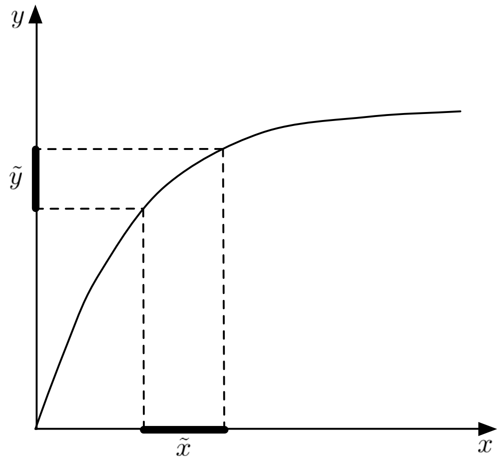
Таблица 1.1: Взаимосвязи между описаниями и переменными чётких и нечётких моделей

Описание модели	*Входные данные*	*Выходные данные*	*Математические методы*
Чёткое	Чёткие	Чёткие	Функциональный анализ, линейная алгебра и т.д.
Чёткое	Нечёткие	Нечёткие	Принцип обобщения Заде
Чёткое	Нечёткие	Чёткие	Нечёткие модели и вычисления
Нечёткое	Чёткие/ Нечёткие	Нечёткое	Нечёткие модели и вычисления

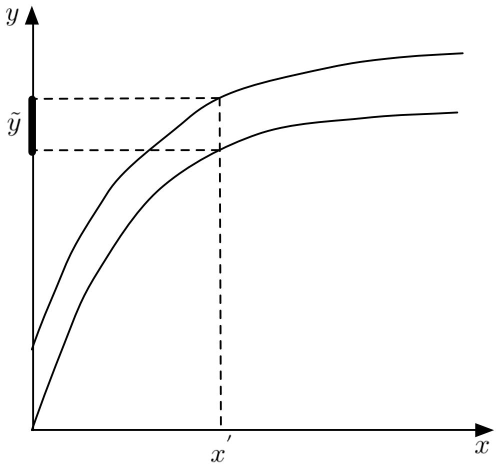
Очевидно, что нечёткое моделирование не подменяет собой другие методологии моделирования сложных систем, в которых существенные зависимости выражены настолько хорошо, что они могут быть выражены в числах или символах, получающих в итоге численные оценки [25]. Нечёткие модели скорее представляют необходимый инструмент для исследования как отдель-



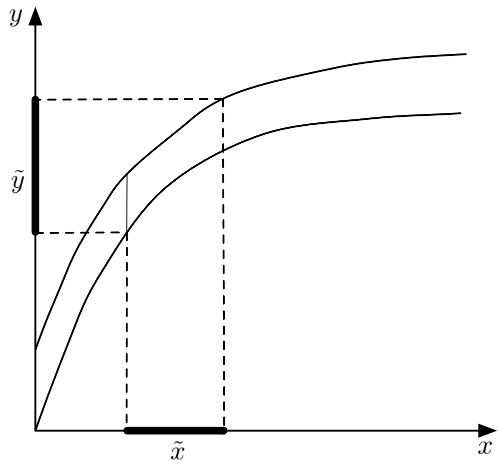
(a) Чёткая функция, чёткий аргумент



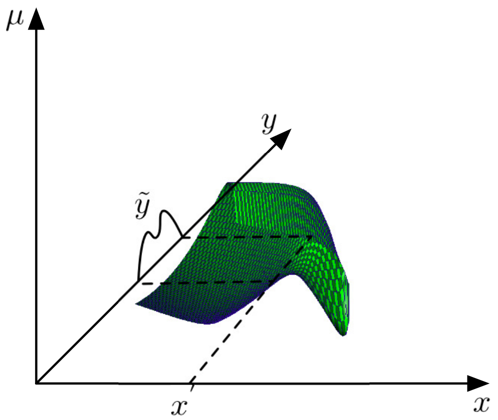
(b) Чёткая функция, нечёткий/интервальный аргумент



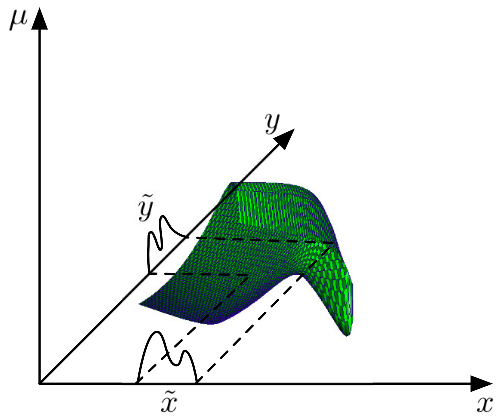
(c) Интервальная функция, чёткий аргумент



(d) Интервальная функция, интервальный/нечёткий аргумент



(e) Нечёткая функция, чёткий аргумент



(f) Нечёткая функция, интервальный/нечёткий аргумент

Рисунок 1.1: Результаты вычислений для чётких, интервальных и нечётких функций при чётких и нечётких параметрах ных аспектов, так и системы в целом на различных этапах её анализа в случае доминирования качественных элементов над количественными. Об этом же говорится и в [49, 55] — теория нечётких множеств не призвана конкурировать с теорией вероятности и статистическими методами, она заполняет пробел в области структуризованной неопределённости там, где нельзя корректно применять статистику и вероятности ввиду неизвестности распределения величин или малого размера статистической выборки.

В [25] предложена оригинальная классификация подходов к созданию нечётких моделей в зависимости от того, в какой момент моделирования используется теория нечётких множеств, а также соответствующие ей сферы применения нечётких моделей. Рассмотрим данную классификацию подробнее: нечёткость может применяться

1. при описании системы — речь идёт об информационной неопределённости [54, 55]. Система описывается моделями нечёткой логики: продукционными/реляционными/функциональными. Обычно такой подход применяется, когда имеются неполные или неопределённые знания об исследуемом объекте, а их дополнение является либо невозможным, либо нецелесообразным, либо значительная часть информации об объекте является качественной и не выражается с помощью известных математических зависимостей, но может быть описана системой предпочтений на естественном языке в форме правил «если-то»;

2. при задании параметров системы — в традиционной, чёткой модели системы используются нечёткие параметры (например, нечёткие коэффициенты обычных алгебраических или дифференциальных уравнений). Данный подход оправдывает себя в ситуации полной определённости модели, когда необходимо учесть присущую параметрам неопределённость, а традиционный вероятностный подход неприменим ввиду того,

что неоднозначность параметров не является физической согласно классификации, используемой в [55]. В таких ситуациях приходится прибегать к услугам экспертов, которые выражают своё мнение в виде качественных оценок, а принадлежность объектов задаётся с помощью лингвистических операторов («много», «мало», «около» и т.п.);

3. нечёткость при задании входов, выходов и состояний системы — в традиционной модели системы с чёткими или нечёткими параметрами могут применяться нечёткие переменные. Этот подход в основном применяется при идентификации динамических или нелинейных систем на основе их входных и выходных параметров и позволяет при наличии обучающей выборки аппроксимировать искомые функции или измеренные данные с наперёд заданной точностью;

4. комбинированные модели — создаются на основе совмещения двух или более подходов.

Если рассматривать описанную выше классификацию подходов к синтезу нечётких моделей через призму выбора, который являются неотъемлемой частью моделирования как целенаправленного процесса, и языков его описания, то можно заметить, как модель и используемый в ней язык выбора проецируются на два основных раздела современной нечёткой математики — нечёткий логический вывод и алгебры нечётких множеств и чисел. К настоящему моменту сложилось три основных языка описания выбора — язык функций выбора, язык бинарных отношений и критериальный язык [45], которые позволяют говорить об одном и том же объекте или явлении с разной степенью общности. Два последних языка — язык бинарных отношений и критериальный язык — достаточно хорошо изучены и отражены в рамках теории нечётких множеств. Схематически взаимосвязи между сферами нечёткого моделирования и языками выбора изображены на рис. 1.2.

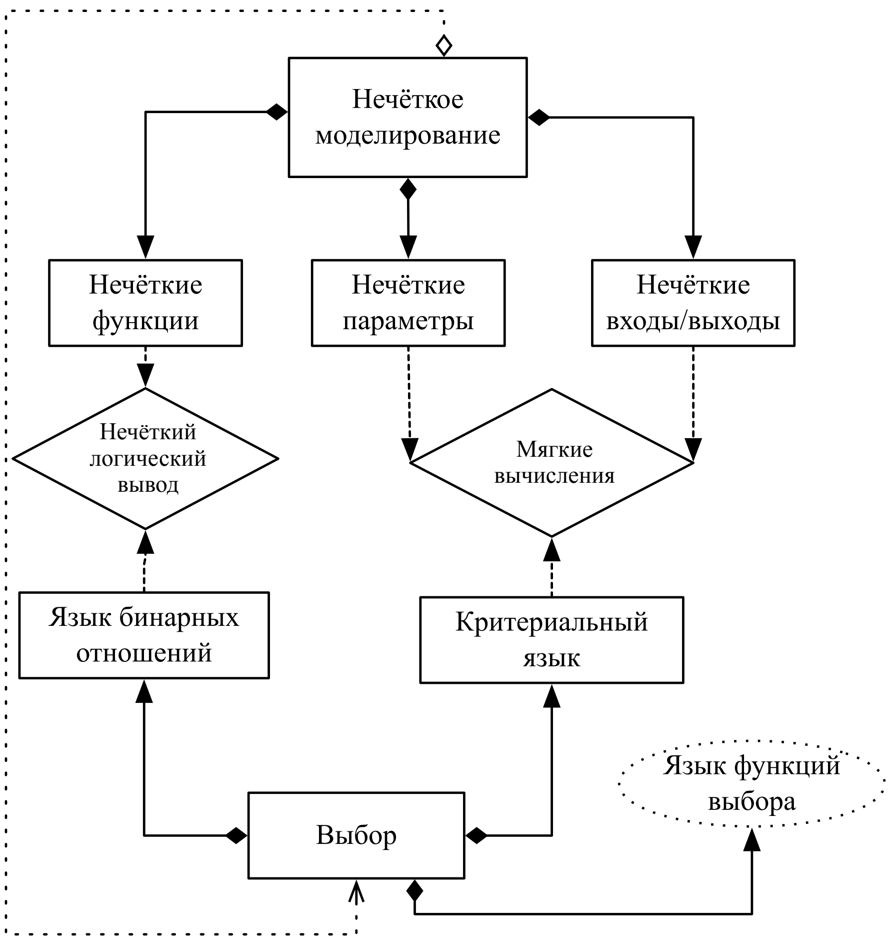


Рисунок 1.2: Связь между языками описания выбора и нечётким моделированием

Язык бинарных отношений является более общим и основывается на том факте, что в реальности дать объективную оценку той или иной альтернативе затруднительно или невозможно, однако, при рассмотрении альтернатив в паре, можно указать более или менее предпочтительную. Основные предположения этого языка выбора сводятся к следующим:

- отдельная альтернатива не оценивается;
- для каждой пары альтернатив некоторым образом можно установить, что одна из них предпочтительнее другой, либо они равноценны или несравнимы;
- отношение предпочтения внутри любой пары альтернатив не зависит от остальных альтернатив, предъявленных к выбору.

Нечёткие модели первого типа, в которых нечёткость присутствует на этапе описания системы [45], как раз используют язык бинарных отношений. В рамках нечёткой математики, этот язык проецируется на нечёткий логический вывод и основанное на нём нечёткое управление. Основополагающими для логического вывода являются понятия нечёткого отношения, лингвистической переменной и нечёткой импликации, на которой основаны правила логического вывода.

Определение 1.15. *Лингвистической переменной называется переменная, значения которой представляют слова или суждения на естественном языке. С точки зрения нечёткой математики, это кортеж* $\{\beta, T, X, G, M\}$*, где* β *— название нечёткой переменной;* T *— базовое терм-множество лингвистической переменной, каждый элемент которого (терм) представляется как нечеткое множество на универсальном множестве* X*;* G *— синтаксические правила, часто задаваемые в виде грамматики, для порождения названий термов; — семантические правила, задающие функции принадлежности нечетких термов, порожденных синтаксическими правилами* G.

Определение 1.16. *Нечёткая импликация является нечётким отношением* $\tilde{R} \subseteq X \times Y$*, простейшая форма которого выражается в виде правила «если-то» [57]*

$$IF\left(x = \tilde{A}\right) THEN\left(y = \tilde{B}\right). \tag{1.30}$$

Нечёткая импликация обозначается как $\tilde{A} \to \tilde{B}$ *и, как любое другое нечёткое отношение, задаётся функцией принадлежности.*

В [57, 59] описаны несколько применяемых на практике операторов импликации, задаваемых различными функциями принадлежности (например, операторы Мамдани, Лукасевича, Ларсена, Гёделя, Ягера, Заде).

На основании нечётких переменных и правил импликации строятся модели нечёткого логического вывода и управления. Типовая модель включает в себя четыре основных блока, изображённые на рис. 1.3 — блок фаззификации, который сопоставляет чётким входным значениям нечёткие множества; блок нечёткого логического вывода, опирающийся на базу правил, хранящуюся в виде нечётких импликаций «если-то»; блок дефаззификации, который на основании результирующей функции принадлежности формирует чёткое выходное значение с помощью одного из методов дефаззификации (центра тяжести, первого/среднего/последнего максимума, центра сумм и др.) [57, 59]. Наиболее популярными моделями являются нечёткие контроллеры Такаги-Сугено и Мамдани, применяемые, в частности, в качестве нечётких регуляторов в промышленной и бытовой электронике.

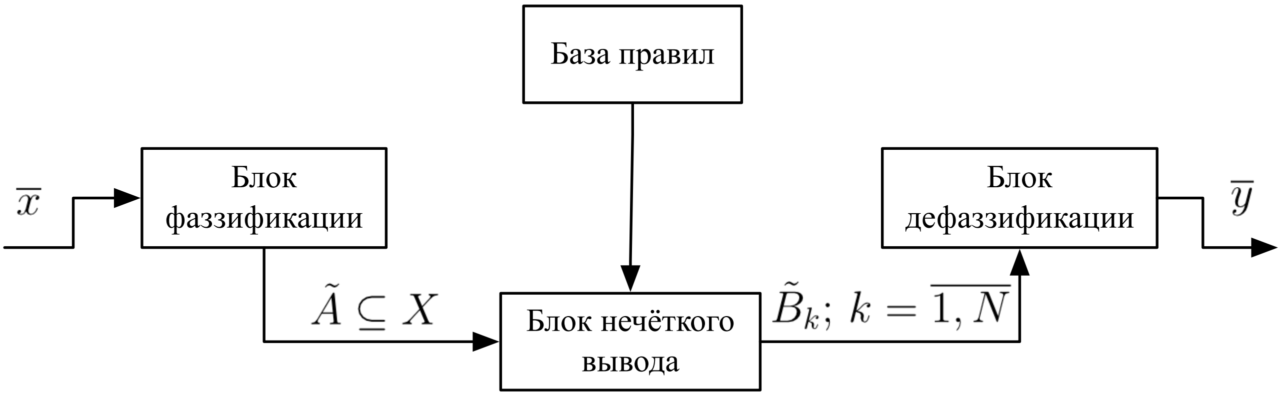


Рисунок 1.3: Общая схема системы нечёткого управления

Достоинства и недостатки, а также рекомендации по применению нечёткого логического вывода и нечёткого управления хорошо описаны в [10]. Согласно [10], использование моделей первого типа рекомендуется для моделирования очень сложных процессов, когда не существует простой математической модели, для нелинейных процессов высоких порядков и для обработки лингвистически сформулированных экспертных знаний. Ещё одним преимуществом является наличие нескольких подходов к проверке моделей на устойчивость [57]. Эти же модели не рекомендуется применять, если приемлемый результат может быть получен с помощью общей теории управления, либо существует формализованная и адекватная математическая модель, либо проблема не разрешима методами современной математики. Также модели нечёткого управления страдают от «проклятия размерности» — с увеличением числа входов лавинообразно нарастает число необходимых правил для вывода [57]. Нечёткому логическому выводу и управлению посвящено множество книг и публикаций, однако подробное рассмотрение моделей первого вида выходит за рамки данной диссертации.

Второй язык, более простой и узкий, однако и более изученный — критериальный. Он основывается на предположении, что каждую отдельно взятую альтернативу возможно оценить конкретным числом, называемым значением критерия. Сравнение альтернатив в таком случае сводится к сравнению соответствующих им числовых значений. Пусть $x \in X$ - некоторая альтернатива из множества альтернатив X. Критерием будем называть функцию $q\left(x\right);\ x \in X$, обладающую тем свойством, что если альтернатива x_1 предпочтительнее x_2, то $q\left(x_1\right) > q\left(x_2\right)$ и наоборот. Естественно считать, что наилучшей альтернативой x^* считается та, значение критерия которой максимально:

$$x^* = \arg\max_i \left\{q\left(x_i\right)\right\}$$

Задача отыскания x^*, достаточно простая по постановке, часто оказывается весьма сложной в решении, поскольку зависит от характера множества X и критерия $q\left(x\right)$.

Нечёткие модели второго и третьего типа, в которых нечёткими являются либо их параметры, либо состояния и входные и выходные данные, описываются с помощью критериального языка. Этот язык в нечёткой математике соответствует т. н. «мягким вычислениям» — нечётким множествам, нечётким числам и определённым на них алгебрам. Как уже упоминалось ранее, описание с помощью нечётких множеств имеет существенные преимущества перед языком теории вероятностей в том случае, когда имеется лингвистическая неоднозначность в смысле полисемии [55], и оценки получаются с помощью опроса экспертов. Известно, что люди в большинстве своём неправильно оценивают вероятности (особенно большие и малые), поэтому требовать от экспертов, коими обычно являются специалисты в конкретных предметных областях, а не математики, оценок в форме распределения вероятностей зачастую невозможно [42]. Кроме того, описание в форме нечётких множеств гораздо менее требовательно к квалификации экспертов и зачастую гораздо точнее отражает суть исследуемого объекта или явления.

Данная диссертация посвящена исследованию способов представления нечёткости в моделях второго типа, в которых отношения и функции чёткие, а параметры заданы нечёткими числами. Требования, выдвигаемые к алгебраическим структурам над множеством нечётких чисел, которые применяются в нечётких моделях второго типа, изложены в следующем параграфе.

1.3. Требования к алгебраической системе для нечёткого моделирования

Для создания моделей с использованием нечётких параметров необходимо уметь выполнять различные операции над нечёткими числами, а также сравнивать их между собой. Основной проблемой является подбор адекватной структуры и подходящей алгебры для множества нечётких чисел либо численных методов решения таких моделей. В отечественной и зарубежной литературе предложено множество различных алгебр и алгебраических систем на множестве нечётких чисел, которые различаются с точки зрения свойств их операций. Кратко рассмотрим основные понятия дискретной математики, касающиеся алгебр и алгебраических систем для того, чтобы в дальнейшем применять их к анализу существующих алгебр нечётких чисел и сформировать критерии оценки «идеальной» алгебраической системы с точки зрения моделирования.

Предметом рассмотрения абстрактной алгебры являются произвольные множества с заданными на них операциями, при этом природа этих множеств и операций может существенно отличаться от привычных числовых множеств и известных операций над числами [23].

Определение 1.17. *Пусть A – произвольное непустое множество, $n \in \mathbb{N}$. Любое отображение*

$$f : A^N \to A$$

называют n-арной операцией на множестве A.

В алгебрах наиболее важными и исследуемыми являются бинарные $(n = 2)$ операции. Если $*$ — некая абстрактная бинарная операция, то, согласно [23], она является

- коммутативной, если $\forall x, y \in A \; x * y = y * x$;
- ассоциативной, если $\forall x, y, z \in A \; x * (y * z) = (x * y) * z$;
- идемпотентной, если $\forall x \in A \; x * x = x$.

Элемент 0 множества A называют нулём относительно операции $*$, если $\forall x \in A \; 0 * x = 0, \; x * 0 = 0$. Нуль в множестве A единственен. В самом деле, если предположить существование другого нулевого элемента $0'$ относительно операции $*$, то, согласно определению нуля

$$0 * 0' = 0, \; 0' * 0 = 0',$$

откуда следует равенство $0 = 0'$.

Элемент 1 множества A называют нейтральным относительно операции $*$, если $\forall x \in A \; 1 * x = x, \; x * 1 = 1$. Нейтральный элемент в множестве A также единственен, доказательство этого факта аналогично доказательству единственности нулевого элемента.

В [23, 50] даётся следующее определение алгебры и алгебраической системы.

Определение 1.18. *Алгебра считается заданной, если задано некоторое множество D, называемое носителем алгебры, и некоторое множество операций Ω на D, называемое сигнатурой данной алгебры. Алгебру можно записать как упорядоченную пару множеств (D, Ω). Алгебра (D, Ω), дополненная множеством отношений Π на D, называется алгебраической системы и обозначается (D, Ω, Π).*

Понятие алгебры является частным случаем алгебраической системы с пустым множеством отношений. Другим предельным случаем алгебраической системы является модель — множество, на котором заданы только отношения.

Стоит отметить, что операции, включенные в сигнатуру, задаются как некоторые специальные отображения. При этом не оговариваются свойства, которыми операции обладают на носителе — они обычно указываются дополнительно. Кратко рассмотрим основные виды алгебр, описанные в [23, 28, 50]. Вначале дадим определения для алгебр, сигнатура которых состоит из одной абстрактной бинарной операции $*$.

Группоидом называют любую алгебру $(D, *)$, сигнатура которой состоит из одной бинарной операции, на которую не наложено никаких ограничений. Если же операция $*$ ассоциативна, то группоид является полугруппой. Отдельно выделяют коммутативные полугруппы — полугруппы, в которых операция $*$ обладает свойством коммутативности, а также полурешётки — коммутативные полугруппы, операция которых идемпотентна: $\forall x \in D\ x * x = x$.

Моноидом называется такая полугруппа, относительно операции которой существует нейтральный элемент. Такой элемент называется единицей моноида $(D, *)$ и обозначается как 1. Для моноида справедливы следующие свойства:

- $\forall x, y, z \in D \quad x * (y * z) = (x * y) * z$;

- $\forall x \in D \quad x * 1 = 1 * x = x$.

Если в моноиде $\forall x \in D\ \exists x^{-1} \in D$, называемый обратным, такой, что $x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1$, то моноид является группой. В [23, 28, 50] доказывается теорема о единственности обратного элемента для каждого $x \in D$. Если же операция $*$ коммутативна, то группа называется абелевой. Для абелевой группы свойства моноида дополняются ещё двумя свойствами:

- $\forall x, y \in D \quad x * y = y * x$;

- $\forall x \in D \quad x * x^{-1} = 1$.

Для наглядности записи, в сигнатуру алгебры допускается включать нейтральные относительно операции элементы, поскольку, как указано в [23], они являются нульарной операцией. В этом случае моноид можно записать как совокупность $(D, *, 1)$.

Перейдём к рассмотрению алгебр с сигнатурой, состоящей из двух бинарных операций. Решёткой называют такую алгебру $(D, \bigvee, \bigwedge)$, что каждая из алгебр $(D, \bigvee)$ и $(D, \bigwedge)$ является полурешёткой и справедливы тождества поглощения:

$$\forall x, y \in D: \ x \bigvee \left(x \bigwedge y \right) = x, \ x \bigwedge \left(x \bigvee y \right) = x.$$

Операции $\bigvee$ и $\bigwedge$ называют решёточным объединением и пересечением соответственно. Если для элементов решётки выполняется свойство дистрибутивности, то она является дистрибутивной, а если на дистрибутивной решётке введена операция дополнения и для неё выполняются законы де Моргана и свойство $\forall x \in D\ \overline{\overline{x}} = x$, то алгебра является дистрибутивной решёткой с дополнениями [24]. В [49, 54] отмечается, что теоретико-множественные операции над нечёткими множествами образуют дистрибутивную решётку.

Кольцом называют алгебру $(D, +, \cdot, 1, 0)$, такую, что алгебра $(D, +, 0)$ является абелевой группой, алгебра $(D, \cdot, 1)$ является моноидом, а операция умножения кольца $(\cdot)$ дистрибутивна относительно операции сложения кольца $(+)$, т.е. справедливо равенство:

$$\forall x, y, z \in D: \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Элементы 0 и 1 называют нулём и единицей кольца соответственно. Если операция умножения коммутативна, то кольцо является коммутативным.

Если же в кольце алгебра всех ненулевых по умножению элементов кольца образует группу, то кольцо называется телом. Коммутативное же тело является полем. Другими словами, поле есть алгебра $(D, +, \cdot, 0, 1)$, сигнатура которой состоит из двух бинарных и двух нульарных операций, для которых должны выполняться следующие тождества [23, 50, 70]:

1. ассоциативность по сложению: $\forall x, y, z \in D: \ x + (y + z) = (x + y) + z$;
2. коммутативность по сложению: $\forall x, y \in D: \ x + y = y + x$;
3. наличие нуля (нейтрального по сложению элемента): $\exists 0 \in D: \ \forall x \in D \ \ x + 0 = x$;
4. существование противоположного элемента:$\forall x \in D \ \exists -x \in D: \ x + (-x) = 0$;
5. ассоциативность по умножению: $\forall x, y, z \in D: \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
6. коммутативность по умножению: $\forall x, y \in D: \ x \cdot y = y \cdot x$;
7. наличие единицы (нейтрального по умножению элемента): $\exists 1: \ \forall x \in D: \ x \cdot 1 = x$;
8. существование обратного элемента для ненулевых элементов: $\forall x \in D \setminus \{0\} \ \ \exists\, x^{-1}: \ \ x \cdot x^{-1} = 1$;

9. дистрибутивность умножения относительно сложения: $\forall x, y, z \in D : x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$.

В чётких моделях в качестве параметров используются элементы множества действительных чисел $\mathbb{R}$, на котором определена алгебра действительных чисел, являющаяся по своей структуре полем. Для того, чтобы нечёткие числа можно было применять в качестве параметров чётких задач, алгебра, применяемая к ним, также должна быть полем. Например, при решении алгебраических или дифференциальных уравнений необходимым условием четкого равенства является наличие групповых свойств операций над нечеткими числами. Однако в моделировании, помимо выполнения операций над численными величинами, требуется уметь сравнивать эти величины между собой. Поскольку на множестве действительных чисел определено отношение линейного порядка «меньше или равно», логичным является требование установления линейного порядка и на множестве нечётких чисел.

Очевидно, что алгебра, основанная на арифметических операциях, введённых в п. 1.3, не является ни полем, ни кольцом, а псевдорешёткой [49]. Помимо доказательства невыполнения свойства дистрибутивности, в [14, 54, 55, 70] показывается, что не существует истинно противоположного и обратного элементов, т. е. справедливы выражения

$$\tilde{A} + \left(-\tilde{A}\right) \neq 0; \tag{1.31}$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{A}^{-1} \neq 1. \tag{1.32}$$

Авторы [59] отмечают, что ввиду (1.31) и (1.32), уравнения и системы уравнений с нечёткими коэффициентами неразрешимы с помощью метода исключения, поскольку нарушается четкая тождественность уравнения после подстановки нечеткого решения. Схожие выводы сделаны в [60] — любые вычислительные операции над нечеткими числами могут приводить к нарушению естественных отношений (например, операция вычитания с равными нечеткими операндами не приводит к нулю, уже упоминавшееся отсутствие баланса в уравнениях и т.п.). В связи с этим возникает проблема выбора модели представления нечеткой числовой информации, которая при сохранении основных исходных свойств экспертных оценок обеспечивает возможность построения алгебры нечетких чисел, эквивалентной полю действительных чисел.

Ещё одним недостатком классической нечёткой арифметики является тот факт, что функция принадлежности результата определяется на максимально широком носителе, что при обеспечении математической строгости завышает степень неопределенности [44]. В [70] также отмечается, что степень неопределённости зависит не только от длины носителя числа, но и от его положения на числовой оси. Поэтому к модели представления нечётких чисел и к определяемой на них алгебре выдвигается требование ограничения роста неопределенности и независимости степени размытости результата операций от расположения операндов на числовой оси.

Для установления линейного порядка на множестве нечётких чисел требуется определить отношение Q на множестве нечётких чисел F, которое обладает свойствами рефлексивности $\forall \tilde{X} \in F: \ \tilde{X} Q \tilde{X}$, антисимметричности $\forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in F: \ \tilde{X} Q \tilde{Y} = \tilde{Y} Q \tilde{X} \Rightarrow \tilde{X} = \tilde{Y}$ и транзитивности $\forall \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in F:$ $\tilde{X} Q \tilde{Y} \bigwedge \tilde{Y} Q \tilde{Z} \Rightarrow \tilde{X} Q \tilde{Z}$, и при этом любые элементы $\tilde{X}, \tilde{Y} \in F$ сравнимы [36]. Очевидно, что способ сравнения с помощью индексов ранжирования, описанный в п. 1.3, даёт нечёткий результат сравнения и непригоден для определения отношения Q. Исследования различных способов установления линейного порядка, проведённые в [36], показали, что большинство методов сравнения нечётких чисел либо не решают проблему существования несравнимых чисел (теоретико-множественные и α-уровневые методы [4]), либо решают её искусственным образом (интегральные и метрические методы), вводя дополнительные оценочные функции (метод α-взвешенного сравнения [5]) и при этом приводя к противоречивым результатам (центроидный метод [11] и метод построения максимизирующей и минимизирующей точек [1]). Многообразие методов, сложности вычислений и неочевидные моменты в сравнении нечётких величин наводят на мысль о том, что линейный порядок должен обеспечиваться выбором подходящей модели представления нечётких чисел в рамках соответствующей алгебраической системы.

Наконец, при нечётком моделировании возникают ещё две проблемы, не упомянутые ранее. Во-первых, это проблема создания специфического программного обеспечения для каждой решаемой задачи [65], поскольку при моделировании могут использоваться различные способы представления нечётких величин и их сравнения. Каждый новый метод вычислений и новое представление нечётких чисел обычно приводит к необходимости написания новых модулей ПО, при том, что сама постановка задачи и алгоритм решения не меняются. Во-вторых, это проблема устойчивости результата, возникающая, например, в задачах линейного программирования с нечёткими коэффициентами. Необходимо выбрать такие условия устойчивости, которые можно было бы использовать непосредственно в алгоритме решения задачи. Более того, в идеальном случае, модель представления нечеткой числовой информации должна позволять параметрически управлять устойчивостью решения.

Таким образом, к алгебраической системе, которую можно использовать в моделях с чёткими отношениями и нечёткими параметрами, выдвигаются следующие требования:

- ограничение роста неопределенности результатов обработки нечеткой информации;
- сохранение чётких отношений в модельных уравнениях при подстановке данных;

- возможность представления линейного порядка на множестве нечётких чисел;
- возможность использования стандартных программных средств реализации численных методов решений;
- возможность управления устойчивостью решения решаемой задачи.

1.4. Цель и задачи исследования

Проведённый анализ нечётких методов моделирования и классических моделей представления нечёткости показал, что они не позволяют применять хорошо изученные чёткие методы и модели в задачах с нечёткими параметрами и не гарантируют обеспечение требуемых свойств решения — устойчивости, непротиворечивости естественным математическим отношениям, ограничения расширения неопределенности. Успешное решение задач моделирования с нечёткими параметрами и чёткими отношениями возможно при создании и применении методики нечётких вычислений, которая, с одной стороны, обеспечивала бы требуемые свойства, а с другой —простоту решения, позволяющую использовать классические методы.

Целью диссертационной работы является построение и исследование моделей учёта нечёткой неопределённости, обеспечивающих требуемые свойства решения различных производственных задач.

Для достижения поставленной цели в работе решались следующие задачи.

1. Анализ существующих методик нечётких вычислений с точки зрения сохранения свойств решения задач.
2. Разработка модели представления нечётких чисел, позволяющей максимально сохранять исходную экспертную информацию и обеспечить тре-

буемые качественные свойства решений (устойчивость, сохранение математических соотношений и т. п.).

3. Разработка методики эффективной численной реализации решения задач с нечёткими параметрами, основанной на подходящих алгебраических структурах и её тестирование на примере задачи сетевого планирования с нечёткими параметрами.

4. Разработка и верификация программного обеспечения, реализущего предложенную модель представления нечётких параметров и методики численного решения задач с нечёткими параметрами.

Выводы по первой главе:

1. введены основные понятия теории нечётких множеств. Описаны актуальные модели представления нечёткой информации — нечёткие множества и нечёткие числа, определены основные операции над ними;

2. произведена классификация нечётких моделей в зависимости от этапа применения нечёткой математики и от применяемого в них языка описания выбора. Кратко описаны модели, использующие нечёткий логический вывод, перечислены их достоинства и недостатки. В качестве исследуемых выбраны модели, использующие чёткие отношения и нечёткие параметры;

3. рассмотрены основные типы абстрактных алгебр и их проекция на нечёткие вычисления и показаны недостатки классических подходов к нечётким вычислениям;

4. сформулированы требования к алгебраической системе, которая необходима для решения задач второго типа с нечёткими параметрами и

чёткими отношениями — устойчивость решения, непротиворечивость естественным математическим отношениям, ограничение расширения неопределенности;

5. определены цель и задачи исследования.

Глава 2. Методы моделирования и обработки нечетких числовых величин

2.1. Анализ существующих алгебр нечётких чисел

Модификация нечетких чисел с помощью L-преобразования, доказательства свойств L- преобразования и следствия.

Почему числа должны быть асимметричными – основной use case для нечётких параметров это определение рисков (!!!) С точки зрения оценки рисков, симметричное число не несёт в себе никакой информации, поскольку позитивный и негативный исходы «равновероятны» (по идее, такое число можно заменить симметричным относительно матожидания распределением). Риск предполагает только негативный исход, и тому эксперту, который будет формировать оценки, необходимо это учитывать. Таким образом, ответственность за результаты частично переносится на экспертов. Предлагаемая в данном исследовании методика решения будет работать и на симметричных числах, однако она будет эквивалентна в плане решения уже известным чётким задачам с чёткими параметрами (это обобщение/расширение обычной четкой арифметики).

Построение алгебры модифицированных чисел, введение нуля и единицы, операций, доказательства групповых свойств. Иллюстрация выполнению четких отношений равенства при решении уравнений. Иллюстрация ограничения роста неопределенности результата. Упоминание о двухкомпонентных нечетких числах как возможной альтернативе, когда любые потери экспертной информации недопустимы.

2.1.1. Вычисления с использованием интервальной нечёткости

Как указано в [26, 44, 58], алгебры, основанные на принципе обобщения Заде, обладают существенным недостатком — неэффективными промежуточными вычислениями, необходимыми для получения функции принадлежности результата. Поскольку для нечётких множеств справедлива теорема о декомпозиции, то для решения практических задач, обычная нечёткость может быть сведена к интервальной, а операции над числами – к соответствующим операциям над их α-сечениями. В [26] предлагается выполнить дискретизацию непрерывного нечёткого числа по конечному числу α-уровней $\alpha_i; i = \overline{1,k}$, причём $\alpha_1 = 0$, $\alpha_k = 1$. Нечёткое число будет представлено совокупностью интервалов $\bigcup\limits_{i=1}^{k} [x_{i1}; x_{i2}]_{\alpha_i}$, над которыми можно совершать некоторые операции.

В статье [51] описывается алгебра для интервалов вида $\tilde{x} = [x_1; x_2]\,;\ x_1 \le x_2;\ x_1, x_2 \in \mathbb{R};\ \tilde{x} \in X$. Произвольная интервальная функция $F(\tilde{x}, \tilde{y}, ..., \tilde{z})$ определяется с помощью сопоставленной ей чёткой функции $f(x, y, \ldots, z)$, $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$, $\ldots z \in \tilde{z}$ следующим образом:

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}, ..., \tilde{z}) = \{f(x, y, ..., z)\,|x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}, ..., z \in \tilde{z}\} \tag{2.1}$$

В соответствие с определением (2.1), автор вводит конкретные алгебраические операции для интервалов:

- сложение $\tilde{v} = \tilde{x} + \tilde{y} = \{(x + y)\,|x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}\} = [x_1 + y_1; x_2 + y_2]$;
- вычитание $\tilde{v} = \tilde{x} - \tilde{y} = \{(x - y)\,|x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}\} = [x_1 - y_2; x_2 - y_1]$;
- умножение на число: $\tilde{v} = k\tilde{x} = \{kx\,|x \in \tilde{x}, k \in \mathbb{R}\} = \left[\min\limits_i (kx_i)\,; \max\limits_i (kx_i)\right]$;
- умножение $\tilde{v} = \tilde{x} \cdot \tilde{y} = \{(x \cdot y)\,|x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}\} = \left[\min\limits_{i,j} (x_i y_j)\,; \max\limits_{i,j} (x_i y_j)\right]$;

- деление $\tilde{v} = \dfrac{\tilde{x}}{\tilde{y}} = \left\{ \left(\dfrac{x}{y} \right) \middle| x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y} \right\} = [x_1; x_2] \cdot \left[\dfrac{1}{y_2}; \dfrac{1}{y_1} \right]$.

Также определяются интервальная единица $\tilde{1} = [1; 1]$ и интервальный ноль $\tilde{0} = [0; 0]$ как нейтральные элементы по умножению и сложению соответственно. Во вводимой алгебре справедливы следующие законы:

1. коммутативность по сложению $\tilde{x} + \tilde{y} = \tilde{y} + \tilde{x}$; $\tilde{x}, \tilde{y} \in X$;
2. ассоциативность по сложению $\tilde{x} + (\tilde{y} + \tilde{z}) = (\tilde{x} + \tilde{y}) + \tilde{z}$; $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in X$;
3. коммутативность по умножению $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = \tilde{y} \cdot \tilde{x}$; $\tilde{x}, \tilde{y} \in X$;
4. ассоциативность по умножению $\tilde{x} \cdot (\tilde{y} \cdot \tilde{z}) = (\tilde{x} \cdot \tilde{y}) \cdot \tilde{z}$; $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in X$;
5. существование единственного нейтрального по сложению элемента (нуля) $\tilde{x} + \tilde{0} = \tilde{0} + \tilde{x} = \tilde{x}$; $\tilde{x} \in X$;
6. существование единственного нейтрального по умножению элемента (единицы) $\tilde{x} \cdot \tilde{1} = \tilde{1} \cdot \tilde{x} = \tilde{x}$; $\tilde{x} \in X$;
7. дистрибутивность умножения на действительную константу относительно сложения $k(\tilde{x} + \tilde{y}) = k\tilde{x} + k\tilde{y}$; $\tilde{x}, \tilde{y} \in X$, $k \in \mathbb{R}$.

Как отмечается в [54,60], интервальная алгебра определяет операции вычитания и деления как самостоятельные операции, при этом, в общем случае, интервальные числа не обладают свойством дистрибутивности умножения относительно сложения; отсутствуют понятия противоположного элемента (по сложению) и обратного элемента (по умножению); вычитание из интервального числа равного ему в общем случае не приводит к нуль-интервалу, как и деление интервального числа на равное ему не дает вырожденного единичного интервала. Эти недостатки подтверждаются в [51] в виде следующих законов:

1. $\tilde{x} - \tilde{x} = \tilde{0} \Leftrightarrow \tilde{x} = [x_1; x_1]$, т.е. разность интервального числа самого с собой равна нулю тогда и только тогда, когда это число вырожденное;

2. $\dfrac{\tilde{x}}{\tilde{x}} = \tilde{1} \Leftrightarrow \tilde{x} = [x_1; x_1]$, т.е. результат деления интервального числа на само себя равен единице в том и только в том случае, когда это число вырожденное;

3. противоположные по сложению элементы существуют только для вырожденных интервалов: $\tilde{x} + \tilde{y} = \tilde{0} \Leftrightarrow \tilde{x} = [x_1; x_1]\,; \tilde{y} = [-\tilde{x}_1; -\tilde{x}_1]$;

4. обратные по умножению элементы существую только для вырожденных интервалов: $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = \tilde{1} \Leftrightarrow \tilde{x} = [x_1; x_1]\,; \tilde{y} = \left[\dfrac{1}{x_1}; \dfrac{1}{x_1}\right]$;

5. закон субдистрибутивности умножения на интервальное число относительно сложения $\tilde{x} \cdot (\tilde{y} + \tilde{z}) \subseteq \tilde{x} \cdot \tilde{y} + \tilde{x} \cdot \tilde{z}$. Только в частном случае, когда $\tilde{y}, \tilde{z} > \tilde{0}$, имеет место истинная дистрибутивность.

Как указано в [51], невыполнение некоторых аксиом поля, а также перечисленные выше особенности интервальных чисел приводят к значительной специфике их использования на практике (в основном, для оценки множества решений некоторой задачи при интервально заданных параметрах). Стоит также упомянуть описанную в [61,70] проблему размытости произведения, т. е. необоснованного увеличения нечёткости. Размытость зависит не только от длины $d = x_2 - x_1$ интервала, но и от его положения на числовой оси. К примеру, интервалы одинаковой длины $[1; 3]$ и $[99; 101]$, будучи умноженными на один и тот же интервал$[2; 4]$, дадут результаты с сильно различающейся степенью нечёткости:

$$[2; 4] \cdot [1; 3] = [2; 12]\,; \quad d = 12 - 2 = 10$$
$$[2; 4] \cdot [99; 101] = [198; 404]\,; \quad d = 404 - 198 = 206$$

2.1.2. Алгебры нечётких LR-чисел

Как упоминалось в п. 1.1, на практике для нечётких вычислений часто используются удобные для понимания и записи нечёткие числа LR-типа. Такое число, согласно определению, представимо в виде тройки $\tilde{A} = (m; a; b)$. Арифметические операции над числами LR-типа в [?, 54, 70] вводятся следующим образом:

- сложение $\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 : (m_1, a_1, b_1) + (m_2, a_2, b_2) = (m_1 + m_2, a_1 + a_2, b_1 + b_2)$;
- противоположное число $-\tilde{A}_1$: $-(m, a, b) = (-m, b, a)$;
- вычитание вводится как сумма числа $\tilde{A}_1$ и числа, противоположного числу $\tilde{A}_2$: $(m_1, a_1, b_1) - (m_2, a_2, b_2) = (m_1 - m_2, a_1 + b_2, b_1 + a_2)$;
- умножение положительных чисел: $(m_1, a_1, b_1) \times (m_2, a_2, b_2) = (m_1 m_2, m_2 a_1 + m_1 a_2, m_2 b_1 + m_1 b_2)$;
- умножение разнознаковых чисел $(m_1, a_1, b_1) \times (m_2, a_2, b_2) = (m_1 m_2, m_2 a_1 - m_1 b_2, m_2 b_1 - m_1 a_2)$;
- умножение отрицательных чисел $(m_1, a_1, b_1) \times (m_2, a_2, b_2) = (m_1 m_2, -m_2 b_1 - m_1 b_2, -m_2 a_1 - m_1 a_2)$;
- обратное число $\tilde{A}^{-1}$: $(m, a, b)^{-1} = \left(\frac{1}{m}; \frac{b}{m^2}; \frac{a}{m^2}\right)$;
- деление нечётких чисел $\dfrac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_2}$ рассматривается как умножение числа $\tilde{A}_1$ на число, обратное числу $\tilde{A}_2$: $\left(\dfrac{m_1}{m_2}, \dfrac{m_1 b_2 + m_2 a_1}{m_2^2}, \dfrac{m_1 a_2 + m_2 b_1}{m_2^2}\right)$.

Для вводимых операций справедливы свойства коммутативности и ассоциативности операций сложения и вычитания. Свойство дистрибутивности, как и в случае вычислений, основанных на принципе Заде, выполняется не всегда. Кроме того, и для этой алгебры нечётких чисел характерны недостатки, описанные в [61, 70] — носитель результата может необоснованно расшириться ввиду зависимости результата от степени нечёткости операндов и их местоположения на числовой оси. Также при построении данной алгебры не вводятся нейтральные по сложению и умножению элементы (ноль и единица). В статье [67] отмечается, что если в качестве нулевого элемента использовать тройку, соответствующую нулю во множестве действительных чисел

$$\tilde{0} = (0; 0; 0) \tag{2.2}$$

а в качестве единицы — тройку

$$\tilde{1} = (1; 0; 0) \tag{2.3}$$

то в этом случае вводимые ранее операции не позволяют получить поле из-за невыполнения тождеств $\tilde{A} + \left(-\tilde{A}\right) = \tilde{0}$ и $\tilde{A} \cdot \tilde{A}^{-1} = \tilde{1}$.

Для получения алгебры типа поле с использованием нейтральных элементов (2.2) и (2.3), авторы [67] предлагают ввести групповые операции над нечёткими числами. Для этого вводятся несколько иные противоположный и обратный элементы:

$$-\left(m; a; b\right) = \left(-m; -a; -b\right); \tag{2.4}$$

$$\left(m; a; b\right)^{-1} = \left(\frac{1}{m}; -\frac{a}{m^2}; -\frac{b}{m^2}\right). \tag{2.5}$$

При этом признаётся тот факт, что вводимые с помощью элементы имеют отрицательные коэффициенты нечёткости, а, следовательно, лишены физического смысла и не являются элементами множества нечётких LR-чисел. Однако, согласно определениям, которые вводились при рассмотрении абстрактных алгебр, противоположный и обратный элемент также должны являться элементами несущего множества алгебры, что в (1.35) не выполняется. Таким образом, алгебру групповых нечётких чисел нельзя называть полем в строгом смысле этого термина. Более того, авторы статьи ограничивают применимость вводимой ими алгебры только тем случаем, когда в рассматриваемой задаче есть только один независимый нечёткий параметр/сигнал, поскольку в этом случае предотвращается необоснованное увеличение степени нечёткости результата. Во всех остальных случаях предлагается использовать классический подход к нечётким вычислениям, который был описан выше, со всеми свойственными ему недостатками.

В статье [62] на основании идей, изложенных в [18, 26], для решения проблем чрезмерной размытости результата и нетождественности выражений вида $\tilde{A} + \tilde{B} - \tilde{B} = \tilde{A}$, вводятся дополнительные арифметические операции и новое представление нечёткого числа, нечувствительное к его знаку. Дополнительной арифметической операцией $\underset{d}{*}$ для операции $*$ является такая, что для нечётких чисел $\tilde{A}.\tilde{B}, \tilde{C}$

$$\tilde{C} = \tilde{A} \underset{d}{*} \tilde{B} \to \tilde{C} * \tilde{B} = \tilde{A} \tag{2.6}$$

Для определения нового представления нечёткого числа $\left(m, d\left(\tilde{A}\right), \Delta\left(\tilde{A}\right)\right)$, называемого симметризованным параметрическим, авторы [62] вводят понятия показателя нечёткости числа $d\left(\tilde{A}\right) = \dfrac{a+b}{2}$ и коэффициента асимметрии $\Delta\left(\tilde{A}\right) = \dfrac{b-a}{2}$. Дополнительные арифметические операции над нечёткими числами в новом представлении выглядят следующим образом:

$$\tilde{A} \underset{d}{+} \tilde{B} = \left(m_{\tilde{A}} + m_{\tilde{B}}; \left|d\left(\tilde{A}\right) - d\left(\tilde{B}\right)\right|; \Delta\left(\tilde{A}\right) + \Delta\left(\tilde{B}\right)\right);$$
$$\tilde{A} \underset{d}{-} \tilde{B} = \left(m_{\tilde{A}} - m_{\tilde{B}}; \left|d\left(\tilde{A}\right) - d\left(\tilde{B}\right)\right|; \Delta\left(\tilde{A}\right) - \Delta\left(\tilde{B}\right)\right);$$
$$\tilde{A} \underset{d}{\cdot} \tilde{B} = \left(m_{\tilde{A}} m_{\tilde{B}}; \left|\left|m_{\tilde{B}}\right| d\left(\tilde{A}\right) - \left|m_{\tilde{A}}\right| d\left(\tilde{B}\right)\right|; \left|m_{\tilde{A}}\right| \Delta\left(\tilde{B}\right) + \left|m_{\tilde{B}}\right| \Delta\left(\tilde{A}\right)\right);$$
$$\tilde{A} \underset{d}{:} \tilde{B} = \left(\frac{m_{\tilde{A}}}{m_{\tilde{B}}}; \frac{\left|\left|m_{\tilde{B}}\right| d\left(\tilde{A}\right) - \left|m_{\tilde{A}}\right| d\left(\tilde{B}\right)\right|}{m_{\tilde{B}}^2}; \frac{\left|m_{\tilde{B}}\right| \Delta\left(\tilde{A}\right) - \left|m_{\tilde{A}}\right| \Delta\left(\tilde{B}\right)}{m_{\tilde{B}}^2}\right).$$

Для дополнительных арифметических операций не выполняются свойства ассоциативности по сложению и умножению, т. е.

$$\tilde{A} \underset{d}{+} \left(\tilde{B} \underset{d}{+} \tilde{C}\right) \neq \left(\tilde{A} \underset{d}{+} \tilde{B}\right) \underset{d}{+} \tilde{C};$$
$$\tilde{A} \underset{d}{\cdot} \left(\tilde{B} \underset{d}{\cdot} \tilde{C}\right) \neq \left(\tilde{A} \underset{d}{\cdot} \tilde{B}\right) \underset{d}{\cdot} \tilde{C},$$

однако при этом они обеспечивают выполнение следующих соотношений (нечёткие ноль и единица вводятся согласно (2.2) и (2.3)):

$$\begin{gathered} \tilde{A} \underset{d}{-} \tilde{0} = \tilde{A} \\ \tilde{A} \underset{d}{-} \tilde{A} = \tilde{0} \\ \tilde{A} \underset{d}{:} \tilde{1} = \tilde{A} \\ \tilde{A} \underset{d}{:} \tilde{A} = 1 \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} \left(\tilde{A} + \tilde{B}\right) \underset{d}{-} \tilde{A} = \tilde{B} \\ \left(\tilde{A} \cdot \tilde{B}\right) \underset{d}{:} \tilde{A} = \tilde{B} \\ \left(\tilde{A} \underset{d}{\cdot} \tilde{B}\right) \underset{d}{:} \tilde{A} = -\tilde{B} \\ \left(\tilde{A} \underset{d}{+} \tilde{B}\right) \underset{d}{-} \tilde{A} = -\tilde{B} \end{gathered} \tag{2.8}$$

Свойства (2.7) и (2.8) показывают, что вводимые в [62] дополнительные алгебраические операции позволяют сохранять первоначальную нечёткость чисел, что немаловажно для возможности получения корректных решений нечётких уравнений. К недостаткам подхода можно отнести его громоздкость, неочевидность и необходимость использования восьми алгебраических операций вместо двух, дополненных понятиями противоположного и обратного элементов.

В [26] класс чисел, над которыми осуществляются арифметические операции, сужается до треугольных. В целях удобства, треугольное нечёткое число $\tilde{A} = (m_{\tilde{A}}; a_{\tilde{A}}; b_{\tilde{A}})$ представляется в виде совокупности двух ветвей функции принадлежности, аналогично представлению (??) для нечёткого множества:

$$\tilde{A} = \int\limits_{m_{\tilde{A}}-a_{\tilde{A}}}^{m_{\tilde{A}}} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} + \int\limits_{m_{\tilde{A}}}^{m_{\tilde{A}}+b_{\tilde{A}}} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} = \int\limits_{x^L_{\tilde{A}}}^{m_{\tilde{A}}} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} + \int\limits_{m_{\tilde{A}}}^{x^R_{\tilde{A}}} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}. \tag{2.9}$$

Для обобщённой бинарной операции $*$, выполняемой над нечёткими треугольными числами $\tilde{A} = \left(x^L_{\tilde{A}}; m_{\tilde{A}}; x^R_{\tilde{A}}\right)$ и $\tilde{B} = \left(x^L_{\tilde{B}}; m_{\tilde{B}}; x^R_{\tilde{B}}\right)$ в форме (2.9), справедливо следующее выражение:

$$\tilde{C} = \tilde{A} * \tilde{B} = \left(\int\limits_{x^L_{\tilde{A}}}^{m_{\tilde{A}}} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} + \int\limits_{m_{\tilde{A}}}^{x^R_{\tilde{A}}} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} \right) * \left(\int\limits_{x^L_{\tilde{B}}}^{m_{\tilde{B}}} \frac{\mu_{\tilde{B}}(x)}{x} + \int\limits_{m_{\tilde{B}}}^{x^R_{\tilde{B}}} \frac{\mu_{\tilde{B}}(x)}{x} \right) =$$

$$= \int\limits_{x^L_{\tilde{C}}}^{m_{\tilde{C}}} \frac{\mu_{\tilde{C}}(x)}{x} + \int\limits_{m_{\tilde{C}}}^{x^R_{\tilde{C}}} \frac{\mu_{\tilde{C}}(x)}{x},$$

где $m_{\tilde{C}} = m_{\tilde{A}} * m_{\tilde{B}}$, а границы результата $x^L_{\tilde{C}}$ и $x^R_{\tilde{C}}$ зависят от операции:

- для сложения $x^L_{\tilde{C}} = x^L_{\tilde{A}} + x^L_{\tilde{B}}$; $x^R_{\tilde{C}} = x^R_{\tilde{A}} + x^R_{\tilde{B}}$;
- для вычитания $x^L_{\tilde{C}} = x^L_{\tilde{A}} - x^R_{\tilde{B}}$; $x^R_{\tilde{C}} = x^R_{\tilde{A}} - x^L_{\tilde{B}}$;
- для умножения $x^L_{\tilde{C}} = x^L_{\tilde{A}} \cdot x^L_{\tilde{B}}$; $x^R_{\tilde{C}} = x^R_{\tilde{A}} \cdot x^R_{\tilde{B}}$;
- для деления $x^L_{\tilde{C}} = \dfrac{x^L_{\tilde{A}}}{x^R_{\tilde{B}}}$; $x^R_{\tilde{C}} = \dfrac{x^R_{\tilde{A}}}{x^L_{\tilde{B}}}$.

Функция принадлежности результата $\mu_{\tilde{C}}(x)$ ищется в виде линейной функции $\mu_{\tilde{C}}(x) = kx + b$ для операций сложения и вычитания, а также в виде $\mu_{\tilde{C}}(x) = k\sqrt{x} + b$ для умножения и $\mu_{\tilde{C}}(x) = \frac{k}{x} + b$ для деления.

Исходя из определения границ результата, можно сразу отметить нерешённость проблемы чрезмерного размытия результата арифметических операций и его выхода из класса треугольных чисел. В [26] приводится пример операций над нечёткими числами $\tilde{6} = (5; 6; 7)$ с длиной носителя $d_{\tilde{6}} = 8-6 = 2$

и $\tilde{8} = (6; 8; 10)$ с длиной носителя $d_{\tilde{8}} = 10 - 6 = 4$. Их умножение приводит к границам нечёткого результата $x^L_{\tilde{C}} = 30$, $x^R_{\tilde{C}} = 70$ и моде $m_{\tilde{C}} = 48$. Длина носителя $d_{\tilde{c}} = 70 - 30 = 40 \gg d_{\tilde{6}} \cdot d_{\tilde{8}}$.

2.1.3. Создание алгебры, изоморфной существующим алгебрам

В статье [65] предлагаются теоремы, которые позволяют сводить арифметические операции над нечёткими числами к арифметическим операциям над комплексными числами и над матрицами размера 2×2. Для определения связи между алгеброй симметричных нечётких чисел LR-типа $\tilde{A} = (x; y; y)$ и комплексных чисел $x = y + iz$ доказывается следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть биективное преобразование $f : X \to \mathbb{C}$ ставит каждому элементу $\tilde{A} = (x; y; y) \in X$ множества нечётких симметричных LR-чисел элемент $x = y+iz \in \mathbb{C}$; $i = \sqrt{-1}$ множества комплексных чисел. Пусть даны симметричные нечёткие LR-числа $\tilde{A} = (m_1; a; a)$ и $\tilde{B} = (m_2; b; b)$, которым с помощью f взаимно однозначно сопоставлены комплексные числа $x_A = m_1 + ai$ и $x_B = m_2 + bi$. Тогда при $m_1 m_2 \gg ab$ и $m \gg a > 0$ арифметические операции над $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ соответствуют операциям над комплексными числами x_A и x_B:*

$$\tilde{A} + \tilde{B} \leftrightarrow x_A + x_B$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} \leftrightarrow x_A \cdot x_B$$

$$-\tilde{A} \leftrightarrow -\bar{x}_A$$

$$\tilde{A}^{-1} \leftrightarrow \bar{x}_A^{-1}$$

где $\bar{x}_A = m_1 - ai$ — комплексно-сопряженное по отношению к x_A.

Связь же операций над симметричными нечёткими LR-числами и матрицами 2×2 вида $\begin{bmatrix} m & -a \\ a & m \end{bmatrix}$ доказывается с помощью следующей теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть биективное отображение* $g : X \to M$ *ставит каждому элементу* $\tilde{A} = (x; y; y) \in X$ *множества нечётких симметричных* LR*-чисел элемент* $M_A = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$ *множества* M *матриц размерности* 2×2. *Пусть даны симметричные нечёткие* LR*-числа* $\tilde{A} = (m_1; a; a)$ *и* $\tilde{B} = (m_2; b; b)$, *которым с помощью* g *взаимно однозначно сопоставлены матрицы* $M_A = \begin{bmatrix} m_1 & -a \\ a & m_1 \end{bmatrix}$ *и* $M_B = \begin{bmatrix} m_2 & -b \\ b & m_2 \end{bmatrix}$. *Тогда при* $m_1 m_2 \gg ab$ *и* $m \gg a > 0$ *арифметические операции над* $\tilde{A}$ *и* $\tilde{B}$ *соответствуют операциям над матрицами* M_A *и* M_B:

$$\tilde{A} + \tilde{B} \leftrightarrow M_A + M_B$$
$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} \leftrightarrow M_A \cdot M_B$$
$$-\tilde{A} \leftrightarrow -M_A^T$$
$$\tilde{A}^{-1} \leftrightarrow \left[M_A^T\right]^{-1}$$

где M^T — *транспонированная матрица, а* M^{-1} — *матрица, обратная матрице* M.

В качестве преимуществ данного подхода авторы заявляют стандартизацию нечётких вычислений с участием чисел LR-типа, поскольку в этом случае возможно использование современных систем компьютерной математики (Maple, Mathematica, MATLAB, Mathcad), а также возможность наглядного изображения операций и их результатов на комплексной плоскости. Однако в рамках описанного подхода явно не решаются проблемы нейтральных по сложению и умножению элементов. Кроме того, приводимый авторами в статье численный пример демонстрирует нерешённость проблемы необоснованного расширения носителя при вычислениях. Наконец, применимость таких алгебр ограничена лишь нечёткими симметричными числами.

Те же авторы, пытаясь решить последнюю проблему (т. е. ограниченность области применения алгебр), в статье [66] распространяют полученные ранее результаты на случай с асимметричными нечёткими LR-числами. В качестве второго множества для построения изоморфизма алгебр выступает множество кватернионов H. Далее доказывается следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Пусть биективное преобразование $f : X \to H$ ставит каждому элементу $\tilde{A} = (x; y; z) \in X$ множества нечётких LR-чисел элемент $a = x + yi + zj + \xi k \in H;\ i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ множества кватернионов, где ξ — произвольный параметр, удовлетворяющий условиям $\xi > 0$, $\xi \ll y$, $\xi \ll z$. Пусть даны нечёткие LR-числа $\tilde{A} = (m_1; a_1; b_1)$ и $\tilde{B} = (m_2; a_2; b_2)$, которым с помощью f взаимно однозначно сопоставлены кватернионы $x_A = m_1 + a_1 i + b_1 j + \xi k$ и $x_B = m_2 + a_2 i + b_2 j + \xi k$. Тогда при $m_1 \gg a_1, a_2, b_1, b_2$ и $m_2 \gg a_1, a_2, b_1, b_2$ арифметические операции над $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ соответствуют операциям над кватернионами x_A и x_B:*

$$\tilde{A} + \tilde{B} \leftrightarrow x_A + x_B$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} \leftrightarrow x_A \cdot x_B$$

$$-\tilde{A} \leftrightarrow -\bar{x}_A^R$$

$$\tilde{A}^{-1} \leftrightarrow \left[\bar{x}_A^{-1}\right]^R$$

где $\bar{a} = x - yi - zj - \xi k$ — кватернион, сопряженный по отношению к кватерниону a, а a^R —- операция рокировки кватерниона, выполняемая как перемена мест i-го и j-го компонентов кватерниона $a^R = x + zi + yj + \xi k$.

Далее, по аналогии со статьёй [Комплексный и матричный методы...], доказывается изоморфность алгебры нечётких LR-чисел $\tilde{A} = (m; a; b)$ и матриц 4x4 вида

$$\begin{bmatrix} m & a & b & -\xi \\ -a & m & -\xi & -b \\ -b & \xi & m & a \\ \xi & b & -a & m \end{bmatrix}$$

где ξ – произвольный параметр, удовлетворяющий условиям $\xi > 0, \xi \ll a, b$.

Данный подход решает проблему асимметричных нечётких чисел, однако при этом сводится к громоздким матричным вычислениям и по-прежнему не позволяет устранить проблему необоснованного расширения носителя результата арифметической операции. Приводя в качестве примера анализ системы управления с нечёткими параметрами, коэффициенты нечёткости которых не превышают 3, в результате авторы получают решение с коэффициентами нечёткости порядка 1000.

2.2. Модифицированные нечёткие числа и параметрическое преобразование L

2.2.1. Модифицированные нечеткие числа

В статье [53], для преодоления изложенных в предыдущем параграфе недостатков нечётких алгебр, для решения нечётких задач был предложен следующий подход. Исходная задача $\tilde{Y} = f\left(\tilde{X}\right)$ с нечёткими числовыми параметрами рассматривается как совокупность задач с интервальной неопределенностью

$$\tilde{Y} = f\left(\tilde{X}\right) \to \bigcup_{\alpha=0}^{1} y_\alpha = f\left(X_\alpha\right) \tag{2.10}$$

с последующим переходом к полной определённости. Для этого на каждом α-уровне внутри интервала X_α выбирается точка $\bar{x}\left(\alpha\right)$. В [53] для этого используется средняя точка α-интервала

$$\overline{x}\left(\alpha\right)=\frac{x^{L}\left(\alpha\right)+x^{R}\left(\alpha\right)}{2} \tag{2.11}$$

Для треугольных чисел $\bar{x}\left(\alpha\right)$ является линейной функцией ввиду линейности $x^{L}\left(\alpha\right)$ и $x^{R}\left(\alpha\right)$. После решения N чётких α-уровневых задач полученные результаты $y\left(\alpha\right)$ аппроксимируются нечётким числом

$$\tilde{Y}^{*}=\{y(\alpha)\left|\mu_{\tilde{Y}}(y)=\alpha\right.\}$$

которое называется модифицированным решением задачи $\tilde{Y}=f\left(\tilde{X}\right)$. В статье утверждается, что в реальных задачах модифицированного решения достаточно для, например, поддержки принятия решений. (в статье дан только частный случай, а также нет строгого математического доказательства. Это предложено в статье [34]. Предлагаемый подход в своей основе имеет факторизацию, т. е. декомпозицию нечётких чисел по α-уровням.

Если рассмотреть данный подход с точки зрения нечётких алгебр, то решение задачи с использованием факторизации нечётких чисел представляется как переход от использования алгебр «полноценных» нечётких чисел к алгебрам для чисел LL/RR-типа. Действительно, функция принадлежности такого числа является обратной к функции, которая определяет точки $\bar{x}\left(\alpha\right)$:

$$\mu_{\tilde{A}^{*}}\left(x\right)=\left(\bar{x}\left(\alpha\right)\right)^{-1} \tag{2.12}$$

Определение 2.1. *Число $\tilde{A}^{*}$, получаемое из числа $\tilde{A}$ с помощью преобразования* (2.12)*, будем называть модифицированным нечётким числом.*

Модифицированное нечёткое число является числом LL/RR-типа, поскольку один из коэффициентов нечёткости равен нулю, а функция принадлежности имеет только левую или правую ветвь. В дальнейшем для модифицированных чисел, наряду с обозначением $\tilde{A}^{*}$, будем использовать обозначение $\bar{x}\left(\alpha\right)$, которое указывает на механизм их построения как совокупности точек на выбранных α-интервалах.

Пример. Пусть $\tilde{A} = \langle 2; 2; 4 \rangle$. Найдём модифицированное число $\tilde{A}^*$ в соответствие с (2.11). Вначале запишем функцию принадлежности числа $\tilde{A}^*$:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2};\ 0 \le x \le 2 \\ \frac{6-x}{4};\ 2 < x \le 6 \\ 0;\ x < 0\ \ x > 6 \end{cases}$$

Используя выражения (1.23), получим

$$\left[\begin{array}{l} x^L(\alpha) = m - a + a\alpha = 2 - 2 + 2\alpha = 2\alpha \\ x^R(\alpha) = m + b - b\alpha = 2 + 4 - 4\alpha = 6 - 4\alpha \end{array} \right.$$

Тогда, согласно (2.11), получим:

$$\bar{x}(\alpha) = \frac{x^L(\alpha) + x^R(\alpha)}{2} = \frac{2\alpha + 6 - 4\alpha}{2} = 3 - \alpha.$$

Т.к. прямая функция $\bar{x}(\alpha)$ убывает на своей области определения $\alpha \in [0; 1]$, то и обратная $\mu_{\tilde{A}^*}(x)$ также будет убывать. Её областью определения будет являться область значений функции $\bar{x}(\alpha)$, т.е. отрезок $[2; 3]$. В итоге $\mu_{\tilde{A}^*}(x)$ состоит только из правой ветви:

$$\mu_{\tilde{A}^*}(x) = \begin{cases} 3 - x;\ x \in [2; 3] \\ 0;\ x \notin [2; 3] \end{cases}$$

Оба числа – и исходное, и модифицированное – изображены на рис. ().

Очевидно, что на вид модифицированных чисел (и, соответственно, на итоговый результат решения задачи) влияние будут оказывать как характеристики самих нечётких чисел — мода, коэффициенты нечёткости, — так и принцип, согласно которому выбирается точка $\overline{x}(\alpha)$. В статье [34] предложено обобщение принципа, вводимого в [53] — значение $\overline{x}(\alpha)$ выбирается с помощью линейного параметрического преобразования L:

$$\bar{x}(\alpha) = L(X_\alpha) = \lambda x^L(\alpha) + (1 - \lambda)\, x^R(\alpha)\,. \tag{2.13}$$

Параметр преобразования $\lambda \in [0; 1]$ выбирается индивидуально для каждого числа согласно его характеристикам – величинам коэффициентов нечёткости и длине носителя. Нетрудно убедиться, что мода модифицированного числа $m_{\tilde{A}^*}$ равна

$$m_{\tilde{A}^*} = \bar{x}(1), \tag{2.14}$$

а ненулевой коэффициент нечёткости и носитель равны по модулю

$$d_{\tilde{A}^*} = |\bar{x}(1) - \bar{x}(0)|. \tag{2.15}$$

Если известно уравнение (2.13), то, с учётом (2.14) и (2.15), модифицированное нечёткое число можно представить в виде тройки $\langle \bar{x}(1); |\bar{x}(1) - \bar{x}(0)|; 0 \rangle$ (число LL-типа) или $\langle \bar{x}(1); 0; |\bar{x}(1) - \bar{x}(0)| \rangle$ (число RR-типа). Тип модифицированного числа можно определить по коэффициенту при α в (2.13): если он больше нуля, то число LL-типа, если меньше — RR-типа.

Исходя из механизма построения модифицированных нечётких чисел, очевидно, что преобразование (2.13) сокращает информативность исходной нечёткой величины. Чтобы выяснить, насколько существенны потери нечёткой информации при различных значениях параметра λ, проведём исследование свойств преобразования L.

Для исследования свойств преобразования L введём следующие характеристические показатели нечёткого числа, которые определяют его информативность с точки зрения принятия решений [32, 34], а также, по аналогии с [61], позволяют производить анализ и вычисления в форме, нечувствительной к знаку нечёткого числа:

- длина носителя $d_{\tilde{A}}$;
- мода $m_{\tilde{A}}$;

- степень асимметрии $AS_{\tilde{A}}$.

При использовании записи треугольного числа с помощью коэффициентов нечёткости, длина носителя определяется как их сумма:

$$d_{\tilde{A}} = a + b \tag{2.16}$$

Определение 2.2. *Степенью асимметрии $AS_{\tilde{A}}$ будем называть характеристику треугольного нечёткого числа, определяемую как разность площадей прямоугольных треугольников, на которые исходное нечёткое число делится модой (рис!!!).*

Площадь левого треугольника $S_1 = \dfrac{1}{2}ah(\tilde{A}) = \dfrac{a}{2}$, правого $S_2 = \dfrac{1}{2}bh\left(\tilde{A}\right) = \dfrac{b}{2}$, отсюда

$$AS_{\tilde{A}} = S_2 - S_1 = \frac{b-a}{2} \in \left[-\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right]. \tag{2.17}$$

Если $\tilde{A}$ является числом $LL(RR)$-типа, то $AS_{\tilde{A}}$, согласно (2.17), принимает значение $-\dfrac{a}{2}$ $(\dfrac{b}{2})$.

Очевидно, что запись треугольного нечёткого числа в виде тройки $(m_{\tilde{A}}, d_{\tilde{A}}, AS_{\tilde{A}})$ эквивалентна введённым ранее способам записи через коэффициенты нечёткости $(m; a; b)$ и точки пересечения с осью Ox $\left(x^L; m; x^R\right)$. При известных степени асимметрии $AS_{\tilde{A}}$ и длине носителя $d_{\tilde{A}}$, коэффициенты нечёткости определяются по формуле

$$\left[\begin{aligned} a &= \frac{d_{\tilde{A}} - 2AS_{\tilde{A}}}{2} \\ b &= \frac{d_{\tilde{A}} + 2AS_{\tilde{A}}}{2} \end{aligned}\right. \tag{2.18}$$

Справедливость (2.18) можно проверить, подставив соответствующие значения для $AS_{\tilde{A}}$ и $d_{\tilde{A}}$ из формул (2.16) и (2.17).

Пример. Найдём эквивалентную форму записи для треугольного числа $\tilde{A} = \langle 5; 3; 2 \rangle$ в виде тройки «мода — носитель — степень асимметрии».

Согласно формуле (2.16) длина носителя равна

$$d_{\tilde{A}} = a + b = 3 + 2 = 5$$

Степень асимметрии $AS_{\tilde{A}}$ вычисляется по формуле (2.17)

$$AS_{\tilde{A}} = \frac{2-3}{2} = -0,5$$

Таким образом, число $\tilde{A}$ представляется в виде тройки $(5; 5; -0,5)$.

2.2.2. Свойства преобразования L

Свойство 2.1. *Преобразование L сохраняет моду нечёткого числа. Другими словами,* $\forall\lambda(\alpha): \ m_{\tilde{A}} = m_{\tilde{A}^*}$.

Доказательство. Перепишем свойство с учётом равенств:

$$x^L(\alpha) = x_A^L + \alpha(m_A - x_A^L);$$
$$x^R(\alpha) = x_A^R + \alpha(m_A - x_A^R).$$

При $\alpha = 1$

$$x^L(1) = x_{\tilde{A}}^L + 1\left(m_{\tilde{A}} - x_{\tilde{A}}^L\right) = m_{\tilde{A}};$$
$$x^R(1) = x_{\tilde{A}}^R + 1\left(m_{\tilde{A}} - x_{\tilde{A}}^R\right) = m_{\tilde{A}},$$

поэтому при подстановке $\alpha = 1$ в преобразование (2.13) получаем:

$$\bar{x}\left(1\right) = \lambda x^L\left(1\right) + \left(1-\lambda\right)x^R\left(1\right) = \lambda m_{\tilde{A}} + \left(1-\lambda\right)m_{\tilde{A}} = m_{\tilde{A}}. \qquad (2.19)$$

Выражение (2.19) доказывает, что моды модифицированного и исходного чисел совпадают при любых значения параметров преобразования (2.13).

Свойство 2.2. *При некоторых значениях параметра λ преобразование L сохраняет*

1. *знак степени асимметрии, т.е.* $\exists\lambda \in [0;1]: \ sign(AS_{\tilde{A}}) = sign(AS_{\tilde{A}^*})$;

2. *значение степени асимметрии, т.е.* $\exists\lambda \in [0;1]: \ AS_{\tilde{A}} = AS_{\tilde{A}^*}$.

Доказательство. Вначале докажем первое утверждение. Степень асимметрии исходного числа $\tilde{A}$ определяется выражением (2.17). Модифицированное число имеет только один ненулевой коэффициент нечёткости, который равен $|\bar{x}(1) - \bar{x}(0)|$. Кроме того, согласно свойству 2.1, мода числа при преобразовании сохраняется. Поэтому абсолютная величина степени асимметрии равна

$$|AS_{\tilde{A}^*}| = \frac{|m - \bar{x}(0)|}{2}. \tag{2.20}$$

Поскольку

$$\bar{x}(0) = \lambda x^L(0) + (1-\lambda)\, x^R(0) = m + b - \lambda(a+b), \tag{2.21}$$

то выражение (2.20) принимает вид

$$|AS_{\tilde{A}^*}| = \frac{|b - \lambda(a+b)|}{2}. \tag{2.22}$$

Если исходное нечёткое число симметричное, т.е. $a = b$, то степень его асимметрии равна нулю. В этом случае равенство степеней асимметрии достигается при $\lambda = \dfrac{1}{2}$ -при подстановке данного значения в (2.22) имеем верное равенство:

$$|AS_{\tilde{A}^*}| = \frac{|b - \lambda(a+b)|}{2} = \frac{1}{2}\left|b - \frac{b+b}{2}\right| = \frac{1}{2}|b-b| = 0.$$

Если $a > b$, то $AS_{\tilde{A}} < 0$, и для выполнения первого пункта свойства необходимо, чтобы модифицированное число было числом LL-типа. Это достигается при

$$\bar{x}(0) < m. \tag{2.23}$$

Преобразовывая (2.23) с использованием (2.21), получаем, что $b - \lambda(a+b) < 0$, и в результате

$$\lambda \in \left(\frac{b}{a+b}; 1\right].$$

При $a < b$ $AS_{\tilde{A}} > 0$, и модифицированное число должно быть числом RR-типа, т. е.

$$\bar{x}(0) > m. \tag{2.24}$$

По аналогии, подставляя в (2.24) значение $\bar{x}(0)$ из (2.21), получаем, что $b - \lambda(a+b) > 0$, и

$$\lambda \in \left[0; \frac{b}{a+b}\right).$$

Таким образом, знак степени асимметрии сохраняется при выполнении следующих условий:

$$\left[\begin{array}{l} \lambda \in \left[0; \dfrac{b}{a+b}\right); \; a < b \\ \lambda = 0,5; \; a = b \\ \lambda \in \left(\dfrac{b}{a+b}; 1\right]; \; a > b \end{array}\right.$$

Докажем теперь второе утверждение. Для этого покажем, что уравнение

$$AS_{\tilde{A}} = AS_{\tilde{A}^*} \tag{2.25}$$

имеет решения при $\lambda \in [0; 1]$. Пусть, для определённости, у исходного числа $a > b$, тогда $AS_{\tilde{A}} < 0$, и поэтому должно быть справедливо неравенство $AS_{\tilde{A}^*} < 0$. Пользуясь выражением (2.20), получаем

$$AS_{\tilde{A}^*} = \frac{\bar{x}(0) - m}{2} = \frac{b - \lambda(a+b)}{2} < 0 \tag{2.26}$$

Подставляя (2.17) и (2.26) в (2.25), приходим к уравнению

$$\frac{b-a}{2} = \frac{b - \lambda(a+b)}{2}. \tag{2.27}$$

Его решением является значение $\lambda = \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{a}{d}$.

Если же $a < b$, то $AS_{\tilde{A}} > 0$, и выражение (2.26) должно быть положительным. В итоге имеем то же самое уравнение (2.27).

Таким образом, при $\lambda = \dfrac{a}{a+b}$ значение степени асимметрии числа сохраняется.

Свойство 2.3. *Модифицированное число всегда содержится внутри исходного числа. Другими словами,*

$$\forall\lambda \in [0;1] : A^*_\alpha \subset A_\alpha;\ d_{\tilde{A}} \geqslant d_{\tilde{A}^*},$$

т. е. преобразование L уменьшает длину носителя нечёткого числа и оставляет α-интервалы модифицированного числа в рамках α-интервалов исходного числа.

Доказательство. Вначале докажем, что $\forall\lambda \in [0;1]\ \ d_{\tilde{A}} \geqslant d_{\tilde{A}^*}$. Решим данное неравенство и покажем, что отрезок $[0;1]$ содержится внутри решения. Очевидно, что

$$d_{\tilde{A}^*} = |\bar{x}(1) - \bar{x}(0)| = |m_{\tilde{A}} - (m_{\tilde{A}} - b + \lambda(a+b))| = |b - \lambda(a+b)|\,,$$

и поэтому

$$|b - \lambda(a+b)| \leqslant a + b.$$

Раскрывая модуль, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} b - \lambda(a+b) \geqslant -a - b; \\ b - \lambda(a+b) \leqslant a + b, \end{cases}$$

Её решением является отрезок $\left[-\dfrac{a}{a+b}; 1 + \dfrac{b}{a+b}\right]$. Ввиду того, что $a, b \geqslant 0$, этот отрезок содержит в себе интервал $[0;1]$.

Теперь покажем, что $\forall\lambda \in [0;1] : A^*_\alpha \subset A_\alpha$. Очевидно, что α-интервал модифицированного числа будет ограничен с одной стороны значением моды $m_{\tilde{A}}$, а с другой — значением $\bar{x}(\alpha)$. В силу определения нечёткого числа

$$\forall\alpha \in [0;1]\ \ x^L_{\tilde{A}}(\alpha) \leqslant m_{\tilde{A}} \leq x^R_{\tilde{A}}(\alpha). \tag{2.28}$$

Кроме того, из определения (2.13) преобразования L следует, что

$$\forall\alpha \in [0;1]\ \ x^L_{\tilde{A}}(\alpha) \leqslant \bar{x}(\alpha) \leqslant x^R_{\tilde{A}}(\alpha). \tag{2.29}$$

Исходя из (2.28) и (2.29), $\left[x^L_{\tilde{A}}(\alpha); x^R_{\tilde{A}}(\alpha)\right] \supset \left[x^M_{\tilde{A}}; \bar{x}(\alpha)\right]$ для LL-числа (соответственно, $\left[x^L_{\tilde{A}}(\alpha); x^R_{\tilde{A}}(\alpha)\right] \supset \left[\bar{x}(\alpha); x^M_{\tilde{A}}\right]$ для RR-числа).

Проиллюстрируем доказанные выше свойства примером. Пусть $\tilde{A} = \langle 4; 5; 1\rangle$. Степень его асимметрии равна

$$AS_{\tilde{A}} = \frac{1-5}{2} = -2,$$

а длина носителя $d_{\tilde{A}}$

$$d_{\tilde{A}} = 5 + 1 = 6.$$

Уравнения для левой и правой ветвей функции принадлежности принимают вид

$$\left[\begin{aligned} & x^L(\alpha) = -1 + 5\alpha; \\ & x^R(\alpha) = 5 - \alpha. \end{aligned}\right. \tag{2.30}$$

Выполним преобразование L с параметром $\lambda = \frac{1}{4}$ с учётом (2.30):

$$\bar{x}(\alpha) = \frac{1}{4}(5\alpha - 1) + \frac{3}{4}(5 - \alpha) = \frac{1}{4}(5\alpha - 1 + 15 - 3\alpha) = \frac{1}{4}(14 + 2\alpha) = 3,5 + 0,5\alpha. \tag{2.31}$$

Поскольку коэффициент при α в выражении (2.31) больше нуля, то число $\tilde{A}^*$ является числом LL-типа. Мода числа $\tilde{A}^*$, согласно свойству 2.1, равна 4, а левый коэффициент нечёткости равен длине носителя и равен

$$a = d_{\tilde{A}^*} = |\bar{x}(1) - \bar{x}(0)| = |4 - (3,5 - 0,5 \cdot 0)| = 0,5.$$

Таким образом, число $\tilde{A}^*$ может быть записано в виде тройки $\langle 4; 0,5; 0\rangle$. Степень его асимметрии, согласно свойству 2.2, сохраняет знак относительно $AS_{\tilde{A}}$ и равна

$$AS_{\tilde{A}^*} = \frac{0 - 0,5}{2} = -0,25.$$

Исходное и модифицированное числа изображены на рис. На нём наглядно иллюстрируется свойство 2.3 — модифицированное число $\tilde{A}^*$ целиком расположено внутри границ исходного числа.

Из доказанных выше свойств следует, что применение преобразования L к нечетким исходным данным в основном сохраняет их информативность при целенаправленном выборе параметра преобразования. Уменьшение длины носителя при определенных оговорках можно рассматривать как положительное явление, поскольку при этом повышается общая устойчивость решения [34].

Рассмотрим следствия из доказанных ранее свойств преобразования L и рекомендации по выбору параметра λ.

Следствие 2.1. *Модифицированное нечёткое число, получаемое с помощью преобразования L с $\lambda = 0,5$ из симметричного нечёткого числа $\langle m; a; a \rangle$, является нечётким синглтоном.*

Действительно, при указанном значении λ, используя выражения, получаем:

$$\bar{x}(\alpha) = \frac{1}{2}(m - a + a\alpha) + \frac{1}{2}(m + b - b\alpha) = \frac{1}{2}(m - a + a\alpha + m + a - a\alpha) = m.$$

Это следствие накладывает ограничения на возможность использования симметричных нечётких чисел в задачах, поскольку все нечёткие вычисления с использованием преобразования L в этом случае будут сведены к обычным алгебраическим операциям над модами чисел.

Следствие 2.2. *Применение преобразования L с параметром $\lambda = \dfrac{a}{a+b}$ к числу LL/RR-типа не изменяет данного числа.*

В самом деле, для LL-числа $b = 0$, поэтому $x^R_{\tilde{A}}(\alpha) = m + b - b\alpha = m$, $\lambda = \frac{a}{a+0} = 1$. Отсюда

$$\bar{x}(\alpha) = \lambda(m - a + a\alpha) + (1 - \lambda)m = m - a + a\alpha = x^L_{\tilde{A}}(\alpha).$$

Для RR-числа $a = 0$, отсюда $x^L_{\tilde{A}}(\alpha) = m - a + a\alpha = m$ и $\lambda = \frac{0}{b+0} = 0$. Ввиду этого

$$\bar{x}(\alpha) = \lambda m + (1 - \lambda)(m + b - b\alpha) = m + b - b\alpha = x^R_{\tilde{A}}(\alpha).$$

Отдельно выделим несколько наиболее интересных значений λ.

1. $\lambda = \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{a}{d_{\tilde{A}}}$. Как уже было показано выше, при данном значении сохраняется значение степени асимметрии.

Проиллюстрируем это на следующем примере. Пусть $\tilde{A} = \langle 1; 4; 6 \rangle$. Значение $\lambda = \dfrac{4}{4+6} = \dfrac{2}{5}$, степень асимметрии $AS_{\tilde{A}} = \dfrac{6-4}{2} = 1$, а уравнения правой и левой ветвей

$$\left[\begin{array}{l} x^L(\alpha) = -3 + 4\alpha; \\ x^R(\alpha) = 7 - 6\alpha. \end{array}\right.$$

Преобразование L даёт следующий результат:

$$\bar{x}(\alpha) = \frac{2}{5}(-3 + 4\alpha) + \frac{3}{5}(7 - 6\alpha) = \frac{1}{5}(-6 + 8\alpha + 21 - 18\alpha) = 3 - 2\alpha.$$

Полученное в результате преобразования число $\tilde{A}^*$ является числом RR-типа, поэтому степень его асимметрии положительна и, согласно (2.20), равна

$$AS_{\tilde{A}^*} = \frac{|1 - (3 - 2 \cdot 0)|}{2} = 1.$$

2. $\lambda = \dfrac{b}{a+b} = \dfrac{b}{d_{\tilde{A}}}$. Преобразование L с таким значение параметра уничтожает нечёткую информацию, заложенную экспертом в число, поскольку в этом случае модифицированное число превращается в чёткое:

$$\bar{x}(\alpha) = \frac{b}{a+b}(m - a + a\alpha) + \left(1 - \frac{b}{a+b}\right)(m + b - b\alpha) = \frac{b(m - a + a\alpha) + a(m +}{a+b}$$

$$= \frac{bm - ab + ab\alpha + am + ab - ab\alpha}{a+b} = \frac{am + bm}{a+b} = m.$$

3. При $\lambda = \dfrac{b}{d_{\tilde{A}}} - \dfrac{b-a}{3(b+a)} = \dfrac{2b+a}{3(b+a)} = \dfrac{2b+a}{3d_{\tilde{A}}}$ значение $\bar{x}(\alpha)$ является проекцией центра тяжести треугольника, построенного на отрезке $\left[x^L(\alpha), x^R(\alpha)\right]$ как на основании, на ось Ox (см. рис.).

Данное значение получается следующим образом. Координата $x_0(\alpha)$ центра тяжести α-сечения треугольного числа рассчитывается как

$$x_0(\alpha) = \frac{x^L(\alpha) + m + x^R(\alpha)}{3}. \tag{2.32}$$

Значения $x^L(\alpha)$ и $x^R(\alpha)$ равны

$$\left[\begin{aligned} & x^L(\alpha) = m - a + a\alpha; \\ & x^R(\alpha) = m + b - b\alpha. \end{aligned}\right. \tag{2.33}$$

Из (2.32) и (2.33) следует, что

$$\begin{aligned} x_0(\alpha) = \frac{x^L(\alpha) + m + x^R(\alpha)}{3} = \frac{m - a + a\alpha + m + m + b - b\alpha}{3} = \\ = \frac{3m - (a - b) + \alpha(a - b)}{3} = m + \frac{(a - b)(\alpha - 1)}{3}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Преобразование L вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \bar{x}(\alpha) = \lambda x^L(\alpha) + (1 - \lambda)\, x^R(\alpha) = \lambda(m - a + a\alpha) + (1 - \lambda)(m + b - b\alpha) = \\ = \lambda(m - a + a\alpha - m - b + b\alpha) + b(1 - \alpha) + m = \lambda(a + b)(\alpha - 1) + b(1 - \alpha) + m \end{aligned} \tag{2.35}$$

Приравнивая результаты (2.34) и (2.35), получаем:

$$m + \frac{(a - b)(\alpha - 1)}{3} = m + b(1 - \alpha) + \lambda(a + b)(\alpha - 1); (a - b)(\alpha - 1) = -3b(\alpha -$$

При $\alpha = 1$ равенство выполняется для всех $\lambda \in [0; 1]$. Для остальных α, поделим обе части равенства на $\alpha - 1$:

$$a - b = -3b + 3\lambda(a + b),$$

откуда получается искомое значение λ.

2.3. Построение алгебры нечетких чисел, удовлетворяющей требованиям к решению задач, и разработка численной реализации метода обработки нечеткой информации на основе предложенного изоморфизма алгебры

2.3.1. Алгебра модифицированных нечетких чисел

Для того, чтобы использовать модифицированные нечёткие числа в качестве параметров чётких задач, необходимо построить алгебраическую систему для множества всех нечётких модифицированных чисел K.

Будем строить чёткую алгебру $P = \langle K;\ +, *\rangle$ на множестве модифицированных нечётких чисел $K = \{\bar{x}(\alpha)\}\,;\ \alpha \in [0;1]$ по аналогии с тем, как это делается в [70]. Для удобства дальнейших вычислений преобразуем $\bar{x}(\alpha)$:

$$\bar{x}(\alpha) = \lambda(m - a + a\alpha) + (1 - \lambda)(m + b - b\alpha) = a\alpha\lambda + \lambda(m - a) + m + b - \\ - b\alpha - \lambda(m + b) + b\alpha\lambda = \alpha(\lambda a + \lambda b - b) + m + b - \lambda(m + b - m + a) = \\ = a(\lambda(a + b) - b) + m + b - \lambda(a + b)\,.$$

При построении алгебры будем использовать форму записи

$$\bar{x}(\alpha) = c + k\alpha, \tag{2.36}$$

где

$$\begin{bmatrix} c = m + b - \lambda(a + b) \\ k = \lambda(a + b) - b \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

$$\lambda \in [0;1]\,;\ c, k \in \mathbb{R}$$

Операция сложения и её свойства

Введем на множестве K бинарную операцию сложения + следующим образом:

$$\bar{x}_1(\alpha) + \bar{x}_2(\alpha) = r_1(\alpha) = c_1 + c_2 + (k_1 + k_2)\alpha,$$
$$r_1(\alpha) \in K.$$

Докажем основные свойства операции сложения.

Коммутативность:

$$\bar{x}_1(\alpha) + \bar{x}_2(\alpha) = c_1 + c_2 + (k_1 + k_2)\alpha = c_2 + c_1 + (k_2 + k_1)\alpha = \bar{x}_2(\alpha) + \bar{x}_1(\alpha).$$

Ассоциативность:

$$\bar{x}_1(\alpha) + (\bar{x}_2(\alpha) + \bar{x}_3(\alpha)) = c_1 + k_1\alpha + c_2 + c_3 + (k_2 + k_3)\alpha =$$
$$= (c_1 + c_2 + (k_1 + k_2)\alpha) + c_3 + k_3\alpha = (\bar{x}_1(\alpha) + \bar{x}_2(\alpha)) + \bar{x}_3(\alpha).$$

Нулевой и обратный элементы

Введём нейтральный (нулевой) элемент

$$\bar{0} = 0 + 0\alpha \in K \tag{2.38}$$

такой, что

$$\forall \bar{x}(\alpha) \in K: \ \bar{x}(\alpha) + \bar{0} = c + k\alpha + 0 + 0\alpha = \bar{x}(\alpha) \tag{2.39}$$

Также определим для каждого $\bar{x}(\alpha) = c + k\alpha \in K$ единственный элемент $-\bar{x}(\alpha) \in K$, называемый противоположным, такой, что выполняется равенство

$$\bar{x}(\alpha) + (-\bar{x}(\alpha)) = \bar{0} \tag{2.40}$$

Очевидно, что противоположный элемент можно определить следующим образом:

$$-\bar{x}(\alpha) = -c - k\alpha$$

так что равенство (2.40) будет справедливым:

$$\bar{x}(\alpha) + (-\bar{x}(\alpha)) = c + k\alpha - c - k\alpha = 0 + 0\alpha = \bar{0}.$$

Операция вычитания нечётких чисел вводится как сложение числа $\bar{x}_1(\alpha)$ с числом, противоположным числу $\bar{x}_2(\alpha)$:

$$\bar{x}_1(\alpha) - \bar{x}_2(\alpha) = \bar{x}_1(\alpha) + (-\bar{x}_2(\alpha)) = c_1 - c_2 + (k_1 - k_2)\alpha$$

Пример. Даны два нечётких числа $\tilde{A} = \langle 3; 4; 1\rangle$ и $\tilde{B} = \langle 5; 2; 3\rangle$. Выполнить операции $\tilde{A}^* + \tilde{B}^*$, $\tilde{A}^* - \tilde{B}^*$.

Вначале запишем уравнения для левой и правой ветвей каждого из чисел и оптимальные в смысле сохранения нечёткой информации значения λ:

$$\left[\begin{array}{l} x^L_{\tilde{A}}(\alpha) = -1 + 4\alpha; \\ x^R_{\tilde{A}}(\alpha) = 4 - \alpha; \\ \lambda_{\tilde{A}} = \dfrac{4}{4+1} = \dfrac{4}{5}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^L_{\tilde{B}}(\alpha) = 3 + 2\alpha; \\ x^R_{\tilde{B}}(\alpha) = 8 - 3\alpha; \\ \lambda_{\tilde{B}} = \dfrac{2}{2+3} = \dfrac{2}{5}. \end{array}\right.$$

Найдём модифицированные значения:

$$\left[\begin{array}{l} \bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = \dfrac{4}{5}(-1 + 4\alpha) + \dfrac{1}{5}(4 - \alpha) = \dfrac{-4 + 16\alpha + 4 - \alpha}{5} = 3\alpha; \\ \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) = \dfrac{2}{5}(3 + 2\alpha) + \dfrac{3}{5}(8 - 3\alpha) = \dfrac{6 + 4\alpha + 24 - 9\alpha}{5} = 6 - \alpha. \end{array}\right. \tag{2.41}$$

Исходя из (2.41), значения искомых выражений равны:

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{A}^* + \tilde{B}^* = 3\alpha + 6 - \alpha = 6 + 2\alpha; \\ \tilde{A}^* - \tilde{B}^* = 3\alpha - 6 + \alpha = -6 + 4\alpha. \end{array}\right.$$

Операция умножения и её свойства

Введём на множестве K операцию умножения. Её можно было бы определить с помощью следующего выражения как сумму произведений компонент модифицированных нечётких чисел

$$\bar{x}_1(\alpha) \cdot \bar{x}_2(\alpha) = r_2'(\alpha) = (c_1 + k_1\alpha)(c_2 + k_2\alpha) =$$
$$= c_1c_2 + c_1k_2\alpha + c_2k_1\alpha + k_1k_2\alpha^2. \tag{2.42}$$

Однако такое определение приводит к искажению треугольного вида результата нечётких операций, поскольку в (2.42) появляется слагаемое с α^2. А это означает, что $r_2'(\alpha) \notin K$. Для того, чтобы результат операции умножения остался в множестве K, воспользуемся линейной интерполяцией — зависимость $r_2(\alpha)$ будет восстанавливаться в виде линейной функции по значениям выражения (2.42) при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. В первом случае $r_2'(0) = c_1 c_2$, во втором $r_2'(1) = (c_1 + k_1)(c_2 + k_2)$. Подставляя данные значения в уравнение прямой $r_2(\alpha)$, получаем:

$$\frac{\alpha - 0}{1 - 0} = \frac{r_2(\alpha) - c_1 c_2}{(c_1 + k_1)(c_2 + k_2) - c_1 c_2},$$

откуда, упрощая знаменатель второй дроби, получаем:

$$\alpha = \frac{r_2(\alpha) - c_1 c_2}{c_1 k_2 + c_2 k_1 + k_1 k_2};$$

$$r_2(\alpha) = c_1 c_2 + (c_1 k_2 + c_2 k_1 + k_1 k_2)\,\alpha \in K.$$

Таким образом, операция умножения на K вводится следующим образом:

$$r_2(\alpha) = c_1 c_2 + (c_1 k_2 + c_2 k_1 + k_1 k_2)\,\alpha;\; r_2(\alpha) \in K. \tag{2.43}$$

Умножение нечёткого числа на скаляр $\beta \in \mathbb{R}$ является частным случаем операции (2.43), поскольку скаляр представляется в виде нечёткого синглтона

$$\bar{\beta} = \beta + 0\alpha \in K.$$

Докажем основные свойства операции умножения. Коммутативность доказывается элементарно:

$$\bar{x}_1(\alpha) \cdot \bar{x}_2(\alpha) = c_1 c_2 + (c_1 k_2 + c_2 k_1 + k_1 k_2)\,\alpha =$$

$$= c_2 c_1 + (c_2 k_1 + c_1 k_2 + k_2 k_1)\,\alpha = \bar{x}_2(\alpha) \cdot \bar{x}_1(\alpha).$$

Для доказательства свойства ассоциативности

$$\bar{x}_1(\alpha) \cdot (\bar{x}_2(\alpha)\,\bar{x}_3(\alpha)) = (\bar{x}_1(\alpha)\,\bar{x}_2(\alpha)) \cdot \bar{x}_3(\alpha)$$

вычислим по отдельности и сравним результаты правой и левой частей:

$$\bar{x}_1(\alpha)\cdot(\bar{x}_2(\alpha)\,\bar{x}_3(\alpha)) = (c_1+k_1\alpha)\,((c_2+k_2\alpha)\,(c_3+k_3\alpha)) =$$
$$= (c_1+k_1\alpha)\,(c_2c_3+(k_2c_3+k_3c_2+k_2k_3)\,\alpha) =$$
$$= c_1c_2c_3+(c_1k_2c_3+c_1c_2k_3+c_1k_2k_3+k_1c_2c_3+k_1k_2c_3+k_1c_2k_3+k_1k_2k_3)\,\alpha;$$
$$(\bar{x}_1(\alpha)\,\bar{x}_2(\alpha))\cdot\bar{x}_3(\alpha) = ((c_1+k_1\alpha)\,(c_2+k_2\alpha))\,(c_3+k_3\alpha) =$$
$$= (c_1c_2+(k_1c_2+c_1k_2+k_1k_2)\,\alpha)\,(c_3+k_3\alpha) =$$
$$= c_1c_2c_3+(k_1c_2c_3+c_1k_2c_3+k_1k_2c_3+c_1c_2k_3+k_1c_2k_3+c_1k_2k_3+k_1k_2k_3)\,.$$

Путём сравнения результатов умножения можно убедиться, что свойство ассоциативности верно.

Для доказательства дистрибутивности умножения относительно сложения, т. е. справедливости равенства

$$\bar{x}_1(\alpha)\cdot\bar{x}_2(\alpha)+\bar{x}_1(\alpha)\cdot\bar{x}_3(\alpha) = \bar{x}_1(\alpha)\cdot(\bar{x}_2(\alpha)+\bar{x}_3(\alpha)) \tag{2.44}$$

также выполним действия в левой и правой частях выражения (2.44) по отдельности, а затем сравним результаты:

$$\bar{x}_1(\alpha)\,\bar{x}_2(\alpha)+\bar{x}_1(\alpha)\,\bar{x}_3(\alpha) = (c_1+k_1\alpha)\cdot(c_2+k_2\alpha)+(c_1+k_1\alpha)\cdot(c_3+k_3\alpha) =$$
$$= c_1c_2+(c_1k_2+c_2k_1+k_1k_2)\alpha+c_1c_3+(c_1k_3+c_3k_1+k_1k_3)\alpha;$$
$$\bar{x}_1(\alpha)\,(\bar{x}_2(\alpha)+\bar{x}_3(\alpha)) = (c_1+k_1\alpha)\cdot(c_2+k_2\alpha+c_3+k_3\alpha) =$$
$$= (c_1+k_1\alpha)\cdot(c_2+c_3+(k_2+k_3)\,\alpha) =$$
$$= c_1c_2+c_1c_3+(c_1k_2+c_2k_1+k_1k_2)\,\alpha+(c_1k_3+c_3k_1+k_1k_3)\,\alpha.$$

Сравнение результатов вычислений подтверждает верность равенства (2.44), т. е. дистрибутивность операции умножения относительно сложения.

Проиллюстрируем введённые операции примерами.

Пример. Даны нечёткие числа $\tilde{A} = \langle 4;1;2\rangle$. $\tilde{B} = \langle 7;3;1\rangle$ и $\tilde{C} = \langle 1;4;2\rangle$. Выполнить операции $2\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{C}$, $\tilde{C}\left(\tilde{A}-3\tilde{B}\right)$ с использованием модифицированных чисел.

Вначале найдём оптимальные в смысле сохранения нечёткой информации значения λ:

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_{\tilde{A}} = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3}; \\ \lambda_{\tilde{B}} = \dfrac{3}{3+1} = \dfrac{3}{4}; \\ \lambda_{\tilde{C}} = \dfrac{4}{4+2} = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Найдём модифицированные нечёткие числа для каждого из исходных чисел согласно формулам (2.36) и (2.37):

$$\left[\begin{array}{l} \bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = 4+2-\dfrac{1}{3}(1+2)+\left(\dfrac{1}{3}(1+2)-2\right)\alpha = 5-\alpha; \\ \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) = 7+1-\dfrac{3}{4}(3+1)+\left(\dfrac{3}{4}(3+1)-1\right)\alpha = 5+2\alpha; \\ \bar{x}_{\tilde{C}}(\alpha) = 1+2-\dfrac{2}{3}(4+2)+\left(\dfrac{2}{3}(4+2)-2\right)\alpha = -1+2\alpha. \end{array}\right.$$

Значение первого выражения в модифицированном виде равно

$$2\tilde{A}^* + \tilde{B}^*\tilde{C}^* = 2(5-\alpha)+(5+2\alpha)(-1+2\alpha) =$$
$$= 10-2\alpha+(-5+(10-2+4)\alpha) = 5+10\alpha,$$

а второго

$$\tilde{C}^*\left(\tilde{A}^* - 3\tilde{B}^*\right) = (-1+2\alpha)(5-\alpha-3(5+2\alpha)) = (-1+2\alpha)(-10-7\alpha) =$$
$$= 10+(7-20-14)\alpha = 10-27\alpha.$$

Единичный и обратный элементы

Перейдём к рассмотрению нейтрального по умножению и обратного элементов. Введём единичный элемент

$$\bar{1} = 1+0\alpha \in K$$

такой, что

$$\forall \bar{x}(\alpha) \in K \quad \bar{x}(\alpha)\cdot\bar{1} = \bar{x}(\alpha).$$

Это равенство легко подтверждается с помощью формулы (2.43):

$$\bar{1} \cdot \bar{x}(\alpha) = (1 + 0\alpha)(c + k\alpha) = c + k\alpha = \bar{x}(\alpha).$$

Несколько сложнее вводится на множестве К обратный элемент $\bar{x}^{-1}(\alpha) \in K$ такой, что

$$\bar{x}(\alpha)\,\bar{x}^{-1}(\alpha) = \bar{1}.$$

Поскольку предполагается, что $\bar{x}^{-1}(\alpha) \in K$, то будем искать обратный элемент в виде $\bar{x}^{-1}(\alpha) = c' + k'\alpha$. Имеем

$$\bar{x}(\alpha)\,\bar{x}^{-1}(\alpha) = (c + k\alpha)\left(c' + k'\alpha\right) = cc' + \left(ck' + c'k + kk'\right)\alpha = 1 + 0\alpha. \quad (2.45)$$

Из (2.45) очевидно, что должны выполняться равенства

$$\begin{cases} cc' = 1; \\ ck' + c'k + kk' = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим $c' = \dfrac{1}{c}$; $c \neq 0$. Подставляя найденное значение во второе уравнение, имеем:

$$ck' + \frac{k}{c} + kk' = 0,$$

откуда

$$k' = \frac{-k}{c\,(k + c)}.$$

Таким образом, обратный элемент вводится в виде

$$\bar{x}^{-1}(\alpha) = \frac{1}{c} - \frac{k}{c\,(c + k)}\alpha, \; c \neq 0. \quad (2.46)$$

Очевидно, что для существования обратного элемента число $\bar{x}(\alpha)$ должно иметь ненулевую моду, поскольку, согласно (2.37), $c + k = m \neq 0$.

Операция деления вводится как умножение числа $\bar{x}_1(\alpha)$ на число, обратное числу $\bar{x}_2(\alpha)$:

$$\frac{\bar{x}_1(\alpha)}{\bar{x}_2(\alpha)} = \bar{x}_1(\alpha)\,\bar{x}_2^{-1}(\alpha) = (c_1 + k_1\alpha)\left(\frac{1}{c_2} - \frac{k_2}{c_2(k_2+c_2)}\alpha\right) =$$
$$= \frac{c_1}{c_2} + \left(-\frac{c_1k_2}{c_2(k_2+c_2)} + \frac{k_1}{c_2} - \frac{k_1k_2}{c_2(k_2+c_2)}\right)\alpha;\; c_2 \neq 0;\; k_2 + c_2 \neq 0.$$

Таким образом, алгебра модифицированных нечётких чисел удовлетворяет всем аксиомам поля, а вводимые выше алгебраические операции над элементами множества K модифицированных нечётких чисел позволяют рассматривать его как линейное пространство над полем P [28].

2.3.2. Изоморфизм алгебр

Введённая выше алгебра на множестве K решает несколько проблем, обозначенных в главе 1 — создание полевой структуры, уменьшение размытости результатов и т.д. Однако

Сказать про нерешённость построения отношения полного порядка - сослаться на статью в Вестнике. Проблемы создания специального программного обеспечения решения задач на основе предложенной алгебры. Нерешенными остались проблемы построения полного порядка. Проведенное исследование показало, что подходящих методов сравнения нечетких чисел нет. Предложен изоморфизм алгебры модифицированных нечетких чисел, который позволяет решать нечеткую задачу как две четких задачи на заданных альфа –уровнях. Такой подход не только позволяет использовать все стандартные программные продукты для решения нечетких задач, но и решает проблему построения полного порядка.

Стоит отметить, что расчёты с использованием модифицированных нечётких чисел можно проводить несколько иным, более удобным с вычислительной точки зрения, методом. Поскольку все элементы множества K имеют линейную структуру, то для восстановления конкретного модифицированного числа $\tilde{A}$ достаточно знать два значения — $\bar{x}_{\tilde{A}}(0)$ и $\bar{x}_{\tilde{A}}(1) = m_{\tilde{A}}$. Их подстановка в уравнение прямой позволяет получить зависимость $\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha)$ или $\mu_{\tilde{A}}(x)$ в явном виде:

$$\frac{\alpha - 0}{1 - 0} = \frac{\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) - \bar{x}_{\tilde{A}}(0)}{\bar{x}_{\tilde{A}}(1) - \bar{x}_{\tilde{A}}(0)};$$

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = \bar{x}_{\tilde{A}}(0) + \alpha\left(\bar{x}_{\tilde{A}}(1) - \bar{x}_{\tilde{A}}(0)\right) = \alpha\bar{x}_{\tilde{A}}(1) + (1-\alpha)\,\bar{x}_{\tilde{A}}(0). \tag{2.47}$$

Все вычисления с использованием данного способа ведутся только на двух α-уровнях над действительными числами без использования дополнительных параметров. Если обозначить за $*$ произвольную арифметическую операцию, то для чисел в форме (2.47) её результат будет выглядеть следующим образом:

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) * \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) = \alpha\left(\bar{x}_{\tilde{A}}(1) * \bar{x}_{\tilde{B}}(1)\right) + (1-\alpha)\left(\bar{x}_{\tilde{A}}(0) * \bar{x}_{\tilde{B}}(0)\right).$$

По сути, вводится другая алгебра на множестве K, оперирующая парой чётких значений и автоморфная введённой ранее алгебре модифицированных нечётких чисел. В самом деле, существует взаимно однозначная функция $f : K \to K$, которая позволяет сопоставить числу вида $c + k\alpha$ число вида $\alpha\bar{x}_{\tilde{A}}(1) + (1-\alpha)\,\bar{x}_{\tilde{A}}(0)$. Воспользовавшись (2.47), (2.36) и приравняв свободные члены и коэффициенты при α, получим следующее соответствие

$$\left[\begin{array}{l} c = \bar{x}_{\tilde{A}}(0); \\ k = \bar{x}_{\tilde{A}}(1) - \bar{x}_{\tilde{A}}(0); \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \bar{x}_{\tilde{A}}(0) = c; \\ \bar{x}_{\tilde{A}}(1) = c + k. \end{array}\right.$$

Стоит отметить, что преобразование L и вводимая алгебра модифицированных нечётких чисел снимают проблему сравнения двух нечётких чисел, поскольку все сравнения при решении задач происходят с действительными значениями нечёткого числа на выбранных α-уровнях.

Пример. Даны нечёткие числа $\tilde{A} = \langle 4; 2; 3 \rangle$. $\tilde{B} = \langle -2; 6; 2 \rangle$ и $\tilde{C} = \langle 1; 1; 4 \rangle$. Вычислить значение $\tilde{D} = \dfrac{3\tilde{A}\tilde{C} + 4\tilde{B}}{\tilde{C}\left(\tilde{A} - 2\tilde{B}\right)}$ с использованием модифицированных чисел.

Воспользуемся упрощённой методикой вычислений. Оптимальные в смысле сохранения нечёткой информации значения λ равны:

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_{\tilde{A}} = \dfrac{2}{2+3} = \dfrac{2}{5}; \\ \lambda_{\tilde{B}} = \dfrac{6}{6+2} = \dfrac{3}{4}; \\ \lambda_{\tilde{C}} = \dfrac{1}{1+4} = \dfrac{1}{5}. \end{array}\right. \tag{2.48}$$

Используя формулы (2.37) с учётом (2.48), получим коэффициенты для модифицированных нечётких чисел:

$$\begin{gathered} c_{\tilde{A}} = 4 + 3 - \frac{2}{5}(2+3) = 5; \quad k_{\tilde{A}} = \frac{2}{5}(2+3) - 3 = -1; \\ c_{\tilde{B}} = -2 + 2 - \frac{3}{4}(6+2) = -6; \quad k_{\tilde{B}} = \frac{3}{4}(6+2) - 2 = 4; \\ c_{\tilde{C}} = 1 + 4 - \frac{1}{5}(1+4) = 4; \quad k_{\tilde{C}} = \frac{1}{5}(1+4) - 4 = -3. \end{gathered}$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} \bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = 5 - \alpha; \\ \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) = -6 + 4\alpha; \\ \bar{x}_{\tilde{C}}(\alpha) = 4 - 3\alpha. \end{array}\right. \tag{2.49}$$

При $\alpha = 1$ выражения (2.49) принимают следующие значения

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(1) = 4; \; \bar{x}_{\tilde{B}}(1) = -2; \; \bar{x}_{\tilde{C}}(1) = 1,$$

а при $\alpha = 0$

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(1) = 5; \; \bar{x}_{\tilde{B}}(1) = -6; \; \bar{x}_{\tilde{C}}(1) = 4.$$

Подставляя в выражение $\tilde{D} = \dfrac{3\tilde{A}\tilde{C} + 4\tilde{B}}{\tilde{C}\left(\tilde{A} - 2\tilde{B}\right)}$ вместо $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$ соответствующие им чёткие значения модифицированных чисел при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, получаем:

$$\bar{x}_{\tilde{D}}(1) = \left.\frac{3\tilde{A}^*\tilde{C}^* + 4\tilde{B}^*}{\tilde{C}^*\left(\tilde{A}^* - 2\tilde{B}^*\right)}\right|_{\alpha=1} = \frac{3\cdot 4\cdot 1 + 4\cdot(-2)}{1\cdot(4 - 2\cdot(-2))} = \frac{12-8}{4+4} = \frac{1}{2},$$
$$\bar{x}_{\tilde{D}}(0) = \left.\frac{3\tilde{A}^*\tilde{C}^* + 4\tilde{B}^*}{\tilde{C}^*\left(\tilde{A}^* - 2\tilde{B}^*\right)}\right|_{\alpha=0} = \frac{3\cdot 5\cdot 4 + 4\cdot(-6)}{4\cdot(5 - 2\cdot(-6))} = \frac{60-24}{4\cdot 17} = \frac{9}{17}.$$

Согласно формуле (2.47), модифицированный результат будет равен

$$\bar{x}_{\tilde{D}}(\alpha) = \frac{9}{17} + \alpha\left(\frac{1}{2} - \frac{9}{17}\right) = \frac{9}{17} - \frac{1}{34}\alpha.$$

Рассмотрим более сложный пример.

Пример. Решить уравнение $\tilde{A}x = \tilde{B}$, в котором $\tilde{A} = \langle 3;1;2\rangle$, $\tilde{B} = \langle 4;4;1\rangle$.

В терминах модифицированных нечётких чисел решение уравнения будет иметь вид

$$x(\alpha) = \frac{\bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha)}{\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha)}. \tag{2.50}$$

Поскольку операция деления для преобразованных нечётких чисел вводится как умножение на обратное число, перепишем (2.50) в виде

$$x(\alpha) = \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha)\cdot\bar{x}_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha). \tag{2.51}$$

Выберем значения $\lambda_{\tilde{A}}$ и $\lambda_{\tilde{B}}$, равные $\dfrac{a_{\tilde{A}}}{d_{\tilde{A}}}$ и $\dfrac{a_{\tilde{B}}}{d_{\tilde{B}}}$, в соответствие с критерием сохранения максимального количества нечёткой информации. Они равны

$$\lambda_{\tilde{A}} = \frac{1}{3};\ \lambda_{\tilde{B}} = \frac{4}{5}. \tag{2.52}$$

Воспользовавшись формулами (2.36), (2.37) и (2.52), получаем

$$\left[\begin{array}{l} \bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = 4 - \alpha; \\ \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) = 3\alpha + 1. \end{array}\right. \tag{2.53}$$

Найдём обратный элемент $\bar{x}_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha)$ согласно формуле (2.46):

$$\bar{x}_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = \frac{1}{4} - \frac{1}{(-1)\cdot(4-1)}\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\alpha. \tag{2.54}$$

Пользуясь значениями из (2.53), (2.54) и подставляя их в (2.51), окончательно получаем:

$$x(\alpha) = (1+3\alpha)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\alpha\right) = \frac{1}{4} + \frac{13}{12}\alpha. \tag{2.55}$$

Функция принадлежности модифицированного решения определяется как обратная к (2.55) — $\mu_{x(\alpha)}(x) = \dfrac{12}{13}x - \dfrac{3}{13}$. Подстановка решения задачи в исходное уравнение $\tilde{A}x = \tilde{B}$ с учётом формулы (2.43) приводит к верному равенству:

$$(4-\alpha)\left(\frac{1}{4} + \frac{13}{12}\alpha\right) = 3\alpha + 1;$$
$$\frac{52-13-3}{12}\alpha + 1 = 3\alpha + 1.$$

2.3.3. Алгебра двухкомпонентных нечётких чисел

Описанные выше модель представления нечётких чисел и методика нечётких вычислений применимы в случаях использования треугольных асимметричных нечётких чисел, когда допустимы некоторые потери экспертной информации ради создания подходящей алгебры над множеством нечётких чисел. Однако существуют ситуации, когда в задаче моделирования с чёткими отношениями и нечёткими параметрами потери экспертной информации недопустимы. В этом случае может применяться альтернативный подход к определению операций над нечёткими числами, описанный в [40]. Её ключевое отличие в том, что не используется преобразование для α-интервалов, а операции над числами выполняются как операции над левой и правой ветвями функции принадлежности.

Для удобства дальнейших вычислений, нечёткое треугольное число записывается в форме

$$\hat{X} = \left(x^L\left(\alpha\right); x^R\left(\alpha\right)\right), \tag{2.56}$$

где $x^L\left(\alpha\right)$, $x^R\left(\alpha\right)$ — функции, описываемые выражением (1.26). Такое представление позволяет рассматривать вычислительные операции над нечеткими LR-числами как операции над их компонентами — функциями $x^L\left(\alpha\right)$ и $x^R\left(\alpha\right)$, а также исследовать алгебраическую структуру множества таких функций. Символ «ˆ» используется над обозначением числа для того, чтобы отличать двухкомпонентное представление нечёткого числа от классических вариантов.

Если преобразовать выражения для функций (1.26) и обозначить $c_1 = m - a$, $c_2 = m + b$, $k_1 = a$, $k_2 = b$, где параметры c_1 и c_2 определяют границы носителя числа, то получится следующее эквивалентное представление двухкомпонентного нечёткого числа:

$$\hat{X} = \left(c_1 + k_1\alpha; c_2 - k_2\alpha\right) = \left(l\left(\alpha\right), r\left(\alpha\right)\right), c_1 + k_1\alpha,\ c_2 + k_2\alpha \in \mathbb{R}, \tag{2.57}$$

причём при $\alpha = 1$ верно равенство $c_1 + k_1 = c_2 - k_2 = m$.

Определение 2.3. *Нечёткое число, задаваемое выражением (2.57), называется двухкомпонентным нечётким числом.*

Как уже было отмечено, операции над двухкомпонентными числами числами вводятся как операции над левой и правой компонентами числа в представлении (2.57). В [40] отмечается, что эти компоненты можно рассматривать как два числа LL и RR-типа с функциями, обратными функциям принадлежности, вида $x\left(\alpha\right) = c + k\alpha \in K$. Выше уже была введена алгебра типа поле для модифицированных чисел, которые структурно являются числами LL/RR-типа, поэтому рассмотрим подробнее взаимодействие между обеими компонентами при выполнении операций над нечёткими числами. Если обозначить за $*$ одну из четырёх арифметических операций, то схема взаимодействия между компонентами выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}\left(l_1(\alpha), r_1(\alpha)\right) * \left(l_2(\alpha), r_2(\alpha)\right) = \\ = \left(l_1(\alpha) * l_2(\alpha), r_1(\alpha) * r_2(\alpha)\right) = \left(x_1(\alpha), x_2(\alpha)\right),\end{gathered} \tag{2.58}$$

где для результата справедливы следующие варианты: $(x_1, x_2) \in \{(l, r), (r, l), (l, l), (r, r)\}$, а тип функции ($l$ или r) определяется знаком параметра k в (2.57).

При выполнении операций над двухкомпонентными нечёткими числами согласно схеме (2.58), справедливы следующие допущения [40], которые позволяют избавить операции от жёсткой привязки к понятиям границ числа и левого и правого коэффициентов нечёткости:

- представление (2.57) двухкомпонентного числа в первую очередь рассматривается как отображение экспертных оценок о степени пессимизма и оптимизма относительно достижения величины m. В этом случае нечеткие числа типа (l, r) и (r, l) будут интепретироваться как описания степени оптимизма/пессимизма относительно достижения m, а числа типа (l, l) и (r, r) могут определяться как не совпадающее на численном уровне двойное суждение о степени оптимизма/пессимизма;

- в процессе обработки нечёткой информации допускается компенсация противоположных по смыслу оценок, что не противоречит здравому смыслу во многих задачах и позволяет сохранять тождественность чётких отношений, но не согласуется с постулатом теории вероятностей о возрастании дисперсии результата действий со случайными числами.

При невыполнении допущений, результат (l, r) однозначно выбирался бы из прямого произведения $(l_1, r_1) \times (l_2, r_2) = (l_1 l_2, l_1 r_2, r_1 l_2, r_1 r_2)$ в зависимости от знаков коэффициентов функций l и r, что полностью соответствует интервальным алгебрам нечётких чисел со всеми их недостатками, описанными в п. 2.1.

Рассмотрим два примера, иллюстрирующие вышеописанные утверждения.

Пример. Решить уравнение $\tilde{A}\tilde{X}+\tilde{B}=\tilde{0}$, где $\tilde{A}=\langle 2;1;1\rangle$, $\tilde{B}=\langle 5;3;2\rangle$.

Решение будем искать в виде $\tilde{X}=-\tilde{B}\tilde{A}^{-1}$. Найдём двухкомпонентные представления чисел $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$:

$$\hat{A}=(2-1+\alpha;2+1-\alpha)=(1+\alpha;3-\alpha)\,;$$
$$\hat{B}=(5-3+3\alpha;5+2-2\alpha)=(2+3\alpha;7-2\alpha)\,.$$

Обратное значение $\hat{A}^{-1}$ и противоположное $-\hat{B}$ равны

$$\hat{A}^{-1}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1\cdot(1+1)}\alpha;\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot(3-1)}\alpha\right)=\left(1-\frac{1}{2}\alpha;\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\alpha\right);$$
$$-\hat{B}=(-2-3\alpha;-7+2\alpha)\,.$$

Отсюда

$$\hat{X}=(-2-3\alpha;-7+2\alpha)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\alpha;\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\alpha\right)=$$
$$=\left(-2+\left(1-3+\frac{3}{2}\right)\alpha;-\frac{7}{3}+\left(-\frac{7}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\alpha\right)=\left(-2-\frac{1}{2}\alpha;-\frac{7}{3}-\frac{1}{6}\alpha\right).$$

Полученный результат является примером двойной численно несогласованной оценки.

Пример. Решить систему уравнений $Ax=B$ методом Крамера. Элементами матрицы A и вектора B являются нечёткие треугольные числа

$$\tilde{A}_{11}=\langle 3;2;1\rangle\,;\tilde{A}_{12}=\langle -2;2;1\rangle\,;\tilde{A}_{21}=\langle 3;1;1\rangle\,;\tilde{A}_{22}=\langle -1;4;1\rangle\,;$$
$$\tilde{B}_1=\langle 1;1;1\rangle\,;\tilde{B}_2=\langle 2;1;3\rangle\,.$$

Решение системы будем искать независимо для каждой из компонент чисел. Значения определителей системы равны

$$\left[\begin{array}{l} \Delta = \tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22} - \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{21}; \\ \Delta_1 = \tilde{B}_1\tilde{A}_{22} - \tilde{B}_2\tilde{A}_{12}; \\ \Delta_2 = \tilde{B}_2\tilde{A}_{11} - \tilde{B}_1\tilde{A}_{21}, \end{array}\right.$$

а числа в двухкомпонентной форме выглядят следующим образом:

$$\hat{A}_{11} = (1+2\alpha; 4-\alpha); \hat{A}_{12} = (-4+2\alpha; -1-\alpha);$$
$$\hat{A}_{21} = (2+\alpha; 4-\alpha); \hat{A}_{22} = (-5+4\alpha; -\alpha);$$
$$\hat{B}_1 = (\alpha; 2-\alpha); \hat{B}_2 = (1+\alpha; 5-3\alpha).$$

Для левых компонент определители равны

$$\left[\begin{array}{l} \hat{\Delta}^L = (1+2\alpha)(-5+4\alpha) - (-4+2\alpha)(2+\alpha) = -5+2\alpha+8-2\alpha = 3; \\ \hat{\Delta}_1^L = (0+\alpha)(-5+4\alpha) - (1+\alpha)(-4+2\alpha) = 4-\alpha; \\ \hat{\Delta}_2^L = (1+\alpha)(1+2\alpha) - (0+\alpha)(2+\alpha) = 1+5\alpha-3\alpha = 1+2\alpha; \end{array}\right.$$

откуда находим $\hat{X}_1^L$ и $\hat{X}_2^L$:

$$\hat{X}_1^L = \frac{\hat{\Delta}_1^L}{\hat{\Delta}^L} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\alpha;$$
$$\hat{X}_2^L = \frac{\hat{\Delta}_2^L}{\hat{\Delta}^L} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\alpha.$$

Аналогично, находим определители для правых компонент

$$\left[\begin{array}{l} \hat{\Delta}^R = (4-\alpha)(0-\alpha) - (-1-\alpha)(4-\alpha) = -3\alpha+4+2\alpha = 4-\alpha; \\ \hat{\Delta}_1^R = (2-\alpha)(0-\alpha) - (5-3\alpha)(-1-\alpha) = -\alpha+5-\alpha = 5-2\alpha; \\ \hat{\Delta}_2^R = (5-3\alpha)(4-\alpha) - (2-\alpha)(4-\alpha) = 20-14\alpha-8+5\alpha = 12-9\alpha; \end{array}\right.$$

и поэтому $\hat{X}_1^R$ и $\hat{X}_2^R$ равны

$$\hat{X}_1^R = \frac{\hat{\Delta}_1^R}{\hat{\Delta}^R} = (5-2\alpha)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\alpha\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\alpha;$$
$$\hat{X}_2^R = \frac{\hat{\Delta}_2^R}{\hat{\Delta}^R} = (12-9\alpha)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\alpha\right) = 3 - 2\alpha.$$

Окончательное решение записывается в виде

$$\left[\begin{array}{l} \hat{X}_1 = \left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3}\alpha; \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{4}\alpha\right); \\ \hat{X}_2 = \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\alpha; 3 - 2\alpha\right). \end{array}\right.$$

2.4. Определение условий устойчивости численного решения для задачи линейного программирования с нечеткими параметрами

Модификация формулировки задачи устойчивости в терминах ограничений. Использование предложенного метода для решения задачи линейного программирования с иллюстрацией устойчивого и неустойчивого решения.

Постановка задачи управления устойчивостью решения для модифицированных нечетких чисел в виде задачи векторной оптимизации. Обоснование построения линейной свертки критериев и алгоритм решения с использованием предложенного метода численной реализации.

Пример с задачей ЛП и переход к вопросам устойчивости решения

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования, которая в [34] решается с использованием преобразования L и алгебры модифицированных нечётких чисел.

Рассмотрим проблему устойчивости, возникающую при решении нечётких задач, на примере задачи линейного программирования с нечёткими параметрами. Для того, чтобы ввести определения устойчивости для нечёткой задачи, вначале рассмотрим формулировки для чёткой задачи линейного программирования, приведённые в [20].

Пусть дана задача линейного программирования

$$\begin{cases} \max \langle c, x \rangle \\ Ax \leqslant b \end{cases} \tag{2.59}$$

имеющая решение x^*. Возмущённой задачей линейного программирования называется задача

$$\begin{cases} \max \langle c(\delta), x \rangle \\ A(\delta)\, x \leqslant b(\delta) \end{cases} \tag{2.60}$$

относительно параметров которой известно, что они в смысле определённой метрики близки параметрам исходной задачи (2.59), т. е. для фиксированного $\delta > 0$ выполняются неравенства

$$\begin{cases} \|A(\delta) - A\| < \delta \\ \|b(\delta) - b\| < \delta \\ \|c(\delta) - c\| < \delta \end{cases} \tag{2.61}$$

При этом для фиксированных матрицы A и вектора b и $\forall\delta > 0$ выражения $A(\delta)$, $b(\delta)$ называют δ-окрестностью матрицы A и вектора b соответственно. В качестве метрики близости в (2.61) может использоваться, например, евклидова метрика.

Задачу (2.59) будем называть устойчивой, если $\exists\delta_0 > 0$: $\forall\delta \in [0; \delta_0]$ задача (2.60) имеет решение. Если обозначить решение задачи (2.60) за $x^*(\delta)$, то задачу (2.59) будем называть устойчивой по решению, если она устойчива и $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ такое, что при выполнении неравенств (2.61) для $\forall x^*(\delta)$ $\exists x^*$, удовлетворяющее условию $|x^*(\delta) - x^*| < \varepsilon$. Стоит отметить, что если задача (2.59) неустойчива в смысле хотя бы одного из приведённых выше определений, то она считается неустойчивой.

Для задач линейного программирования с нечёткими параметрами удобнее использовать определение устойчивости по решению, поскольку оно включает себя более узкое определение общей устойчивости, т. е. принципиальное существование решения возмущённой задачи. Пусть дана задача с нечёткими параметрами

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} \to \min; \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}, \end{cases}$$

где $\mathbf{A} = \left\{\tilde{A}_{ij}\right\}$ — матрица, а $\mathbf{B} = \left\{\tilde{B}_i\right\}$, $\mathbf{C} = \left\{\tilde{C}_i\right\}$ — векторы нечётких параметров. Применяя к каждому из элементов матрицы и векторов преобразование L, получаем модифицированную задачу

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^{\star}\mathbf{x} \to \min \\ \mathbf{A}^{\star}\mathbf{x} = \mathbf{B}^{\star} \end{cases} \tag{2.62}$$

в которой $\mathbf{A}^{*} = \left\{\bar{x}_{\tilde{A}_{ij}}(\alpha)\right\}$, $\mathbf{B}^{*} = \left\{\bar{x}_{\tilde{B}_i}(\alpha)\right\}$, $\mathbf{C}^{*} = \left\{\bar{x}_{\tilde{C}_i}(\alpha)\right\}$.

Задачу (2.62) удобнее всего решать на двух α-уровнях и восстанавливать решение согласно (2.47). Ввиду свойства сохранения моды, решение модифицированной задачи (2.62) при $\alpha = 1$ аналогично решению чёткой задачи с коэффициентами, равными модам нечётких чисел. Если решать ту же задачу при $\alpha = 0$ и без дополнительных ограничений на параметры λ преобразования L, то возникает ситуация, при которой все значения $\bar{x}_S(\alpha)$, где S – один из индексов $\tilde{A}_{ij}$, $\tilde{B}_i$, $\tilde{C}_i$, «сбиваются» в сторону минимума. Это легко объясняется тем фактом, что при $\lambda_S = 1$ максимальный вес в значении $\bar{x}_S(\alpha)$ имеет левая ветвь функции принадлежности. Для решения данной проблемы введём дополнительные ограничения для параметров λ_S:

$$\left(\lambda_S^{\star} - \lambda_S\right)^2 \to \min \tag{2.63}$$

которые позволяют минимизировать отклонение параметров от оптимальных в смысле сохранения нечёткой информации значений $\lambda_S^{\star} = \dfrac{a_S}{d_S}$.

Критерии (2.63) и целевая функция задачи (2.62) противоречивы. Возникает задача векторной оптимизации, описанная в [52]. Для её решения воспользуемся аддитивной свёрткой критериев:

$$f^* (\mathbf{x}) = \mathbf{C}^* \mathbf{x} + \gamma \sum_s (\lambda_S^* - \lambda_S)^2 \to \min \tag{2.64}$$

Семантика целевой функции (2.64) такова: ищется решение $\mathbf{x}$ и вектор параметров преобразования L λ_S, которые позволяют удовлетворить исходный критерий оптимизации и при этом максимально сохранить нечёткую информацию, заложенную экспертами в параметры задачи. Безразмерный коэффициент γ позволяет привести значение свёртки к одному порядку со значением исходной целевой функции.

Полученная пара векторов $\mathbf{x}(\alpha = 1)$ и $\mathbf{x}(\alpha = 0)$ позволяет восстановить модифицированные решения согласно (2.47). Если рассмотреть устойчивость нечёткого решения в смысле данного ранее определения для чёткой задачи, то справедливо предположить, что нечёткая задача будет считаться устойчивой по решению, если при переходе с одного α-уровня на другой не происходит значительного изменения решения относительно $\mathbf{x}(\alpha = 1)$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall \alpha \in [0; 1) \;\; |\alpha - 1| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(\alpha)\| < \varepsilon.$$

Конкретное же условие устойчивости решения зависит от задачи и может принимать различные формы.

Выводы по второй главе:

Глава 3. Тестирование моделей и методов обработки нечетких числовых переменных на примере задачи сетевого планирования

3.1. Постановка задачи сетевого планирования и сравнительный анализ методов её решения

3.1. Постановка и способы решения чёткой задачи КСПУ

Рассмотрим направленный ациклический граф (DAG, от directed acyclic graph, согласно терминологии [Кормен]) $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, обладающий следующими свойствами:

- существует ровно одна вершина $v_1 \in V$, называемая истоком, из которой рёбра только исходят, т.е. $\forall i = 2, n \nexists (v_i, v_1)$;

- существует ровно одна вершина $v_n \in V$, называемая стоком, в которую рёбра графа только входят, т.е. $\forall i = \overline{1, n-1} \nexists (v_n, v_i)$;

- для любой вершины графа $v_i \in V,\ i = \overline{1, n}$ существует путь $v_1 ... v_n$, проходящий через неё;

- для любого ребра $e_j \in E,\ j = \overline{1, m}$ существует путь $v_1 ... v_n$, содержащий это ребро.

В задачах календарно-сетевого планирования и управления (КСПУ) граф, удовлетворяющий перечисленным выше условиям, называется сетевым графиком, и часто применяется для определения продолжительности проекта, состоящего из набора зависящих друг от друга операций [Косоруков, Эддоус, Таха, Балашов]. Обычно работам проекта w_j , длительностью τ_j каждая, сопоставлены дуги графа e_j, $j = \overline{1, m}$. Событиям проекта z_i с временами наступления t_i сопоставления вершины графа v_i, $i = \overline{1, n}$. Событие z_1 – начало работ по проекту, событие z_n – окончание проекта. События проекта (вершины графа) обычно нумеруются, а операции (рёбра) обозначаются словами или буквами латинского алфавита.

Нетрудно заметить, что общее время выполнения проекта T будет равно длине максимального пути в графе, называемого также критическим. Соответственно, операции, которые принадлежат пути максимальной длины, также будут называться критическими. Изменение длительности любой из них приведёт к изменению общего времени выполнения проекта. Остальные операции являются некритическими и характеризуются т.н. резервом времени, т.е. максимальной задержкой по срокам выполнения, при которой общее время проекта не изменится.

Как указано в [Балашов], для сетевого графика всегда существует «правильная» нумерация, т.е. такая, при которой из вершины с большим порядковым номером не идут дуги в вершину с меньшим порядковым номером. В дальнейшем будем считать, что события проекта перенумерованы так, что нумерация является «правильной».

Для каждого события проекта в [Эддоус, Балашов, Таха] определяются следующие понятия. Величина t_i^- называется наиболее ранним моментом наступления события z_i и характеризует момент времени, раньше которого наступление z_i невозможно. Величина t_i^+ называется наиболее поздним моментом наступления события z_i и характеризует максимальное время наступления z_i, при котором общая продолжительность проекта не меняется. Полным резервом времени для события z_i называется разность наиболее позднего и наиболее раннего моментов его наступления, т.е. величина

$$\Delta t_i = t_i^+ - t_i^-$$

(1.119)

Аналогично, полным резервом времени работы w_s, которая начинается при наступлении события z_{i_s} и заканчивается событием z_{j_s}, называется величина

$$\Delta\tau_s = t_{j_s}^+ - t_{i_s}^- - \tau_s$$

(1.120)

События, у которых полный резерв времени равен нулю, являются потенциально критическими. Соответственно, работа w_s будет считаться критической, если её начальное и конечное событие потенциально критические, а её общий резерв времени равен нулю, т.е. одновременно выполняются условия, описываемые формулами (1.119) и (1.120):

$$\begin{cases} \Delta t_{i_s} = 0 \\ \Delta t_{j_s} = 0 \\ \Delta\tau_s = 0 \end{cases}$$

(1.121)

Задача поиска критического пути в графе G может быть решена различными способами. Наиболее простым является алгоритмический. Алгоритм поиска критического пути представляет собой алгоритм Дейкстры для нахождения кратчайшего пути в графе с изменённой функцией релаксации [Кормен, Индусы], которая позволяет искать вместо самого короткого пути самый длинный. Каждая вершина графа снабжается двумя метками – временем наиболее раннего наступления события t_i^- и временем наиболее позднего наступления события t_i^+. В начале работы алгоритма у всех вершин $t_i^- = 0$, $t_i^+ = \infty$. На каждом шаге для вершины v_i; $i = \overline{2, n}$ уточняется её t_i^-. Для этого вначале определяются вершины $\{v_j\}$, непосредственно предшествующие v_i, т.е. такие, что существует дуга e_{ji} между v_j и v_i. После этого находится t_i^- путём выбора максимума из сумм t^- непосредственно предшествующих событий и длительностей операций, которые связывают каждую из v_j с v_i:

$$t_i^- = \max_{v_j} \left\{ t_j^- + \tau_{ji} \right\}$$

(1.122) Процесс повторяется до тех пор, пока у всех событий не будут рассчитаны наиболее ранние сроки их наступления. t_n^- вершины-стока и будет общим временем выполнения проекта. Другими словами,

$$T = \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ t_i^- \right\}$$

(1.123) Псевдокод алгоритма приведён ниже.

Если необходимо, помимо общей длительности проекта, отыскать и критический путь, то по графу выполняется обратный проход, во время которого вычисляются наиболее поздние сроки наступления события. Для вершины-стока принимается, что $t_n^+ = t_n^-$. Для остальных вершин v_i; $i = \overline{n-1, 1}$ на каждом шаге вначале находятся непосредственно следующие за ними события $\{v_k\}$, т.е. такие, что существует дуга e_{ik} между v_i и v_k, после чего ищется t_i^+ в виде

$$t_i^+ = \min_{v_k} \left\{ t_k^+ - \tau_{ik} \right\}$$

(1.124) Критические операции проекта определяются согласно (1.121).

На рис. изображён сетевой граф проекта после выполнения вышеописанного алгоритма. Для каждого события проекта указан его номер, наиболее ранний и наиболее поздний сроки его наступления. Пунктиром выделены так называемые фиктивные стрелки (операции) с нулевой длительностью, которые необходимы для того, чтобы показать зависимость между операциями, не нарушая свойств направленного ациклического графа. Критический путь выделен жирным.

К недостаткам алгоритмического решения стоит отнести трудность его исследования задачи на устойчивость, поскольку результат алгоритмически, а не аналитически, зависит от входных данных. Для исследования на устойчивость больше подходит решение задачи методами линейного программирования. Классическая постановка этой задачи дана в [Косоруков]. Требуется решить задачу $T = t_n - t_1 \to \min$ (1.125) при ограничениях на времена наступления событий $t_{j_s} - t_{i_s} \geq \tau_s; \quad s = \overline{1,m}$ (1.126) где t_{i_s} и t_{j_s} – времена наступления событий начала и окончания работы w_s соответственно. Задача (1.125) при ограничениях (1.126) является задачей линейного программирования.

В результате решения данной задачи получается общее время выполнения проекта T, а также вектор времён $\mathbf{t} = \{t_1...t_n\}$, называемых календарным планом проекта, и совокупность критических операций $\mathbf{S_1}$ с нулевым общим резервом времени: $\Delta\tau_{s_1} = 0, \forall s_1 \in S_1$.

Постановка и методы решения нечёткой задачи КСПУ Рассмотрим сформулированные выше задачи (1.123) и (1.125) в случае, когда для временных оценок длительностей операций используются нечёткие треугольные числа $\tilde{\tau}_i$. Решению задачи календарно-сетевого планирования и управления с нечёткими параметрами посвящено немало публикаций в отечественной и зарубежной литературе, однако в большинстве случаев методы её решения можно разбить на три группы:

1. оперирующие нечёткими числами в неизменной форме с использованием принципа обобщения. К этим методам можно отнести, например, описанные в [Балашов], [Chanas];

2. вводящие операции сложения, вычитания и сравнения для нечётких чисел. Подобные методы изложены в [Усков График], [Leondes];

3. использующие дефаззификацию или получение чётких α-уровневых значений. Такие методы, описанные в [Египтяне, Индусы Ravi Shankar], обычно основываются на линейном программировании.

Рассмотрим методы первой группы на примере решения задачи поиска критического пути в [Балашов]. Пусть заданы функции принадлежности для нечётких оценок продолжительности операций $\mu_{\tilde{\tau}_s}(x)$. Если за Q_i обозначить множество номеров вершин, непосредственно предшествующих вершине v_i, а за R_i – множество номеров вершин, непосредственно следующих за v_i, то, согласно принципу обобщения Заде, функция принадлежности нечёткого наиболее раннего срока наступления события z_i имеет вид

$$\mu_{\tilde{t}_i^-}(x) = \max_{\{(x_{ji}),j\in Q_i|\max(x_j+x_{ji})=x\}} \min\left[\min_{j\in Q_i}\left(\mu_{\tilde{t}_{ji}^-}(x_{ji})\right);\mu_{\tilde{t}_j^-}(x_j)\right]$$

(1.127)

Функция принадлежности наиболее позднего срока наступления вычисляется следующим образом:

$$\mu_{\tilde{t}_i^+}(x) = \max_{\{(T,x_i)|T-x_i=x\}} \min_{i=\overline{1,n}}\left[\mu_{\tilde{T}}(T);\mu_{\tilde{l}_i}(x_i)\right]$$

(1.128) где $\tilde{l}_i$ – нечёткая максимальная длина пути от вершины v_i до стока v_n, определяемая через функцию принадлежности

$$\mu_{\tilde{l}_i}(x) = \max_{\{(x_{ij}),j\in R_i|\max(x_j+x_{ji})=x\}} \min\left[\min_{j\in R_i}\left(\mu_{\tilde{t}_{ij}}(x_{ij})\right);\mu_{\tilde{l}_j}(x_j)\right]$$

(1.129) а $\tilde{T}$ – общее время проекта, функция принадлежности которого рассчитывается как

$$\mu_{\tilde{T}}(T) = \max_{\left\{(x_i),i=\overline{1,n}|\min(x_j)=T\right\}} \min_{j=\overline{1,n}}\left(\mu_{\tilde{t}_j^-}(x_j)\right)$$

(1.130)

Функции принадлежности полных нечётких резервов времени для событий имеют вид

$$\mu_{\Delta\tilde{t}_i}(x) = \max_{\{(y_i,x_i)|y_i - x_i = x\}} \min\left[\mu_{\tilde{t}_i^+}(y_i); \mu_{\tilde{t}_i^-}(x_i)\right]$$

(1.131)

В полученной модели, задаваемой формулами (1.127) – (1.131), нельзя однозначно указать, какое из событий является критическим – авторы [Балашов] указывают, что функции принадлежности полных резервов времени для каждого события (1.131) при $x = 0$ могут быть интерпретированы как степени принадлежности событий критическому пути. В [Балашов] также предлагается следующая классификация событий для модели КСПУ с интервальной неопределённостью – критические, полукритические и некритические. Согласно результатам, полученным в [Zielinksi-1], схожая классификация может быть распространена и на нечёткий случай:

- однозначно критической в [Zielinksi-1] называется такая операция, которая при замене длительностей операций $\tilde{\tau}_i$ во всём проекте их любыми чёткими значениями $\tau_i \in supp(\tilde{\tau}_i)$ является критической в классическом понимании этого термина;

- потенциально некритической называется такая операция, которая при замене длительностей операций $\tilde{\tau}_i$ во всём проекте их любыми чёткими значениями $\tau_i \in supp(\tilde{\tau}_i)$, не является критической в классическом понимании этого термина.

Решение задачи, предложенное в [Балашов], обладает несколькими существенными недостатками:

- громоздкость вычислений, основанных на принципе обобщения Заде;

- как отмечено в [Zielinksi-1]. до сих пор остаётся нерешённым в общем случае вопрос о степени критичности операции из-за трудности нахождения отдельных критических операций в сетях проектов, где не существует однозначно критического пути, т.е. такого, все операции которого являются однозначно критическими;

- сложность интерпретации результата лицом, принимающим решение – трудно выбрать из нескольких критических путей «наиболее критический», в [Zielinksi-1] для этого используется довольно громоздкий алгоритм;

- не решена проблема устойчивости решения – применение принципа обобщения может привести к неоправданному расширению носителя результата, что также сказывается на полезности его практического применения. Методы второй группы обычно получают проблемы в наследство от используемых в них алгебр и способов сравнения нечётких чисел, а в методах третьей возникают трудности с восстановлением функции принадлежности нечёткого результата по значениям на различных α-уровнях.

3.2. Решение задачи сетевого планирования с получением устойчивых результатов

Подробное описание примера применения разработанных методов к задаче сетевого планирования: поиск критического пути, распределение ресурсов и решение проблемы устойчивости.

Для решения задачи воспользуемся вводимой в п. 2.3 алгеброй модифицированных нечётких чисел. Для начала сформулируем задачу для произвольного α-уровня. Преобразование L, применяемое в данной задаче, несколько отличается от вводимого в главе 2 формулой (1.45), поскольку параметры λ необходимо изменять, управляя, таким образом, устойчивостью задачи линейного программирования

$$L(\tau_i(\alpha)) = \bar{\tau}_i(\alpha, \lambda_{\tau_i}) = \lambda_{\tau_i}\tau_i^L(\alpha) + (1 - \lambda_{\tau_i})\tau_i^R(\alpha)$$

(1.132)

В формуле (1.132)

$$\left[\begin{array}{l} \tau_i^L(\alpha) = m_{\tilde{\tau}_i} - a_{\tilde{\tau}_i} + a_{\tilde{\tau}_i}\alpha \\ \tau_i^R(\alpha) = m_{\tilde{\tau}_i} + b_{\tilde{\tau}_i} - b_{\tilde{\tau}_i}\alpha \end{array}\right.$$

(1.133)

В результате, на каждом из α-уровней задача линейного программирования будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} T(\alpha) = t_n - t_1 \to \min \\ t_{j_s} - t_{i_s} \geq \bar{\tau}_s(\alpha, \lambda_s), \ \forall s = \overline{1, m} \end{cases}$$

(1.134)

Результатом решения задачи (1.134) является вектор времён $t\,(\alpha) = \{t_0(\alpha, \lambda_0), ..., t_n(\alpha, \lambda_n)\}$, который является календарным планом α-уровня, а также множество критических операций $S_1\,(\alpha)$.

Нечеткость оценок $\tilde{\tau}_i$ обуславливает проблему устойчивости решений задачи (1.134) в смысле (1.118). Для неустойчивой задачи на различных α-уровнях решения соответствуют различным критическим путям и возникает проблема объединения разнородных α-уровневых решений $S_1\,(\alpha)$. Очевидно, что задача будет устойчива, если критический путь не меняется при переходе с одного α-уровня на другой. Поэтому в данной ситуации целесообразно исследовать задачу (1.134) на устойчивость и выяснить, при каких значениях параметра λ критический путь одинаков на всех α-уровнях.

При решении задачи (1.134), будем использовать параметр

$$\lambda_s^* = \frac{a_s}{a_s + b_s}$$

, оптимальный в смысле сохранения максимального количества характеристик нечёткого числа.

Согласно данному ранее определению (1.118), задачу (1.134) поиска критического пути на α-уровне будем считать устойчивой по решению, если она устойчива и если S_1 не зависит от α, т.е. на всех α-уровнях критический путь не изменяется и проходит по одним и тем же рёбрам. Условие устойчивости выполняется автоматически, поскольку в сетевом графике всегда существует хотя бы один путь от истока к стоку, следовательно, независимо от величин весов рёбер, всегда существует путь максимальной длины [Кормен]. Что касается устойчивости по решению, то, поскольку результатом решения задачи о критическом пути является множество номеров критических операций, целесообразно выбрать в качестве метрики сходства решений мощность симметрической разности двух множеств. Очевидно, что если для $\alpha_1, \alpha_2 \in [0;1]\,;\ \alpha_1 \neq \alpha_2\ S_1(\alpha_1) = S_1(\alpha_2)$, то мощность симметрической разности этих множеств $S_1(\alpha_1)\,\Delta S_2(\alpha_2)$ равна нулю, т.е. критические пути на разных α-уровнях совпадают.

Таким образом, задачу поиска критического пути на α-уровне будем считать устойчивой по решению, если она устойчива и если $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0;1]\,;\ \alpha_1 \neq \alpha_2\ S_1(\alpha_1)\,\Delta S_2(\alpha_2) = \varnothing$ (1.135) т.е. на всех α-уровнях критический путь не изменяется и проходит по одним и тем же дугам. В п. 2.3 было показано, что для получения функции принадлежности модифицированного нечёткого числа, достаточно знать его значения в двух точках – при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. На этом основывается упрощённый способ вычислений

причём будем вести расчёты только на двух α-уровнях – при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$.

В качестве невозмущённой задачи возьмём исходную задачу (1.134) при $\alpha = 1$. Возмущения возникают при изменении α и λ, поскольку в этом случае меняется чёткое значение числа на каждом α-срезе. На устойчивость задачи можно влиять, изменяя параметры λ для каждого из чисел. Поскольку преобразование L является линейным, то для дальнейшего анализа задачи (1.134) на устойчивость достаточно решить её при $\alpha = 1$, а затем, зафиксировав полученный критический путь с помощью изменения части ограничений на строгие равенства для соответствующих операций, проверить существование решения при $\alpha = 0$ и степень его совпадения с решением при $\alpha = 1$.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗДЕСЬ!

Выводы по третьей главе

Глава 4. Описание программной реализации

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. На основе анализа ...

2. Численные исследования показали, что ...

3. Математическое моделирование показало ...

4. Для выполнения поставленных задач был создан ...

И какая-нибудь заключающая фраза.

Литература

1. Abbasbandy S., Allahviranloo T., Salahshour S. Ranking fuzzy numbers using fuzzy maximizing-minimizing points // Proceedings of the 7th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT-1022) and LFA-2011. — Atlantis Press, 2011. — P. 763–769.

2. Chanas S., Dubois D., Zielinski P. On the Sure Criticality of Tasks in Activity Networks With Imprecise Duration // IEEE Transactions on systems, Man and Cybernetics – Part B: Cybernetics. — 2002. — Vol. 32, no. 4. — P. 393–407.

3. Chanas S., Zielinski P. Critical path analysis in the network with fuzzy activity times // Fuzzy sets and systems. — 2001. — Vol. 122. — P. 195–204.

4. Chang P.-T., Lee E.S. Ranking of Fuzzy Sets Based on the Concept of Existence // Computers and mathematics with applications. — 1994. — Vol. 27. — P. 1–21.

5. Detyniecki M., Yager R. R. Ranking fuzzy numbers using alpha-weighted valuations // International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. — 2001. — Vol. 8(5). — P. 573–592.

6. Dutta P., Boruah H., Ali T. Fuzzy arithmetic with and without using alpha-cut method: A Comparative study // International Journal of Latest trends in Computing. — 2011. — Vol. 2.

7. El-Santawy M. F., Abd-Allah S. M. The longest Path Problem in Fuzzy Project Networks: A Case Study // Gen. Math. Notes. — 2011. — Vol. 3, no. 2. — P. 97–107.

8. Fuzzy Theory Systems: Techniques and Applicatons / Ed. by Cornelius T. Leondes. — London : ACADEMIC PRESS, 1999. — P. 1777.
9. Maduri K. Usha, Saradhi B. Pardha, Shankar N. Ravi. Fuzzy Linear Programming Model for Critical Path Analysis // International Journal of Contemp. Math. Sciences. — 2013. — Vol. 8. — P. 93–116.
10. P. Bauer S. Nouak R. Winkler. A brief course in Fuzzy Logic and Fuzzy Control. — URL: http://www.esru.strath.ac.uk/Reference/concepts/fuzzy/fuzzy.htm (online; accessed: 2014-12-19).
11. Rao P. P. B., Shankar N. R. Ranking generalized fuzzy numbers using area, mode, spreads and weight // International Journal of Applied Science and Engineering. — 2012. — Vol. 1, no. 10. — P. 41–57.
12. Shankar N. Ravi, Sireesha V. Using Modified Dijkstra's Algorithm for Critical Path method in a Project Network // International Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2010. — Vol. 5, no. 2. — P. 217–225.
13. Siler W., Buckley J. J. Fuzzy expert systems and fuzzy reasoning. — Hoboken, New Jersey : John Wiley and Sons, Inc., 2005. — P. 403.
14. Yager R. R. On the lack of inverses in fuzzy arithmetic // Fuzzy sets and systems. — 1980. — Vol. 4, no. 1.
15. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Information and control. — 1965. — no. 8. — P. 338–353.
16. Zimmermann H.-J. Fuzzy Set Theory and Its applications. — 3rd edition. — New York : Springer Science+Business Media, LLC, 1996. — P. 400.

17. Алгоритмы: построение и анализ: пер. с англ. / Т. Х. Кормен, Ч. И. Лейзерсон, Р. Л. Ривест, К. Штайн. — 2-е изд. — М. : Издательский дом «Вильямс», 2005. — С. 1296.

18. Алексеев А. В. Применение нечёткой математики в задачах принятия решений. — Рига : Риж. политехн. ин-т, 1983.

19. Алтунин А. Е., Семухин М. В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечётких условиях. — Тюмень : изд-во Тюменского государственного университета, 2000.

20. Ашманов С. А. Линейное программирование. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. — С. 340.

21. Балашов В. Г, Заложнев А. Ю., Новиков Д. А. Механизмы управления организационными проектами. — М. : ИПУ РАН, 2003. — С. 84.

22. Батыршин И. З. Основные операции нечёткой логики и их обобщения. — Казань : Отечество, 2001. — С. 102.

23. Белоусов А.И. Ткачев С.Б. Дискретная математика: учеб. для вузов / Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. — 3-е изд. — М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004. — С. 744.

24. Блюмин С. Л., Шуйкова И. А. Модели и методы принятия решений в условиях неопределённости. — Липецк : ЛЭГИ, 2001. — С. 138.

25. Борисов В. В., Круглов В. В., Федулов А. С. Нечёткие модели и сети. — 2-е изд. — М. : Горячая линия – Телеком, 2012. — С. 284.

26. Борисов А. Н., Крумберг О. А., Федоров И. П. Принятие решений на основе нечётких моделей: примеры использования. — Рига : Зинатне, 1990. — С. 184.

27. Бурков В. А., Новиков Д. А. Элементы теории графов. — 2004. — С. 28. — URL: http://www.mtas.ru/start/t_garf.pdf (дата обращения: 2014-12-15).

28. Воеводин В. В. Линейная алгебра. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. — С. 400.

29. Вопросы анализа и процедуры принятия решений / Под ред. к.ф.-м.н. И.Ф. Шахнова. — М. : Мир, 1976. — С. 230.

30. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Информационные технологии управления проектами в условиях расплывчатой неопределённости // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования: материалы V международной конференции. Воронеж, 11-16 сентября 2012 г. Дополнительный выпуск. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. — С. 8–10.

31. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Разработка информационных технологий и средства управления проектами в условиях расплывчатой неопределённости // Сборник студенческих научных работ факультета компьютерных наук ВГУ / Под ред. к.ф.-м.н. Е. А. Сирота. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. — С. 30–35.

32. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Влияние преобразования L на результаты арифметических операций с нечёткими LR-числами // Сборник трудов международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации», Алушта, 18–24 сентября 2013 г. — М. : Изд-во МГУПИ, 2013. — С. 14–15.

33. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Исследование свойств линейного отображения в задачах с нечёткими параметрами // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XIII научно-методической конференции. 7–8 февраля 2013 г.: в 4 т. — Т. 1. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2013. — С. 298–304.

34. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Алгебраические операции с нечеткими LR-числами с использованием преобразования L // Программная инженерия. — 2014. — № 8. — С. 23–29.

35. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Влияние преобразования L на результаты арифметических операций с нечёткими LR-числами // Сборник трудов международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации», Алушта, 18–24 сентября 2014 г. — 2014.

36. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Методы параметризованного сравнения нечётких треугольных и трапециевидных чисел // Вестник ВГУ, серия «Системный анализ и информационные технологии». — 2014. — № 2. — С. 90–97.

37. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Постановка задачи об устойчивости альфа-уровневого метода поиска нечёткого критического пути // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XIV Международной научно-методической конференции, Воронеж, 6–8 февраля 2014 г.: в 4 т. — Т. 2. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — С. 360–363.

38. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Способ решения нечёткой задачи КСПУ с использованием преобразования L // Радиоэлектроника, электротехника и энергетика: двадцатая международная научно–техническая конференция

студентов и аспирантов: тезисы докладов. Москва, 27–28 февраля 2014 г.: в 4 т. — Т. 2. — М. : Издательский дом МЭИ, 2014. — С. 58.

39. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Устойчивость решения в задаче о критическом пути с нечёткими параметрами // Вестник ВГТУ. — 2014. — № 7. — С. 90–97.

40. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г., Канищева О. И. Арифметические операции над двухкомпонентными нечёткими числами // Вестник ВГУ, серия «Системный анализ и информационные технологии». — 2014. — № 2. — С. 75–82.

41. Гриняев С. Нечёткая логика в системах управления. — URL: http://old.computerra.ru/offline/2001/415/13052/print.html (дата обращения: 2014-12-19).

42. Губко М. В. Лекции по принятию решений в условиях нечеткой информации. — М. : ИПУ РАН, 2004. — С. 38.

43. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике: Пер. с франц. — М. : Радио и связь, 1990. — С. 288.

44. Евдокимов А. В. Метод нечёткой линеаризации для численного решения алгебраических и дифференциальных уравнений // Электронный журнал «Исследовано в России». — 2003. — Т. 6. — С. 2042–2058. — URL: http://www.sci-journal.ru/articles/2003/168.pdf (дата обращения: 2014-12-15).

45. Живицкая Е. Н. Системный анализ и проектирование: курс лекций. Лекция 12: Языки описания выбора. — URL: http://victor-safronov.narod.ru/systems-analysis/lectures/zhivickaya/14.html (дата обращения: 2014-12-15).

46. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближённых решений. — М. : Мир, 1976. — С. 165.

47. Ибрагимов В. А. Элементы нечёткой математики. — Баку, 2010. — С. 392. — URL: http://www.anl.az/el_ru/i/iv_enm.pdf (дата обращения: 2014-12-15).

48. Косоруков О. А., Мищенко А. В. Исследование операций: учебник / Под ред. проф. Н. П. Тихомирова д.э.н. — М. : Издательство «Экзамен», 2003. — С. 448.

49. Кофман А. Введение в теорию нечётких множеств: пер. с франц. — Москва : Радио и связь, 1982. — С. 432.

50. Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М. Дискретная математика для инженера. — 2-е изд. — М. : Энергоатомиздат, 1988. — С. 480.

51. Левин В. И. Интервальная математика и изучение неопределённых систем // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. — 2005. — № 5. — URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/51334.html (дата обращения: 2014-12-15).

52. Лотов А. В., Поспелова И. И. Многокритериальные задачи принятия решений: Учебное пособие. — М. : МАКС Пресс, 2008. — С. 197.

53. Методы решения задач управления предприятием в условиях расплывчатой неопределённости / Г. Н. Лебедев, О. И. Канищева, М. Г. Матвеев, М. Е. Семёнов // Вестник ВГУ, серия: Системный анализ и информационные технологии. — 2012. — № 1. — С. 102–106.

54. Нечёткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А. Н. Аверкин, И. З. Батыршин, А. Ф. Блишун и др. ; Под ред. Д. А. Поспелова. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — С. 312.

55. Обработка нечёткой информации в системах принятия решений / А. Н. Борисов, А. В. Алексеев, Г .В. Меркурьева, др. — М. : Радио и связь, 1989. — С. 304.

56. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечёткой исходной информации. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — С. 208.

57. Пегат А. Нечёткое моделирование и управление: пер. с англ. — 2-е изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. — С. 798.

58. Ротштейн А. П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткая логика, генетические алгоритмы, нейронные сети. — Винница : УНИВЕРСУМ—Винница, 1999. — С. 320.

59. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечёткие системы: пер. с польск. И.Д. Рудинского. — М. : Горячая линия – Телеком, 2006. — С. 452.

60. Соколов А. М. Методы и алгоритмы нечёткого моделирования механических систем // Информационные технологии. — 2007. — № 3. — С. 13–20.

61. Спесивцев А.В. Управление рисками чрезвычайных ситуаций на основе формализации экспертной информации / Под ред. проф. В. С. Артамонова. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2004. — С. 238.

62. Спесивцев А. В., Дроздов А. В., Кимяев И. Т. Обобщение дополнительных арифметических операций над нечёткими числами LR-типа // SCM-2011, Saint-Petersburg, 23-25 June 2011. — СПб., 2011.

63. Таха Х. А. Введение в исследование операций. — 7-е изд. — М. : Издательский дом «Вильямс», 2005. — С. 912.

64. Усков А. А. Сетевой график с продолжительностями работ в виде нечётких чисел LR–типа // Управление большими системами. — 2014. — Т. 47. — С. 6–17.

65. Усков А. А., Киселев И. А. Комплексный и матричный методы выполнения арифметических операций над нечёткими числами // Управление большими системами. — 2012. — Т. 40. — С. 96–107.

66. Усков А. А., Киселев И. А. Связь арифметики нечётких чисел с арифметикой кватернионов и её применение при анализе систем управления // Управление большими системами. — 2014. — Т. 48. — С. 59–70.

67. Усков А. А., Сургучева И. В., Горбунов А. М. Анализ систем обработки информации и управления с помощью групповых нечётких чисел // Программные продукты и системы. — 2009. — № 3. — С. 1209–1214.

68. Штовба С. Д. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику. — Винница : УНИВЕРСУМ Винница, 2001. — С. 756.

69. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений: пер. с англ. член.–корр. РАН И. И. Елисеевой. — М. : Аудит, ЮНИТИ, 1997. — С. 590.

70. Яхъяева Г. Э. Нечёткие множества и нейронные сети: учебное пособие. — М. : Интернет-Университет Информационных Технологий and БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — С. 316.