Математическое моделирование задач выбора с расплывчатой неопределенностью на основе методов представления и алгебры нечетких параметров

Я. А. Воронцов
Научный руководитель: М.Г.Матвеев, д.т.н., профессор.

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет»

Воронеж, 2015

Представление нечёткой информации

- нечёткие множества (подмножества предопределённого универсального множества X)

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \,|\, x \in X\}; \;\; E(\mu_{\tilde{A}}(x)) = [0;1] \qquad (1)$$

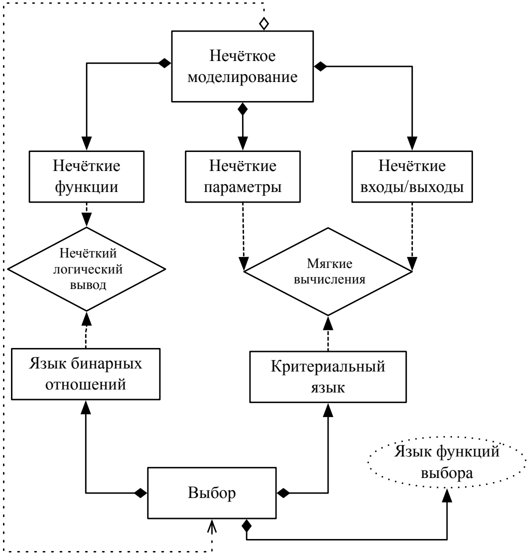
- нечёткие числа (подмножества множества $\mathbb{R}$)
  - кусочная непрерывность $\mu_{\tilde{A}}(x)$;
  - выпуклость $\mu_{\tilde{A}}(x)$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; \forall \gamma \in [0;1]$$
$$\mu_{\tilde{A}}(\gamma x_1 + (1-\gamma) x_2) \geqslant \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\} \qquad (2)$$

  - нормальность $\mu_{\tilde{A}}(x)$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (\mu_{\tilde{A}}(x)) = 1 \qquad (3)$$

Классификация нечётких моделей



- Исследуются модели, использующие чёткие отношения и нечёткие параметры (модели второго типа)
- Существующие подходы к нечётким вычислениям далеко не всегда применимы в моделях второго типа

Особенности существующих способов мягких вычислений

- требуются значительные вычислительные ресурсы (Ротштейн)

$$\tilde{y} = f\left(\tilde{x}_1 \ldots \tilde{x}_n\right) \to N = O\left(k^n\right)$$

- неоправданно расширяется носитель функции принадлежности

$$[2;4] \cdot [1;3] = [2;12]\,; \quad d = 12 - 2 = 10;$$
$$[2;4] \cdot [99;101] = [198;404]\,; \quad d = 404 - 198 = 206.$$

- происходит выход за класс используемых в арифметике чисел из-за искажения формы функции принадлежности;

$$\tilde{C} = \tilde{A} * \tilde{B} = \int\limits_{x_{\tilde{C}}^{L}}^{m_{\tilde{C}}} \frac{\mu_{\tilde{C}}(x)}{x} + \int\limits_{m_{\tilde{C}}}^{x_{\tilde{C}}^{R}} \frac{\mu_{\tilde{C}}(x)}{x}; \quad \mu_{\tilde{C}}(x) = k\sqrt{x} + b$$

Особенности существующих способов мягких вычислений

- ограничивается область определения функции принадлежности

$$\tilde{A} = (m_1, a_1, b_1)\,; \quad \tilde{B} = (m_2, a_2, b_2)\,;$$
$$\tilde{A} \times \tilde{B} = (m_1 m_2, m_2 a_1 + m_1 a_2, m_2 b_1 + m_1 b_2)\,; \quad \tilde{A}, \tilde{B} > 0$$
$$\tilde{A} \times \tilde{B} = (m_1 m_2, m_2 a_1 - m_1 b_2, m_2 b_1 - m_1 a_2)\,; \quad \tilde{A} > 0, \tilde{B} < 0$$
$$\tilde{A} \times \tilde{B} = (m_1 m_2, -m_2 b_1 - m_1 b_2, -m_2 a_1 - m_1 a_2)\,; \quad \tilde{A}, \tilde{B} < 0$$

- нарушаются классические отношения равенства и частичного порядка.

$$\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right) - \tilde{B} \neq \tilde{A}$$

Цель и задачи исследования

Цель: построение и исследование моделей учёта нечёткой неопределённости, обеспечивающих требуемые свойства решения (ограничение роста неопределённости, сохранение истинности модельных отношений, устойчивость решения) различных прикладных задач, а также разработка методов эффективного численного решения на основе вводимых моделей

Задачи:

- анализ существующих методик нечётких вычислений с точки зрения сохранения свойств решения задач;
- разработка модели представления нечётких чисел, позволяющей максимально сохранять исходную экспертную информацию и обеспечить требуемые качественные свойства решений (устойчивость, сохранение чётких математических соотношений и т. п.);

Цель и задачи исследования

Задачи:

- разработка методики эффективной численной реализации решения задач с нечёткими параметрами, основанной на подходящих алгебраических структурах и её тестирование на примере задачи сетевого планирования с нечёткими параметрами;
- разработка и верификация программного обеспечения, реализущего предложенную модель представления нечётких параметров и методики численного решения задач с нечёткими параметрами.

Основные понятия

- Треугольное нечёткое число $\tilde{A} = \langle m, a, b \rangle$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - m + a}{a}; & x \in [m - a; m] \\ \dfrac{m + b - x}{b}; & x \in (m; m + b] \\ 0; & \text{в остальных случаях} \end{cases} \qquad (4)$$

- Горизонтальная форма (Пегат) $X_\alpha = \left[x^L(\alpha); x^R(\alpha)\right]$

$$\left[\begin{array}{l} x^L(\alpha) = m - a + a\alpha \\ x^R(\alpha) = m + b - b\alpha \end{array}\right. \qquad (5)$$

- Треугольное число LL (RR)-типа — правый (левый) коэффициент нечёткости числа равен нулю

Преобразование L

- Переход к интервальной неопределенности

$$\tilde{Y} = f\left(\tilde{X}, \tilde{A}\right) \to \bigcup_{\alpha=0}^{1} y_\alpha = f\left(X_\alpha, A_\alpha\right) \tag{6}$$

- Формализованное представление α-интервала с помощью преобразования L

$$\bar{x}\left(\alpha\right) = L\left(X_\alpha\right) = \lambda x^L\left(\alpha\right) + \left(1 - \lambda\right) x^R\left(\alpha\right); \ \lambda \in [0; 1] \tag{7}$$

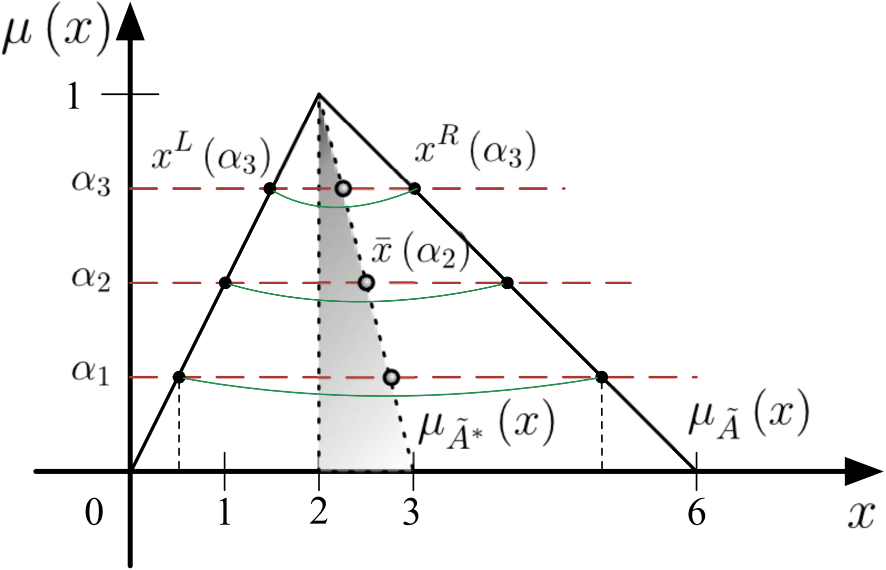
- Синтез модифицированного решения

$$\tilde{Y}^* = \bigcup_{\alpha=0}^{1} f\left(L\left(X_\alpha\right), L\left(A_\alpha\right)\right) = \left\{y_\alpha \left| \mu_{\tilde{Y}^*}(y) = \alpha \right.\right\} \tag{8}$$

- Модифицированное нечёткое число (LL/RR-типа)

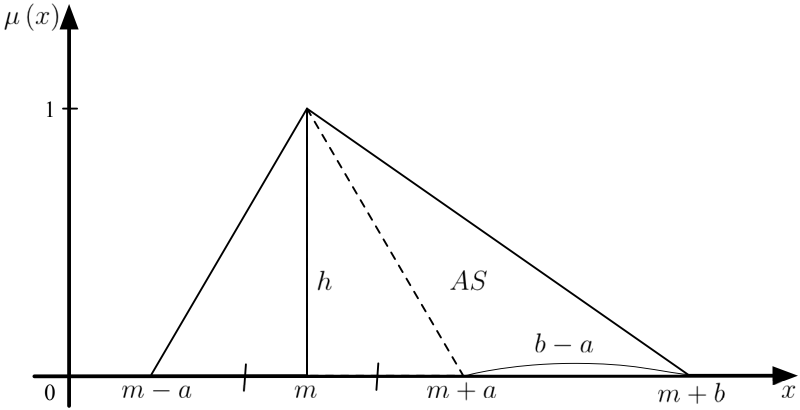
$$\mu_{\tilde{A}^*}\left(x\right) = \left(\bar{x}\left(\alpha\right)\right)^{-1} \tag{9}$$

Преобразование L



Представление числа

- Вводится модель представления нечёткого числа, инвариантноя к его расположению на числовой оси $\langle m_{\tilde{A}}, d_{\tilde{A}}, AS_{\tilde{A}} \rangle$; $d_{\tilde{A}} = a + b$; $AS_{\tilde{A}} = \dfrac{b-a}{2}$.



Свойства преобразования L

1. Преобразование L сохраняет моду нечёткого числа, т. е. $\forall\lambda \in [0;1]: \ m_{\tilde{A}} = m_{\tilde{A}^*}$.
2. При некоторых значениях параметра λ преобразование L сохраняет
   2.1 знак степени асимметрии: $\exists\lambda \in [0;1]: \ sign(AS_{\tilde{A}}) = sign(AS_{\tilde{A}^*})$;
   2.2 значение степени асимметрии: $\exists\lambda \in [0;1]: \ AS_{\tilde{A}} = AS_{\tilde{A}^*}$.

   $\lambda^* = \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{a}{d_{\tilde{A}}}$ сохраняет значение степени асимметрии.
3. $\forall\lambda \in [0;1]: A^*_\alpha \subset A_\alpha; \ d_{\tilde{A}} \geqslant d_{\tilde{A}^*}$ — преобразование L уменьшает длину носителя нечёткого числа и оставляет α-интервалы модифицированного числа внутри α-интервалов исходного числа.

Алгебра модифицированных нечётких чисел

- Алгебра $P = \langle K;\ +, *, 0, 1 \rangle$, $K = \{\bar{x}(\alpha)\}, \alpha \in [0;1]$

$$\bar{x}(\alpha) = c + k\alpha, \tag{10}$$

- Коэффициенты в (10)

$$\left[\begin{aligned} c &= m + b - \lambda(a+b) \\ k &= \lambda(a+b) - b \end{aligned}\right. \tag{11}$$

$$\lambda \in [0;1];\ c, k \in \mathbb{R}$$

- Элементы множества K линейны; достаточно знать два значения — $\bar{x}_{\tilde{A}}(0)$ и $\bar{x}_{\tilde{A}}(1) = m_{\tilde{A}}$, чтобы найти $\tilde{A}$:

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = \bar{x}_{\tilde{A}}(0) + \alpha\left(\bar{x}_{\tilde{A}}(1) - \bar{x}_{\tilde{A}}(0)\right) = \tag{12}$$

$$= \alpha\bar{x}_{\tilde{A}}(1) + (1-\alpha)\,\bar{x}_{\tilde{A}}(0) \tag{13}$$

Сложение и его свойства

- Операция сложения на множестве K

$$\bar{x}_1(\alpha)+\bar{x}_2(\alpha) = r_1(\alpha) = c_1+c_2+(k_1+k_2)\,\alpha,\ r_1(\alpha)\in K \quad (14)$$

- Нейтральный по сложению элемент

$$\begin{gathered}\bar{0} = 0 + 0\alpha \in K : \forall \bar{x}(\alpha) \in K : \\ \bar{x}(\alpha) + \bar{0} = c + k\alpha + 0 + 0\alpha = \bar{x}(\alpha)\end{gathered} \quad (15)$$

- Противоположный по сложению элемент (16)

$$-\bar{x}(\alpha) = -c - k\alpha \in K:\ \bar{x}(\alpha) + (-\bar{x}(\alpha)) = \bar{0} \quad (16)$$

- Алгебра $\langle K, +, 0\rangle$ — абелева группа

Умножение и его свойства

- Операция умножения на множестве K

$$r_2(\alpha) = c_1 c_2 + (c_1 k_2 + c_2 k_1 + k_1 k_2)\,\alpha; \;\; r_2(\alpha) \in K \tag{17}$$

- Нейтральный по умножению элемент

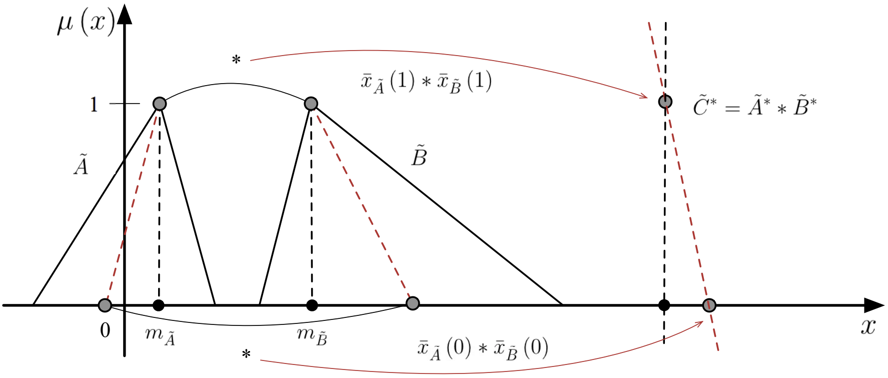
$$\bar{1} = 1 + 0\alpha \in K : \;\; \forall \bar{x}(\alpha) \in K \quad \bar{x}(\alpha) \cdot \bar{1} = \bar{x}(\alpha) \tag{18}$$

- Обратный по умножению элемент

$$\bar{x}^{-1}(\alpha) = \frac{1}{c} - \frac{k}{c\,(c+k)}\alpha \in K, \;\; c \neq 0 : \;\; \bar{x}(\alpha)\,\bar{x}^{-1}(\alpha) = \bar{1} \tag{19}$$

- При $c + k = m = 0$ (11) обратного элемента для $\bar{x}(\alpha)$ не существует
- Алгебра обратимых элементов $\langle K, *, 1 \rangle$ — абелева группа
- Умножение дистрибутивно относительно сложения

Двухточечные вычисления



Для произвольной арифметической операции $g : R^2 \to R$

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha)\, g\, \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) =$$
$$= \alpha\left(\bar{x}_{\tilde{A}}(1)\, g\, \bar{x}_{\tilde{B}}(1)\right) + (1-\alpha)\left(\bar{x}_{\tilde{A}}(0)\, g\, \bar{x}_{\tilde{B}}(0)\right) \tag{20}$$

Двухточечные вычисления

- Существуют отображения $\Gamma: \ K \to M$ и $\Gamma^{-1}: \ M \to K$:

$$\left[\begin{array}{l} P = \langle K, \Omega_1 \rangle \\ c = \bar{x}_{\tilde{A}}(0); \\ k = \bar{x}_{\tilde{A}}(1) - \bar{x}_{\tilde{A}}(0); \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Q = \langle M, \Omega_2 \rangle \\ \bar{x}_{\tilde{A}}(0) = c; \\ \bar{x}_{\tilde{A}}(1) = c + k; \end{array}\right. \qquad (21)$$

- Для бинарных операций $\varphi_i \in \Omega_1$, $\psi_i \in \Omega_2$ и элементов $k_1, k_2 \in K$, $m_1, m_2 \in M$:

$$\Gamma(\varphi_i(k_1, k_2)) = \psi_i(\Gamma(k_1, k_2)); \qquad (22)$$

$$\varphi_i\left(\Gamma^{-1}(m_1, m_2)\right) = \Gamma^{-1}(\psi_i(m_1, m_2)) \qquad (23)$$

- Ввиду (21), K и M суть одно и то же — изоморфизм доказывается простой подстановкой

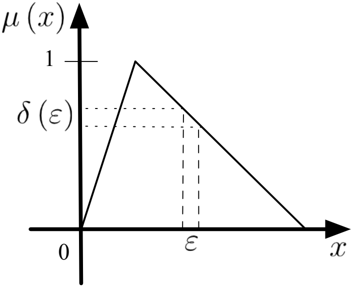
Устойчивость ЗЛП

Задача линейного программирования с нечёткими параметрами

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} \to \min; \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}, \end{cases} \to \begin{cases} f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^*\mathbf{x} \to \min; \\ \mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{B}^*, \end{cases} \qquad (24)$$

Решение задачи устойчиво (по Тихонову), если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0; 1]$$
$$|\alpha_1 - \alpha_2| < \delta \Rightarrow$$
$$\|\mathbf{x}(\alpha_1) - \mathbf{x}(\alpha_2)\| < \varepsilon \qquad (25)$$

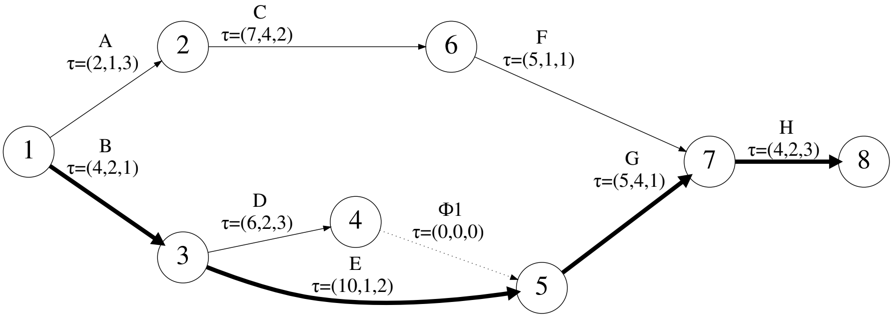


Устойчивость ЗЛП

- При $\alpha = 0$, все значения λ_S (S — индекс $\tilde{A}_{ij}$, $\tilde{B}_i$, $\tilde{C}_i$) — принимают граничные значения (0 или 1).
- Ограничения на λ для минимизации потерь экспертной информации
$$(\lambda_S^\star - \lambda_S)^2 \to \min \tag{26}$$
- Задача векторной оптимизации ввиду противоречивости критерия (26) и целевой функции задачи (24)
- Применяется аддитивная свёртка критериев в целевой функции (27)

$$f^*(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{C}^*\mathbf{x} + \gamma \sum_s (\lambda_S^* - \lambda_S)^2 \to \min \tag{27}$$

Задача сетевого планирования



$G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$;
дуги e_j — работы w_j, длительностью τ_j, $j = \overline{1, m}$;
вершины v_i — события z_i с временами наступления t_i, $i = \overline{1, n}$

Модифицированная задача сетевого планирования

- ЗЛП с нечёткими временными оценками

$$\begin{cases} T(\alpha) = t_n - t_1 \to \min \\ t_{j_s} - t_{i_s} \geqslant \bar{\tau}_s(\alpha, \lambda_s), \ \forall s = \overline{1, m}. \end{cases} \qquad (28)$$

- При $\alpha = 0$ решается возмущённая задача

$$\begin{cases} T^*(\alpha, \lambda) = t_n - t_1 + \gamma \sum\limits_{s=1}^{m} (\lambda_s^* - \lambda_s)^2 \to \min; \\ t_{j_{s_1}} - t_{i_{s_1}} = \bar{\tau}_{s_1}(\alpha, \lambda_{s_1}), \ \forall s_1 \in S_1(1); \\ t_{j_s} - t_{i_s} \geqslant \bar{\tau}_s(\alpha, \lambda_s), \ \forall s \notin S_1(1), \ s = \overline{1, m}. \end{cases} \qquad (29)$$

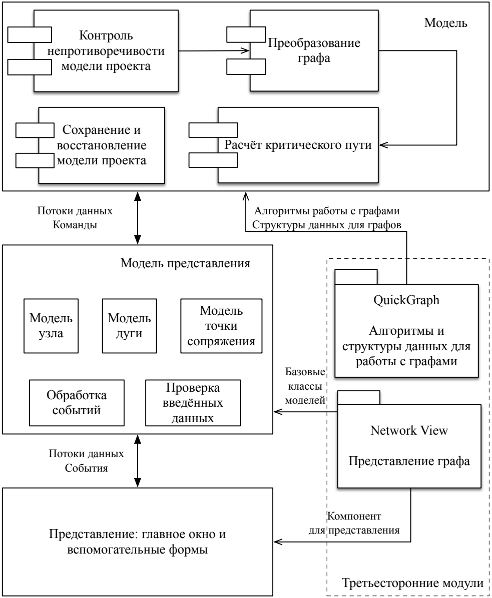
- Результат — совокупность $\left\langle \tilde{T}, S_1, \lambda \right\rangle$

Решение примера (с. 19)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Операция		Параметры				Лямбда идеал	Тау(Альфа)	Лямбда поиск		Тау(Альфа)	Гамма	Лямбда diff	
2		XL	M	XR	A	B		1			0	100		
3	A	1	2	5	1	3	0,2500	2	LA	0,2500	3,99999708		LA*-LA	0,0000
4	B	2	4	5	2	1	0,6667	4	LB	0,6817	2,9550035		LB*-LB	0,0002
5	C	3	7	9	4	2	0,6667	7	LC	0,6667	4,99999766		LC*-LC	0,0000
6	D	4	6	9	2	3	0,4000	6	LD	0,4000	7,00000351		LD*-LD	0,0000
7	E	9	10	12	1	2	0,3333	10	LE	0,3483	10,9550016		LE*-LE	0,0002
8	F	4	5	6	1	1	0,5000	5	LF	0,5000	5,00000421		LF*-LF	0,0000
9	G	1	5	6	4	1	0,8000	5	LG	0,8250	1,87500284		LG*-LG	0,0006
10	H	2	4	7	2	3	0,4000	4	LH	0,4250	4,8750047		LH*-LH	0,0006
11	Ф1	0	0	0	0	0	0,0000	0	LФ1	0,0000	0		LФ1*-LФ1	0,0000
12														
13	События	Время	Условия		Резервы	Оптимум			События	Время	Условия		Резервы	Оптимум
14	1	0	t2-t1>tauA	7	5	23			1	0,0090	t2-t1>tauA	4,2195	0,2195	20,83001
15	2	7	t3-t1>tauB	4	0				2	4,2285	t3-t1=tauB	2,9550	0,0000	
16	3	4	t6-t2>tauC	7	0				3	2,9640	t6-t2>tauC	5,7413	0,7413	
17	4	14	t4-t3>tauD	10	4				4	13,9190	t4-t3>tauD	10,9550	3,9550	
18	5	14	t5-t3>tauE	10	0				5	13,9190	t5-t3=tauE	10,9550	0,0000	
19	6	14	t7-t6>tauF	5	0				6	9,9698	t7-t6>tauF	5,8242	0,8242	
20	7	19	t7-t5>tauG	5	0				7	15,7940	t7-t5=tauG	1,8750	0,0000	
21	8	23	t8-t7>tauH	4	0				8	20,6690	t8-t7=tauH	4,8750	0,0000	
22			t5-t4>tauФ1	0	0						t5-t4>tauФ1	0,0000	0,0000	

Окончательный результат: $S_1 = \{B, E, G, H\}$,
$T(\alpha) = 20,67 + 2,33\alpha$,
$\lambda = \{0,25;\ 0,68;\ 0,67;\ 0,4;\ 0,35;\ 0,5;\ 0,83;\ 0;43\}$

Программное обеспечение



Результаты работы (мат. моделирование)

- Разработана и исследована модель представления нечётких числовых параметров математического описания объектов в классе треугольных LR-чисел, обеспечивающая возможность построения алгебраической структуры нечётких чисел, сохраняющей требуемые свойства решения задач выбора: ограничение роста неопределённости, сохранение истинности модельных отношений и возможность интерпретации полученного результата.

Результаты работы (численные методы)

- Разработан метод приближённого численного решения задач выбора с нечёткими параметрами, инвариантный к форме математического описания задачи, позволяющий строить нечёткое решение задач как линейную комбинацию чётких решений, полученных на границах интервального представления параметров, снизить вычислительную сложность процесса получения решения и применять стандартные программные продукты для нечётких вычислений.

Результаты работы (апробация методов)

- Предложенные методы решения задач выбора с нечёткими параметрами апробированы на задаче сетевого планирования с нечёткими временными оценками. В процессе апробации рассмотрена проблема устойчивости критического пути, обосновано введение свёртки критериев для управления устойчивостью и сформулирован алгоритм, обеспечивающий получение устойчивого решения задачи. Достоверность полученного решения подтверждается его сравнением с решениями, найденным с помощью других методов, хорошо зарекомендовавших себя в мировой практике.

Результаты работы (комплексы программ)

- Разработан программный комплекс, позволяющий решать задачу оценки сроков при разработке программного обеспечения как задачу сетевого планирования с нечёткими временными оценками и обеспечивающий учёт возможных рисков, возникающих при разработке программного обеспечения. Практическая ценность коплекса подтверждается актом о внедрении.

Апробация работы и публикации

Основные положения работы докладывались на конференциях:

- Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (Воронеж, 2012 г.)
- Информатика: проблемы, методология, технологии (Воронеж, 2013–2014 гг.);
- Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации (Алушта, 2013–2014 гг.);
- Радиоэлектроника, электротехника и энергетика (Москва, 2014).

Основное содержание диссертационного исследования изложено в 11 научных работах, из них 4 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ.