Математическое моделирование задач выбора с расплывчатой неопределенностью на основе методов представления и алгебры нечетких параметров

Я. А. Воронцов

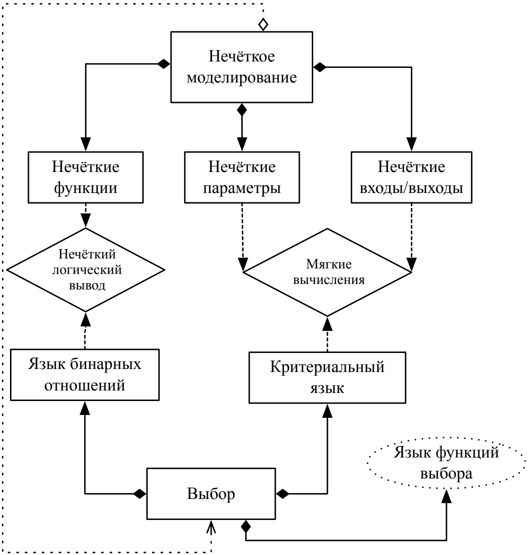
Научный руководитель: М.Г.Матвеев, д.т.н., профессор.

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет»

Воронеж, 2015

Классификация нечётких моделей



- Исследуются модели, использующие чёткие отношения и нечёткие параметры (модели второго типа)
- Существующие подходы к нечётким вычислениям далеко не всегда применимы в моделях второго типа

Особенности существующих способов мягких вычислений

- требуются значительные вычислительные ресурсы;
- неоправданно расширяется носитель функции принадлежности;
- происходит выход за класс используемых в арифметике чисел из-за искажения формы функции принадлежности;
- ограничивается область определения функции принадлежности;
- нарушаются классические отношения равенства и частичного порядка.

Цель и задачи исследования

Цель: построение и исследование моделей учёта нечёткой неопределённости, обеспечивающих требуемые свойства решения различных прикладных задач, а также разработка методов эффективного численного решения на основе вводимых моделей

Задачи:

- анализ существующих методик нечётких вычислений с точки зрения сохранения свойств решения задач;
- разработка модели представления нечётких чисел, позволяющей максимально сохранять исходную экспертную информацию и обеспечить требуемые качественные свойства решений (устойчивость, сохранение чётких математических соотношений и т. п.);

Цель и задачи исследования

Задачи:

- разработка методики эффективной численной реализации решения задач с нечёткими параметрами, основанной на подходящих алгебраических структурах и её тестирование на примере задачи сетевого планирования с нечёткими параметрами;
- разработка и верификация программного обеспечения, реализущего предложенную модель представления нечётких параметров и методики численного решения задач с нечёткими параметрами.

Представление нечёткой информации

- нечёткие множества (подмножества предопределённого универсального множества X)

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \,|\, x \in X\};\ \ E(\mu_{\tilde{A}}(x)) = [0; 1] \qquad (1)$$

- нечёткие числа (подмножества множества $\mathbb{R}$)
  - кусочная непрерывность $\mu_{\tilde{A}}(x)$;
  - выпуклость $\mu_{\tilde{A}}(x)$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; \forall \gamma \in [0; 1]$$
$$\mu_{\tilde{A}}(\gamma x_1 + (1-\gamma) x_2) \geqslant \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\} \qquad (2)$$

  - нормальность $\mu_{\tilde{A}}(x)$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (\mu_{\tilde{A}}(x)) = 1 \qquad (3)$$

Основные понятия

- Треугольное нечёткое число $\tilde{A} = \langle m, a, b \rangle$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - m + a}{a}; & x \in [m - a; m] \\ \dfrac{m + b - x}{b}; & x \in (m; m + b] \\ 0; & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{4}$$

- Число как совокупность α-интервалов $X_\alpha = \left[x^L(\alpha); x^R(\alpha)\right]$

$$\left[\begin{array}{l} x^L(\alpha) = m - a + a\alpha \\ x^R(\alpha) = m + b - b\alpha \end{array}\right. \tag{5}$$

- Число LL (RR)-типа — правый (левый) коэффициент нечёткости числа равен нулю

Преобразование L

- Переход к интервальной неопределенности

$$\tilde{Y} = f\left(\tilde{X}, \tilde{A}\right) \to \bigcup_{\alpha=0}^{1} y_\alpha = f\left(X_\alpha, A_\alpha\right) \tag{6}$$

- Переход к чётким значениям на каждом α-уровне

$$\bar{x}\left(\alpha\right) = L\left(X_\alpha\right) = \lambda x^L\left(\alpha\right) + \left(1 - \lambda\right) x^R\left(\alpha\right). \tag{7}$$

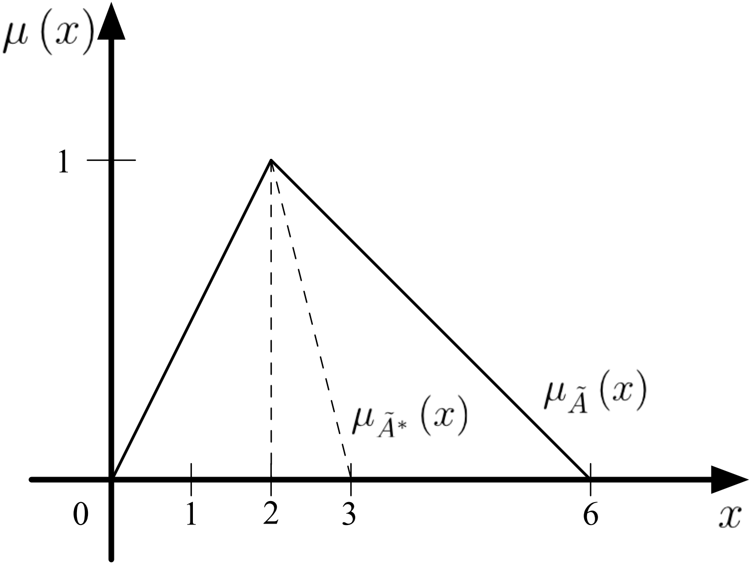
- Модифицированное решение

$$\tilde{Y}^* = \bigcup_{\alpha=0}^{1} f\left(L\left(X_\alpha\right), L\left(A_\alpha\right)\right) = \left\{y_\alpha \left| \mu_{\tilde{Y}^*}(y) = \alpha \right.\right\} \tag{8}$$

- Модифицированное нечёткое число (LL/RR-типа)

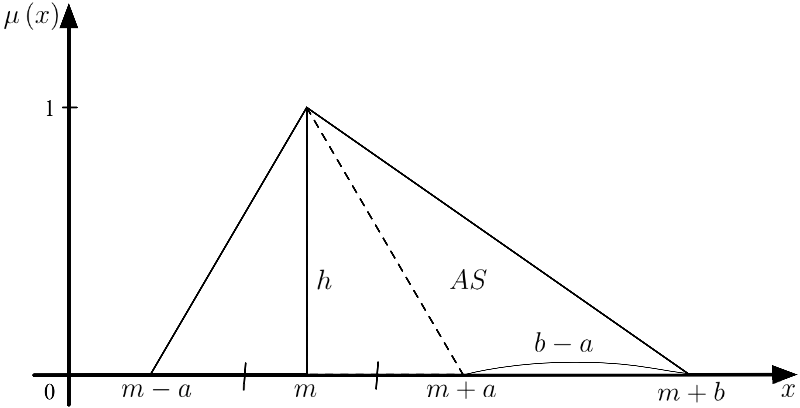
$$\mu_{\tilde{A}^*}\left(x\right) = \left(\bar{x}\left(\alpha\right)\right)^{-1} \tag{9}$$

Преобразование L



Представление числа

- Не чувствительная к знаку нечёткого числа форма $\langle m_{\tilde{A}}, d_{\tilde{A}}, AS_{\tilde{A}} \rangle$; $d_{\tilde{A}} = a + b$; $AS_{\tilde{A}} = \dfrac{b-a}{2}$.



Свойства преобразования L

1. Преобразование L сохраняет моду нечёткого числа, т. е. $\forall \lambda \in [0; 1]: \; m_{\tilde{A}} = m_{\tilde{A}^*}$.
2. При некоторых значениях параметра λ преобразование L сохраняет
   2.1 знак степени асимметрии: $\exists \lambda \in [0; 1]: \; sign(AS_{\tilde{A}}) = sign(AS_{\tilde{A}^*})$;
   2.2 значение степени асимметрии: $\exists \lambda \in [0; 1]: \; AS_{\tilde{A}} = AS_{\tilde{A}^*}$.

   $\lambda^* = \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{a}{d_{\tilde{A}}}$ сохраняет значение степени асимметрии.
3. $\forall \lambda \in [0; 1]: A^*_\alpha \subset A_\alpha; \; d_{\tilde{A}} \geqslant d_{\tilde{A}^*}$ — преобразование L уменьшает длину носителя нечёткого числа и оставляет α-интервалы модифицированного числа внутри α-интервалов исходного числа.

Алгебра модифицированных нечётких чисел

Алгебра $P = \langle K;\ +,\ *\rangle$, $K = \{\bar{x}(\alpha)\}$; P-поле. Используется более удобная форма записи модифицированного числа

$$\bar{x}\left(\alpha\right) = c + k\alpha, \tag{10}$$

$$\left[\begin{array}{l} c = m + b - \lambda\left(a + b\right) \\ k = \lambda\left(a + b\right) - b \end{array}\right. \tag{11}$$

$$\lambda \in \left[0; 1\right];\ \ c, k \in \mathbb{R}$$

Элементы множества K имеют линейную структуру, и для восстановления конкретного модифицированного числа $\tilde{A}$ достаточно знать два значения — $\bar{x}_{\tilde{A}}\left(0\right)$ и $\bar{x}_{\tilde{A}}\left(1\right) = m_{\tilde{A}}$:

$$\bar{x}_{\tilde{A}}\left(\alpha\right) = \bar{x}_{\tilde{A}}\left(0\right) + \alpha\left(\bar{x}_{\tilde{A}}\left(1\right) - \bar{x}_{\tilde{A}}\left(0\right)\right) = \alpha\bar{x}_{\tilde{A}}\left(1\right) + \left(1 - \alpha\right)\bar{x}_{\tilde{A}}\left(0\right) \tag{12}$$

Сложение и его свойства

На множестве K вводится операция сложения (13)

$$\bar{x}_1(\alpha) + \bar{x}_2(\alpha) = r_1(\alpha) = c_1 + c_2 + (k_1 + k_2)\alpha, \; r_1(\alpha) \in K; \quad (13)$$

нейтральный по сложению элемент (13)

$$\begin{gathered} \bar{0} = 0 + 0\alpha \in K : \forall \bar{x}(\alpha) \in K : \\ \bar{x}(\alpha) + \bar{0} = c + k\alpha + 0 + 0\alpha = \bar{x}(\alpha); \end{gathered} \quad (14)$$

противоположный по сложению элемент (15)

$$-\bar{x}(\alpha) = -c - k\alpha \in K : \; \bar{x}(\alpha) + (-\bar{x}(\alpha)) = \bar{0}. \quad (15)$$

Доказываются свойства ассоциативности и коммутативности операции (13).

Умножение и его свойства

На множестве K вводится операция умножения (16)

$$r_2(\alpha) = c_1c_2 + (c_1k_2 + c_2k_1 + k_1k_2)\,\alpha; \;\; r_2(\alpha) \in K. \qquad (16)$$

нейтральный по умножению элемент (17)

$$\bar{1} = 1 + 0\alpha \in K : \;\; \forall \bar{x}(\alpha) \in K \quad \bar{x}(\alpha) \cdot \bar{1} = \bar{x}(\alpha); \qquad (17)$$

обратный по умножению (18) элемент.

$$\bar{x}^{-1}(\alpha) = \frac{1}{c} - \frac{k}{c(c+k)}\alpha \in K, \;\; c \neq 0 : \;\; \bar{x}(\alpha)\,\bar{x}^{-1}(\alpha) = \bar{1}. \qquad (18)$$

Доказываются свойства ассоциативности и коммутативности, а также свойство дистрибутивности умножения (16) относительно сложения (13).

Показано, что для существования обратного элемента число $\bar{x}(\alpha)$ должно иметь ненулевую моду, поскольку, согласно (11), $c + k = m \neq 0$.

Двухточечные вычисления

- Согласно (12),

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = \alpha \bar{x}_{\tilde{A}}(1) + (1-\alpha)\,\bar{x}_{\tilde{A}}(0) \tag{19}$$

- Для произвольной алгебраической операции $*$

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) * \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) = \alpha\left(\bar{x}_{\tilde{A}}(1) * \bar{x}_{\tilde{B}}(1)\right) + (1-\alpha)\left(\bar{x}_{\tilde{A}}(0) * \bar{x}_{\tilde{B}}(0)\right). \tag{20}$$

- Преимущества:
  - решение нечёткой задачи как двух чётких при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$
  - нет необходимости вводить отношение линейного порядка
  - нет потребности в специализированном ПО

Устойчивость задачи линейного программирования (ЗЛП)

- Задача линейного программирования с нечёткими параметрами

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} \to \min; \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}, \end{cases} \to \begin{cases} f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^*\mathbf{x} \to \min; \\ \mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{B}^*, \end{cases} \tag{21}$$

$$\mathbf{A}^* = \left\{\bar{x}_{\tilde{A}_{ij}}(\alpha)\right\},\ \mathbf{B}^* = \left\{\bar{x}_{\tilde{B}_i}(\alpha)\right\},\ \mathbf{C}^* = \left\{\bar{x}_{\tilde{C}_i}(\alpha)\right\}$$

- Невозмущённое решение — при $\alpha = 1$ (свойство сохранения моды)
- Предлагаемое условие устойчивости по решению:

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 : \forall\alpha \in [0; 1)\ |\alpha - 1| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(\alpha)\| < \varepsilon \tag{22}$$

Устойчивость ЗЛП

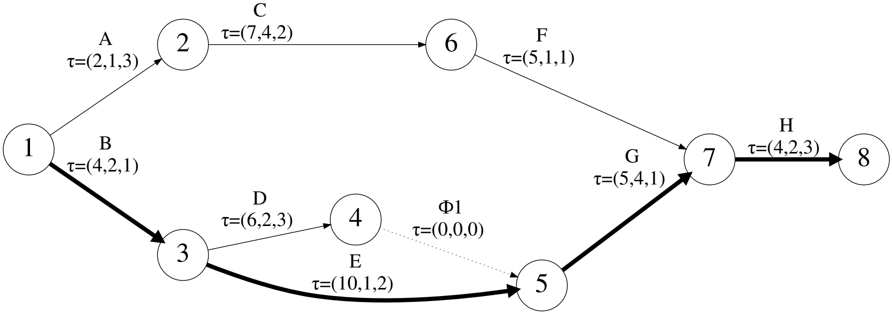
- При решении на уровне $\alpha = 0$, все значения λ_S (S — индекс $\tilde{A}_{ij}$, $\tilde{B}_i$, $\tilde{C}_i$) — принимают нулевые/единичные значения. Используется критерий для минимизации потерь экспертной информации

$$(\lambda_S^\star - \lambda_S)^2 \to \min \tag{23}$$

- Задача векторной оптимизации ввиду противоречивости критерия (23) и целевой функции задачи (21). Применяется аддитивная свёртка критериев в целевой функции (24)

$$f^*(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^*\mathbf{x} + \gamma \sum_s (\lambda_S^* - \lambda_S)^2 \to \min \tag{24}$$

Задача сетевого планирования



$G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$;
дуги e_j — работы w_j, длительностью τ_j, $j = \overline{1, m}$;
вершины v_i — события z_i с временами наступления t_i, $i = \overline{1, n}$

Модифицированная задача сетевого планирования

- Задача линейного программирования с нечёткими временными оценками

$$\begin{cases} T(\alpha) = t_n - t_1 \to \min \\ t_{j_s} - t_{i_s} \geqslant \bar{\tau}_s\left(\alpha, \lambda_s\right), \ \forall s = \overline{1, m}. \end{cases} \qquad (25)$$

  где t_{i_s} и t_{j_s} — времена наступления событий начала и окончания работы w_s соответственно
- Для решения используются двухточечные вычисления
- Результат решения — общее время выполнения проекта $\tilde{T}$, календарный план проекта $\mathbf{t} = \left\{\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_n\right\}$, совокупность критических операций S_1

Решение задачи сетевого планирования

- Полученное при $\alpha = 1$ решение задачи (25) даёт активные ограничения на критические операции и их номера S_1
- При $\alpha = 0$ решается возмущённая задача

$$\begin{cases} T^*(\alpha, \lambda) = t_n - t_1 + \gamma \sum\limits_{s=1}^{m} (\lambda_s^* - \lambda_s)^2 \to \min; \\ t_{j_{s_1}} - t_{i_{s_1}} = \bar{\tau}_{s_1}(\alpha, \lambda_{s_1}), \ \forall s_1 \in S_1(1); \\ t_{j_s} - t_{i_s} \geqslant \bar{\tau}_s(\alpha, \lambda_s), \ \forall s \notin S_1(1), \ s = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{26}$$

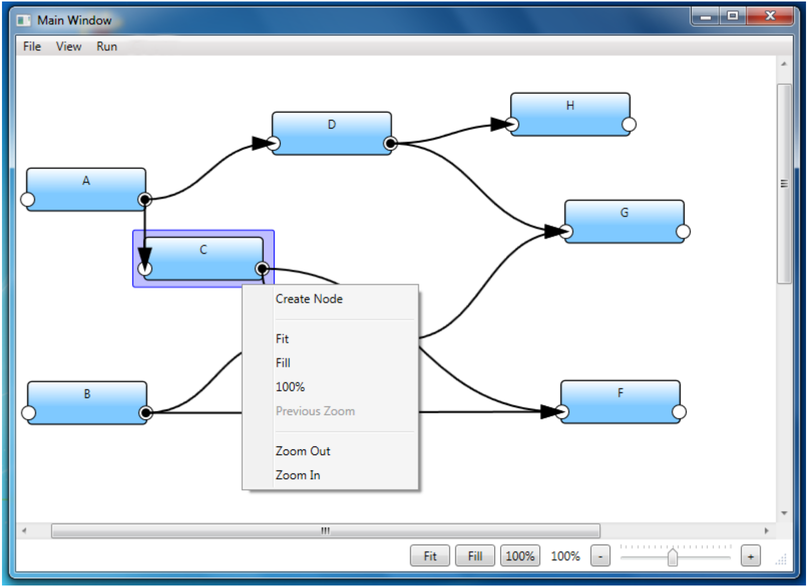
Программное обеспечение

Приложение «CSBusinessGraph» выполняет все вычисления только с использованием действительных переменных

Функциональные возможности

- создание и редактирование модели проекта в виде вершинного графа;
- поддержка модели проекта в согласованном состоянии;
- формирование временных оценок выполнения операций;
- автоматическое преобразование вершинного графа в стрелочный;
- реализация механизма расчёта критического пути на основе α-уровневых и двухточечных вычислений;
- экспорт отчёта о решении задачи в формат Microsoft Excel.

Главное окно приложения



Результаты работы

- Комплекс методов для моделей с чёткими отношениями и нечёткими параметрами
  - применение классических методы решения
  - достижение требуемых качественных свойств решения
- Параметрическая модель представления нечёткого числа
  - максимальное сохранение экспертной информации
  - двухточечные вычисления — эффективная численная реализации решения
- Устойчивость решения задачи линейного программирования с нечёткими параметрами
  - свёртка критериев для управления устойчивостью
  - алгоритм получения устойчивого решения задачи
- Апробация методов — задача сетевого планирования
- Программный комплекс — решение задачи оценки сроков разработки программного обеспечения

Апробация работы и публикации

Основные положения работы докладывались на конференциях:

- Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (Воронеж, 2012 г.)
- Информатика: проблемы, методология, технологии (Воронеж, 2013–2014 гг.);
- Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации (Алушта, 2013–2014 гг.);
- Радиоэлектроника, электротехника и энергетика (Москва, 2014).

Основное содержание диссертационного исследования изложено в 11 научных работах, из них 4 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ.