На правах рукописи

Воронцов Ярослав Александрович

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С НЕЧЕТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ И ЧЕТКИМИ ОТНОШЕНИЯМИ

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет»

Научный руководитель:	**Матвеев Михаил Григорьевич** доктор технических наук, профессор, Воронежский государственный университет, заведующий кафедрой информационных технологий управления
Официальные оппоненты:	**Фамилия Имя Отчество,** доктор физико-математических наук, профессор, Основное место работы с длинным длинным длинным длинным длинным длинным длинным длинным названием, **Анисимов Дмитрий Николаевич,** кандидат технических наук, доцент, Московский энергетический институт, заместитель заведующего по научной работе
Ведущая организация:	Тверской государственный технический университет

Защита состоится « » марта 2015 г. в XX часов на заседании диссертационного совета Д.212.038.020 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет» по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., д. 1, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета.

Автореферат разослан « » февраля 2015 года.

Ученый секретарь диссертационного совета кандидат физико-математических наук доцент	Фамилия Имя Отчество

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа Лотфи А. Заде «Fuzzy Sets», появившаяся в 1965 г. в журнале Information and Control, заложила основы моделирования интеллектуальной деятельности человека. Последовавшее за публикацией Заде бурное развитие теории нечётких множеств и появление понятия «мягкие вычисления» привело к тому, что в математическом моделировании стало возможным использование качественных элементов и расплывчатых количественных оценок. Это позволило расширить возможности учёта различных видов неопределённости, для описания которых в течение долгого времени в моделях использовались методы теории вероятностей и математической статистики.

Фаззификация известных ранее классических задач и создание новых нечётких моделей привела к появлению новых методов решения, позволяющих применять экспертные оценки на различных этапах моделирования. В работах известных зарубежных (D. Dubois, R. Fuller, A. Prade, R. Yager, L. Zadeh, H. Zimmermann и др.) и отечественных (В. Г. Балашов, А. Н. Борисов, В. В. Борисов, В. В. Круглов, А. А. Усков и др.) учёных и исследователей рассмотрено и проанализировано множество применений результатов теории нечётких множеств и мягких вычислений к решению задач выбора, управления и принятия решений. Обратной стороной повсеместного увлечения нечёткостью стало возникновение противоречий между решениями, полученными с применением новых методов, и результатами классических теорий, потеря устойчивости решений, нарушение естественных отношений в моделях, в которых нечёткими являются только параметры, неоправданное расширение степени нечёткости результата, повышение вычислительной сложности задач.

Актуальность темы исследования определяется необходимостью разработки математических моделей, численных методов и программ, позволяющих единообразно решать различные задачи с чёткими отношениями и нечёткой неопределённостью параметров как совокупность нескольких чётких, используя при этом классические методы решения и моделирования и обеспечивая требуемые в конкретной задаче качественные свойства решения.

Диссертационная работа выполнена в рамках одного из основных научных направлений Воронежского государственного университета «Информационные технологии организационно-технического управления в условиях случайной и нечеткой неопределенности».

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является построение и исследование моделей учёта нечёткой неопределённости, обеспечивающих требуемые свойства решения различных производственных задач, а также разработка методов эффективного численного решения на основе вводимых моделей.

Для достижения поставленной цели в работе решались следующие задачи:

1. анализ существующих методик нечётких вычислений с точки зрения сохранения свойств решения задач;
2. разработка модели представления нечётких чисел, позволяющей максимально сохранять исходную экспертную информацию и обеспечить требуемые качественные свойства решений (устойчивость, сохранение чётких математических соотношений и т. п.);
3. разработка методики эффективной численной реализации решения задач с нечёткими параметрами, основанной на подходящих алгебраических структурах и её тестирование на примере задачи сетевого планирования с нечёткими параметрами;
4. разработка и верификация программного обеспечения, реализущего предложенную модель представления нечётких параметров и методики численного решения задач с нечёткими параметрами.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы основные положения и методы теории нечётких множеств, мягких вычислений, интервального анализа, теории алгебраических структур, теории графов, численных методов. При создании программного обеспечения использовались технологии модульного и объектно-ориентированного программирования.

Тематика работы. Содержание диссертации соответствует п. 1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений», п. 3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п. 8 «Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования» паспорта специальности 05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной:
1. предложена модификация метода моделирования экспертных числовых оценок, полученных в классе LR-чисел, отличающаяся наличием L-преобразования LR-числа в соответствующие LL/RR-числа;
2. предложены эффективные вычислительные методы решения задач с нечёткими параметрами, отличающиеся использованием описанной в работе алгебраической структуры с групповыми свойствами (со свойствами, эквивалентными полю действительных чисел) и позволяющие параметрически управлять устойчивостью решения;
3. разработан программный комплекс для решения задач с нечёткими параметрами, реализующий предложенные в работе вычислительные методы, модули которого используют стандартные вычислительные операции (в отличие от специализированных программных пакетов, работающих с нечеткими числами).

Достоверность научных результатов. Научные положения, теоретические выводы и практические рекомендации обоснованы корректным использованием выбранного математического аппарата и подтверждены результатами вычислительного эксперимента.

Практическая значимость исследования заключается в расширении сферы применимости методов моделирования с использованием чётких отношений и нечётких параметров. Подходы к нечётким вычислениям, предложенные в диссертации, позволяют существенно упростить процедуру расчётов без значительных потерь экспертной информации, а также использовать существующее стандартное программное обеспечение для решения различных производственных задач.

Реализация и внедрение результатов работы. Разработанный программный комплекс «CSBusinessGraph» используется в практической деятельности по первоначальной оценке проектов ООО «ДатаАрт–Воронеж» (DataArt).

Теоретические результаты диссертации в форме моделей, алгоритмов и программ используются в производственном процессе ООО «ДатаАрт–Воронеж». Признана целесообразность использования предложенной в диссертации методики для оптимизации процедур первоначальной оценки проектов по разработке программного обеспечения.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на ежегодных научных сессиях Воронежского государственного университа и следующих конференциях различного уровня: международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (Воронеж, 2012 г.); международная конференция «Информатика: проблемы, методология, технологии» (Воронеж, 2012–2013 гг.); международный научно-технический семинар «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации» (Алушта, 2013–2014 гг.); научно–техническая конференция студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика» (Москва, 2014).

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 11 научных работ [1]– [11], в том числе 4 [5, 6, 10, 11] — в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. В работах, выполненных в соавторстве: в [5] предложено преобразование L и алгебра модифицированных нечётких чисел; в [6] выполнен анализ существующих методов сравнения нечётких чисел и предложен метод сравнения для модифицированных LL/RR-чисел; а в [10] — предложено определение устойчивости задачи нечёткого линейного программирования и разработан алгоритм решения задачи календарно-сетевого планирования и управления с нечёткими параметрами, позволяющий получать устойчивое решение.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации **158** страниц текста с **XX** рисунками и **3** таблицами. Список литературы содержит **131** наименование, включая работы автора.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, кратко изложены структура и содержание диссертации, определены научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

В **первой главе** приведены основные понятия теории нечётких множеств и описаны актуальные модели представления нечёткой информации, используемые в дальнейшем при описании исследования. Дано определение нечётких моделей и их классификация в зависимости от этапа применения нечёткой математики — при описании системы, при задании параметров, при задании входов, выходов и состояний (модели первого, второго и третьего типа). В работе предложена классификация нечётких моделей на основе применяемого в них языка описания выбора, объединённая с вышеописанной (рис. 1). В качестве объекта исследования выбраны модели, использующие чёткие отношения и нечёткие параметры (модели второго типа).

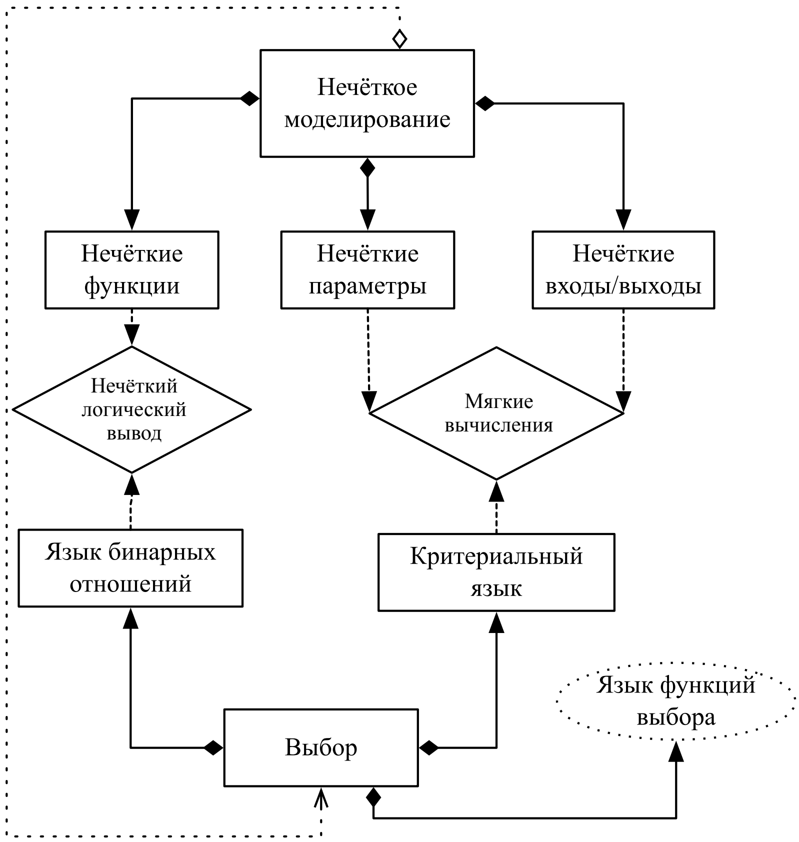

Рис. 1. Предлагаемая классификация нечётких моделей

Особенностью рассматриваемых моделей является то, что существующие подходы к нечётким вычислениям далеко не всегда применимы в них. Нечёткий логический вывод неадекватен моделям второго типа, поскольку рассчитан на нечёткость отношений, отсутствие формализованных математических моделей либо способов решения с помощью классической теории. Лежащие в основании большинства способов «мягких вычислений» алгебраические структуры (в основном решётки) и отсутствие отношения линейного порядка приводят к нарушениям естественных математических отношений и неоправданному расширению неопределённости результата. В диссертации формулируются основные требования к модели представления нечёткой информации и методам решения задач второго типа — получение устойчивого решения, непротиворечивость естественным математическим отношениям, ограничение расширения неопределенности, — и вводятся требования вычислительной эффективности и возможности применения стандартных программных комплексов, предназначенных для чётких вычислений.

Вторая глава диссертации посвящена разработке и исследованию методов моделирования и обработки нечетких числовых величин, которые удовлетворяли бы выдвинутым к ним в главе 1 требованиям. Ввиду широкого распространения линейных моделей, исследование проводится для нечётких треугольных чисел

Проводится краткий анализ существующих алгебраических методов обработки нечётких чисел, выделяются их достоинства и недостатки с точки зрения применимости в нечётких моделях второго типа. Для преодоления выделенных в главе 1 недостатков существующих методов нечётких вычислений предлагается следующий подход. Исходная задача $\tilde{Y} = f\left(\tilde{X}\right)$ с нечёткими числовыми параметрами рассматривается как совокупность задач с интервальной неопределенностью

$$\tilde{Y} = f\left(\tilde{X}\right) \to \bigcup_{\alpha=0}^{1} y_\alpha = f(X_\alpha) \quad (1)$$

с последующим переходом к полной определённости на каждом α-уровне, для чего на каждом α-уровне внутри интервала X_α выбирается точка $\bar{x}(\alpha)$. В диссертации предлагается выбирать значение $\bar{x}\left(\alpha\right)$ с помощью линейного параметрического преобразования L

$$\bar{x}(\alpha) = L(X_\alpha) = \lambda x^L(\alpha) + (1-\lambda) x^R(\alpha). \quad (2)$$

Для треугольных чисел $\bar{x}(\alpha)$ является линейной функцией ввиду линейности $x^L\left(\alpha\right)$ и $x^R\left(\alpha\right)$. После решения чётких α-уровневых задач полученные результаты $y\left(\alpha\right)$ аппроксимируются нечётким числом $\tilde{Y}^* = \{y(\alpha) | \mu_{\tilde{Y}}(y) = \alpha\}$, которое называется *модифицированным решением* задачи (1).

Предлагаемый подход в своей основе имеет факторизацию, т. е. декомпозицию нечётких чисел по α-уровням. С точки зрения алгебр нечётких чисел, решение задачи с использованием факторизации представляет собой переход от использования «полноценных» нечётких чисел к алгебрам для чисел LL/RR-типа — функция принадлежности чисел такого типа является обратной к функции, которая определяет точки $\bar{x}(\alpha)$:

$$\mu_{\tilde{A}^*}(x) = \left(\bar{x}(\alpha)\right)^{-1} \quad (3)$$

В диссертации вводится ключевое понятие модифицированного нечёткого числа. *Модифицированным нечётким числом* называется число $\tilde{A}^*$, получаемое из $\tilde{A}$ с помощью преобразования (2) и (3). В работе показано, что модифицированное нечёткое число является числом LL/RR-типа, и в дальнейшем для таких чисел используется обозначение $\bar{x}(\alpha)$, указывающее на механизм их построения с помощью (3).

Исходя из (2) и (3) очевидно, что преобразование L сокращает информативность исходной нечёткой величины. Для определения степени потери нечёткой информации исследуются свойства преобразования L. Чтобы производить анализ и вычисления в форме, нечувствительной к знаку нечёткого числа, в диссертации предложено представление треугольного числа в виде тройки следующих параметров:

- длина носителя $d_{\tilde{A}}$;
- мода $m_{\tilde{A}}$;
- степень асимметрии $AS_{\tilde{A}}$.

Степенью асимметрии $AS_{\tilde{A}}$ называют характеристику треугольного нечёткого числа, определяемую как разность площадей прямоугольных треугольников, на которые исходное нечёткое число делится модой.

В работе показано, что запись треугольного нечёткого числа в виде тройки $(m_{\tilde{A}}, d_{\tilde{A}}, AS_{\tilde{A}})$ эквивалентна введённым ранее способам записи через коэффициенты нечёткости $(m;a;b)$ и точки пересечения с осью Ox $\left(x^L;m;x^R\right)$. При известных степени асимметрии $AS_{\tilde{A}}$ и длине носителя $d_{\tilde{A}}$, коэффициенты нечёткости определяются по формуле

$$\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{d_{\tilde{A}} - 2AS_{\tilde{A}}}{2} \\ b = \dfrac{d_{\tilde{A}} + 2AS_{\tilde{A}}}{2} \end{array}\right.$$

Для преобразования L доказаны следующие свойства, подтверждающие, что его применение к нечетким исходным данным в основном сохраняет их информативность при целенаправленном выборе параметра λ, а уменьшение длины носителя можно рассматривать как положительное явление, позволяющее снизить степень неопределённости решения.

Свойство 1. *Преобразование L сохраняет моду нечёткого числа. Другими словами, $\forall\lambda \in [0;1]:\ m_{\tilde{A}} = m_{\tilde{A}^*}$.*

Свойство 2. *При некоторых значениях параметра λ преобразование L сохраняет*
1. знак степени асимметрии, т.е. $\exists\lambda \in [0;1]:\ sign(AS_{\tilde{A}}) = sign(AS_{\tilde{A}^*})$;
2. значение степени асимметрии, т.е. $\exists\lambda \in [0;1]:\ AS_{\tilde{A}} = AS_{\tilde{A}^*}$.

Свойство 3. *Модифицированное число всегда содержится внутри исходного числа. Другими словами, $\forall\lambda \in [0;1] : A^*_\alpha \subset A_\alpha$; $d_{\tilde{A}} \geqslant d_{\tilde{A}^*}$, т. е. преобразование L уменьшает длину носителя нечёткого числа и оставляет α-интервалы модифицированного числа в рамках α-интервалов исходного числа.*

На основании следствий из свойств преобразования L, в диссертации даются рекомендации по выбору параметра λ и применимости предлагаемой методики:

- при $\lambda = \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{a}{d_{\tilde{A}}}$ сохраняется значение степени асимметрии. Применение преобразования L с этим значением λ к нечётким LL/RR-числам не изменяет их;
- при $\lambda = \dfrac{b}{a+b} = \dfrac{b}{d_{\tilde{A}}}$ преобразование L уничтожает нечёткую информацию, заложенную экспертом в число, и сводит операции над числами к операциям над их модами;
- применимость преобразования L при использовании симметричных нечётких числах ограничена, поскольку $\lambda = \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{b}{a+b} = \dfrac{1}{2}$, и все вычисления в этом случае сводятся к операциям над модами чисел.

Для доказательства применимости предложенного подхода в нечётких моделях второго типа, создаётся алгебраическая система для множества всех нечётких модифицированных чисел $K = \{\bar{x}(\alpha)\};\ \alpha \in [0;1]$. Строится чёткая алгебра $P = \langle K;\ +,*\rangle$ и показывается, что удовлетворяем всем аксиомам поля. Для построения алгебры используется более удобная форма записи модифицированного числа

$$\bar{x}(\alpha) = c + k\alpha, \tag{4}$$

где

$$\begin{bmatrix} c = m + b - \lambda(a+b) \\ k = \lambda(a+b) - b \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\lambda \in [0;1];\ c, k \in \mathbb{R}$$

На множестве K вводится операция сложения (6), а также нейтральный (7) и противоположный по сложению (8) элементы. Доказываются свойства ассоциативности и коммутативности операции (6).

$$\bar{x}_1(\alpha) + \bar{x}_2(\alpha) = r_1(\alpha) = c_1 + c_2 + (k_1 + k_2)\alpha,\ r_1(\alpha) \in K; \tag{6}$$

$$\bar{0} = 0 + 0\alpha \in K : \forall \bar{x}(\alpha) \in K:\ \bar{x}(\alpha) + \bar{0} = c + k\alpha + 0 + 0\alpha = \bar{x}(\alpha); \tag{7}$$

$$-\bar{x}(\alpha) = -c - k\alpha \in K:\ \bar{x}(\alpha) + (-\bar{x}(\alpha)) = \bar{0}. \tag{8}$$

Также на множестве K вводится операция умножения. Её можно было бы определить с помощью (9) как сумму произведений компонент модифицированных нечётких чисел

$$\bar{x}_1(\alpha) \cdot \bar{x}_2(\alpha) = r_2'(\alpha) = (c_1 + k_1\alpha)(c_2 + k_2\alpha) = c_1c_2 + c_1k_2\alpha + c_2k_1\alpha + k_1k_2\alpha^2, \tag{9}$$

однако такое определение приводит к искажению треугольного вида результата нечётких операций, т.е. $r_2'(\alpha) \notin K$. Для того, чтобы результат операции умножения остался в множестве K, используется линейная интерполяция — зависимость $r_2(\alpha)$ восстанавливается в виде линейной функции по значениям выражения (9) при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. Это приводит к следующему определению операции умножения:

$$r_2(\alpha) = c_1c_2 + (c_1k_2 + c_2k_1 + k_1k_2)\alpha;\ r_2(\alpha) \in K. \tag{10}$$

Для операции умножения (10) вводятся нейтральный (11) и обратный по умножению (12) элементы. Доказываются свойства ассоциативности и коммутативности, а также свойство дистрибутивности умножения (10) относительно сложения (6). Показано, что для существования обратного элемента число $\bar{x}(\alpha)$ должно иметь ненулевую моду, поскольку, согласно (5), $c+k=m\neq 0$.

$$\bar{1}=1+0\alpha\in K:\ \forall\bar{x}(\alpha)\in K\quad \bar{x}(\alpha)\cdot\bar{1}=\bar{x}(\alpha); \tag{11}$$

$$\bar{x}^{-1}(\alpha)=\frac{1}{c}-\frac{k}{c(c+k)}\alpha,\ c\neq 0;\ \bar{x}^{-1}(\alpha)\in K:\ \bar{x}(\alpha)\bar{x}^{-1}(\alpha)=\bar{1}. \tag{12}$$

В диссертации для модифицированных нечётких чисел показывается эквивалентность записи в виде (4) и в виде

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha)=\bar{x}_{\tilde{A}}(0)+\alpha(\bar{x}_{\tilde{A}}(1)-\bar{x}_{\tilde{A}}(0))=\alpha\bar{x}_{\tilde{A}}(1)+(1-\alpha)\bar{x}_{\tilde{A}}(0). \tag{13}$$

На основании (13) предложен способ нечётких вычислений, называемый двухточечными вычислениями, позволяющий решать нечёткую задачу как две чёткие при $\alpha=0$ и $\alpha=1$. Если обозначить за $*$ произвольную арифметическую операцию, то для чисел в форме (13) её результат будет выглядеть следующим образом:

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha)*\bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha)=\alpha(\bar{x}_{\tilde{A}}(1)*\bar{x}_{\tilde{B}}(1))+(1-\alpha)(\bar{x}_{\tilde{A}}(0)*\bar{x}_{\tilde{B}}(0)). \tag{14}$$

В работе показано, что двухточечные вычисления сводятся к алгебре модифицированных нечётких чисел, избавляют от необходимости вводить отношение линейного порядка на множестве K и позволяют использовать стандартные программные продукты для решения нечетких задач, т. к. нечеткая задача решается как две чётких.

В качестве альтернативы вышеописанному методу решения задач в тех случаях, когда потери экспертной информации недопустимы, предлагается использовать двухкопмонентные нечёткие числа. Данный подход позволяет свести операции над нечёткими треугольными числами к операциям над их левой и правой частями, т. е. к ранее описанной алгебре модифицированных нечётких чисел LL/RR-типа.

В конце второй главы кратко рассматривается проблема устойчивости моделей второго типа на примере задачи линейного программирования с нечёткими параметрами

$$\begin{cases} f(\mathbf{x})=\mathbf{C}\mathbf{x}\to\min;\\ \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{B},\end{cases}$$

где $\mathbf{A}=\left\{\tilde{A}_{ij}\right\}$ — матрица, а $\mathbf{B}=\left\{\tilde{B}_i\right\}$, $\mathbf{C}=\left\{\tilde{C}_i\right\}$ — векторы нечётких параметров. Применение к каждому из элементов матрицы и векторов преобразования L приводит к модифицированной задаче

$$\begin{cases} f(\mathbf{x})=\mathbf{C}^*\mathbf{x}\to\min;\\ \mathbf{A}^*\mathbf{x}=\mathbf{B}^*,\end{cases} \tag{15}$$

в которой $\mathbf{A}^*=\left\{\bar{x}_{\tilde{A}_{ij}}(\alpha)\right\}$, $\mathbf{B}^*=\left\{\bar{x}_{\tilde{B}_i}(\alpha)\right\}$, $\mathbf{C}^*=\left\{\bar{x}_{\tilde{C}_i}(\alpha)\right\}$.

При изменении значений α при фиксированных коэффициентах λ_{A_i} преобразования L, происходит возмущение задачи (15). Ввиду свойства сохранения моды, в работе предлагается зафиксировать в качестве «эталонного» решение (15) при $\alpha=1$ и использовать определение устойчивости по решению, поскольку оно включает в себя более узкое определение общей устойчивости, т. е. принципиальное существование решения возмущённой задачи. Предполагается, что нечёткая задача будет считаться устойчивой по решению, если при переходе с одного α-уровня на другой не происходит значительного изменения решения относительно $\mathbf{x}(\alpha=1)$, т. е.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall\alpha\in[0;1)\ |\alpha-1|<\delta\Rightarrow\|\mathbf{x}(1)-\mathbf{x}(\alpha)\|<\varepsilon. \quad (16)$$

Согласно методике двухточечных вычислений, задачу (15) достаточно решить на двух α-уровнях. Получаемая пара векторов $\mathbf{x}\,(\alpha=1)$ и $\mathbf{x}\,(\alpha=0)$ позволяет восстановить модифицированные решения согласно (13). Ввиду свойства сохранения моды, решение модифицированной задачи (15) при $\alpha = 1$ аналогично решению чёткой задачи с коэффициентами, равными модам нечётких чисел. Если решать ту же задачу при $\alpha=0$ без дополнительных ограничений на параметры λ_S преобразования L, то возникает ситуация, при которой все значения λ_S, где S — один из индексов $\tilde{A}_{ij}$, $\tilde{B}_i$, $\tilde{C}_i$, — принимают единичные значения. Это объясняется тем фактом, что при $\lambda_S = 1$ максимальный вес в значении $\bar{x}_S\,(\alpha)$ имеет левая ветвь функции принадлежности, находящаяся ближе к нулю. Для решения данной проблемы вводятся дополнительные ограничения для параметров λ_S:

$$(\lambda_S^{\star}-\lambda_S)^2\to\min \quad (17)$$

которые позволяют минимизировать отклонение параметров от оптимальных в смысле сохранения нечёткой информации значений $\lambda_S^{\star} = \dfrac{a_S}{d_S}$ и, таким образом, управлять устойчивостью решения. Ввиду противоречивости критериев (17) и целевой функции задачи (15), возникает задача векторной оптимизации, для решения которой используется аддитивная свёртка критериев:

$$f^*(\mathbf{x})=\mathbf{C}^*\mathbf{x}+\gamma\sum_s(\lambda_S^*-\lambda_S)^2\to\min \quad (18)$$

Семантика целевой функции (18) такова: ищется решение $\mathbf{x}$ и вектор параметров λ_S преобразования L, которые позволяют удовлетворить исходный критерий оптимизации и при этом максимально сохранить нечёткую информацию, заложенную экспертами в параметры задачи. Безразмерный коэффициент γ позволяет привести значение свёртки к одному порядку со значением исходной целевой функции.

В **третьей главе** происходит тестирование разработанных моделей и методов обработки нечетких числовых величин на примере задачи сетевого планирования с нечёткими временными оценками. Кратко рассматривается классическая постановка задачи, связанные с ней определения и основные способы её решения, а также исследуются достоинства и недостатки существующих способов решения задачи сетевого планирования с нечёткими параметрами.

В качестве модели проекта в сетевом планировании рассматривается направленный ациклический граф $G=(V,E)$, $|V|=n$, $|E|=m$, в котором работам проекта w_j, длительностью τ_j каждая, сопоставлены дуги графа e_j, $j = \overline{1,m}$, а событиям проекта z_i с временами наступления t_i сопоставления вершины графа v_i, $i = \overline{1,n}$.

Событие z_1 — начало работ по проекту, событие z_n — окончание проекта. Граф G обладает следующими свойствами:

- существует ровно одна вершина $v_1 \in V$, называемая истоком, из которой рёбра только исходят, т.е. $\forall i = 2{,}n \ \nexists (v_i, v_1)$;
- существует ровно одна вершина $v_n \in V$, называемая стоком, в которую рёбра графа только входят, т.е. $\forall i = \overline{1{,}n-1} \ \nexists (v_n, v_i)$;
- для любой вершины графа $v_i \in V,\ i = \overline{1{,}n}$ существует путь $v_1 \ldots v_n$, проходящий через неё;
- для любого ребра $e_j \in E,\ j = \overline{1{,}m}$ существует путь $v_1 \ldots v_n$, содержащий это ребро.

Задача сетевого планирования сводится к поиску общего времени выполнения проекта T, которое равно длине максимального пути в графе, называемого также критическим. Соответственно, операции, которые принадлежат пути максимальной длины, также называются критическими. В диссертации указано, что алгоритмический метод решения задачи сетевого планирования (модифицированные алгоритмы Дейкстры и Форда-Мура-Беллмана) не позволяет проводить её анализ на устойчивость, т.е. на изменение критического пути. В качестве основного способа решения выбрано решение задачи линейного программирования (19) с нечёткими временными оценками

$$T = t_n - t_1 \to \min \tag{19}$$

при ограничениях на времена наступления событий

$$t_{j_s} - t_{i_s} \geqslant \tilde{\tau}_s;\ s = \overline{1{,}m}, \tag{20}$$

где t_{i_s} и t_{j_s} — времена наступления событий начала и окончания работы w_s соответственно. В результате решения данной задачи получается общее время выполнения проекта $\tilde{T}$, а также вектор времён $\mathbf{t} = \{\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_n\}$, называемых календарным планом проекта, и совокупность критических операций $\mathbf{S}_1$.

Для решения задачи (19)–(20), в работе применяется преобразование L и методика двухточечных вычислений. Формулируется задача для произвольного α-уровня

$$\begin{cases} T(\alpha) = t_n - t_1 \to \min \\ t_{j_s} - t_{i_s} \geqslant \bar{\tau}_s(\alpha, \lambda_s),\ \forall s = \overline{1{,}m}. \end{cases} \tag{21}$$

Преобразование L, применяемое в (21), несколько отличается от вводимого формулой (2), поскольку параметры λ необходимо изменять, управляя, таким образом, устойчивостью задачи линейного программирования. Результатом решения задачи (21) является вектор времён $t\,(\alpha) = \{t_0(\alpha), \ldots, t_n(\alpha)\}$, который является календарным планом α-уровня, а также множество критических операций $S_1(\alpha)$.

Нечеткость оценок $\tilde{\tau}_i$ обуславливает проблему устойчивости решений задачи (21) в смысле (16). Для неустойчивой задачи на различных α-уровнях решения соответствуют различным критическим путям, и возникает проблема объединения разнородных α-уровневых решений $S_1(\alpha)$. Согласно данному ранее определению (16), задача (21) поиска критического пути на α-уровне считается устойчивой по решению, если она устойчива и если S_1 не зависит от α, т.е. на всех α-уровнях критический путь не изменяется и проходит по одним и тем же рёбрам. Отмечается, что условие устойчивости выполняется автоматически, поскольку в сетевом графике всегда существует хотя бы один путь от истока к стоку, следовательно, независимо от величин весов рёбер, всегда существует путь максимальной длины. В качестве метрики сходства решений в работе выбрана мощность симметрической разности двух множеств:

$$\forall \alpha_1,\alpha_2 \in [0;1];\ \alpha_1 \neq \alpha_2\ S_1(\alpha_1)\Delta S_2(\alpha_2) = \varnothing, \tag{22}$$

т.е. на всех α-уровнях критический путь не изменяется и проходит по одним и тем же дугам.

Полученное при $\alpha = 1$ решение задачи (21) даёт активные ограничения на критические операции. В диссертации отмечается, что на параметры λ_S преобразования L также необходимо наложить ограничения и учесть их в целевой функции (18), чтобы избежать ситуации, когда λ_S принимают граничные значения (0 или 1). В результате при $\alpha = 0$ решается видоизменённая задача

$$\begin{cases} T^*(\alpha,\lambda) = t_n - t_1 + \gamma \sum\limits_{s=1}^{m} (\lambda_s^* - \lambda_s)^2 \to \min; \\ t_{j_{s_1}} - t_{i_{s_1}} = \bar{\tau}_{s_1}(\alpha,\lambda_{s_1}),\ \forall s_1 \in S_1(1); \\ t_{j_s} - t_{i_s} \geqslant \bar{\tau}_s(\alpha,\lambda_s),\ \forall s \notin S_1(1), s = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{23}$$

В результате проведённого исследования предлагается следующий алгоритм решения задачи сетевого планирования с нечёткими временными оценками как задачи линейного программирования с возмущениями.

1. Решается невозмущённая задача (21) при $\alpha = 1$. Ввиду свойства 1 преобразования L, это решение соответствует модифицированному решению $\langle T(1), t(1), S_1(1)\rangle$. Фиксируется множество операций $S_1(1)$, образующих критический путь.
2. Фиксируется критический путь при всех $\alpha \neq 1$. Для этого в задаче (21) нестрогие неравенства меняются на равенства $\forall s_1 \in S_1(1)$, т.е. выбранные операции всегда будут критическими. Данный шаг позволяет выполнить условие устойчивости задачи по решению (22).
3. Решается возмущённая задача (23) с изменённой целевой функцией. Результатом решения задачи является кортеж $\langle T(0), t(0), \lambda\rangle$, где λ — вектор параметров преобразования L.
4. Решение исходной задачи представляет из себя тройку $\left\langle \tilde{T}, S_1, \lambda \right\rangle$. Функция принадлежности общего времени выполнения проекта $\tilde{T}$ восстанавливается по значениям $T(0)$ и $T(1)$, либо число $\tilde{T}$ оставляется в виде (4).

Предложенный алгоритм иллюстрируется на примере, а полученное решение сравнивается с решениями, найденными с помощью других методов.

В **четвертой главе** рассмотрено применение методов, представленных в диссертации, для усовершенствования процесса предварительного планирования проектов по разработке программного обеспечения. Отличительной особенностью таких проектов является наличие нечёткой неопределённости сроков выполнения операций, обусловленной внешними факторами.

В качестве средства разработки применяется интегрированная среда Microsoft Visual Studio 2010. Особенностью разработанного программного продукта «CSBusinessGraph» является то, что он не использует никаких специализированных средств и третьесторонних библиотек для представления нечётких чисели выполняет все вычисления только с использованием действительных переменных.

К основным *функциональным возможностям* программного продукта относятся: создание модели проекта в виде вершинного графа в ручном режиме или импорт существующей модели из XML-файла; поддержка модели проекта в согласованном состоянии — проверка отсутствия циклов в графе и наличие только одной компоненты связности; формирование временных оценок выполнения операций, выраженных в виде треугольных чисел; автоматическое преобразование вершинного графа в стрелочный; реализация механизма расчёта критического пути на основе α-уровневых и двухточечных вычислений с применением выбранного пользователем вида значений параметров λ преобразования L; экспорт отчёта о решении задачи в формат Microsoft Excel с формированием графиков для модифицированных нечётких оценок, общего времени выполнения проекта и построением стрелочного графа с выделением критических операций.

На рис. 2 изображено главное окно приложения с открытым в нём проектом.

В **заключении** приводятся основные результаты диссертации.

Основные результаты работы

1. Предложен комплекс методов для моделей с чёткими отношениями и нечёткими параметрами, позволяющий применять классические методы решения задач и достигать требуемых качественных свойств решения — устойчивости, сохранения естественных математических соотношений и т. п..
2. На основе результатов анализа существующих моделей представления нечёткой числовой информации разработана параметрическая модель представления нечёткого числа, позволяющая максимально сохранять исходную экспертную информацию, а также метод двухточечных вычислений, приводящий к эффективной численной реализации решения задач, основанной на подходящих алгебраических структурах.

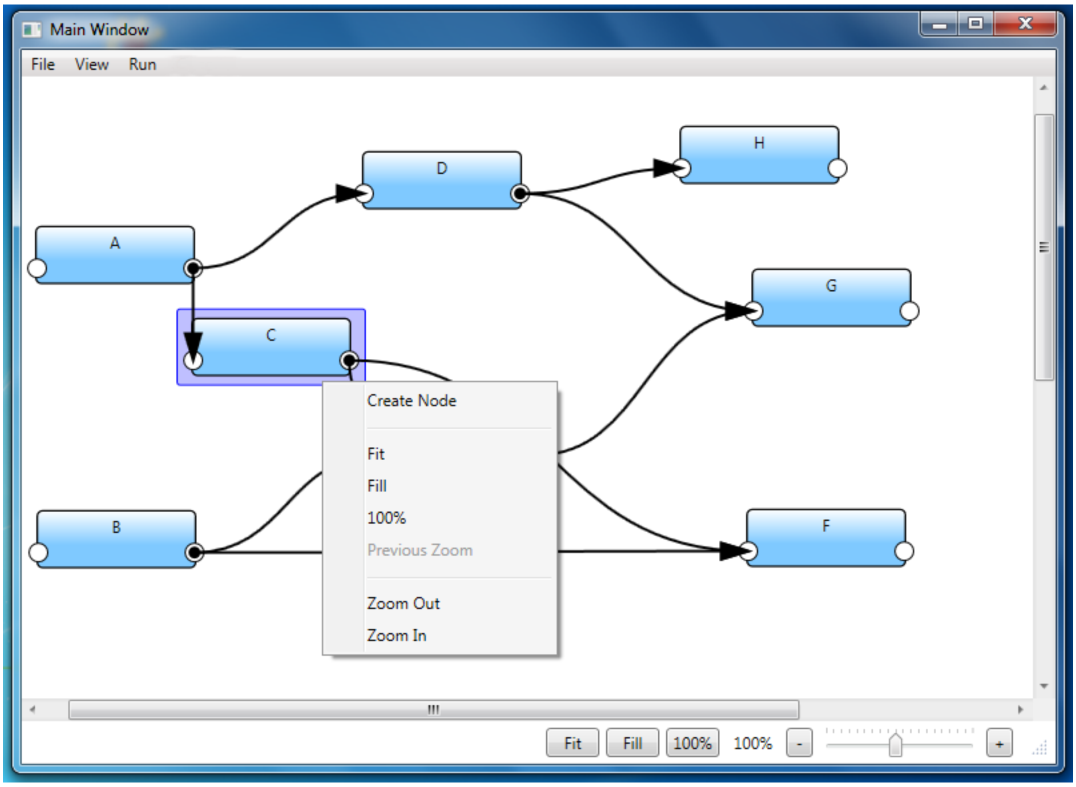

Рис. 2. Главное окно приложения

3. В рамках метода двухточечных вычислений рассмотрена проблема устойчивости решения задачи линейного программирования с нечёткими параметрами, обосновано введение свёртки критериев для управления устойчивостью и сформулирован алгоритм получения устойчивого решения задачи.
4. Предложенные методы решения задач с нечёткими параметрами апробированы на задаче сетевого планирования с нечёткими временными оценками. Полученное в результате решение соответствует решениям, найденным с помощью других методов, хорошо зарекомендовавших себя в мировой практике.
5. Разработан программный комплекс, позволяющий решать задачу оценки сроков и рисков при разработке программного обеспечения как задачу сетевого планирования с нечёткими временными оценками.

Основные публикации по теме диссертации

1. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Информационные технологии управления проектами в условиях расплывчатой неопределённости // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования: материалы V международной конференции. Воронеж, 11-16 сентября 2012 г. Дополнительный выпуск. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. — С. 8–10.
2. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Разработка информационных технологий и средства управления проектами в условиях расплывчатой неопределённости // Сборник студенческих научных работ факультета компьютерных наук ВГУ / Под ред. к.ф.-м.н. Е. А. Сирота. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. — С. 30–35.

3. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Влияние преобразования L на результаты арифметических операций с нечёткими LR-числами // Сборник трудов XXII международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации», Алушта, 18–24 сентября 2013 г. — М. : Изд-во МГУПИ, 2013. — С. 14–15.
4. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Исследование свойств линейного отображения в задачах с нечёткими параметрами // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XIII научно-методической конференции. 7–8 февраля 2013 г.: в 4 т. — Т. 1. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2013. — С. 298–304.
5. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Алгебраические операции с нечеткими LR-числами с использованием преобразования L // Программная инженерия. — 2014. — № 8. — С. 23–29.
6. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Методы параметризованного сравнения нечётких треугольных и трапециевидных чисел // Вестник ВГУ, серия «Системный анализ и информационные технологии». — 2014. — № 2. — С. 90–97.
7. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Постановка задачи об устойчивости альфа-уровневого метода поиска нечёткого критического пути // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XIV Международной научно-методической конференции, Воронеж, 6–8 февраля 2014 г.: в 4 т. — Т. 2. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — С. 360–363.
8. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Способ решения нечёткой задачи КСПУ с использованием преобразования L // Радиоэлектроника, электротехника и энергетика: двадцатая международная научно–техническая конференция студентов и аспирантов: тезисы докладов. Москва, 27–28 февраля 2014 г.: в 4 т. — Т. 2. — М. : Издательский дом МЭИ, 2014. — С. 58.
9. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Устойчивость критического пути в задаче сетевого планирования с нечёткими параметрами // Сборник трудов XXIII международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации», Алушта, 14–20 сентября 2014 г. — М. : ИКД «Зерцало-М», 2014. — С. 73–74.
10. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Устойчивость решения в задаче о критическом пути с нечёткими параметрами // Вестник ВГТУ. — 2014. — № 7. — С. 90–97.
11. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г., Канищева О. И. Арифметические операции над двухкомпонентными нечёткими числами // Вестник ВГУ, серия «Системный анализ и информационные технологии». — 2014. — № 2. — С. 75–82.

Работы [5, 6, 10, 11] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ.