Модели и методы решения задач с нечеткими параметрами и четкими отношениями

Я. А. Воронцов
Научный руководитель: М.Г.Матвеев, д.т.н., профессор.

Материалы для защиты диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук
Специальность 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет»

Воронеж, 2015

Цель и задачи исследования

Цель: построение и исследование моделей учёта нечёткой неопределённости, обеспечивающих требуемые свойства решения различных прикладных задач, а также разработка методов эффективного численного решения на основе вводимых моделей

Задачи:

- анализ существующих методик нечётких вычислений с точки зрения сохранения свойств решения задач;
- разработка модели представления нечётких чисел, позволяющей максимально сохранять исходную экспертную информацию и обеспечить требуемые качественные свойства решений (устойчивость, сохранение чётких математических соотношений и т. п.);

Цель и задачи исследования

- разработка методики эффективной численной реализации решения задач с нечёткими параметрами, основанной на подходящих алгебраических структурах и её тестирование на примере задачи сетевого планирования с нечёткими параметрами;
- разработка и верификация программного обеспечения, реализущего предложенную модель представления нечётких параметров и методики численного решения задач с нечёткими параметрами.

Научная новизна

- **модификация метода моделирования экспертных числовых оценок**, полученных в классе LR-чисел, отличающаяся наличием L-преобразования LR-числа в соответствующие LL/RR-числа;
- **эффективные вычислительные методы решения задач с нечёткими параметрами**, отличающиеся использованием описанной в работе алгебраической структуры (поле модифицированных нечётких чисел) и позволяющие параметрически управлять устойчивостью решения;
- **программный комплекс** для решения задачи сетевого планирования с нечёткими параметрами, реализующий предложенные вычислительные методы, модули которого используют стандартные вычислительные операции (в отличие от специализированных программных пакетов).

Представление нечёткой информации

- нечёткие множества (подмножества предопределённого универсального множества X)

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \,|x \in X\}; \;\; E(\mu_{\tilde{A}}(x)) = [0; 1] \tag{1}$$

- нечёткие числа (подмножества множества действительных чисел $\mathbb{R}$)
  - кусочная непрерывность $\mu_{\tilde{A}}(x)$;
  - выпуклость $\mu_{\tilde{A}}(x)$

$$\begin{gathered} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; \forall \gamma \in [0; 1] \\ \mu_{\tilde{A}}(\gamma x_1 + (1 - \gamma) x_2) \geqslant \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\} \end{gathered} \tag{2}$$

  - нормальность $\mu_{\tilde{A}}(x)$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (\mu_{\tilde{A}}(x)) = 1 \tag{3}$$

Основные понятия

- Нечёткие числа LR-типа: $L(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $R(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$L(-x) = L(x);$$
$$R(-x) = R(x);$$
$$L(0) = R(0) = 1.$$

  L и R являются невозрастающими на интервале $[0; +\infty)$
- Функция принадлежности LR-числа

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{a}\right); \ x \leqslant m \\ R\left(\dfrac{x-m}{b}\right); \ x > m \end{cases} \tag{4}$$

- При известной форме функции принадлежности удобнее запись $\tilde{A} = (m; a; b)$

Основные понятия

- Треугольное нечёткое число $\tilde{A} = \langle m, a, b \rangle$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - m + a}{a}; \ x \in [m - a; m] \\ \dfrac{m + b - x}{b}; \ x \in (m; m + b] \\ 0; \ \text{в остальных случаях} \end{cases} \qquad (5)$$

- Формы записи — коэффициенты нечёткости $\langle m, a, b \rangle$ и границы $\left\langle x^L_{\tilde{A}}, m, x^R_{\tilde{A}} \right\rangle$

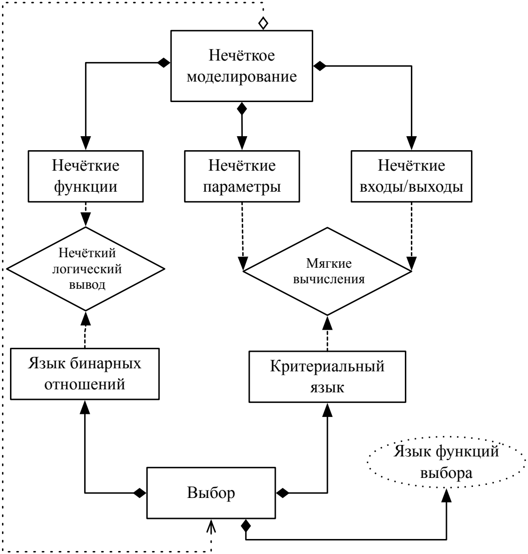
$$\left[\begin{array}{l} x^L_{\tilde{A}} = m - a \\ x^R_{\tilde{A}} = m + b \end{array} \right. \qquad (6)$$

- Число LL (RR)-типа — правый (левый) коэффициент нечёткости числа равен нулю

Основные понятия

- Теорема о декомпозиции
$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} A_\alpha \tag{7}$$
- Число как совокупность α-интервалов $X_\alpha = \left[x^L(\alpha); x^R(\alpha)\right]$
$$\left[\begin{array}{l} x^L(\alpha) = m - a + a\alpha \\ x^R(\alpha) = m + b - b\alpha \end{array}\right. \tag{8}$$
- Не чувствительная к знаку нечёткого числа форма $\langle m_{\tilde{A}}, d_{\tilde{A}}, AS_{\tilde{A}} \rangle$
  - длина носителя $d_{\tilde{A}} = a + b$;
  - мода $m_{\tilde{A}}$;
  - степень асимметрии $AS_{\tilde{A}} = \dfrac{b - a}{2}$.

Классификация нечётких моделей



- Исследуются модели, использующие чёткие отношения и нечёткие параметры (модели второго типа)
- Существующие подходы к нечётким вычислениям далеко не всегда применимы в моделях второго типа

Проблемы существующих способов вычислений

- требуются значительные вычислительные ресурсы (принцип обобщения);
- неоправданно расширяется носитель функции принадлежности (алгебры и арифметики LR-чисел);
- происходит выход за класс используемых в арифметике чисел из-за искажения формы функции принадлежности;
- ограничивается область определения функции принадлежности;
- нарушаются классические отношения равенства и частичного порядка.

Требования к разрабатываемой методике

- ограничение роста неопределенности результатов обработки нечеткой информации;
- сохранение чётких отношений в модельных уравнениях при подстановке данных;
- возможность представления линейного порядка на множестве нечётких чисел;
- возможность использования стандартных программных средств реализации численных методов решений;
- возможность управления устойчивостью решения решаемой задачи.

Преобразование L

Исходная задача $\tilde{Y} = f\left(\tilde{X}, \tilde{A}\right)$ с нечёткими числовыми параметрами и переменными рассматривается как совокупность задач с интервальной неопределенностью

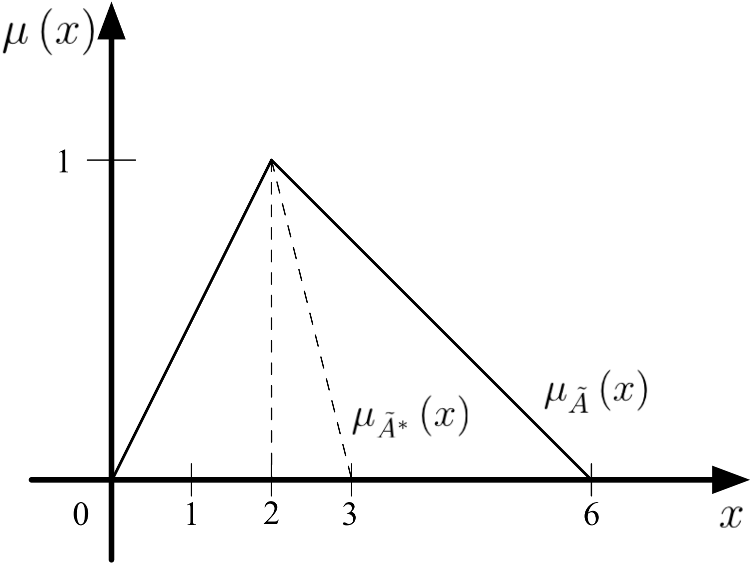
$$\tilde{Y} = f\left(\tilde{X}, \tilde{A}\right) \to \bigcup_{\alpha=0}^{1} y_\alpha = f\left(X_\alpha, A_\alpha\right) \tag{9}$$

с последующим переходом к полной определённости на каждом α-уровне, для чего на каждом α-уровне внутри интервала X_α выбирается точка $\bar{x}\left(\alpha\right)$. Предлагается выбирать значение $\bar{x}\left(\alpha\right)$ с помощью линейного параметрического преобразования L

$$\bar{x}\left(\alpha\right) = L\left(X_\alpha\right) = \lambda x^L\left(\alpha\right) + \left(1 - \lambda\right) x^R\left(\alpha\right). \tag{10}$$

Преобразование (10) приводит к потерям информации

Пример преобразования L



Модифицированные нечёткие числа

После решения чётких α-уровневых задач полученные результаты $y(\alpha)$ аппроксимируются нечётким числом

$$\tilde{Y}^* = \{y(\alpha)\,|\mu_{\tilde{Y}}(y) = \alpha\} \tag{11}$$

Результат (11) есть **модифицированное решение** задачи (9). Происходит переход от использования «полноценных» нечётких чисел к алгебрам для чисел LL/RR-типа. Функция принадлежности чисел LL/RR-типа является обратной к функции $\bar{x}(\alpha)$:

$$\mu_{\tilde{A}^*}(x) = (\bar{x}(\alpha))^{-1} \tag{12}$$

и Число (12) и есть **модифицированное нечёткое число**. Является числом LL/RR-типа

Свойства преобразования L

1. Преобразование L сохраняет моду нечёткого числа, т. е. $\forall\lambda \in [0;1]: \; m_{\tilde{A}} = m_{\tilde{A}^*}$.
2. При некоторых значениях параметра λ преобразование L сохраняет
   2.1 знак степени асимметрии: $\exists\lambda \in [0;1]: \; sign(AS_{\tilde{A}}) = sign(AS_{\tilde{A}^*})$;
   2.2 значение степени асимметрии: $\exists\lambda \in [0;1]: \; AS_{\tilde{A}} = AS_{\tilde{A}^*}$.

   $\lambda^* = \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{a}{d_{\tilde{A}}}$ сохраняет значение степени асимметрии.
3. $\forall\lambda \in [0;1]: A^*_\alpha \subset A_\alpha; \; d_{\tilde{A}} \geqslant d_{\tilde{A}^*}$ — преобразование L уменьшает длину носителя нечёткого числа и оставляет α-интервалы модифицированного числа внутри α-интервалов исходного числа.

Алгебра модифицированных нечётких чисел

Строится чёткая алгебра $P = \langle K;\ +,\ *\rangle$, $K = \{\bar{x}(\alpha)\}$
и показывается, что P удовлетворяем всем аксиомам поля.
Используется более удобная форма записи модифицированного числа

$$\bar{x}\left(\alpha\right) = c + k\alpha, \tag{13}$$

$$\left[\begin{array}{l} c = m + b - \lambda\left(a + b\right) \\ k = \lambda\left(a + b\right) - b \end{array}\right. \tag{14}$$

$$\lambda \in \left[0; 1\right];\ \ c, k \in \mathbb{R}$$

Элементы множества K имеют линейную структуру, и для восстановления конкретного модифицированного числа $\tilde{A}$ достаточно знать два значения — $\bar{x}_{\tilde{A}}\left(0\right)$ и $\bar{x}_{\tilde{A}}\left(1\right) = m_{\tilde{A}}$:

$$\bar{x}_{\tilde{A}}\left(\alpha\right) = \bar{x}_{\tilde{A}}\left(0\right) + \alpha\left(\bar{x}_{\tilde{A}}\left(1\right) - \bar{x}_{\tilde{A}}\left(0\right)\right) = \alpha\bar{x}_{\tilde{A}}\left(1\right) + \left(1 - \alpha\right)\bar{x}_{\tilde{A}}\left(0\right) \tag{15}$$

Сложение и его свойства

На множестве K вводится операция сложения (16)

$$\bar{x}_1(\alpha) + \bar{x}_2(\alpha) = r_1(\alpha) = c_1 + c_2 + (k_1 + k_2)\,\alpha,\;\; r_1(\alpha) \in K; \qquad (16)$$

нейтральный по сложению элемент (17)

$$\begin{gathered} \bar{0} = 0 + 0\alpha \in K : \forall \bar{x}(\alpha) \in K : \\ \bar{x}(\alpha) + \bar{0} = c + k\alpha + 0 + 0\alpha = \bar{x}(\alpha); \end{gathered} \qquad (17)$$

противоположный по сложению элемент (18)

$$-\bar{x}(\alpha) = -c - k\alpha \in K :\;\; \bar{x}(\alpha) + (-\bar{x}(\alpha)) = \bar{0}. \qquad (18)$$

Доказываются свойства ассоциативности и коммутативности операции (16).

Умножение и его свойства

На множестве K вводится операция умножения (19)

$$r_2(\alpha) = c_1 c_2 + (c_1 k_2 + c_2 k_1 + k_1 k_2)\,\alpha;\;\; r_2(\alpha) \in K. \qquad (19)$$

нейтральный по умножению элемент (20)

$$\bar{1} = 1 + 0\alpha \in K:\;\; \forall \bar{x}(\alpha) \in K \quad \bar{x}(\alpha) \cdot \bar{1} = \bar{x}(\alpha); \qquad (20)$$

обратный по умножению (21) элемент.

$$\bar{x}^{-1}(\alpha) = \frac{1}{c} - \frac{k}{c\,(c+k)}\alpha \in K,\;\; c \neq 0:\;\; \bar{x}(\alpha)\,\bar{x}^{-1}(\alpha) = \bar{1}. \qquad (21)$$

Доказываются свойства ассоциативности и коммутативности, а также свойство дистрибутивности умножения (19) относительно сложения (16).

Показано, что для существования обратного элемента число $\bar{x}(\alpha)$ должно иметь ненулевую моду, поскольку, согласно (14), $c + k = m \neq 0$.

Двухточечные вычисления

Согласно (15),

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = \alpha \bar{x}_{\tilde{A}}(1) + (1-\alpha)\,\bar{x}_{\tilde{A}}(0) \tag{22}$$

Для произвольной арифметической операции $*$ результат с использованием (22) будет выглядеть следующим образом:

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) * \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) = \alpha\left(\bar{x}_{\tilde{A}}(1) * \bar{x}_{\tilde{B}}(1)\right) + (1-\alpha)\left(\bar{x}_{\tilde{A}}(0) * \bar{x}_{\tilde{B}}(0)\right). \tag{23}$$

Двухточечные вычисления основаны на (22), эквивалентны введённой алгебре и позволяют решать нечёткую задачу как две чёткие при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$.

Преимущества двухточечных вычислений:

- избавляют от необходимости вводить отношение линейного порядка;
- позволяют использовать стандартные программные продукты

Устойчивость задачи линейного программирования (ЗЛП)

Задача линейного программирования с нечёткими параметрами

$$\begin{cases} f\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{C}\mathbf{x} \to \min; \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}, \end{cases} \tag{24}$$

Применение к каждому из элементов матрицы и векторов преобразования L приводит к модифицированной задаче (25)

$$\begin{cases} f\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{C}^{*}\mathbf{x} \to \min; \\ \mathbf{A}^{*}\mathbf{x} = \mathbf{B}^{*}, \end{cases} \tag{25}$$

Здесь $\mathbf{A}^{*} = \left\{\bar{x}_{\tilde{A}_{ij}}\left(\alpha\right)\right\}$, $\mathbf{B}^{*} = \left\{\bar{x}_{\tilde{B}_{i}}\left(\alpha\right)\right\}$, $\mathbf{C}^{*} = \left\{\bar{x}_{\tilde{C}_{i}}\left(\alpha\right)\right\}$ — матрица и векторы соответственно

Устойчивость ЗЛП

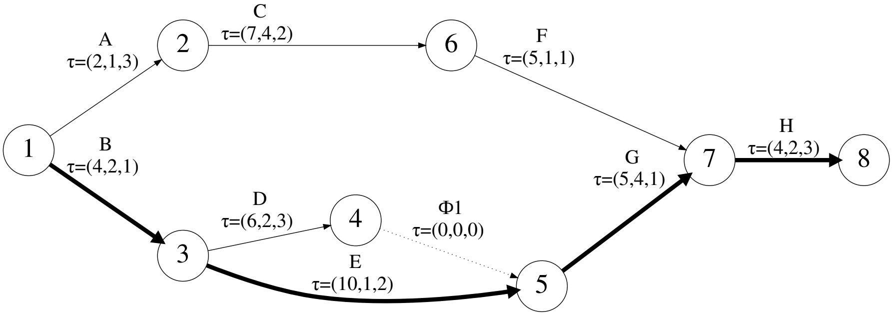
- Предлагаемое условие устойчивости по решению:
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall \alpha \in [0;1)\ |\alpha - 1| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(\alpha)\| < \varepsilon \tag{26}$$
- При решении на уровне $\alpha = 0$, все значения λ_S (S — индекс $\tilde{A}_{ij}$, $\tilde{B}_i$, $\tilde{C}_i$) — принимают нулевые/единичные значения. Используется критерий для минимизации потерь экспертной информации
$$(\lambda_S^\star - \lambda_S)^2 \to \min \tag{27}$$
- Возникает задача векторной оптимизации ввиду противоречивости критерия (27) и целевой функции задачи (25). Используется аддитивная свёртка критериев в целевой функции (28)

$$f^*(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^*\mathbf{x} + \gamma \sum_s (\lambda_S^* - \lambda_S)^2 \to \min \tag{28}$$

Задача сетевого планирования

- Модель проекта — направленный ациклический граф $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$
- Работам проекта w_j, длительностью τ_j каждая, сопоставлены дуги графа e_j, $j = \overline{1, m}$
- Событиям проекта z_i с временами наступления t_i сопоставления вершины графа v_i, $i = \overline{1, n}$; есть начальное (исток) и конечное (сток) события
- Для любой вершины графа существует путь, проходящий через неё
- Для любого ребра существует путь, содержащий это ребро
- Два метода решения — алгоритмический и с помощью математического программирования
- Алгоритмический метод решения не позволяет проводить анализ задачи на устойчивость

Пример сети проекта с нечёткими оценками



Модифицированная задача сетевого планирования

- Решается задачи линейного программирования с нечёткими временными оценками

$$\begin{cases} T(\alpha) = t_n - t_1 \to \min \\ t_{j_s} - t_{i_s} \geqslant \bar{\tau}_s\left(\alpha, \lambda_s\right), \ \forall s = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{29}$$

где t_{i_s} и t_{j_s} — времена наступления событий начала и окончания работы w_s соответственно

- Для решения используются двухточечные вычисления
- Результат решения — общее время выполнения проекта $\tilde{T}$, календарный план проекта $\mathbf{t} = \{\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_n\}$, совокупность критических операций S_1

Решение задачи сетевого планирования

- Полученное при $\alpha = 1$ решение задачи (29) даёт активные ограничения на критические операции и их номера S_1
- На параметры λ_S преобразования L также необходимо наложить ограничения и учесть их в целевой функции (28), чтобы избежать ситуации, когда λ_S принимают граничные значения (0 или 1)
- При $\alpha = 0$ решается видоизменённая задача

$$\begin{cases} T^*(\alpha, \lambda) = t_n - t_1 + \gamma \sum_{s=1}^{m} (\lambda_s^* - \lambda_s)^2 \to \min; \\ t_{j_{s_1}} - t_{i_{s_1}} = \bar{\tau}_{s_1}(\alpha, \lambda_{s_1}), \ \forall s_1 \in S_1(1); \\ t_{j_s} - t_{i_s} \geqslant \bar{\tau}_s(\alpha, \lambda_s), \ \forall s \notin S_1(1), \ s = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{30}$$

Алгоритм решения задачи

1. Решается невозмущённая задача (29) при $\alpha = 1$.
   Результат — кортеж $\langle T(1), t(1), S_1(1)\rangle$.
2. Фиксируется критический путь при всех $\alpha \neq 1$ — в задаче (29) нестрогие неравенства меняются на равенства $\forall s_1 \in S_1(1)$. Это позволяет выполнить условие устойчивости задачи по решению.
3. Решается возмущённая задача (30). Результатом решения задачи является кортеж $\langle T(0), t(0), \lambda\rangle$, где λ — вектор параметров преобразования L.
4. Решение исходной задачи — тройка $\left\langle \tilde{T}, S_1, \lambda \right\rangle$. Функция принадлежности общего времени выполнения проекта $\tilde{T}$ восстанавливается по значениям $T(0)$ и $T(1)$, либо число $\tilde{T}$ оставляется в виде зависимости $\bar{x}(\alpha)$.

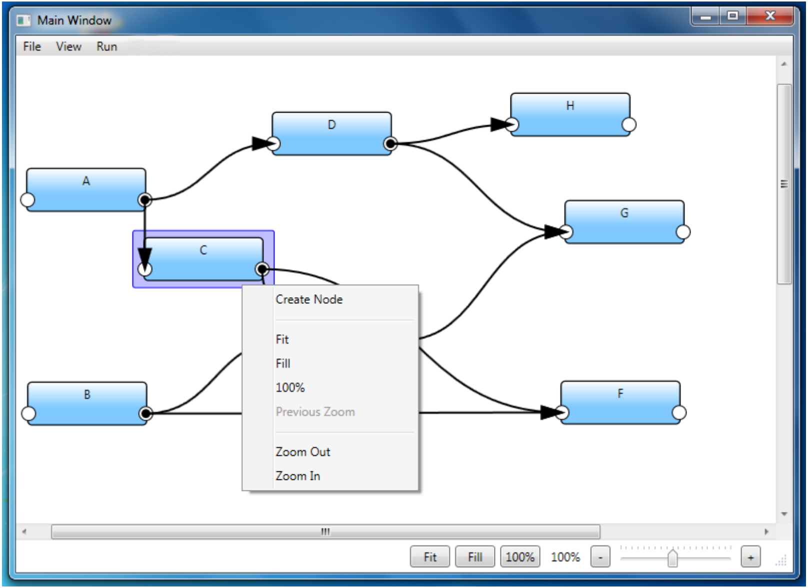
Программное обеспечение

Приложение «CSBusinessGraph» выполняет все вычисления только с использованием действительных переменных

Функциональные возможности

- создание и редактирование модели проекта в виде вершинного графа;
- поддержка модели проекта в согласованном состоянии;
- формирование временных оценок выполнения операций;
- автоматическое преобразование вершинного графа в стрелочный;
- реализация механизма расчёта критического пути на основе α-уровневых и двухточечных вычислений;
- экспорт отчёта о решении задачи в формат Microsoft Excel.

Главное окно приложения



Результаты работы

- Комплекс методов для моделей с чёткими отношениями и нечёткими параметрами
  - применение классических методы решения
  - достижение требуемых качественных свойств решения
- Параметрическая модель представления нечёткого числа
  - максимальное сохранение экспертной информации
  - двухточечные вычисления — эффективная численная реализации решения
- Устойчивость решения задачи линейного программирования с нечёткими параметрами
  - свёртка критериев для управления устойчивостью
  - алгоритм получения устойчивого решения задачи
- Апробация методов — задача сетевого планирования
- Программный комплекс — решение задачи оценки сроков разработки программного обеспечения

Апробация работы и публикации

Основные положения работы докладывались на конференциях:

- Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (Воронеж, 2012 г.)
- Информатика: проблемы, методология, технологии (Воронеж, 2013–2014 гг.);
- Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации (Алушта, 2013–2014 гг.);
- Радиоэлектроника, электротехника и энергетика (Москва, 2014).

Основное содержание диссертационного исследования изложено в 11 научных работах, из них 4 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ.