

Математическое моделирование задач выбора с расплывчатой неопределенностью на основе методов представления и алгебры нечетких параметров

Я. А. Воронцов

Научный руководитель: М.Г.Матвеев, д.т.н., профессор.

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет»

Воронеж, 2015

Представление нечёткой информации

- нечёткие множества (подмножества предопределённого универсального множества X)

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}; \quad E(\mu_{\tilde{A}}(x)) = [0; 1] \quad (1)$$

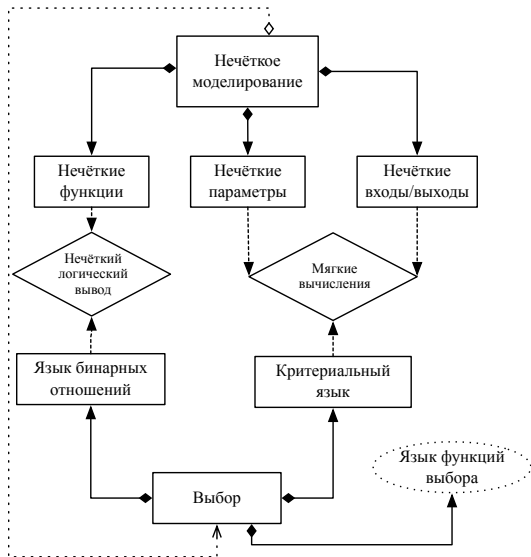
- нечёткие числа (подмножества множества \mathbb{R})
 - кусочная непрерывность $\mu_{\tilde{A}}(x)$;
 - выпуклость $\mu_{\tilde{A}}(x)$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; \forall \gamma \in [0; 1] \\ \mu_{\tilde{A}}(\gamma x_1 + (1 - \gamma) x_2) \geq \min \{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\} \quad (2)$$

- нормальность $\mu_{\tilde{A}}(x)$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (\mu_{\tilde{A}}(x)) = 1 \quad (3)$$

Классификация нечётких моделей



- Исследуются модели, использующие чёткие отношения и нечёткие параметры (модели второго типа)
- Существующие подходы к нечётким вычислениям далеко не всегда применимы в моделях второго типа

Особенности существующих способов мягких вычислений

- требуются значительные вычислительные ресурсы (Ротштейн)

$$\tilde{y} = f(\tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_n) \rightarrow N = O(k^n)$$

- неоправданно расширяется носитель функции принадлежности

$$\begin{aligned} [2; 4] \cdot [1; 3] &= [2; 12]; & d &= 12 - 2 = 10; \\ [2; 4] \cdot [99; 101] &= [198; 404]; & d &= 404 - 198 = 206. \end{aligned}$$

- происходит выход за класс используемых в арифметике чисел из-за искажения формы функции принадлежности;

$$\tilde{C} = \tilde{A} * \tilde{B} = \int_{x_{\tilde{C}}^L}^{m_{\tilde{C}}} \frac{\mu_{\tilde{C}}(x)}{x} + \int_{m_{\tilde{C}}}^{x_{\tilde{C}}^R} \frac{\mu_{\tilde{C}}(x)}{x}; \quad \mu_{\tilde{C}}(x) = k\sqrt{x} + b$$

Особенности существующих способов мягких вычислений

- ограничивается область определения функции принадлежности

$$\tilde{A} = (m_1, a_1, b_1); \quad \tilde{B} = (m_2, a_2, b_2);$$

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = (m_1 m_2, m_2 a_1 + m_1 a_2, m_2 b_1 + m_1 b_2); \quad \tilde{A}, \tilde{B} > 0$$

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = (m_1 m_2, m_2 a_1 - m_1 b_2, m_2 b_1 - m_1 a_2); \quad \tilde{A} > 0, \tilde{B} < 0$$

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = (m_1 m_2, -m_2 b_1 - m_1 b_2, -m_2 a_1 - m_1 a_2); \quad \tilde{A}, \tilde{B} < 0$$

- нарушаются классические отношения равенства и частичного порядка.

$$(\tilde{A} + \tilde{B}) - \tilde{B} \neq \tilde{A}$$

Цель и задачи исследования

Цель: построение и исследование моделей учёта нечёткой неопределённости, обеспечивающих требуемые свойства решения (ограничение роста неопределённости, сохранение истинности модельных отношений, устойчивость решения) различных прикладных задач, а также разработка методов эффективного численного решения на основе вводимых моделей

Задачи:

- анализ существующих методик нечётких вычислений с точки зрения сохранения свойств решения задач;
- разработка модели представления нечётких чисел, позволяющей максимально сохранять исходную экспертную информацию и обеспечить требуемые качественные свойства решений (устойчивость, сохранение чётких математических соотношений и т. п.);

Цель и задачи исследования

Задачи:

- разработка методики эффективной численной реализации решения задач с нечёткими параметрами, основанной на подходящих алгебраических структурах и её тестирование на примере задачи сетевого планирования с нечёткими параметрами;
- разработка и верификация программного обеспечения, реализующего предложенную модель представления нечётких параметров и методики численного решения задач с нечёткими параметрами.

Основные понятия

- Треугольное нечёткое число $\tilde{A} = \langle m, a, b \rangle$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - m + a}{a}; & x \in [m - a; m] \\ \frac{m + b - x}{b}; & x \in (m; m + b] \\ 0; & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (4)$$

- Горизонтальная форма (Пегат) $X_{\alpha} = [x^L(\alpha); x^R(\alpha)]$

$$\begin{cases} x^L(\alpha) = m - a + a\alpha \\ x^R(\alpha) = m + b - b\alpha \end{cases} \quad (5)$$

- Треугольное число LL (RR)-типа — правый (левый) коэффициент нечёткости числа равен нулю

Преобразование L

- Переход к интервальной неопределенности

$$\tilde{Y} = f(\tilde{X}, \tilde{A}) \rightarrow \bigcup_{\alpha=0}^1 y_{\alpha} = f(X_{\alpha}, A_{\alpha}) \quad (6)$$

- Формализованное представление α -интервала с помощью преобразования L

$$\bar{x}(\alpha) = L(X_{\alpha}) = \lambda x^L(\alpha) + (1 - \lambda) x^R(\alpha); \lambda \in [0; 1] \quad (7)$$

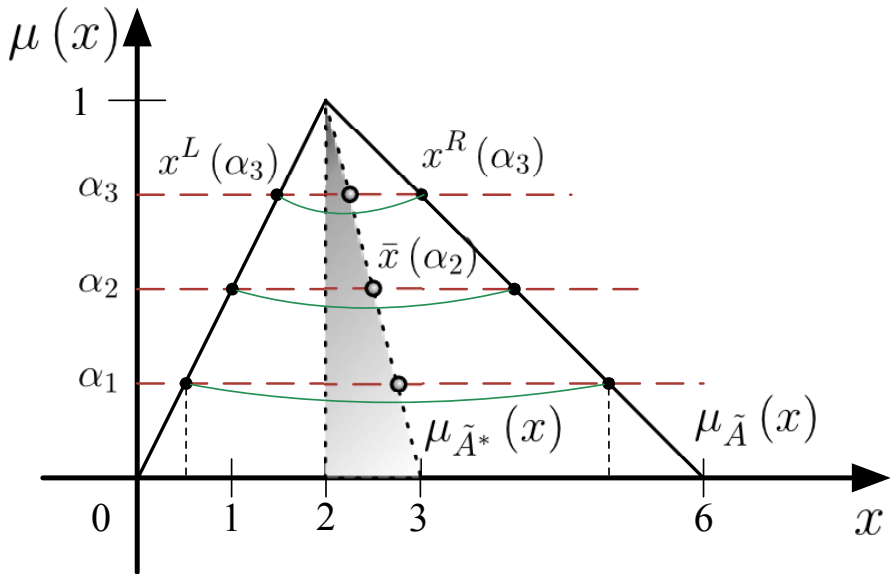
- Синтез модифицированного решения

$$\tilde{Y}^* = \bigcup_{\alpha=0}^1 f(L(X_{\alpha}), L(A_{\alpha})) = \{y_{\alpha} \mid \mu_{\tilde{Y}^*}(y) = \alpha\} \quad (8)$$

- Модифицированное нечёткое число (LL/RR-типа)

$$\mu_{\tilde{A}^*}(x) = (\bar{x}(\alpha))^{-1} \quad (9)$$

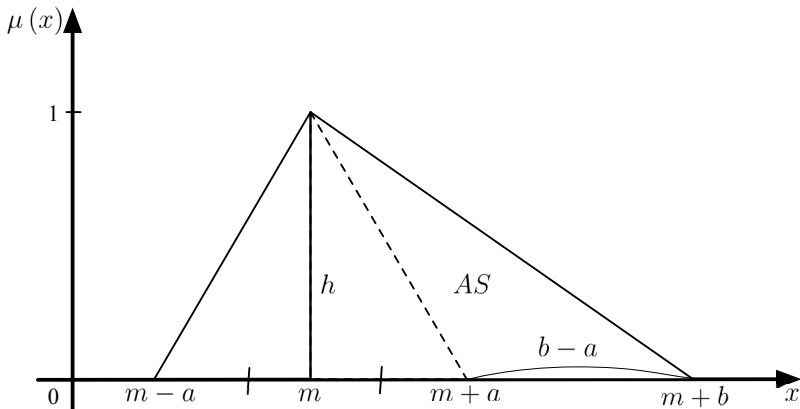
Преобразование L



Представление числа

- Вводится модель представления нечёткого числа, инвариантная к его расположению на числовой оси

$$\langle m_{\tilde{A}}, d_{\tilde{A}}, AS_{\tilde{A}} \rangle; d_{\tilde{A}} = a + b; AS_{\tilde{A}} = \frac{b - a}{2}.$$



Свойства преобразования L

1. Преобразование L сохраняет моду нечёткого числа, т. е.
 $\forall \lambda \in [0; 1] : m_{\tilde{A}} = m_{\tilde{A}^*}.$
2. При некоторых значениях параметра λ преобразование L сохраняет
 - 2.1 знак степени асимметрии:
 $\exists \lambda \in [0; 1] : \text{sign}(AS_{\tilde{A}}) = \text{sign}(AS_{\tilde{A}^*});$
 - 2.2 значение степени асимметрии: $\exists \lambda \in [0; 1] : AS_{\tilde{A}} = AS_{\tilde{A}^*}.$ $\lambda^* = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{d_{\tilde{A}}}$ сохраняет значение степени асимметрии.
3. $\forall \lambda \in [0; 1] : A_{\alpha}^* \subset A_{\alpha}; d_{\tilde{A}} \geq d_{\tilde{A}^*}$ — преобразование L уменьшает длину носителя нечёткого числа и оставляет α -интервалы модифицированного числа внутри α -интервалов исходного числа.

Алгебра модифицированных нечётких чисел

- Алгебра $P = \langle K; +, *, 0, 1 \rangle$, $K = \{\bar{x}(\alpha)\}$, $\alpha \in [0; 1]$

$$\bar{x}(\alpha) = c + k\alpha, \quad (10)$$

- Коэффициенты в (10)

$$\begin{cases} c = m + b - \lambda(a + b) \\ k = \lambda(a + b) - b \end{cases} \quad (11)$$
$$\lambda \in [0; 1]; \quad c, k \in \mathbb{R}$$

- Элементы множества K линейны; достаточно знать два значения — $\bar{x}_{\tilde{A}}(0)$ и $\bar{x}_{\tilde{A}}(1) = m_{\tilde{A}}$, чтобы найти \tilde{A} :

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = \bar{x}_{\tilde{A}}(0) + \alpha(\bar{x}_{\tilde{A}}(1) - \bar{x}_{\tilde{A}}(0)) = \quad (12)$$

$$= \alpha \bar{x}_{\tilde{A}}(1) + (1 - \alpha) \bar{x}_{\tilde{A}}(0) \quad (13)$$

Сложение и его свойства

- Операция сложения на множестве K

$$\bar{x}_1(\alpha) + \bar{x}_2(\alpha) = r_1(\alpha) = c_1 + c_2 + (k_1 + k_2)\alpha, \quad r_1(\alpha) \in K \quad (14)$$

- Нейтральный по сложению элемент

$$\begin{aligned} \bar{0} &= 0 + 0\alpha \in K : \forall \bar{x}(\alpha) \in K : \\ \bar{x}(\alpha) + \bar{0} &= c + k\alpha + 0 + 0\alpha = \bar{x}(\alpha) \end{aligned} \quad (15)$$

- Противоположный по сложению элемент (16)

$$-\bar{x}(\alpha) = -c - k\alpha \in K : \bar{x}(\alpha) + (-\bar{x}(\alpha)) = \bar{0} \quad (16)$$

- Алгебра $\langle K, +, 0 \rangle$ — абелева группа

Умножение и его свойства

- Операция умножения на множестве K

$$r_2(\alpha) = c_1 c_2 + (c_1 k_2 + c_2 k_1 + k_1 k_2) \alpha; \quad r_2(\alpha) \in K \quad (17)$$

- Нейтральный по умножению элемент

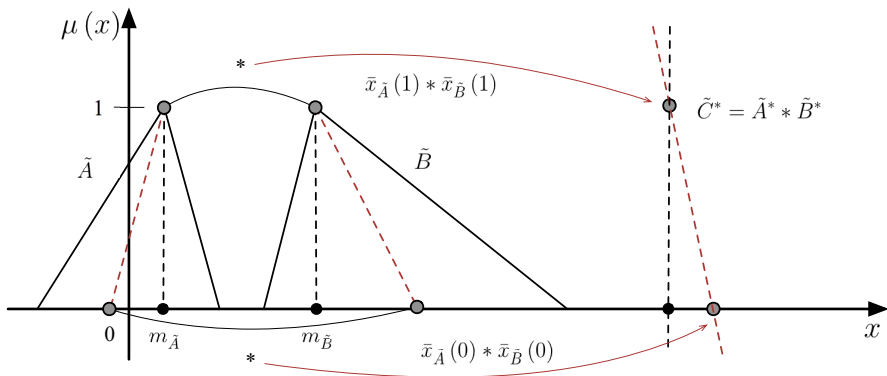
$$\bar{1} = 1 + 0\alpha \in K : \forall \bar{x}(\alpha) \in K \quad \bar{x}(\alpha) \cdot \bar{1} = \bar{x}(\alpha) \quad (18)$$

- Обратный по умножению элемент

$$\bar{x}^{-1}(\alpha) = \frac{1}{c} - \frac{k}{c(c+k)}\alpha \in K, \quad c \neq 0 : \bar{x}(\alpha) \bar{x}^{-1}(\alpha) = \bar{1} \quad (19)$$

- При $c + k = m = 0$ (11) обратного элемента для $\bar{x}(\alpha)$ не существует
- Алгебра обратимых элементов $\langle K, *, 1 \rangle$ — абелева группа
- Умножение дистрибутивно относительно сложения

Двухточечные вычисления



Для произвольной арифметической операции $g : R^2 \rightarrow R$

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) g \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) &= \\ &= \alpha (\bar{x}_{\tilde{A}}(1) g \bar{x}_{\tilde{B}}(1)) + (1 - \alpha) (\bar{x}_{\tilde{A}}(0) g \bar{x}_{\tilde{B}}(0)) \end{aligned} \quad (20)$$

Двухточечные вычисления

- Существуют отображения $\Gamma : K \rightarrow M$ и $\Gamma^{-1} : M \rightarrow K$:

$$\left[\begin{array}{l} P = \langle K, \Omega_1 \rangle \\ c = \bar{x}_{\tilde{A}}(0); \\ k = \bar{x}_{\tilde{A}}(1) - \bar{x}_{\tilde{A}}(0); \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Q = \langle M, \Omega_2 \rangle \\ \bar{x}_{\tilde{A}}(0) = c; \\ \bar{x}_{\tilde{A}}(1) = c + k; \end{array} \right] \quad (21)$$

- Для бинарных операций $\varphi_i \in \Omega_1$, $\psi_i \in \Omega_2$ и элементов $k_1, k_2 \in K$, $m_1, m_2 \in M$:

$$\Gamma(\varphi_i(k_1, k_2)) = \psi_i(\Gamma(k_1, k_2)); \quad (22)$$

$$\varphi_i(\Gamma^{-1}(m_1, m_2)) = \Gamma^{-1}(\psi_i(m_1, m_2)) \quad (23)$$

- Ввиду (21), K и M суть одно и то же — изоморфизм доказывается простой подстановкой

Устойчивость ЗЛП

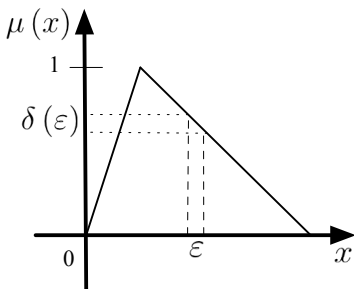
Задача линейного программирования с нечёткими параметрами

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \min; \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^*\mathbf{x} \rightarrow \min; \\ \mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{B}^*, \end{cases} \quad (24)$$

Решение

задачи устойчиво, если

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0; 1] \\ |\alpha_1 - \alpha_2| < \delta \Rightarrow \\ \|\mathbf{x}(\alpha_1) - \mathbf{x}(\alpha_2)\| < \varepsilon \end{aligned} \quad (25)$$



Устойчивость ЗЛП

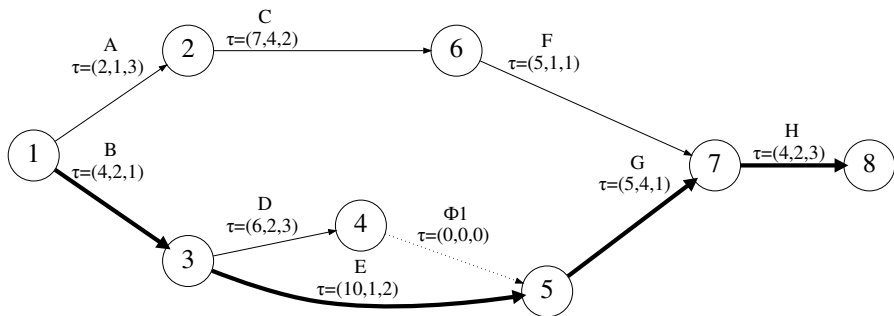
- При $\alpha = 0$, все значения λ_S (S — индекс \tilde{A}_{ij} , \tilde{B}_i , \tilde{C}_i) — принимают граничные значения (0 или 1).
- Ограничения на λ для минимизации потерь экспертной информации

$$(\lambda_S^* - \lambda_S)^2 \rightarrow \min \quad (26)$$

- Задача векторной оптимизации ввиду противоречивости критерия (26) и целевой функции задачи (24)
- Применяется аддитивная свёртка критериев в целевой функции (27)

$$f^*(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{C}^* \mathbf{x} + \gamma \sum_s (\lambda_S^* - \lambda_S)^2 \rightarrow \min \quad (27)$$

Задача сетевого планирования



$G = (V, E), |V| = n, |E| = m;$

дуги e_j — работы w_j , длительностью $\tau_j, j = \overline{1, m};$

вершины v_i — события z_i с временами наступления $t_i, i = \overline{1, n}$

Модифицированная задача сетевого планирования

- ЗЛП с нечёткими временными оценками

$$\begin{cases} T(\alpha) = t_n - t_1 \rightarrow \min \\ t_{j_s} - t_{i_s} \geq \bar{\tau}_s(\alpha, \lambda_s), \quad \forall s = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (28)$$

- При $\alpha = 0$ решается возмущённая задача

$$\begin{cases} T^*(\alpha, \lambda) = t_n - t_1 + \gamma \sum_{s=1}^m (\lambda_s^* - \lambda_s)^2 \rightarrow \min; \\ t_{j_{s_1}} - t_{i_{s_1}} = \bar{\tau}_{s_1}(\alpha, \lambda_{s_1}), \quad \forall s_1 \in S_1(1); \\ t_{j_s} - t_{i_s} \geq \bar{\tau}_s(\alpha, \lambda_s), \quad \forall s \notin S_1(1), \quad s = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (29)$$

- Результат — совокупность $\langle \tilde{T}, S_1, \lambda \rangle$

Решение примера (с. 19)

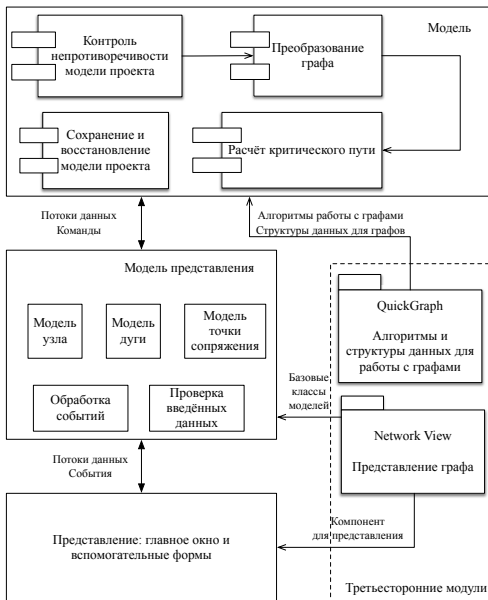
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N							
1	Операция	Параметры					Лямбда идеал	Тай(Альфа)	1	Лямбда поиск	Тай(Альфа)	Гамма	Лямбда diff								
2		XL	M	XR	A	B								0	100						
3		A	1	2	5	1								3	0,2500	2	LA	0,2500	3,99999708	LA*-LA	0,0000
4		B	2	4	5	2								1	0,6667	4	LB	0,6817	2,9550035	LB*-LB	0,0002
5		C	3	7	9	4								2	0,6667	7	LC	0,6667	4,99999766	LC*-LC	0,0000
6	D	4	6	9	2	3	0,4000	6	LD	0,4000	7,00000351	LD*-LD	0,0000								
7	E	9	10	12	1	2	0,3333	10	LE	0,3483	10,9550016	LE*-LE	0,0002								
8	F	4	5	6	1	1	0,5000	5	LF	0,5000	5,00000421	LF*-LF	0,0000								
9	G	1	5	6	4	1	0,8000	5	LG	0,8250	1,87500284	LG*-LG	0,0006								
10	H	2	4	7	2	3	0,4000	4	LH	0,4250	4,8750047	LH*-LH	0,0006								
11	Φ1	0	0	0	0	0	0,0000	0	Φ1	0,0000	0	Φ1*-Φ1	0,0000								
12																					
13	События	Время	Условия		Резервы	Оптимум			События	Время	Условия		Резервы	Оптимум							
14	1	0	t2-t1>tauA		7	5	23		1	0,0090	t2-t1>tauA		4,2195	0,2195	20,83001						
15	2	7	t3-t1>tauB		4	0			2	4,2285	t3-t1=tauB		2,9550	0,0000							
16	3	4	t6-t2>tauC		7	0			3	2,9640	t6-t2>tauC		5,7413	0,7413							
17	4	14	t4-t3>tauD		10	4			4	13,9190	t4-t3>tauD		10,9550	3,9550							
18	5	14	t5-t3>tauE		10	0			5	13,9190	t5-t3=tauE		10,9550	0,0000							
19	6	14	t7-t6>tauF		5	0			6	9,9698	t7-t6>tauF		5,8242	0,8242							
20	7	19	t7-t5>tauG		5	0			7	15,7940	t7-t5=tauG		1,8750	0,0000							
21	8	23	t8-t7>tauH		4	0			8	20,6690	t8-t7=tauH		4,8750	0,0000							
22			t5-t4>tauΦ1		0	0					t5-t4>tauΦ1		0,0000	0,0000							

Окончательный результат: $S_1 = \{B, E, G, H\}$,

$$T(\alpha) = 20,67 + 2,33\alpha,$$

$$\lambda = \{0,25; 0,68; 0,67; 0,4; 0,35; 0,5; 0,83; 0,43\}$$

Программное обеспечение



Результаты работы (мат. моделирование)

- Разработана и исследована модель представления нечётких числовых параметров математического описания объектов в классе треугольных LR-чисел, обеспечивающая возможность построения алгебраической структуры нечётких чисел, сохраняющей требуемые свойства решения задач выбора: ограничение роста неопределённости, сохранение истинности модельных отношений и возможность интерпретации полученного результата.

Результаты работы (численные методы)

- Разработан метод приближённого численного решения задач выбора с нечёткими параметрами, инвариантный к форме математического описания задачи, позволяющий строить нечёткое решение задач как линейную комбинацию чётких решений, полученных на границах интервального представления параметров, снизить вычислительную сложность процесса получения решения и применять стандартные программные продукты для нечётких вычислений.

Результаты работы (апробация методов)

- Предложенные методы решения задач выбора с нечёткими параметрами апробированы на задаче сетевого планирования с нечёткими временными оценками. В процессе апробации рассмотрена проблема устойчивости критического пути, обосновано введение свёртки критериев для управления устойчивостью и сформулирован алгоритм, обеспечивающий получение устойчивого решения задачи. Достоверность полученного решения подтверждается его сравнением с решениями, найденным с помощью других методов, хорошо зарекомендовавших себя в мировой практике.

Результаты работы (комплексы программ)

- Разработан программный комплекс, позволяющий решать задачу оценки сроков при разработке программного обеспечения как задачу сетевого планирования с нечёткими временными оценками и обеспечивающий учёт возможных рисков, возникающих при разработке программного обеспечения. Практическая ценность комплекса подтверждается актом о внедрении.

Апробация работы и публикации

Основные положения работы докладывались на конференциях:

- Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (Воронеж, 2012 г.)
- Информатика: проблемы, методология, технологии (Воронеж, 2013–2014 гг.);
- Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации (Алушта, 2013–2014 гг.);
- Радиоэлектроника, электротехника и энергетика (Москва, 2014).

Основное содержание диссертационного исследования изложено в 11 научных работах, из них 4 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ.