

# Математическое моделирование задач выбора с расплывчатой неопределенностью на основе методов представления и алгебры нечетких параметров

Я. А. Воронцов

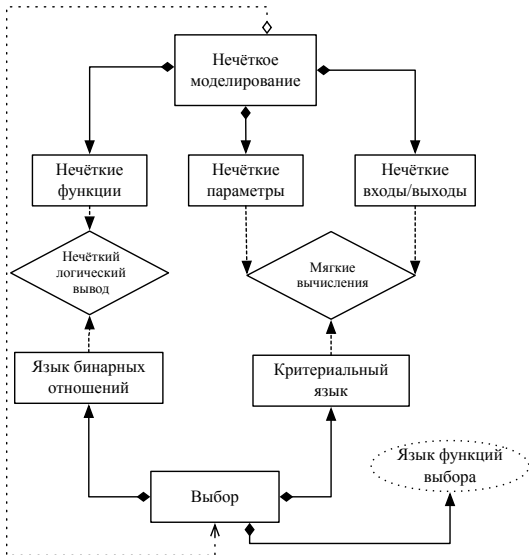
*Научный руководитель:* М.Г.Матвеев, д.т.н., профессор.

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет»

Воронеж, 2015

# Классификация нечётких моделей



- Исследуются модели, использующие чёткие отношения и нечёткие параметры (модели второго типа)
- Существующие подходы к нечётким вычислениям далеко не всегда применимы в моделях второго типа

# Особенности существующих способов мягких вычислений

- требуются значительные вычислительные ресурсы;
- неоправданно расширяется носитель функции принадлежности;
- происходит выход за класс используемых в арифметике чисел из-за искажения формы функции принадлежности;
- ограничивается область определения функции принадлежности;
- нарушаются классические отношения равенства и частичного порядка.

# Цель и задачи исследования

**Цель:** построение и исследование моделей учёта нечёткой неопределённости, обеспечивающих требуемые свойства решения различных прикладных задач, а также разработка методов эффективного численного решения на основе вводимых моделей

**Задачи:**

- анализ существующих методик нечётких вычислений с точки зрения сохранения свойств решения задач;
- разработка модели представления нечётких чисел, позволяющей максимально сохранять исходную экспертную информацию и обеспечить требуемые качественные свойства решений (устойчивость, сохранение чётких математических соотношений и т. п.);

# Цель и задачи исследования

## Задачи:

- разработка методики эффективной численной реализации решения задач с нечёткими параметрами, основанной на подходящих алгебраических структурах и её тестирование на примере задачи сетевого планирования с нечёткими параметрами;
- разработка и верификация программного обеспечения, реализующего предложенную модель представления нечётких параметров и методики численного решения задач с нечёткими параметрами.

# Представление нечёткой информации

- нечёткие множества (подмножества предопределённого универсального множества  $X$ )

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}; \quad E(\mu_{\tilde{A}}(x)) = [0; 1] \quad (1)$$

- нечёткие числа (подмножества множества  $\mathbb{R}$ )
  - кусочная непрерывность  $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ;
  - выпуклость  $\mu_{\tilde{A}}(x)$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; \forall \gamma \in [0; 1] \\ \mu_{\tilde{A}}(\gamma x_1 + (1 - \gamma)x_2) \geq \min \{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\} \quad (2)$$

- нормальность  $\mu_{\tilde{A}}(x)$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (\mu_{\tilde{A}}(x)) = 1 \quad (3)$$

## Основные понятия

- Треугольное нечёткое число  $\tilde{A} = \langle m, a, b \rangle$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - m + a}{a}; & x \in [m - a; m] \\ \frac{m + b - x}{b}; & x \in (m; m + b] \\ 0; & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (4)$$

- Число как совокупность  $\alpha$ -интервалов  $X_{\alpha} = [x^L(\alpha); x^R(\alpha)]$

$$\begin{cases} x^L(\alpha) = m - a + a\alpha \\ x^R(\alpha) = m + b - b\alpha \end{cases} \quad (5)$$

- Число  $LL$  ( $RR$ )-типа — правый (левый) коэффициент нечёткости числа равен нулю

## Преобразование L

- Переход к интервальной неопределенности

$$\tilde{Y} = f(\tilde{X}, \tilde{A}) \rightarrow \bigcup_{\alpha=0}^1 y_{\alpha} = f(X_{\alpha}, A_{\alpha}) \quad (6)$$

- Переход к чётким значениям на каждом  $\alpha$ -уровне

$$\bar{x}(\alpha) = L(X_{\alpha}) = \lambda x^L(\alpha) + (1 - \lambda) x^R(\alpha); \lambda \in [0; 1] \quad (7)$$

- Модифицированное решение

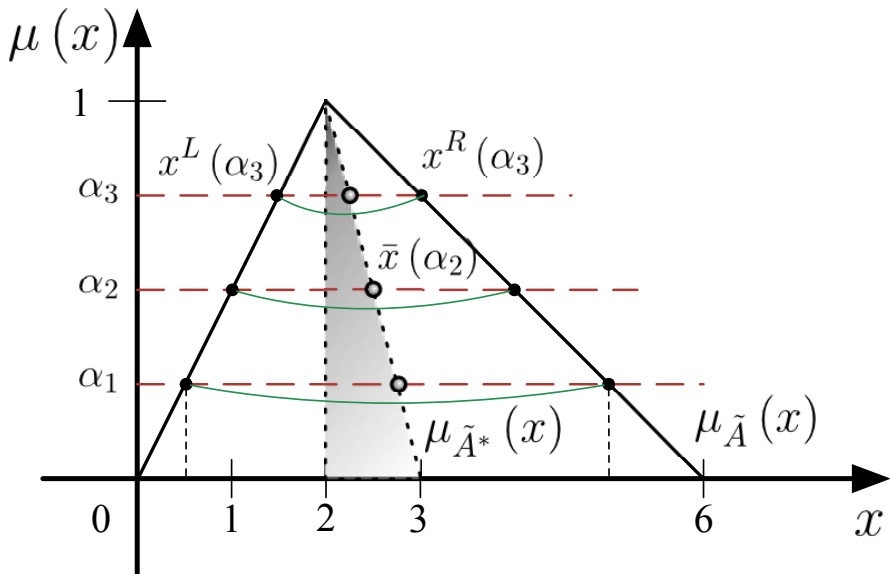
$$\tilde{Y}^* = \bigcup_{\alpha=0}^1 f(L(X_{\alpha}), L(A_{\alpha})) = \{y_{\alpha} \mid \mu_{\tilde{Y}^*}(y) = \alpha\} \quad (8)$$

- Модифицированное нечёткое число (LL/RR-типа)

$$\mu_{\tilde{A}^*}(x) = (\bar{x}(\alpha))^{-1} \quad (9)$$



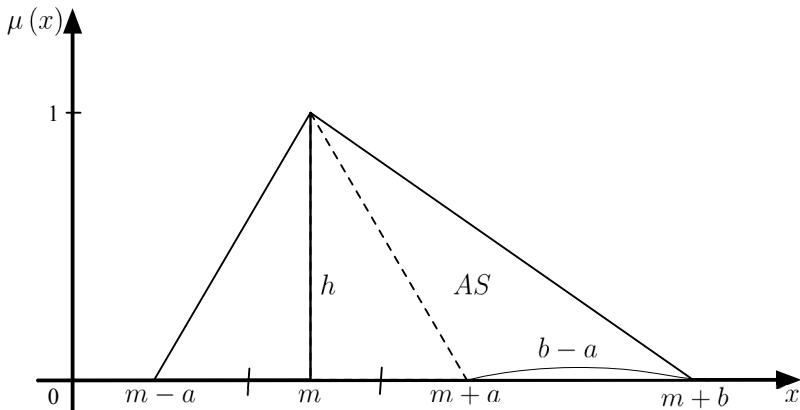
# Преобразование L



## Представление числа

- Не чувствительная к знаку нечёткого числа форма

$$\langle m_{\tilde{A}}, d_{\tilde{A}}, AS_{\tilde{A}} \rangle; d_{\tilde{A}} = a + b; AS_{\tilde{A}} = \frac{b - a}{2}.$$



# Свойства преобразования $L$

1. Преобразование  $L$  сохраняет моду нечёткого числа, т. е.  
 $\forall \lambda \in [0; 1] : m_{\tilde{A}} = m_{\tilde{A}^*}.$

2. При некоторых значениях параметра  $\lambda$  преобразование  $L$  сохраняет

2.1 знак степени асимметрии:

$$\exists \lambda \in [0; 1] : \text{sign}(AS_{\tilde{A}}) = \text{sign}(AS_{\tilde{A}^*});$$

2.2 значение степени асимметрии:  $\exists \lambda \in [0; 1] : AS_{\tilde{A}} = AS_{\tilde{A}^*}.$

$\lambda^* = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{d_{\tilde{A}}}$  сохраняет значение степени асимметрии.

3.  $\forall \lambda \in [0; 1] : A_{\alpha}^* \subset A_{\alpha}; d_{\tilde{A}} \geq d_{\tilde{A}^*}$  — преобразование  $L$  уменьшает длину носителя нечёткого числа и оставляет  $\alpha$ -интервалы модифицированного числа внутри  $\alpha$ -интервалов исходного числа.

# Алгебра модифицированных нечётких чисел

- Алгебра  $P = \langle K; +, *, 0, 1 \rangle$ ,  $K = \{\bar{x}(\alpha)\}$

$$\bar{x}(\alpha) = c + k\alpha, \quad (10)$$

- Коэффициенты в (10)

$$\begin{cases} c = m + b - \lambda(a + b) \\ k = \lambda(a + b) - b \end{cases} \quad (11)$$

$$\lambda \in [0; 1]; \quad c, k \in \mathbb{R}$$

- Элементы множества  $K$  линейны; достаточно знать два значения —  $\bar{x}_{\tilde{A}}(0)$  и  $\bar{x}_{\tilde{A}}(1) = m_{\tilde{A}}$ , чтобы найти  $\tilde{A}$ :

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = \bar{x}_{\tilde{A}}(0) + \alpha(\bar{x}_{\tilde{A}}(1) - \bar{x}_{\tilde{A}}(0)) = \quad (12)$$

$$= \alpha \bar{x}_{\tilde{A}}(1) + (1 - \alpha) \bar{x}_{\tilde{A}}(0) \quad (13)$$

## Сложение и его свойства

- Операция сложения на множестве  $K$

$$\bar{x}_1(\alpha) + \bar{x}_2(\alpha) = r_1(\alpha) = c_1 + c_2 + (k_1 + k_2)\alpha, \quad r_1(\alpha) \in K \quad (14)$$

- Нейтральный по сложению элемент

$$\begin{aligned} \bar{0} &= 0 + 0\alpha \in K : \forall \bar{x}(\alpha) \in K : \\ \bar{x}(\alpha) + \bar{0} &= c + k\alpha + 0 + 0\alpha = \bar{x}(\alpha) \end{aligned} \quad (15)$$

- Противоположный по сложению элемент (16)

$$-\bar{x}(\alpha) = -c - k\alpha \in K : \bar{x}(\alpha) + (-\bar{x}(\alpha)) = \bar{0} \quad (16)$$

- Алгебра  $\langle K, +, 0 \rangle$  — абелева группа

## Умножение и его свойства

- Операция умножения на множестве  $K$

$$r_2(\alpha) = c_1c_2 + (c_1k_2 + c_2k_1 + k_1k_2)\alpha; \quad r_2(\alpha) \in K \quad (17)$$

- Нейтральный по умножению элемент

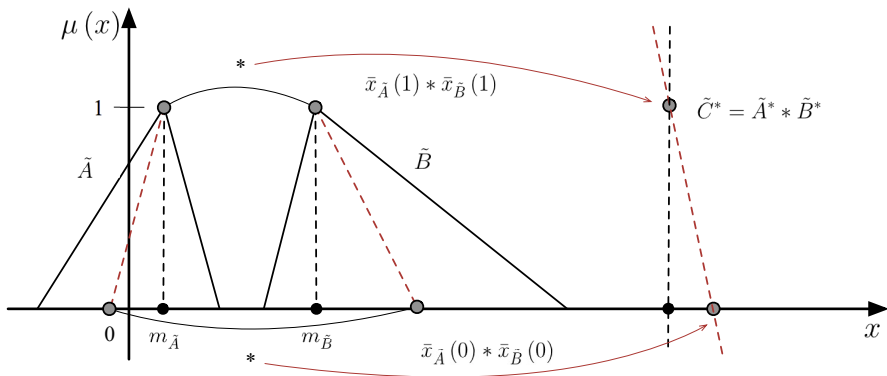
$$\bar{1} = 1 + 0\alpha \in K : \forall \bar{x}(\alpha) \in K \quad \bar{x}(\alpha) \cdot \bar{1} = \bar{x}(\alpha) \quad (18)$$

- Обратный по умножению элемент

$$\bar{x}^{-1}(\alpha) = \frac{1}{c} - \frac{k}{c(c+k)}\alpha \in K, \quad c \neq 0 : \bar{x}(\alpha) \bar{x}^{-1}(\alpha) = \bar{1} \quad (19)$$

- При  $c + k = m = 0$  (11) обратного элемента для  $\bar{x}(\alpha)$  не существует
- Алгебра ненулевых элементов  $\langle K, *, 1 \rangle$  — абелева группа
- Умножение дистрибутивно относительно сложения

## Двухточечные вычисления



Для произвольной алгебраической операции  $*$

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) * \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) = \\ = \alpha (\bar{x}_{\tilde{A}}(1) * \bar{x}_{\tilde{B}}(1)) + (1 - \alpha) (\bar{x}_{\tilde{A}}(0) * \bar{x}_{\tilde{B}}(0)) \end{aligned} \quad (20)$$

## Решение системы $Ax = B$

$$\tilde{A}_{11} = \langle 3; 2; 1 \rangle; \tilde{A}_{12} = \langle -2; 2; 1 \rangle; \tilde{A}_{21} = \langle 3; 1; 1 \rangle; \tilde{A}_{22} = \langle -1; 4; 1 \rangle; \\ \tilde{B}_1 = \langle 1; 1; 1 \rangle; \tilde{B}_2 = \langle 2; 1; 3 \rangle.$$

Преобразование L с параметрами  $\lambda^*$  приводит к системе:

$$\begin{cases} (2 + \alpha)x_1 + (-3 + \alpha)x_2 = 1 \\ 3x_1 + (-4 + 3\alpha)x_2 = 4 - 2\alpha \end{cases} \quad (21)$$

Две чёткие системы при  $\alpha = 1$  и  $\alpha = 0$ :

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 4 \end{cases} \quad (22)$$

При  $\alpha = 1$   $x_1 = 1, x_2 = 1$ ; при  $\alpha = 0$   $x_1 = 8, x_2 = 5$ , так что

$$\bar{x}_1(\alpha) = 8 - 7\alpha; \quad \bar{x}_2(\alpha) = 5 - 4\alpha \quad (23)$$



## Устойчивость задачи линейного программирования (ЗЛП)

- Задача линейного программирования с нечёткими параметрами

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \min; \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^*\mathbf{x} \rightarrow \min; \\ \mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{B}^*, \end{cases} \quad (24)$$

$$\mathbf{A}^* = \{\bar{x}_{\tilde{A}_{ij}}(\alpha)\}, \mathbf{B}^* = \{\bar{x}_{\tilde{B}_i}(\alpha)\}, \mathbf{C}^* = \{\bar{x}_{\tilde{C}_i}(\alpha)\}$$

- Невозмущённое решение — при  $\alpha = 1$  (свойство сохранения моды)
- Задача устойчива, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \alpha \in [0; 1) \quad |\alpha - 1| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(\alpha)\| < \varepsilon \quad (25)$$

## Устойчивость ЗЛП

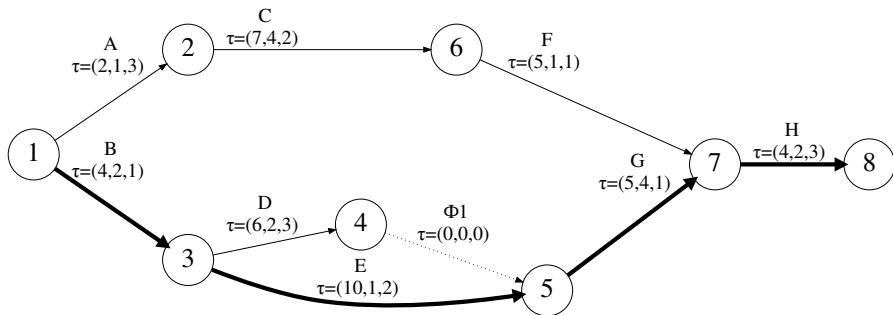
- При  $\alpha = 0$ , все значения  $\lambda_S$  ( $S$  — индекс  $\tilde{A}_{ij}$ ,  $\tilde{B}_i$ ,  $\tilde{C}_i$ ) — принимают граничные значения (0 или 1).
- Ограничения на  $\lambda$  для минимизации потерь экспертной информации

$$(\lambda_S^* - \lambda_S)^2 \rightarrow \min \quad (26)$$

- Задача векторной оптимизации ввиду противоречивости критерия (26) и целевой функции задачи (24)
- Применяется аддитивная свёртка критериев в целевой функции (27)

$$f^*(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{C}^* \mathbf{x} + \gamma \sum_s (\lambda_s^* - \lambda_s)^2 \rightarrow \min \quad (27)$$

# Задача сетевого планирования



$G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ ,  $|E| = m$ ;

дуги  $e_j$  — работы  $w_j$ , длительностью  $\tau_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;

вершины  $v_i$  — события  $z_i$  с временами наступления  $t_i$ ,  $i = \overline{1, n}$

# Модифицированная задача сетевого планирования

- ЗЛП с нечёткими временными оценками

$$\begin{cases} T(\alpha) = t_n - t_1 \rightarrow \min \\ t_{j_s} - t_{i_s} \geq \bar{\tau}_s(\alpha, \lambda_s), \quad \forall s = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (28)$$

- При  $\alpha = 0$  решается возмущённая задача

$$\begin{cases} T^*(\alpha, \lambda) = t_n - t_1 + \gamma \sum_{s=1}^m (\lambda_s^* - \lambda_s)^2 \rightarrow \min; \\ t_{j_{s_1}} - t_{i_{s_1}} = \bar{\tau}_{s_1}(\alpha, \lambda_{s_1}), \quad \forall s_1 \in \mathbf{S}_1(1); \\ t_{j_s} - t_{i_s} \geq \bar{\tau}_s(\alpha, \lambda_s), \quad \forall s \notin \mathbf{S}_1(1), \quad s = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (29)$$

- Результат — совокупность  $\langle \tilde{T}, \mathbf{S}_1, \lambda \rangle$

# Решение примера (с. 19)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N					
1	Операция	Параметры					Лямбда идеал	Тай(Альфа)	Лямбда поиск	Тай(Альфа)	Гамма	Лямбда diff							
2		XL	M	XR	A	B							1	0	100				
3		A	1	2	5	1							3	0,2500	2 LA	0,2500	3,99999708	LA*-LA	0,0000
4		B	2	4	5	2							1	0,6667	4 LB	0,6817	2,9550035	LB*-LB	0,0002
5		C	3	7	9	4							2	0,6667	7 LC	0,6667	4,99999766	LC*-LC	0,0000
6		D	4	6	9	2							3	0,4000	6 LD	0,4000	7,00000351	LD*-LD	0,0000
7		E	9	10	12	1							2	0,3333	10 LE	0,3483	10,9550016	LE*-LE	0,0002
8		F	4	5	6	1							1	0,5000	5 LF	0,5000	5,00000421	LF*-LF	0,0000
9		G	1	5	6	4							1	0,8000	5 LG	0,8250	1,87500284	LG*-LG	0,0006
10		H	2	4	7	2							3	0,4000	4 LH	0,4250	4,8750047	LH*-LH	0,0006
11	Φ1	0	0	0	0	0	0,0000	0 Φ1	0,0000	0	Φ1*-Φ1	0,0000							
12																			
13	События	Время	Условия		Резервы	Оптимум			События	Время	Условия		Резервы	Оптимум					
14	1	0	t2-t1>tauA	7	5	23			1	0,0090	t2-t1>tauA	4,2195	0,2195	20,83001					
15	2	7	t3-t1>tauB	4	0				2	4,2285	t3-t1=tauB	2,9550	0,0000						
16	3	4	t6-t2>tauC	7	0				3	2,9640	t6-t2>tauC	5,7413	0,7413						
17	4	14	t4-t3>tauD	10	4				4	13,9190	t4-t3>tauD	10,9550	3,9550						
18	5	14	t5-t3>tauE	10	0				5	13,9190	t5-t3=tauE	10,9550	0,0000						
19	6	14	t7-t6>tauF	5	0				6	9,9698	t7-t6>tauF	5,8242	0,8242						
20	7	19	t7-t5>tauG	5	0				7	15,7940	t7-t5=tauG	1,8750	0,0000						
21	8	23	t8-t7>tauH	4	0				8	20,6690	t8-t7=tauH	4,8750	0,0000						
22			t5-t4>tauΦ1	0	0						t5-t4>tauΦ1	0,0000	0,0000						

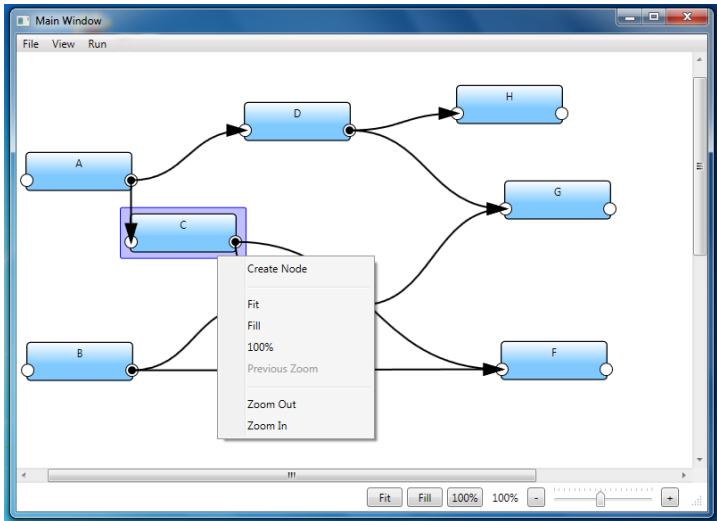
Окончательный результат:  $S_1 = \{B, E, G, H\}$ ,

$$T(\alpha) = 20,67 + 2,33\alpha,$$

$$\lambda = \{0,25; 0,68; 0,67; 0,4; 0,35; 0,5; 0,83; 0,43\}$$

# Программное обеспечение

Приложение «CSBusinessGraph» выполняет все вычисления только с использованием действительных переменных



## Результаты работы

- Комплекс методов для моделей с чёткими отношениями и нечёткими параметрами
  - применение классических методы решения
  - достижение требуемых качественных свойств решения
- Параметрическая модель представления нечёткого числа
  - максимальное сохранение экспертной информации
  - двухточечные вычисления — эффективная численная реализации решения
- Устойчивость решения задачи линейного программирования с нечёткими параметрами
  - свёртка критериев для управления устойчивостью
  - алгоритм получения устойчивого решения задачи
- Апробация методов — задача сетевого планирования
- Программный комплекс — решение задачи оценки сроков разработки программного обеспечения

# Апробация работы и публикации

Основные положения работы докладывались на конференциях:

- Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (Воронеж, 2012 г.)
- Информатика: проблемы, методология, технологии (Воронеж, 2013–2014 гг.);
- Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации (Алушта, 2013–2014 гг.);
- Радиоэлектроника, электротехника и энергетика (Москва, 2014).

Основное содержание диссертационного исследования изложено в 11 научных работах, из них 4 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ.