

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет»

На правах рукописи

УДК xxx.xxx

Воронцов Ярослав Александрович

**Модели и методы решения задач с нечеткими параметрами  
и четкими отношениями**

Специальность 05.13.18 —

«Математическое моделирование, численные методы, комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.т.н., профессор

Матвеев Михаил Григорьевич

Воронеж 2015

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>1. Особенности построения математических моделей в условиях неопределенности . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1. Краткие сведения о моделях представления нечеткой неопределенности . . . . .	9
1.2. Классификация нечетких моделей . . . . .	22
1.3. Требования к алгебраической системе для нечёткого моделирования . . . . .	31
1.4. Цель и задачи исследования . . . . .	39
<b>2. Методы моделирования и обработки нечетких числовых величин</b>	<b>43</b>
2.1. Анализ существующих алгебр нечётких чисел . . . . .	46
2.2. Модифицированные нечёткие числа и параметрическое преобразование $L$ . . . . .	58
2.3. Построение алгебры нечетких чисел, удовлетворяющей требованиям к решению задач . . . . .	72
2.4. Проблема устойчивости нечётких решений на примере оптимальной задачи выбора с нечеткими параметрами . . . . .	89
<b>3. Тестирование моделей и методов обработки нечетких числовых переменных на примере задачи сетевого планирования . . . . .</b>	<b>96</b>
3.1. Постановка задачи нечёткого сетевого планирования и сравнительный анализ методов её решения . . . . .	98
3.2. Решение задачи нечёткого сетевого планирования с получением устойчивых результатов . . . . .	109

<b>4. Описание программной реализации . . . . .</b>	<b>120</b>
4.1. Календарно-сетевое планирование в сфере разработки про- граммного обеспечения . . . . .	121
4.2. Программное обеспечение . . . . .	128
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>140</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>142</b>

# ВВЕДЕНИЕ

В середине 1960-х гг. стали проводиться исследования по созданию интеллектуальных систем, способных адекватно взаимодействовать с человеком. Появилась потребность в математическом аппарате, позволяющем строить модели приближенных, житейски неоднозначных рассуждений человека [125]. Значительное продвижение в этом направлении сделано около полувека назад профессором Калифорнийского университета (Беркли) Лотфи А. Заде. Его работа «Fuzzy Sets», появившаяся в 1965 г. в журнале *Information and Control*, заложила основы моделирования интеллектуальной деятельности человека. Последовавшее за публикацией Заде бурное развитие теории нечётких множеств и появление понятия «мягкие вычисления» привело к тому, что в математическом моделировании стало возможным использование качественных элементов вроде понятий и отношений с нечёткими границами, высказываний с многозначной шкалой истинности, а также расплывчатых количественных оценок. Это позволило расширить возможности учёта различных видов неопределённости, для описания которых в течение долгого времени в моделях использовались методы теории вероятностей и математической статистики.

Фаззификация известных ранее классических задач и создание новых нечётких моделей привела к появлению новых методов решения, позволяющих применять экспертные оценки на различных этапах моделирования. В работах известных зарубежных (D. Dubois, R. Fuller, A. Prade, R. Yager, L. Zadeh, H. Zimmermann и др.) и отечественных (В. Г. Балашов, А. Н. Борисов, В. В. Борисов, В. В. Круглов, А. А. Усков и др.) учёных и исследователей рассмотрено и проанализировано множество применений результатов теории нечётких множеств и мягких вычислений к решению задач выбора, управления и принятия решений. Обратной стороной повального увлечения нечёткостью стало возникновение противоречий между решениями, полученными с примени-

ем новых методов, и результатами классических теорий, потеря устойчивости решений, нарушение естественных отношений в моделях, в которых нечёткими являются только параметры, неоправданное расширение степени нечёткости результата, повышение вычислительной сложности задач.

Актуальность темы исследования определяется необходимостью разработки математических моделей, численных методов и программ, позволяющих единообразно решать различные задачи с чёткими отношениями и нечёткой неопределённостью параметров как совокупность нескольких чётких, используя при этом классические методы решения и моделирования и обеспечивая требуемые в конкретной задаче качественные свойства решения.

Диссертационная работа выполнена в рамках одного из основных научных направлений Воронежского государственного университета «Информационные технологии организационно-технического управления в условиях случайной и нечеткой неопределенности».

**Цели и задачи исследования.** Целью диссертационной работы является построение и исследование моделей учёта нечёткой неопределённости, обеспечивающих требуемые свойства решения различных производственных задач, а также разработка методов эффективного численного решения на основе вводимых моделей.

Для достижения поставленной цели в работе решались следующие задачи:

1. анализ существующих методик нечётких вычислений с точки зрения сохранения свойств решения задач;
2. разработка модели представления нечётких чисел, позволяющей максимально сохранять исходную экспертную информацию и обеспечить требуемые качественные свойства решений (устойчивость, сохранение чётких математических соотношений и т. п.);

3. разработка методики эффективной численной реализации решения задач с нечёткими параметрами, основанной на подходящих алгебраических структурах и её тестирование на примере задачи сетевого планирования с нечёткими параметрами;
4. разработка и верификация программного обеспечения, реализующего предложенную модель представления нечётких параметров и методики численного решения задач с нечёткими параметрами.

**Методы исследования.** В диссертационной работе использованы основные положения и методы теории нечётких множеств, мягких вычислений, интервального анализа, теории алгебраических структур, теории графов, численных методов. При создании программного обеспечения использовались технологии модульного и объектно-ориентированного программирования.

**Тематика работы.** Содержание диссертации соответствует п. 1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений», п. 3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п. 8 «Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования» паспорта специальности 05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

**Научная новизна.** В диссертационной работе получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной:

1. предложена модификация метода моделирования экспертных числовых оценок, полученных в классе LR-чисел, отличающаяся наличием L-преобразования LR-числа в соответствующие LL/RR-числа;
2. предложены эффективные вычислительные методы решения задач с нечёткими параметрами, отличающиеся использованием описанной в

работе алгебраической структуры с групповыми свойствами (со свойствами, эквивалентными полю действительных чисел) и позволяющие параметрически управлять устойчивостью решения;

3. разработан программный комплекс для решения задач с нечёткими параметрами, реализующий предложенные в работе вычислительные методы, модули которого используют стандартные вычислительные операции (в отличие от специализированных программных пакетов, работающих с нечеткими числами).

**Достоверность научных результатов.** Научные положения, теоретические выводы и практические рекомендации обоснованы корректным использованием выбранного математического аппарата и подтверждены результатами вычислительного эксперимента.

**Практическая значимость исследования** заключается в расширении сферы применимости методов моделирования с использованием чётких отношений и нечётких параметров. Подходы к нечётким вычислениям, предложенные в диссертации, позволяют существенно упростить процедуру расчётов без значительных потерь экспертной информации, а также использовать существующее стандартное программное обеспечение для решения различных производственных задач.

**Реализация и внедрение результатов работы.** Разработанный программный комплекс «CSBusinessGraph» используется в практической деятельности по первоначальной оценке проектов ООО «ДатаАрт–Воронеж» (DataArt).

Теоретические результаты диссертации в форме моделей, алгоритмов и программ используются в производственном процессе ООО «ДатаАрт–Воронеж». Признана целесообразность использования предложенной в дис-

сертации методики для оптимизации процедур первоначальной оценки проектов по разработке программного обеспечения.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на ежегодных научных сессиях Воронежского государственного университета и следующих конференциях различного уровня: международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (Воронеж, 2012 г.); международная конференция «Информатика: проблемы, методология, технологии» (Воронеж, 2012–2013 гг.); международный научно-технический семинар «Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации» (Алушта, 2013–2014 гг.); научно-техническая конференция студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика» (Москва, 2014).

**Публикации.** По теме диссертационного исследования опубликовано 11 научных работ [66]– [76], в том числе 4 [70, 71, 75, 76] — в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. В работах, выполненных в соавторстве: в [70] предложено преобразование  $L$  и алгебра модифицированных нечётких чисел; в [71] выполнен анализ существующих методов сравнения нечётких чисел и предложен метод сравнения для модифицированных  $LL/RR$ -чисел; а в [75] — предложено определение устойчивости задачи нечёткого линейного программирования и разработан алгоритм решения задачи календарно-сетевое планирования и управления с нечёткими параметрами, позволяющий получать устойчивое решение.



# ГЛАВА 1. ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

## 1.1. Краткие сведения о моделях представления нечеткой неопределенности

### 1.1.1. Основные понятия теории нечётких множеств

Теория нечётких множеств появилась в 1965 году с выходом статьи Лотфи Заде «Fuzzy Sets» [42]. Понятие нечёткого множества — попытка математической формализации нечёткой информации с целью её использования при построении математических моделей сложных систем [105]. В основе этого понятия лежит представление о том, что элементы некоторого множества обладают каким-то общим свойством в разной степени, и, следовательно, принадлежат этому множеству в различной степени. Ключевая идея, изложенная в статье Заде, расширяет классическое понятие множества, допуская, что функция принадлежности  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  некоторого элемента  $x$  множеству может принимать любые значения из интервала  $[0; 1]$ , а не только 0 или 1. Само множество в этом случае представляется в виде совокупности пар

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\} \quad (1.1)$$

где уже упомянутая функция принадлежности  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  характеризует степень, с которой элемент  $x$  можно отнести к нечёткому множеству  $\tilde{A}$ . При помощи нечётких множеств можно выразить неточные понятия вроде «низкий дом», «пожилой человек», «много денег», однако это требует задания чёткого множества  $X$ , которое обычно называется областью рассуждений, либо универсальным множеством.

В [60, 109] для конечных нечётких множеств применяется следующий символьный способ записи нечётких множеств. Если  $X$  – чёткое множество с конечным числом элементов, т.е.  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ , то нечёткое множество  $\tilde{A} \subseteq X$  записывается в виде суммы дробей, в числителе которых стоит степень принадлежности элемента множеству, а в знаменателе — его значение, т.е.

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} \quad (1.2)$$

В формуле (1.2) дробь не несёт в себе семантики деления, а всего лишь является другой формой записи пары  $(x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i))$ . Аналогично, для бесконечного множества  $X$  нечёткое подмножество  $\tilde{A} \subseteq X$  записывается в форме

$$\tilde{A} = \int_x \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} dx \quad (1.3)$$

Ещё одним вариантом представления нечётких множеств является т. н. горизонтальная форма [107], т. е. их выражение в виде совокупности чётких подмножеств множества  $X$ , каждое из которых называется  $\alpha$ -сечением.

**Определение 1.1.**  $\alpha$ -сечением (срезом, разрезом) нечёткого множества  $\tilde{A}$  называется чёткое множество  $A_\alpha$ , определяемое в [58, 102, 109, 110] следующим образом

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad (1.4)$$

где  $\chi(A_\alpha)$  — характеристическая функция, определяемая выражением (1.5):

$$\chi(A_\alpha) = \begin{cases} 1, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha; \\ 0, \mu_{\tilde{A}}(x) < \alpha. \end{cases} \quad (1.5)$$

Для  $\alpha$ -сечений нечёткого множества справедлива теорема о декомпозиции, которая позволяет не только выполнять разложение нечёткого множества на совокупность чётких, но и синтезировать исходное нечёткое множество из совокупности чётких  $\alpha$ -интервалов [20, 90].

**Теорема 1.1.** Любое нечёткое множество  $\tilde{A}$  можно представить в виде объединения его  $\alpha$ -сечений, т.е.

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} A_{\alpha} \quad (1.6)$$

Например, для множества  $\tilde{A} = \frac{0,1}{1} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,6}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,9}{5} + \frac{0,5}{6}$ , определённого в пространстве  $X = \{1 \cdots 6\}$ , декомпозиция по  $\alpha$ -уровням выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{A} = & \left( \frac{0,1}{1} + \frac{0,1}{2} + \frac{0,1}{3} + \frac{0,1}{4} + \frac{0,1}{5} + \frac{0,1}{6} \right) \cup \left( \frac{0,4}{2} + \frac{0,4}{3} + \frac{0,4}{4} + \right. \\ & \left. + \frac{0,4}{5} + \frac{0,4}{6} \right) \cup \left( \frac{0,5}{3} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,5}{5} + \frac{0,5}{6} \right) \cup \left( \frac{0,6}{3} + \frac{0,6}{4} + \frac{0,6}{5} \right) \cup \\ & \cup \left( \frac{0,9}{4} + \frac{0,9}{5} \right) \cup \left( \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

Также для нечёткого множества в [102, 109, 131] вводятся понятия носителя и высоты.

**Определение 1.2.** Носителем нечёткого множества  $\tilde{A}$  называется чёткое множество  $\text{supp}(\tilde{A})$ , определяемое как

$$\text{supp}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}. \quad (1.7)$$

Иными словами, носитель является множеством строгого уровня  $A_{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$  при  $\alpha = 0$ .

**Определение 1.3.** Высотой нечёткого множества  $\tilde{A}$  называется величина

$$h(\tilde{A}) = \sup_{x \in R} (\mu_{\tilde{A}}(x)). \quad (1.8)$$

Если высота  $h(\tilde{A})$  нечёткого множества равна 1, то оно является нормальным; если же  $h(\tilde{A}) < 1$ , то множество называется субнормальным.

### 1.1.2. Операции над нечёткими множествами. Принцип обобщения Заде

Операции над нечёткими множествами можно определить по-разному. При этом нужно учитывать, что нечёткие множества охватывают и множества в обычном смысле, поэтому вводимые операции не должны противоречить уже известным теоретико-множественным операциям. Рассмотрим классические максиминные формулировки объединения, пересечения и дополнения нечётких множеств, приведённые в [58, 60, 90, 105, 109].

**Определение 1.4.** Пересечением нечётких множеств  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  называется нечёткое множество  $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ , функция принадлежности которого

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \min [\mu_{\tilde{A}}(x); \mu_{\tilde{B}}(x)] \quad (1.9)$$

для любых  $x \in X$ .

**Определение 1.5.** Объединением нечётких множеств  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  называется нечёткое множество  $\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$ , функция принадлежности которого равна

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \max [\mu_{\tilde{A}}(x); \mu_{\tilde{B}}(x)] \quad (1.10)$$

для любых  $x \in X$ .

**Определение 1.6.** Дополнением нечёткого множества  $\tilde{A} \subseteq X$  называется нечёткое множество  $\tilde{C} = \tilde{\bar{A}}$ , функция принадлежности которого равна

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \quad (1.11)$$

для любых  $x \in X$ .

В источниках [60, 90, 110, 124] предлагаются и альтернативные определения операций пересечения и объединения нечётких множеств, называемые алгебраическим произведением и алгебраической суммой.

**Определение 1.7.** Алгебраическим произведением нечётких множеств  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  называется нечёткое множество  $\tilde{C} = \tilde{A} \hat{\cdot} \tilde{B}$ , функция принадлежности которого

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (1.12)$$

для любых  $x \in X$ .

**Определение 1.8.** Алгебраической суммой нечётких множеств  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  называется нечёткое множество  $\tilde{C} = \tilde{A} \hat{+} \tilde{B}$ , функция принадлежности которого равна

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (1.13)$$

для любых  $x \in X$ .

Как отмечается в [11, 57, 90], максиминные и алгебраические операции над нечёткими множествами обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и отвечают законам де Моргана, идемпотентности и некоторым другим правилам, справедливым для чётких множеств. Если обозначить операции объединения и алгебраической суммы за  $\oplus$ , а пересечения и алгебраического произведения за  $\otimes$ , то свойства и законы будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{A} \oplus \tilde{B} &= \tilde{B} \oplus \tilde{A}; \quad \tilde{A} \otimes \tilde{B} = \tilde{B} \otimes \tilde{A}; \\ \tilde{A} \oplus (\tilde{B} \oplus \tilde{C}) &= (\tilde{A} \oplus \tilde{B}) \oplus \tilde{C}; \quad \tilde{A} \otimes (\tilde{B} \otimes \tilde{C}) = (\tilde{A} \otimes \tilde{B}) \otimes \tilde{C}; \\ \overline{\tilde{A} \oplus \tilde{B}} &= \overline{\tilde{A}} \otimes \overline{\tilde{B}}; \quad \overline{\tilde{A} \otimes \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \oplus \overline{\tilde{B}}; \\ \tilde{A} \otimes \tilde{A} &= \tilde{A}; \quad \tilde{A} \oplus \tilde{A} = \tilde{A}; \\ \tilde{A} \otimes \emptyset &= \emptyset; \quad \tilde{A} \oplus \emptyset = \tilde{A}; \\ \tilde{A} \otimes X &= \tilde{A}; \quad \tilde{A} \oplus X = X; \\ \overline{\overline{\tilde{A}}} &= \tilde{A}. \end{aligned}$$

Однако для всех операций не выполняются условие дополнения, т.е.

$$\begin{aligned}\tilde{A} \oplus \bar{\tilde{A}} &\neq X; \\ \tilde{A} \otimes \bar{\tilde{A}} &\neq \emptyset,\end{aligned}$$

а для алгебраических — ещё и свойство дистрибутивности, которое выполняется для операций пересечения и объединения [110]:

$$\begin{aligned}\tilde{A} \hat{+} (\tilde{B} \hat{\cdot} \tilde{C}) &\neq (\tilde{A} \hat{+} \tilde{B}) \hat{\cdot} (\tilde{A} \hat{+} \tilde{C}); \\ \tilde{A} \hat{\cdot} (\tilde{B} \hat{+} \tilde{C}) &\neq (\tilde{A} \hat{\cdot} \tilde{B}) \hat{+} (\tilde{A} \hat{\cdot} \tilde{C}); \\ \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) &= (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C}); \\ \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) &= (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C}).\end{aligned}$$

Например, пусть нечёткое множество  $\tilde{A}$  задано на носителе  $X = [3; 8] \subset N$  совокупностью пар  $\tilde{A} = \frac{0,7}{3} + \frac{0,9}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0,2}{8}$ . В соответствие с определением дополнения нечёткого множества (1.11)

$$\bar{\tilde{A}} = \frac{0,3}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,1}{5} + \frac{0}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0,8}{8}$$

Пересечение множеств  $\tilde{A}$  и  $\bar{\tilde{A}}$  является непустым, т. к.

$$\begin{aligned}\tilde{A} \cap \bar{\tilde{A}} &= \frac{\min(0,7;0,3)}{3} + \frac{\min(1;0)}{4} + \frac{\min(0,9;0,1)}{5} + \frac{\min(1;0)}{6} + \\ &+ \frac{\min(0;1)}{7} + \frac{\min(0,2;0,8)}{8} = \frac{0,3}{3} + \frac{0,1}{5} + \frac{0,2}{8}\end{aligned}$$

Аналогично, их объединение не даёт множества-носителя  $X$ :

$$\begin{aligned}\tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}} &= \frac{\max(0,7;0,3)}{3} + \frac{\max(0;1)}{4} + \frac{\max(0,9;0,1)}{5} + \frac{\max(1;0)}{6} + \\ &+ \frac{\max(0;1)}{7} + \frac{\max(0,2;0,8)}{8} = \frac{0,7}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,9}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0,8}{8}\end{aligned}$$

Ещё одна фундаментальная операция, которая переносится с чётких множеств на нечёткие — прямое (декартово) произведение. Классическое определение этой операции дано в [83], а в [57, 124, 128] с помощью прямого произведения также вводится понятие нечёткого отношения.

**Определение 1.9.** Пусть даны нечёткие множества  $\tilde{A}_i \subseteq X_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Декартово произведение нечётких подмножеств  $\tilde{A}_i$  определяется как нечёткое подмножество множества  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$  с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}_1 \times \dots \times \tilde{A}_N}(x_1, \dots, x_N) = \min [\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_N}(x_N)]. \quad (1.14)$$

**Определение 1.10.** Нечётким отношением  $\tilde{R}$  на множествах  $X_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  называется нечёткое подмножество декартова произведения  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$  с функцией принадлежности  $\mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , которая показывается степень выполнения отношения между элементами  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Задание N-арного нечёткого отношения состоит в указании значений функции принадлежности для всех кортежей вида  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Поскольку нечёткие отношения являются нечёткими множествами, над ними определены все вышеупомянутые операции (1.9)–(1.13), дополненные также операцией максиминной композиции отношений. Также для нечётких бинарных отношений справедливы те же свойства (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность), что и для обычных [105, 128].

Принцип обобщения Заде является основополагающим в теории нечётких множеств и позволяет перенести различные математические операции с чётких на нечёткие множества. Его суть состоит в следующем. Пусть дано биективное отображение  $f : X \rightarrow Y$  из чёткого множества  $X$  в чёткое множество  $Y$ . Пусть  $\tilde{A} \subseteq X$  – нечёткое подмножество, имеющее вид

$$\tilde{A} = \sum_n \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} \quad (1.15)$$

В этом случае генерируемое отображением  $f$  нечёткое множество  $\tilde{B} \subseteq Y$  имеет вид

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \sum_n \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{f(x_i)} \quad (1.16)$$

Если отображение  $f$  не является взаимно однозначным, то степень принадлежности элемента к нечёткому множеству  $\tilde{B}$  равна максимальной степени принадлежности среди всех элементов исходного множества  $X$ , которые отображаются в один и тот же  $y \in Y$ . В этом случае выражение (1.16) принимает вид

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \sum_n \frac{\sup_{j=\overline{1,n}: f(x_i)=f(x_j)} (\mu_{\tilde{A}}(x_j))}{f(x_i)} \quad (1.17)$$

Однако наиболее универсальной и широко употребляемой является следующая формулировка принципа обобщения, данная в [109, 131].

**Определение 1.11.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  — чёткое отображение, в котором  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$ , а  $\tilde{A}_i \subseteq X_i$ ;  $i = \overline{1, N}$  — нечёткие множества. В этом случае нечёткое множество  $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_N)$  имеет вид

$$\tilde{B} = \{(y; \mu_{\tilde{B}}(y)) \mid y = f(x_1, x_2, \dots, x_N), x_i \in X \forall i = \overline{1, N}\} \quad (1.18)$$

а его функция принадлежности равна

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \sup_{\substack{y=f(x_1, \dots, x_N) \\ x_i \in \text{supp}(A_i)}} \min_{i=\overline{1, N}} \{\mu_{\tilde{A}_i}(x_i)\} \quad (1.19)$$

Используя принцип обобщения, вводимый формулами (1.18)–(1.19), можно переносить действие известных арифметических операций на нечёткие множества, а также определять операцию композиции нечётких отношений. Особый интерес представляет перенос арифметических операций на нечёткие подмножества множества действительных чисел  $\mathbb{R}$ , иначе называемые нечёткими величинами.

### 1.1.3. Нечёткие числа

Рассмотрим важные определения и свойства, касающиеся нечётких чисел, которые вводятся в работах [58, 102, 107, 109] и широко используются в дальнейших параграфах.



**Определение 1.12.** *Нечёткое число — разновидность нечёткой величины, функция принадлежности которой  $\mu_{\tilde{A}}(x) : R \rightarrow [0; 1]$  обладает следующими свойствами:*

- кусочная непрерывность;
- выпуклость

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; \forall \gamma \in [0; 1]$$

$$\mu_{\tilde{A}}(\gamma x_1 + (1 - \gamma) x_2) \geq \min \{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}; \quad (1.20)$$

- нормальность

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (\mu_{\tilde{A}}(x)) = 1. \quad (1.21)$$

Нечёткие числа представляют огромный интерес с точки зрения практической применимости именно ввиду непрерывности функций принадлежности. В [44] упоминаются также нечёткие величины с дискретной функцией принадлежности, при выполнении операций над которыми возникают проблемы, показанные в [109]: результатом арифметических операций, выполненных над произвольными нечёткими величинами согласно принципу обобщения Заде, далеко не всегда будет являться нечёткое число.

Например, пусть даны две нечёткие величины  $\tilde{A} = \frac{0,5}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0,3}{4}$  и  $\tilde{B} = \frac{0,7}{3} + \frac{0,9}{5} + \frac{0,6}{6}$ . Найдём их произведение согласно принципу обобщения (1.18):

$$\begin{aligned} \tilde{A} \cdot \tilde{B} &= \frac{\min(0,5; 0,7)}{6} + \frac{\min(0,5; 0,9)}{10} + \frac{\max\{\min(0,5; 0,6), \min(0,3; 0,7)\}}{12} + \\ &+ \frac{\min(1; 0,7)}{9} + \frac{\min(1; 0,9)}{15} + \frac{\min(1; 0,6)}{18} + \frac{\min(0,3; 0,9)}{20} + \frac{\min(0,3; 0,6)}{24} = \\ &= \frac{0,5}{6} + \frac{0,7}{9} + \frac{0,5}{10} + \frac{0,5}{12} + \frac{0,9}{15} + \frac{0,6}{18} + \frac{0,3}{20} + \frac{0,3}{24}. \end{aligned}$$

Данный пример иллюстрирует, что в результате умножения нечётких чисел с дискретной функцией принадлежности может получиться субнормаль-

ное нечёткое множество. Ввиду этого предпочтительнее использовать нечёткие числа, поскольку принадлежность результата арифметических действий классу нечётких чисел гарантируется описанной в [109] теоремой Дюбуа и Прейда

**Теорема 1.2.** (Дюбуа и Прейда). *Если два нечётких числа имеют непрерывные функции принадлежности, то результатом арифметических операций над ними будут нечёткие числа.*

Арифметические операции над нечёткими числами в общем случае требуют проведения достаточно сложных вычислений. Дюбуа и Прейд в своей работе [80] предложили частную форму представления нечётких чисел с помощью двух функций с определёнными свойствами, которая позволяет существенно упростить нечёткие арифметики.

**Определение 1.13.** *Нечёткие числа  $LR$ -типа — разновидность нечётких чисел, функция принадлежности которых задаётся с помощью двух функций  $L(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что*

$$\begin{aligned} L(-x) &= L(x); \\ R(-x) &= R(x); \\ L(0) &= R(0) = 1. \end{aligned}$$

*Кроме того,  $L$  и  $R$  являются невозрастающими на интервале  $[0; +\infty)$  [109].*

Функция принадлежности нечёткого  $LR$ -числа выглядит следующим образом

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{a}\right); & x \leq m \\ R\left(\frac{x-m}{b}\right); & x > m \end{cases} \quad (1.22)$$

При известной форме функции принадлежности,  $LR$ -числа гораздо удобнее записывать как кортеж из трёх параметров  $\tilde{A} = (m; a; b)$ , называемых модой и левым и правым коэффициентами нечёткости соответственно.

Частным случаем нечётких чисел  $LR$ -типа являются треугольные числа, которые широко распространены во всевозможных математических задачах.

**Определение 1.14.** *Треугольным (триангулярным) нечётким числом называется  $LR$ -число  $\tilde{A}$ , задаваемое тройкой  $\langle a, m, b \rangle$ , с функцией принадлежности*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - m + a}{a}; & x \in [m - a; m] \\ \frac{m + b - x}{b}; & x \in (m; m + b] \\ 0; & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (1.23)$$

Если правый (левый) коэффициент нечёткости треугольного числа равен нулю, то такое число, согласно [70], будем называть числом  $LL$  ( $RR$ )-типа.

Обозначим точки пересечения левой и правой ветвей функции принадлежности с осью  $Ox$  как  $x_{\tilde{A}}^L$  и  $x_{\tilde{A}}^R$  соответственно. В [60] эти точки называются границами функции принадлежности. Тогда

$$\begin{cases} x_{\tilde{A}}^L = m - a \\ x_{\tilde{A}}^R = m + b \end{cases} \quad (1.24)$$

и функция принадлежности (1.23) с учётом (1.24) будет выглядеть следующим образом

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{\tilde{A}}^L}{m - x_{\tilde{A}}^L}; & x \in [x_{\tilde{A}}^L; m] \\ \frac{x - x_{\tilde{A}}^R}{m - x_{\tilde{A}}^R}; & x \in (m; x_{\tilde{A}}^R] \\ 0; & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (1.25)$$

а само число можно записать в виде тройки  $\langle x_{\tilde{A}}^L, m, x_{\tilde{A}}^R \rangle$ .

Согласно теореме о декомпозиции (1.6), для нечёткого треугольного числа  $\tilde{A}$  также можно использовать представление в виде совокупности чётких  $\alpha$ -интервалов  $X_\alpha$ , границы которых определяются как функции параметра  $\alpha \in [0; 1]$ :

$$\begin{cases} x^L(\alpha) = m - a + a\alpha \\ x^R(\alpha) = m + b - b\alpha \end{cases} \quad (1.26)$$

Представление числа  $\tilde{A}$  в виде объединения интервалов  $[x^L(\alpha); x^R(\alpha)]$ , концы которых определяются согласно формулам (1.26), позволяет сохранить неопределённость в интервальной форме [20].

Используя введённый ранее принцип обобщения Заде, можно расширить четыре арифметические действия на множество нечётких чисел. Пусть  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  — нечёткие числа с функциями принадлежности  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  и  $\mu_{\tilde{B}}(x)$  соответственно, а  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторая функция двух действительных переменных. Согласно принципу обобщения Заде, результат  $\tilde{C} = g(\tilde{A}, \tilde{B})$  будет определяться следующей функцией принадлежности [58, 61, 102, 131]:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \sup_{g(a,b)=x} \min \{ \mu_{\tilde{A}}(a); \mu_{\tilde{B}}(b) \} \quad (1.27)$$

$$a \in \text{supp}(\tilde{A}), \quad b \in \text{supp}(\tilde{B})$$

Если в качестве  $g$  берётся одна из арифметических операций, то (1.27) определяет результат арифметической операции над нечёткими числами:

$$\tilde{A} + \tilde{B} \leftrightarrow \sup_{x+y} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y))$$

$$\tilde{A} - \tilde{B} \leftrightarrow \sup_{x-y} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y))$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} \leftrightarrow \sup_{x \cdot y} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y))$$

$$\tilde{A} / \tilde{B} \leftrightarrow \sup_{x/y} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y))$$

Как отмечается в [58, 102, 131], [146], операции сложения и умножения, вводимые с помощью (1.27), обладают следующими свойствами:

1. коммутативность  $\tilde{A} + \tilde{B} = \tilde{B} + \tilde{A}$ ,  $\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \tilde{B} \cdot \tilde{A}$ ;
2. ассоциативность  $\tilde{A} + (\tilde{B} + \tilde{C}) = (\tilde{A} + \tilde{B}) + \tilde{C}$ ;  $\tilde{A} \cdot (\tilde{B} \cdot \tilde{C}) = (\tilde{A} \cdot \tilde{B}) \cdot \tilde{C}$ ;
3. дистрибутивность умножения относительно сложения при совпадении знаков  $\tilde{B}$  и  $\tilde{C}$ :  $\tilde{A} \cdot (\tilde{B} + \tilde{C}) = \tilde{A} \cdot \tilde{B} + \tilde{A} \cdot \tilde{C}$ .

Сравнение нечётких чисел производится как сравнение двух нечётких подмножеств множества  $\mathbb{R}$ . Очевидно, числа  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  считаются равными тогда и только тогда, когда их функции принадлежности совпадают [85, 103]:

$$\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x). \quad (1.28)$$

Также тривиален случай, когда носители чисел не пересекаются — то нечёткое число, носитель которого расположен правее по оси действительных чисел, будет больше [85]:

$$\text{supp}(\tilde{A}) \cap \text{supp}(\tilde{B}) = \emptyset, \forall x \in \mathbb{R} \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \Rightarrow \tilde{A} < \tilde{B}. \quad (1.29)$$

В остальных случаях, не описываемых формулами (1.28) и (1.29), числа либо считаются несравнимыми, и в случае близости функций принадлежности друг к другу вычисляется степень равенства множеств [40, 103, 109]

$$E(\tilde{A} = \tilde{B}) = 1 - \max_{x \in T} |\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)|;$$

$$T = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \neq \mu_{\tilde{B}}(x)\},$$

либо производится их сравнение на основании методов одного из семейств, описанных в [6, 71], суть которых в основном сводится к вычислению некоторой оценочной функции и упорядочиванию чисел на основании её значений.

Классическим вариантом такой оценочной функции является индекс ранжирования. Для нечётких чисел, удовлетворяющих условию

$\text{supp}(\tilde{A}) \cap \text{supp}(\tilde{B}) \neq \emptyset$ , вычисляется индекс ражирования  $H(\tilde{A}, \tilde{B})$ , конкретный вид которого зависит от вида сравниваемых чисел [58, 61, 111]. Значение индекса позволяет вычислить степень, с которой одно из чисел больше/меньше другого, а результатом сравнения является нечёткое подмножество множества  $\{да, нет\}$ . Таким образом, результат сравнения нечётких чисел также может быть нечётким [40].

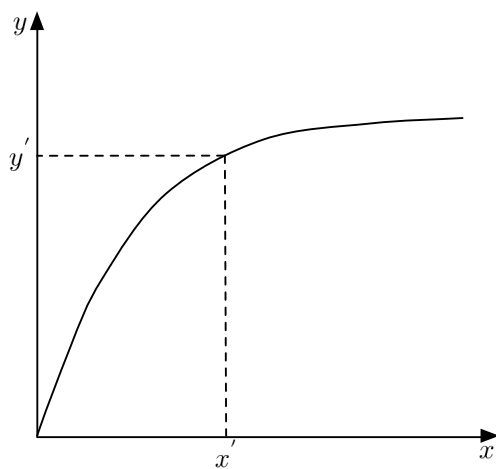
## 1.2. Классификация нечетких моделей

Модели статических и динамических систем, построение, использование и анализ которых базируется на положениях теории нечётких множеств, называют нечёткими моделями [59]. Многие исследователи отмечают тот факт, что нечёткие модели могут рассматриваться как обобщение интервальных, которые, в свою очередь, обобщают известные чёткие модели. К примеру, рассмотрим некоторую функцию  $y = f(x)$ , которую с точки зрения дискретной математики можно представить как отношение на декартовом произведении  $X \times Y$ . Вне зависимости от типа модели, вычисление выходного значения  $y$  для заданного значения входного параметра  $x$  происходит в три этапа [59]:

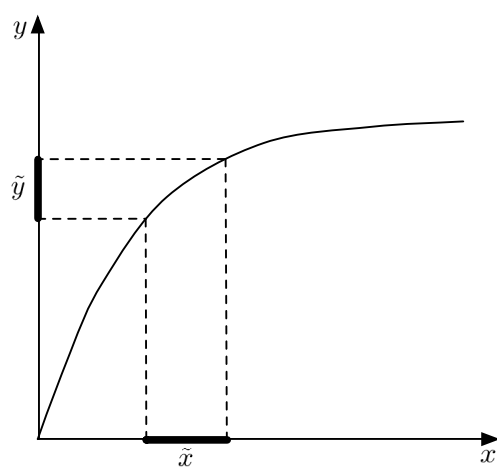
- задание значения входной переменной  $x \in X$ ;
- нахождение пересечения  $x$  с отношением  $f$ ;
- проецирование пересечения  $x$  и  $f$  на  $Y$ .

Однако результаты во всех случаях различны по своему роду. На рис. 1.1 приведены результаты вычислений для чёткой, интервальной и нечёткой функций при различных видах аргументов.

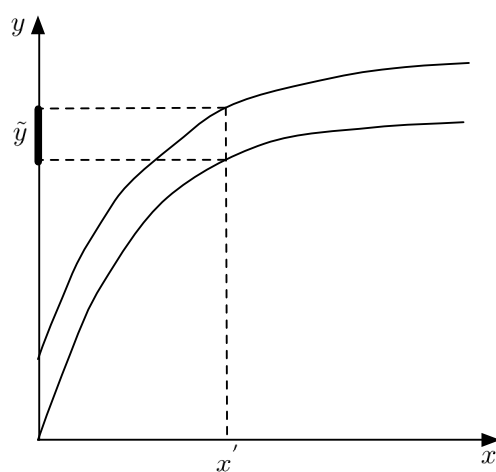
На основании этого примера и категорий неопределённости, выделенных в [130], можно выделить взаимосвязи между описаниями и переменными чётких и нечётких моделей, а также математические методы, которые приме-



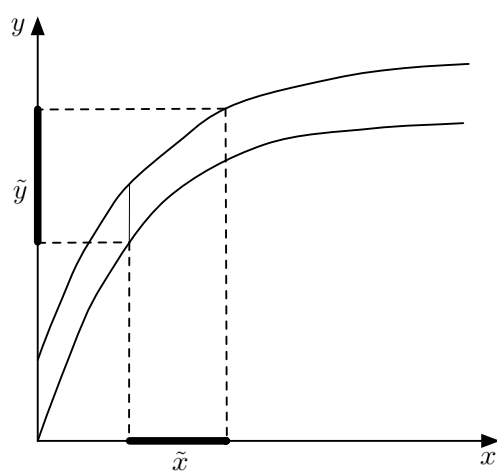
(а) Чёткая функция, чёткий аргумент



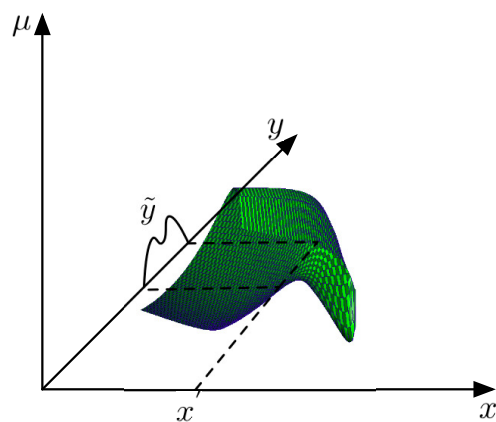
(б) Чёткая функция,  
нечёткий/интервальный аргумент



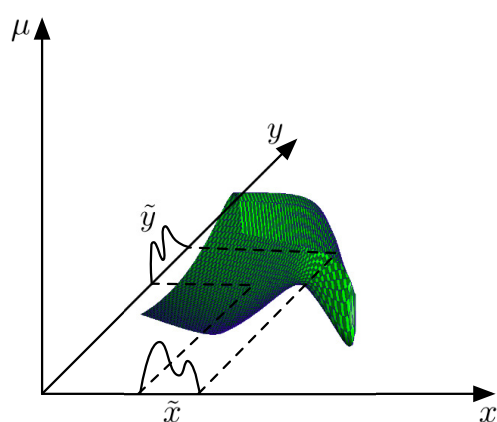
(в) Интервальная функция, чёткий аргумент



(г) Интервальная функция,  
интервальный/нечёткий аргумент



(д) Нечёткая функция, чёткий аргумент



(е) Нечёткая функция,  
интервальный/нечёткий аргумент

Рисунок 1.1. Результаты вычислений для чётких, интервальных и нечётких функций при чётких и нечётких параметрах

нимы для описания моделей. Выделенные взаимосвязи изображены в таблице 1.1.

Таблица 1.1. Взаимосвязи между описаниями и переменными чётких и нечётких моделей

<i>Описание модели</i>	<i>Входные данные</i>	<i>Выходные данные</i>	<i>Математические методы</i>
Чёткое	Чёткие	Чёткие	Функциональный анализ, линейная алгебра и т.д.
Чёткое	Нечёткие	Нечёткие	Принцип обобщения Заде
Чёткое	Нечёткие	Чёткие	Нечёткие модели и вычисления
Нечёткое	Чёткие/ Нечёткие	Нечёткое	Нечёткие модели и вычисления

Очевидно, что нечёткое моделирование не подменяет собой другие методологии моделирования сложных систем, в которых существенные зависимости выражены настолько хорошо, что они могут быть выражены в числах или символах, получающих в итоге численные оценки [59]. Нечёткие модели скорее представляют необходимый инструмент для исследования как отдельных аспектов, так и системы в целом на различных этапах её анализа в случае доминирования качественных элементов над количественными. Об этом же говорится и в [58, 90] — теория нечётких множеств не призвана конкурировать с теорией вероятности и статистическими методами, она заполняет пробел в области структуризованной неопределённости там, где нельзя корректно применять статистику и вероятности ввиду неизвестности распределения величин или малого размера статистической выборки.



В [59] предложена оригинальная классификация подходов к созданию нечётких моделей в зависимости от того, в какой момент моделирования используется теория нечётких множеств, а также соответствующие ей сферы применения нечётких моделей. Рассмотрим данную классификацию подробнее: нечёткость может применяться

1. при описании системы — речь идёт об информационной неопределённости [58, 102]. Система описывается моделями нечёткой логики: продукционными/реляционными/функциональными. Обычно такой подход применяется, когда имеются неполные или неопределённые знания об исследуемом объекте, а их дополнение является либо невозможным, либо нецелесообразным, либо значительная часть информации об объекте является качественной и не выражается с помощью известных математических зависимостей, но может быть описана системой предпочтений на естественном языке в форме правил «если-то»;
2. при задании параметров системы — в традиционной, чёткой модели системы используются нечёткие параметры (например, нечёткие коэффициенты обычных алгебраических или дифференциальных уравнений). Данный подход оправдывает себя в ситуации полной определённости модели, когда необходимо учесть присущую параметрам неопределённость, а традиционный вероятностный подход неприменим ввиду того, что неоднозначность параметров не является физической согласно классификации, используемой в [58, 130]. В таких ситуациях приходится прибегать к услугам экспертов, которые выражают своё мнение в виде качественных оценок, а принадлежность объектов задаётся с помощью лингвистических операторов («много», «мало», «около» и т.п.);
3. нечёткость при задании входов, выходов и состояний системы — в традиционной модели системы с чёткими или нечёткими параметрами могут

применяться нечёткие переменные. Этот подход в основном применяется при идентификации динамических или нелинейных систем на основе их входных и выходных параметров [16] и позволяет при наличии обучающей выборки аппроксимировать искомые функции или измеренные данные с наперёд заданной точностью;

4. комбинированные модели — создаются на основе совмещения двух или более подходов.

Если рассматривать описанную выше классификацию подходов к синтезу нечётких моделей через призму выбора, который являются неотъемлемой частью моделирования как целенаправленного процесса, и языков его описания, то можно заметить, как модель и используемый в ней язык выбора проецируются на два основных раздела современной нечёткой математики — нечёткий логический вывод и алгебры нечётких множеств и чисел. К настоящему моменту сложилось три основных языка описания выбора — язык функций выбора, язык бинарных отношений и критериальный язык [82], которые позволяют говорить об одном и том же объекте или явлении с разной степенью общности. Два последних языка — язык бинарных отношений и критериальный язык — достаточно хорошо изучены и отражены в рамках теории нечётких множеств. Схематически взаимосвязи между сферами нечёткого моделирования и языками выбора изображены на рис. 1.2.

Язык бинарных отношений является более общим и основывается на том факте, что в реальности дать объективную оценку той или иной альтернативе затруднительно или невозможно, однако, при рассмотрении альтернатив в паре, можно указать более или менее предпочтительную. Основные предположения этого языка выбора сводятся к следующим:

- отдельная альтернатива не оценивается;

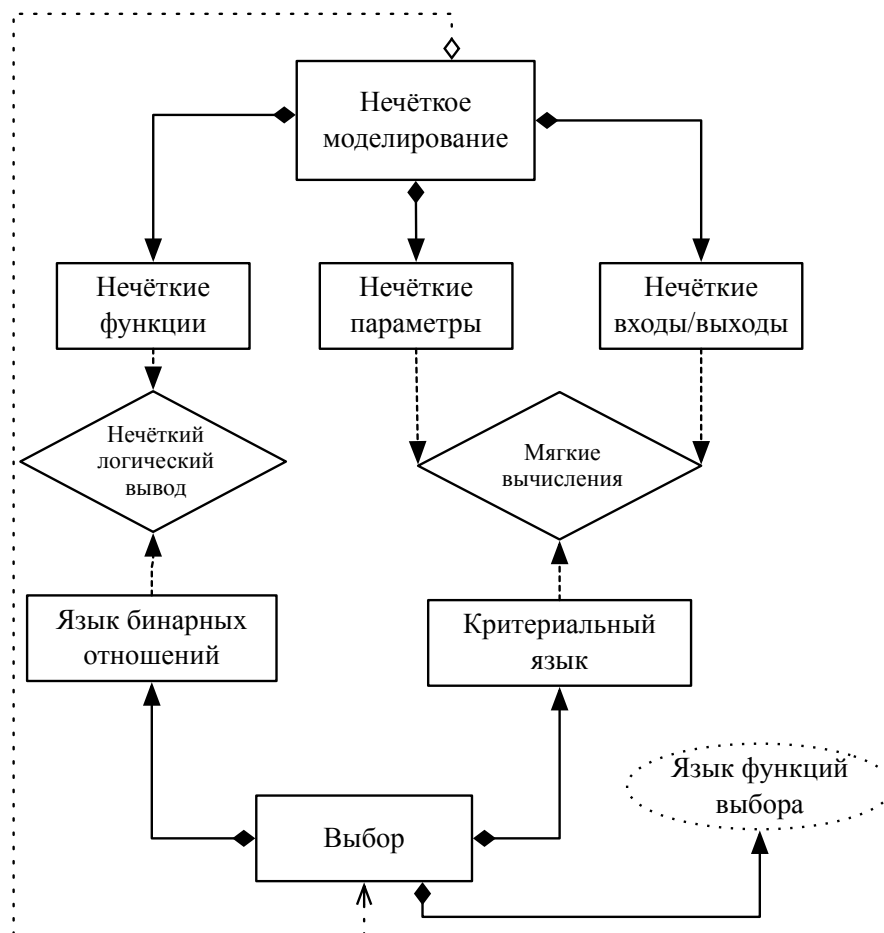


Рисунок 1.2. Связь между языками описания выбора и нечётким моделированием

- для каждой пары альтернатив некоторым образом можно установить, что одна из них предпочтительнее другой, либо они равноценны или несравнимы;
- отношение предпочтения внутри любой пары альтернатив не зависит от остальных альтернатив, предъявленных к выбору.

Нечёткие модели первого типа, в которых нечёткость присутствует на этапе описания системы [82], как раз используют язык бинарных отношений. В рамках нечёткой математики, этот язык проецируется на нечёткий логический вывод и основанное на нём нечёткое управление. Основополагающими для логического вывода являются понятия нечёткого отношения, лингвисти-

ческой переменной и нечёткой импликации, на которой основаны правила логического вывода.

**Определение 1.15.** *Лингвистической переменной называется переменная, значения которой представляют слова или суждения на естественном языке. С точки зрения нечёткой математики, это кортеж  $\{\beta, T, X, G, M\}$ , где  $\beta$  — название нечёткой переменной;  $T$  — базовое терм-множество лингвистической переменной, каждый элемент которого (терм) представляется как нечеткое множество на универсальном множестве  $X$ ;  $G$  — синтаксические правила, часто задаваемые в виде грамматики, для порождения названий термов; — семантические правила, задающие функции принадлежности нечетких термов, порожденных синтаксическими правилами  $G$  [121, 122, 128].*

**Определение 1.16.** *Нечёткая импликация является нечётким отношением  $\tilde{R} \subseteq X \times Y$ , простейшая форма которого выражается в виде правила «если-то» [107]*

$$IF \left( x = \tilde{A} \right) THEN \left( y = \tilde{B} \right). \quad (1.30)$$

*Нечёткая импликация обозначается как  $\tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$  и, как любое другое нечёткое отношение, задаётся функцией принадлежности.*

В [107, 109] описаны несколько применяемых на практике операторов импликации, задаваемых различными функциями принадлежности (например, операторы Мамдани, Лукасевича, Ларсена, Гёделя, Ягера, Заде).

На основании нечётких переменных и правил импликации строятся модели нечёткого логического вывода и управления. Типовая модель включает в себя четыре основных блока [16], изображённые на рис. 1.3 — блок фаззификации, который сопоставляет чётким входным значениям нечёткие множества; блок нечёткого логического вывода, опирающийся на базу правил, хранящуюся в виде нечётких импликаций «если-то»; блок дефаззификации,

который на основании результирующей функции принадлежности формирует чёткое выходное значение с помощью одного из методов дефаззификации (центра тяжести, первого/среднего/последнего максимума, центра сумм и др.) [84, 107, 121, 122]. Наиболее популярными моделями являются нечёткие контроллеры Такаги-Сугено и Мамдани, применяемые, в частности, в качестве нечётких регуляторов в промышленной и бытовой электронике [78].

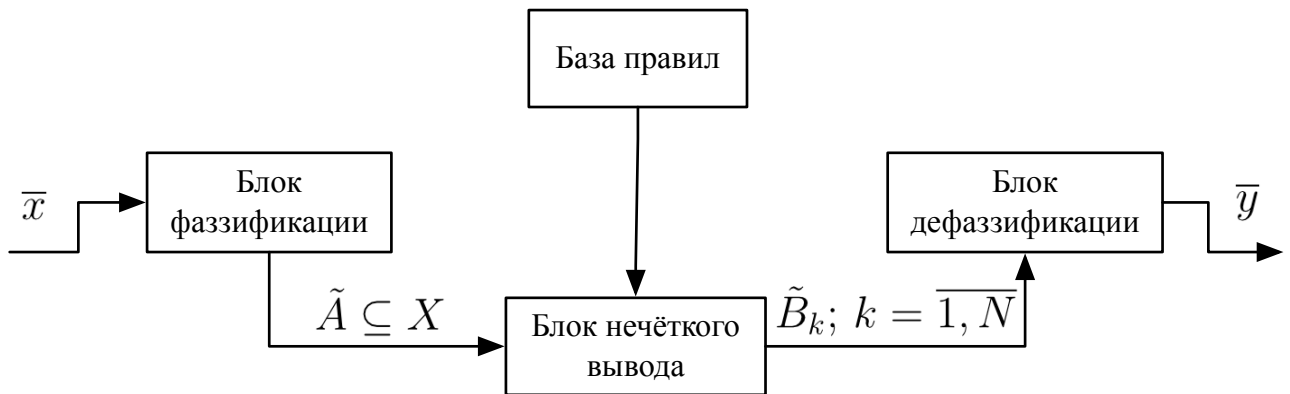


Рисунок 1.3. Общая схема системы нечёткого управления

Достоинства и недостатки, а также рекомендации по применению нечёткого логического вывода и нечёткого управления хорошо описаны в [34, 78]. Согласно [34, 106], использование моделей первого типа рекомендуется для моделирования очень сложных процессов, когда не существует простой математической модели, для нелинейных процессов высоких порядков и для обработки лингвистически сформулированных экспертных знаний. Ещё одним преимуществом является наличие нескольких подходов к проверке моделей на устойчивость [107, 121]. Эти же модели не рекомендуется применять, если приемлемый результат может быть получен с помощью общей теории управления, либо существует формализованная и адекватная математическая модель, либо проблема не разрешима методами современной математики. Также модели нечёткого управления страдают от «проклятия размерности» — с увеличением числа входов лавинообразно нарастает число необходимых правил для вывода [16, 107]. Нечёткому логическому выводу и управлению посвяще-

но множество книг и публикаций, однако подробное рассмотрение моделей первого вида выходит за рамки данной диссертации.

Второй язык, более простой и узкий, однако и более изученный — критериальный. Он основывается на предположении, что каждую отдельно взятую альтернативу возможно оценить конкретным числом, называемым значением критерия. Сравнение альтернатив в таком случае сводится к сравнению соответствующих им числовых значений. Пусть  $x \in X$  — некоторая альтернатива из множества альтернатив  $X$ . Критерием будем называть функцию  $q(x); x \in X$ , обладающую тем свойством, что если альтернатива  $x_1$  предпочтительнее  $x_2$ , то  $q(x_1) > q(x_2)$  и наоборот. Естественно считать, что наилучшей альтернативой  $x^*$  считается та, значение критерия которой максимально:

$$x^* = \arg \max_i \{q(x_i)\}$$

Задача отыскания  $x^*$ , достаточно простая по постановке, часто оказывается весьма сложной в решении, поскольку зависит от характера множества  $X$  и критерия  $q(x)$ .

Нечёткие модели второго и третьего типа, в которых нечёткими являются либо их параметры, либо состояния и входные и выходные данные, описываются с помощью критериального языка. Этот язык в нечёткой математике соответствует т. н. «мягким вычислениям» — нечётким множествам, нечётким числам и определённым на них алгебрам. Как уже упоминалось ранее, описание с помощью нечётких множеств имеет существенные преимущества перед языком теории вероятностей в том случае, когда имеется лингвистическая неоднозначность в смысле полисемии [58], и оценки получаются с помощью опроса экспертов. Известно, что люди в большинстве своём неправильно оценивают вероятности (особенно большие и малые), поэтому требовать от экспертов, коими обычно являются специалисты в конкретных предметных областях, а не математики, оценок в форме распределения вероятностей зачастую

невозможно [79]. Кроме того, описание в форме нечётких множеств гораздо менее требовательно к квалификации экспертов и зачастую гораздо точнее отражает суть исследуемого объекта или явления [16].

Данная диссертация посвящена исследованию способов представления нечёткости в моделях второго типа, в которых отношения и функции чёткие, а параметры заданы нечёткими числами. Требования, выдвигаемые к алгебраическим структурам над множеством нечётких чисел, которые применяются в нечётких моделях второго типа, изложены в следующем параграфе.

### **1.3. Требования к алгебраической системе для нечёткого моделирования**

Для создания моделей с использованием нечётких параметров необходимо уметь выполнять различные операции над нечёткими числами, а также сравнивать их между собой. Основной проблемой является подбор адекватной структуры и подходящей алгебры для множества нечётких чисел либо численных методов решения таких моделей. В отечественной и зарубежной литературе предложено множество различных алгебр и алгебраических систем на множестве нечётких чисел, которые различаются с точки зрения свойств их операций. Кратко рассмотрим основные понятия дискретной математики, касающиеся алгебр и алгебраических систем для того, чтобы в дальнейшем применять их к анализу существующих алгебр нечётких чисел и сформировать критерии оценки «идеальной» алгебраической системы с точки зрения моделирования.

Предметом рассмотрения абстрактной алгебры являются произвольные множества с заданными на них операциями, при этом природа этих множеств и операций может существенно отличаться от привычных числовых множеств и известных операций над числами [56].

**Определение 1.17.** Пусть  $A$  – произвольное непустое множество,  $n \in \mathbb{N}$ . Любое отображение

$$f : A^n \rightarrow A$$

называют  $n$ -арной операцией на множестве  $A$ .

В алгебрах наиболее важными и исследуемыми являются бинарные ( $n = 2$ ) операции. Если  $*$  — некая абстрактная бинарная операция, то, согласно [56], она является

- коммутативной, если  $\forall x, y \in A \ x * y = y * x$ ;
- ассоциативной, если  $\forall x, y, z \in A \ x * (y * z) = (x * y) * z$ ;
- идемпотентной, если  $\forall x \in A \ x * x = x$ .

Элемент  $0$  множества  $A$  называют нулём относительно операции  $*$ , если  $\forall x \in A \ 0 * x = 0, \ x * 0 = 0$ . Ноль в множестве  $A$  единственен. В самом деле, если предположить существование другого нулевого элемента  $0'$  относительно операции  $*$ , то, согласно определению нуля

$$0 * 0' = 0, \ 0' * 0 = 0',$$

откуда следует равенство  $0 = 0'$ .

Элемент  $1$  множества  $A$  называют нейтральным относительно операции  $*$ , если  $\forall x \in A \ 1 * x = x, \ x * 1 = 1$ . Нейтральный элемент в множестве  $A$  также единственен, доказательство этого факта аналогично доказательству единственности нулевого элемента.

В [56, 91] даётся следующее определение алгебры и алгебраической системы.

**Определение 1.18.** Алгебра считается заданной, если задано некоторое множество  $D$ , называемое носителем алгебры, и некоторое множество опера-



ций  $\Omega$  на  $D$ , называемое сигнатурой данной алгебры. Алгебру можно записать как упорядоченную пару множеств  $(D, \Omega)$ . Алгебра  $(D, \Omega)$ , дополненная множеством отношений  $\Pi$  на  $D$ , называется алгебраической системы и обозначается  $(D, \Omega, \Pi)$ .

Понятие алгебры является частным случаем алгебраической системы с пустым множеством отношений. Другим предельным случаем алгебраической системы является модель — множество, на котором заданы только отношения.

Стоит отметить, что операции, включенные в сигнатуру, задаются как некоторые специальные отображения. При этом не оговариваются свойства, которыми операции обладают на носителе — они обычно указываются дополнительно. Кратко рассмотрим основные виды алгебр, описанные в [56, 64, 91]. Вначале дадим определения для алгебр, сигнатура которых состоит из одной абстрактной бинарной операции  $*$ .

Группоидом называют любую алгебру  $(D, *)$ , сигнатура которой состоит из одной бинарной операции, на которую не наложено никаких ограничений. Если же операция  $*$  ассоциативна, то группоид является полугруппой. Отдельно выделяют коммутативные полугруппы — полугруппы, в которых операция  $*$  обладает свойством коммутативности, а также полурешётки — коммутативные полугруппы, операция которых идемпотентна:  $\forall x \in D \ x * x = x$ .

Моноидом называется такая полугруппа, относительно операции которой существует нейтральный элемент. Такой элемент называется единицей моноида  $(D, *)$  и обозначается как 1. Для моноида справедливы следующие свойства:

- $\forall x, y, z \in D \quad x * (y * z) = (x * y) * z$ ;
- $\forall x \in D \quad x * 1 = 1 * x = x$ .

Если в моноиде  $\forall x \in D \ \exists x^{-1} \in D$ , называемый обратным, такой, что  $x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1$ , то моноид является группой. В [56, 64, 91] до-

казывается теорема о единственности обратного элемента для каждого  $x \in D$ . Если же операция  $*$  коммутативна, то группа называется абелевой. Для абелевой группы свойства моноида дополняются ещё двумя свойствами:

- $\forall x, y \in D \quad x * y = y * x$ ;
- $\forall x \in D \quad x * x^{-1} = 1$ .

Для наглядности записи, в сигнатуру алгебры допускается включать нейтральные относительно операции элементы, поскольку, как указано в [56], они являются нулевой операцией. В этом случае моноид можно записать как совокупность  $(D, *, 1)$ .

Перейдём к рассмотрению алгебр с сигнатурой, состоящей из двух бинарных операций. Решёткой называют такую алгебру  $(D, \vee, \wedge)$ , что каждая из алгебр  $(D, \vee)$  и  $(D, \wedge)$  является полурешёткой и справедливы тождества поглощения [101]:

$$\forall x, y \in D : x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x.$$

Операции  $\vee$  и  $\wedge$  называют решёточным объединением и пересечением соответственно. Если для элементов решётки выполняется свойство дистрибутивности, то она является дистрибутивной, а если на дистрибутивной решётке введена операция дополнения и для неё выполняются законы де Моргана и свойство  $\forall x \in D \quad \bar{\bar{x}} = x$ , то алгебра является дистрибутивной решёткой с дополнениями [57]. В [90, 102] отмечается, что теоретико-множественные операции над нечёткими множествами образуют дистрибутивную решётку.

Кольцом называют алгебру  $(D, +, \cdot, 1, 0)$ , такую, что алгебра  $(D, +, 0)$  является абелевой группой, алгебра  $(D, \cdot, 1)$  является моноидом, а операция умножения кольца  $(\cdot)$  дистрибутивна относительно операции сложения кольца  $(+)$ , т.е. справедливо равенство:

$$\forall x, y, z \in D : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Элементы 0 и 1 называют нулём и единицей кольца соответственно. Если операция умножения коммутативна, то кольцо является коммутативным.

Если же в кольце алгебра всех ненулевых по умножению элементов кольца образует группу, то кольцо называется телом. Коммутативное же тело является полем. Другими словами, поле есть алгебра  $(D, +, \cdot, 0, 1)$ , сигнатура которой состоит из двух бинарных и двух нульарных операций, для которых должны выполняться следующие тождества [56, 91, 131]:

1. ассоциативность по сложению:  $\forall x, y, z \in D : x + (y + z) = (x + y) + z$ ;
2. коммутативность по сложению:  $\forall x, y \in D : x + y = y + x$ ;
3. наличие нуля (нейтрального по сложению элемента):  $\exists 0 \in D : \forall x \in D \quad x + 0 = x$ ;
4. существование противоположного элемента:  $\forall x \in D \exists -x \in D : x + (-x) = 0$ ;
5. ассоциативность по умножению:  $\forall x, y, z \in D : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ ;
6. коммутативность по умножению:  $\forall x, y \in D : x \cdot y = y \cdot x$ ;
7. наличие единицы (нейтрального по умножению элемента):  $\exists 1 : \forall x \in D : x \cdot 1 = x$ ;
8. существование обратного элемента для ненулевых элементов:  $\forall x \in D \setminus \{0\} \exists x^{-1} : x \cdot x^{-1} = 1$ ;
9. дистрибутивность умножения относительно сложения:  $\forall x, y, z \in D : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ .

В чётких моделях в качестве параметров используются элементы множества действительных чисел  $\mathbb{R}$ , на котором определена алгебра действительных чисел, являющаяся по своей структуре полем. Для того, чтобы нечёткие

числа можно было применять в качестве параметров чётких задач, алгебра, применяемая к ним, также должна быть полем. Например, при решении алгебраических или дифференциальных уравнений необходимым условием четкого равенства является наличие групповых свойств операций над нечеткими числами [28]. Однако в моделировании, помимо выполнения операций над численными величинами, требуется уметь сравнивать эти величины между собой. Поскольку на множестве действительных чисел определено отношение линейного порядка «меньше или равно», логичным является требование установления линейного порядка и на множестве нечётких чисел.

Очевидно, что алгебра, основанная на арифметических операциях, введённых в п. 1.3, не является ни полем, ни кольцом, а псевдорешёткой [3, 90] с различными вариантами аксиоматических систем [11, 86]. Помимо доказательства невыполнения свойства дистрибутивности, в [41, 58, 102, 131] показывается, что не существует истинно противоположного и обратного элементов, т. е. справедливы выражения

$$\tilde{A} + (-\tilde{A}) \neq 0; \quad (1.31)$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{A}^{-1} \neq 1. \quad (1.32)$$

Авторы [109] отмечают, что ввиду (1.31) и (1.32), уравнения и системы уравнений с нечёткими коэффициентами неразрешимы с помощью метода исключения, поскольку нарушается четкая тождественность уравнения после подстановки нечеткого решения. Схожие выводы сделаны в [62, 112] — любые вычислительные операции над нечеткими числами могут приводить к нарушению естественных отношений (например, операция вычитания с равными нечеткими операндами не приводит к нулю, уже упоминавшееся отсутствие баланса в уравнениях и т.п.). В связи с этим возникает проблема выбора модели представления нечеткой числовой информации [88], которая при сохранении основных исходных свойств экспертных оценок обеспечивает возмож-

ность построения алгебры нечетких чисел, эквивалентной полю действительных чисел.

Ещё одним недостатком классической нечёткой арифметики является тот факт, что функция принадлежности результата определяется на максимально широком носителе, что при обеспечении математической строгости завышает степень неопределённости [20, 24, 81]. В статье [21] это объясняется тем фактом, что в классической нечёткой арифметике эффект «переучёта» неопределённости возникает из-за того, что параметры нечёткого числа рассматриваются как независимые переменные, что далеко не всегда соответствует реальности. В [131] также отмечается, что степень неопределённости зависит не только от длины носителя числа, но и от его положения на числовой оси, а в [24] при попытке разрешения этой проблемы возникают проблемы с нарушением групповых свойств операций сложения и умножения. Поэтому к модели представления нечётких чисел и к определяемой на них алгебре выдвигается требование ограничения роста неопределённости и независимости степени размытости результата операций от расположения операндов на числовой оси.

Для установления линейного порядка на множестве нечётких чисел требуется определить отношение  $Q$  на множестве нечётких чисел  $F$ , которое обладает свойствами рефлексивности  $\forall \tilde{X} \in F : \tilde{X}Q\tilde{X}$ , антисимметричности  $\forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in F : \tilde{X}Q\tilde{Y} = \tilde{Y}Q\tilde{X} \Rightarrow \tilde{X} = \tilde{Y}$  и транзитивности  $\forall \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in F : \tilde{X}Q\tilde{Y} \wedge \tilde{Y}Q\tilde{Z} \Rightarrow \tilde{X}Q\tilde{Z}$ , и при этом любые элементы  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in F$  сравнимы [71]. Очевидно, что способ сравнения с помощью индексов ранжирования, описанный в п. 1.3, даёт нечёткий результат сравнения и непригоден для определения отношения  $Q$ . Исследования различных способов установления линейного порядка, проведённые в [71], показали, что большинство методов сравнения нечётких чисел либо не решают проблему существования несравнимых чисел (теоретико-множественные и  $\alpha$ -уровневые методы [6, 84]), либо решают

её искусственным образом (интегральные и метрические методы [100, 111]), вводя дополнительные оценочные функции (метод  $\alpha$ -взвешенного сравнения [10, 93, 126]) и при этом приводя к противоречивым результатам (центральный метод [36] и метод построения максимизирующей и минимизирующей точек [1]). Многообразие методов, сложности вычислений и неочевидные моменты в сравнении нечётких величин наводят на мысль о том, что линейный порядок должен обеспечиваться выбором подходящей модели представления нечётких чисел в рамках соответствующей алгебраической системы [23].

Наконец, при нечётком моделировании возникают ещё две проблемы, не упомянутые ранее. Во-первых, это проблема создания специфического программного обеспечения для каждой решаемой задачи [119], поскольку при моделировании могут использоваться различные способы представления нечётких величин и их сравнения. Каждый новый метод вычислений и новое представление нечётких чисел обычно приводит к необходимости написания новых модулей ПО [77], при том, что сама постановка задачи и алгоритм решения не меняются [88]. Во-вторых, это проблема устойчивости результата [16], возникающая, например, в задачах линейного программирования с нечёткими коэффициентами. Необходимо выбрать такие условия устойчивости, которые можно было бы использовать непосредственно в алгоритме решения задачи. Более того, в идеальном случае, модель представления нечеткой числовой информации должна позволять параметрически управлять устойчивостью решения.

Таким образом, к алгебраической системе, которую можно использовать в моделях с чёткими отношениями и нечёткими параметрами, выдвигаются следующие требования:

- ограничение роста неопределенности результатов обработки нечеткой информации;

- сохранение чётких отношений в модельных уравнениях при подстановке данных;
- возможность представления линейного порядка на множестве нечётких чисел;
- возможность использования стандартных программных средств реализации численных методов решений;
- возможность управления устойчивостью решения решаемой задачи.

#### **1.4. Цель и задачи исследования**

Проведённый анализ нечётких методов моделирования и классических моделей представления нечёткости показал, что они не позволяют применять хорошо изученные чёткие методы и модели в задачах с нечёткими параметрами и не гарантируют обеспечение требуемых свойств решения — устойчивости, непротиворечивости естественным математическим отношениям, ограничения расширения неопределённости. Успешное решение задач моделирования с нечёткими параметрами и чёткими отношениями возможно при создании и применении методики нечётких вычислений, которая, с одной стороны, обеспечивала бы требуемые свойства, а с другой — простоту решения, позволяющую использовать классические методы.

Целью диссертационной работы является построение и исследование моделей учёта нечёткой неопределённости, обеспечивающих требуемые свойства решения различных производственных задач.

Для достижения поставленной цели в работе решались следующие задачи.

1. Анализ существующих методик нечётких вычислений с точки зрения сохранения свойств решения задач.

2. Разработка модели представления нечётких чисел, позволяющей максимально сохранять исходную экспертную информацию и обеспечить требуемые качественные свойства решений (устойчивость, сохранение математических соотношений и т. п.).
3. Разработка методики эффективной численной реализации решения задач с нечёткими параметрами, основанной на подходящих алгебраических структурах, и её тестирование на примере задачи сетевого планирования с нечёткими параметрами.
4. Разработка и верификация программного обеспечения, реализующего предложенную модель представления нечётких параметров и методики численного решения задач с нечёткими параметрами.



## **Выводы по первой главе:**

1. Приведены основные понятия теории нечётких множеств и описаны актуальные модели представления нечёткой информации — нечёткие множества и нечёткие числа, — используемые в дальнейшем при описании исследования;
2. Нечёткие модели обычно классифицируют в зависимости от этапа применения нечёткой математики — при описании системы, при задании параметров, при задании входов, выходов и состояний (модели первого, второго и третьего типа). Предлагается классифицировать их на основе применяемого в них языка описания выбора и объединить две классификации в одну. В качестве исследуемых выбраны модели, использующие чёткие отношения и нечёткие параметры.
3. Хорошо разработанный нечёткий логический вывод не может применяться в моделях второго типа, поскольку рассчитан на нечёткость отношений, отсутствие формализованных адекватных математических моделей либо способов решения с помощью классической теории. Другие подходы к нечётким вычислениям далеко не всегда применимы в рассматриваемых моделях, поскольку лежащие в их основании алгебраические структуры (в основном решётки) и отсутствие отношения линейного порядка приводят к нарушениям естественных математических отношений и неоправданному расширению неопределённости результата.
4. Сформулированы основные требования к алгебраической системе, которая необходима для решения задач второго типа с нечёткими параметрами и чёткими отношениями — устойчивость решения, непротиворечивость естественным математическим отношениям, ограничение рас-

ширения неопределенности. Также введены требования вычислительной эффективности и возможности применения стандартных программных комплексов, предназначенных для чётких вычислений.

5. Определены цель и задачи исследования.

## ГЛАВА 2. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОБРАБОТКИ НЕЧЕТКИХ ЧИСЛОВЫХ ВЕЛИЧИН

В главе 1 было отмечено, что частным случаем моделей с лингвистической неопределённостью являются модели, использующие чёткие отношения и нечёткие числа в качестве параметров. Удобство их применения состоит в том, что они достаточно хорошо проработаны и испытаны временем, а для подкласса линейных моделей возможно получать решение в аналитическом виде, не применяя различные методологии имитационного моделирования. В качестве параметров нечётких моделей чаще всего используются треугольные и трапециевидные нечёткие числа, функция принадлежности которых является кусочно-линейной. Большинство других видов функций принадлежности, как показано в [20], могут быть линеаризованы и сведены к треугольным или трапециевидным.

Как уже упоминалось в п.1.3, для нечётких моделей второго типа требуются алгебраические методы моделирования и обработки нечётких параметров, которые удовлетворяют трём основным требованиям — ограничению роста неопределенности результатов вычислений, сохранению чётких отношений в модельных уравнениях и построению линейного порядка на множестве нечётких чисел, — и позволяют применять существующие методы решения модельных задач. Особенностью этой отрасли нечёткой математики является тот факт, что большинство существующих нечётких арифметик и методов сравнения нечётких чисел было разработано в практических целях для решения какой-либо прикладной задачи, а чисто теоретические исследования проводились в основном с целью обобщения существующих практических

наработок либо получения универсальной методики нечётких вычислений, не зависящей от формы функции принадлежности.

В отечественной и зарубежной литературе по теории нечётких множеств и нечёткому моделированию существует несколько направлений изучения алгебраических методов моделирования и обработки нечётких величин. В работах А. Кофмана [90], И. З. Батыршина [55, 101], а также в [3, 11, 86] рассматриваются нечёткие решётки, булевы алгебры и аксиоматические системы для алгебр нечётких множеств, которые в основном применимы в нечётких моделях первого типа и не подходят для нечётких моделей второго типа. Исследования абстрактных алгебр и попытки построения линейного пространства над множеством нечётких чисел проводились в статьях А. Rosenfeld [37], S. Nanda [33] и их последователей [19, 23, 28, 31], однако все эти работы представляют интерес скорее с теоретической точки зрения, поскольку большого прикладного значения представленные в них результаты не получили.

Наиболее полная картина существующих нечётких арифметик и методов ранжирования нечётких чисел описана в работах М. Hanss [20–22] и Ю. А. Зака [84] — помимо обобщающих теоретических исследований, предлагаются конкретные примеры применения арифметик для прикладных задач. Также проблемами нечётких арифметик и алгебр занимались А. Н. Борисов [58, 60], В. В. Борисов [61], А. А. Усков [117, 119, 120, 123], Р. Ягер [15, 41], Г. Э. Яхьяева [131]. Ещё одним интересным направлением является сведение алгебраических операций над нечёткими числами к соответствующим операциям над другими математическими объектами: в работах [117, 119, 120] операции над нечёткими числами сводятся к операциям над комплексными/гиперкомплексными числами или кватернионами соответственно, в [104] — к операциям над случайными множествами, а в [48, 92] — к совокупности операций над  $\alpha$ -интервалами. Отдельно стоит выделить разработку эффективных

численных методик проведения операций над нечёткими числами. Различные достижения в этом направлении описаны в работах [2, 52, 58, 60, 62, 77, 81, 88].

Как покажет последующий краткий анализ существующих алгебр нечётких чисел (п. 2.1), практически все они не обеспечивают, по крайней мере, одно из двух важных свойств решения модели — непротиворечивость чётким математическим отношениям либо ограничение расширения неопределённости, которое может оказывать влияние на устойчивость решаемой задачи. Кроме того, только в работах А. А. Ускова рассматривается вопрос о создании такой алгебры нечётких чисел, которая позволяла бы использовать стандартное программное обеспечение для нечётких задач и решать их без создания дополнительных программных пакетов/модулей. Наконец, в работе [24] отмечается, что попытка сохранения чётких отношений и уменьшения неопределённости результата в рамках алгебры нечётких чисел обычно приводит к потере свойств коммутативности и ассоциативности алгебраических операций. В связи с этим актуальным представляется создание такой модели представления нечёткого числа, которая при допущении некоторых потерь экспертной информации позволит построить над множеством нечётких чисел алгебраическую систему, удовлетворяющую заявленным в п. 1.3 требованиям.

## 2.1. Анализ существующих алгебр нечётких чисел

### 2.1.1. Алгебры нечётких LR-чисел

Как упоминалось в п. 1.1, на практике для нечётких вычислений часто используются удобные для понимания и записи нечёткие числа  $LR$ -типа. Такое число, согласно определению, представимо в виде тройки  $\tilde{A} = (m; a; b)$ . Арифметические операции над числами  $LR$ -типа в [58, 102, 106, 131] вводятся следующим образом:

- сложение  $\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 : (m_1, a_1, b_1) + (m_2, a_2, b_2) = (m_1 + m_2, a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ ;
- противоположное число  $-\tilde{A}_1 : -(m, a, b) = (-m, b, a)$ ;
- вычитание вводится как сумма числа  $\tilde{A}_1$  и числа, противоположного числу  $\tilde{A}_2 : (m_1, a_1, b_1) - (m_2, a_2, b_2) = (m_1 - m_2, a_1 + b_2, b_1 + a_2)$ ;
- умножение положительных чисел:  $(m_1, a_1, b_1) \times (m_2, a_2, b_2) = (m_1 m_2, m_2 a_1 + m_1 a_2, m_2 b_1 + m_1 b_2)$ ;
- умножение разнознаковых чисел  $(m_1, a_1, b_1) \times (m_2, a_2, b_2) = (m_1 m_2, m_2 a_1 - m_1 b_2, m_2 b_1 - m_1 a_2)$ ;
- умножение отрицательных чисел  $(m_1, a_1, b_1) \times (m_2, a_2, b_2) = (m_1 m_2, -m_2 b_1 - m_1 b_2, -m_2 a_1 - m_1 a_2)$ ;
- обратное число  $\tilde{A}^{-1} : (m, a, b)^{-1} = \left( \frac{1}{m}; \frac{b}{m^2}; \frac{a}{m^2} \right)$ ;
- деление нечётких чисел  $\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_2}$  рассматривается как умножение числа  $\tilde{A}_1$  на число, обратное числу  $\tilde{A}_2 : \left( \frac{m_1}{m_2}, \frac{m_1 b_2 + m_2 a_1}{m_2^2}, \frac{m_1 a_2 + m_2 b_1}{m_2^2} \right)$ .

Для вводимых операций сложения и умножения справедливы свойства коммутативности и ассоциативности [22]. Свойство дистрибутивности, как

и в случае вычислений, основанных на принципе Заде, выполняется не всегда. Кроме того, для этой алгебры нечётких чисел характерны недостатки, описанные в [113, 131] — носитель результата может необоснованно расширяться ввиду зависимости результата от степени нечёткости операндов и их местоположения на числовой оси. Также при построении данной алгебры не вводятся нейтральные по сложению и умножению элементы (ноль и единица) [22]. В статье [123] отмечается, что если в качестве нулевого элемента использовать тройку, соответствующую нулю во множестве действительных чисел

$$\tilde{0} = (0; 0; 0) \quad (2.1)$$

а в качестве единицы — тройку

$$\tilde{1} = (1; 0; 0) \quad (2.2)$$

то в этом случае вводимые ранее операции не позволяют получить поле из-за невыполнения тождеств  $\tilde{A} + (-\tilde{A}) = \tilde{0}$  и  $\tilde{A} \cdot \tilde{A}^{-1} = \tilde{1}$ .

Для получения алгебры типа поле с использованием нейтральных элементов (2.1) и (2.2), авторы [123] предлагают ввести групповые операции над нечёткими числами. Для этого вводятся несколько иные противоположный и обратный элементы:

$$-(m; a; b) = (-m; -a; -b); \quad (2.3)$$

$$(m; a; b)^{-1} = \left( \frac{1}{m}; -\frac{a}{m^2}; -\frac{b}{m^2} \right). \quad (2.4)$$

При этом признаётся тот факт, что вводимые с помощью (2.3) и (2.4) элементы имеют отрицательные коэффициенты нечёткости, а, следовательно, лишены физического смысла и не являются элементами множества нечётких  $LR$ -чисел. Однако, согласно определениям, которые вводились при рассмотрении абстрактных алгебр, противоположный и обратный элемент также должны являться элементами несущего множества алгебры, что в (2.3) и (2.4)

не выполняется. Таким образом, алгебру групповых нечётких чисел нельзя называть полем в строгом смысле этого термина. Более того, авторы статьи ограничивают применимость вводимой ими алгебры только тем случаем, когда в рассматриваемой задаче есть только один независимый нечёткий параметр/сигнал, поскольку в этом случае предотвращается необоснованное увеличение степени нечёткости результата. Во всех остальных случаях предлагается использовать классическую алгебру нечётких чисел, описанную выше, со всеми свойственными ему недостатками.

В статье [114] на основании идей, изложенных в [47,60,84], для решения проблем чрезмерной размытости результата и нетождественности выражений вида  $\tilde{A} + \tilde{B} - \tilde{B} = \tilde{A}$ , вводятся дополнительные арифметические операции и новое представление нечёткого числа, нечувствительное к его знаку. Дополнительной арифметической операцией  $\ast_d$  для операции  $\ast$  является такая, что для нечётких чисел  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$

$$\tilde{C} = \tilde{A} \ast_d \tilde{B} \rightarrow \tilde{C} \ast \tilde{B} = \tilde{A} \quad (2.5)$$

Для определения нового представления нечёткого числа  $\left(m, d(\tilde{A}), \Delta(\tilde{A})\right)$ , называемого симметризованным параметрическим, авторы [114] вводят понятия показателя нечёткости числа  $d(\tilde{A}) = \frac{a+b}{2}$  и коэффициента асимметрии  $\Delta(\tilde{A}) = \frac{b-a}{2}$ . Дополнительные арифметические операции над нечёткими числами в новом представлении выглядят



следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tilde{A} +_d \tilde{B} &= \left( m_{\tilde{A}} + m_{\tilde{B}}; \left| d(\tilde{A}) - d(\tilde{B}) \right|; \Delta(\tilde{A}) + \Delta(\tilde{B}) \right); \\
\tilde{A} -_d \tilde{B} &= \left( m_{\tilde{A}} - m_{\tilde{B}}; \left| d(\tilde{A}) - d(\tilde{B}) \right|; \Delta(\tilde{A}) - \Delta(\tilde{B}) \right); \\
\tilde{A} \cdot_d \tilde{B} &= \left( m_{\tilde{A}} m_{\tilde{B}}; \left| m_{\tilde{B}} d(\tilde{A}) - m_{\tilde{A}} d(\tilde{B}) \right|; m_{\tilde{A}} \Delta(\tilde{B}) + m_{\tilde{B}} \Delta(\tilde{A}) \right); \\
\tilde{A} :_d \tilde{B} &= \left( \frac{m_{\tilde{A}}}{m_{\tilde{B}}}; \frac{\left| m_{\tilde{B}} d(\tilde{A}) - m_{\tilde{A}} d(\tilde{B}) \right|}{m_{\tilde{B}}^2}; \frac{m_{\tilde{B}} \Delta(\tilde{A}) - m_{\tilde{A}} \Delta(\tilde{B})}{m_{\tilde{B}}^2} \right).
\end{aligned}$$

Для дополнительных арифметических операций не выполняются свойства ассоциативности по сложению и умножению, т. е.

$$\begin{aligned}
\tilde{A} +_d \left( \tilde{B} +_d \tilde{C} \right) &\neq \left( \tilde{A} +_d \tilde{B} \right) +_d \tilde{C}; \\
\tilde{A} \cdot_d \left( \tilde{B} \cdot_d \tilde{C} \right) &\neq \left( \tilde{A} \cdot_d \tilde{B} \right) \cdot_d \tilde{C},
\end{aligned}$$

однако при этом они обеспечивают выполнение следующих соотношений (нечёткие ноль и единица вводятся согласно (2.1) и (2.2)):

$$\begin{aligned}
\tilde{A} -_d \tilde{0} &= \tilde{A} \\
\tilde{A} -_d \tilde{A} &= \tilde{0} \\
\tilde{A} :_d \tilde{1} &= \tilde{A} \\
\tilde{A} :_d \tilde{A} &= 1
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
\left( \tilde{A} + \tilde{B} \right) -_d \tilde{A} &= \tilde{B} \\
\left( \tilde{A} \cdot \tilde{B} \right) :_d \tilde{A} &= \tilde{B} \\
\left( \tilde{A} \cdot \tilde{B} \right) :_d \tilde{A} &= -\tilde{B} \\
\left( \tilde{A} + \tilde{B} \right) -_d \tilde{A} &= -\tilde{B}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Свойства (2.6) и (2.7) показывают, что вводимые в [114] дополнительные алгебраические операции позволяют сохранять первоначальную нечёт-

кость чисел, что немаловажно для возможности получения корректных решений нечётких уравнений. К недостаткам подхода можно отнести его громоздкость, неочевидность и необходимость использования восьми алгебраических операций вместо двух, дополненных понятиями противоположного и обратного элементов.

В [60] класс чисел, над которыми осуществляются арифметические операции, сужается до треугольных. В целях удобства, треугольное нечёткое число  $\tilde{A} = (m_{\tilde{A}}; a_{\tilde{A}}; b_{\tilde{A}})$  представляется в виде совокупности двух ветвей функции принадлежности, аналогично представлению (1.3) для нечёткого множества:

$$\tilde{A} = \int_{m_{\tilde{A}} - a_{\tilde{A}}}^{m_{\tilde{A}}} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} + \int_{m_{\tilde{A}}}^{m_{\tilde{A}} + b_{\tilde{A}}} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} = \int_{x_{\tilde{A}}^L}^{m_{\tilde{A}}} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} + \int_{m_{\tilde{A}}}^{x_{\tilde{A}}^R} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}. \quad (2.8)$$

Для обобщённой бинарной операции  $*$ , выполняемой над нечёткими треугольными числами  $\tilde{A} = (x_{\tilde{A}}^L; m_{\tilde{A}}; x_{\tilde{A}}^R)$  и  $\tilde{B} = (x_{\tilde{B}}^L; m_{\tilde{B}}; x_{\tilde{B}}^R)$  в форме (2.8), справедливо следующее выражение:

$$\begin{aligned} \tilde{C} = \tilde{A} * \tilde{B} &= \left( \int_{x_{\tilde{A}}^L}^{m_{\tilde{A}}} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} + \int_{m_{\tilde{A}}}^{x_{\tilde{A}}^R} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} \right) * \left( \int_{x_{\tilde{B}}^L}^{m_{\tilde{B}}} \frac{\mu_{\tilde{B}}(x)}{x} + \int_{m_{\tilde{B}}}^{x_{\tilde{B}}^R} \frac{\mu_{\tilde{B}}(x)}{x} \right) = \\ &= \int_{x_{\tilde{C}}^L}^{m_{\tilde{C}}} \frac{\mu_{\tilde{C}}(x)}{x} + \int_{m_{\tilde{C}}}^{x_{\tilde{C}}^R} \frac{\mu_{\tilde{C}}(x)}{x}, \end{aligned}$$

где  $m_{\tilde{C}} = m_{\tilde{A}} * m_{\tilde{B}}$ , а границы результата  $x_{\tilde{C}}^L$  и  $x_{\tilde{C}}^R$  зависят от операции:

- для сложения  $x_{\tilde{C}}^L = x_{\tilde{A}}^L + x_{\tilde{B}}^L$ ;  $x_{\tilde{C}}^R = x_{\tilde{A}}^R + x_{\tilde{B}}^R$ ;
- для вычитания  $x_{\tilde{C}}^L = x_{\tilde{A}}^L - x_{\tilde{B}}^R$ ;  $x_{\tilde{C}}^R = x_{\tilde{A}}^R - x_{\tilde{B}}^L$ ;
- для умножения  $x_{\tilde{C}}^L = x_{\tilde{A}}^L \cdot x_{\tilde{B}}^L$ ;  $x_{\tilde{C}}^R = x_{\tilde{A}}^R \cdot x_{\tilde{B}}^R$ ;
- для деления  $x_{\tilde{C}}^L = \frac{x_{\tilde{A}}^L}{x_{\tilde{B}}^R}$ ;  $x_{\tilde{C}}^R = \frac{x_{\tilde{A}}^R}{x_{\tilde{B}}^L}$ .

Функция принадлежности результата  $\mu_{\tilde{C}}(x)$  ищется в виде линейной функции  $\mu_{\tilde{C}}(x) = kx + b$  для операций сложения и вычитания, а также в виде  $\mu_{\tilde{C}}(x) = k\sqrt{x} + b$  для умножения и  $\mu_{\tilde{C}}(x) = \frac{k}{x} + b$  для деления.

Исходя из определения границ результата, можно сразу отметить нерешённость проблемы чрезмерного размытия результата арифметических операций и его выхода из класса треугольных чисел. В [60] приводится пример операций над нечёткими числами  $\tilde{6} = (5; 6; 7)$  с длиной носителя  $d_{\tilde{6}} = 8 - 6 = 2$  и  $\tilde{8} = (6; 8; 10)$  с длиной носителя  $d_{\tilde{8}} = 10 - 6 = 4$ . Их умножение приводит к границам нечёткого результата  $x_{\tilde{C}}^L = 30$ ,  $x_{\tilde{C}}^R = 70$  и моде  $m_{\tilde{C}} = 48$ . Длина носителя  $d_{\tilde{C}} = 70 - 30 = 40 \gg d_{\tilde{6}} \cdot d_{\tilde{8}}$ .

### 2.1.2. Вычисления с использованием интервальной нечёткости

Как указано в [60, 81, 108], алгебры, основанные на принципе обобщения Заде, обладают существенным недостатком — неэффективными промежуточными вычислениями, необходимыми для получения функции принадлежности результата. Поскольку для нечётких множеств справедлива теорема о декомпозиции, то для решения практических задач, обычная нечёткость может быть сведена к интервальной, а операции над числами — к соответствующим операциям над их  $\alpha$ -сечениями [106]. В [22, 60] предлагается выполнить дискретизацию непрерывного нечёткого числа по конечному числу  $\alpha$ -уровней  $\alpha_i; i = \overline{1, k}$ , причём  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_k = 1$ . Нечёткое число будет представлено совокупностью интервалов  $\bigcup_{i=1}^k [x_{i1}; x_{i2}]_{\alpha_i}$ , над которыми можно совершать некоторые операции. Схожий подход применяется и в [2, 12], — вычисления выполняются над  $\alpha$ -сечениями с использованием интервальных операций, после чего восстанавливается функция принадлежности результата.

В статье [92] описывается алгебра для интервалов вида  $\tilde{x} = [x_1; x_2]; x_1 \leq x_2; x_1, x_2 \in \mathbb{R}; \tilde{x} \in X$ . Произвольная интервальная функция  $F(\tilde{x}, \tilde{y}, \dots, \tilde{z})$  определяется с помощью сопоставленной ей чёткой функции

$f(x, y, \dots, z)$ ,  $x \in \tilde{x}$ ,  $y \in \tilde{y}$ ,  $\dots z \in \tilde{z}$  следующим образом:

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}, \dots, \tilde{z}) = \{f(x, y, \dots, z) \mid x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}, \dots, z \in \tilde{z}\} \quad (2.9)$$

В соответствии с определением (2.9), автор вводит конкретные алгебраические операции для интервалов:

- сложение  $\tilde{v} = \tilde{x} + \tilde{y} = \{(x + y) \mid x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}\} = [x_1 + y_1; x_2 + y_2]$ ;
- вычитание  $\tilde{v} = \tilde{x} - \tilde{y} = \{(x - y) \mid x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}\} = [x_1 - y_2; x_2 - y_1]$ ;
- умножение на число:  $\tilde{v} = k\tilde{x} = \{kx \mid x \in \tilde{x}, k \in \mathbb{R}\} = \left[ \min_i (kx_i); \max_i (kx_i) \right]$ ;
- умножение  $\tilde{v} = \tilde{x} \cdot \tilde{y} = \{(x \cdot y) \mid x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}\} = \left[ \min_{i,j} (x_i y_j); \max_{i,j} (x_i y_j) \right]$ ;
- деление  $\tilde{v} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} = \left\{ \left( \frac{x}{y} \right) \mid x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y} \right\} = [x_1; x_2] \cdot \left[ \frac{1}{y_2}; \frac{1}{y_1} \right]$ .

Также определяются интервальная единица  $\tilde{1} = [1; 1]$  и интервальный ноль  $\tilde{0} = [0; 0]$  как нейтральные элементы по умножению и сложению соответственно. Во вводимой алгебре справедливы следующие законы [48]:

1. коммутативность по сложению  $\tilde{x} + \tilde{y} = \tilde{y} + \tilde{x}$ ;  $\tilde{x}, \tilde{y} \in X$ ;
2. ассоциативность по сложению  $\tilde{x} + (\tilde{y} + \tilde{z}) = (\tilde{x} + \tilde{y}) + \tilde{z}$ ;  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in X$ ;
3. коммутативность по умножению  $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = \tilde{y} \cdot \tilde{x}$ ;  $\tilde{x}, \tilde{y} \in X$ ;
4. ассоциативность по умножению  $\tilde{x} \cdot (\tilde{y} \cdot \tilde{z}) = (\tilde{x} \cdot \tilde{y}) \cdot \tilde{z}$ ;  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in X$ ;
5. существование единственного нейтрального по сложению элемента (нуля)  $\tilde{x} + \tilde{0} = \tilde{0} + \tilde{x} = \tilde{x}$ ;  $\tilde{x} \in X$ ;
6. существование единственного нейтрального по умножению элемента (единицы)  $\tilde{x} \cdot \tilde{1} = \tilde{1} \cdot \tilde{x} = \tilde{x}$ ;  $\tilde{x} \in X$ ;

7. дистрибутивность умножения на действительную константу относительно сложения  $k(\tilde{x} + \tilde{y}) = k\tilde{x} + k\tilde{y}; \quad \tilde{x}, \tilde{y} \in X, \quad k \in \mathbb{R}$ .

Как отмечается в [77, 102, 112], интервальная алгебра определяет операции вычитания и деления как самостоятельные операции, при этом, в общем случае, интервальные числа не обладают свойством дистрибутивности умножения относительно сложения; отсутствуют понятия противоположного элемента (по сложению) и обратного элемента (по умножению); вычитание из интервального числа равного ему в общем случае не приводит к нуль-интервалу, как и деление интервального числа на равное ему не дает вырожденного единичного интервала. Эти недостатки подтверждаются в [48, 92] в виде следующих законов:

1.  $\tilde{x} - \tilde{x} = \tilde{0} \Leftrightarrow \tilde{x} = [x_1; x_1]$ , т.е. разность интервального числа самого с собой равна нулю тогда и только тогда, когда это число вырожденное;
2.  $\frac{\tilde{x}}{\tilde{x}} = \tilde{1} \Leftrightarrow \tilde{x} = [x_1; x_1]$ , т.е. результат деления интервального числа на само себя равен единице в том и только в том случае, когда это число вырожденное;
3. противоположные по сложению элементы существуют только для вырожденных интервалов:  $\tilde{x} + \tilde{y} = \tilde{0} \Leftrightarrow \tilde{x} = [x_1; x_1]; \tilde{y} = [-\tilde{x}_1; -\tilde{x}_1]$ ;
4. обратные по умножению элементы существуют только для вырожденных интервалов:  $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = \tilde{1} \Leftrightarrow \tilde{x} = [x_1; x_1]; \tilde{y} = \left[ \frac{1}{x_1}; \frac{1}{x_1} \right]$ ;
5. закон субдистрибутивности умножения на интервальное число относительно сложения  $\tilde{x} \cdot (\tilde{y} + \tilde{z}) \subseteq \tilde{x} \cdot \tilde{y} + \tilde{x} \cdot \tilde{z}$ . Только в частном случае, когда  $\tilde{y}, \tilde{z} > \tilde{0}$ , имеет место истинная дистрибутивность.

Как указано в [92], невыполнение некоторых аксиом поля, а также перечисленные выше особенности интервальных чисел приводят к значительной

специфике их использования на практике (в основном, для оценки множества решений некоторой задачи при интервально заданных параметрах). Стоит также упомянуть описанную в [21, 113, 131] проблему размытости результатов операций, т. е. необоснованного увеличения нечёткости. Размытость зависит не только от длины  $d = x_2 - x_1$  интервала, но и от его положения на числовой оси. К примеру, интервалы одинаковой длины  $[1; 3]$  и  $[99; 101]$ , будучи умноженными на один и тот же интервал  $[2; 4]$ , дадут результаты с сильно различающейся степенью нечёткости:

$$\begin{aligned} [2; 4] \cdot [1; 3] &= [2; 12]; & d &= 12 - 2 = 10 \\ [2; 4] \cdot [99; 101] &= [198; 404]; & d &= 404 - 198 = 206 \end{aligned}$$

### 2.1.3. Создание алгебры, изоморфной существующим алгебрам

В статье [119] предлагаются теоремы, которые позволяют сводить арифметические операции над нечёткими числами к арифметическим операциям над комплексными числами и над матрицами размера  $2 \times 2$ . Для определения связи между алгеброй симметричных нечётких чисел  $LR$ -типа  $\tilde{A} = (x; y; y)$  и комплексных чисел  $x = y + iz$  доказывается следующая теорема.

**Теорема 2.1.** Пусть биективное преобразование  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  ставит каждому элементу  $\tilde{A} = (x; y; y) \in X$  множества нечётких симметричных  $LR$ -чисел элемент  $x = y + iz \in \mathbb{C}$ ;  $i = \sqrt{-1}$  множества комплексных чисел. Пусть даны симметричные нечёткие  $LR$ -числа  $\tilde{A} = (m_1; a; a)$  и  $\tilde{B} = (m_2; b; b)$ , которым с помощью  $f$  взаимно однозначно сопоставлены комплексные числа  $x_A = m_1 + ai$  и  $x_B = m_2 + bi$ . Тогда при  $m_1 m_2 \gg ab$  и  $m \gg a > 0$  арифметические операции над  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  соответствуют операциям над комплексными числами

$x_A$  и  $x_B$ :

$$\tilde{A} + \tilde{B} \leftrightarrow x_A + x_B$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} \leftrightarrow x_A \cdot x_B$$

$$-\tilde{A} \leftrightarrow -\bar{x}_A$$

$$\tilde{A}^{-1} \leftrightarrow \bar{x}_A^{-1}$$

где  $\bar{x}_A = m_1 - ai$  — комплексно-сопряженное по отношению к  $x_A$ .

Связь же операций над симметричными нечёткими  $LR$ -числами и матрицами  $2 \times 2$  вида  $\begin{bmatrix} m & -a \\ a & m \end{bmatrix}$  доказывается с помощью следующей теоремы.

**Теорема 2.2.** Пусть биективное отображение  $g : X \rightarrow M$  ставит каждому элементу  $\tilde{A} = (x; y; y) \in X$  множества нечётких симметричных  $LR$ -чисел элемент  $M_A = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$  множества  $M$  матриц размерности  $2 \times 2$ . Пусть даны симметричные нечёткие  $LR$ -числа  $\tilde{A} = (m_1; a; a)$  и  $\tilde{B} = (m_2; b; b)$ , которым с помощью  $g$  взаимно однозначно сопоставлены матрицы  $M_A = \begin{bmatrix} m_1 & -a \\ a & m_1 \end{bmatrix}$  и  $M_B = \begin{bmatrix} m_2 & -b \\ b & m_2 \end{bmatrix}$ . Тогда при  $m_1 m_2 \gg ab$  и  $m \gg a > 0$  арифметические операции над  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  соответствуют операциям над матрицами  $M_A$  и  $M_B$ :

$$\tilde{A} + \tilde{B} \leftrightarrow M_A + M_B$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} \leftrightarrow M_A \cdot M_B$$

$$-\tilde{A} \leftrightarrow -M_A^T$$

$$\tilde{A}^{-1} \leftrightarrow [M_A^T]^{-1}$$

где  $M^T$  — транспонированная матрица, а  $M^{-1}$  — матрица, обратная матрице  $M$ .

В качестве преимуществ данного подхода авторы заявляют стандартизацию нечётких вычислений с участием чисел  $LR$ -типа, поскольку в этом случае возможно использование современных систем компьютерной математики (Maple, Mathematica, MATLAB, Mathcad), а также возможность наглядного изображения операций и их результатов на комплексной плоскости. Однако в рамках описанного подхода явно не решаются проблемы нейтральных по сложению и умножению элементов. Кроме того, приводимый авторами в статье численный пример демонстрирует нерешённость проблемы необоснованного расширения носителя при вычислениях. Наконец, применимость таких алгебр ограничена лишь нечёткими симметричными числами.

Те же авторы, пытаясь решить последнюю проблему (т.е. ограниченность области применения алгебр), в статьях [117, 120] распространяют полученные ранее результаты на случай с асимметричными нечёткими  $LR$ -числами. В качестве второго множества для построения изоморфизма алгебр выступает множество кватернионов  $H$  либо множество гиперкомплексных чисел [117]. Далее доказывается следующее утверждение.

**Теорема 2.3.** Пусть биективное преобразование  $f : X \rightarrow H$  ставит каждому элементу  $\tilde{A} = (x; y; z) \in X$  множества нечётких  $LR$ -чисел элемент  $a = x + yi + zj + \xi k \in H$ ;  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$  множества кватернионов, где  $\xi$  — произвольный параметр, удовлетворяющий условиям  $\xi > 0$ ,  $\xi \ll y$ ,  $\xi \ll z$ . Пусть даны нечёткие  $LR$ -числа  $\tilde{A} = (m_1; a_1; b_1)$  и  $\tilde{B} = (m_2; a_2; b_2)$ , которым с помощью  $f$  взаимно однозначно сопоставлены кватернионы  $x_A = m_1 + a_1i + b_1j + \xi k$  и  $x_B = m_2 + a_2i + b_2j + \xi k$ . Тогда при  $m_1 \gg a_1, a_2, b_1, b_2$  и  $m_2 \gg a_1, a_2, b_1, b_2$  арифметические операции над  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  соответствуют



операциям над кватернионами  $x_A$  и  $x_B$ :

$$\tilde{A} + \tilde{B} \leftrightarrow x_A + x_B$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} \leftrightarrow x_A \cdot x_B$$

$$-\tilde{A} \leftrightarrow -\bar{x}_A^R$$

$$\tilde{A}^{-1} \leftrightarrow [\bar{x}_A^{-1}]^R$$

где  $\bar{a} = x - yi - zj - \xi k$  — кватернион, сопряженный по отношению к кватерниону  $a$ , а  $a^R$  — операция рокировки кватерниона, выполняемая как перемена мест  $i$ -го и  $j$ -го компонентов кватерниона  $a^R = x + zi + yj + \xi k$ .

Далее, по аналогии со статьёй [119], доказывается изоморфность алгебры нечётких  $LR$ -чисел  $\tilde{A} = (m; a; b)$  и матриц  $4 \times 4$  вида

$$\begin{bmatrix} m & a & b & -\xi \\ -a & m & -\xi & -b \\ -b & \xi & m & a \\ \xi & b & -a & m \end{bmatrix}$$

где  $\xi$  — произвольный параметр, удовлетворяющий условиям  $\xi > 0$ ,  $\xi \ll a, b$ .

Данный подход решает проблему асимметричных нечётких чисел, однако при этом сводится к громоздким матричным вычислениям и по-прежнему не позволяет устранить проблему необоснованного расширения носителя результата арифметической операции. Приводя в качестве примера анализ системы управления с нечёткими параметрами, коэффициенты нечёткости которых не превышают 3, в результате авторы получают решение с коэффициентами нечёткости порядка 1000.

## 2.2. Модифицированные нечёткие числа и параметрическое преобразование L

### 2.2.1. Модифицированные нечеткие числа

В статье [99], для преодоления изложенных в предыдущем параграфе недостатков нечётких алгебр, для решения нечётких задач был предложен следующий подход. Исходная задача  $\tilde{Y} = f(\tilde{X})$  с нечёткими числовыми параметрами рассматривается как совокупность задач с интервальной неопределенностью

$$\tilde{Y} = f(\tilde{X}) \rightarrow \bigcup_{\alpha=0}^1 y_{\alpha} = f(X_{\alpha}) \quad (2.10)$$

с последующим переходом к полной определённости. Для этого на каждом  $\alpha$ -уровне внутри интервала  $X_{\alpha}$  выбирается точка  $\bar{x}(\alpha)$ . В [99] для этого используется средняя точка  $\alpha$ -интервала

$$\bar{x}(\alpha) = \frac{x^L(\alpha) + x^R(\alpha)}{2} \quad (2.11)$$

Для треугольных чисел  $\bar{x}(\alpha)$  является линейной функцией ввиду линейности  $x^L(\alpha)$  и  $x^R(\alpha)$ . После решения  $N$  чётких  $\alpha$ -уровневых задач полученные результаты  $y(\alpha)$  аппроксимируются нечётким числом

$$\tilde{Y}^* = \{y(\alpha) \mid \mu_{\tilde{Y}}(y) = \alpha\}$$

которое называется модифицированным решением задачи  $\tilde{Y} = f(\tilde{X})$ . В статье утверждается, что в реальных задачах модифицированного решения достаточно для, например, поддержки принятия решений.

Предлагаемый подход в своей основе имеет факторизацию, т. е. декомпозицию нечётких чисел по  $\alpha$ -уровням, однако в [99] рассмотрен только частный случай выбора точки внутри интервала, а также отсутствует строгое математическое доказательство применимости метода, предложенное позднее в [70].

Если рассмотреть данный подход с точки зрения нечётких алгебр, то решение задачи с использованием факторизации нечётких чисел представляется как переход от использования алгебр «полноценных» нечётких чисел к алгебрам для чисел  $LL/RR$ -типа. Действительно, функция принадлежности  $LL/RR$ -числа является обратной к функции, которая определяет точки  $\bar{x}(\alpha)$ :

$$\mu_{\tilde{A}^*}(x) = (\bar{x}(\alpha))^{-1} \quad (2.12)$$

**Определение 2.1.** Число  $\tilde{A}^*$ , получаемое из числа  $\tilde{A}$  с помощью преобразования (2.12), будем называть модифицированным нечётким числом.

Модифицированное нечёткое число является числом  $LL/RR$ -типа, поскольку один из коэффициентов нечёткости равен нулю, а функция принадлежности имеет только левую или правую ветвь. В дальнейшем для модифицированных чисел, наряду с обозначением  $\tilde{A}^*$ , будем использовать обозначение  $\bar{x}(\alpha)$ , которое указывает на механизм их построения как совокупности точек на выбранных  $\alpha$ -интервалах.

**Пример.** Пусть  $\tilde{A} = \langle 2; 2; 4 \rangle$ . Найдём модифицированное число  $\tilde{A}^*$  в соответствие с (2.11). Вначале запишем функцию принадлежности числа  $\tilde{A}^*$ :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}; & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{6-x}{4}; & 2 < x \leq 6 \\ 0; & x < 0 \text{ } x > 6 \end{cases}$$

Используя выражения (1.23), получим

$$\begin{cases} x^L(\alpha) = m - a + a\alpha = 2 - 2 + 2\alpha = 2\alpha \\ x^R(\alpha) = m + b - b\alpha = 2 + 4 - 4\alpha = 6 - 4\alpha \end{cases}$$

Тогда, согласно (2.11), получим:

$$\bar{x}(\alpha) = \frac{x^L(\alpha) + x^R(\alpha)}{2} = \frac{2\alpha + 6 - 4\alpha}{2} = 3 - \alpha.$$

Т.к. прямая функция  $\bar{x}(\alpha)$  убывает на своей области определения  $\alpha \in [0; 1]$ , то и обратная  $\mu_{\tilde{A}^*}(x)$  также будет убывать. Её областью определения будет являться область значений функции  $\bar{x}(\alpha)$ , т.е. отрезок  $[2; 3]$ . В итоге  $\mu_{\tilde{A}^*}(x)$  состоит только из правой ветви:

$$\mu_{\tilde{A}^*}(x) = \begin{cases} 3 - x; & x \in [2; 3] \\ 0; & x \notin [2; 3] \end{cases}$$

Оба числа — и исходное, и модифицированное — изображены на рис. 2.1. Модифицированное число изображено пунктирными линиями.

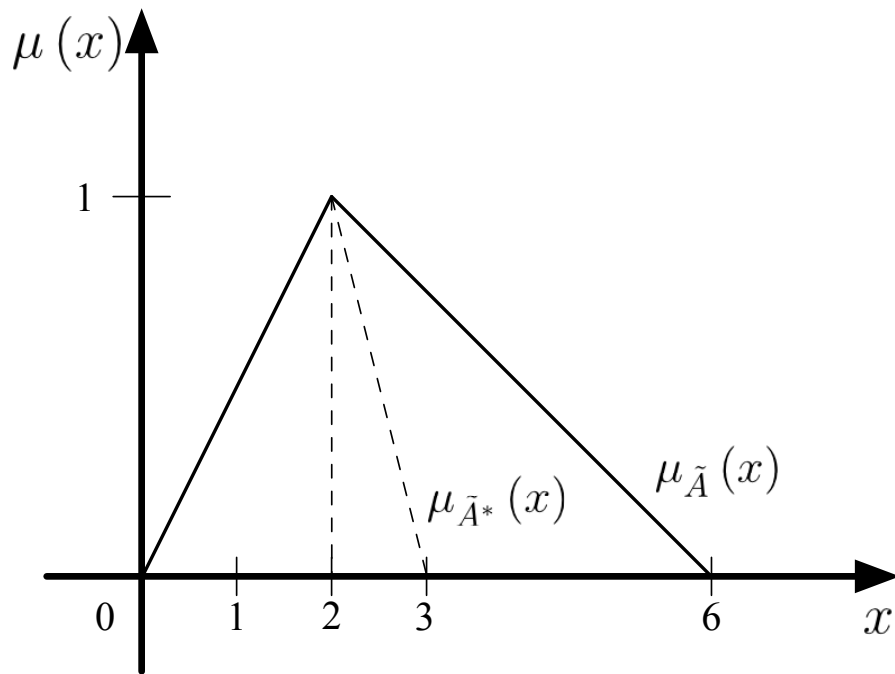


Рисунок 2.1. Исходное нечёткое число и его модификация при выборе средней точки  $\alpha$ -интервала

Очевидно, что на вид модифицированных чисел (и, соответственно, на итоговый результат решения задачи) влияние будут оказывать как характеристики самих нечётких чисел — мода, коэффициенты нечёткости, — так и принцип, согласно которому выбирается точка  $\bar{x}(\alpha)$ . В статье [70] предложено обобщение принципа, вводимого в [99] — значение  $\bar{x}(\alpha)$  выбирается

с помощью линейного параметрического преобразования  $L$ :

$$\bar{x}(\alpha) = L(X_\alpha) = \lambda x^L(\alpha) + (1 - \lambda) x^R(\alpha). \quad (2.13)$$

Параметр преобразования  $\lambda \in [0; 1]$  выбирается индивидуально для каждого числа согласно его характеристикам – величинам коэффициентов нечёткости и длине носителя. Нетрудно убедиться, что мода модифицированного числа  $m_{\tilde{A}^*}$  равна

$$m_{\tilde{A}^*} = \bar{x}(1), \quad (2.14)$$

а ненулевой коэффициент нечёткости и носитель равны по модулю

$$d_{\tilde{A}^*} = |\bar{x}(1) - \bar{x}(0)|. \quad (2.15)$$

Если известно уравнение (2.13), то, с учётом (2.14) и (2.15), модифицированное нечёткое число можно представить в виде тройки  $\langle \bar{x}(1); |\bar{x}(1) - \bar{x}(0)|; 0 \rangle$  (число LL-типа) или  $\langle \bar{x}(1); 0; |\bar{x}(1) - \bar{x}(0)| \rangle$  (число RR-типа). Тип модифицированного числа можно определить по коэффициенту при  $\alpha$  в (2.13): если он больше нуля, то число LL-типа, если меньше — RR-типа.

Исходя из механизма построения модифицированных нечётких чисел, очевидно, что преобразование (2.13) сокращает информативность исходной нечёткой величины. Чтобы выяснить, насколько существенны потери нечёткой информации при различных значениях параметра  $\lambda$ , проведём исследование свойств преобразования  $L$ .

Для исследования свойств преобразования  $L$  введём следующие характеристические показатели нечёткого числа, которые определяют его информативность с точки зрения принятия решений [68, 69], а также, по аналогии с [113], позволяют производить анализ и вычисления в форме, нечувствительной к знаку нечёткого числа:

- длина носителя  $d_{\tilde{A}}$ ;

- мода  $m_{\tilde{A}}$ ;
- степень асимметрии  $AS_{\tilde{A}}$ .

При использовании записи треугольного числа с помощью коэффициентов нечёткости, длина носителя определяется как их сумма:

$$d_{\tilde{A}} = a + b \quad (2.16)$$

**Определение 2.2.** Степенью асимметрии  $AS_{\tilde{A}}$  будем называть характеристику треугольного нечёткого числа, определяемую как разность площадей прямоугольных треугольников, на которые исходное нечёткое число делится модой (рис. 2.2) [69].

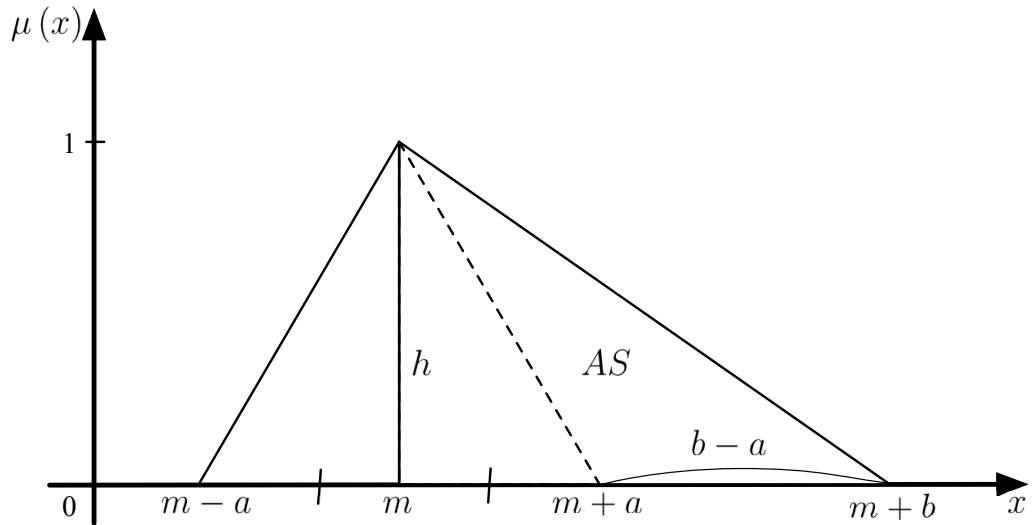


Рисунок 2.2. Геометрический смысл степени асимметрии числа

Площадь левого треугольника  $S_1 = \frac{1}{2}ah(\tilde{A}) = \frac{a}{2}$ , правого  $S_2 = \frac{1}{2}bh(\tilde{A}) = \frac{b}{2}$ , откуда

$$AS_{\tilde{A}} = S_2 - S_1 = \frac{b-a}{2} \in \left[ -\frac{a}{2}; \frac{b}{2} \right]. \quad (2.17)$$

Если  $\tilde{A}$  является числом  $LL(RR)$ -типа, то  $AS_{\tilde{A}}$ , согласно (2.17), принимает значение  $-\frac{a}{2}$  ( $\frac{b}{2}$ ).

Очевидно, что запись треугольного нечёткого числа в виде тройки  $(m_{\tilde{A}}, d_{\tilde{A}}, AS_{\tilde{A}})$  эквивалентна введённым ранее способам записи через коэффициенты нечёткости  $(m; a; b)$  и точки пересечения с осью  $Ox$   $(x^L; m; x^R)$ . При известных степени асимметрии  $AS_{\tilde{A}}$  и длине носителя  $d_{\tilde{A}}$ , коэффициенты нечёткости определяются по формуле

$$\begin{cases} a = \frac{d_{\tilde{A}} - 2AS_{\tilde{A}}}{2} \\ b = \frac{d_{\tilde{A}} + 2AS_{\tilde{A}}}{2} \end{cases} \quad (2.18)$$

Справедливость (2.18) можно проверить, подставив соответствующие значения для  $AS_{\tilde{A}}$  и  $d_{\tilde{A}}$  из формул (2.16) и (2.17).

**Пример.** Найдём эквивалентную форму записи для треугольного числа  $\tilde{A} = \langle 5; 3; 2 \rangle$  в виде тройки «мода — носитель — степень асимметрии».

Согласно формуле (2.16) длина носителя равна

$$d_{\tilde{A}} = a + b = 3 + 2 = 5$$

Степень асимметрии  $AS_{\tilde{A}}$  вычисляется по формуле (2.17)

$$AS_{\tilde{A}} = \frac{2 - 3}{2} = -0,5$$

Таким образом, число  $\tilde{A}$  представляется в виде тройки  $(5; 5; -0,5)$ .

### 2.2.2. Свойства преобразования $L$

**Свойство 2.1.** Преобразование  $L$  сохраняет моду нечёткого числа. Другими словами,  $\forall \lambda(\alpha) : m_{\tilde{A}} = m_{\tilde{A}^*}$ .

**Доказательство.** Перепишем свойство с учётом равенств:

$$x^L(\alpha) = x_A^L + \alpha(m_A - x_A^L);$$

$$x^R(\alpha) = x_A^R + \alpha(m_A - x_A^R).$$

При  $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}x^L(1) &= x_{\tilde{A}}^L + 1 (m_{\tilde{A}} - x_{\tilde{A}}^L) = m_{\tilde{A}}; \\x^R(1) &= x_{\tilde{A}}^R + 1 (m_{\tilde{A}} - x_{\tilde{A}}^R) = m_{\tilde{A}},\end{aligned}$$

поэтому при подстановке  $\alpha = 1$  в преобразование (2.13) получаем:

$$\bar{x}(1) = \lambda x^L(1) + (1 - \lambda) x^R(1) = \lambda m_{\tilde{A}} + (1 - \lambda) m_{\tilde{A}} = m_{\tilde{A}}. \quad (2.19)$$

Выражение (2.19) доказывает, что моды модифицированного и исходного чисел совпадают при любых значения параметров преобразования (2.13).

**Свойство 2.2.** При некоторых значениях параметра  $\lambda$  преобразование  $L$  сохраняет

1. знак степени асимметрии, т.е.  $\exists \lambda \in [0; 1] : \text{sign}(AS_{\tilde{A}}) = \text{sign}(AS_{\tilde{A}^*})$ ;
2. значение степени асимметрии, т.е.  $\exists \lambda \in [0; 1] : AS_{\tilde{A}} = AS_{\tilde{A}^*}$ .

**Доказательство.** Вначале докажем первое утверждение. Степень асимметрии исходного числа  $\tilde{A}$  определяется выражением (2.17). Модифицированное число имеет только один ненулевой коэффициент нечёткости, который равен  $|\bar{x}(1) - \bar{x}(0)|$ . Кроме того, согласно свойству 2.1, мода числа при преобразовании сохраняется. Поэтому абсолютная величина степени асимметрии равна

$$|AS_{\tilde{A}^*}| = \frac{|m - \bar{x}(0)|}{2}. \quad (2.20)$$

Поскольку

$$\bar{x}(0) = \lambda x^L(0) + (1 - \lambda) x^R(0) = m + b - \lambda(a + b), \quad (2.21)$$

то выражение (2.20) принимает вид

$$|AS_{\tilde{A}^*}| = \frac{|b - \lambda(a + b)|}{2}. \quad (2.22)$$



Если исходное нечёткое число симметричное, т.е.  $a = b$ , то степень его асимметрии равна нулю. В этом случае равенство степеней асимметрии достигается при  $\lambda = \frac{1}{2}$  -при подстановке данного значения в (2.22) имеем верное равенство:

$$|AS_{\tilde{A}^*}| = \frac{|b - \lambda(a + b)|}{2} = \frac{1}{2} \left| b - \frac{b + b}{2} \right| = \frac{1}{2} |b - b| = 0.$$

Если  $a > b$ , то  $AS_{\tilde{A}} < 0$ , и для выполнения первого пункта свойства необходимо, чтобы модифицированное число было числом  $LL$ -типа. Это достигается при

$$\bar{x}(0) < m. \quad (2.23)$$

Преобразовывая (2.23) с использованием (2.21), получаем, что  $b - \lambda(a + b) < 0$ , и в результате

$$\lambda \in \left( \frac{b}{a + b}; 1 \right].$$

При  $a < b$   $AS_{\tilde{A}} > 0$ , и модифицированное число должно быть числом  $RR$ -типа, т.е.

$$\bar{x}(0) > m. \quad (2.24)$$

По аналогии, подставляя в (2.24) значение  $\bar{x}(0)$  из (2.21), получаем, что  $b - \lambda(a + b) > 0$ , и

$$\lambda \in \left[ 0; \frac{b}{a + b} \right).$$

Таким образом, знак степени асимметрии сохраняется при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} \lambda \in \left[ 0; \frac{b}{a + b} \right); & a < b \\ \lambda = 0,5; & a = b \\ \lambda \in \left( \frac{b}{a + b}; 1 \right]; & a > b \end{cases}$$

Докажем теперь второе утверждение. Для этого покажем, что уравнение

$$AS_{\tilde{A}} = AS_{\tilde{A}^*} \quad (2.25)$$

имеет решения при  $\lambda \in [0; 1]$ . Пусть, для определённости, у исходного числа  $a > b$ , тогда  $AS_{\tilde{A}} < 0$ , и поэтому должно быть справедливо неравенство  $AS_{\tilde{A}^*} < 0$ . Пользуясь выражением (2.20), получаем

$$AS_{\tilde{A}^*} = \frac{\bar{x}(0) - m}{2} = \frac{b - \lambda(a + b)}{2} < 0 \quad (2.26)$$

Подставляя (2.17) и (2.26) в (2.25), приходим к уравнению

$$\frac{b - a}{2} = \frac{b - \lambda(a + b)}{2}. \quad (2.27)$$

Его решением является значение  $\lambda = \frac{a}{a + b} = \frac{a}{d}$ .

Если же  $a < b$ , то  $AS_{\tilde{A}} > 0$ , и выражение (2.26) должно быть положительным. В итоге имеем то же самое уравнение (2.27).

Таким образом, при  $\lambda = \frac{a}{a + b}$  значение степени асимметрии числа сохраняется.

**Свойство 2.3.** Модифицированное число всегда содержится внутри исходного числа. Другими словами,

$$\forall \lambda \in [0; 1] : A_{\alpha}^* \subset A_{\alpha}; \quad d_{\tilde{A}} \geq d_{\tilde{A}^*},$$

т. е. преобразование  $L$  уменьшает длину носителя нечёткого числа и оставляет  $\alpha$ -интервалы модифицированного числа в рамках  $\alpha$ -интервалов исходного числа.

**Доказательство.** Вначале докажем, что  $\forall \lambda \in [0; 1] \quad d_{\tilde{A}} \geq d_{\tilde{A}^*}$ . Решим данное неравенство и покажем, что отрезок  $[0; 1]$  содержится внутри решения. Очевидно, что

$$d_{\tilde{A}^*} = |\bar{x}(1) - \bar{x}(0)| = |m_{\tilde{A}} - (m_{\tilde{A}} - b + \lambda(a + b))| = |b - \lambda(a + b)|,$$

и поэтому

$$|b - \lambda(a + b)| \leq a + b.$$

Раскрывая модуль, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} b - \lambda(a + b) \geq -a - b; \\ b - \lambda(a + b) \leq a + b, \end{cases}$$

Её решением является отрезок  $\left[-\frac{a}{a+b}; 1 + \frac{b}{a+b}\right]$ . Ввиду того, что  $a, b \geq 0$ , этот отрезок содержит в себе интервал  $[0; 1]$ .

Теперь покажем, что  $\forall \lambda \in [0; 1] : A_{\alpha}^* \subset A_{\alpha}$ . Очевидно, что  $\alpha$ -интервал модифицированного числа будет ограничен с одной стороны значением моды  $m_{\tilde{A}}$ , а с другой — значением  $\bar{x}(\alpha)$ . В силу определения нечёткого числа

$$\forall \alpha \in [0; 1] \quad x_{\tilde{A}}^L(\alpha) \leq m_{\tilde{A}} \leq x_{\tilde{A}}^R(\alpha). \quad (2.28)$$

Кроме того, из определения (2.13) преобразования L следует, что

$$\forall \alpha \in [0; 1] \quad x_{\tilde{A}}^L(\alpha) \leq \bar{x}(\alpha) \leq x_{\tilde{A}}^R(\alpha). \quad (2.29)$$

Исходя из (2.28) и (2.29),  $\left[x_{\tilde{A}}^L(\alpha); x_{\tilde{A}}^R(\alpha)\right] \supset \left[x_{\tilde{A}}^M; \bar{x}(\alpha)\right]$  для LL-числа (соответственно,  $\left[x_{\tilde{A}}^L(\alpha); x_{\tilde{A}}^R(\alpha)\right] \supset \left[\bar{x}(\alpha); x_{\tilde{A}}^M\right]$  для RR-числа).

Проиллюстрируем доказанные выше свойства примером. Пусть  $\tilde{A} = \langle 4; 5; 1 \rangle$ . Степень его асимметрии равна

$$AS_{\tilde{A}} = \frac{1 - 5}{2} = -2,$$

а длина носителя  $d_{\tilde{A}}$

$$d_{\tilde{A}} = 5 + 1 = 6.$$

Уравнения для левой и правой ветвей функции принадлежности принимают вид

$$\begin{cases} x^L(\alpha) = -1 + 5\alpha; \\ x^R(\alpha) = 5 - \alpha. \end{cases} \quad (2.30)$$

Выполним преобразование  $L$  с параметром  $\lambda = \frac{1}{4}$  с учётом (2.30):

$$\bar{x}(\alpha) = \frac{1}{4}(5\alpha - 1) + \frac{3}{4}(5 - \alpha) = \frac{1}{4}(5\alpha - 1 + 15 - 3\alpha) = \frac{1}{4}(14 + 2\alpha) = 3,5 + 0,5\alpha. \quad (2.31)$$

Поскольку коэффициент при  $\alpha$  в выражении (2.31) больше нуля, то число  $\tilde{A}^*$  является числом LL-типа. Мода числа  $\tilde{A}^*$ , согласно свойству 2.1, равна 4, а левый коэффициент нечёткости равен длине носителя и равен

$$a = d_{\tilde{A}^*} = |\bar{x}(1) - \bar{x}(0)| = |4 - (3,5 - 0,5 \cdot 0)| = 0,5.$$

Таким образом, число  $\tilde{A}^*$  может быть записано в виде тройки  $\langle 4; 0,5; 0 \rangle$ . Степень его асимметрии, согласно свойству 2.2, сохраняет знак относительно  $AS_{\tilde{A}}$  и равна

$$AS_{\tilde{A}^*} = \frac{0 - 0,5}{2} = -0,25.$$

Исходное и модифицированное числа изображены на рис. 2.3. На нём наглядно иллюстрируется свойство 2.3 — модифицированное число  $\tilde{A}^*$  целиком расположено внутри границ исходного числа.

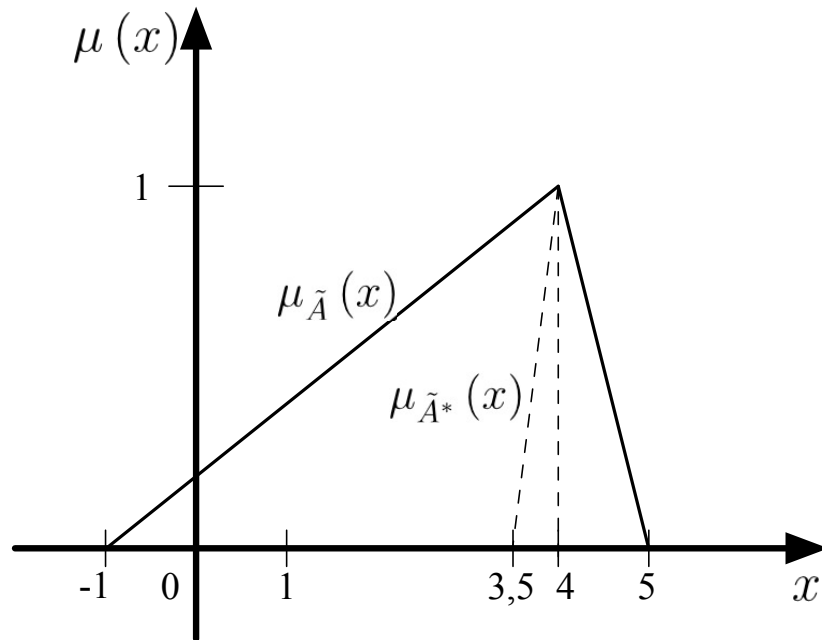


Рисунок 2.3. Иллюстрация свойств преобразования  $L$

Из доказанных выше свойств следует, что применение преобразования  $L$  к нечетким исходным данным в основном сохраняет их информативность при целенаправленном выборе параметра преобразования [69]. Уменьшение длины носителя при определенных оговорках можно рассматривать как положительное явление, поскольку при этом повышается общая устойчивость решения [70].

Рассмотрим следствия из доказанных ранее свойств преобразования  $L$  и рекомендации по выбору параметра  $\lambda$ .

**Следствие 2.1.** *Модифицированное нечёткое число, получаемое с помощью преобразования  $L$  с  $\lambda = 0,5$  из симметричного нечёткого числа  $\langle m; a; a \rangle$ , является нечётким синглтоном.*

Действительно, при указанном значении  $\lambda$ , используя выражения, получаем:

$$\bar{x}(\alpha) = \frac{1}{2}(m - a + a\alpha) + \frac{1}{2}(m + b - b\alpha) = \frac{1}{2}(m - a + a\alpha + m + a - a\alpha) = m.$$

Это следствие накладывает ограничения на возможность использования симметричных нечётких чисел в задачах, поскольку все нечёткие вычисления с использованием преобразования  $L$  в этом случае будут сведены к обычным алгебраическим операциям над модами чисел [68, 69].

**Следствие 2.2.** *Применение преобразования  $L$  с параметром  $\lambda = \frac{a}{a+b}$  к числу LL/RR-типа не изменяет данного числа.*

В самом деле, для LL-числа  $b = 0$ , поэтому  $x_A^R(\alpha) = m + b - b\alpha = m$ ,  $\lambda = \frac{a}{a+0} = 1$ . Отсюда

$$\bar{x}(\alpha) = \lambda(m - a + a\alpha) + (1 - \lambda)m = m - a + a\alpha = x_A^L(\alpha).$$

Для RR-числа  $a = 0$ , отсюда  $x_A^L(\alpha) = m - a + a\alpha = m$  и  $\lambda = \frac{0}{b+0} = 0$ . Ввиду этого

$$\bar{x}(\alpha) = \lambda m + (1 - \lambda)(m + b - b\alpha) = m + b - b\alpha = x_A^R(\alpha).$$

Отдельно выделим несколько наиболее интересных значений  $\lambda$ .

1.  $\lambda = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{d_{\tilde{A}}}$ . Как уже было показано выше, при данном значении сохраняется значение степени асимметрии [69].

Проиллюстрируем это на следующем примере. Пусть  $\tilde{A} = \langle 1; 4; 6 \rangle$ . Значение  $\lambda = \frac{4}{4+6} = \frac{2}{5}$ , степень асимметрии  $AS_{\tilde{A}} = \frac{6-4}{2} = 1$ , а уравнения правой и левой ветвей

$$\begin{cases} x^L(\alpha) = -3 + 4\alpha; \\ x^R(\alpha) = 7 - 6\alpha. \end{cases}$$

Преобразование L даёт следующий результат:

$$\bar{x}(\alpha) = \frac{2}{5}(-3 + 4\alpha) + \frac{3}{5}(7 - 6\alpha) = \frac{1}{5}(-6 + 8\alpha + 21 - 18\alpha) = 3 - 2\alpha.$$

Полученное в результате преобразования число  $\tilde{A}^*$  является числом RR-типа, поэтому степень его асимметрии положительна и, согласно (2.20), равна

$$AS_{\tilde{A}^*} = \frac{|1 - (3 - 2 \cdot 0)|}{2} = 1.$$

2.  $\lambda = \frac{b}{a+b} = \frac{b}{d_{\tilde{A}}}$ . Преобразование L с таким значение параметра уничтожает нечёткую информацию, заложенную экспертом в число [70], поскольку в этом случае модифицированное число превращается в чёткое:

$$\begin{aligned} \bar{x}(\alpha) &= \frac{b}{a+b}(m - a + a\alpha) + \left(1 - \frac{b}{a+b}\right)(m + b - b\alpha) = \\ &= \frac{b(m - a + a\alpha) + a(m + b - b\alpha)}{a+b} = \\ &= \frac{bm - ab + ab\alpha + am + ab - ab\alpha}{a+b} = \frac{am + bm}{a+b} = m. \end{aligned}$$

3. При  $\lambda = \frac{b}{d_{\tilde{A}}} - \frac{b-a}{3(b+a)} = \frac{2b+a}{3(b+a)} = \frac{2b+a}{3d_{\tilde{A}}}$  значение  $\bar{x}(\alpha)$  является проекцией центра тяжести треугольника, построенного на отрезке  $[x^L(\alpha), x^R(\alpha)]$  как на основании, на ось  $Ox$  (см. рис. 2.4).

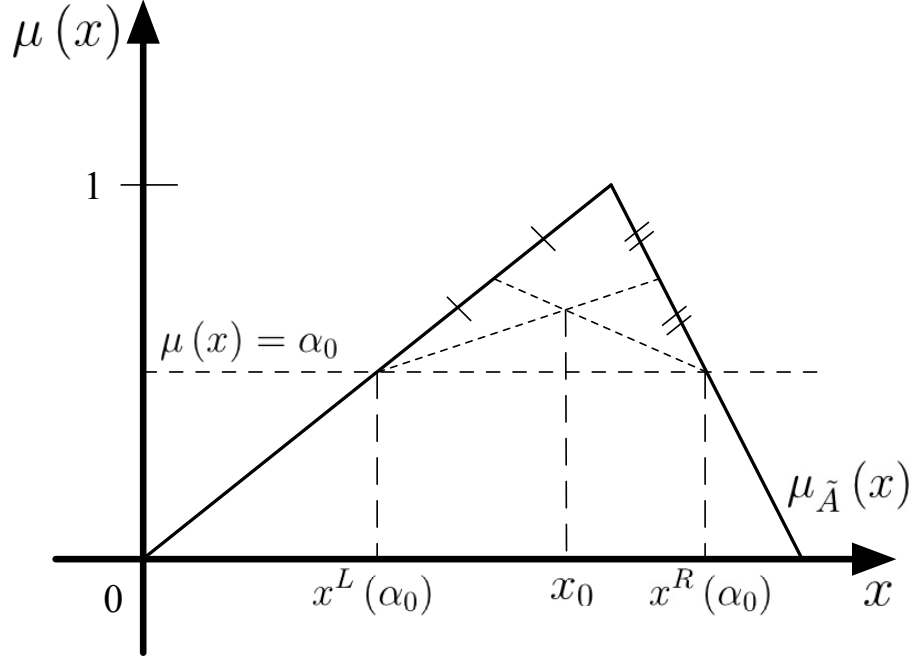


Рисунок 2.4. Поиск проекции центра тяжести  $\alpha$ -сечения

Данное значение получается следующим образом. Координата  $x_0(\alpha)$  центра тяжести  $\alpha$ -сечения треугольного числа рассчитывается как

$$x_0(\alpha) = \frac{x^L(\alpha) + m + x^R(\alpha)}{3}. \quad (2.32)$$

Значения  $x^L(\alpha)$  и  $x^R(\alpha)$  равны

$$\begin{cases} x^L(\alpha) = m - a + a\alpha; \\ x^R(\alpha) = m + b - b\alpha. \end{cases} \quad (2.33)$$

Из (2.32) и (2.33) следует, что

$$\begin{aligned} x_0(\alpha) &= \frac{x^L(\alpha) + m + x^R(\alpha)}{3} = \frac{m - a + a\alpha + m + m + b - b\alpha}{3} = \\ &= \frac{3m - (a - b) + \alpha(a - b)}{3} = m + \frac{(a - b)(\alpha - 1)}{3}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Преобразование  $L$  вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}\bar{x}(\alpha) &= \lambda x^L(\alpha) + (1 - \lambda) x^R(\alpha) = \lambda(m - a + a\alpha) + (1 - \lambda)(m + b - b\alpha) = \\ &= \lambda(m - a + a\alpha - m - b + b\alpha) + b(1 - \alpha) + m = \\ &= \lambda(a + b)(\alpha - 1) + b(1 - \alpha) + m.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Приравнивая результаты (2.34) и (2.35), получаем:

$$\begin{aligned}m + \frac{(a - b)(\alpha - 1)}{3} &= m + b(1 - \alpha) + \lambda(a + b)(\alpha - 1); \\ (a - b)(\alpha - 1) &= -3b(\alpha - 1) + 3\lambda(a + b)(\alpha - 1).\end{aligned}$$

При  $\alpha = 1$  равенство выполняется для всех  $\lambda \in [0; 1]$ . Для остальных  $\alpha$ , поделим обе части равенства на  $\alpha - 1$ :

$$a - b = -3b + 3\lambda(a + b),$$

откуда получается искомое значение  $\lambda$  [69].

## 2.3. Построение алгебры нечетких чисел, удовлетворяющей требованиям к решению задач

### 2.3.1. Алгебра модифицированных нечетких чисел

Для того, чтобы использовать модифицированные нечёткие числа в качестве параметров задач с чёткими отношениями, необходимо построить алгебраическую систему для множества всех нечётких модифицированных чисел  $K$ .

Будем строить чёткую алгебру  $P = \langle K; +, * \rangle$  на множестве модифицированных нечётких чисел  $K = \{\bar{x}(\alpha)\}; \alpha \in [0; 1]$  по аналогии с тем, как это



делается в [131]. Для удобства дальнейших вычислений преобразуем  $\bar{x}(\alpha)$ :

$$\begin{aligned}\bar{x}(\alpha) &= \lambda(m - a + a\alpha) + (1 - \lambda)(m + b - b\alpha) = a\alpha\lambda + \lambda(m - a) + m + b - \\ &- b\alpha - \lambda(m + b) + b\alpha\lambda = \alpha(\lambda a + \lambda b - b) + m + b - \lambda(m + b - m + a) = \\ &= a(\lambda(a + b) - b) + m + b - \lambda(a + b).\end{aligned}$$

При построении алгебры будем использовать форму записи

$$\bar{x}(\alpha) = c + k\alpha, \quad (2.36)$$

где

$$\begin{cases} c = m + b - \lambda(a + b) \\ k = \lambda(a + b) - b \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\lambda \in [0; 1]; \quad c, k \in \mathbb{R}$$

#### Операция сложения и её свойства

Введем на множестве  $K$  бинарную операцию сложения  $+$  следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1(\alpha) + \bar{x}_2(\alpha) &= r_1(\alpha) = c_1 + c_2 + (k_1 + k_2)\alpha, \\ r_1(\alpha) &\in K.\end{aligned}$$

Докажем основные свойства операции сложения.

**Коммутативность:**

$$\bar{x}_1(\alpha) + \bar{x}_2(\alpha) = c_1 + c_2 + (k_1 + k_2)\alpha = c_2 + c_1 + (k_2 + k_1)\alpha = \bar{x}_2(\alpha) + \bar{x}_1(\alpha).$$

**Ассоциативность:**

$$\begin{aligned}\bar{x}_1(\alpha) + (\bar{x}_2(\alpha) + \bar{x}_3(\alpha)) &= c_1 + k_1\alpha + c_2 + c_3 + (k_2 + k_3)\alpha = \\ &= (c_1 + c_2 + (k_1 + k_2)\alpha) + c_3 + k_3\alpha = (\bar{x}_1(\alpha) + \bar{x}_2(\alpha)) + \bar{x}_3(\alpha).\end{aligned}$$

## Нулевой и обратный элементы

Введём нейтральный (нулевой) элемент

$$\bar{0} = 0 + 0\alpha \in K \quad (2.38)$$

такой, что

$$\forall \bar{x}(\alpha) \in K : \bar{x}(\alpha) + \bar{0} = c + k\alpha + 0 + 0\alpha = \bar{x}(\alpha) \quad (2.39)$$

Также определим для каждого  $\bar{x}(\alpha) = c + k\alpha \in K$  единственный элемент  $-\bar{x}(\alpha) \in K$ , называемый противоположным, такой, что выполняется равенство

$$\bar{x}(\alpha) + (-\bar{x}(\alpha)) = \bar{0} \quad (2.40)$$

Очевидно, что противоположный элемент можно определить следующим образом:

$$-\bar{x}(\alpha) = -c - k\alpha$$

так что равенство (2.40) будет справедливым:

$$\bar{x}(\alpha) + (-\bar{x}(\alpha)) = c + k\alpha - c - k\alpha = 0 + 0\alpha = \bar{0}.$$

Операция вычитания нечётких чисел вводится как сложение числа  $\bar{x}_1(\alpha)$  с числом, противоположным числу  $\bar{x}_2(\alpha)$ :

$$\bar{x}_1(\alpha) - \bar{x}_2(\alpha) = \bar{x}_1(\alpha) + (-\bar{x}_2(\alpha)) = c_1 - c_2 + (k_1 - k_2)\alpha$$

**Пример.** Даны два нечётких числа  $\tilde{A} = \langle 3; 4; 1 \rangle$  и  $\tilde{B} = \langle 5; 2; 3 \rangle$ . Выполнить операции  $\tilde{A}^* + \tilde{B}^*$ ,  $\tilde{A}^* - \tilde{B}^*$ .

Вначале запишем уравнения для левой и правой ветвей каждого из чисел и оптимальные в смысле сохранения нечёткой информации значения  $\lambda$ :

$$\left[ \begin{array}{l} x_{\tilde{A}}^L(\alpha) = -1 + 4\alpha; \\ x_{\tilde{A}}^R(\alpha) = 4 - \alpha; \\ \lambda_{\tilde{A}} = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}; \end{array} \right. \quad \left[ \begin{array}{l} x_{\tilde{B}}^L(\alpha) = 3 + 2\alpha; \\ x_{\tilde{B}}^R(\alpha) = 8 - 3\alpha; \\ \lambda_{\tilde{B}} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}. \end{array} \right.$$

Найдём модифицированные значения:

$$\begin{cases} \bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = \frac{4}{5}(-1 + 4\alpha) + \frac{1}{5}(4 - \alpha) = \frac{-4 + 16\alpha + 4 - \alpha}{5} = 3\alpha; \\ \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) = \frac{2}{5}(3 + 2\alpha) + \frac{3}{5}(8 - 3\alpha) = \frac{6 + 4\alpha + 24 - 9\alpha}{5} = 6 - \alpha. \end{cases} \quad (2.41)$$

Исходя из (2.41), значения искомых выражений равны:

$$\begin{cases} \tilde{A}^* + \tilde{B}^* = 3\alpha + 6 - \alpha = 6 + 2\alpha; \\ \tilde{A}^* - \tilde{B}^* = 3\alpha - 6 + \alpha = -6 + 4\alpha. \end{cases}$$

### Операция умножения и её свойства

Введём на множестве  $K$  операцию умножения. Её можно было бы определить с помощью следующего выражения как сумму произведений компонент модифицированных нечётких чисел

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(\alpha) \cdot \bar{x}_2(\alpha) &= r_2'(\alpha) = (c_1 + k_1\alpha)(c_2 + k_2\alpha) = \\ &= c_1c_2 + c_1k_2\alpha + c_2k_1\alpha + k_1k_2\alpha^2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Однако такое определение приводит к искажению треугольного вида результата нечётких операций, поскольку в (2.42) появляется слагаемое с  $\alpha^2$ . А это означает, что  $r_2'(\alpha) \notin K$ . Для того, чтобы результат операции умножения остался в множестве  $K$ , воспользуемся линейной интерполяцией — зависимость  $r_2(\alpha)$  будет восстанавливаться в виде линейной функции по значениям выражения (2.42) при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$ . В первом случае  $r_2'(0) = c_1c_2$ , во втором  $r_2'(1) = (c_1 + k_1)(c_2 + k_2)$ . Подставляя данные значения в уравнение прямой  $r_2(\alpha)$ , получаем:

$$\frac{\alpha - 0}{1 - 0} = \frac{r_2(\alpha) - c_1c_2}{(c_1 + k_1)(c_2 + k_2) - c_1c_2},$$

откуда, упрощая знаменатель второй дроби, получаем:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{r_2(\alpha) - c_1c_2}{c_1k_2 + c_2k_1 + k_1k_2}; \\ r_2(\alpha) &= c_1c_2 + (c_1k_2 + c_2k_1 + k_1k_2)\alpha \in K. \end{aligned}$$

Таким образом, операция умножения на  $K$  вводится следующим образом:

$$r_2(\alpha) = c_1c_2 + (c_1k_2 + c_2k_1 + k_1k_2)\alpha; \quad r_2(\alpha) \in K. \quad (2.43)$$

Умножение нечёткого числа на скаляр  $\beta \in \mathbb{R}$  является частным случаем операции (2.43), поскольку скаляр представляется в виде нечёткого синглтона

$$\bar{\beta} = \beta + 0\alpha \in K.$$

Докажем основные свойства операции умножения. Коммутативность доказывается элементарно:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(\alpha) \cdot \bar{x}_2(\alpha) &= c_1c_2 + (c_1k_2 + c_2k_1 + k_1k_2)\alpha = \\ &= c_2c_1 + (c_2k_1 + c_1k_2 + k_2k_1)\alpha = \bar{x}_2(\alpha) \cdot \bar{x}_1(\alpha). \end{aligned}$$

Для доказательства свойства ассоциативности

$$\bar{x}_1(\alpha) \cdot (\bar{x}_2(\alpha) \bar{x}_3(\alpha)) = (\bar{x}_1(\alpha) \bar{x}_2(\alpha)) \cdot \bar{x}_3(\alpha)$$

вычислим по отдельности и сравним результаты правой и левой частей:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(\alpha) \cdot (\bar{x}_2(\alpha) \bar{x}_3(\alpha)) &= (c_1 + k_1\alpha)((c_2 + k_2\alpha)(c_3 + k_3\alpha)) = \\ &= (c_1 + k_1\alpha)(c_2c_3 + (k_2c_3 + k_3c_2 + k_2k_3)\alpha) = \\ &= c_1c_2c_3 + (c_1k_2c_3 + c_1c_2k_3 + c_1k_2k_3 + k_1c_2c_3 + k_1k_2c_3 + k_1c_2k_3 + k_1k_2k_3)\alpha; \\ (\bar{x}_1(\alpha) \bar{x}_2(\alpha)) \cdot \bar{x}_3(\alpha) &= ((c_1 + k_1\alpha)(c_2 + k_2\alpha))(c_3 + k_3\alpha) = \\ &= (c_1c_2 + (k_1c_2 + c_1k_2 + k_1k_2)\alpha)(c_3 + k_3\alpha) = \\ &= c_1c_2c_3 + (k_1c_2c_3 + c_1k_2c_3 + k_1k_2c_3 + c_1c_2k_3 + k_1c_2k_3 + c_1k_2k_3 + k_1k_2k_3). \end{aligned}$$

Путём сравнения результатов умножения можно убедиться, что свойство ассоциативности верно.

Для доказательства дистрибутивности умножения относительно сложения, т. е. справедливости равенства

$$\bar{x}_1(\alpha) \cdot \bar{x}_2(\alpha) + \bar{x}_1(\alpha) \cdot \bar{x}_3(\alpha) = \bar{x}_1(\alpha) \cdot (\bar{x}_2(\alpha) + \bar{x}_3(\alpha)) \quad (2.44)$$

также выполним действия в левой и правой частях выражения (2.44) по отдельности, а затем сравним результаты:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1(\alpha) \bar{x}_2(\alpha) + \bar{x}_1(\alpha) \bar{x}_3(\alpha) &= (c_1 + k_1\alpha) \cdot (c_2 + k_2\alpha) + (c_1 + k_1\alpha) \cdot (c_3 + k_3\alpha) = \\
&= c_1c_2 + (c_1k_2 + c_2k_1 + k_1k_2)\alpha + c_1c_3 + (c_1k_3 + c_3k_1 + k_1k_3)\alpha; \\
\bar{x}_1(\alpha) (\bar{x}_2(\alpha) + \bar{x}_3(\alpha)) &= (c_1 + k_1\alpha) \cdot (c_2 + k_2\alpha + c_3 + k_3\alpha) = \\
&= (c_1 + k_1\alpha) \cdot (c_2 + c_3 + (k_2 + k_3)\alpha) = \\
&= c_1c_2 + c_1c_3 + (c_1k_2 + c_2k_1 + k_1k_2)\alpha + (c_1k_3 + c_3k_1 + k_1k_3)\alpha.
\end{aligned}$$

Сравнение результатов вычислений подтверждает верность равенства (2.44), т. е. дистрибутивность операции умножения относительно сложения.

Проиллюстрируем введенные операции примерами.

**Пример.** Даны нечёткие числа  $\tilde{A} = \langle 4; 1; 2 \rangle$ ,  $\tilde{B} = \langle 7; 3; 1 \rangle$  и  $\tilde{C} = \langle 1; 4; 2 \rangle$ . Выполнить операции  $2\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C}$ ,  $\tilde{C}(\tilde{A} - 3\tilde{B})$  с использованием модифицированных чисел.

Вначале найдём оптимальные в смысле сохранения нечёткой информации значения  $\lambda$ :

$$\left[ \begin{aligned} \lambda_{\tilde{A}} &= \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}; \\ \lambda_{\tilde{B}} &= \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}; \\ \lambda_{\tilde{C}} &= \frac{4}{4+2} = \frac{2}{3}. \end{aligned} \right.$$

Найдём модифицированные нечёткие числа для каждого из исходных чисел согласно формулам (2.36) и (2.37):

$$\left[ \begin{aligned} \bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) &= 4 + 2 - \frac{1}{3}(1 + 2) + \left( \frac{1}{3}(1 + 2) - 2 \right) \alpha = 5 - \alpha; \\ \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) &= 7 + 1 - \frac{3}{4}(3 + 1) + \left( \frac{3}{4}(3 + 1) - 1 \right) \alpha = 5 + 2\alpha; \\ \bar{x}_{\tilde{C}}(\alpha) &= 1 + 2 - \frac{2}{3}(4 + 2) + \left( \frac{2}{3}(4 + 2) - 2 \right) \alpha = -1 + 2\alpha. \end{aligned} \right.$$

Значение первого выражения в модифицированном виде равно

$$\begin{aligned} 2\tilde{A}^* + \tilde{B}^*\tilde{C}^* &= 2(5 - \alpha) + (5 + 2\alpha)(-1 + 2\alpha) = \\ &= 10 - 2\alpha + (-5 + (10 - 2 + 4)\alpha) = 5 + 10\alpha, \end{aligned}$$

а второго

$$\begin{aligned} \tilde{C}^*(\tilde{A}^* - 3\tilde{B}^*) &= (-1 + 2\alpha)(5 - \alpha - 3(5 + 2\alpha)) = (-1 + 2\alpha)(-10 - 7\alpha) = \\ &= 10 + (7 - 20 - 14)\alpha = 10 - 27\alpha. \end{aligned}$$

### Единичный и обратный элементы

Перейдём к рассмотрению нейтрального по умножению и обратного элементов. Введём единичный элемент

$$\bar{1} = 1 + 0\alpha \in K$$

такой, что

$$\forall \bar{x}(\alpha) \in K \quad \bar{x}(\alpha) \cdot \bar{1} = \bar{x}(\alpha).$$

Это равенство легко подтверждается с помощью формулы (2.43):

$$\bar{1} \cdot \bar{x}(\alpha) = (1 + 0\alpha)(c + k\alpha) = c + k\alpha = \bar{x}(\alpha).$$

Несколько сложнее вводится на множестве  $K$  обратный элемент  $\bar{x}^{-1}(\alpha) \in K$  такой, что

$$\bar{x}(\alpha) \bar{x}^{-1}(\alpha) = \bar{1}.$$

Поскольку предполагается, что  $\bar{x}^{-1}(\alpha) \in K$ , то будем искать обратный элемент в виде  $\bar{x}^{-1}(\alpha) = c' + k'\alpha$ . Имеем

$$\bar{x}(\alpha) \bar{x}^{-1}(\alpha) = (c + k\alpha)(c' + k'\alpha) = cc' + (ck' + c'k + kk')\alpha = 1 + 0\alpha. \quad (2.45)$$

Из (2.45) очевидно, что должны выполняться равенства

$$\begin{cases} cc' = 1; \\ ck' + c'k + kk' = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим  $c' = \frac{1}{c}$ ;  $c \neq 0$ . Подставляя найденное значение во второе уравнение, имеем:

$$ck' + \frac{k}{c} + kk' = 0,$$

откуда

$$k' = \frac{-k}{c(k+c)}.$$

Таким образом, обратный элемент вводится в виде

$$\bar{x}^{-1}(\alpha) = \frac{1}{c} - \frac{k}{c(c+k)}\alpha, \quad c \neq 0. \quad (2.46)$$

Очевидно, что для существования обратного элемента число  $\bar{x}(\alpha)$  должно иметь ненулевую моду, поскольку, согласно (2.37),  $c + k = m \neq 0$ .

Операция деления вводится как умножение числа  $\bar{x}_1(\alpha)$  на число, обратное числу  $\bar{x}_2(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}_1(\alpha)}{\bar{x}_2(\alpha)} &= \bar{x}_1(\alpha) \bar{x}_2^{-1}(\alpha) = (c_1 + k_1\alpha) \left( \frac{1}{c_2} - \frac{k_2}{c_2(k_2 + c_2)}\alpha \right) = \\ &= \frac{c_1}{c_2} + \left( -\frac{c_1 k_2}{c_2(k_2 + c_2)} + \frac{k_1}{c_2} - \frac{k_1 k_2}{c_2(k_2 + c_2)} \right) \alpha; \quad c_2 \neq 0; \quad k_2 + c_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, алгебра модифицированных нечётких чисел удовлетворяет всем аксиомам поля, а вводимые выше алгебраические операции над элементами множества  $K$  модифицированных нечётких чисел позволяют рассматривать его как линейное пространство над полем  $P$  [64].

### 2.3.2. Разработка численной реализации метода обработки нечёткой информации на основе предложенной алгебры

Рассмотренные выше примеры подтверждают, что введённая алгебра на множестве  $K$  может быть использована для решения нечётких задач. Однако для построения алгебраической системы, удовлетворяющей требованиям из п. 1.3, необходимо определить линейный порядок на множестве  $K$  и предложить эффективную численную реализацию алгебраических операций, которая

не требовала бы создания дополнительных программных модулей по работе с нечёткими вычислениями.

В [71] производится попытка введения метода сравнения элементов  $\tilde{A}^*, \tilde{B}^* \in K$  с помощью сравнения их разности  $\tilde{C}^* = \tilde{B}^* - \tilde{A}^*$  с нулём. Если носитель результата  $\tilde{C}^*$  целиком расположен левее или правее нуля, то результат сравнения однозначен:

$$\left[ \begin{array}{l} \min \bar{x}_{\tilde{C}^*}(\alpha) > 0 \Rightarrow \tilde{A}^* < \tilde{B}^*; \\ \max \bar{x}_{\tilde{C}^*}(\alpha) < 0 \Rightarrow \tilde{A}^* > \tilde{B}^*. \end{array} \right.$$

В противном случае, число  $\tilde{C}^*$  несравнимо с нулём, поскольку делится осью ординат на две части. Для решения этой проблемы применяется искусственный приём: площадь части числа, лежащей левее оси ординат, обозначается за  $S_1$ , а площадь части, лежащей правее — за  $S_2$ , при этом принимается, что

$$\left[ \begin{array}{l} S_2 - S_1 < 0 \Rightarrow \tilde{A}^* > \tilde{B}^*; \\ S_2 - S_1 > 0 \Rightarrow \tilde{A}^* < \tilde{B}^*; \\ S_2 - S_1 = 0 \Rightarrow \tilde{A}^* = \tilde{B}^*. \end{array} \right.$$

В данном методе, как и в других, описанных в [71], возникает проблема несравнимых чисел, поэтому он не полностью удовлетворяет введённым требованиям. При этом проблема сравнения нечётких величин не возникает, например, в методике решения нечётких задач, описанной в [99], поскольку вычисления ведутся на  $\alpha$ -уровнях с использованием чётких значений, и сравнения происходят в рамках множества действительных чисел. Попробуем применить аналогичный подход для элементов множества  $K$  и при этом ввести более удобную с вычислительной точки зрения методику выполнения операций. Для этого заметим, что все элементы множества  $K$  имеют линейную структуру, и для восстановления конкретного модифицированного числа  $\tilde{A}$  достаточно знать два значения —  $\bar{x}_{\tilde{A}}(0)$  и  $\bar{x}_{\tilde{A}}(1) = m_{\tilde{A}}$  (отметим, что данный



факт уже использовался ранее для того, чтобы ввести операцию умножения). Их подстановка в уравнение прямой позволяет получить зависимость  $\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha)$  или  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  в явном виде:

$$\frac{\alpha - 0}{1 - 0} = \frac{\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) - \bar{x}_{\tilde{A}}(0)}{\bar{x}_{\tilde{A}}(1) - \bar{x}_{\tilde{A}}(0)},$$

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = \bar{x}_{\tilde{A}}(0) + \alpha(\bar{x}_{\tilde{A}}(1) - \bar{x}_{\tilde{A}}(0)) = \alpha\bar{x}_{\tilde{A}}(1) + (1 - \alpha)\bar{x}_{\tilde{A}}(0). \quad (2.47)$$

Это означает, что все вычисления с использованием модифицированных нечётких чисел можно вести только на двух  $\alpha$ -уровнях без использования дополнительных параметров, при этом оперируя действительными значениями нечёткой величины. Если обозначить за  $*$  произвольную арифметическую операцию, то для чисел в форме (2.47) её результат будет выглядеть следующим образом:

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) * \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) = \alpha(\bar{x}_{\tilde{A}}(1) * \bar{x}_{\tilde{B}}(1)) + (1 - \alpha)(\bar{x}_{\tilde{A}}(0) * \bar{x}_{\tilde{B}}(0)). \quad (2.48)$$

Способ выполнения операций над модифицированными нечёткими числами, описываемый формулой (2.48), будем называть двухточечными вычислениями.

По сути, вводится другая алгебра на множестве  $K$ , оперирующая парой чётких значений и автоморфная введённой ранее алгебре модифицированных нечётких чисел. В самом деле, существует взаимно однозначная функция  $f : K \rightarrow K$ , которая позволяет сопоставить числу вида  $c + k\alpha$  число вида  $\alpha\bar{x}_{\tilde{A}}(1) + (1 - \alpha)\bar{x}_{\tilde{A}}(0)$ . Воспользовавшись (2.36), (2.47) и приравняв свободные члены и коэффициенты при  $\alpha$ , получим следующее соответствие

$$\begin{cases} c = \bar{x}_{\tilde{A}}(0); \\ k = \bar{x}_{\tilde{A}}(1) - \bar{x}_{\tilde{A}}(0); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}_{\tilde{A}}(0) = c; \\ \bar{x}_{\tilde{A}}(1) = c + k. \end{cases}$$

Стоит отметить, что преобразование  $L$  и предложенная методика двухточечных вычислений с использованием модифицированных нечётких чисел не

только автоматически снимают проблему сравнения нечётких чисел, поскольку все сравнения при решении задач происходят с участием действительных значений нечёткого числа на выбранных  $\alpha$ -уровнях, но и позволяют использовать стандартные программные продукты для решения нечетких задач, т. к. нечеткая задача решается как две чётких, и не требуется специального ПО или модулей расширения, включающих возможность вести нечёткие вычисления.

**Пример.** Даны нечёткие числа  $\tilde{A} = \langle 4; 2; 3 \rangle$ ,  $\tilde{B} = \langle -2; 6; 2 \rangle$  и  $\tilde{C} = \langle 1; 1; 4 \rangle$ . Вычислить значение  $\tilde{D} = \frac{3\tilde{A}\tilde{C} + 4\tilde{B}}{\tilde{C}(\tilde{A} - 2\tilde{B})}$  с использованием модифицированных чисел.

Воспользуемся двухточечной методикой вычислений. Оптимальные в смысле сохранения нечёткой информации значения  $\lambda$  равны:

$$\begin{cases} \lambda_{\tilde{A}} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}; \\ \lambda_{\tilde{B}} = \frac{6}{6+2} = \frac{3}{4}; \\ \lambda_{\tilde{C}} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}. \end{cases} \quad (2.49)$$

Используя формулы (2.37) с учётом (2.49), получим коэффициенты для модифицированных нечётких чисел:

$$\begin{aligned} c_{\tilde{A}} &= 4 + 3 - \frac{2}{5}(2 + 3) = 5; & k_{\tilde{A}} &= \frac{2}{5}(2 + 3) - 3 = -1; \\ c_{\tilde{B}} &= -2 + 2 - \frac{3}{4}(6 + 2) = -6; & k_{\tilde{B}} &= \frac{3}{4}(6 + 2) - 2 = 4; \\ c_{\tilde{C}} &= 1 + 4 - \frac{1}{5}(1 + 4) = 4; & k_{\tilde{C}} &= \frac{1}{5}(1 + 4) - 4 = -3. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = 5 - \alpha; \\ \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) = -6 + 4\alpha; \\ \bar{x}_{\tilde{C}}(\alpha) = 4 - 3\alpha. \end{cases} \quad (2.50)$$

При  $\alpha = 1$  выражения (2.50) принимают следующие значения

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(1) = 4; \quad \bar{x}_{\tilde{B}}(1) = -2; \quad \bar{x}_{\tilde{C}}(1) = 1,$$

а при  $\alpha = 0$

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(1) = 5; \bar{x}_{\tilde{B}}(1) = -6; \bar{x}_{\tilde{C}}(1) = 4.$$

Подставляя в выражение  $\tilde{D} = \frac{3\tilde{A}\tilde{C} + 4\tilde{B}}{\tilde{C}(\tilde{A} - 2\tilde{B})}$  вместо  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  и  $\tilde{C}$  соответствующие им чёткие значения модифицированных чисел при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$ , получаем:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\tilde{D}}(1) &= \left. \frac{3\tilde{A}^*\tilde{C}^* + 4\tilde{B}^*}{\tilde{C}^*(\tilde{A}^* - 2\tilde{B}^*)} \right|_{\alpha=1} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 1 + 4 \cdot (-2)}{1 \cdot (4 - 2 \cdot (-2))} = \frac{12 - 8}{4 + 4} = \frac{1}{2}, \\ \bar{x}_{\tilde{D}}(0) &= \left. \frac{3\tilde{A}^*\tilde{C}^* + 4\tilde{B}^*}{\tilde{C}^*(\tilde{A}^* - 2\tilde{B}^*)} \right|_{\alpha=0} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4 + 4 \cdot (-6)}{4 \cdot (5 - 2 \cdot (-6))} = \frac{60 - 24}{4 \cdot 17} = \frac{9}{17}. \end{aligned}$$

Согласно формуле (2.47), модифицированный результат будет равен

$$\bar{x}_{\tilde{D}}(\alpha) = \frac{9}{17} + \alpha \left( \frac{1}{2} - \frac{9}{17} \right) = \frac{9}{17} - \frac{1}{34}\alpha.$$

Рассмотрим более сложный пример.

**Пример.** Решить уравнение  $\tilde{A}x = \tilde{B}$ , в котором  $\tilde{A} = \langle 3; 1; 2 \rangle$ ,  $\tilde{B} = \langle 4; 4; 1 \rangle$ .

В терминах модифицированных нечётких чисел решение уравнения будет иметь вид

$$x(\alpha) = \frac{\bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha)}{\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha)}. \quad (2.51)$$

Поскольку операция деления для преобразованных нечётких чисел вводится как умножение на обратное число, перепишем (2.51) в виде

$$x(\alpha) = \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) \cdot \bar{x}_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha). \quad (2.52)$$

Выберем значения  $\lambda_{\tilde{A}}$  и  $\lambda_{\tilde{B}}$ , равные  $\frac{a_{\tilde{A}}}{d_{\tilde{A}}}$  и  $\frac{a_{\tilde{B}}}{d_{\tilde{B}}}$ , в соответствие с критерием сохранения максимального количества нечёткой информации. Они равны

$$\lambda_{\tilde{A}} = \frac{1}{3}; \lambda_{\tilde{B}} = \frac{4}{5}. \quad (2.53)$$

Воспользовавшись формулами (2.36), (2.37) и (2.53), получаем

$$\begin{cases} \bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = 4 - \alpha; \\ \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) = 3\alpha + 1. \end{cases} \quad (2.54)$$

Найдём обратный элемент  $\bar{x}_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha)$  согласно формуле (2.46):

$$\bar{x}_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha) = \frac{1}{4} - \frac{1}{(-1) \cdot (4 - 1)}\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\alpha. \quad (2.55)$$

Пользуясь значениями из (2.54), (2.55) и подставляя их в (2.52), окончательно получаем:

$$x(\alpha) = (1 + 3\alpha) \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\alpha \right) = \frac{1}{4} + \frac{13}{12}\alpha. \quad (2.56)$$

Функция принадлежности модифицированного решения определяется как обратная к (2.56) —  $\mu_{x(\alpha)}(x) = \frac{12}{13}x - \frac{3}{13}$ . Подстановка решения задачи в исходное уравнение  $\tilde{A}x = \tilde{B}$  с учётом формулы (2.43) приводит к верному равенству:

$$\begin{aligned} (4 - \alpha) \left( \frac{1}{4} + \frac{13}{12}\alpha \right) &= 3\alpha + 1; \\ \frac{52 - 13 - 3}{12}\alpha + 1 &= 3\alpha + 1. \end{aligned}$$

### 2.3.3. Алгебра двухкомпонентных нечётких чисел

Описанные выше модель представления нечётких чисел и методика нечётких вычислений применимы в случаях использования треугольных асимметричных нечётких чисел, когда допустимы некоторые потери экспертной информации ради создания подходящей алгебры над множеством нечётких чисел. Однако существуют ситуации, когда в задаче моделирования с чёткими отношениями и нечёткими параметрами потери экспертной информации недопустимы [20]. В этом случае может применяться альтернативный подход к определению операций над нечёткими числами, описанный в [76]. Её ключевое отличие в том, что не используется преобразование для  $\alpha$ -интервалов,

а операции над числами выполняются как операции над левой и правой ветвями функции принадлежности.

Для удобства дальнейших вычислений, нечёткое треугольное число записывается в форме

$$\hat{X} = (x^L(\alpha); x^R(\alpha)), \quad (2.57)$$

где  $x^L(\alpha)$ ,  $x^R(\alpha)$  — функции, описываемые выражением (1.26). Такое представление позволяет рассматривать вычислительные операции над нечеткими LR-числами как операции над их компонентами — функциями  $x^L(\alpha)$  и  $x^R(\alpha)$ , а также исследовать алгебраическую структуру множества таких функций, подобно тому, как это делается в [23]. Символ « $\hat{\phantom{x}}$ » используется над обозначением числа для того, чтобы отличать двухкомпонентное представление нечёткого числа от классических вариантов.

Если преобразовать выражения для функций (1.26) и обозначить  $c_1 = m - a$ ,  $c_2 = m + b$ ,  $k_1 = a$ ,  $k_2 = b$ , где параметры  $c_1$  и  $c_2$  определяют границы носителя числа, то получится следующее эквивалентное представление двухкомпонентного нечёткого числа:

$$\hat{X} = (c_1 + k_1\alpha; c_2 - k_2\alpha) = (l(\alpha), r(\alpha)), c_1 + k_1\alpha, c_2 + k_2\alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.58)$$

причём при  $\alpha = 1$  верно равенство  $c_1 + k_1 = c_2 - k_2 = m$ .

**Определение 2.3.** *Нечёткое число, задаваемое выражением (2.58), называется двухкомпонентным нечётким числом.*

Как уже было отмечено, операции над двухкомпонентными числами вводятся как операции над левой и правой компонентами числа в представлении (2.58). В [76] отмечается, что эти компоненты можно рассматривать как два числа LL и RR-типа с функциями, обратными функциям принадлежности, вида  $x(\alpha) = c + k\alpha \in K$ . Выше уже была введена алгебра

типа поле для модифицированных чисел, которые структурно являются числами LL/RR-типа, поэтому рассмотрим подробнее взаимодействие между обеими компонентами при выполнении операций над нечёткими числами. Если обозначить за  $*$  одну из четырёх арифметических операций, то схема взаимодействия между компонентами выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & (l_1(\alpha), r_1(\alpha)) * (l_2(\alpha), r_2(\alpha)) = \\ & = (l_1(\alpha) * l_2(\alpha), r_1(\alpha) * r_2(\alpha)) = (x_1(\alpha), x_2(\alpha)), \end{aligned} \quad (2.59)$$

где для результата справедливы следующие варианты:  $(x_1, x_2) \in \{(l, r), (r, l), (l, l), (r, r)\}$ , а тип функции ( $l$  или  $r$ ) определяется знаком параметра  $k$  в (2.58).

При выполнении операций над двухкомпонентными нечёткими числами согласно схеме (2.59), справедливы следующие допущения [76], которые позволяют избавить операции от жёсткой привязки к понятиям границ числа и левого и правого коэффициентов нечёткости:

- представление (2.58) двухкомпонентного числа в первую очередь рассматривается как отображение экспертных оценок о степени пессимизма и оптимизма относительно достижения величины  $m$ . В этом случае нечеткие числа типа  $(l, r)$  и  $(r, l)$  будут интерпретироваться как описания степени оптимизма/пессимизма относительно достижения  $m$ , а числа типа  $(l, l)$  и  $(r, r)$  могут определяться как не совпадающее на численном уровне двойное суждение о степени оптимизма/пессимизма;
- в процессе обработки нечёткой информации допускается компенсация противоположных по смыслу оценок, что не противоречит здравому смыслу во многих задачах и позволяет сохранять тождественность чётких отношений, но не согласуется с постулатом теории вероятностей о возрастании дисперсии результата действий со случайными числами.

При невыполнении допущений, результат  $(l, r)$  однозначно выбирался бы из прямого произведения  $(l_1, r_1) \times (l_2, r_2) = (l_1 l_2, l_1 r_2, r_1 l_2, r_1 r_2)$  в зависимости от знаков коэффициентов функций  $l$  и  $r$ , что полностью соответствует интервальным алгебрам нечётких чисел со всеми их недостатками, описанными в п. 2.1.

Рассмотрим два примера, иллюстрирующие вышеописанные утверждения.

**Пример.** Решить уравнение  $\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{B} = \tilde{0}$ , где  $\tilde{A} = \langle 2; 1; 1 \rangle$ ,  $\tilde{B} = \langle 5; 3; 2 \rangle$ .

Решение будем искать в виде  $\tilde{X} = -\tilde{B}\tilde{A}^{-1}$ . Найдём двухкомпонентные представления чисел  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$ :

$$\begin{aligned}\hat{A} &= (2 - 1 + \alpha; 2 + 1 - \alpha) = (1 + \alpha; 3 - \alpha); \\ \hat{B} &= (5 - 3 + 3\alpha; 5 + 2 - 2\alpha) = (2 + 3\alpha; 7 - 2\alpha).\end{aligned}$$

Обратное значение  $\hat{A}^{-1}$  и противоположное  $-\hat{B}$  равны

$$\begin{aligned}\hat{A}^{-1} &= \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{1 \cdot (1+1)}\alpha; \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot (3-1)}\alpha \right) = \left( 1 - \frac{1}{2}\alpha; \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\alpha \right); \\ -\hat{B} &= (-2 - 3\alpha; -7 + 2\alpha).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\hat{X} &= (-2 - 3\alpha; -7 + 2\alpha) \cdot \left( 1 - \frac{1}{2}\alpha; \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\alpha \right) = \\ &= \left( -2 + \left( 1 - 3 + \frac{3}{2} \right) \alpha; -\frac{7}{3} + \left( -\frac{7}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) \alpha \right) = \left( -2 - \frac{1}{2}\alpha; -\frac{7}{3} - \frac{1}{6}\alpha \right).\end{aligned}$$

Полученный результат является примером двойной численно несогласованной оценки.

**Пример.** Решить систему уравнений  $Ax = B$  методом Крамера. Элементами матрицы  $A$  и вектора  $B$  являются нечёткие треугольные числа

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{11} &= \langle 3; 2; 1 \rangle; \tilde{A}_{12} = \langle -2; 2; 1 \rangle; \tilde{A}_{21} = \langle 3; 1; 1 \rangle; \tilde{A}_{22} = \langle -1; 4; 1 \rangle; \\ \tilde{B}_1 &= \langle 1; 1; 1 \rangle; \tilde{B}_2 = \langle 2; 1; 3 \rangle.\end{aligned}$$

Решение системы будем искать независимо для каждой из компонент чисел. Значения определителей системы равны

$$\begin{cases} \Delta = \tilde{A}_{11}\tilde{A}_{22} - \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{21}; \\ \Delta_1 = \tilde{B}_1\tilde{A}_{22} - \tilde{B}_2\tilde{A}_{12}; \\ \Delta_2 = \tilde{B}_2\tilde{A}_{11} - \tilde{B}_1\tilde{A}_{21}, \end{cases}$$

а числа в двухкомпонентной форме выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{11} &= (1 + 2\alpha; 4 - \alpha); \hat{A}_{12} = (-4 + 2\alpha; -1 - \alpha); \\ \hat{A}_{21} &= (2 + \alpha; 4 - \alpha); \hat{A}_{22} = (-5 + 4\alpha; -\alpha); \\ \hat{B}_1 &= (\alpha; 2 - \alpha); \hat{B}_2 = (1 + \alpha; 5 - 3\alpha). \end{aligned}$$

Для левых компонент определители равны

$$\begin{cases} \hat{\Delta}^L = (1 + 2\alpha)(-5 + 4\alpha) - (-4 + 2\alpha)(2 + \alpha) = -5 + 2\alpha + 8 - 2\alpha = 3; \\ \hat{\Delta}_1^L = (0 + \alpha)(-5 + 4\alpha) - (1 + \alpha)(-4 + 2\alpha) = 4 - \alpha; \\ \hat{\Delta}_2^L = (1 + \alpha)(1 + 2\alpha) - (0 + \alpha)(2 + \alpha) = 1 + 5\alpha - 3\alpha = 1 + 2\alpha; \end{cases}$$

откуда находим  $\hat{X}_1^L$  и  $\hat{X}_2^L$ :

$$\begin{aligned} \hat{X}_1^L &= \frac{\hat{\Delta}_1^L}{\hat{\Delta}^L} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\alpha; \\ \hat{X}_2^L &= \frac{\hat{\Delta}_2^L}{\hat{\Delta}^L} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\alpha. \end{aligned}$$

Аналогично, находим определители для правых компонент

$$\begin{cases} \hat{\Delta}^R = (4 - \alpha)(0 - \alpha) - (-1 - \alpha)(4 - \alpha) = -3\alpha + 4 + 2\alpha = 4 - \alpha; \\ \hat{\Delta}_1^R = (2 - \alpha)(0 - \alpha) - (5 - 3\alpha)(-1 - \alpha) = -\alpha + 5 - \alpha = 5 - 2\alpha; \\ \hat{\Delta}_2^R = (5 - 3\alpha)(4 - \alpha) - (2 - \alpha)(4 - \alpha) = 20 - 14\alpha - 8 + 5\alpha = 12 - 9\alpha; \end{cases}$$

и поэтому  $\hat{X}_1^R$  и  $\hat{X}_2^R$  равны

$$\begin{aligned} \hat{X}_1^R &= \frac{\hat{\Delta}_1^R}{\hat{\Delta}^R} = (5 - 2\alpha) \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\alpha \right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\alpha; \\ \hat{X}_2^R &= \frac{\hat{\Delta}_2^R}{\hat{\Delta}^R} = (12 - 9\alpha) \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\alpha \right) = 3 - 2\alpha. \end{aligned}$$



Окончательное решение записывается в виде

$$\begin{cases} \hat{X}_1 = \left( \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\alpha; \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\alpha \right); \\ \hat{X}_2 = \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\alpha; 3 - 2\alpha \right). \end{cases}$$

## 2.4. Проблема устойчивости нечётких решений на примере оптимальной задачи выбора с нечеткими параметрами

Задача нечеткого математического программирования рассматривается в [84, 95–98] как удобное и адекватное описание выбора в условиях неполной определенности. Математический аппарат решения таких задач достаточно разнообразен [95, 98] и соответствует вариантам трактовки понятия оптимальности в различных условиях нечеткости [49]. Для задач с нечёткой целевой зависимостью и нечеткими отношениями при формулировке ограничений используется принцип Беллмана-Заде [65, 125], в соответствии с которым решением задачи является нечеткое множество — пересечение нечетких множеств целевой функции и ограничений, однако такие задачи не подпадают под второй тип нечёткости (нечёткие параметры при чётких отношениях) согласно классификации нечётких моделей из п.1.2 и лежат за пределами данного исследования.

Следуя общей логике изложения, рассмотрим задачу нечёткого линейного программирования в случае, когда целевая функция и ограничения содержат нечеткие параметры при чёткости отношений. Различные подходы к решению задач нечёткого линейного программирования при нечетких параметрах целевой функции и четких ограничениях ранее рассматривались в работах [84, 96, 97, 105]. В [70] задача с нечёткими коэффициентами решается с использованием преобразования  $L$  и алгебры модифицированных нечётких

чисел и может приводить к различным  $\alpha$ -уровневым решениям. Рассмотрим следующий пример.

**Пример.** Решить задачу линейного программирования (2.60) при  $d = 10$ ,  $\tilde{A}_1 = \langle 4; 4; 1 \rangle$ ,  $\tilde{A}_2 = \langle 3; 1; 2 \rangle$ :

$$\begin{cases} \tilde{A}_1 x_1 + \tilde{A}_2 x_2 \rightarrow \max; \\ x_1 + x_2 = d; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (2.60)$$

Применяя преобразование  $L$  к параметрам  $\tilde{A}_1$  и  $\tilde{A}_2$  с оптимальными в смысле минимума потерь экспертной информации коэффициентами  $\lambda_{\tilde{A}_1} = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$  и  $\lambda_{\tilde{A}_2} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ , получим:

$$\begin{cases} \bar{x}_{\tilde{A}_1}(\alpha) = \frac{4}{5}(4 - 4 + 4\alpha) + \frac{1}{5}(4 + 1 - \alpha) = 3\alpha + 1; \\ \bar{x}_{\tilde{A}_2}(\alpha) = \frac{1}{3}(3 - 1 + \alpha) + \frac{2}{3}(3 + 2 - 2\alpha) = 4 - \alpha. \end{cases} \quad (2.61)$$

С учётом результатов преобразования (2.61), задача (2.60) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} (3\alpha + 1)x_1 + (4 - \alpha)x_2 \rightarrow \max; \\ x_1 + x_2 = 10; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (2.62)$$

Решая задачу (2.62) будем на различных  $\alpha$ -уровнях, следуя методикам из [49, 84]. При её решении на разных  $\alpha$ -уровнях получаются различные значения  $x_1$  и  $x_2$ . Например, при  $\alpha = 0$  задача принимает вид

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \rightarrow \max; \\ x_1 + x_2 = 10; \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

а её решением является вектор  $[0; 10]$ . В то же время, при  $\alpha = 0$  задача (2.62) сводится к системе

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max; \\ x_1 + x_2 = 10; \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

решение которой — вектор  $[10; 0]$ .

С одной стороны, можно представить результат решения в виде нечётких LL/RR-чисел согласно формуле (2.47):  $\bar{x}_{\tilde{A}_1} = 10\alpha$ ,  $\bar{x}_{\tilde{A}_2} = 10 - 10\alpha$ . С другой стороны, если решить задачу (2.62) при  $\alpha = 0,5$ , то решение будет таким же, как и при  $\alpha = 1$ , что наводит на мысль о том, что изменение решения происходит скачкообразно при некотором значении  $\alpha_0$ , и поэтому  $x_1$  и  $x_2$  нечёткими быть не могут. Наконец, первое ограничение на переменные в исходной задаче (2.60) подразумевает, что значения искомых переменных  $x_1$  и  $x_2$  должны быть чёткими.

Если зафиксировать в качестве «эталонного» решение задачи (2.62) при  $\alpha = 1$ , то очевидно, что при изменении значений  $\alpha$  при фиксированных коэффициентах  $\lambda_{A_i}$  преобразования L, т. е. при возмущении параметров исходной задачи, решение ведёт себя неустойчиво. Для того, чтобы дать формальное определение устойчивости для нечёткой задачи и определить, возможно ли влиять на устойчивость решения с помощью изменения параметров  $\lambda_{A_i}$ , вначале рассмотрим соответствующие формулировки для классической задачи линейного программирования, приведённые в [50].

Пусть дана задача линейного программирования

$$\begin{cases} \max \langle c, x \rangle \\ Ax \leq b \end{cases} \quad (2.63)$$

имеющая решение  $x^*$ . Возмущённой задачей линейного программирования называется задача

$$\begin{cases} \max \langle c(\delta), x \rangle; \\ A(\delta)x \leq b(\delta), \end{cases} \quad (2.64)$$

относительно параметров которой известно, что они в смысле определённой метрики близки параметрам исходной задачи (2.63), т. е. для фиксированного  $\delta > 0$  выполняются неравенства

$$\begin{cases} \|A(\delta) - A\| < \delta; \\ \|b(\delta) - b\| < \delta; \\ \|c(\delta) - c\| < \delta. \end{cases} \quad (2.65)$$

При этом для фиксированных матрицы  $A$  и вектора  $b$  и  $\forall \delta > 0$  выражения  $A(\delta)$ ,  $b(\delta)$  называют  $\delta$ -окрестностью матрицы  $A$  и вектора  $b$  соответственно. В качестве метрики близости в (2.65) может использоваться, например, евклидова метрика.

Задачу (2.63) будем называть устойчивой, если  $\exists \delta_0 > 0: \forall \delta \in [0; \delta_0]$  задача (2.64) имеет решение. Если обозначить решение задачи (2.64) за  $x^*(\delta)$ , то задачу (2.63) будем называть устойчивой по решению, если она устойчива и  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что при выполнении неравенств (2.65) для  $\forall x^*(\delta) \exists x^*$ , удовлетворяющее условию  $|x^*(\delta) - x^*| < \varepsilon$ . Стоит отметить, что если задача (2.63) неустойчива в смысле хотя бы одного из приведённых выше определений, то она считается неустойчивой.

Проблема устойчивости по решению в задаче линейного программирования с нечёткими коэффициентами рассматривалась в работах [49, 115], где для сведения нечёткой задачи к чёткой используется средневзвешенное значение для коэффициентов

$$\tilde{A} \rightarrow \frac{\sum_k \alpha_k \left( x_{\tilde{A}}^L(\alpha_k) + x_{\tilde{A}}^R(\alpha_k) \right)}{2 \sum_k \alpha_k}$$

Такое преобразование позволяет получать чёткое решение и использовать классическое определение устойчивости (2.64)-(2.65).

В [75] отмечается, что для задач линейного программирования с нечёткими параметрами удобнее использовать определение устойчивости по решению, поскольку оно включает в себя более узкое определение общей устойчивости, т. е. принципиальное существование решения возмущённой задачи. Пусть дана задача с нечёткими параметрами

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \min; \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}, \end{cases}$$

где  $\mathbf{A} = \{\tilde{A}_{ij}\}$  — матрица, а  $\mathbf{B} = \{\tilde{B}_i\}$ ,  $\mathbf{C} = \{\tilde{C}_i\}$  — векторы нечётких параметров. Применяя к каждому из элементов матрицы и векторов преобразование  $L$ , получаем модифицированную задачу

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^*\mathbf{x} \rightarrow \min; \\ \mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{B}^*, \end{cases} \quad (2.66)$$

в которой  $\mathbf{A}^* = \{\bar{x}_{\tilde{A}_{ij}}(\alpha)\}$ ,  $\mathbf{B}^* = \{\bar{x}_{\tilde{B}_i}(\alpha)\}$ ,  $\mathbf{C}^* = \{\bar{x}_{\tilde{C}_i}(\alpha)\}$ .

Задачу (2.66) удобнее всего решать на двух  $\alpha$ -уровнях и восстанавливать решение согласно (2.47). Ввиду свойства сохранения моды, решение модифицированной задачи (2.66) при  $\alpha = 1$  аналогично решению чёткой задачи с коэффициентами, равными модам нечётких чисел. Если решать ту же задачу при  $\alpha = 0$  и без дополнительных ограничений на параметры  $\lambda$  преобразования  $L$ , то возникает ситуация, при которой все значения  $\bar{x}_S(\alpha)$ , где  $S$  — один из индексов  $\tilde{A}_{ij}$ ,  $\tilde{B}_i$ ,  $\tilde{C}_i$ , «сбиваются» в сторону минимума. Это легко объясняется тем фактом, что при  $\lambda_S = 1$  максимальный вес в значении  $\bar{x}_S(\alpha)$  имеет левая ветвь функции принадлежности, находящаяся ближе к нулю. Для решения данной проблемы введём дополнительные ограничения для параметров  $\lambda_S$ :

$$(\lambda_S^* - \lambda_S)^2 \rightarrow \min \quad (2.67)$$

которые позволяют минимизировать отклонение параметров от оптимальных в смысле сохранения нечёткой информации значений  $\lambda_S^* = \frac{a_S}{d_S}$  и, таким образом, управлять устойчивостью решения.

Критерии (2.67) и целевая функция задачи (2.66) противоречивы. Возникает задача векторной оптимизации, описанная в [94]. Для её решения воспользуемся аддитивной свёрткой критериев:

$$f^*(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^* \mathbf{x} + \gamma \sum_s (\lambda_S^* - \lambda_S)^2 \rightarrow \min \quad (2.68)$$

Семантика целевой функции (2.68) такова: ищется решение  $\mathbf{x}$  и вектор параметров преобразования  $L \lambda_S$ , которые позволяют удовлетворить исходный критерий оптимизации и при этом максимально сохранить нечёткую информацию, заложенную экспертами в параметры задачи. Безразмерный коэффициент  $\gamma$  позволяет привести значение свёртки к одному порядку со значением исходной целевой функции.

Полученная пара векторов  $\mathbf{x}(\alpha = 1)$  и  $\mathbf{x}(\alpha = 0)$  позволяет восстановить модифицированные решения согласно (2.47). Если рассмотреть устойчивость нечёткого решения в смысле данного ранее определения для чёткой задачи, то справедливо предположить, что нечёткая задача будет считаться устойчивой по решению, если при переходе с одного  $\alpha$ -уровня на другой не происходит значительного изменения решения относительно  $\mathbf{x}(\alpha = 1)$ , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \alpha \in [0; 1) \quad |\alpha - 1| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(\alpha)\| < \varepsilon. \quad (2.69)$$

Конкретное же условие устойчивости решения зависит от задачи и может принимать различные формы.

## Выводы по второй главе:

1. Проведённый анализ существующих нечётких алгебр, принадлежащих к различным семействам, показал, что ни одна из них в полной мере не удовлетворяет требованиям к алгебре, выдвинутым в главе 1 — ограничению роста неопределенности, сохранению чётких отношений в модельных уравнениях и возможности использования стандартных программных средств реализации численных методов решения.
2. Для  $\alpha$ -интервалов треугольных чисел вводится линейное параметрического преобразования  $L$ , сопоставляющее обычному треугольному числу его модифицированное LL/RR-представление. Свойства преобразования  $L$  исследуются с точки зрения сохранения экспертной информации, заложенной в нечёткое число.
3. На множестве  $K$  модифицированных нечётких чисел строится алгебра, являющаяся полем. Вводится эквивалентная алгебре методика численного решения задач с нечёткими параметрами, позволяющая обойти проблему отсутствия линейного порядка на множестве  $K$  и находить модифицированные решения задач на основе двухточечных вычислений.
4. Кратко описывается алгебра двухкомпонентных нечётких чисел как альтернатива алгебре модифицированных нечётких чисел в тех случаях, когда потери экспертной информации недопустимы.
5. Рассматривается задача линейного программирования с нечёткими коэффициентами, имеющая неустойчивое решение. Для общего случая нечёткой задачи формулируется условие устойчивости на основании классического определения для чёткого случая и решается проблема управления устойчивостью решения в виде задачи векторной оптимизации.

# ГЛАВА 3. ТЕСТИРОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ НЕЧЕТКИХ ЧИСЛОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Предложенная в главе 2 модель представления модифицированных нечётких чисел была теоретически обоснована путём исследования свойств преобразования  $L$ , ставящего в соответствие нечёткому числу его модифицированную версию. Открытым пока остаётся вопрос о практической применимости полученных результатов. Стоит отметить, что приведённые в предыдущей главе примеры, несмотря на свою простоту, не ограничивают универсальности предлагаемой методики решения, так как после получения точечных оценок на выбранных  $\alpha$ -уровнях решаются уже детерминированные задачи, и, как отмечается в [99], сложность решения нечёткой задачи в таком случае определяется только сложностью решения соответствующих детерминированных задач.

В данной главе предложенная модель представления нечётких чисел, а также методика решения задач с нечёткими параметрами с помощью двухточечных вычислений тестируются на примере задачи сетевого планирования с нечёткими временными оценками. Чёткий и вероятностный случаи этой задачи известны с 50-х гг. 20 века и достаточно хорошо проработаны [129], однако в некоторых случаях невозможно получить чёткие оценки либо собрать статистику и восстановить законы распределения случайных величин (например, в случае организационных проектов [51]). В то же время, в теории нечетких множеств разработаны эффективные методы, позволяющие решать задачи в отсутствие статистических данных, а применение нечетких чисел LR-типа позволяет значительно упростить расчетные формулы. В отечественной и ми-



ровой практике управления проектами предложено множество методов решения нечёткой задачи сетевого планирования. Наиболее значительные результаты получили и представили P. Zielinski и S. Chanas [4, 43], S. Nasution [17], S. P. Chen [7, 8], D. Dubois [80], а также сотрудники Института проблем управления РАН [51]. Логичным видится сравнение процесса и результатов расчёта в соответствие с описанной ранее методикой решения нечётких задач с процессами и результатами расчётов согласно передовым методикам решения задачи нечёткого сетевого планирования.

### 3.1. Постановка задачи нечёткого сетевого планирования и сравнительный анализ методов её решения

#### 3.1.1. Постановка и способы решения чёткой задачи сетевого планирования

Рассмотрим направленный ациклический граф (DAG, от directed acyclic graph, согласно терминологии [46])  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ ,  $|E| = m$ , обладающий следующими свойствами:

- существует ровно одна вершина  $v_1 \in V$ , называемая истоком, из которой рёбра только исходят, т.е.  $\forall i = 2, n \nexists (v_i, v_1)$ ;
- существует ровно одна вершина  $v_n \in V$ , называемая стоком, в которую рёбра графа только входят, т.е.  $\forall i = \overline{1, n-1} \nexists (v_n, v_i)$ ;
- для любой вершины графа  $v_i \in V$ ,  $i = \overline{1, n}$  существует путь  $v_1 \dots v_n$ , проходящий через неё;
- для любого ребра  $e_j \in E$ ,  $j = \overline{1, m}$  существует путь  $v_1 \dots v_n$ , содержащий это ребро.

В задачах календарно-сетевого планирования и управления (КСПУ) граф, удовлетворяющий перечисленным выше условиям, называется сетевым графиком, и часто применяется для определения продолжительности проекта, состоящего из набора зависящих друг от друга операций [51, 89, 116, 129]. Обычно работам проекта  $w_j$ , длительностью  $\tau_j$  каждая, сопоставлены дуги графа  $e_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Событиям проекта  $z_i$  с временами наступления  $t_i$  сопоставления вершины графа  $v_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Событие  $z_1$  — начало работ по проекту, событие  $z_n$  — окончание проекта. События проекта (вершины графа) обычно нумеруются, а операции (рёбра) обозначаются словами или буквами латинского алфавита.

Нетрудно заметить, что общее время выполнения проекта  $T$  будет равно длине максимального пути в графе, называемого также критическим [63]. Соответственно, операции, которые принадлежат пути максимальной длины, также будут называться критическими. Изменение длительности любой из них приведёт к изменению общего времени выполнения проекта. Остальные операции являются некритическими и характеризуются т.н. резервом времени, т.е. максимальной задержкой по срокам выполнения, при которой общее время проекта не изменится.

Как указано в [51, 87], для сетевого графика всегда существует «правильная» нумерация, т. е. такая, при которой из вершины с большим порядковым номером не идут дуги в вершину с меньшим порядковым номером. В дальнейшем будем считать, что события проекта перенумерованы так, что нумерация является «правильной».

Для каждого события проекта в [51, 63, 116, 129] определяются следующие понятия.

**Определение 3.1.** Величина  $t_i^-$  называется наиболее ранним моментом наступления события  $z_i$  и характеризует момент времени, раньше которого наступление  $z_i$  невозможно.

**Определение 3.2.** Величина  $t_i^+$  называется наиболее поздним моментом наступления события  $z_i$  и характеризует максимальное время наступления  $z_i$ , при котором общая продолжительность проекта не меняется.

**Определение 3.3.** Полным резервом времени для события  $z_i$  называется разность наиболее позднего и наиболее раннего моментов его наступления, т. е. величина

$$\Delta t_i = t_i^+ - t_i^-. \quad (3.1)$$

Для проектных работ в [129] вводится аналогичное определение.

**Определение 3.4.** Полным резервом времени работы  $w_s$ , которая начинается при наступлении события  $z_{i_s}$  и заканчивается событием  $z_{j_s}$ , называется величина

$$\Delta\tau_s = t_{j_s}^+ - t_{i_s}^- - \tau_s. \quad (3.2)$$

События, у которых полный резерв времени равен нулю, являются потенциально критическими. Соответственно, работа  $w_s$  будет считаться критической, если её начальное и конечное событие потенциально критические, а её общий резерв времени равен нулю, т.е. одновременно выполняются условия, описываемые формулами (3.1) и (3.2) [129]:

$$\begin{cases} \Delta t_{i_s} = 0; \\ \Delta t_{j_s} = 0; \\ \Delta\tau_s = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Задача поиска критического пути в графе  $G$  может быть решена различными способами, наиболее простым из которых является алгоритмический. Алгоритм поиска критического пути представляет собой модифицированный алгоритм Форда-Мура-Беллмана для нахождения пути максимальной длины в графе [54, 87] либо алгоритм Дейкстры с изменённой функцией релаксации [38, 46], которая позволяет искать вместо самого короткого пути самый длинный. Каждая вершина графа снабжается двумя метками – временем наиболее раннего наступления события  $t_i^-$  и временем наиболее позднего наступления события  $t_i^+$ . В начале работы алгоритма у всех вершин  $t_i^- = 0$ ,  $t_i^+ = \infty$ . На каждом шаге для вершины  $v_i$ ;  $i = \overline{2, n}$  уточняется её  $t_i^-$ . Для этого вначале определяются вершины  $\{v_j\}$ , непосредственно предшествующие  $v_i$ , т.е. такие, что существует дуга  $e_{ji}$  между  $v_j$  и  $v_i$ . После этого находится  $t_i^-$  путём выбора максимума из сумм  $t_j^-$  непосредственно предшествующих событий и

длительностей операций, которые связывают каждую из  $v_j$  с  $v_i$  [129]:

$$t_i^- = \max_{v_j} \{t_j^- + \tau_{ji}\}. \quad (3.4)$$

Процесс повторяется до тех пор, пока у всех событий не будут рассчитаны наиболее ранние сроки их наступления.  $t_n^-$  вершины-стока и будет общим временем выполнения проекта [54]. Другими словами,

$$T = \max_{i=\overline{1,n}} \{t_i^-\}. \quad (3.5)$$

Если необходимо, помимо общей длительности проекта, отыскать и критический путь, то по графу выполняется обратный проход, во время которого вычисляются наиболее поздние сроки наступления события. Для вершины-стока принимается, что  $t_n^+ = t_n^-$ . Для остальных вершин  $v_i$ ;  $i = \overline{n-1, 1}$  на каждом шаге вначале находятся непосредственно следующие за ними события  $\{v_k\}$ , т.е. такие, что существует дуга  $e_{ik}$  между  $v_i$  и  $v_k$  [87], после чего ищется  $t_i^+$  в виде

$$t_i^+ = \min_{v_k} \{t_k^+ - \tau_{ik}\}. \quad (3.6)$$

Критические операции проекта определяются согласно (3.3).

На рис. 3.1 изображён сетевой граф проекта после выполнения вышеописанного алгоритма. Для каждого события проекта указан его номер, наиболее ранний и наиболее поздний сроки его наступления. Пунктиром выделены так называемые фиктивные операции с нулевой длительностью [116, 129], которые необходимы для того, чтобы показать зависимость между операциями, не нарушая свойств направленного ациклического графа. Критический путь выделен жирным.

К недостаткам алгоритмического решения стоит отнести трудность исследования задачи на устойчивость, поскольку результат алгоритмически, а не аналитически, зависит от входных данных. Для исследования на устойчивость больше подходит решение задачи методами линейного программиро-

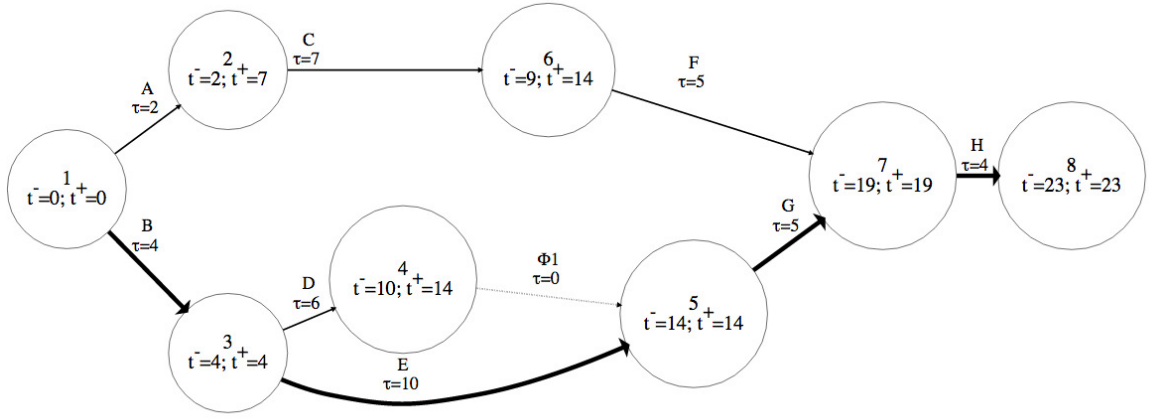


Рисунок 3.1. Рассчитанный сетевой график проекта с чёткими временными оценками

вания. Классическая постановка этой задачи дана в [89]. Требуется решить задачу

$$T = t_n - t_1 \rightarrow \min \quad (3.7)$$

при ограничениях на времена наступления событий

$$t_{j_s} - t_{i_s} \geq \tau_s; \quad s = \overline{1, m}, \quad (3.8)$$

где  $t_{i_s}$  и  $t_{j_s}$  — времена наступления событий начала и окончания работы  $w_s$  соответственно. Задача (3.7) при ограничениях (3.8) является задачей линейного программирования.

В результате решения данной задачи получается общее время выполнения проекта  $T$ , а также вектор времён  $\mathbf{t} = \{t_1, \dots, t_n\}$ , называемых календарным планом проекта, и совокупность критических операций  $S_1$  с нулевым общим резервом времени:  $\Delta\tau_{s_1} = 0, \forall s_1 \in S_1$ .

### 3.1.2. Классификация методов решения задачи сетевого планирования с нечёткими параметрами

Согласно вводимой в главе 1 классификации нечётких моделей, в задаче поиска критического пути источниками нечёткой неопределённости могут быть как параметры (нечёткие времена выполнения операций [14]), так

и отношения (нечёткость отношения предшествования операций либо степени включённости операции в проект [32]). Следуя общей логике диссертации, рассмотрим сформулированные выше задачи (3.5) и (3.7) в случае, когда для временных оценок длительностей операций используются нечёткие треугольные числа  $\tilde{\tau}_i$ . Решению задачи календарно-сетевого планирования и управления с нечёткими параметрами посвящено немало публикаций в отечественной и зарубежной литературе, однако в большинстве случаев методы её решения можно условно разбить на следующие группы:

1. оперирующие нечёткими числами в неизменной форме с использованием принципа обобщения. К этим методам можно отнести, например, описанные в [4, 5, 51, 53, 127];
2. вводящие операции сложения, вычитания и сравнения (либо выбора максимума и минимума) для нечётких чисел. Подобные методы изложены в [17, 18, 30, 80, 84, 106, 118];
3. использующие дефаззификацию или получение чётких  $\alpha$ -уровневых значений. Такие методы, описанные в [8, 13, 26, 29], обычно основываются на нечётком линейном программировании [84];
4. комбинированные методы, основанные на двух и более вышеописанных подходах либо использующие генетические алгоритмы. Такие методы описаны, например, в [27, 73, 95, 115].

Рассмотрим методы первой группы на примере решения задачи поиска критического пути в [51]. Пусть заданы функции принадлежности для нечётких оценок продолжительности операций  $\mu_{\tilde{\tau}_s}(x)$ . Если за  $Q_i$  обозначить множество номеров вершин, непосредственно предшествующих вершине  $v_i$ , а за  $R_i$  — множество номеров вершин, непосредственно следующих за  $v_i$ , то, со-

гласно принципу обобщения Заде, функция принадлежности нечёткого наиболее раннего срока наступления события  $z_i$  имеет вид

$$\mu_{\tilde{t}_i^-}(x) = \max_{\{(x_{ji}), j \in Q_i | \max(x_j + x_{ji}) = x\}} \min \left[ \min_{j \in Q_i} \left( \mu_{\tilde{t}_{ji}^-}(x_{ji}) \right); \mu_{\tilde{t}_j^-}(x_j) \right]. \quad (3.9)$$

Функция принадлежности наиболее позднего срока наступления вычисляется следующим образом:

$$\mu_{\tilde{t}_i^+}(x) = \max_{\{(T, x_i) | T - x_i = x\}} \min_{i=1, n} [\mu_{\tilde{T}}(T); \mu_{\tilde{l}_i}(x_i)], \quad (3.10)$$

где  $\tilde{l}_i$  — нечёткая максимальная длина пути от вершины  $v_i$  до стока  $v_n$ , определяемая через функцию принадлежности

$$\mu_{\tilde{l}_i}(x) = \max_{\{(x_{ij}), j \in R_i | \max(x_j + x_{ji}) = x\}} \min \left[ \min_{j \in R_i} \left( \mu_{\tilde{t}_{ij}}(x_{ij}) \right); \mu_{\tilde{l}_j}(x_j) \right], \quad (3.11)$$

а  $\tilde{T}$  — общее время проекта, функция принадлежности которого рассчитывается как

$$\mu_{\tilde{T}}(T) = \max_{\{(x_i), i=1, n | \min(x_j) = T\}} \min_{j=1, n} \left( \mu_{\tilde{t}_j^-}(x_j) \right). \quad (3.12)$$

Функции принадлежности полных нечётких резервов времени для событий имеют вид

$$\mu_{\Delta \tilde{t}_i}(x) = \max_{\{(y_i, x_i) | y_i - x_i = x\}} \min \left[ \mu_{\tilde{t}_i^+}(y_i); \mu_{\tilde{t}_i^-}(x_i) \right]. \quad (3.13)$$

В полученной модели, задаваемой формулами (3.9)–(3.13), нельзя однозначно указать, какое из событий является критическим — авторы [51] указывают, что функции принадлежности полных резервов времени для каждого события (3.13) при  $x = 0$  могут быть интерпретированы как степени принадлежности событий критическому пути. В [51] также предлагается следующая классификация событий для модели КСПУ с интервальной неопределённостью — критические, полукритические и некритические. Согласно результатам, полученным в [4], схожая классификация может быть распространена и на нечёткий случай:



- однозначно критической в [4] называется такая операция, которая при замене длительностей операций  $\tilde{\tau}_i$  во всём проекте их любыми чёткими значениями  $\tau_i \in \text{supp}(\tilde{\tau}_i)$  является критической в классическом понимании этого термина;
- потенциально некритической называется такая операция, которая при замене длительностей операций  $\tilde{\tau}_i$  во всём проекте их любыми чёткими значениями  $\tau_i \in \text{supp}(\tilde{\tau}_i)$ , не является критической в классическом понимании этого термина.

Решение задачи, предложенное в [51], обладает несколькими существенными недостатками:

- громоздкость вычислений, основанных на принципе обобщения Заде [52, 108];
- как отмечено в [4], до сих пор остаётся нерешённым в общем случае вопрос о степени критичности операции из-за трудности нахождения отдельных критических операций в сетях проектов, где не существует однозначно критического пути, т. е. такого, все операции которого являются однозначно критическими;
- сложность интерпретации результата лицом, принимающим решение — во-первых, трудно выбрать из нескольких критических путей «наиболее критический», в [4] для этого используется довольно громоздкий алгоритм; во-вторых, результаты расчётов могут выйти из класса нечётких чисел [127];
- не решена проблема устойчивости решения — применение принципа обобщения может привести к неоправданному расширению носителя результата, что также сказывается на полезности его практического применения.

Методы, использующие результаты нечётких арифметик, рассмотрим на примере задачи поиска критического пути в проекте с нечёткими временными оценками из [80]. При решении задачи используется описанный выше для чёткого случая алгоритм Форда-Мура-Беллмана или модифицированный алгоритм Дейкстры. Операции сложения и вычитания, необходимые в (3.4) и (3.6), определяются через принцип обобщения Заде согласно (1.27) (в [17, 18, 118] для арифметических операций используются правила работы с нечёткими LR-числами). Расширенная операция «максимум» для двух нечётких LR-чисел в [80, 106, 118] определяется как

$$\max(\tilde{A}, \tilde{B}) = (m; a; b),$$

где  $m, a, b$  определяются согласно формуле

$$\begin{cases} m = \max(m_{\tilde{A}}, m_{\tilde{B}}); \\ a = \max(m_{\tilde{A}}, m_{\tilde{B}}) - \max(m_{\tilde{A}} - a_{\tilde{A}}, m_{\tilde{B}} - a_{\tilde{B}}); \\ b = \max(m_{\tilde{A}} + b_{\tilde{A}}, m_{\tilde{B}} + b_{\tilde{B}}) - \max(m_{\tilde{A}}, m_{\tilde{B}}). \end{cases} \quad (3.14)$$

а операция «минимум» получается с помощью замены  $\max$  на  $\min$  в выражении (3.14). В [17] используется другой метод выбора максимума — вычисляются значения

$$\begin{aligned} M(\tilde{A}) &= \frac{1}{3} (x^L + m + x^R); \\ S(\tilde{A}) &= \frac{1}{18} (x^{L^2} + m^2 + x^{R^2} - mx^L - mx^R - x^L x^R), \end{aligned}$$

которые затем используются для выбора максимального числа [30]:

$$\max(\tilde{A}, \tilde{B}) = \begin{cases} \tilde{A}; M(\tilde{A}) > M(\tilde{B}); \\ \tilde{B}; M(\tilde{A}) = M(\tilde{B}) \text{ и } S(\tilde{A}) < S(\tilde{B}); \\ \tilde{B}; \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.15)$$

Методы второй группы обычно позволяют решать задачу поиска времени выполнения проекта с помощью стандартного программного обеспечения, однако при этом их применимость ограничена ввиду следующих недостатков:

- алгоритмы решения задачи получают проблемы в наследство от используемых в них определений нечёткой арифметики, а итоговые результаты (время выполнения и критический путь) сильно зависят от вводимых операций максимума/минимума либо используемого способа сравнения нечётких чисел;
- в процессе вычислений могут возникать лишённые физического смысла отрицательные времена наступления событий, как, например, в [27];
- в [17,43] приводятся примеры, иллюстрирующие тот факт, что при непосредственном использовании нечётких чисел иногда нельзя выполнять обратный проход по сети проекта для поиска критического пути, поскольку есть риск учесть нечёткость времён выполнения операций дважды при выборе минимума и вычитании согласно (3.6). В связи с этим, после обратного прохода наиболее поздние сроки наступления событий будут максимально размытыми.

$\alpha$ -уровневые методы и методы, использующие дефаззификацию, рассмотрим на примерах из [29] и [8]. В статье [8] задача поиска критического пути сводится к вычислению индексов ранжирования Ягера для каждой из нечётких оценок  $\tilde{\tau}_{ij}$ ,  $v_i, v_j \in V$ :

$$I(\tilde{\tau}) = \int_0^1 \frac{1}{2} (x^L(\alpha) + x^R(\alpha)) d\alpha, \quad (3.16)$$

которые затем используются в задаче целочисленного программирования

$$I(\tilde{T}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I(\tilde{\tau}_{ij}) x_{ij} \rightarrow \max \quad (3.17)$$

с ограничениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{1j} = 1; \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ki}, \quad i = \overline{2, n-1}; \\ \sum_{k=1}^n x_{kn} = 1; \\ x_{ij} \geq 0, \end{array} \right. \quad (3.18)$$

где  $x_{ij}$  обозначает величину потока, проходящего через дугу  $e_{ij}$ . Решением задачи (3.17) является время выполнения проекта  $\tilde{T} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{\tau}_{ij} x_{ij}$  и соответствующий ему путь  $p^*$ . Для всех остальных путей графа  $p_k$ ,  $k = \overline{1, m}$  от истока к стоку находится их степень критичности согласно формуле (3.19):

$$deg_{Cr}(p_k) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I(\tilde{\tau}_{ij}) x_{ij}^{p_k}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I(\tilde{\tau}_{ij}) x_{ij}^{p^*}}. \quad (3.19)$$

Предлагаемая в [29] методика решения отличается от вышеописанной тем, что величина потока также выражается нечётким числом  $\tilde{x}_{ij}$ ; её вариант, изложенный в [25] оперирует нечёткими числами в форме, позволяющей сократить число условий и параметров в задаче линейного программирования; а в [7, 13] задача поиска критического пути рассматривается как задача двухуровневой оптимизации — на каждом  $\alpha$ -уровне решается вначале задача поиска верхней (правой) границы  $\alpha$ -интервала с ограничениями (3.18):

$$\tilde{T}^R(\alpha) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I(\tilde{\tau}_{ij}^R(\alpha)) x_{ij} \rightarrow \max,$$

после чего решается двойственная ей задача по поиску нижней (левой) границы  $\alpha$ -интервала

$$\tilde{T}^L(\alpha) = y_n - y_1 \rightarrow \min$$

с ограничениями, аналогичными (3.8):

$$y_j - y_i \geq \tau_{ij}(\alpha), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Методы третьей группы наиболее универсальны, поскольку позволяют решать задачу поиска нечёткого критического пути максимально независимо от форм функций принадлежности числовых параметров [73, 115]. Среди потенциальных проблем этих методов можно выделить следующие:

- выбор неподходящего индекса ранжирования для нечётких параметров, а также наличие потенциально несравнимых временных оценок;
- сложности при восстановлении функции принадлежности нечёткого результата по значениям на различных  $\alpha$ -уровнях.

### 3.2. Решение задачи нечёткого сетевого планирования с получением устойчивых результатов

Для решения задачи поиска критического пути проекта с нечёткими временными оценками операций, воспользуемся вводимыми в пп. 2.2, 2.3 преобразованием  $L$  и алгеброй модифицированных нечётких чисел. Для начала сформулируем задачу для произвольного  $\alpha$ -уровня. Преобразование  $L$ , применяемое в данной задаче, несколько отличается от вводимого в главе 2, поскольку параметры  $\lambda$  необходимо изменять, управляя, таким образом, устойчивостью задачи линейного программирования [75]:

$$L(\tau_i(\alpha)) = \bar{\tau}_i(\alpha, \lambda_{\tau_i}) = \lambda_{\tau_i} \tau_i^L(\alpha) + (1 - \lambda_{\tau_i}) \tau_i^R(\alpha). \quad (3.20)$$

В формуле (3.20) границы числа  $\tilde{\tau}_i$  определяются согласно (1.24):

$$\begin{cases} \tau_i^L(\alpha) = m_{\tilde{\tau}_i} - a_{\tilde{\tau}_i} + a_{\tilde{\tau}_i} \alpha; \\ \tau_i^R(\alpha) = m_{\tilde{\tau}_i} + b_{\tilde{\tau}_i} - b_{\tilde{\tau}_i} \alpha. \end{cases}$$

В результате, на каждом из  $\alpha$ -уровней задача линейного программирования будет выглядеть следующим образом [74, 75]:

$$\begin{cases} T(\alpha) = t_n - t_1 \rightarrow \min \\ t_{j_s} - t_{i_s} \geq \bar{\tau}_s(\alpha, \lambda_s), \quad \forall s = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (3.21)$$

Результатом решения задачи (??) является вектор времён  $t(\alpha) = \{t_0(\alpha, \lambda_0), \dots, t_n(\alpha, \lambda_n)\}$ , который является календарным планом  $\alpha$ -уровня, а также множество критических операций  $S_1(\alpha)$  [72, 74].

Нечеткость оценок  $\tilde{\tau}_i$  обуславливает проблему устойчивости решений задачи (3.21) в смысле (2.69). Для неустойчивой задачи на различных  $\alpha$ -уровнях решения соответствуют различным критическим путям, и возникает проблема объединения разнородных  $\alpha$ -уровневых решений  $S_1(\alpha)$ . Очевидно, что задача будет устойчива, если критический путь не меняется при переходе с одного  $\alpha$ -уровня на другой. Поэтому целесообразно исследовать задачу (3.21) на устойчивость и выяснить, при каких значениях параметра  $\lambda$  критический путь одинаков на всех  $\alpha$ -уровнях [75]. Сразу отметим, что при решении задачи (3.21), будем использовать параметр  $\lambda_s^* = \frac{a_s}{a_s + b_s}$ , оптимальный в смысле сохранения максимального количества характеристик нечёткого числа.

Согласно данному ранее определению (2.69), задачу (3.21) поиска критического пути на  $\alpha$ -уровне будем считать устойчивой по решению, если она устойчива и если  $S_1$  не зависит от  $\alpha$ , т.е. на всех  $\alpha$ -уровнях критический путь не изменяется и проходит по одним и тем же рёбрам. Условие устойчивости выполняется автоматически, поскольку в сетевом графике всегда существует хотя бы один путь от истока к стоку, следовательно, независимо от величин весов рёбер, всегда существует путь максимальной длины [46]. Что касается устойчивости по решению, то, поскольку результатом решения задачи о критическом пути является множество номеров критических операций, целесообразно выбрать в качестве метрики сходства решений

мощность симметрической разности двух множеств. Очевидно, что если для  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0; 1]; \alpha_1 \neq \alpha_2$   $S_1(\alpha_1) = S_1(\alpha_2)$ , то мощность симметрической разности этих множеств  $S_1(\alpha_1) \Delta S_2(\alpha_2)$  равна нулю, т. е. критические пути на разных  $\alpha$ -уровнях совпадают. Подобное условие устойчивости используется и в [115].

Таким образом, задачу поиска критического пути на  $\alpha$ -уровне будем считать устойчивой по решению, если она устойчива и если

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0; 1]; \alpha_1 \neq \alpha_2 \quad S_1(\alpha_1) \Delta S_2(\alpha_2) = \emptyset, \quad (3.22)$$

т. е. на всех  $\alpha$ -уровнях критический путь не изменяется и проходит по одним и тем же дугам.

В п. 2.3 было показано, что ввиду линейности преобразования L, для получения функции принадлежности модифицированного нечёткого числа, достаточно знать его значения в двух точках — при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$ . На этом основывается упрощённый способ решения задачи. В качестве невозмущённой задачи возьмём исходную задачу (3.21) при  $\alpha = 1$ . Возмущения возникают при изменении  $\alpha$  и  $\lambda$ , поскольку в этом случае меняется чёткое значение числа на каждом  $\alpha$ -срезе. На устойчивость задачи можно влиять, изменяя параметры  $\lambda$  для каждого из чисел. Для дальнейшего анализа задачи (3.21) на устойчивость достаточно решить её при  $\alpha = 1$ , а затем, зафиксировав полученный критический путь с помощью изменения части ограничений на строгие равенства для соответствующих операций, проверить существование решения при  $\alpha = 0$  и степень его совпадения с решением при  $\alpha = 1$ .

Полученное при  $\alpha = 1$  решение задачи (3.21) даёт активные ограничения на критические операции. Кроме того, в п. 2.4 было отмечено, что на параметры  $\lambda_S$  преобразования L также необходимо наложить ограничения и учесть их в целевой функции (2.68), чтобы избежать ситуации, когда  $\lambda_S$  принимают граничные значения (0 или 1) [75]. В результате при  $\alpha = 0$  решается

видоизменённая задача

$$\begin{cases} T^*(\alpha, \lambda) = t_n - t_1 + \gamma \sum_{s=1}^m (\lambda_s^* - \lambda_s)^2 \rightarrow \min; \\ t_{j_{s_1}} - t_{i_{s_1}} = \bar{\tau}_{s_1}(\alpha, \lambda_{s_1}), \quad \forall s_1 \in S_1(1); \\ t_{j_s} - t_{i_s} \geq \bar{\tau}_s(\alpha, \lambda_s), \quad \forall s \notin S_1(1), \quad s = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (3.23)$$

В итоге, для решения задачи поиска критического пути (3.21) предлагается использовать следующий алгоритм [75].

1. Решается невозмущённая задача (3.21) при  $\alpha = 1$ . Ввиду свойства 2.1 преобразования L, это решение соответствует модифицированному решению  $\langle T(1), t(1), S_1(1) \rangle$ . Фиксируется множество операций  $S_1(1)$ , образующих критический путь.
2. Фиксируется критический путь при всех  $\alpha \neq 1$ . Для этого в задаче (3.21) нестрогие неравенства меняются на равенства  $\forall s_1 \in S_1(1)$ , т. е. выбранные операции всегда будут иметь нулевой резерв времени (3.2). Данный шаг позволяет выполнить условие устойчивости задачи по решению (3.22).
3. Решается возмущённая задача (3.23) с изменённой целевой функцией. Результатом решения задачи является кортеж  $\langle T(0), t(0), \lambda \rangle$ , где  $\lambda$  — вектор параметров преобразования L.
4. Решение исходной задачи представляет из себя тройку  $\langle \tilde{T}, S_1, \lambda \rangle$ . Функция принадлежности общего времени выполнения проекта  $\tilde{T}$  восстанавливается по значениям  $T(0)$  и  $T(1)$ , либо число  $\tilde{T}$  оставляется в виде (2.36).

Рассмотрим алгоритм решения на примере и сравним его результаты с результатами некоторых других методов, описанных в п. 3.1.



**Пример.** Пусть дан проект, заданный таблицей 3.1. Требуется определить критические операции проекта, а также его общее нечёткое время выполнения.

Вначале выпишем  $L$ -преобразование для каждой нечёткой временной оценки:

$$\left[ \begin{array}{l} \bar{\tau}_A(\alpha) = \lambda_A(1 + \alpha) + (1 - \lambda_A)(5 - 3\alpha) \\ \bar{\tau}_B(\alpha) = \lambda_B(2 + 2\alpha) + (1 - \lambda_B)(5 - \alpha) \\ \bar{\tau}_C(\alpha) = \lambda_C(3 + 4\alpha) + (1 - \lambda_C)(9 - 2\alpha) \\ \bar{\tau}_D(\alpha) = \lambda_D(4 + 2\alpha) + (1 - \lambda_D)(9 - 3\alpha) \\ \bar{\tau}_E(\alpha) = \lambda_E(9 + \alpha) + (1 - \lambda_E)(12 - 2\alpha) \\ \bar{\tau}_F(\alpha) = \lambda_F(4 + \alpha) + (1 - \lambda_F)(6 - \alpha) \\ \bar{\tau}_G(\alpha) = \lambda_G(1 + 4\alpha) + (1 - \lambda_G)(6 - \alpha) \\ \bar{\tau}_H(\alpha) = \lambda_H(2 + 2\alpha) + (1 - \lambda_H)(7 - 3\alpha) \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Таблица 3.1. Оценки длительностей операций проекта и их взаимосвязи

Операция	Предшествующие операции	$a$	$m$	$b$
A	-	1	2	3
B	-	2	4	1
C	A	4	7	2
D	B	2	6	3
E	B	1	10	2
F	C	1	5	1
G	D,E	4	5	1
H	F,G	2	4	3

Соответствующий сетевой график изображён на рис. 3.2. Из него видно, что для корректного отображения зависимостей между операциями, введена фиктивная операция Ф1 длительностью 0 дней.

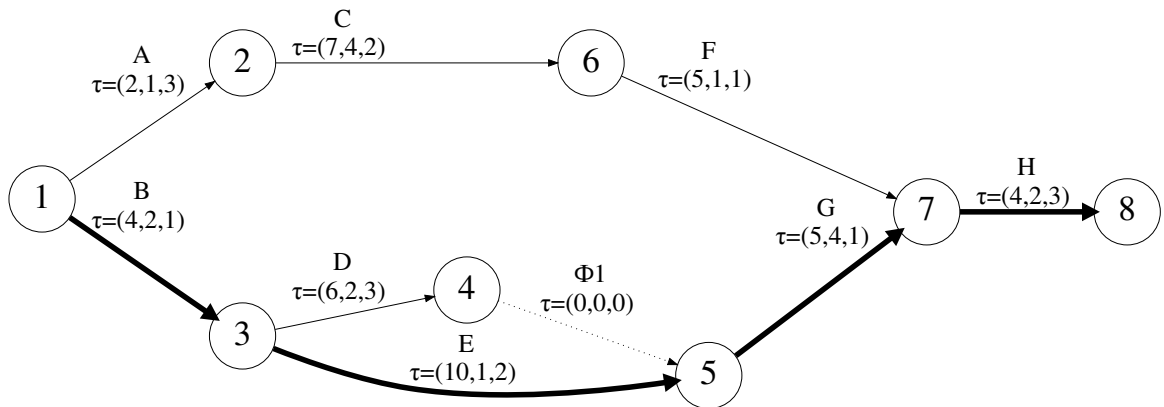


Рисунок 3.2. Сетевой график проекта с нечёткими временными оценками

Для решения задачи можно воспользоваться любым математическим пакетом или встраиваемым модулем, поддерживающим решение задач линейного программирования (в рассматриваемом примере использовалась надстройка «Поиск решения» в Microsoft Excel). Решая задачу (3.21) с учётом (3.24) при  $\alpha = 1$ , получаем:

$$T(1) = 23;$$

$$t(1) = \{0; 7; 4; 14; 14; 14; 19; 23\};$$

$$S_1(1) = \{B, E, G, H\}.$$

После этого решаем задачу (3.23), которая с учётом (3.24) при  $\alpha = 0$  принимает вид

$$T(0) = t_8 - t_1 + \gamma \sum_{s=1}^8 (\lambda_s^* - \lambda_s)^2 \rightarrow \min \quad (3.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_2 - t_1 \geq 5 - 4\lambda_A \\ t_3 - t_1 = 5 - 3\lambda_B \\ t_6 - t_2 \geq 9 - 6\lambda_C \\ t_4 - t_3 \geq 9 - 5\lambda_D \\ t_5 - t_3 = 12 - 3\lambda_E \\ t_5 - t_4 \geq 0 \\ t_7 - t_6 \geq 6 - 2\lambda_F \\ t_7 - t_5 = 6 - 5\lambda_G \\ t_8 - t_7 = 7 - 5\lambda_H \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Значение  $\gamma$  выбирается порядка 10. В результате решения задачи (3.25) при ограничениях (3.26) получаем, что

$$\begin{aligned} T^*(0) &= 20,83; \\ t(0) &= \{0; 4,23; 2,96; 13,92; 13,92; 9,97; 15,79; 20,67\}; \\ S_1(0) &= \{B, E, G, H\}; \\ \lambda &= \{0,25; 0,68; 0,67; 0,4; 0,35; 0,5; 0,83; 0,43\}. \end{aligned}$$

В итоге имеем критический путь  $S_1 = \{B, E, G, H\}$  и нечёткое время выполнения  $T(\alpha) = 20,67 + 2,33\alpha$ .

При решении задачи согласно способам второй группы, описываемым в [8, 29, 39], используется функция ранжирования Ягера (3.16), которая для треугольных чисел равна

$$I(\tilde{A}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (m - a + a\alpha + m + b - b\alpha) d\alpha = m + \frac{b - a}{4}. \quad (3.27)$$

Для проекта, описываемого таблицей 3.1, задача целочисленного программирования (3.17)–(3.18) выглядит следующим образом:

$$I(\tilde{T}) = 2,5x_{12} + 3,75x_{13} + 6,5x_{26} + 6,25x_{34} + 10,25x_{35} + \\ + 4,25x_{57} + 5x_{67} + 4,25x_{78} \rightarrow \max;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{12} + x_{13} = 1; \\ x_{12} = x_{26}; \\ x_{13} = x_{34} + x_{35}; \\ x_{34} = x_{45}; \\ x_{35} + x_{45} = x_{57}; \\ x_{26} = x_{67}; \\ x_{67} + x_{57} = x_{78}; \\ x_{78} = 1. \end{array} \right.$$

Решение задачи даёт следующие значения, в целом соответствующие модифицированному решению:

$$x_{12} = x_{26} = x_{34} = x_{45} = x_{67} = 0;$$

$$x_{13} = x_{35} = x_{57} = x_{78} = 1;$$

$$S_1 = \{B, E, G, H\};$$

$$\tilde{T} = \tilde{\tau}_B + \tilde{\tau}_E + \tilde{\tau}_G + \tilde{\tau}_H = \langle 23; 9; 7 \rangle.$$

Решение с помощью метода [80, 118] позволяет найти только общее время выполнения проекта. Выполняя прямой проход по графу и используя фор-

мулы (3.14), получим:

$$\begin{aligned}
t_1^- &= 0; \\
t_2^- &= t_1^- + \tau_A = \langle 2; 1; 3 \rangle; \\
t_3^- &= t_1^- + \tau_B = \langle 4; 2; 1 \rangle; \\
t_4^- &= t_3^- + \tau_D = \langle 10; 4; 4 \rangle; \\
t_5^- &= \max \{ t_3^- + \tau_E; t_4^- \} = \max \{ \langle 14; 3; 3 \rangle; \langle 10; 4; 4 \rangle \} = \langle 14; 3; 3 \rangle; \\
t_6^- &= t_2^- + \tau_C = \langle 9; 5; 5 \rangle; \\
t_7^- &= \max \{ t_5^- + \tau_G; t_6^- + \tau_F \} = \max \{ \langle 19; 7; 4 \rangle; \langle 14; 6; 6 \rangle \} = \langle 19; 7; 4 \rangle; \\
T = t_8^- &= t_7^- + \tau_H = \langle 23; 9; 7 \rangle.
\end{aligned}$$

Обратный проход по графу приведёт к тому, что нечёткость времён выполнения будет учтена дважды, поэтому можно воспользоваться формулой для наиболее поздних сроков наступления событий из [17]:

$$t_i^+ = \max_l \left\{ t_i^-; \min_s (r_l - q_s(i)) \right\}, \quad (3.28)$$

где  $r_l$  — вес пути, проходящего через вершину  $i$ , от истока к стоку, а  $q_s$  — вес пути от текущего события до стока. Для стока принимается, что  $t_n^+ = t_n^-$ . При этом ведутся достаточно трудоёмкие вычисления с получением таблиц возможных наиболее поздних сроков для каждого события и используется способ выбора максимального из двух чисел (3.15), описанный в [30].

В графе, описываемом таблицей 1.1, существуют три возможных пути от истока к стоку — 1-2-6-7-8, 1-3-4-5-7-8, 1-3-5-7-8. Их длины равны

$$\begin{aligned}
r_1 &= \tau_A + \tau_C + \tau_F + \tau_H = \langle 18; 8; 9 \rangle; \\
r_2 &= \tau_B + \tau_D + \tau_{\Phi 1} + \tau_G + \tau_H = \langle 19; 10; 8 \rangle; \\
r_3 &= \tau_B + \tau_E + \tau_G + \tau_H = \langle 23; 9; 7 \rangle.
\end{aligned}$$

Для вершины 7 расстояние  $q_s(i) = \tau_H = \langle 4; 2; 3 \rangle$ , минимальная разность  $r_l - q_s(i)$  равна  $\langle 15; 13; 10 \rangle$ , поэтому, согласно формулам (3.28) и (3.15)

$$t_7^+ = \max \{ \langle 19; 7; 4 \rangle ; \langle 15; 13; 10 \rangle \} = \langle 19; 7; 4 \rangle .$$

Для остальных событий расчёт аналогичен. В конечном итоге получается, что критическим со степенью, равной единице, является путь  $\{B, E, G, H\}$ . Данный пример подтверждает соответствие модифицированного решения полному, полученному с использованием методов второй группы из [17, 30, 80].

## Выводы по третьей главе:

1. Рассматривается классическая задача сетевого планирования и её нечёткий случай, когда оценки продолжительности операций получены от экспертов и выражаются нечёткими треугольными числами. Приводятся определения, используемые в дальнейшем. Формулируется задача поиска критического пути в нечётких условиях как задача линейного программирования.
2. Анализируются существующие семейства способов решения рассматриваемой задачи. На примере нескольких методов, описанных в отечественной и зарубежной литературе, демонстрируются недостатки способов решения, использующих принцип обобщения Заде и арифметики нечётких чисел. В качестве наиболее универсального способа выделяется  $\alpha$ -уровневое или основанное на функциях ранжирования решение, позволяющее перейти к совокупности чётких задач линейного программирования.
3. На основании полученных в главе 2 результатов, предлагается алгоритм решения задачи сетевого планирования с нечёткими временными оценками как двух чётких задач линейного программирования, позволяющий получать устойчивое в смысле определений, введённых в главе 2, решение. Показывается необходимость применения аддитивной свёртки критериев в целевой функции возмущённой задачи линейного программирования как средства управления устойчивостью и предотвращения потерь экспертной информации.
4. В конце главы рассматривается пример применения предложенного алгоритма. Полученное модифицированное решение сравнивается с решениями, найденными другими описанными ранее способами.

## ГЛАВА 4. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

В ходе написания диссертации мы пришли к задаче сетевого планирования с нечёткими временными оценками, описанной в главе 3. В ней было показано, что эта задача может решаться как с помощью методов математического программирования, так и алгоритмически. В данной главе строится и описывается программный модуль, позволяющий выполнять сетевой анализ проекта в нечётких условиях с использованием двухточечных и  $\alpha$ -уровневых вычислений и формировать отчёт о решении в формате Microsoft Excel с наглядным представлением критического пути проекта и рассчитанными модифицированными сроками наступления событий. Особенностью описываемого модуля является то, что он не использует никаких специализированных средств и третьесторонних библиотек для представления нечётких чисел и выполнения операций над ними, как это делается, например, в [52,77,88], а обходится только стандартными вычислениями с применением действительных переменных. Это преимущество позволило в большей степени сфокусироваться на разработке и тестировании алгоритмов решения чётких  $\alpha$ -уровневых задач, а также логических модулей, повышающих удобство работы с программным продуктом.



## **4.1. Календарно-сетевое планирование в сфере разработки программного обеспечения**

Перспективность данного направления исследований заключается в преимуществах теории нечётких множеств при обработке нечётких данных, которыми изобилует реальная практика разработки ПО в сфере аутсорсинга. Действительно, характерными чертами процесса проектирования и разработки программного обеспечения являются:

- относительная уникальность разрабатываемого проекта — у некоторых участников может быть опыт участия в схожих проектах, однако он нивелируется тем, что остальная часть команды обычно впервые сталкивается с конкретной задачей автоматизации в некоторой предметной области;
- частое отсутствие полных требований к программному продукту либо необходимых для разработки ресурсов (согласованные и утверждённые дизайны, переводы и т.д.);
- разный уровень подготовки членов команды разработчиков;
- возможность изменения списка работ на поздних стадиях разработки — либо увеличение списка требований к продукту, либо его сокращение с целью ускорить разработку и приурочить выпуск готового продукта к некоторому событию;
- бюрократическая составляющая — затягивание сроков разработки из-за проблем в согласовании изменений или списка работ;

В связи с этим в настоящее время применяемые при планировании разработки ПО методы в основном являются неформальными и базируются на

использовании мнений нескольких экспертов. Эксперты, производящие первоначальную оценку проекта, обычно знают о вышеперечисленных потенциальных рисках и потому стараются учесть все риски в самих временных оценках. Чаще всего применяется вариант интервальной неопределённости, т. н. «вилка» — оценка наиболее пессимистичного и наиболее оптимистичного вариантов разработки. Однако у этого варианта есть несколько существенных недостатков:

- обычно заказчики ориентируются на нижнюю границу оценки и не уточняют список потенциальных факторов риска, которые приводят к достижению верхней границы интервала, при этом вынуждая руководителя проекта надавливать на экспертов с целью получения более оптимистичной и точной оценки;
- существует негласное правило «умножения на три», которое применяется руководителем проекта при анализе оценок, полученных от экспертов: для каждого этапа проекта из полученных оценок выбирается самая пессимистичная и утраивается — в результате неопределённость учитывается дважды;
- эксперт, коим обычно является инженер-программист, исходит из своего опыта и оценки собственной производительности, поэтому оценка может оказаться чрезмерно персонализированной — другой исполнитель задания просто не успеет выполнить запланированные работы в срок.

В связи с этим логичным выглядит получение оценок в виде нечётких треугольных чисел, поскольку эксперт на основании своего опыта может оценить, сколько времени обычно занимает некоторый этап разработки, и сколько времени он занимал в наилучшем и наихудшем случаях. Учитывая общую склонность инженеров-программистов к пессимистическому оцениванию вре-

мени разработки, оценки обычно получаются асимметричными. Применение к оценкам преобразования L позволяет получить модифицированные значения оценок, носители которых могут быть в дальнейшем интерпретированы как нечёткие интервалы, а тип (LL или RR) — как степень пессимизма или оптимизма.

Рассмотрим следующий случай. В фирму по разработке программного обеспечения обращается заказчик с просьбой оценить срок и примерную стоимость реализации комплексного решения — веб-портала и двух мобильных приложений под наиболее популярные платформы — приуроченного к празднованию круглой даты одного из государственных праздников. Для оценки продолжительности проекта собирается команда экспертов, состоящая из руководителя проекта, графического дизайнера, разработчика серверных приложений и двух разработчиков мобильных приложений. Требуется предоставить заказчику «вилку» по времени и указать возможные факторы риска незавершения проекта в срок.

В стандартный процесс оценивания проекта, состоящий из этапов идентификации операций, построения их взаимосвязей, оценки их продолжительностей и расчёта общего времени проекта, вносятся некоторые изменения. После идентификации операций строится т. н. вершинный граф проекта [116, 129], в котором операции представляются вершинами графа, а дугами показаны их зависимости друг от друга. Построение вершинного графа занимает гораздо меньше время ввиду отсутствия в нём проблемы фиктивных стрелок, однако для решения задачи планирования лучше подходит стрелочный граф — именно на такое представление проекта рассчитаны методы, описанные в главе 3. Решить это противоречие позволяет преобразование вершинного графа в стрелочный [67]. В основу алгоритма преобразования положены следующие правила построения стрелочного графа, описанные в [116, 129].

1. Каждый процесс в проекте представляется только одной дугой.
2. Каждый процесс идентифицируется двумя концевыми узлами.
3. Для поддержания правильных отношений предшествования при включении в сеть любого процесса, необходимо идентифицировать, какой процесс непосредственно предшествует текущему, какой должен выполняться после завершения текущего и какой выполняется параллельно с текущим. В результате идентификации соседних процессов принимается решение о том, требуется ли включить в сеть фиктивные операции для правильного отображения последовательности выполнения задач.

Ниже описана последовательность шагов по преобразованию вершинного графа в стрелочный [67].  $d_i^-$  обозначает число входящих в вершину  $v_i$  дуг,  $d_i^+$  — число исходящих, а сумма этих значений равна степени вершины  $d_i = d_i^- + d_i^+$ .

1. Топологическая сортировка исходного вершинного графа для определения порядка следования операций и начальных вершин графа.
2. Создание начального узла стрелочного графа и исходящих из него дуг-операций. Для этого из исходного вершинного графа  $G_v = (V_v, E_v)$  выбираются те вершины, у которых нет входящих в них стрелок, т.е. все  $v_i \in V_v : d_{v_i}^- = 0$ . Для этих  $N$  операций в новом стрелочном графе создаётся  $N + 1$  вершина, одна из которых будет общей начальной вершиной для всех стрелок. В итоге получается «веер» из вершин, изображённый на рис. 4.1.
3. Поочередное добавление оставшихся операций. Для операций, которые ещё не были добавлены в граф, возможны следующие варианты:

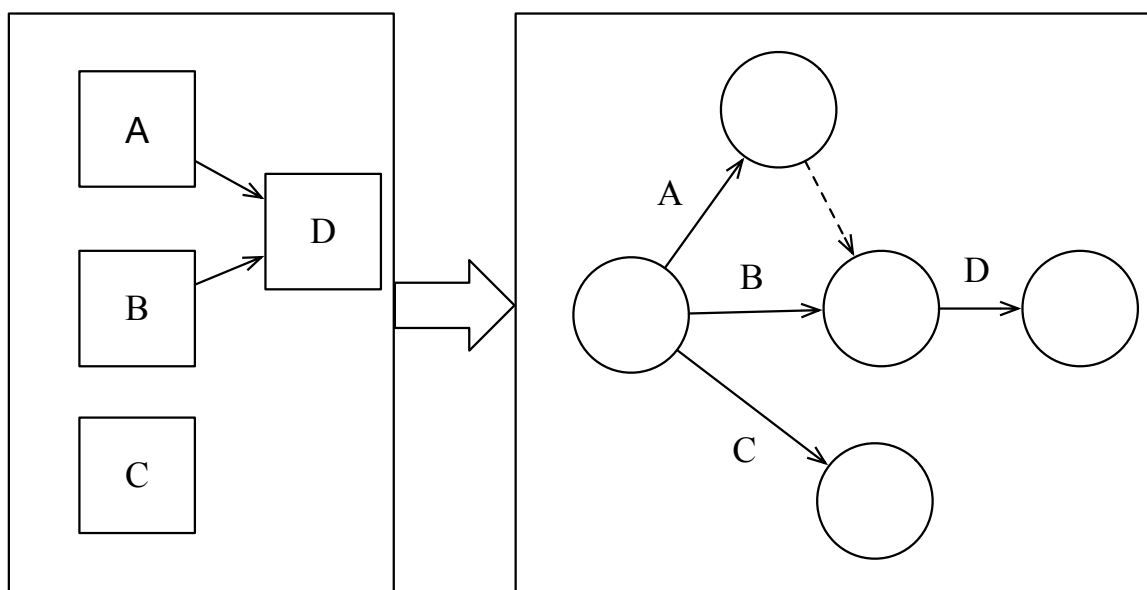


Рисунок 4.1. Преобразование начальных операций проекта

- а) Добавляемой операции непосредственно предшествует ровно одна операция. В этом случае конечная вершина стрелки, соответствующей непосредственно предшествующей операции, является начальной для новой стрелки. Пример изображён на рис. 4.2 — операции  $I$  непосредственно предшествует только одна операция  $G$ .
- б) Добавляемой операции непосредственно предшествует несколько операций. В этом случае в вершинном графе ищутся другие операции, которые ещё не были добавлены в новый граф, и у которых тот же набор непосредственно предшествующих операций. Если таких операций оказалось несколько, то выполняются действия, аналогичные описанным в п. 2., и добавляются фиктивные дуги, соединяющие конечные вершины предшествующих операций и начальную вершину "веера". На рис. 4.2 у вершин  $G$  и  $H$  как раз одинаковые непосредственно предшествующие вершины  $E$  и  $F$ . Иначе создаётся единственная дуга, начало которой соединяется фиктивными дугами с концами непосредственно предшествующих вершин.

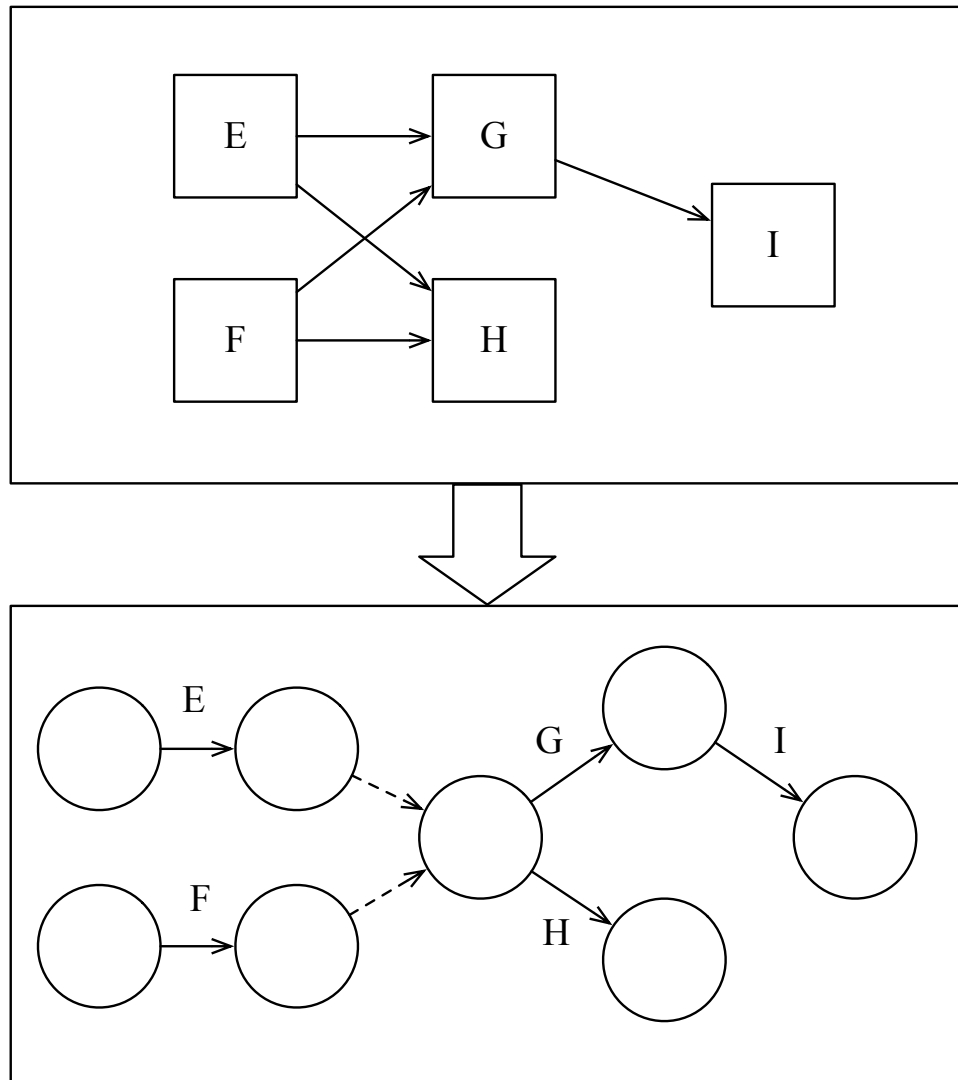


Рисунок 4.2. Дальнейшее добавление операций

4. Соединение концов завершающих дуг в одной вершине. Для этого в созданном стрелочном графе выбираются все вершины  $v_i \in V: d_{v_i}^+ = 0$ , и создаётся единственная конечная вершина. Все дуги, входящие в вершины  $v_i$ , перенаправляются на новую вершину, а старые конечные вершины удаляются. Пример такого преобразования можно увидеть на рис. 4.3
5. Упрощение графа с помощью удаления фиктивных дуг. На последнем этапе происходит уменьшение числа дуг в соответствии с правилами, описанными на стр. 123. В построенном стрелочном графе  $G_S$  выбира-

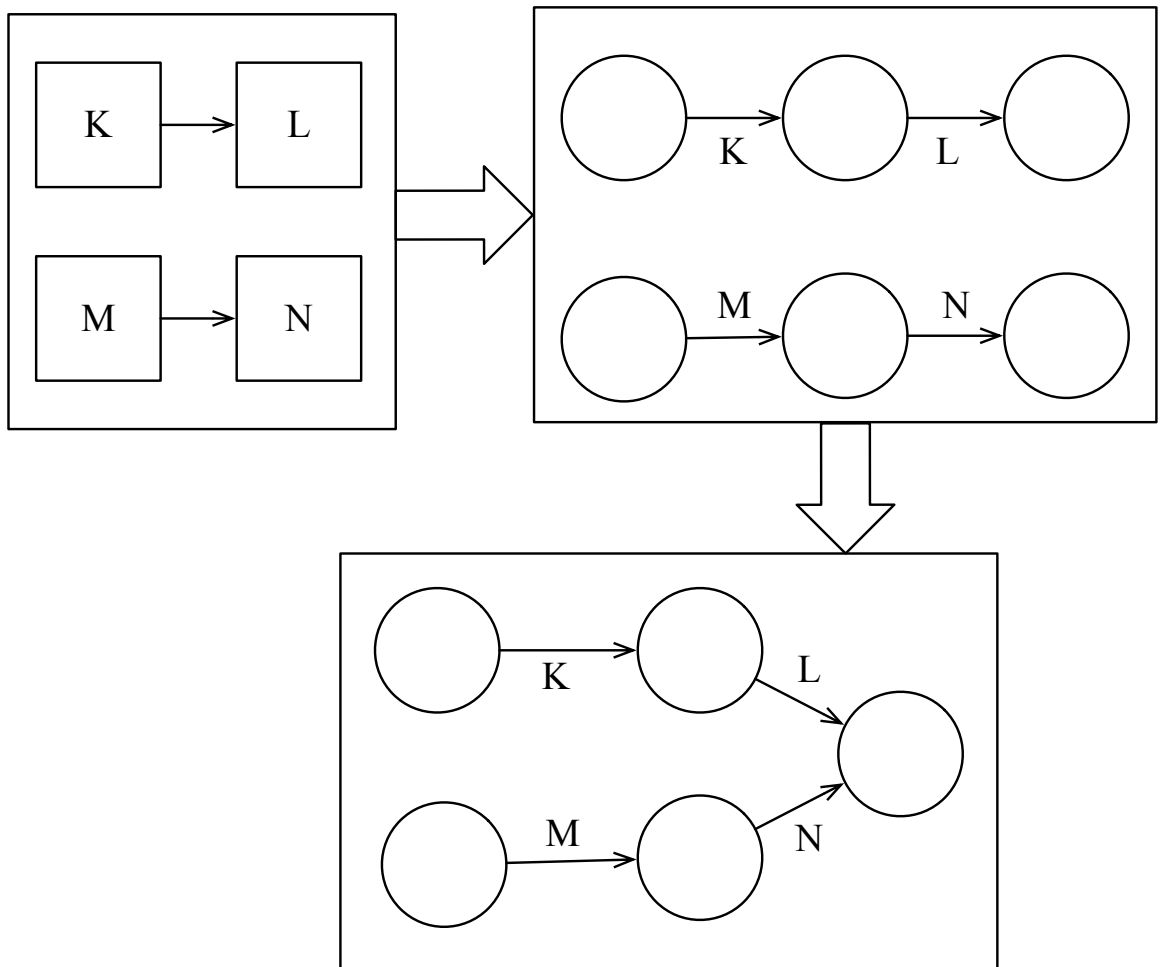


Рисунок 4.3. Соединение конечных дуг в одной вершине

ются все фиктивные дуги  $e_{F_i} = (v_{S_i}; v_{E_i})$ ; затем для каждой  $e_{F_i}$  происходит проверка, не используется ли она для обозначения параллельно выполняющихся процессов. Проверяются следующие условия:

- из начальной вершины  $v_{S_i}$  дуги  $e_{F_i}$  не выходит никаких других дуг, кроме самой  $e_{F_i}$ ;
- $V_P(v_{S_i}) \cap V_P(v_{E_i}) = \emptyset$  и  $V_S(v_{S_i}) \cap V_S(v_{E_i}) = \emptyset$ , где  $V_P(v_i), V_S(v_i)$  — множества вершин, непосредственно предшествующих вершине  $v_i$  и непосредственно следующих за  $v_i$  соответственно.

Если оба этих условия выполняются, то можно исключить проверенную дугу из графа, объединяя её начальную и конечную вершины.

После построения сетевого графика, эксперты-разработчики формулируют интервальные оценки  $[x_i^L, x_i^R]$  для всех операций проекта, но при этом их дополнительно просят указать наиболее возможный, с их точки зрения, срок выполнения операции  $m_i$ . Вместе эти три параметра используются для формирования нечёткой треугольной оценки  $\tau_i = \langle x_i^L, m_i, x_i^R \rangle = \langle m_i, m - x_i^L, x_i^R - m \rangle$ . Полученные нечёткие оценки  $\tau_i$  в дальнейшем будут использованы для расчёта общего времени выполнения проекта и поиска критического пути.

Критический путь и время выполнения проекта находятся с помощью модификации классического алгоритма Дейкстры. Возможны два варианта поиска критического пути: двухточечный, когда расчёты выполняются дважды — при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$ , и  $\alpha$ -уровневый, при котором задаётся число уровней поиска  $q$ , и алгоритм для чёткого случая выполняется  $q$  раз на различных  $\alpha$ -уровнях, расстояние между которыми равно  $\frac{1}{q}$ . В первом случае модифицированное нечёткое время выполнения восстанавливается согласно (2.47), а во втором на выходе получается нечёткая величина с дискретной функцией принадлежности, которую также в большинстве случаев удаётся интерполировать линейной зависимостью.

Найденные общее нечёткое время выполнения проекта и критические операции могут быть представлены заказчику как «вилка» и потенциально рискованные операции соответственно.

Перейдём к описанию программного средства, призванного автоматизировать процесс получения нечёткой временной оценки проекта и соответствующий ей критический путь.

## 4.2. Программное обеспечение

*Средства разработки.* В качестве средства разработки применяется интегрированная среда Microsoft Visual Studio 2010. Эта среда разработки под-



держивает компонентную технологию, позволяет легко создавать собственные компоненты и интегрироваться с внешними модулями ПО и офисными пакетами.

*Требования к аппаратному и программному обеспечению.* Для нормального функционирования программы необходимы следующие программные и технические средства:

- Intel-совместимый процессор с тактовой частотой не менее 1 ГГц;
- объём оперативной памяти — 1 ГБ и более;
- свободное место на жёстком диске — 100 МБ и более;
- операционная система — Windows 7 и выше;
- предустановленная среда выполнения .NET Framework Client Profile версии не ниже 4.0;
- предустановленный пакет визуализации Graphviz версии не ниже 2.28;
- предустановленный офисный пакет Microsoft Office версии не ниже 14 (Office 2010).

*Условия применения программы.* Разработанная программа решает научно-исследовательскую и прикладную задачи. Программа распространяется свободно и без каких-либо ограничений и гарантий.

#### **4.2.1. Программный модуль CSBusinessGraph**

##### **Назначение программы**

Разработанная программа предназначена для проведения вычислительного эксперимента по сетевому анализу проектов в условиях нечёткой неопределённости, цель которого заключалась в апробации описанных в главе 2

двухточечных вычислений и сравнении их результатов с результатами  $\alpha$ -уровневых вычислений.

### Интерфейс пользователя

Программа имеет интуитивно понятный интерфейс, представленный на рис. 4.4. На нижней панели расположены элементы управления представлением — кнопки и ползунок, позволяющие изменять масштаб. Для создания нового проекта необходимо выбрать пункт меню «File — New Project» (Файл — Новый проект). Также возможна загрузка ранее созданного проекта для редактирования. Для этого необходимо выбрать пункт меню «File — Open Existing Project» (Файл — Открыть существующий проект), после чего будет показан диалог открытия файла

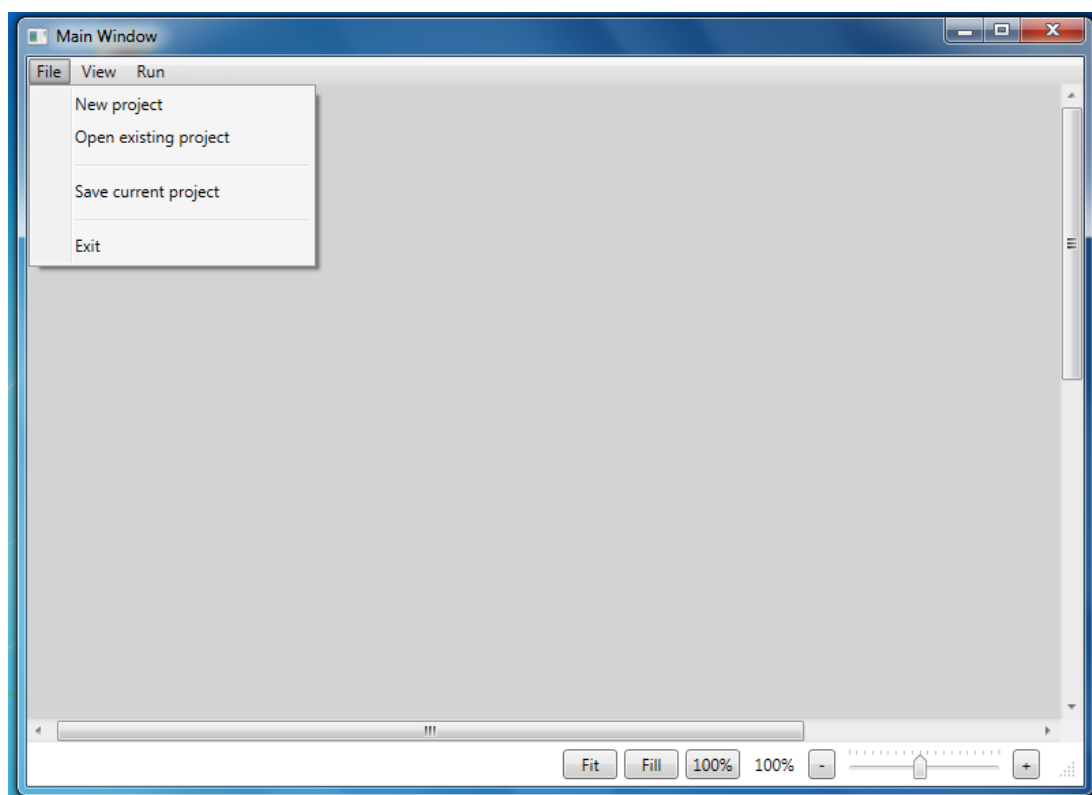


Рисунок 4.4. Главное окно приложения на старте

Вначале создаются операции путём вызова контекстного меню (рис. 4.5) и нажатия на опцию «Create Node» (Создать узел). При этом появляется ок-

но для ввода и редактирования данных операции, представленное на рис. 4.6. Это же окно можно вызвать, выделив вершину графа и нажав пункт меню «View» (Просмотр). Создание дуги выполняется с помощью механизма «drag-and-drop»: левая кнопка мыши нажимается в одной из двух точек узла, называемых точками сопряжения, и отпускается после перетаскивания курсора на вершине, в которую должна входить дуга.

Удалить существующую вершину или дугу можно, щёлкнув по всплывающей кнопке в виде ножниц, которая появляется, если задержать над дугой/вершиной курсор мыши (рис. 4.7).

Пункт меню «Run» (Запустить) показывает окно, в котором можно выбрать используемое в процессе анализа значение  $\lambda$  из списка predetermined options (середина отрезка, центр тяжести, оптимум сохранения информации). После выбора пользователем значения  $\lambda$ , приложение запускает проце-

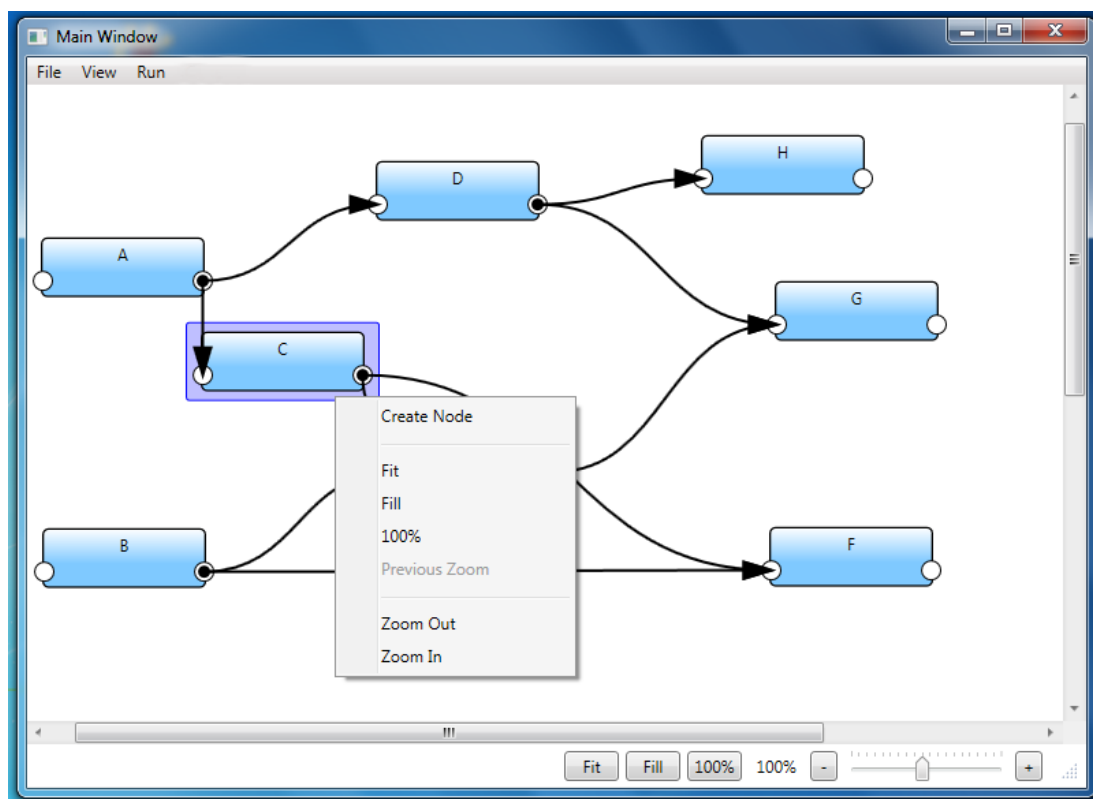


Рисунок 4.5. Вызов контекстного меню

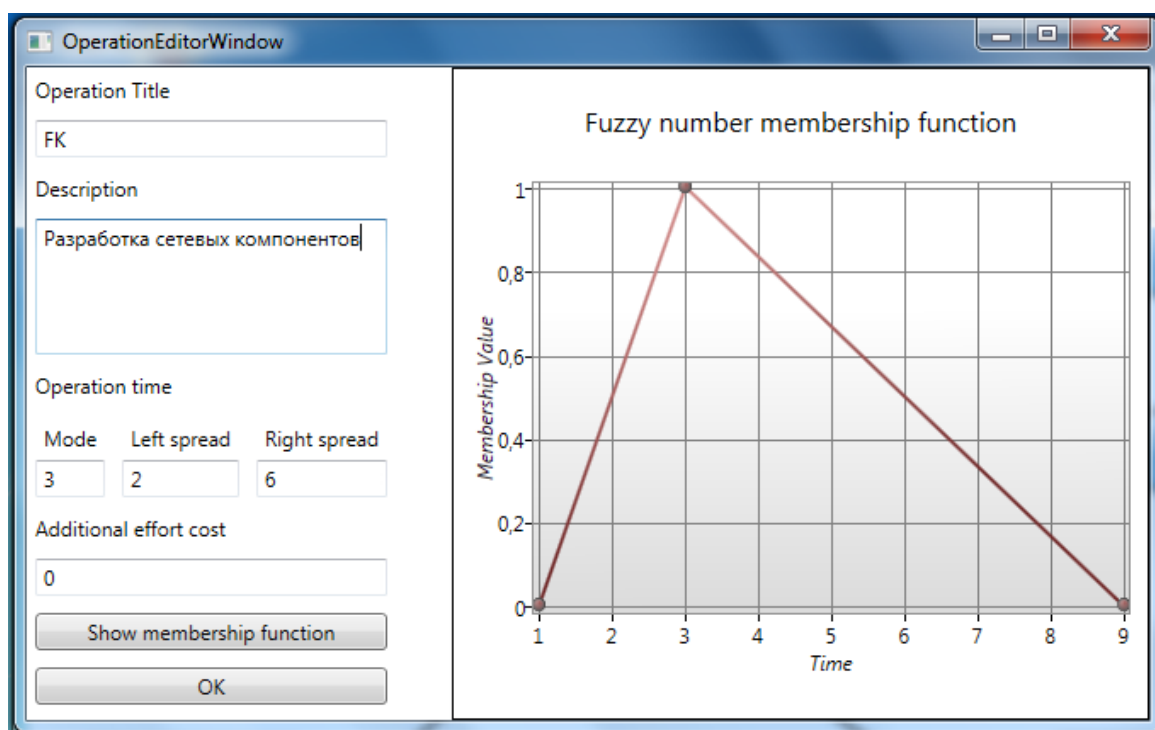


Рисунок 4.6. Окно редактирования характеристик операции

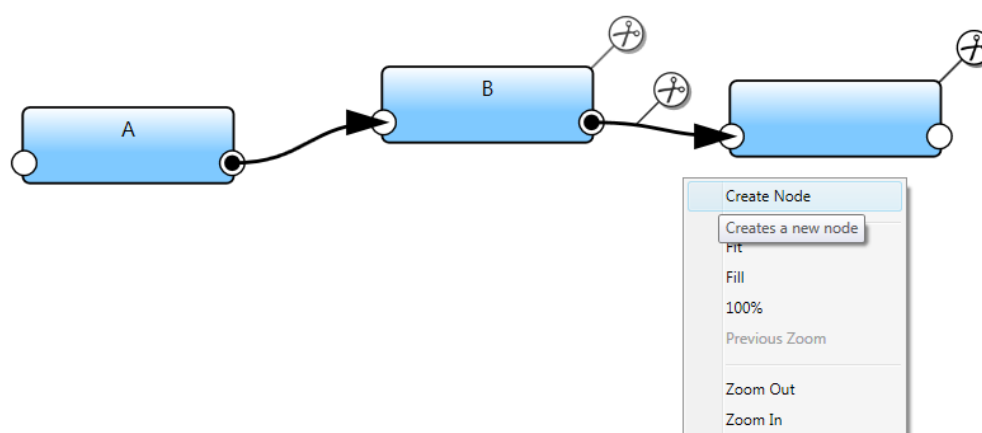


Рисунок 4.7. Всплывающие кнопки удаления элементов графа

дуру анализа. По её окончании показывается диалог, позволяющий выбрать место сохранения отчёта в формате Microsoft Excel.

Для выхода из приложения необходимо выбрать пункт меню «File — Exit» (Файл — Выйти) или нажать на стандартную кнопку закрытия окна в правом верхнем углу.

### Функциональные возможности программы

Программа имеет следующие функциональные возможности:

- создание модели проекта в виде вершинного графа в ручном режиме или импорт существующей модели из XML-файла;
- поддержка модели проекта в согласованном состоянии — проверка отсутствия циклов в графе и наличие только одной компоненты связности;
- редактирование временных оценок выполнения операций, выраженных в виде треугольных чисел, с помощью изменения параметров нечёткого числа;
- графическое представление функций принадлежности для временных оценок;
- автоматическое преобразование вершинного графа в стрелочный;
- выбор пользователем используемых при расчётах значений параметров  $\lambda$  преобразования  $L$ , соответствующих середине  $\alpha$ -сечения, проекции центра тяжести или оптимальному в смысле сохранения экспертной информации значению;
- реализация механизма расчёта критического пути на основе  $\alpha$ -уровневых и двухточечных вычислений;
- экспорт отчёта о решении задачи в формат Microsoft Excel с формированием графиков для модифицированных нечётких оценок, общего времени выполнения проекта и построением преобразованного стрелочного графа с выделением критических операций.

## Реализация

### *Структура данных*

Входными данными приложения является либо результаты пользовательского ввода, либо документ с описанием структуры проекта и временных оценок. Поскольку моделью проекта является разреженный вершинный граф, то для его хранения в памяти и на диске выбрана структура в виде списков смежности, в которой для каждой вершины указывается список идентификаторов связанных с ней вершин, а также кортеж из трёх действительных чисел, формирующих нечёткую оценку веса вершины. На диске модель проекта хранится в формате XML, что позволяет легко редактировать её.

Выходные данные агрегируются в формат Microsoft Excel и состоят из следующих частей:

- две таблицы, соответствующие значениям  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$  и содержащие рассчитанные для каждой операции проекта наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления её начального и конечного событий, а также полные резервы времени. Операции, принадлежащие критическому пути, выделены цветом;
- изображение полученного в результате преобразования стрелочного графа с нанесённым на него критическим путём;
- графики функций принадлежности для модифицированных нечётких продолжительностей операций.

### *Логическая структура программы*

Программа состоит из нескольких модулей, организованных в соответствие с шаблоном «модель–представление–модель представления» [9]. Схема взаимодействия между модулями программы показана на рис. 4.8.

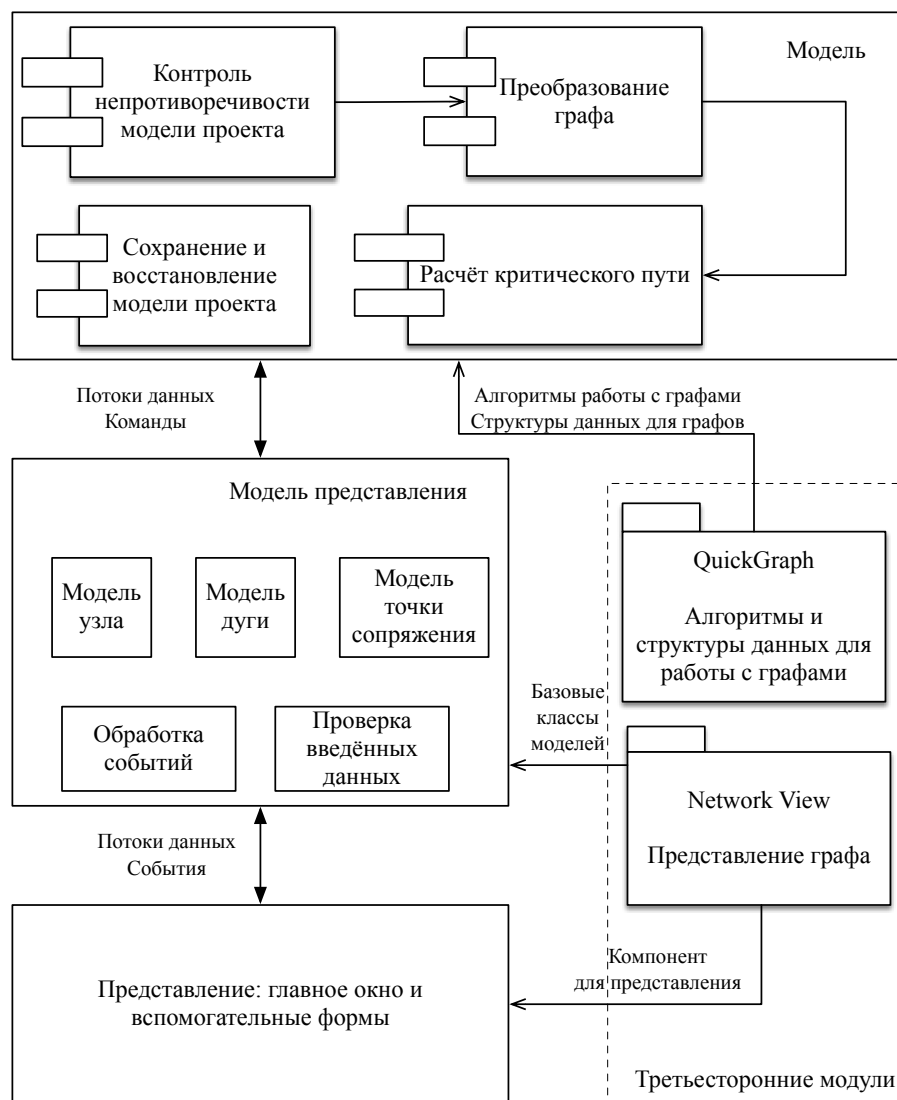


Рисунок 4.8. Взаимодействие между модулями приложения

Как видно из рис. 4.8, в программе были использованы третьесторонние компоненты, позволившие сократить общее время разработки и упростить тестирование — библиотека для работы с графами QuickGraph [35, 45] и компонент для визуального представления и редактирования графа NetworkView [9].

В программном модуле реализован алгоритм автоматического преобразования вершинного графа в стрелочный, описанный на стр. 124. Автоматический контроль согласованности выполняется с помощью алгоритма поиска в глубину при добавлении каждой новой вершины.

## Тестирование приложения

Результаты тестирования приложения приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Результаты тестирования приложения

Тест	Результат теста
Проверка доступности пунктов меню и кнопок на форме приложения	Доступны пункты меню
Выбор пункта меню «File — New Project» (Файл — Новый проект)	Создаётся новый проект и показывается пустая рабочая область окна
Выбор пункта меню «File — Open existing Project» (Файл — Открыть существующий проект)	Показывается диалог выбора файла с расширением *.csbgproj. Выбор файла и нажатие на кнопку «Открыть» приводит к загрузке проекта и его отображению на экране
Выбор пункта меню «File — Save Current Project» (Файл — Сохранить текущий проект)	Показывается диалог сохранения файла с расширением *.csbgproj. По нажатии на кнопку «Сохранить» создаётся файл проекта с указанным именем в указанной папке



Тест	Результат теста
Вызов контекстного меню и выбор опции «Create Node» (Создать узел)	Создаётся новая вершина графа и открывается окно редактирования параметров операции. При не полностью введённых данных программа выдаёт предупреждение. При нажатии на кнопку «Show membership function» (Показать функцию принадлежности) строится график функции принадлежности треугольного числа с указанными параметрами. Кнопка «ОК» позволяет закончить редактирование и продолжить работу с проектом
Выделение вершины графа и выбор пункта меню «View» (Просмотр)	Открывается окно редактирования параметров операции
Нажатие левой кнопки мыши на точке сопряжения, перетаскивание курсора мыши при зажатой левой кнопке и отпускание мыши на целевой вершине	Создаётся дуга графа между двумя вершинами
Создание дуги из одной вершины в другую при наличии обратной дуги	Приложение выдаёт предупреждение о невозможности операции ввиду нарушения свойства ацикличности и не создаёт дугу

Тест	Результат теста
Нажатие кнопки с изображением ножниц, связанной с дугой	Удаление дуги графа
Нажатие кнопки с изображением ножниц, связанной с вершиной	Удаление вершины графа и всех связанных с ней дуг — входящих и исходящих
Выбор пункта меню «Run»	Проверка числа компонент связности графа — если их больше одной, то приложение выдаёт предупреждение о невозможности запуска анализа. Иначе предлагается выбор значения параметра преобразования $L$ . После выбора пользователем предпочитаемого значения параметра запускается анализ проекта, по окончании которого приложение выводит диалог сохранения отчёта в формате Microsoft Excel
Нажатие стандартной кнопки «Заккрыть окно» или выбор пункта меню «File — Exit» (Файл — Выход)	Завершение работы приложения

## **Выводы по четвёртой главе:**

1. Рассматривается прикладная задача — оценка продолжительности выполнения проекта по разработке программного продукта и выделение потенциальных рисков. С помощью алгоритма преобразования вершинного графа в стрелочный модель проекта в виде вершинного графа, удобная для экспертов, преобразовывается в модель, подходящую для автоматизации анализа. А с помощью алгоритма поиска критического пути в проекте с нечёткими оценками находятся общее нечёткое время выполнения и критические операции.
2. Разработан программный комплекс, позволяющий выполнять автоматизированный сетевой анализ проекта с нечёткими временными оценками и включающий в себя проблемно-ориентированную составляющую для решения задачи оценки рисков и времени выполнения проекта в сфере разработки программного обеспечения. Программный модуль не использует никаких специализированных средств и третьесторонних библиотек для представления нечётких чисел и выполнения операций над ними и выполняет все вычисления только с использованием действительных переменных.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

## **Основные результаты диссертационного исследования:**

1. Предложен комплекс методов для моделей с чёткими отношениями и нечёткими параметрами, позволяющий применять классические методы решения задач и достигать требуемых качественных свойств решения — устойчивости, сохранения естественных математических соотношений и т. п..
2. На основе результатов анализа существующих моделей представления нечёткой числовой информации разработана параметрическая модель представления нечёткого числа, позволяющая максимально сохранять исходную экспертную информацию, а также метод двухточечных вычислений, приводящий к эффективной численной реализации решения задач, основанной на подходящих алгебраических структурах.
3. В рамках метода двухточечных вычислений рассмотрена проблема устойчивости решения задачи линейного программирования с нечёткими параметрами, обосновано введение свёртки критериев для управления устойчивостью и сформулирован алгоритм получения устойчивого решения задачи.
4. Предложенные методы решения задач с нечёткими параметрами апробированы на задаче сетевого планирования с нечёткими временными оценками. Полученное в результате решение соответствует решениям, найденным с помощью других методов, хорошо зарекомендовавших себя в мировой практике.

5. Разработан программный комплекс, позволяющий решать задачу оценки сроков и рисков при разработке программного обеспечения как задачу сетевого планирования с нечёткими временными оценками.

В заключение выражаю глубокую признательность своему научному руководителю, профессору Матвееву Михаилу Григорьевичу, за ценные замечания и поддержку.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Abbasbandy S., Allahviranloo T., Salahshour S. Ranking fuzzy numbers using fuzzy maximizing-minimizing points // Proceedings of the 7th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT-1022) and LFA-2011. — Atlantis Press, 2011. — P. 763–769.
2. Akther T., Ahmad S. Uddin. A computational method for fuzzy arithmetic operations // Daffodil International university journal of science and technology. — 2009. — Vol. 4. — P. 18–22.
3. B. K. Tripathy M. K. Satapathy, Choudhury P. K. Intuitionistic Fuzzy Lattices and Intuitionistic Fuzzy Boolean Algebras // International Journal of Engineering and Technology. — 2013. — Vol. 5, no. 3. — P. 2352–2361.
4. Chanas S., Dubois D., Zielinski P. On the Sure Criticality of Tasks in Activity Networks With Imprecise Duration // IEEE Transactions on systems, Man and Cybernetics – Part B: Cybernetics. — 2002. — Vol. 32, no. 4. — P. 393–407.
5. Chanas S., Zielinski P. Critical path analysis in the network with fuzzy activity times // Fuzzy sets and systems. — 2001. — Vol. 122. — P. 195–204.
6. Chang P.-T., Lee E.S. Ranking of Fuzzy Sets Based on the Concept of Existence // Computers and mathematics with applications. — 1994. — Vol. 27. — P. 1–21.
7. Chen S. P. Analysis of critical paths in a project network with fuzzy activity times // European Journal of Operational Research. — 2007. — Vol. 1, no. 183. — P. 442–459.

8. Chen S. P., Hsueh Y. J. A simple approach to fuzzy critical path analysis in project networks // *Applied Mathematical Modeling*. — 2008. — Vol. 32. — P. 1289–1297.
9. Davis A. NetworkView: A WPF custom control for visualizing and editing networks, graphs and flow-charts. — URL: <http://www.codeproject.com/Articles/182683/NetworkView-A-WPF-custom-control-for-visualizing-a> (online; accessed: 2015-01-04).
10. Detyniecki M., Yager R. R. Ranking fuzzy numbers using alpha-weighted valuations // *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*. — 2001. — Vol. 8(5). — P. 573–592.
11. Drewniak J. Axiomatic systems in fuzzy algebra // *Acta Cybernetica*. — 1981. — Vol. 5, no. 2. — P. 191–206.
12. Dutta P., Boruah H., Ali T. Fuzzy arithmetic with and without using alpha-cut method: A Comparative study // *International Journal of Latest trends in Computing*. — 2011. — Vol. 2.
13. El-Santawy M. F., Abd-Allah S. M. The longest Path Problem in Fuzzy Project Networks: A Case Study // *Gen. Math. Notes*. — 2011. — Vol. 3, no. 2. — P. 97–107.
14. Elizabeth S., Sujatha L. Fuzzy critical path problem for project network // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. — 2013. — Vol. 85, no. 2. — P. 223–240.
15. Filev D. P., Yager R. R. Operations on fuzzy numbers via fuzzy reasoning // *Fuzzy Sets and Systems*. — 1997. — Vol. 91, no. 2. — P. 137–142.

16. Fuller R. Neural Fuzzy Systems. — Abo, 1995. — P. 346. — URL: <http://uni-obuda.hu/users/fuller.robert/ln1.pdf> (online; accessed: 2014-12-29).
17. Fuzzy Theory Systems: Techniques and Applicatons / Ed. by Cornelius T. Leondes. — London : ACADEMIC PRESS, 1999. — P. 1777.
18. Ghoesiri K., Moghadam A. R. J. Continuous fuzzy longest path problem in project networks // Journal of Applied Sciences. — 2008. — Vol. 8(22). — P. 4061–4069.
19. Gu W., Lu T. Fuzzy algebras over fuzzy fields redefined // Fuzzy Sets and Systems. — 1993. — Vol. 53, no. 1. — P. 105–107.
20. Hanss M. On the Implementation of Fuzzy Arithmetical Operations for Engineering problems // Proceedings of the 18th International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society — NAFIPS-99. — 1999. — P. 462–466.
21. Hanss M. A Nearly Strict Fuzzy Arithmetic for Solving Problens with Uncertanties // Proceedings of the 19th International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society — NAFIPS 2000. — 2000. — P. 439–443.
22. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications. — Netherlands : Springer, 2005. — P. 256.
23. Kosinski W. Calculation and reasoning with ordered fuzzy numbers // Proceedings of the 1st conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT) and LFA-2005. — Atlantis Press, 2005. — P. 412–417.



24. Kreinovich V., Nguyen H. T., Pedrycz W. How to Make Sure That  $\lfloor \frac{100}{i} \rfloor + 1$  Is  $\lfloor \frac{100}{i} \rfloor$  in Fuzzy Arithmetic: Solution and Its (Inevitable) Drawbacks // Proceedings of the Joint 9th World Congress of the International Fuzzy Systems Association and 20th International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society IFSA/NAFIPS 2001, Vancouver, Canada, July 25-28, 2001. — 2001. — P. 1653–1658.
25. Kumar A., Kaur P. A New Method for Fuzzy Critical Path Analysis in Project Networks with a New Representation of Triangular Fuzzy Numbers // Applications and Applied Mathematics: An International Journal. — 2010. — Vol. 5. — P. 345–369.
26. Kumar A., Kaur P. Exact optimal solution of fuzzy critical path problems // Applications and Applied Mathematics: An International Journal. — 2011. — Vol. 6. — P. 251–267.
27. Liang G. S., Han T. C. Fuzzy Critical Path for Project Network // Information and Management Sciences. — 2004. — Vol. 15, no. 4. — P. 29–40.
28. Madarasz R. Algebras of Fuzzy Sets. — URL: <http://www.math.sk/fsta2012/presentations/madarasz.pdf> (online; accessed: 2015-01-04).
29. Maduri K. Usha, Saradhi B. Pardha, Shankar N. Ravi. Fuzzy Linear Programming Model for Critical Path Analysis // International Journal of Contemp. Math. Sciences. — 2013. — Vol. 8. — P. 93–116.
30. McCahon C. S., Lee E. S. Project network analysis with fuzzy activity times // Computers and Mathematics with Applications. — 1988. — Vol. 15, no. 10. — P. 829–838.

31. Mordeson J. N., Malik D. S. Fuzzy Commutative Algebra. — Singapore : World Scientific Publishing, 1998. — P. 424.
32. Morovatdar R., Aghaie A., Yakhchali S. Haji. Fuzzy Network Analysis for Projects with High Level of Risks – Uncertainty in Time and Structure // International Journal of Industrial Engineering and Production Research. — 2011. — Vol. 22, no. 1. — P. 73–82.
33. Nanda S. Fuzzy algebras over fuzzy fields // Fuzzy Sets and Systems. — 1990. — Vol. 37, no. 1. — P. 99–103.
34. P. Bauer S. Nouak R. Winkler. A brief course in Fuzzy Logic and Fuzzy Control. — URL: <http://www.esru.strath.ac.uk/Reference/concepts/fuzzy/fuzzy.htm> (online; accessed: 2014-12-19).
35. QuickGraph, Graph Data Structures And Algorithms for .NET. — URL: <http://quickgraph.codeplex.com/> (online; accessed: 2015-01-04).
36. Rao P. P. B., Shankar N. R. Ranking generalized fuzzy numbers using area, mode, spreads and weight // International Journal of Applied Science and Engineering. — 2012. — Vol. 1, no. 10. — P. 41–57.
37. Rosenfeld A. Fuzzy Groups // Journal of mathematical analysis and applications. — 1971. — Vol. 35. — P. 512–517.
38. Shankar N. Ravi, Sireesha V. Using Modified Dijkstra's Algorithm for Critical Path method in a Project Network // International Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2010. — Vol. 5, no. 2. — P. 217–225.

39. Shankar N. Ravi, Sireesha V., Rao P. Phani Bushan. Critical Path Analysis in the Fuzzy Project Network // *Advances in Fuzzy Mathematics*. — 2010. — Vol. 5, no. 3. — P. 285–294.
40. Siler W., Buckley J. J. *Fuzzy expert systems and fuzzy reasoning*. — Hoboken, New Jersey : John Wiley and Sons, Inc., 2005. — P. 403.
41. Yager R. R. On the lack of inverses in fuzzy arithmetic // *Fuzzy sets and systems*. — 1980. — Vol. 4, no. 1.
42. Zadeh L. A. Fuzzy sets // *Information and control*. — 1965. — no. 8. — P. 338–353.
43. Zielinski P. On computing the latest starting times and floats of activities in a network with imprecise durations. — URL: <http://prac.im.pwr.edu.pl/~pziel/publications/reports/fss2.pdf> (online; accessed: 2014-12-29).
44. Zimmermann H.-J. *Fuzzy Set Theory and Its applications*. — 3rd edition. — New York : Springer Science+Business Media, LLC, 1996. — P. 400.
45. de Halleux J. QuickGraph: A 100% C# graph library with Graphviz Support. — URL: <http://www.codeproject.com/Articles/5603/QuickGraph-A-100-C-graph-library-with-Graphviz-Sup> (online; accessed: 2015-01-04).
46. Алгоритмы: построение и анализ: пер. с англ. / Т. Х. Кормен, Ч. И. Лейзерсон, Р. Л. Ривест, К. Штайн. — 2-е изд. — М. : Издательский дом «Вильямс», 2005. — С. 1296.
47. Алексеев А. В. *Применение нечёткой математики в задачах принятия решений*. — Рига : Риж. политехн. ин-т, 1983.

48. Алтунин А. Е., Семухин М. В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечётких условиях. — Тюмень : изд-во Тюменского государственного университета, 2000.
49. Артёмов М. А., Матвеев М. Г., Стародубцев И. Ю. Исследование задачи линейного программирования с нечёткими параметрами // Вестник Воронежского государственного технического университета. — 2011. — № 12.1. — С. 39–42.
50. Ашманов С. А. Линейное программирование. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. — С. 340.
51. Балашов В. Г, Заложнев А. Ю., Новиков Д. А. Механизмы управления организационными проектами. — М. : ИПУ РАН, 2003. — С. 84.
52. Балашов О. В., Круглов В. В. Программная реализация бинарных арифметических операций над нечёткими числами // Программные продукты и системы. — 2009. — № 2. — С. 121–122.
53. Баркалов С. А., Котенко А. М., Фёдорова И. В. Задача календарного планирования с ограниченными ресурсами при нечётких продолжительностях работ // Системы управления и информационные технологии. — 2005. — Т. 21, № 4. — С. 37–40.
54. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети: пер. с англ. / Под ред. А. И. Теймана. — М. : Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1973. — С. 368.
55. Батыршин И. З. Основные операции нечёткой логики и их обобщения. — Казань : Отечество, 2001. — С. 102.

56. Белоусов А.И. Ткачев С.Б. Дискретная математика: учеб. для вузов / Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. — 3-е изд. — М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004. — С. 744.
57. Блюмин С. Л., Шуйкова И. А. Модели и методы принятия решений в условиях неопределённости. — Липецк : ЛЭГИ, 2001. — С. 138.
58. Борисов А. Н., Алексеев А. В., Меркурьева Г. В. Обработка нечёткой информации в системах принятия решений. — М. : Радио и связь, 1989. — С. 304.
59. Борисов В. В., Круглов В. В., Федулов А. С. Нечёткие модели и сети. — 2-е изд. — М. : Горячая линия – Телеком, 2012. — С. 284.
60. Борисов А. Н., Крумберг О. А., Федоров И. П. Принятие решений на основе нечётких моделей: примеры использования. — Рига : Зинатне, 1990. — С. 184.
61. Борисов В. В., Федулов А. С., Зернов М. М. Основы нечёткой арифметики: учебное пособие для вузов. — М. : Горячая Линия–Телеком, 2014. — С. 98.
62. Бочарников В., Свешников С. Алгоритм арифметических операций с нечеткими числовыми данными. — URL: [http://sveshnikovsv.socionet.ru/files/FuzzyArifmethic\\_Rus.pdf](http://sveshnikovsv.socionet.ru/files/FuzzyArifmethic_Rus.pdf) (дата обращения: 2015-01-04).
63. Бурков В. А., Новиков Д. А. Элементы теории графов. — 2004. — С. 28. — URL: [http://www.mtas.ru/start/t\\_garf.pdf](http://www.mtas.ru/start/t_garf.pdf) (дата обращения: 2014-12-15).

64. Воеводин В. В. Линейная алгебра. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. — С. 400.
65. Вопросы анализа и процедуры принятия решений / Под ред. к.ф.-м.н. И.Ф. Шахнова. — М. : Мир, 1976. — С. 230.
66. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Информационные технологии управления проектами в условиях расплывчатой неопределённости // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования: материалы V международной конференции. Воронеж, 11-16 сентября 2012 г. Дополнительный выпуск. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. — С. 8–10.
67. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Разработка информационных технологий и средства управления проектами в условиях расплывчатой неопределённости // Сборник студенческих научных работ факультета компьютерных наук ВГУ / Под ред. к.ф.-м.н. Е. А. Сирота. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. — С. 30–35.
68. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Влияние преобразования  $L$  на результаты арифметических операций с нечёткими  $LR$ -числами // Сборник трудов XXII международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации», Алушта, 18–24 сентября 2013 г. — М. : Изд-во МГУПИ, 2013. — С. 14–15.
69. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Исследование свойств линейного отображения в задачах с нечёткими параметрами // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XIII научно-методической конференции. 7–8 февраля 2013 г.: в 4 т. — Т. 1. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2013. — С. 298–304.

70. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Алгебраические операции с нечеткими LR-числами с использованием преобразования L // Программная инженерия. — 2014. — № 8. — С. 23–29.
71. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Методы параметризованного сравнения нечётких треугольных и трапециевидных чисел // Вестник ВГУ, серия «Системный анализ и информационные технологии». — 2014. — № 2. — С. 90–97.
72. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Постановка задачи об устойчивости альфа-уровневого метода поиска нечёткого критического пути // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XIV Международной научно-методической конференции, Воронеж, 6–8 февраля 2014 г.: в 4 т. — Т. 2. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — С. 360–363.
73. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Способ решения нечёткой задачи КСПУ с использованием преобразования L // Радиоэлектроника, электротехника и энергетика: двадцатая международная научно-техническая конференция студентов и аспирантов: тезисы докладов. Москва, 27–28 февраля 2014 г.: в 4 т. — Т. 2. — М. : Издательский дом МЭИ, 2014. — С. 58.
74. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Устойчивость критического пути в задаче сетевого планирования с нечёткими параметрами // Сборник трудов XXIII международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации», Алушта, 14–20 сентября 2014 г. — М. : ИКД «Зерцало-М», 2014. — С. 73–74.
75. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Устойчивость решения в задаче о критическом пути с нечёткими параметрами // Вестник ВГТУ. — 2014. — № 7. — С. 90–97.

76. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г., Канищева О. И. Арифметические операции над двухкомпонентными нечёткими числами // Вестник ВГУ, серия «Системный анализ и информационные технологии». — 2014. — № 2. — С. 75–82.
77. Галлямов Е. Р., Ухоботов В. И. Компьютерная реализация операций с нечёткими числами // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. — 2014. — Т. 3, № 3. — С. 97–108.
78. Гриняев С. Нечёткая логика в системах управления. — URL: <http://old.computerra.ru/offline/2001/415/13052/print.html> (дата обращения: 2014-12-19).
79. Губко М. В. Лекции по принятию решений в условиях нечеткой информации. — М. : ИПУ РАН, 2004. — С. 38.
80. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике: Пер. с франц. — М. : Радио и связь, 1990. — С. 288.
81. Евдокимов А. В. Метод нечёткой линеаризации для численного решения алгебраических и дифференциальных уравнений // Электронный журнал «Исследовано в России». — 2003. — Т. 6. — С. 2042–2058. — URL: <http://www.sci-journal.ru/articles/2003/168.pdf> (дата обращения: 2014-12-15).
82. Живицкая Е. Н. Системный анализ и проектирование: курс лекций. Лекция 12: Языки описания выбора. — URL: <http://victor-safronov.narod.ru/systems-analysis/lectures/zhivickaya/14.html> (дата обращения: 2014-12-15).



83. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближённых решений. — М. : Мир, 1976. — С. 165.
84. Зак Ю. А. Принятие решений в условиях нечётких и размытых данных: Fuzzy-технологии. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — С. 352.
85. Ибрагимов В. А. Элементы нечёткой математики. — Баку, 2010. — С. 392. — URL: [http://www.anl.az/el\\_ru/i/iv\\_enm.pdf](http://www.anl.az/el_ru/i/iv_enm.pdf) (дата обращения: 2014-12-15).
86. Карпенко А. С., Шалак В. И. Минимальные модели для нечеткой алгебры типа 2 // Труды научно-исследовательского семинара логического центра института философии РАН. — М., 1997. — URL: <http://philosophy.ru/iphras/library/log/11/s9603kar.html> (дата обращения: 2014-12-29).
87. Касьянов В. Н., Евстигнеев В. А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. — СПб. : БХВ-Петербург, 2003. — С. 1104.
88. Коротеев М. В. Разработка арифметики нечётких чисел в общей форме // Известия Волгоградского государственного технического университета. — 2012. — Т. 4, № 13. — С. 122–127.
89. Косоруков О. А., Мищенко А. В. Исследование операций: учебник / Под ред. проф. Н. П. Тихомирова д.э.н. — М. : Издательство «Экзамен», 2003. — С. 448.
90. Кофман А. Введение в теорию нечётких множеств: пер. с франц. — Москва : Радио и связь, 1982. — С. 432.
91. Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М. Дискретная математика для инженера. — 2-е изд. — М. : Энергоатомиздат, 1988. — С. 480.

92. Левин В. И. Интервальная математика и изучение неопределённых систем // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. — 2005. — № 5. — URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/51334.html> (дата обращения: 2014-12-15).
93. Леденёва Т. М., Черменев Д. А., Жданова С. С. Параметрический метод сравнения нечётких чисел // Вестник Воронежского государственного технического университета. — 2010. — Т. 6, № 6. — С. 62–66.
94. Лотов А. В., Пospelова И. И. Многокритериальные задачи принятия решений: Учебное пособие. — М. : МАКС Пресс, 2008. — С. 197.
95. Лю Б. Теория и практика неопределённого программирования: Пер. с англ. — М. : БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005. — С. 416.
96. Матвеев М. Г. Метод решения задачи нечеткого математического программирования // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XI Международной научно-методической конференции, Воронеж, 10–11 февраля 2011 г.: в 3 т. — Т. 2. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2011. — С. 24–26.
97. Матвеев М. Г. Решение задачи линейного программирования с нечёткими параметрами // Современная экономика: проблемы и решения. — 2012. — № 1. — С. 170–179.
98. Мелькумова Е. М. О решении некоторых задач нечеткого математического программирования // Вестник ВГУ, серия «Системный анализ и информационные технологии». — 2009. — № 2. — С. 19–24.
99. Методы решения задач управления предприятием в условиях расплывчатой неопределённости / Г. Н. Лебедев, О. И. Канищева, М. Г. Матвеев,

- М. Е. Семёнов // Вестник ВГУ, серия: Системный анализ и информационные технологии. — 2012. — № 1. — С. 102–106.
100. Нгуен Н. Х., Леденёва Т. М. О вычислении функции подобия для нечётких чисел // Научно-теоретический журнал «Вестник БТГУ им. В. Г. Шухова». — 2011. — № 4. — С. 177–182.
101. Нечёткие гибридные системы. Теория и практика / И. З. Батыршин, А. О. Недосекин, А. А. Стецко и др. ; Под ред. Н. Г. Ярушкиной. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. — С. 208.
102. Нечёткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А. Н. Аверкин, И. З. Батыршин, А. Ф. Блишун и др. ; Под ред. Д. А. Поспелова. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — С. 312.
103. Нечёткие множества и теория возможностей. Последние достижения: пер. с англ. / Под ред. Р. Р. Ягера. — М. : Радио и связь, 1986. — С. 408.
104. Орлов А. И. Нечисловая статистика. — М. : МЗ-Пресс, 2004. — С. 513.
105. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечёткой исходной информации. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — С. 208.
106. Павлов А. Н., Соколов Б. В. Принятие решений в условиях нечёткой информации: учебное пособие. — СПб. : ГУАП, 2006. — С. 72.
107. Пегат А. Нечёткое моделирование и управление: пер. с англ. — 2-е изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. — С. 798.
108. Ротштейн А. П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткая логика, генетические алгоритмы, нейронные сети. — Винница : УНИВЕРСУМ—Винница, 1999. — С. 320.

109. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечёткие системы: пер. с польск. И.Д. Рудинского. — М. : Горячая линия – Телеком, 2006. — С. 452.
110. Рыжов А. П. Элементы теории нечётких множеств и её приложений. — М., 2003. — С. 80. — URL: <http://intsys.msu.ru/staff/ryzhov/FuzzySetsTheory&Applications.pdf> (дата обращения: 2014-12-29).
111. Скороход С. В. Анализ индексов ранжирования нечётких чисел треугольного вида // Известия ЮФУ. Технические науки. — 2010. — Т. 106, № 5. — С. 91–95.
112. Соколов А. М. Методы и алгоритмы нечёткого моделирования механических систем // Информационные технологии. — 2007. — № 3. — С. 13–20.
113. Спесивцев А.В. Управление рисками чрезвычайных ситуаций на основе формализации экспертной информации / Под ред. проф. В. С. Артамонова. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2004. — С. 238.
114. Спесивцев А. В., Дроздов А. В., Кимяев И. Т. Обобщение дополнительных арифметических операций над нечёткими числами LR-типа // SCM-2011, Saint-Petersburg, 23-25 June 2011. — СПб., 2011.
115. Стародубцев И. Ю. Модели и методы многоцелевых задач сетевого планирования в условиях нечеткой неопределенности продолжительностей операций : Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук : 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы, комплексы программ / И. Ю. Стародубцев ; Воронежский государственный университет. — 2012.

116. Таха Х. А. Введение в исследование операций. — 7-е изд. — М. : Издательский дом «Вильямс», 2005. — С. 912.
117. Усков А. А. Арифметика LR-нечётких и гиперкомплексных чисел // Информатика, математическое моделирование, экономика: Сборник научных статей по итогам Четвёртой международной научно-практической конференции, г. Смоленск, 23–25 апреля 2014 г. В 2-х томах. — Т. 1. — Смоленск : Смоленский филиал Российского университета кооперации, 2014. — С. 230–235.
118. Усков А. А. Сетевой график с продолжительностями работ в виде нечётких чисел LR-типа // Управление большими системами. — 2014. — Т. 47. — С. 6–17.
119. Усков А. А., Киселев И. А. Комплексный и матричный методы выполнения арифметических операций над нечёткими числами // Управление большими системами. — 2012. — Т. 40. — С. 96–107.
120. Усков А. А., Киселев И. А. Связь арифметики нечётких чисел с арифметикой кватернионов и её применение при анализе систем управления // Управление большими системами. — 2014. — Т. 48. — С. 59–70.
121. Усков А. А., Круглов В. В. Интеллектуальные системы управления на основе методов нечёткой логики. — Смоленск : Смоленская городская типография, 2003. — С. 177.
122. Усков А. А., Кузьмин А. В. Интеллектуальные технологии управления. Искусственные нейронные сети и нечёткая логика. — М. : Горячая Линия–Телеком, 2004. — С. 143.

123. Усков А. А., Сургучева И. В., Горбунов А. М. Анализ систем обработки информации и управления с помощью групповых нечётких чисел // Программные продукты и системы. — 2009. — № 3. — С. 1209–1214.
124. Ухоботов В. И. Введение в теорию нечётких множеств и её приложения: учебное пособие. — Челябинск : УрСЭИ АТ и СО, 2005. — С. 133.
125. Ухоботов В. И. Избранные главы теории нечётких множеств: учебное пособие. — Челябинск : Издательство Челябинского государственного университета, 2011. — С. 245.
126. Ухоботов В. И., Щичко П. В. Об одном подходе к сравнению нечётких чисел // Вестник ЮУрГУ. — 2011. — № 37 (254). — С. 54–62.
127. Фёдорова И. В. Вычисления нечёткого критического пути // Управление большими системами. — 2004. — № 7. — С. 93–100.
128. Штовба С. Д. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику. — Винница : УНИВЕРСУМ Винница, 2001. — С. 756.
129. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений: пер. с англ. член.-корр. РАН И. И. Елисеевой. — М. : Аудит, ЮНИТИ, 1997. — С. 590.
130. Ярушкина Н. Г. Основы теории нечётких и гибридных систем: учебное пособие. — М. : Финансы и статистика, 2004. — С. 320.
131. Яхьяева Г. Э. Нечёткие множества и нейронные сети: учебное пособие. — М. : Интернет-Университет Информационных Технологий and БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — С. 316.