

Проект  
На правах рукописи

**Воронцов Ярослав Александрович**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ  
ВЫБОРА С РАСПЛЫВЧАТОЙ  
НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ НА ОСНОВЕ  
МЕТОДОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И АЛГЕБРЫ  
НЕЧЕТКИХ ПАРАМЕТРОВ**

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**Автореферат**  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет»

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор  
**Матвеев Михаил Григорьевич**

Официальные оппоненты: **Блюмин Семён Львович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Липецкий государственный технический университет,  
кафедра прикладной математики, профессор  
**Анисимов Дмитрий Николаевич**,  
кандидат технических наук, доцент,  
Московский энергетический институт,  
кафедра управления и информатики, доцент

Ведущая организация: Тверской государственный технический университет

Защита состоится «    » апреля 2015 г. в XX часов на заседании диссертационного совета Д.212.038.020 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет» по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., д. 1, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета и на сайте <http://www.science.vsu.ru/disser>.

Автореферат разослан «    » марта 2015 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
кандидат физико-математических наук  
доцент

Шабров С.А.

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Развитие теории нечётких множеств позволило расширить возможности учёта различных видов неопределённости, для описания которых в течение долгого времени в моделях использовались методы теории вероятностей и математической статистики. Исторически сложилось два основных направления нечёткой математики — нечёткий логический вывод, использующий модели с нечёткими отношениями, и мягкие вычисления, применяемые в классических моделях с чёткими отношениями и нечёткими параметрами. Удобство этих моделей состоит в том, что они достаточно хорошо проработаны и испытаны временем и во многих случаях позволяют получать решение в аналитическом виде.

Фаззификация известных ранее классических задач и создание новых нечётких моделей привела к необходимости разработки новых методов решения, позволяющих применять экспертные оценки на различных этапах моделирования. В работах известных зарубежных (D. Dubois, R. Fuller, A. Prade, R. Yager, L. Zadeh, H. Zimmermann и др.) и отечественных (В. Г. Балашов, А. Н. Борисов, В. В. Борисов, В. В. Круглов, С. Л. Блюмин, А. А. Усков и др.) учёных и исследователей рассмотрено и проанализировано множество применений результатов теории нечётких множеств и мягких вычислений к решению задач выбора, управления и принятия решений. Обратной стороной использования моделей с нечёткостью стало возникновение противоречий между решениями, полученными с применением новых методов, и результатами классических теорий, потеря устойчивости решений, нарушение естественных отношений в моделях, в которых нечёткими являются только параметры, неоправданное расширение степени нечёткости результата, повышение вычислительной сложности задач.

Актуальность темы исследования определяется необходимостью разработки математических моделей, численных методов и программ, инвариантных к широкому кругу различных задач с чёткими отношениями и нечёткой неопределённостью параметров и позволяющих решать их как совокупность нескольких чётких, используя при этом классические методы моделирования и стандартное ПО и обеспечивая требуемые в конкретной задаче качественные свойства решения — устойчивость, сохранение чётких математических соотношений и т. п.

Диссертационная работа выполнена в рамках одного из основных научных направлений Воронежского государственного университета «Разработка моделей, методов и алгоритмов обработки информации для создания информационных технологий и систем нового поколения» (№ гос. регистрации 01201263910).

**Целью** диссертационной работы является построение и исследование моделей учёта нечёткой неопределённости, обеспечивающих требуемые свойства решения различных прикладных задач — устойчивость, сохранение чётких математических соотношений, ограничение расширения неопределённости, а также разработка методов численного решения на основе вводимых моделей. Для достижения поставленной цели в работе решались следующие **задачи**:

1. Анализ существующих методик нечётких вычислений с точки зрения сохранения свойств решения задач.
2. Разработка модели представления нечётких чисел, позволяющей максимально сохранять исходную экспертную информацию и обеспечить требуемые качественные свойства решений (устойчивость, сохранение чётких математических соотношений и т. п.).
3. Разработка методики эффективной численной реализации решения задач с нечёткими параметрами, основанной на подходящих алгебраических структурах и её тестирование на примере задачи сетевого планирования с нечёткими параметрами.
4. Разработка и верификация программного обеспечения, реализующего предложенную модель представления нечётких параметров и методики численного решения задач с нечёткими параметрами.

**Методы исследования.** В диссертационной работе использованы основные положения и методы теории нечётких множеств, мягких вычислений, интервального анализа, теории алгебраических структур, теории графов, численных методов. При создании программного обеспечения использовались технологии модульного и объектно-ориентированного программирования.

**Тематика работы.** Содержание диссертации соответствует п. 1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений», п. 3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п. 8 «Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования» паспорта специальности 05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

**Научная новизна.** В диссертационной работе получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной:

1. Предложена и исследована модель представления расплывчатых числовых оценок в классе треугольных LR-чисел, отличающаяся модификацией нечёткого LR-числа, основанной на применении предложенного L-преобразования LR-чисел в соответствующие LL/RR-числа.
2. Разработаны вычислительные методы приближённого решения задач выбора с нечёткими параметрами, отличающиеся построением и использованием изоморфной алгебраической структуры над множеством модифицированных нечётких чисел, инвариантные к форме математического описания задачи и позволяющие параметрически управлять устойчивостью решения.
3. Разработаны алгоритмы и структура программного комплекса для решения задач выбора с нечёткими параметрами, реализующего предложенные в работе вычислительные методы, отличающегося использованием стандартных вычислительных операций над действительными переменными (в отличие от специализированных программных пакетов, работающих с нечеткими числами).

**Достоверность научных результатов.** Научные положения, теоретические выводы и практические рекомендации обоснованы корректным использованием вы-

бранного математического аппарата и подтверждены результатами вычислительного эксперимента.

**Практическая значимость исследования** заключается в расширении сферы применимости методов моделирования с использованием чётких отношений и нечётких параметров. Подходы к нечётким вычислениям, предложенные в диссертации, позволяют существенно упростить процедуру расчётов без значительных потерь экспертной информации, а также использовать существующее стандартное программное обеспечение для решения различных производственных задач.

**Реализация и внедрение результатов работы.** Разработанный программный комплекс «CSBusinessGraph» используется в практической деятельности по первоначальной оценке проектов ООО «Философт» (DataArt). Результаты диссертации в форме моделей, алгоритмов и программ используются в производственном процессе ООО «Философт», что подтверждается актом о внедрении. Признана целесообразность использования предложенной в диссертации методики для оптимизации процедур первоначальной оценки проектов по разработке программного обеспечения.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на ежегодных научных сессиях Воронежского государственного университета и следующих конференциях различного уровня: международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (Воронеж, 2012 г.); международная конференция «Информатика: проблемы, методология, технологии» (Воронеж, 2013–2014 гг.); международный научно-технический семинар «Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации» (Алушта, 2013–2014 гг.); научно-техническая конференция студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика» (Москва, 2014).

**Публикации.** По теме диссертационного исследования опубликовано 11 научных работ [1]– [11], в том числе 4 [5, 6, 10, 11] — в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. В работах, выполненных в соавторстве: в [5] предложено преобразование  $L$  и алгебра модифицированных нечётких чисел; в [6] выполнен анализ существующих методов сравнения нечётких чисел и предложен метод сравнения для модифицированных  $LL/RR$ -чисел; а в [10] — предложено определение устойчивости задачи нечёткого линейного программирования и разработан алгоритм решения задачи календарно-сетевого планирования и управления с нечёткими параметрами, позволяющий получать устойчивое решение.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации **158** страниц текста с **16** рисунками и **3** таблицами. Список литературы содержит **131** наименование, включая работы автора.

## Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, кратко изложены структура и содержание диссертации, определены научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

В первой главе приведены основные понятия теории нечётких множеств и описаны актуальные модели представления нечёткой информации, используемые в дальнейшем при описании исследования. Дано определение нечётких моделей и их классификация в зависимости от этапа применения нечёткой математики — при описании системы, при задании параметров, при задании входов, выходов и состояний (модели первого, второго и третьего типа). В работе предложена классификация нечётких моделей на основе применяемого в них языка описания выбора, объединённая с вышеописанной (рис. 1). В качестве объекта исследования выбраны модели, использующие чёткие отношения и нечёткие параметры (модели второго типа).

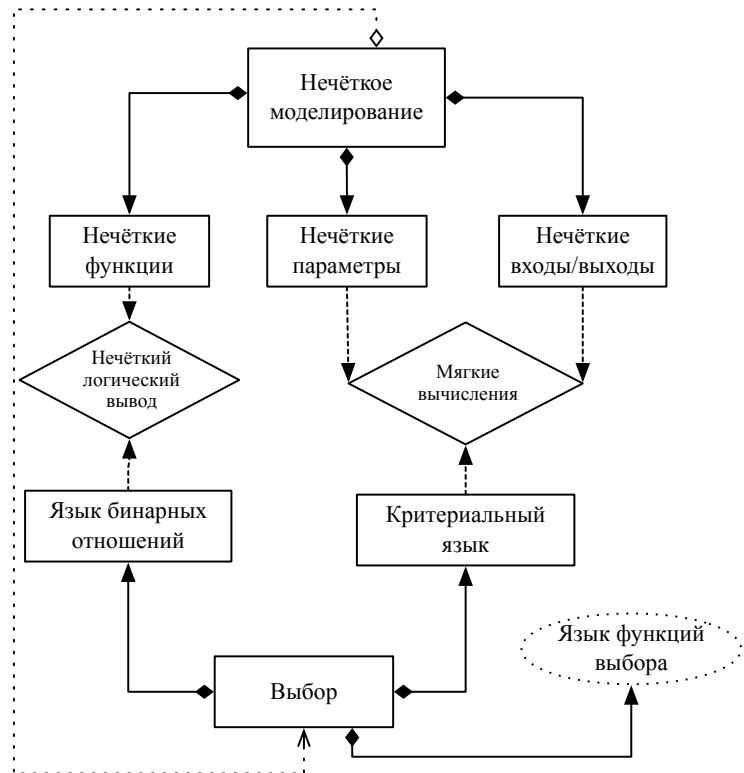


Рис. 1. Предлагаемая классификация нечётких моделей

Анализ методов мягких вычислений показал, что лежащие в их основании алгебраические структуры (в основном решётки) и отсутствие отношения линейного порядка приводят к нарушениям чётких математических отношений и неоправданному расширению неопределённости результата. В диссертации формулируются основные требования к модели представления нечёткой информации и методам решения задач второго типа — получение устойчивого решения, непротиворечивость естественным математическим отношениям, ограничение расширения неопределённости, — и вводятся требования вычислительной эффективности и возможности применения стандартных программных комплексов, предназначенных для чётких вычислений.

Вторая глава диссертации посвящена разработке и исследованию методов моделирования и обработки нечетких числовых величин, которые удовлетворяли бы выдвинутым к ним в главе 1 требованиям. Ввиду широкого распространения линейных моделей, исследование проводится для нечётких треугольных чисел. В качестве основной формы представления треугольных чисел в работе выбрана форма (1) в виде границ чётких  $\alpha$ -интервалов  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in [0;1]$ , позволяющая быстро переходить к интервальной неопределённости.

$$\begin{cases} x^L(\alpha) = m - a + a\alpha \\ x^R(\alpha) = m + b - b\alpha \end{cases} \quad (1)$$

Проводится краткий анализ существующих алгебраических методов обработки нечётких чисел, выделяются их достоинства и недостатки с точки зрения применимости в нечётких моделях второго типа. Для преодоления выделенных в главе 1 недостатков существующих методов нечётких вычислений предлагается следующий подход. Исходная задача выбора значения  $\tilde{X}$ , удовлетворяющего некоторой функции  $\tilde{Y} = f(\tilde{X}, \tilde{A})$  с нечёткими числовыми параметрами, рассматривается как совокупность задач с интервальной неопределенностью

$$\tilde{Y} = f(\tilde{X}, \tilde{A}) \rightarrow \bigcup_{\alpha=0}^1 y_{\alpha} = f(X_{\alpha}, A_{\alpha}) \quad (2)$$

с последующим переходом к детерминированной задаче на каждом  $\alpha$ -уровне, для чего внутри интервала  $X_{\alpha}$  выбирается точка  $\bar{x}(\alpha)$ . В диссертации предлагается выбирать значение  $\bar{x}(\alpha)$  с помощью линейного параметрического преобразования  $L$

$$\bar{x}(\alpha) = L(X_{\alpha}) = \lambda x^L(\alpha) + (1 - \lambda)x^R(\alpha). \quad (3)$$

Для треугольных чисел  $\bar{x}(\alpha)$  является линейной функцией ввиду линейности  $x^L(\alpha)$  и  $x^R(\alpha)$ . После решения чётких  $\alpha$ -уровневых задач полученные результаты  $y(\alpha)$  аппроксимируются нечётким числом  $\tilde{Y}^* = \{y(\alpha) | \mu_{\tilde{Y}}(y) = \alpha\}$ , которое называется *модифицированным решением* задачи (2).

Предлагаемый подход в своей основе имеет декомпозицию нечётких чисел по  $\alpha$ -уровням — происходит переход от использования «полноценных» треугольных чисел к алгебрам для треугольных чисел  $LL/RR$ -типа (т.е. таких, у которых один из коэффициентов нечёткости нулевой), и функция принадлежности чисел такого типа является обратной к линейной функции (3), которая определяет точки  $\bar{x}(\alpha)$ :

$$\mu_{\tilde{A}^*}(x) = (\bar{x}(\alpha))^{-1} \quad (4)$$

В диссертации вводится ключевое понятие модифицированного нечёткого числа. *Модифицированным нечётким числом* называется число  $\tilde{A}^*$ , получаемое из  $\tilde{A}$  с помощью преобразования (3) и (4). В работе показано, что модифицированное нечёткое число является числом  $LL/RR$ -типа, и в дальнейшем для таких чисел используется обозначение  $\bar{x}(\alpha)$ , указывающее на механизм их построения с помощью (4).

Исходя из (3) и (4) очевидно, что преобразование  $L$  сокращает информативность исходной нечёткой величины. Для определения степени потери нечёткой информации исследуются свойства преобразования  $L$ . Чтобы производить анализ и вычисления в форме, инвариантной к расположению числа на числовой оси, в диссертации предложено представление треугольного числа в виде совокупности следующих параметров:

- длина носителя  $d_{\tilde{A}}$ ;
- мода  $m_{\tilde{A}}$ ;
- степень асимметрии  $AS_{\tilde{A}}$ .

*Степенью асимметрии*  $AS_{\tilde{A}}$  называют характеристику треугольного нечёткого числа, определяемую как разность площадей прямоугольных треугольников, на которые исходное нечёткое число делится модой.

В работе показано, что запись треугольного нечёткого числа в виде тройки  $(m_{\tilde{A}}, d_{\tilde{A}}, AS_{\tilde{A}})$  эквивалентна введённым ранее способам записи через коэффициенты нечёткости  $(m; a; b)$  и точки пересечения с осью  $Ox$   $(x^L; m; x^R)$ . При известных степени асимметрии  $AS_{\tilde{A}}$  и длине носителя  $d_{\tilde{A}}$ , коэффициенты нечёткости определяются по формуле

$$\begin{cases} a = \frac{d_{\tilde{A}} - 2AS_{\tilde{A}}}{2} \\ b = \frac{d_{\tilde{A}} + 2AS_{\tilde{A}}}{2} \end{cases}$$

Для преобразования  $L$  доказаны следующие свойства, подтверждающие, что его применение к нечетким числовым величинам в основном сохраняет их информативность при целенаправленном выборе параметра  $\lambda$ , а уменьшение длины носителя позволяет снизить степень неопределённости решения.

**Утверждение 1.** Преобразование  $L$  сохраняет моду нечёткого числа. Другими словами,  $\forall \lambda \in [0; 1]: m_{\tilde{A}} = m_{\tilde{A}^*}$ .

**Утверждение 2.** При некоторых значениях параметра  $\lambda$  преобразование  $L$  сохраняет

1. знак степени асимметрии, т.е.  $\exists \lambda \in [0; 1]: \text{sign}(AS_{\tilde{A}}) = \text{sign}(AS_{\tilde{A}^*})$ ;
2. значение степени асимметрии, т.е.  $\exists \lambda \in [0; 1]: AS_{\tilde{A}} = AS_{\tilde{A}^*}$ .

**Утверждение 3.** Модифицированное число всегда содержится внутри исходного числа. Другими словами,  $\forall \lambda \in [0; 1]: A_{\alpha}^* \subset A_{\alpha}$ ;  $d_{\tilde{A}} \geq d_{\tilde{A}^*}$ , т.е. преобразование  $L$  уменьшает длину носителя нечёткого числа и оставляет  $\alpha$ -интервалы модифицированного числа в рамках  $\alpha$ -интервалов исходного числа.

На основании следствий из свойств преобразования  $L$ , в диссертации даются рекомендации по выбору параметра  $\lambda$  и применимости предлагаемой методики:

- при  $\lambda = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{d_{\tilde{A}}}$  сохраняется значение степени асимметрии. Применение преобразования  $L$  с этим значением  $\lambda$  к нечётким  $LL/RR$ -числам не изменяет их;
- при  $\lambda = \frac{b}{a+b} = \frac{b}{d_{\tilde{A}}}$  преобразование  $L$  уничтожает нечёткую информацию, заложенную экспертом в число, и сводит операции над числами к операциям над их модами;
- применимость преобразования  $L$  при использовании симметричных нечётких числах ограничена, поскольку  $\lambda = \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b} = \frac{1}{2}$ , и все вычисления в этом случае сводятся к операциям над модами чисел.

Для доказательства применимости предложенного подхода в нечётких моделях второго типа, создаётся алгебраическая система для множества всех нечётких модифицированных чисел  $K = \{\bar{x}(\alpha)\}; \alpha \in [0; 1]$ . Строится чёткая алгебра  $P = \langle K; +, * \rangle$ ; для её построения используется более удобная форма записи модифицированного числа

$$\bar{x}(\alpha) = c + k\alpha, \quad (5)$$



где

$$\begin{cases} c = m + b - \lambda(a + b) \\ k = \lambda(a + b) - b \end{cases} \quad (6)$$

$$\lambda \in [0; 1]; c, k \in \mathbb{R}$$

На множестве  $K$  вводится операция сложения (7), а также нейтральный (8) и противоположный по сложению (9) элементы. Доказываются свойства ассоциативности и коммутативности операции (7).

$$\bar{x}_1(\alpha) + \bar{x}_2(\alpha) = r_1(\alpha) = c_1 + c_2 + (k_1 + k_2)\alpha, r_1(\alpha) \in K; \quad (7)$$

$$\bar{0} = 0 + 0\alpha \in K : \forall \bar{x}(\alpha) \in K : \bar{x}(\alpha) + \bar{0} = c + k\alpha + 0 + 0\alpha = \bar{x}(\alpha); \quad (8)$$

$$-\bar{x}(\alpha) = -c - k\alpha \in K : \bar{x}(\alpha) + (-\bar{x}(\alpha)) = \bar{0}. \quad (9)$$

Также на множестве  $K$  вводится операция умножения. Её можно было бы определить с помощью (10) как сумму произведений компонент модифицированных нечётких чисел

$$\bar{x}_1(\alpha) \cdot \bar{x}_2(\alpha) = r'_2(\alpha) = (c_1 + k_1\alpha)(c_2 + k_2\alpha) = c_1c_2 + c_1k_2\alpha + c_2k_1\alpha + k_1k_2\alpha^2, \quad (10)$$

однако такое определение приводит к искажению треугольного вида результата нечётких операций, т.е.  $r'_2(\alpha) \notin K$ . Для того, чтобы множество  $K$  было замкнутым относительно операции умножения, используется линейная интерполяция — зависимость  $r_2(\alpha)$  восстанавливается в виде линейной функции по значениям выражения (10) при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$ . Это приводит к следующему определению операции умножения:

$$r_2(\alpha) = c_1c_2 + (c_1k_2 + c_2k_1 + k_1k_2)\alpha; r_2(\alpha) \in K. \quad (11)$$

Для операции умножения (11) вводятся нейтральный (12) и обратный по умножению (13) элементы. Доказываются свойства ассоциативности и коммутативности, а также свойство дистрибутивности умножения (11) относительно сложения (7). Показано, что для существования обратного элемента число  $\bar{x}(\alpha)$  должно иметь ненулевую моду, поскольку, согласно (6),  $c + k = m \neq 0$ .

$$\bar{1} = 1 + 0\alpha \in K : \forall \bar{x}(\alpha) \in K \quad \bar{x}(\alpha) \cdot \bar{1} = \bar{x}(\alpha); \quad (12)$$

$$\bar{x}^{-1}(\alpha) = \frac{1}{c} - \frac{k}{c(c+k)}\alpha, c \neq 0; \bar{x}^{-1}(\alpha) \in K : \bar{x}(\alpha)\bar{x}^{-1}(\alpha) = \bar{1}. \quad (13)$$

В диссертации для модифицированных нечётких чисел показывается эквивалентность записи в виде (5) и в виде

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = \bar{x}_{\tilde{A}}(0) + \alpha(\bar{x}_{\tilde{A}}(1) - \bar{x}_{\tilde{A}}(0)) = \alpha\bar{x}_{\tilde{A}}(1) + (1 - \alpha)\bar{x}_{\tilde{A}}(0). \quad (14)$$

На основании (14) предложен способ нечётких вычислений, называемый двухточечными вычислениями, позволяющий решать нечёткую задачу как две чёткие при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$ . Если обозначить за  $*$  произвольную арифметическую операцию, то для чисел в форме (14) её результат будет выглядеть следующим образом:

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) * \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) = \alpha(\bar{x}_{\tilde{A}}(1) * \bar{x}_{\tilde{B}}(1)) + (1 - \alpha)(\bar{x}_{\tilde{A}}(0) * \bar{x}_{\tilde{B}}(0)). \quad (15)$$

В диссертации показано, что двухточечные вычисления, описываемые алгеброй  $Q = \langle M, \Omega_2 \rangle$  с сигнатурой  $\Omega_2$ , где  $M$  — множество пар действительных значений  $(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$ , изоморфны введённой ранее алгебре модифицированных нечётких чисел  $P = \langle K, \Omega_1 \rangle$  с сигнатурой  $\Omega_1$ . Действительно, существует отображение  $\Gamma : K \rightarrow M$  и

обратное ему  $\Gamma^{-1}: M \rightarrow K$ , описываемые формулами

$$\begin{cases} c = \bar{x}_{\tilde{A}}(0); \\ k = \bar{x}_{\tilde{A}}(1) - \bar{x}_{\tilde{A}}(0); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}_{\tilde{A}}(0) = c; \\ \bar{x}_{\tilde{A}}(1) = c + k; \end{cases} \quad (16)$$

и удовлетворяющее условиям (17)–(18) для бинарных операций  $\varphi_i \in \Omega_1$ ,  $\psi_i \in \Omega_2$  и элементов  $k_1, k_2 \in K$ ,  $m_1, m_2 \in M$ :

$$\Gamma(\varphi_i(k_1, k_2)) = \psi_i(\Gamma(k_1, k_2)); \quad (17)$$

$$\varphi_i(\Gamma^{-1}(m_1, m_2)) = \Gamma^{-1}(\psi_i(m_1, m_2)) = \quad (18)$$

Ввиду (16), множества  $M$  и  $K$  суть одно и то же, поэтому равенства (17) и (18) после исключения  $\Gamma$  и  $\Gamma^{-1}$  доказываются простой подстановкой в общем виде. Переход к двухточечным вычислениям избавляет от необходимости вводить отношение линейного порядка на множестве  $K$  и позволяет использовать стандартные программные продукты для решения нечетких задач, т. к. нечеткая задача решается как две чётких.

В конце второй главы кратко рассматривается проблема устойчивости моделей второго типа на примере задачи линейного программирования с нечёткими параметрами

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \min; \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}, \end{cases}$$

где  $\mathbf{A} = \{\tilde{A}_{ij}\}$  — матрица, а  $\mathbf{B} = \{\tilde{B}_i\}$ ,  $\mathbf{C} = \{\tilde{C}_i\}$  — векторы нечётких параметров. Применение к каждому из элементов матрицы и векторов преобразования  $L$  приводит к модифицированной задаче

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^*\mathbf{x} \rightarrow \min; \\ \mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{B}^*, \end{cases} \quad (19)$$

в которой  $\mathbf{A}^* = \{\bar{x}_{\tilde{A}_{ij}}(\alpha)\}$ ,  $\mathbf{B}^* = \{\bar{x}_{\tilde{B}_i}(\alpha)\}$ ,  $\mathbf{C}^* = \{\bar{x}_{\tilde{C}_i}(\alpha)\}$ .

При изменении значений  $\alpha$  при фиксированных коэффициентах  $\lambda_{A_i}$  преобразования  $L$ , происходит возмущение задачи (19). Ввиду свойства сохранения моды, в работе предлагается зафиксировать в качестве «эталонного» решение (19) при  $\alpha = 1$  и использовать определение устойчивости по решению, поскольку оно включает в себя более узкое определение общей устойчивости, т. е. принципиальное существование решения возмущённой задачи. Предполагается, что нечёткая задача будет считаться устойчивой по решению, если при переходе с одного  $\alpha$ -уровня на другой не происходит значительного изменения решения в смысле евклидовой метрики, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0; 1] |\alpha_1 - \alpha_2| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(\alpha_1) - \mathbf{x}(\alpha_2)\| < \varepsilon. \quad (20)$$

Согласно методике двухточечных вычислений, задачу (19) достаточно решить на двух  $\alpha$ -уровнях. Получаемая пара векторов  $\mathbf{x}(\alpha = 1)$  и  $\mathbf{x}(\alpha = 0)$  позволяет восстановить модифицированные решения в соответствии с (14). Однако при  $\alpha = 0$  все значения  $\lambda_S$ , где  $S$  — один из индексов  $\tilde{A}_{ij}$ ,  $\tilde{B}_i$ ,  $\tilde{C}_i$ , — принимают граничные значения (0 или 1). Для решения данной проблемы вводятся дополнительные ограничения для параметров  $\lambda_S$ :

$$(\lambda_S^* - \lambda_S)^2 \rightarrow \min \quad (21)$$

которые позволяют минимизировать отклонение параметров от оптимальных в смысле сохранения нечёткой информации значений  $\lambda_S^* = \frac{a_S}{d_S}$  и, таким образом, управлять устойчивостью решения. Ввиду противоречивости критериев (21) и целевой функции задачи (19), возникает задача векторной оптимизации, для решения которой используется аддитивная свёртка критериев:

$$f^*(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{C}^* \mathbf{x} + \gamma \sum_s (\lambda_S^* - \lambda_S)^2 \rightarrow \min \quad (22)$$

Семантика целевой функции (22) такова: ищется решение  $\mathbf{x}$  и вектор параметров  $\lambda_S$  преобразования  $L$ , которые позволяют удовлетворить исходный критерий оптимизации и при этом максимально сохранить нечёткую информацию, заложенную экспертами в параметры задачи. Безразмерный коэффициент  $\gamma$  позволяет привести значение свёртки к одному порядку со значением исходной целевой функции.

В третьей главе происходит тестирование разработанных моделей и методов обработки нечетких числовых величин на примере задачи сетевого планирования с нечёткими временными оценками. Кратко рассматривается классическая постановка задачи, связанные с ней определения и основные способы её решения, а также исследуются достоинства и недостатки существующих способов решения задачи сетевого планирования с нечёткими параметрами.

В качестве модели проекта в сетевом планировании рассматривается направленный ациклический граф  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ ,  $|E| = m$ , в котором работам проекта  $w_j$ , длительностью  $\tau_j$  каждая, сопоставлены дуги графа  $e_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , а событиям проекта  $z_i$  с временами наступления  $t_i$  сопоставления вершины графа  $v_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Событие  $z_1$  — начало работ по проекту, событие  $z_n$  — окончание проекта. Граф  $G$  обладает следующими свойствами:

- существует ровно одна вершина  $v_1 \in V$ , называемая истоком, из которой рёбра только исходят, т.е.  $\forall i = \overline{2, n} \nexists (v_i, v_1)$ ;
- существует ровно одна вершина  $v_n \in V$ , называемая стоком, в которую рёбра графа только входят, т.е.  $\forall i = \overline{1, n-1} \nexists (v_n, v_i)$ ;
- для любой вершины графа  $v_i \in V$ ,  $i = \overline{1, n}$  существует путь  $v_1 \dots v_n$ , проходящий через неё;
- для любого ребра  $e_j \in E$ ,  $j = \overline{1, m}$  существует путь  $v_1 \dots v_n$ , содержащий это ребро.

Задача сетевого планирования сводится к поиску общего времени выполнения проекта  $T$ , которое равно длине максимального пути в графе, называемого также критическим. Соответственно, операции, которые принадлежат пути максимальной длины, также называются критическими. В диссертации указано, что алгоритмический метод решения задачи сетевого планирования (модифицированные алгоритмы Дейкстры и Форда-Мура-Беллмана) не позволяет проводить её анализ на устойчивость, т.е. на изменение критического пути. В качестве основного способа решения выбрано решение задачи линейного программирования (23) с нечёткими временными оценками

$$T = t_n - t_1 \rightarrow \min \quad (23)$$

при ограничениях на времена наступления событий

$$t_{j_s} - t_{i_s} \geq \tilde{\tau}_s; s = \overline{1, m}, \quad (24)$$

где  $t_{i_s}$  и  $t_{j_s}$  — времена наступления событий начала и окончания работы  $w_s$  соответственно. В результате решения данной задачи получается общее время выполнения проекта  $\tilde{T}$  и совокупность критических операций  $S_1$ .

Для решения задачи (23)–(24), в работе применяется преобразование  $L$  и методика двухточечных вычислений. Формулируется задача для произвольного  $\alpha$ -уровня

$$\begin{cases} T(\alpha) = t_n - t_1 \rightarrow \min \\ t_{j_s} - t_{i_s} \geq \bar{\tau}_s(\alpha, \lambda_s), \forall s = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (25)$$

Результатом решения задачи (25) является вектор времён  $t(\alpha) = \{t_0(\alpha), \dots, t_n(\alpha)\}$ , который является календарным планом  $\alpha$ -уровня, а также множество критических операций  $S_1(\alpha)$ . Нечеткость оценок  $\tilde{\tau}_i$  обуславливает проблему устойчивости решений задачи (25) в смысле (20). Очевидно, что если на всех  $\alpha$ -уровнях критический путь не изменяется и проходит по одним и тем же дугам, то решение устойчиво. В связи с этим в работе в качестве метрики сходства решений выбрана мощность симметрической разности двух множеств критических операций:

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0; 1]; \alpha_1 \neq \alpha_2 \quad S_1(\alpha_1) \Delta S_2(\alpha_2) = \emptyset, \quad (26)$$

Полученное при  $\alpha = 1$  решение задачи (25) даёт активные ограничения на критические операции. Для управления устойчивостью решения параметры  $\lambda$  необходимо включить в целевую функцию, подобно (22). В итоге при  $\alpha = 0$  решается видоизменённая задача

$$\begin{cases} T^*(\alpha, \lambda) = t_n - t_1 + \gamma \sum_{s=1}^m (\lambda_s^* - \lambda_s)^2 \rightarrow \min; \\ t_{j_{s_1}} - t_{i_{s_1}} = \bar{\tau}_{s_1}(\alpha, \lambda_{s_1}), \forall s_1 \in S_1(1); \\ t_{j_s} - t_{i_s} \geq \bar{\tau}_s(\alpha, \lambda_s), \forall s \notin S_1(1), s = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (27)$$

В результате проведённого исследования предлагается следующий алгоритм решения задачи сетевого планирования с нечёткими временными оценками как задачи линейного программирования с возмущениями.

1. Решается невозмущённая задача (25) при  $\alpha = 1$ . Ввиду свойства 1 преобразования  $L$ , это решение соответствует модифицированному решению  $\langle T(1), t(1), S_1(1) \rangle$ . Фиксируется множество операций  $S_1(1)$ , образующих критический путь.
2. Фиксируется критический путь при всех  $\alpha \neq 1$ . Для этого в задаче (25) нестрогие неравенства меняются на равенства  $\forall s_1 \in S_1(1)$ , т. е. выбранные операции всегда будут критическими. Данный шаг позволяет выполнить условие устойчивости задачи по решению (26).
3. Решается возмущённая задача (27) с изменённой целевой функцией. Результатом решения задачи является кортеж  $\langle T(0), t(0), \lambda \rangle$ , где  $\lambda$  — вектор параметров преобразования  $L$ .
4. Решение исходной задачи представляет из себя тройку  $\langle \tilde{T}, S_1, \lambda \rangle$ . Функция принадлежности общего времени выполнения проекта  $\tilde{T}$  восстанавливается по значениям  $T(0)$  и  $T(1)$ , либо число  $\tilde{T}$  оставляется в виде (5).

Предложенный алгоритм иллюстрируется на примере проекта, заданного таблицей 1.

Таблица 1. Оценки длительностей операций проекта и их взаимосвязи

Операция	Предш. операции	$a$	$m$	$b$	Преобразование $L$	$\lambda^*$
A	-	1	2	3	$\bar{\tau}_A(\alpha) = \lambda_A(1+\alpha) + (1-\lambda_A)(5-3\alpha)$	1/4
B	-	2	4	1	$\bar{\tau}_B(\alpha) = \lambda_B(2+2\alpha) + (1-\lambda_B)(5-\alpha)$	2/3
C	A	4	7	2	$\bar{\tau}_C(\alpha) = \lambda_C(3+4\alpha) + (1-\lambda_C)(9-2\alpha)$	2/3
D	B	2	6	3	$\bar{\tau}_D(\alpha) = \lambda_D(4+2\alpha) + (1-\lambda_D)(9-3\alpha)$	2/5
E	B	1	10	2	$\bar{\tau}_E(\alpha) = \lambda_E(9+\alpha) + (1-\lambda_E)(12-2\alpha)$	1/3
F	C	1	5	1	$\bar{\tau}_F(\alpha) = \lambda_F(4+\alpha) + (1-\lambda_F)(6-\alpha)$	1/2
G	D,E	4	5	1	$\bar{\tau}_G(\alpha) = \lambda_G(1+4\alpha) + (1-\lambda_G)(6-\alpha)$	4/5
H	F,G	2	4	3	$\bar{\tau}_H(\alpha) = \lambda_H(2+2\alpha) + (1-\lambda_H)(7-3\alpha)$	2/5

Для решения задачи использовалась надстройка «Поиск решения» в Microsoft Excel (рис. 2). При  $\alpha = 1$  решение задачи (25) привело к результату  $T(1) = 23$ ,  $t(1) = \{0; 7; 4; 14; 14; 14; 19; 23\}$ ,  $S_1(1) = \{B, E, G, H\}$ . При  $\alpha = 0$  решалась задача (27), которая при  $\alpha = 0$  приняла вид

$$T(0) = t_8 - t_1 + \gamma \sum_{s=A}^H (\lambda_s^* - \lambda_s)^2 \rightarrow \min \quad (28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_2 - t_1 \geq 5 - 4\lambda_A \\ t_3 - t_1 = 5 - 3\lambda_B \\ t_6 - t_2 \geq 9 - 6\lambda_C \\ t_4 - t_3 \geq 9 - 5\lambda_D \\ t_5 - t_3 = 12 - 3\lambda_E \\ t_5 - t_4 \geq 0 \\ t_7 - t_6 \geq 6 - 2\lambda_F \\ t_7 - t_5 = 6 - 5\lambda_G \\ t_8 - t_7 = 7 - 5\lambda_H \end{array} \right. \quad (29)$$

Значение  $\gamma$  выбирается порядка 10, чтобы соответствовать максимальному значению  $\tau_{max}$ . В результате решения задачи (28) при ограничениях (29) получается, что  $T^*(0) = 20,83$ ,  $t(0) = \{0; 4,23; 2,96; 13,92; 13,92; 9,97; 15,79; 20,67\}$ ,  $S_1(0) = \{B, E, G, H\}$ ,  $\lambda = \{0,25; 0,68; 0,67; 0,4; 0,35; 0,5; 0,83; 0,43\}$ .

На основании решений при  $\alpha = 1$  и  $\alpha = 0$  формируется окончательный результат: критический путь  $S_1 = \{B, E, G, H\}$ , нечёткое время выполнения  $T(\alpha) = 20,67 + 2,33\alpha$ .

В четвертой главе рассмотрено применение методов, представленных в диссертации, для усовершенствования процесса предварительного планирования проек-

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Параметры						Лямбда идеал	Тау(Альфа)	Лямбда поиск					
2	Операция	XL	M	XR	A	B		1			Тау(Альфа)	Гамма	Лямбда diff	
3	A	1	2	5	1	3	0,2500	2	LA	0,2500	3,99999708		LA*-LA	0,0000
4	B	2	4	5	2	1	0,6667	4	LB	0,6817	2,9550035		LB*-LB	0,0002
5	C	3	7	9	4	2	0,6667	7	LC	0,6667	4,99999766		LC*-LC	0,0000
6	D	4	6	9	2	3	0,4000	6	LD	0,4000	7,00000351		LD*-LD	0,0000
7	E	9	10	12	1	2	0,3333	10	LE	0,3483	10,9550016		LE*-LE	0,0002
8	F	4	5	6	1	1	0,5000	5	LF	0,5000	5,00000421		LF*-LF	0,0000
9	G	1	5	6	4	1	0,8000	5	LG	0,8250	1,87500284		LG*-LG	0,0006
10	H	2	4	7	2	3	0,4000	4	LH	0,4250	4,8750047		LH*-LH	0,0006
11	Ф1	0	0	0	0	0	0,0000	0	ЛФ1	0,0000	0		ЛФ1*-ЛФ1	0,0000
12	Параметры													
13	События	Время	Условия		Резервы	Оптимум								
14	1	0	t2-t1>tauA		7	5	23	1	0,0090	t2-t1>tauA	4,2195	0,2195	20,83001	
15	2	7	t3-t1>tauB		4	0		2	4,2285	t3-t1>tauB	2,9550	0,0000		
16	3	4	t6-t2>tauC		7	0		3	2,9640	t6-t2>tauC	5,7413	0,7413		
17	4	14	t4-t3>tauD		10	4		4	13,9190	t4-t3>tauD	10,9550	3,9550		
18	5	14	t5-t3>tauE		10	0		5	13,9190	t5-t3>tauE	10,9550	0,0000		
19	6	14	t7-t6>tauF		5	0		6	9,9698	t7-t6>tauF	5,8242	0,8242		
20	7	19	t7-t5>tauG		5	0		7	15,7940	t7-t5>tauG	1,8750	0,0000		
21	8	23	t8-t7>tauH		4	0		8	20,6690	t8-t7>tauH	4,8750	0,0000		
22			t5-t4>tauФ1		0	0				t5-t4>tauФ1	0,0000	0,0000		

Рис. 2. Решение задачи сетевого планирования в Microsoft Excel

тов по разработке программного обеспечения. Отличительной особенностью таких проектов является наличие нечёткой неопределённости сроков выполнения операций, обусловленной внешними факторами.

В качестве средства разработки применяется интегрированная среда Microsoft Visual Studio 2010. Особенностью разработанного программного продукта «CSBusinessGraph» является то, что он не использует никаких специализированных средств и третьесторонних библиотек для представления нечётких чисел. Выполняет все вычисления только с использованием действительных переменных.

К основным *функциональным возможностям* программного продукта относятся: создание модели проекта в виде вершинного графа в ручном режиме или импорт существующей модели из XML-файла; поддержка модели проекта в согласованном состоянии — проверка отсутствия циклов в графе и наличие только одной компоненты связности; формирование временных оценок выполнения операций, выраженных в виде треугольных чисел; автоматическое преобразование вершинного графа в стрелочный; реализация механизма расчёта критического пути на основе  $\alpha$ -уровневых и двухточечных вычислений с применением выбранного пользователем вида значений параметров  $\lambda$  преобразования  $L$ ; экспорт отчёта о решении задачи в формат Microsoft Excel с формированием графиков для модифицированных нечётких оценок, общего времени выполнения проекта и построением стрелочного графа с выделением критических операций.

На рис. 3 изображено главное окно приложения с открытым в нём проектом.

В **заключении** приводятся основные результаты диссертации.

## Основные результаты работы

1. Разработана и исследована модель представления нечётких числовых параметров математического описания объектов в классе треугольных LR-чисел, обеспечивающая возможность построения алгебраической структуры нечётких чисел, сохраняющей требуемые свойства решения задач выбора: ограничение роста неопределённости, сохранение истинности модельных отношений и возможность интерпретации полученного результата.

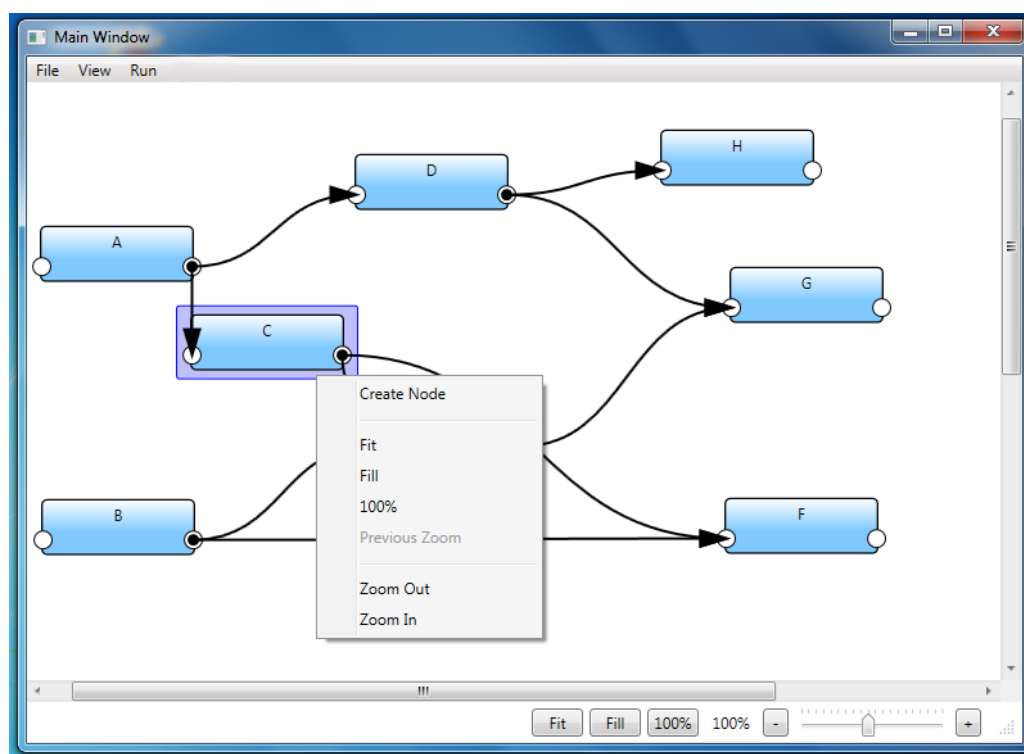


Рис. 3. Главное окно приложения

2. Разработан метод приближённого численного решения задач выбора с нечёткими параметрами, инвариантный к форме математического описания задачи, позволяющий строить нечёткое решение задач как линейную комбинацию чётких решений, полученных на границах интервального представления параметров, снизить вычислительную сложность процесса получения решения и применять стандартные программные продукты для нечётких вычислений.
3. Предложенные методы решения задач выбора с нечёткими параметрами апробированы на задаче сетевого планирования с нечёткими временными оценками. В процессе апробации рассмотрена проблема устойчивости критического пути, обосновано введение свёртки критериев для управления устойчивостью и сформулирован алгоритм, обеспечивающий получение устойчивого решения задачи. Достоверность полученного решения подтверждается его сравнением с решениями, найденным с помощью других методов, хорошо зарекомендовавших себя в мировой практике.
4. Разработан программный комплекс, позволяющий решать задачу оценки сроков при разработке программного обеспечения как задачу сетевого планирования с нечёткими временными оценками и обеспечивающий учёт возможных рисков, возникающих при разработке программного обеспечения. Практическая ценность комплекса подтверждается актом о внедрении.

## Основные публикации по теме диссертации

1. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Информационные технологии управления проектами в условиях расплывчатой неопределённости // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и

- математического моделирования: материалы V международной конференции. Воронеж, 11-16 сентября 2012 г. Дополнительный выпуск. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. — С. 8–10.
2. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Разработка информационных технологий и средства управления проектами в условиях расплывчатой неопределённости // Сборник студенческих научных работ факультета компьютерных наук ВГУ / Под ред. к.ф.-м.н. Е. А. Сирота. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. — С. 30–35.
  3. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Влияние преобразования L на результаты арифметических операций с нечёткими LR-числами // Сборник трудов XXII международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации», Алушта, 18–24 сентября 2013 г. — М. : Изд-во МГУПИ, 2013. — С. 14–15.
  4. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Исследование свойств линейного отображения в задачах с нечёткими параметрами // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XIII научно-методической конференции. 7–8 февраля 2013 г.: в 4 т. — Т. 1. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2013. — С. 298–304.
  5. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Алгебраические операции с нечеткими LR-числами с использованием преобразования L // Программная инженерия. — 2014. — № 8. — С. 23–29.
  6. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Методы параметризованного сравнения нечётких треугольных и трапециевидных чисел // Вестник ВГУ, серия «Системный анализ и информационные технологии». — 2014. — № 2. — С. 90–97.
  7. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Постановка задачи об устойчивости альфа-уровневого метода поиска нечёткого критического пути // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XIV Международной научно-методической конференции, Воронеж, 6–8 февраля 2014 г.: в 4 т. — Т. 2. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — С. 360–363.
  8. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Способ решения нечёткой задачи КСПУ с использованием преобразования L // Радиоэлектроника, электротехника и энергетика: двадцатая международная научно-техническая конференция студентов и аспирантов: тезисы докладов. Москва, 27–28 февраля 2014 г.: в 4 т. — Т. 2. — М. : Издательский дом МЭИ, 2014. — С. 58.
  9. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Устойчивость критического пути в задаче сетевого планирования с нечёткими параметрами // Сборник трудов XXIII международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации», Алушта, 14–20 сентября 2014 г. — М. : ИКД «Зерцало-М», 2014. — С. 73–74.
  10. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Устойчивость решения в задаче о критическом пути с нечёткими параметрами // Вестник ВГТУ. — 2014. — Т. 10, № 6. — С. 40–43.
  11. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г., Канищева О. И. Арифметические операции над двухкомпонентными нечёткими числами // Вестник ВГУ, серия «Системный анализ и информационные технологии». — 2014. — № 2. — С. 75–82.

Работы [5, 6, 10, 11] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ.