

程式人《十分鐘系列》



用十分鐘瞭解 愛因斯坦的相對論

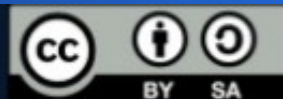
陳鍾誠

2016 年 8 月 26 日

就在前天

- 我們介紹了《歐氏幾何》！

程式人《十分鐘系列》



那些我們都曾經學過

但是卻幾乎沒有人知道自己學過的

《歐氏幾何》

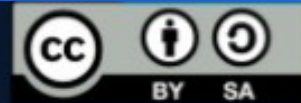
陳鍾誠

2016 年 8 月 24 日

然後在昨天

- 我們又介紹了《非歐幾何》

程式人《十分鐘系列》



那些我們幾乎都沒學過

但是也不太會想去學的

《非歐幾何學》

陳鍾誠

2016 年 8 月 25 日

《非歐幾何》

- 可以說是理解廣義相對論
時空扭曲結構的關鍵！

所以今天

- 我們將會介紹

愛因斯坦的

●狹義與廣義相對論！

相對論 [編輯]

維基百科，自由的百科全書

相對論（英語：**Theory of relativity**）是關於**時空**和**重力**的理論，主要由**愛因斯坦**創立，依其研究對象的不同可分為**狹義相對論**和**廣義相對論**。相對論和**量子力學**的提出給物理學帶來了革命性的變化，它們共同奠定了現代物理學的基礎。相對論極大的改變了人類對**宇宙**和**自然**的「常識性」觀念，提出了「同時的相對性」、「**四維時空**」、「**彎曲時空**」等全新的概念。不過近年來，人們對於物理理論的分類有了一種新的認識——以其理論是否是決定論的來劃分古典與非古典的物理學，即「非古典的=量子的」。在這個意義下，相對論仍然是一種古典的理論。



$E = mc^2$

其實狹義相對論

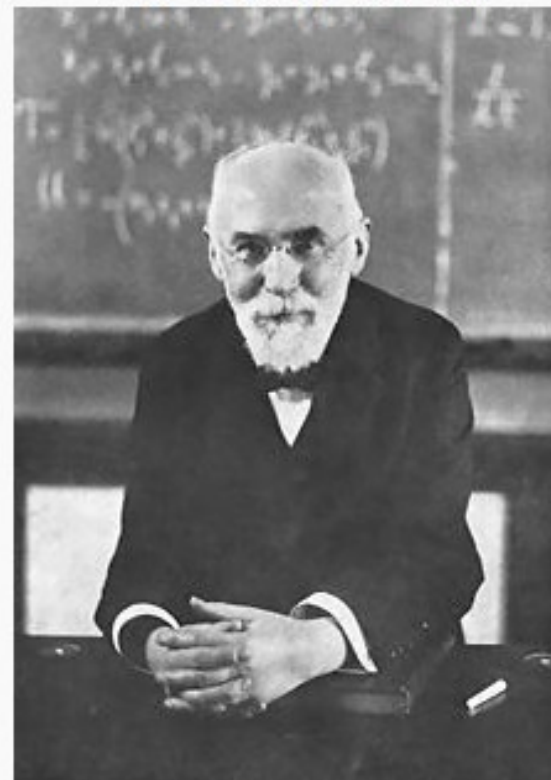
- 與其說是《愛因斯坦》發明的！

或許不如說是

● 《羅倫茲》發明的！

亨德里克·安東·勞倫茲（Hendrik Antoon Lorentz，1853年7月18日－1928年2月4日），荷蘭物理學家，他以與彼得·塞曼發現與解釋的「塞曼效應理論」獲得諾貝爾物理獎，他也推知變換（質量與速度）方程式，後來被用在愛因斯坦狹義相對論中，來描述空間與時間。

Hendrik Antoon Lorentz
亨德里克·安東·勞倫茲



出生	1853年7月18日  荷蘭阿納姆
逝世	1928年2月4日（74歲）  荷蘭哈勒姆
居住地	 荷蘭
國籍	 荷蘭
研究領域	物理學家
機構	萊頓大學

這個羅倫茲的發明

● 就稱為《羅倫茲變換》！

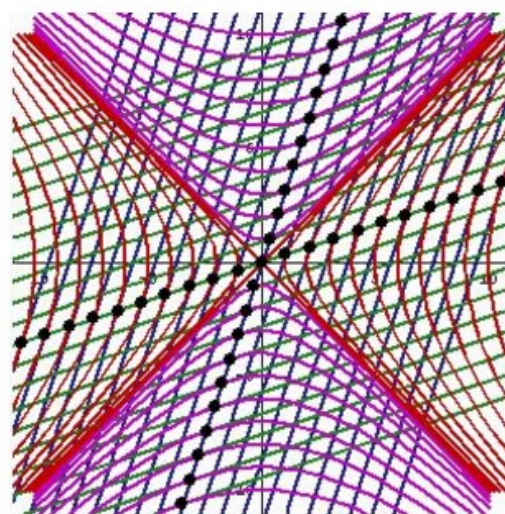
勞侖茲變換 [編輯]

維基百科，自由的百科全書

勞侖茲變換是觀測者在不同慣性參照系之間對物理量進行測量時所進行的轉換關係，在數學上表現為一套方程組。勞侖茲變換因其創立者——荷蘭物理學家亨德里克·勞侖茲而得名。勞侖茲變換最初用來調和19世紀建立起來的古典電動力學同牛頓力學之間的矛盾，後來成為狹義相對論中的基本方程組。

目錄 [隱藏]

- 1 勞侖茲變換的提出
- 2 勞侖茲變換的數學形式
- 3 勞侖茲變換的四維形式
- 4 勞侖茲變換的推導
 - 4.1 從群論出發的推導
 - 4.2 符合群公理的轉換矩陣
 - 4.3 伽利略轉換
 - 4.4 勞侖茲變換



羅倫茲變換的數學如下

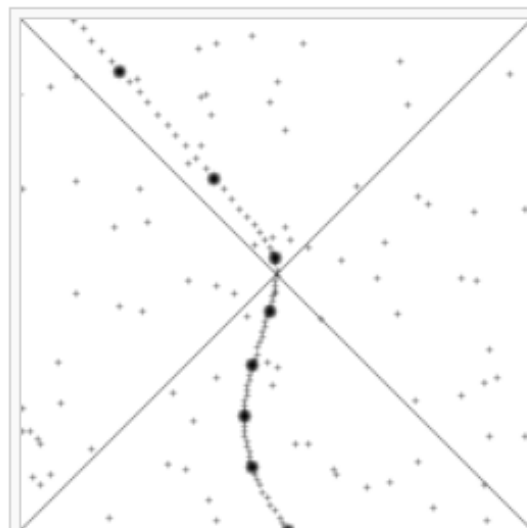
勞倫茲變換的數學形式 [編輯]

勞倫茲提出勞倫茲變換是基於以太存在的前提的，然而以太被證實是不存在的，根據光速不變原理，相對於任何慣性參照系，光速都具有相同的數值。愛因斯坦據此提出了狹義相對論。在狹義相對論中，空間和時間並不相互獨立，而是一個統一的四維時空整體，不同慣性參照系之間的變換關係式與勞倫茲變換在數學表達式上是一致的，即：

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

其中 x 、 y 、 z 、 t 分別是慣性座標系 Σ 下的座標和時間， x' 、 y' 、 z' 、 t' 分別是慣性座標系 Σ' 下的座標和時間。 v 是 Σ' 座標系相對於 Σ 座標系的運動速度，方向沿 x 軸。

由狹義相對性原理，只需在上述勞倫茲變換中把 v 變成 $-v$ ， x' 、 y' 、 z' 、 t' 分別與 x 、 y 、 z 、 t 互換，就得到勞倫茲變換的逆變換式：



沿著快速加速的觀察者的世界線來看的時空。

豎直方向表示時間。水平方向表示距離，虛劃線是觀察者的時空軌跡（「世界線」）。圖的下四分之一表示觀察者可以看到的事件。上四分之一表示光錐-將可以看到觀察者的事件點。小點是時空中的任意的點。世界線的斜率（從豎直方向的偏離）給出了相對於觀察者的速度。注意看時空的圖像隨著觀察者加速時的變化。

只是羅倫茲

- 沒有辦法用突破性的想法去解釋自己的數學成果。
- 讓自己受限在，傳統的時空結構當中！

而愛因斯坦

- 則用他那狂放不拘思維，徹底的解放了《羅倫茲變換》的物理意義，於是相對論就誕生了！

現在、就讓我們看看

- 到底《羅倫茲變換》是甚麼東西！

學過古典物理的人都知道

- 牛頓那種粒子觀的世界
- 還有那 $F=ma$ 的力學定律

然後在法拉第和馬克士威的年代

- 逐漸發展出了有別於《粒子觀》的電磁波理論！
- 而且馬克士威計算出電磁波的速度

$$c = c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ [公尺/秒]}$$

- 由於和光速相同，因此推論光是一種電磁波

以下是電磁波速度的推導

推導：波動方程式

根據上述的法拉第定律與安培定律，可推得下列結果

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times (-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t});$$

接著假設電流密度為零 $\mathbf{J} = 0$ ，於是得到

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t});$$

接著根據迪卡兒座標系統中的 curl of curl 定理

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}, \text{ 可得下式}$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2};$$

接著假設電荷密度為零 $\rho = 0$ ，那麼根據 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = 0$ 可推論 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ，於是得到：

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}; \text{ 這就是波動方程式了。}$$

因此，上述範例中的電場之函數如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= A \sin(\omega t - cz) \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}; \\ &= A \sin(\omega(t - \sqrt{\mu \epsilon} z)) \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}. \end{aligned}$$

這代表 \mathbf{E} 為一個往 z 軸方向行進的電磁波，其振幅為 A ，而頻率為 ω ，且行進速度為 $\frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$ 。

說明：上述電場波動的振幅為 A ，頻率為 ω 是比較容易理解的，學過 \sin, \cos 等三角函數的人應該可以輕易理解。但是為何行進速度為 $\sqrt{\mu \epsilon}$ 呢？

如果您想像一個海浪，正往右方打去，那麼該海浪的速度為多少呢？一個直覺的看法是看波峰走的距離，然後除以花費的時間就得到速度。

同樣的，對於 $A \sin(\omega(t - \sqrt{\mu \epsilon} z)) \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$ 這個波而言，如果在 t 時間波峰在 z ，且在 $t+dt$ 這個時間點波峰在 $z+dz$ ，那麼我們就可以用 dz/dt 來計算波速。而要保持某點在正弦波上的位置不變，方法就是用 $\sqrt{\mu \epsilon} z$ 去抵銷 t 所造成的功效，也就是兩者都在波峰、或者兩者都在波谷的情況。

接著，我們就可以根據波動方程式推論電磁波的傳遞速度，讓我們用一個範例來看看這個推論：

範例：假設電場 $\mathbf{E} = P(x,y,z) \mathbf{i} + Q(x,y,z) \mathbf{j} + R(x,y,z) \mathbf{k}$ ，其中 $P(x,y,z) = A \sin(\omega t - cz)$ ，而 Q, R 均為 0，那麼那麼請問 c 是多少才會符合波動方程式的解。

解答：

$$\mathbf{E} = A \sin(\omega t - cz) \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k};$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2 P(x,y,z)}{\partial x^2} + 0 + 0 = -A c^2 \sin(\omega t - cz) \mathbf{i};$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -A \omega^2 \sin(\omega t - cz) \mathbf{i};$$

接著根據波動方程式 $\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ ，可以得到下式：

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -A c^2 \sin(\omega t - cz) \mathbf{i} = \mu \epsilon (-A \omega^2 \sin(\omega t - cz)) \mathbf{i} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2};$$

所以可以推論 $c^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ 。

因此該電磁波的速度就是滿足 $t - \sqrt{\mu \epsilon} z = 0$ 的情況，於是我們可以得到：

$$t - \sqrt{\mu \epsilon} z = K; \text{ 在某個時間 } t, \text{ 位置 } z \text{ 處的電場大小為 } \sin(\omega K)$$

$$t + dt - \sqrt{\mu \epsilon} (z + dz) = K; \text{ 在經過 } dt \text{ 時間後，我們希望看到那個同樣大小的 } \sin(\omega K) \text{ 向量移動到 } z + dz。$$

$$t + dt - \sqrt{\mu \epsilon} (z + dz) - (t - \sqrt{\mu \epsilon} z) = 0; \text{ 也就是該電場大小不變，但是位置從 } z \text{ 移到了 } z + dz。$$

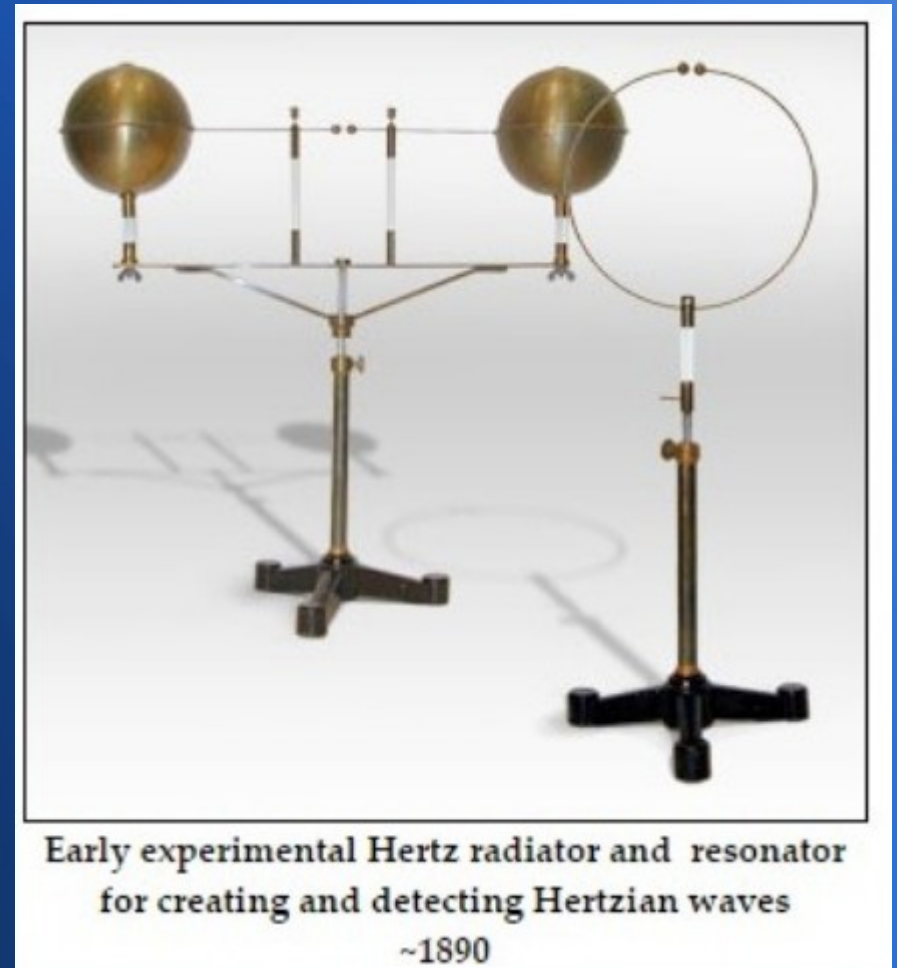
$$dt = \sqrt{\mu \epsilon} dz; \text{ 於是我們找出 } dt \text{ 與 } dz \text{ 的關係式。}$$

$$dz/dt = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}; \text{ 也就是速度為 } \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}。$$

而且，我們知道在真空中，介電率 μ_0 與 ϵ_0 代入後，該速度 $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ 恰好為光速，這也正是馬克斯威推論光波為一種電磁波的原因。

後來《赫茲》在 1888 年

- 用圖中的儀器驗證了電磁波存在



接著《馬可尼》把成果商業化

- 用這種裝置來傳送摩斯電碼，然後開了馬可尼公司賺了大錢。
- (鐵達尼號沉沒時，上面就有馬可尼公司的設備和人員)

問題是

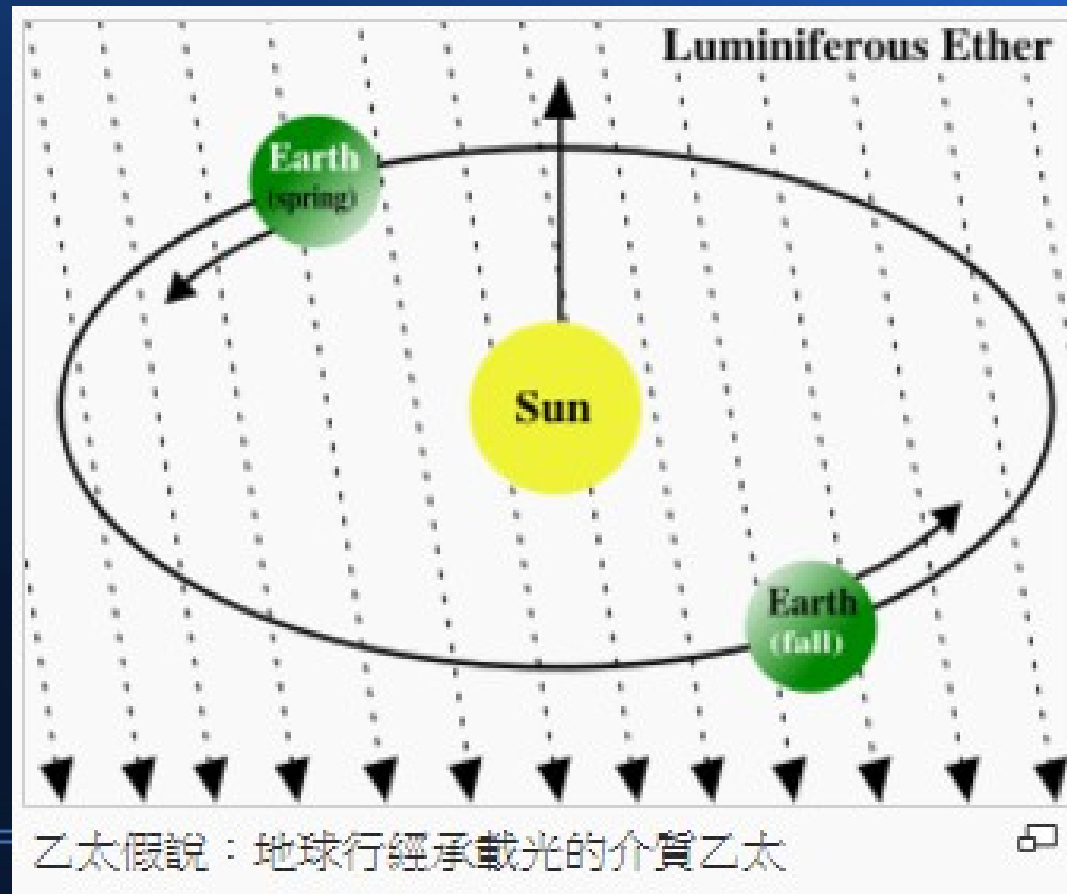
- 《水波》是靠水傳遞的
- 《聲波》是靠空氣傳遞的
- 那麼《電磁波》到底是透過甚麼介質傳遞的呢？

關於這個問題

- 物理學家們認為，很久以前笛卡爾所提出的那種《充滿整個空間、無所不在的乙太介質》，可能真的存在！
- 這種乙太可以做為《絕對靜止座標系》的一種基質！

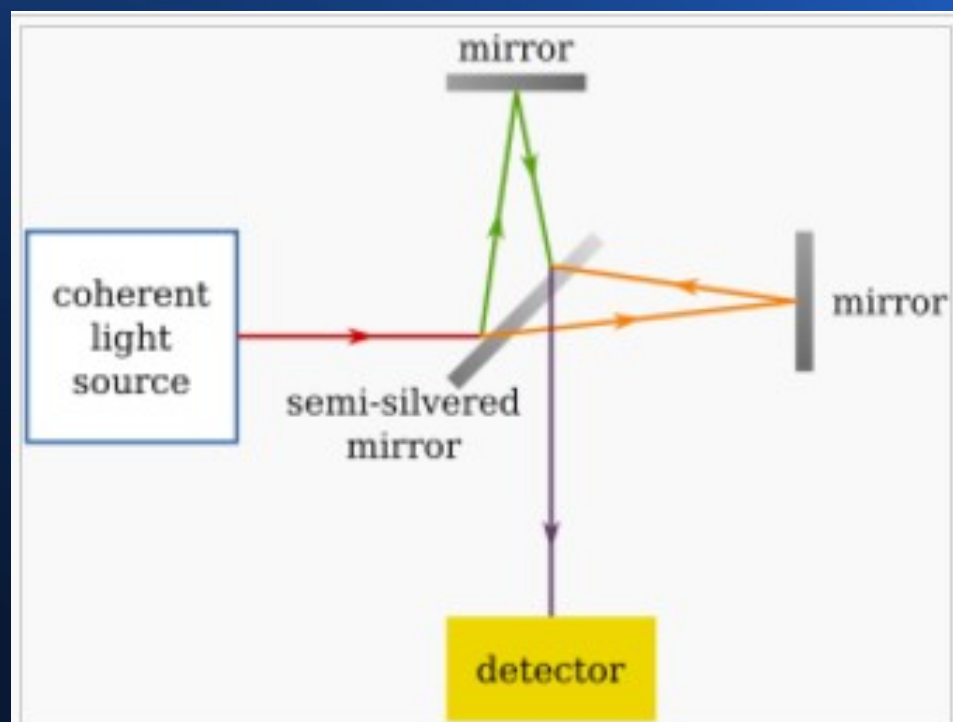
馬克士威本人

- 其實也不知道《乙太》到底存不存在！



但這位偉大的科學家

- 在 1879 年提出了一種探測方法



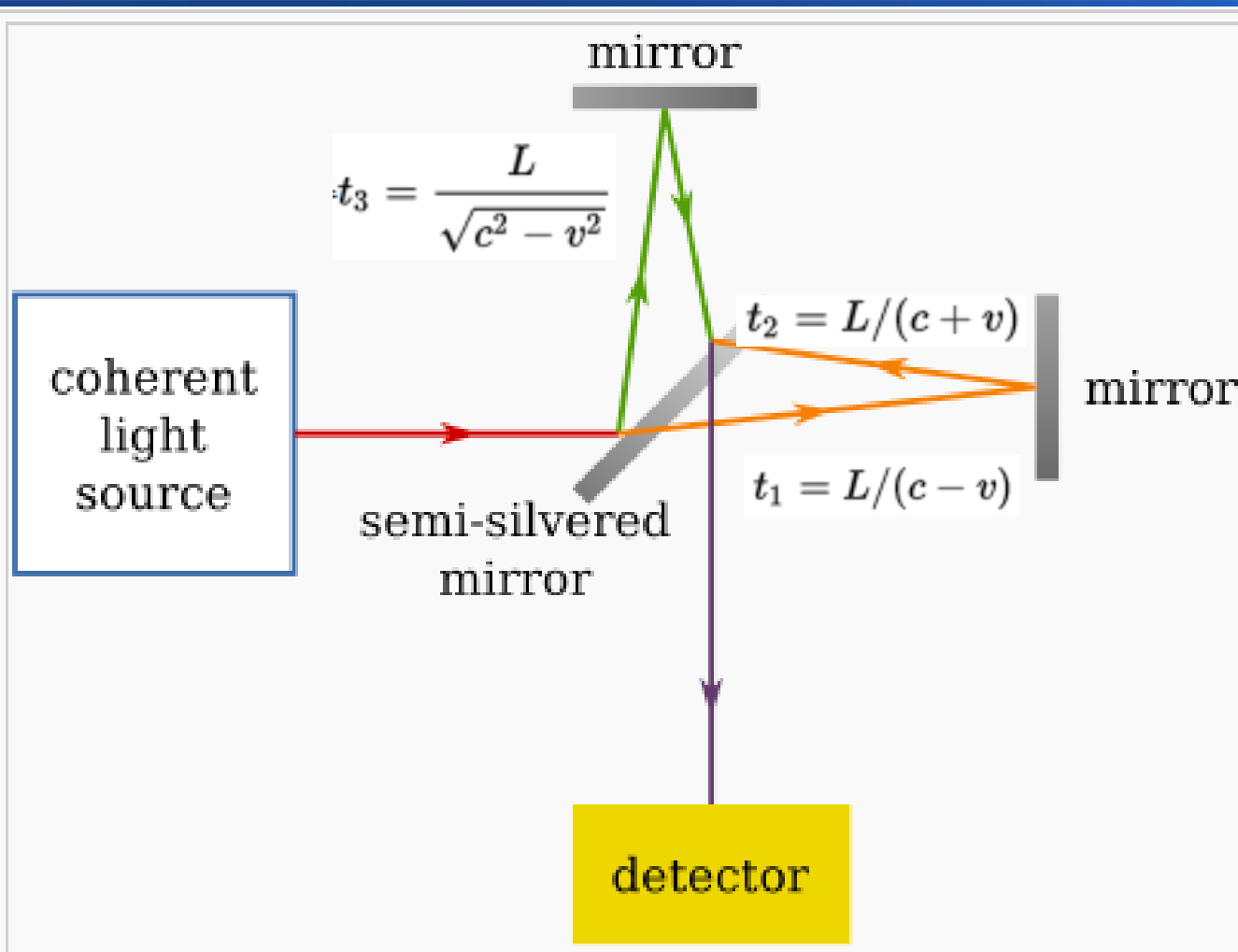
邁克生－莫雷實驗裝置



就是讓光線

- 分別在《平行》和《垂直》於地球的運動方向等距離的傳播
- 根據公式計算《平行地球方向》的光波應該會《比垂直方向還要慢一點點》。

以下是兩個方向的時間算法



實驗裝置

$$t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c \cdot (1 - v^2/c^2)}$$

若光速受以太影響
則上下兩式不相等



$$2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{c \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

後來在 1881 年

- 美國的麥克生實踐的這個想法，動手去測量兩個方向是否有時間差。
- 如果有時間差的話，光波就會產生干涉條紋！

這個實驗的原理如下

當「以太風」的速度為0時，兩束光應同時到達，因而相位相同；如「以太風」速度不為零，即裝置相對以太運動，則兩列光波相位不同。

假設裝置在以太中向右以速度 v 運動，且從部分鍍銀的玻璃片到兩面鏡子的距離為 L ，那麼向右的那一束光在向右的過程中相對裝置速度為 $c - v$ ，花費的時間 $t_1 = L/(c - v)$ ，返回時速度為 $c + v$ ，時間 $t_2 = L/(c + v)$ 。所以總的時間是

$$t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c \cdot (1 - v^2/c^2)}$$

而對於向上的那一束光，設它到達鏡子所需的時間為 t_3 ，在這段時間裡鏡子向右移動了 vt_3 ，所以光走過的路程是一個直角三角形的斜邊，於是有

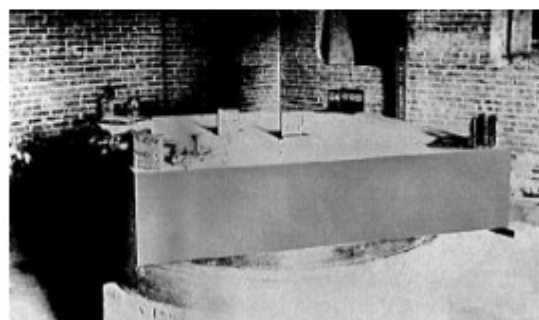
$$L^2 = (ct_3)^2 - (vt_3)^2 = (c^2 - v^2)t_3^2$$

$$\text{由此可得 } t_3 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

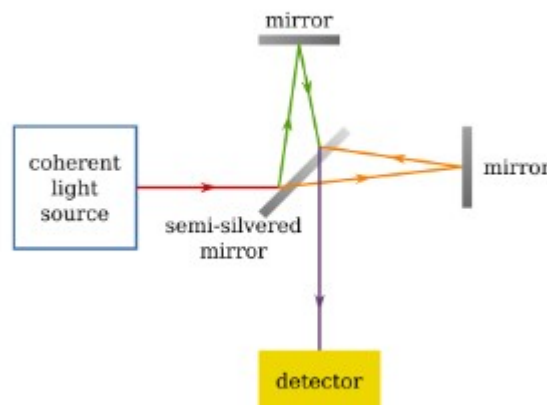
而返回時間與此相同，所以總時間

$$2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{c \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

所以兩束光的到達時間是不同的，根據這個實驗應該能測量出地球通過以太的速度

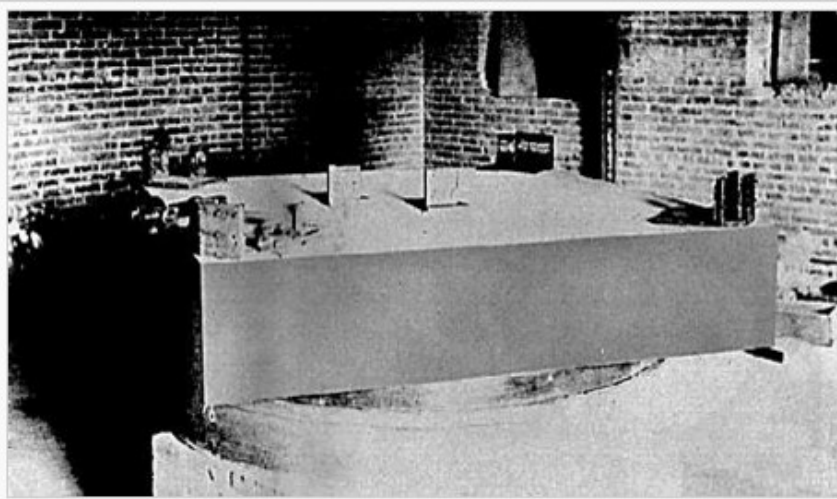


邁克生與其雷的干涉儀設置，其安裝在一塊漂浮在圓形水銀槽上方。

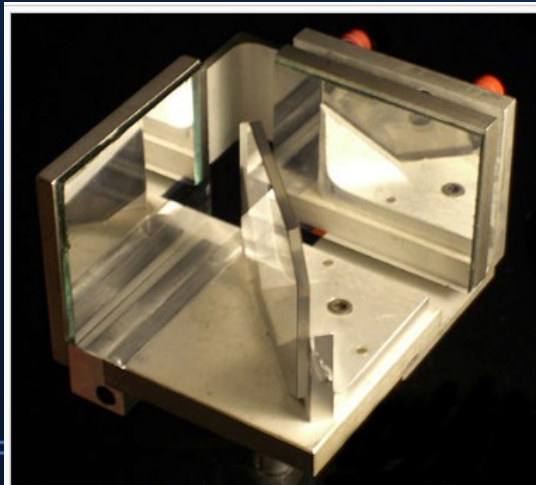


實驗裝置

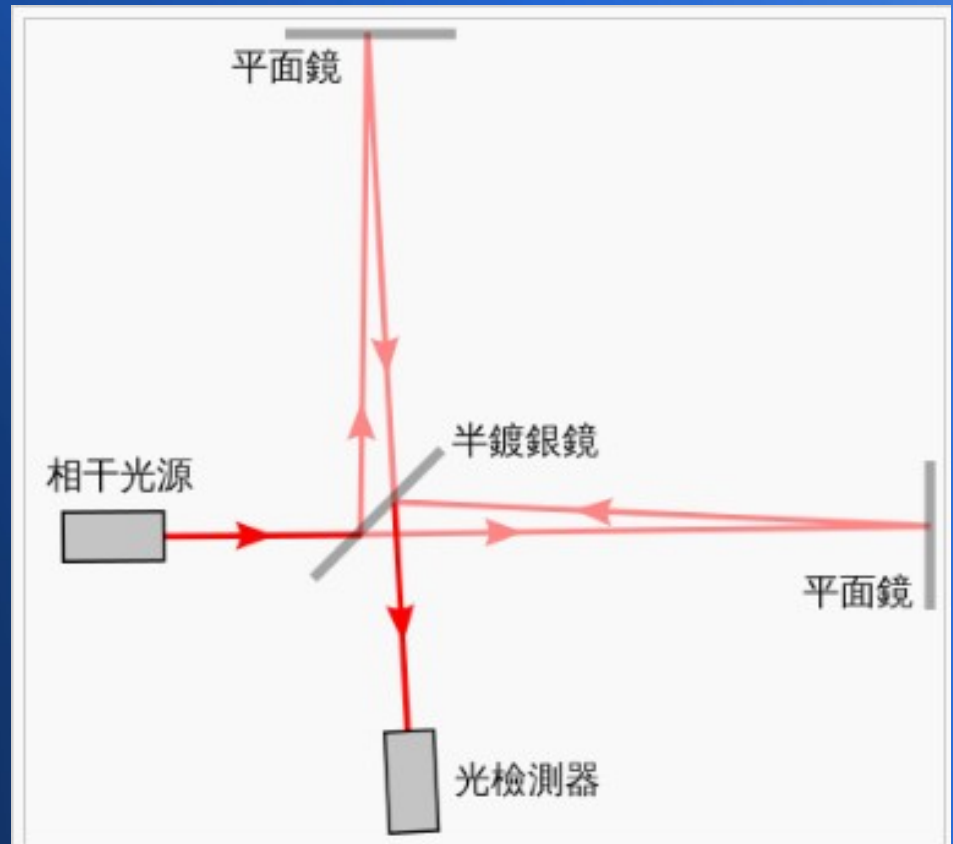
麥克生的實驗設備和方法如下



邁克生與莫雷的干涉儀設置，其安裝在一塊漂浮在圓形水銀槽上方。



邁克生干涉儀



邁克生干涉儀的光路圖（補償板未畫出）

結果

- 沒有發現乙太存在的跡象！

麥克生不死心

- 後來在 1887 年又和莫雷合作，做了一次更精密的實驗

結果仍然一樣

- 沒有發現乙太存在的跡象！

麥克生失望地認為

- 自己的實驗室失敗的！

後來又有人用現代儀器重做實驗

- 結果當然還是沒有以太存在的跡象

近代實驗

近代版的邁克生－莫雷實驗變得司空見慣。[雷射](#)和[邁射](#)通過讓光線在充滿高能原子的精心調整的空間內來回反射，以放大光線。這樣的有效長度可達千米。還有一個好處，同一光源在不同光線角度產生同樣的相位，給干涉計增加了額外精確度。

第一個這樣的實驗是由查爾斯·H·湯斯（Charles H. Townes）做的，第一個[邁射](#)製作者之一。他們1958年的實驗把漂移的上限，包括可能的實驗誤差，降低到僅僅30m/s。在1974年通過三角形內修剪工具精確的雷射重複實驗把這個值降低到0.025m/s，並且在一個光臂上放上玻璃來測試拖曳效果。在1979年Brillet-Hall實驗把人以方向的上限降低到30m/s，但是雙向因素降低到0.000001 m/s (i.e., 靜止或者夾帶以太)。Hils和Hall在經過一年的重複實驗之後，於1990年公布，各向異性的極限降低到 2×10^{-13} 。

實驗結果證明，不論地球運動的方向同光的射向一致或相反，測出的[光速](#)都相同，在地球同設想的「以太」之間沒有相對運動。當時邁克生因此認為這個結果表明以太是隨著地球運動的。

實驗者	年份	光速的最大各向異性
布里耶與霍爾 ^[15]	1979	$\lesssim 10^{-15}$
沃爾夫等 ^[16]	2003	
繆勒等 ^[17]	2003	
沃爾夫等 ^[18]	2004	
沃爾夫等 ^[19]	2004	
安東尼尼等 ^[20]	2005	$\lesssim 10^{-16}$
斯坦尼克斯等 ^[21]	2005	
赫爾曼等 ^[22]	2005	
斯坦尼克斯等 ^[23]	2006	

麥克生的實驗

- 不僅沒有證明以太存在
- 反而為《光速恆定》這件事情提供了強烈的證據！

這樣的話

- 如果從《光速恆定》這件事情出發，那麼可以推導出什麼樣的一個物理學體系呢？

愛因斯坦的相對論

- 其實就是從《光速恆定》這件事出發的！

在此光速恆定的條件為： 1. 在真空中 2. 沒有加速度或引力場！

不過、傳統的時空觀念

- 是非常頑固的
- 幾位物理學家開始試圖提出物體在以太風當中會收縮的理論，以便讓《麥克生的實驗》能《符合以太理論》。

其中一位

- 還精確推導出了這種收縮的數學公式，他就是《羅倫茲》。

1904年，荷蘭物理學家勞倫茲提出了著名的勞倫茲變換，用於解釋邁克生-莫雷實驗的結果。他提出運動物體的長度會收縮，並且收縮只發生運動方向上。如果物體靜止時的長度為 L_0 ，當它以速度 v 以平行於長度的方向運動時，長度收縮為

$$L = L_0 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

引入這條規律後 $t_1 + t_2 = \frac{2L \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}{c \cdot (1 - v^2/c^2)} = \frac{2L}{c \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2t_3$ ，成功地解釋

了實驗結果。（參見：勞倫茲變換）

羅倫茲的推導

- 其實已經很《離經叛道》了

因為他在 1892 年推導的結果認為

- 粒子的質量將隨著速度而增加
 - 牛頓的 $F=ma$ 就必須有所修正
- 而且在羅倫茲轉換的體系下，任何物體的速度不得超過光速。（而且不管你用多大的力量推多久，都無法到達光速）。

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

1905 年

- 那個好不容易才找到專利局工作的那位魯蛇《愛因斯坦》
- 終於穩定下來可以好好用腦袋思考一些問題了！



Albert Einstein in 1904
(age 25)



結果那年

- 他連續發表了五篇論文
其中三篇名留青史

第一篇是探討

- 液體懸浮粒子布朗運動的論文

第二篇是

- 延伸《普朗克方程式》的量子想法，
提出光量子學說的光電效應論文。
- 後來愛因斯坦在 1921 年獲得諾貝爾
獎，靠的主要就是這一篇！

第三篇就是

- 那驚天一擊的《狹義相對論》
- 論文的名稱是《論物體的電動力學》
(英文譯名：On the Electrodynamics of Moving Bodies)

由於愛因斯坦

- 在 1905 年的表現實在太棒
- 因此後來的人稱那年為物理學史上的奇蹟年！
- 和牛頓發現萬有引力定律的 1666 年可以相互比美！

現在、就讓我們來看看

- 《狹義相對論》和《羅倫茲變換》到底在說些甚麼？

當然這裡所謂的證明

- 是建立在某些公理系統上的

而《相對論》裡面

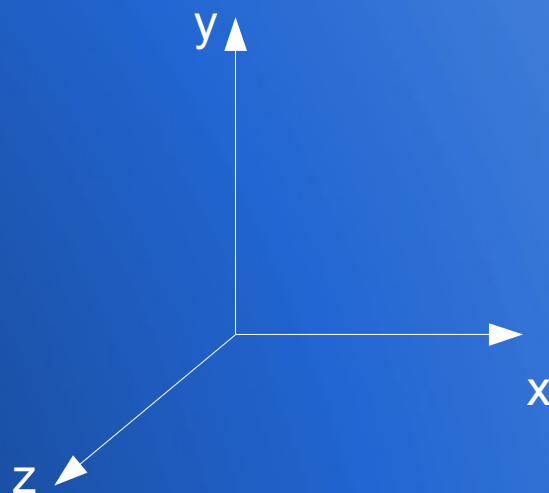
- 最重要的一條公理就是
 - 真空中的光速是不變的！
 - $c=3*10^8 \text{ m/s}$

這條公理和傳統《笛卡兒》的世界觀，以及《牛頓》的看法有很大不同，正是這點造成了《相對論》和《羅倫茲》得到不同的推論結果。

公理系統不同，推論的結果也會有所不同！

我們生活的世界

- 是一個三度空間，可以用三維的《笛卡兒》坐標 (x, y, z) 來定位每一個點
- 如果加上時間 t 之後，就會變成四維的 (x, y, z, t) 座標系統。



假如有兩艘太空船 Σ 與 Σ'

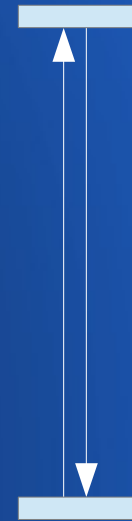
- 以無動力的方式在太空中等速移動，當我們在 Σ 上看 Σ' 時，發現 Σ' 以速度 v 向 x 軸前進！



此時如果有人從 Σ' 太空船的底部

- 發射一道光射向天花板上的鏡子，那麼光會被鏡子反射回來

Σ' \xrightarrow{v}



觀察者

但是對 Σ 上的觀察者而言

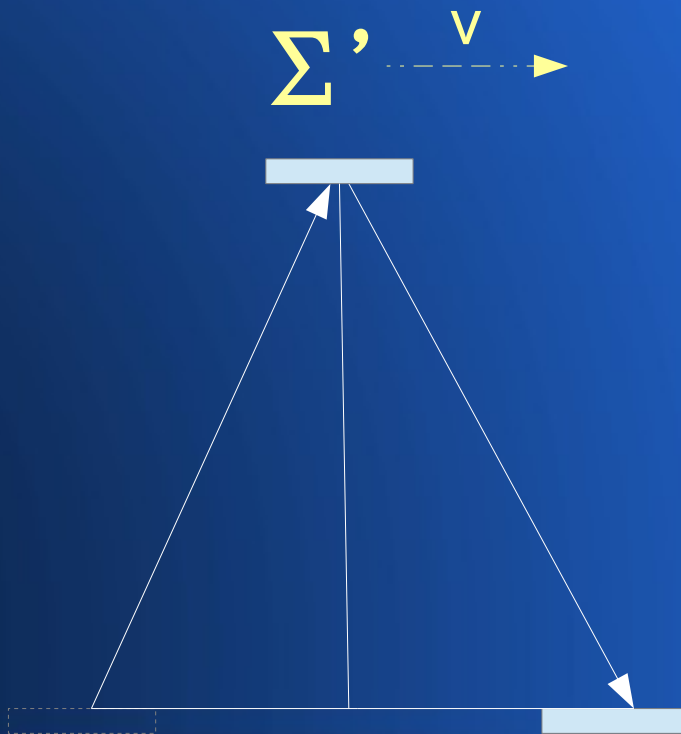
- Σ' 上的光會是斜向射出的（因為 Σ' 太空船在前進）

Σ

Σ' \xrightarrow{v}



觀察者



根據《光速恆定》 (不依觀察者座標系改變的原理)

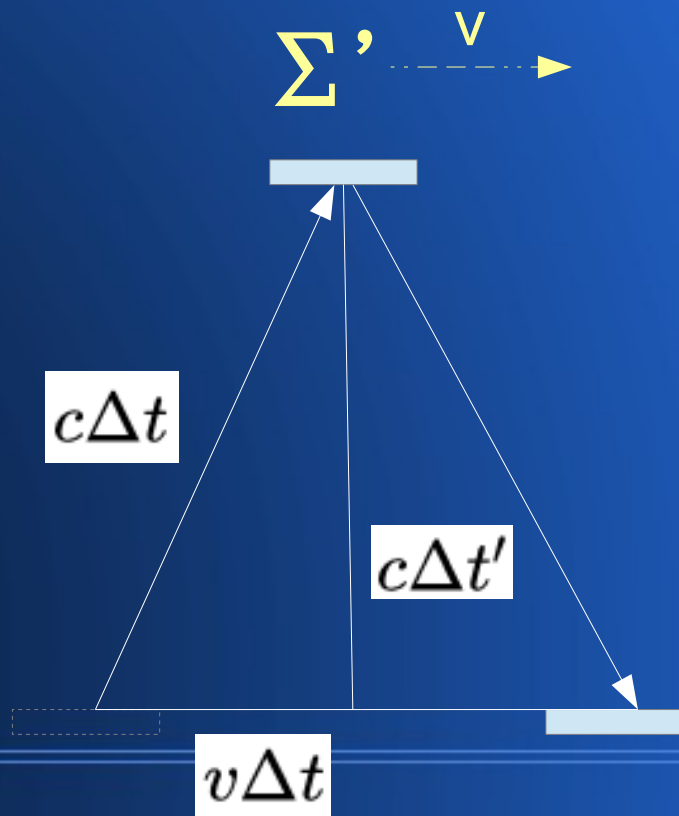
- 假如觀察者經時間 Δt 後看到光打到天花板上的鏡子
- 那麼對 Σ' 座標內的人而言，時間 $\Delta t'$ 到底是經過多久呢？

Σ

Σ' \xrightarrow{v}



觀察者



根據《畢氏定理》

- 我們可以計算如下：

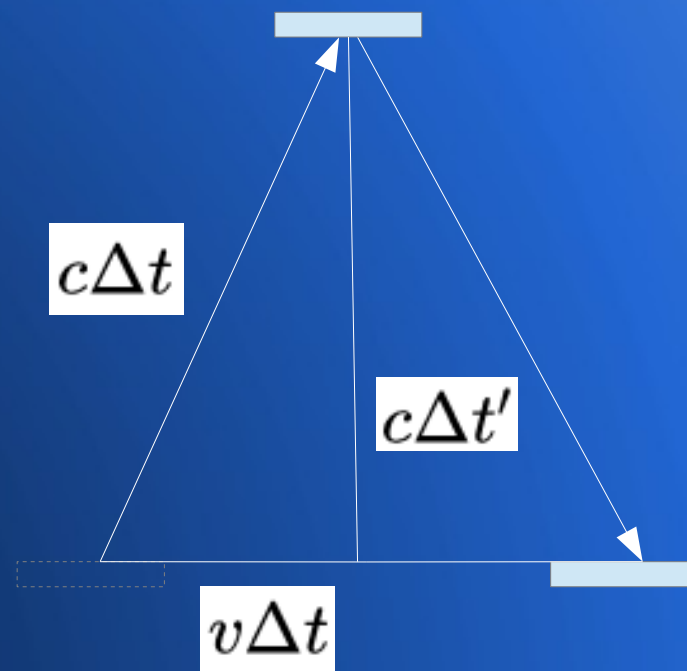
$$c^2 \Delta t^2 = c^2 \Delta t'^2 + v^2 \Delta t^2$$

$$c^2 \Delta t^2 - v^2 \Delta t^2 = c^2 \Delta t'^2$$

$$\frac{c^2 \Delta t^2 - v^2 \Delta t^2}{c^2} = \Delta t'^2$$

$$\left(\sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}}\right) \Delta t = \Delta t'$$

$$\Delta t' = \left(\sqrt{1 - v^2/c^2}\right) \Delta t$$



最後我們得到這個等式

- 這個等式其實頗耐人尋味！

$$\Delta t' = (\sqrt{1 - v^2/c^2})\Delta t$$

- 必須小心解讀！

問題是

- 到底是誰的時間變短了？誰的變長了？

$$\Delta t' = (\sqrt{1 - v^2/c^2})\Delta t$$

- Δt 是觀察者的時間，而 $\Delta t'$ 則是移動太空船上的時間。
- $\Delta t > \Delta t'$ ，代表觀察者時間 Δt 過了比較久（例如 15 秒），而移動太空船上的時間才經過了 $\Delta t'$ （例如 10 秒）

所以是

- 移動太空船上的時間變慢了！

$$\Delta t' = (\sqrt{1 - v^2/c^2}) \Delta t$$

- 這就是《動鐘變慢》，時間延長的原理了！

於是《相對論》說

- 當我們觀察快速移動坐標系內的物體時，會發現《時間延長》了，也就是《鐘變慢了》！

$$\Delta t' = (\sqrt{1 - v^2/c^2}) \Delta t$$

得到這個結論之後

- 我們就能仿照推論出《長度縮短》的《尺縮》效應了。

您可以參考下列影片

- 思考一下背後的想法！



根據這樣的想法

- 羅倫茲推導出來，當我們從其中一艘看另一艘時，座標如果經過羅倫茲變換，那麼兩者就可以使用相同的物理定律公式。
- 這個推導假設光速在兩個座標系中都是恆定的 3×10^8

以下是羅倫茲變換的數學式

- (x, y, z, t) 是第一艘太空船 Σ 的時空座標
 (x', y', z', t') 是第二艘 Σ' 的時空座標

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

羅倫茲變換預示了幾個驚人的結果

- 那就是《長度收縮和時間延長》，簡稱《尺縮鐘慢》效應

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

長度收縮
(尺縮)

時間延長
(鐘慢)

關於《尺縮鐘慢》的推導

- 可以參考《劉柏彥》的兩個影片

YouTube video player showing a derivation of time dilation. The video title is "國中生都能懂的狹義相對論之時間膨脹原理". The video content includes a diagram of a light clock and the following equations:

$$T = \frac{2L}{c} \quad L = \frac{cT}{2}$$
$$L^2 = D^2 + \frac{v^2 T^2}{4}$$
$$\frac{c^2 T^2}{4} = D^2 + \frac{v^2 T^2}{4}$$
$$\frac{T^2}{4} (c^2 - v^2) = D^2$$
$$T = \frac{2D}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

國中生都能懂的狹義相對論之時間膨脹原理

YouTube video player showing a derivation of length contraction. The video title is "國中生都能懂的狹義相對論之長度收縮原理". The video content includes a diagram of a moving object and the following equations:

由後到前花了 t_A
由前到後花了 t_B

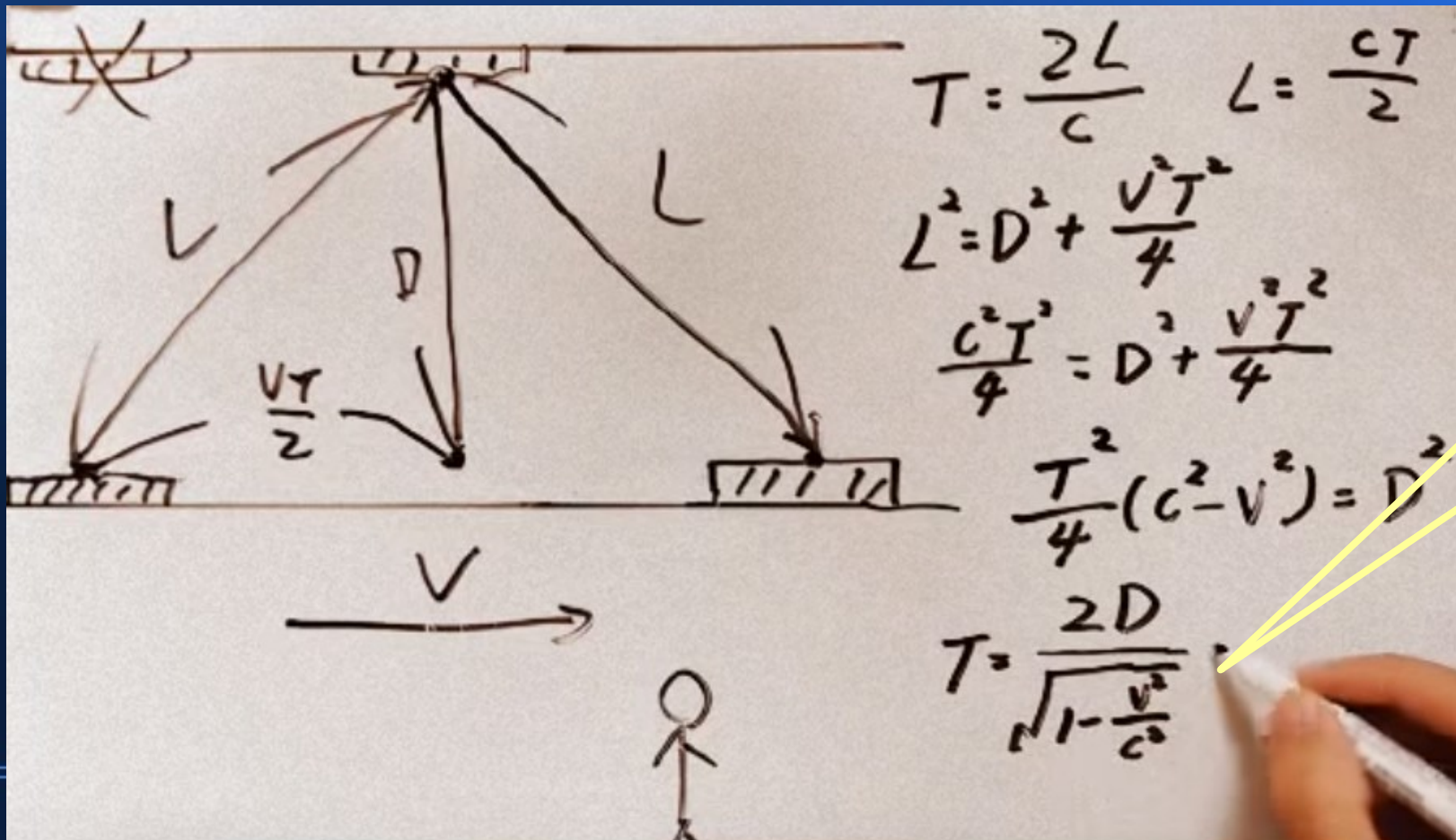
整個事件花了 T

$$T = t_A + t_B = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v}$$
$$= \frac{L(c+v) + L(c-v)}{c^2 - v^2} = \frac{2LC}{c^2 - v^2}$$
$$T' = \frac{2L'}{c}$$

國中生都能懂的狹義相對論之長度收縮原理

其中關鍵性的推論

就是反過來用光速 c 去推出時間 t ，而不是用時間 t 去計算光速 c



時間延長
(鐘慢)

羅倫茲認為這個結果

- 只是以第一艘太空船觀察者 Σ 的角色，透過光線觀察第二艘太空船 Σ' 所需要的轉換。

在羅倫茲變換下

- 如果兩艘太空船的相對速度很小，也就是 v 遠小於 c ，那麼《羅倫茲變換》就會退化成古典力學中的《笛卡兒變換》

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right. \xrightarrow{v \ll c} \left\{ \begin{array}{l} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right.$$

但愛因斯坦不同

- 他認為《羅倫茲變換》，不僅僅是一種觀察者角度不同的問題，而是《時空真的並非線性》所造成的《尺縮鐘慢》效果。
- 換言之、尺是真的縮了，鐘也是真的慢了，而且在這裡不需要甚麼以太來中介

因為愛因斯坦認為

- 《在所有慣性坐標系裏
物理定律維持不變》

這就是所謂的《相對性原理》，
由這原理發展出來的理論稱為
《狹義相對論》！

狹義相對論的基本原理

[編輯]

- 光速不變原理。

在所有慣性系中，真空中的光速都

$$\text{等於 } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299\,792\,458$$

m/s (μ_0 ：真空磁導率， ϵ_0 ：真空介電常數)，與光源運動無關。

- 狹義相對性原理。

在所有慣性系中，物理定律有相同的表達形式。這是力學相對性原理的推廣，它適用於一切物理定律，其本質是所有慣性系平權。

而且愛因斯坦還導出了 《相對論質量》

相對論質量 [編輯]

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

m_0 指絕對質量（及牛頓力學中的質量）， m 為相對論質量。

由公式可以看出：

- 1.對於一個有質量的物體，其速度 v 不可能等於或者超過光速，否則分母將會無意義或為一個虛數（註：光子沒有靜止質量，因此其速度可以達到光速；但是在其運動時，會有動量或者說能量，不屬於質量範疇）。
- 2.當某有質量之物體移動速率越接近光速，相對論質量會變重。
- 3.當 v 遠小於 c 時， m 近似於 m_0 ，符合牛頓力學定律。

相對論力學

相對論力學 [編輯]

在狹義相對論中牛頓第二定律 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 應改寫成下式（ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 可解釋為下式的特例）

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

而動量 $\mathbf{P} = M\mathbf{v}$ ，其中 M 非定值，所以根據微分計算式 $d(uv) = udv + vdu$ ，得

$$\mathbf{F} = \frac{d(M\mathbf{v})}{dt} = \frac{dM}{dt}\mathbf{v} + M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m_0 \frac{d\gamma}{dt}\mathbf{v} + \gamma m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

得

$$\mathbf{F} = \frac{\gamma^3 m_0 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})}{c^2} \mathbf{v} + \gamma m_0 \mathbf{a}.$$

由上式可見，加速度並不和力的方向一致，且隨著速度逐漸趨向於光速，物體的質量趨向於無窮大，加速度趨向於零。

相對論能量

相對論能量 [編輯]

根據 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ 公式，運動時物體質量增大，同時運動時將會有動能，質量與動能均隨速度增大而增大。

根據 $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$

得 $dE_k = \mathbf{F}dx = \frac{d\mathbf{p}}{dt}dx$

因為 $\frac{dx}{dt} = v$ ，所以 $dE_k = vd(mv) = v^2 dm + mv dv$

由 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ 公式改寫而得 $m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2$

因為 m, v 都是 t 的函數，將該式兩邊對 t 微分，得 $mv dv = c^2 dm - v^2 dm$ ，

將結果帶入上式 dE_k ，得

$$dE_k = c^2 dm$$

對其積分， $E_k = \int_{m_0}^m c^2 dm = mc^2 - m_0 c^2$

這就是相對論下的動能公式。當速度為0時， $m = m_0$ ，所以動能為0。 $m_0 c^2$ 為物體靜止時的能量。而總能量=靜止能量+動能，因此總能量 $E = mc^2$ 。

相對論動量

相對論動量與能量 [編輯]

根據式 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$,

等式左右兩邊平方，再同乘以光速的四次方

得: $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$

此外，不難證明: $pc^2 = E\mathbf{v}$.

上兩式說明動量與能量是密切相關的

當速度接近光速時， v 約等於 c ，因此最後一式可改寫為 $\mathbf{E} = pc$.

還有最著名的 $E=mc^2$ 質能轉換式

zh.wikipedia.org/wiki/質能等價

因此， $\gamma m \mathbf{u}$ 也就是運動質量的表達式，其中 γ 為洛倫茲因子。

方程的證明 [編輯]

以一外力 \mathbf{F} 對物體作功，根據功-動能定理，物體的微小動能變化為

$$dK = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot d\mathbf{p}$$

式中， \mathbf{p} 為物體的動量 $\gamma m \mathbf{u}$ (此處的 m 為靜止質量)，而 $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ 為物體的速度 \mathbf{u} 。因此此式可改寫為

$$dK = \mathbf{u} \cdot d(\gamma m \mathbf{u}) = m \mathbf{u} \cdot d(\gamma \mathbf{u})。$$

根據以下等式(詳見四維速度)，

$$U_\mu U^\mu = -\gamma^2 c^2 + \gamma \mathbf{u} \cdot \gamma \mathbf{u} = -c^2 = \text{constant}$$

將等式的兩側取微分量並重新整理，

$$-2c^2 \gamma d\gamma + 2\gamma \mathbf{u} \cdot d(\gamma \mathbf{u}) = 0$$
$$\mathbf{u} \cdot d(\gamma \mathbf{u}) = c^2 d\gamma。$$

以此等式代入上方的 dK 關係式得

$$dK = mc^2 d\gamma$$
$$K = \int_{\mathbf{u}=0}^{\mathbf{u}=\mathbf{u}} mc^2 d\gamma(\mathbf{u}) = \gamma mc^2 - mc^2$$

此即為相對論下的動能表達式，注意式中 γmc^2 僅與四維動量的時間分量相差一比例常數 c 。若以此定義物體的能量，

$$E \equiv P^0 c = \gamma mc^2$$

則 $E = K + mc^2$ 。其中 mc^2 為物體因具有質量而具有的能量，即

$$E_0 = mc^2。$$

註：若改以 m_0 表示內秉質量， $m = \gamma m_0$ 表示相對論質量，則亦有 $E = mc^2$ 之關係。

但是、我們能說

- 羅倫茲太過頑固，所以喪失了發現相對論的契機嗎？

其實《時空非線性》這個觀念

- 真的很難接受
- 不只是羅倫茲，幾乎所有當時的物理學家都無法接受。

為甚麼呢？

請仔細想想看

- 假如兩艘太空船以 0.999 倍光速互相遠離
- 第一艘太空船 Σ 和第二艘太空船 Σ' 兩者其實是對稱的
- 我看你的樣子，和你看我的樣子，只有左右不同而已，並沒有其他分別。

這樣的話

- 如果有一對雙胞胎 AB
 - A 在第一艘太空船 Σ 上
 - B 在第二艘太空船 Σ' 上
- 兩者 50 年後再度返航碰面！

那麼當 AB 完成宇宙航行

- 再度碰頭的時候，你會發現一個現象。
 - A 應該已經很老了，但會發現 B 青春永駐（因為鐘慢效應）
 - B 也應該已經很老了，但會發現 A 青春永駐（因為鐘慢效應）
- 那麼、到底是誰會比較老呢？（A 比 B 老，B 又比 A 老）

這就是著名的《孿生子悖論》

[illegible]

這種矛盾萬分的結果

- 應該是任何科學家都無法接受的！

愛因斯坦自己

- 也知道這是個嚴重的大問題

所以、他在發表狹義相對論之後

- 就不斷地進行思考，到底該如何化解《狹義相對論》的這種矛盾性！

愛因斯坦應該早已想到

- 問題的關鍵在於，兩個雙胞胎要能碰頭，勢必得經過一些《力量與加速度》的作用！

在加速度過程當中

- 時間又會慢下來！

因此、假如那對雙胞胎

- A 沒有加速度，B 則經過《減速後加速》的《返航》後回來找他！
- 那麼 A 將會驚奇的發現，自己已應老得不像話了，但是兄弟 B 竟然青春永駐，還是當年分開時的樣子。

但是如果他們兩人

- 都同樣經過對稱的減速後加速，然後返航到原先分開的地點碰頭的話
- 那麼兩人將會是相同的年紀，不會有很大的驚奇！

經由這樣的思考

- 《愛因斯坦》開始建構他的
廣義相對論！

在建構廣義相對論的過程中

- 必須考慮加速度所造成的問題

但是愛因斯坦厲害的地方是

- 他不只考慮《加速度》的問題，還把《重力》所造成的效果一併考慮進來！

他把《重力》與《加速度》

- 合併在一個稱為《等效原理》的前提下！

zh.wikipedia.org/wiki/等效原理



弱等效原理 [編輯]

弱等效原理原是指觀測者不能在局部的區域內分辨出由**加速度**所產生的**慣性力**或由物體所產生的**引力**，而它是由**引力質量**與**慣性質量**成正比例這一事實推演出來，這個關係首先是由**伽利略**及**牛頓**用一系列的實驗斷定出來。

強等效原理 [編輯]

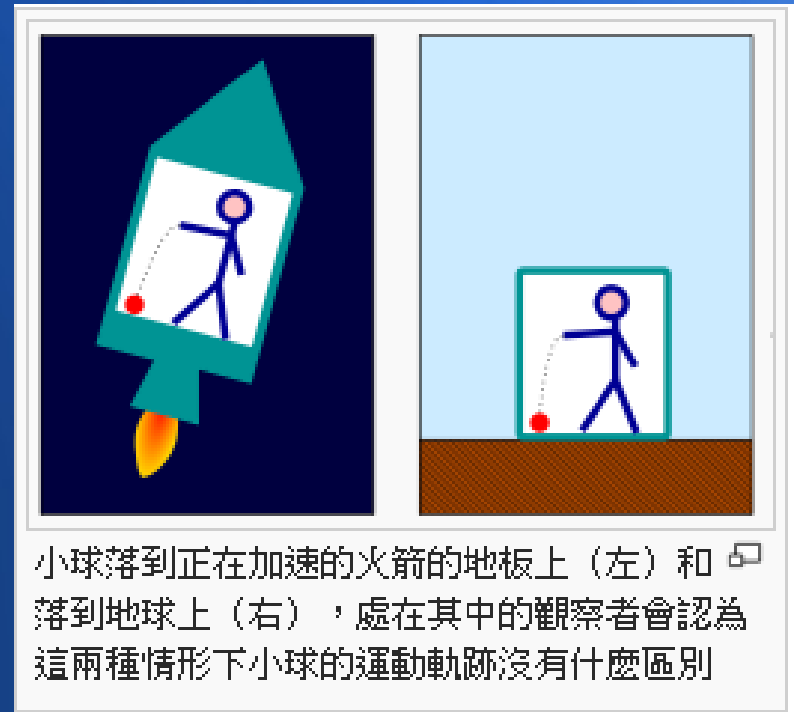
強等效原理是指在時空區域的一點內的引力場可用相應的局域慣性參考系去描述，而**狹義相對論**在其局域慣性參考系中完全成立。

所謂的《等效原理》

- 就是對於身在其中的人而言
《加速度》和《重力》
是無法區分的。

舉例而言

- 如果你在一個以加速度 a 上升的火箭裡
- 和你在一個 $F=ma$ 的引力場裡
所觀察到的世界，將會擁有一模一樣的物理法則
- 兩者完全無法區分！
- 這就是所謂的《等效原理》。



於是

- 愛因斯坦開始去建構出，能夠支持
《等效原理》和《相對性原理》的
《時空幾何學》！

但是他對這種非歐幾何學

- 完全是個外行！

所以他向好朋友

- 數學家《格羅斯曼》求助！

最後、透過非歐幾何學中的 《黎曼幾何》

- 還有描述《幾何變換》的《張量》
數學理論
- 建構出了《廣義相對論》的數學體系！

在廣義相對論裡面

- 重力和加速度一樣，具有《讓鐘慢下來》的效果。

所以在一個強大的引力場中

- 時間是過得比較慢的！

因此假如你活在一個

- 超強的重力場裡面！

那麼對遠離該引力場的觀察者而言

- 你基本上是《青春永駐》的

還記得前幾年有部電影

● 叫做《星際效應》



馬修·麥康納（左）與安·海瑟薇（右）在電影中分別飾演庫珀和艾米莉亞·布蘭德博士。

星際效應 *Interstellar*



電影海報

基本資料

導演	克里斯多福·諾蘭
監製	蓮達·奧比斯特 愛瑪·湯瑪斯 克里斯多福·諾蘭
編劇	克里斯多福·諾蘭 強納森·諾蘭
主演	馬修·麥康納

當太空船上的人

- 下去那個重力場強大的星球，經過十幾個小時後返為太空船

卻發現了船上的夥伴

- 已經老到快要死了！

星際效應裡的這個橋段

- 背後的科學基礎就是
《廣義相對論》中引力場會
讓《鐘慢下來》的理論！

現在

- 我們應該解釋完《狹義與廣義相對論》了！

但是慢著

到底愛因斯坦

- 從《非歐幾何》和《張量》當中得到了甚麼東西，才能夠讓他得以建構出《廣義相對論》呢？

愛因斯坦的相對論

- 除了《麥克生》的以太偵測實驗之外，究竟有甚麼實證基礎嗎？

還有愛因斯坦

- 到底是如何推導出《廣義相對論》方程式的？

關於這點

- 我還沒有能力詳細描述！

但是我感覺到

- 這和《幾何變換》有關！
- 也和《張量》這門數學有密切關係

以下是維基百科的張量描述

- 您可以看到愛因斯坦與張量數學發展的關係

背景知識 [編輯]

「張量」一詞最初由威廉·羅恩·哈密頓在1846年引入，但他把這個詞用於指代現在稱為模的對象。該詞的現代意義是沃爾德馬爾·福格特在1899年開始使用的。

這個概念由格雷戈里奧·里奇-庫爾巴斯托羅在1890年在《絕對微分幾何》的標題下發展出來，隨著1900年列維-奇維塔的經典文章《絕對微分》（義大利文，隨後出版了其他譯本）的出版而為許多數學家所知。隨著1915年左右愛因斯坦的廣義相對論的引入，張量微積分獲得了更廣泛的承認。廣義相對論完全由張量語言表述，愛因斯坦從列維-奇維塔本人那裡學了很多張量語言（其實是Marcel Grossman，他是愛因斯坦在蘇黎世聯邦理工學院的同學，一個幾何學家，也是愛因斯坦在張量語言方面的良師益友 - 參看Abraham Pais所著《上帝是微妙的（Subtle is the Lord）》），並學得很艱苦。但張量也用於其它領域，例如連續力學，譬如應變張量（參看線性彈性）。

注意「張量」一詞經常用作張量場的簡寫，而張量場是對流形的每一點給定一個張量值。要更好的理解張量場，必須首先理解張量的基本思想。

定義 [編輯]

一個 (m, n) 型的張量被定義為一個多重線性映射(multilinear map)^[1]

$$T: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{m \text{ copies}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n \text{ copies}} \rightarrow \mathbb{R},$$

其中 V 是向量空間， V^* 是對應的對偶空間。

在傳統的歐氏幾何中

- 如果你進行《平移、旋轉、鏡像》等動作，那麼並不會改變歐氏幾何命題的成立與否。
- 因此《平移、旋轉、鏡像》被稱為《歐幾里得運動群》。

這些幾何操作

- 通常可以用矩陣進行表達

- 繞 x -軸的主動旋轉定義為：

$$\mathcal{R}_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix}$$

假如我們加上《縮放》操作

- 那麼得到的幾何學稱為《相似幾何學》
- 這在《電腦繪圖》的領域很有用！

縮放可以表示為縮放矩陣。要用一個向量 $v = (v_x, v_y, v_z)$ 縮放一個物體，每個點 $p = (p_x, p_y, p_z)$ 都需要乘以縮放矩陣：

$$S_v = \begin{bmatrix} v_x & 0 & 0 \\ 0 & v_y & 0 \\ 0 & 0 & v_z \end{bmatrix}$$

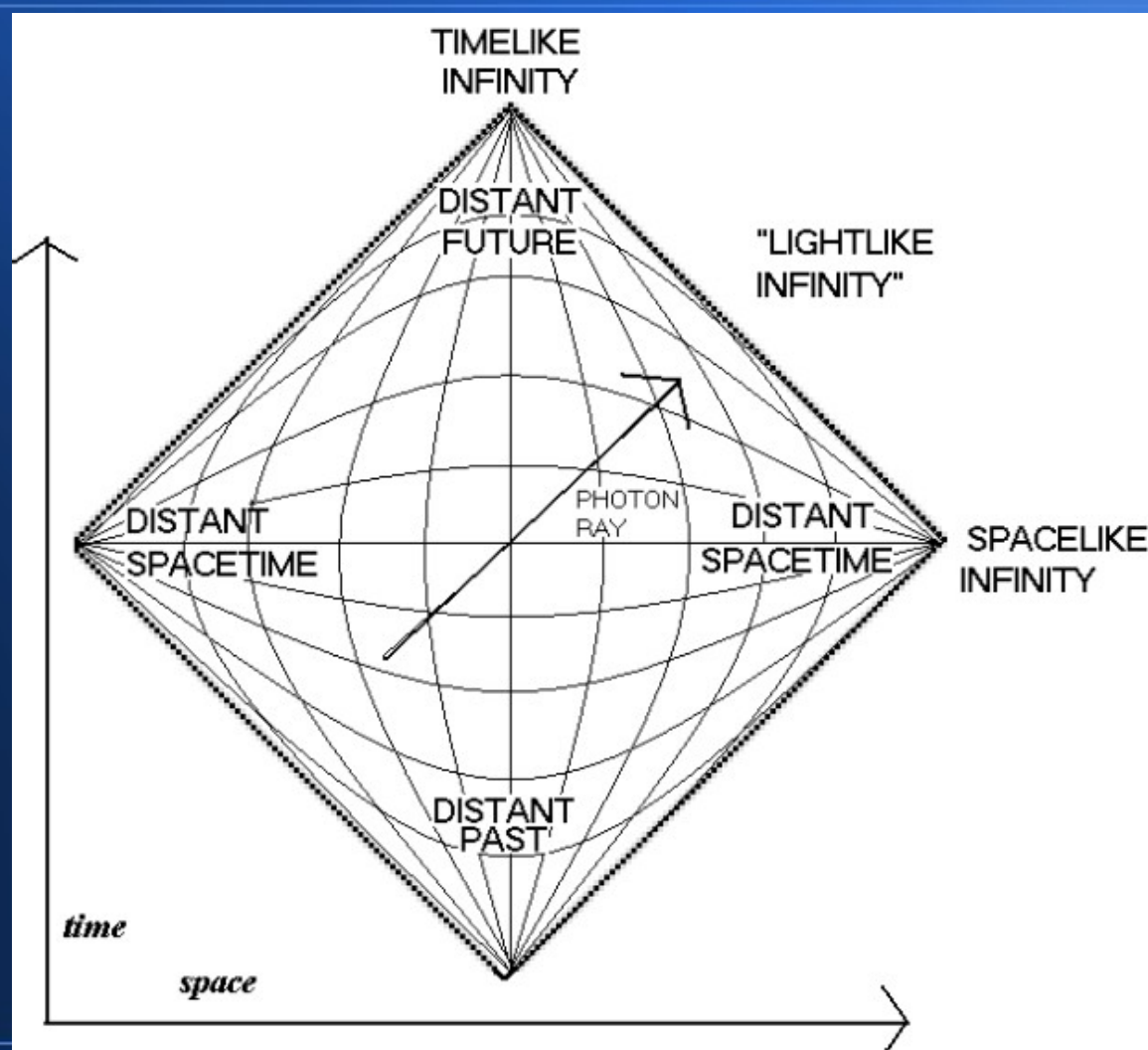
愛因斯坦的數學老師《閔可夫斯基》

- 在閱讀了《狹義相對論》之後，發展出了
《閔可夫斯基幾何學》
- 這個幾何學保住了《愛因斯坦的相對性原理》！
- 而羅倫茲變換就是《閔可夫斯基幾何學》的一個
模型（或說轉換張量）！

以下是維基百科的閔可夫斯基時空結構

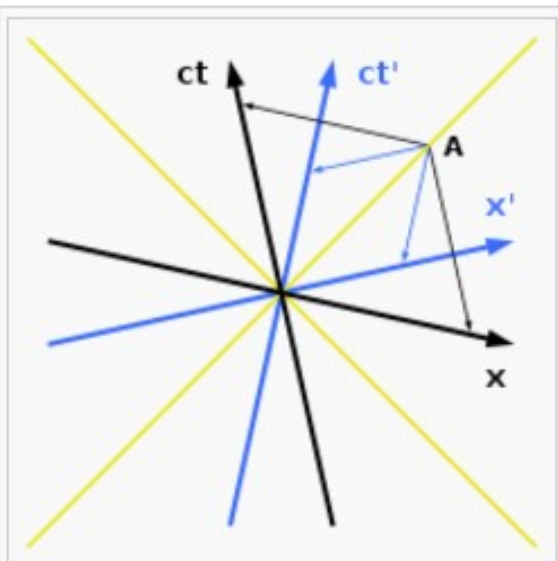
阿爾伯特·愛因斯坦在瑞士蘇黎世聯邦科技大學時期的數學老師赫爾曼·閔可夫斯基在愛因斯坦提出狹義相對論之後，於1907年將愛因斯坦與亨德里克·勞侖茲的理論結果重新表述成(3+1)維的時空，其中光速在各個慣性參考系皆為定值，這樣的時空即以其為名，稱為閔可夫斯基時空，或稱閔可夫斯基空間。

愛因斯坦一開始不認為這樣的表述有何重要性，但當他1907年開始轉往廣義相對論發展時，發現閔可夫斯基時空可說是其所要發展的理論架構的基礎，轉而對這樣的表述採取高的評價。



這種時空對應到的是一種 錐狀的曲面幾何學

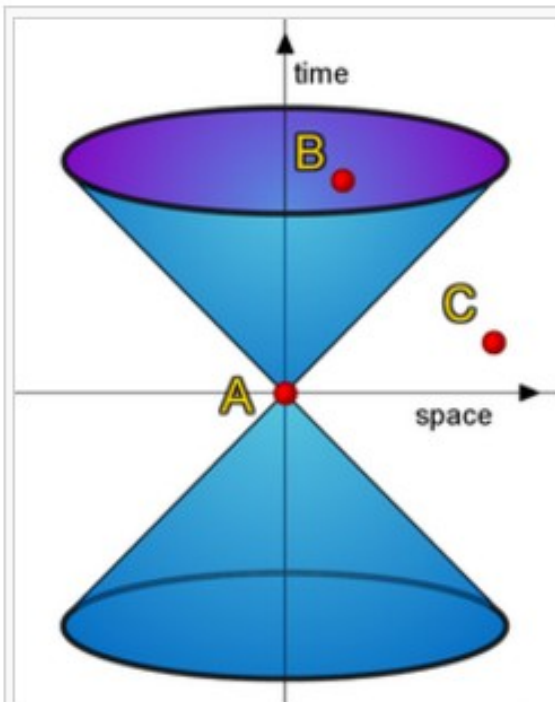
光錐 [編輯]



即使如何轉換慣性參考系，光錐依然不變

若有一道光經過 $(0,0,0,0)$ ，它所有可能的世界線是兩個圓錐面，圓錐的頂角是 90° ，一個在 $ct \leq 0$ （未來），另一個在 $ct \geq 0$ （過去），稱為光錐。圓錐面將平面分成五部分

- 未來光錐內的點（表示的事件），與原點是類空的；
- 過去光錐內的點，與原點是類空的；
- 光錐外的點（有 $x \leq 0, x \geq 0$ 兩邊），與原點是類時的；
- 在光錐上的點，是類光的。



光錐：在圖中，C與A是類時的，B與A是類空的

空間收縮 [編輯]

其圖形稱為閔可夫斯基圖

閔考斯基圖 [編輯]

維基百科，自由的百科全書

時空圖，又稱**閔可夫斯基圖**，用以表示**閔可夫斯基時空**的事件的坐標。它是一種理解**狹義相對論**現象的工具。

在四維的坐標系，以時間乘以**光速**（ ct ）為其中一軸，稱之為時間軸；其他的**x**軸、**y**軸、**z**軸，稱之為空間軸。在這四維時空上的每一點，都代表一個事件**E**。對應特定的**慣性參考系**，**E**發生的時間和地點(ct, x, y, z)。

每個質點在時空的活動都可以在時空圖上以連續的曲線表示，稱為**世界線**。

例如，在直角坐標繫上，若質點均速運動， $x(t) = vt$ ，它的世界線便是一條穿過原點、斜率為 v/c 的直線(斜率是關於時間軸**ct**軸的，而非**x**軸)。若質點是**簡諧運動**， $x(t) = \sin \omega t$ ，它的世界線便會一條沿時間軸變化的**正弦**曲線。

（為了方便在平面上表示，下面的閔可夫斯基圖多數只有時間軸和一條空間軸**x**軸。）

而愛因斯坦的任務

- 則是將《閔可夫斯基幾何》延伸，
以便找到一個模型，可以容納
《加速度與引力場》所造成的效果

於是以下狹義相對論的模型

在狹義相對論中，微積分、矩陣為其所用到的主要數學工具，配合閔可夫斯基時空的轉換以及勞倫茲不變量的使用，粗略地描述了時、空的性質。當s'座標系在s座標系沿x軸作等速v運動時，其轉換以以下方程式表示：

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

其具有以下不變形式：

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

或者寫成微分形式

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

在適當地選取座標系可使 $c = 1$

對於牛頓力學中的動量、能量作了以下的修正：

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

$$E = mc^2$$

其中

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ } m_0 \text{ 為物質在靜止下的質量}$$

能量和動量有以下關係：

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

進一步擴充為廣義相對論

//zh.wikipedia.org/wiki/廣義相對論中的數學 ☆



廣義相對論 [編輯]

狹義相對論僅限於等速、時空可近似平坦地情況下，然而在討論大尺度且有重力場的情況下，就必須使用廣義相對論。

愛因斯坦認為，慣性坐標系並沒有優於其他坐標系，一切的物理定律應在任何參考座標系下皆成立，所有的變換應都是協變的。因此，在其論文中，大量地使用稱之為張量 (Tensor) 的數學工具，其方程式往往是非線性的，因此很難求解。

數學形式 [編輯]

一小段弧長 ds 平方的不變式

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$g_{\mu\nu}$ 為度規張量

dx^μ 和 dx^ν 為逆變張量

質點沿測地線運動，測地線方程式可以用哈密頓原理或是平行位移(parallel transportation)等方式推導，以下為測地線方程式：

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0$$

$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ 為克里斯多福符號

在非歐式空間中，描述空間曲率的張量為黎曼-克里斯多福張量

$$R_{\nu\rho\sigma}^\beta = \frac{\partial \Gamma_{\nu\sigma}^\beta}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{\nu\rho}^\beta}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\beta - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta$$

並且發展出重力場方程式

//zh.wikipedia.org/wiki/爱因斯坦场方程



愛因斯坦重力場方程式 [編輯]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

其中

- $G_{\mu\nu}$ 稱為愛因斯坦張量，
- $R_{\mu\nu}$ 是從黎曼張量縮併而成的里奇張量，代表曲率項；
- R 是從里奇張量縮併而成的純量曲率(或里奇數量)；
- $g_{\mu\nu}$ 是從(3+1)維時空的度量張量；
- $T_{\mu\nu}$ 是能量-動量-應力張量，
- G 是重力常數，
- c 是真空中光速。

愛因斯坦場方程式是一組含有若干4階對稱張量的張量方程式。每一個張量都有10個獨立的分量。由於4個比安基恆等式，我們可以將10個愛因斯坦場方程式減少至6個獨立的方程組。這導致了度規張量 $g_{\mu\nu}$ 有4個自由度，與座標選取的4個自由度是對應的。

透過這個張量方程式

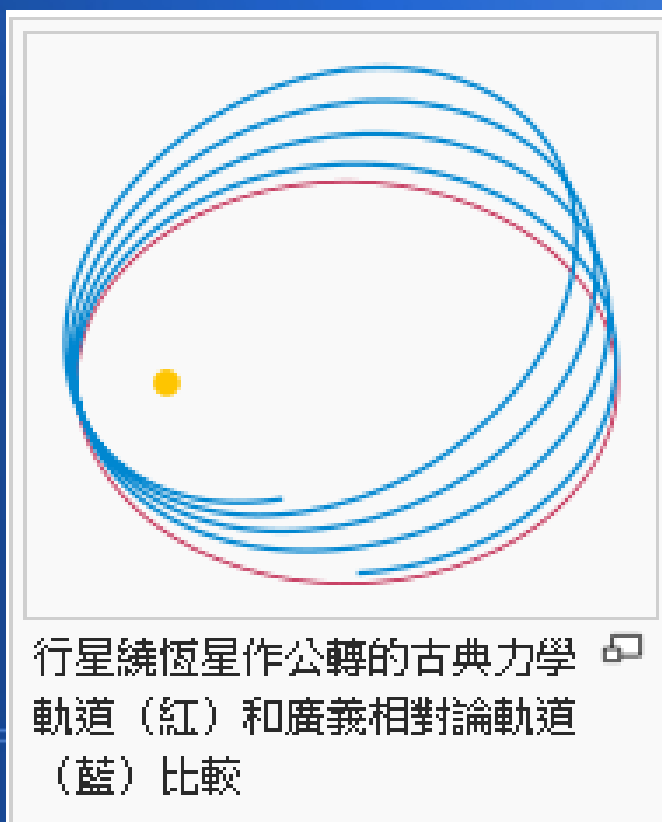
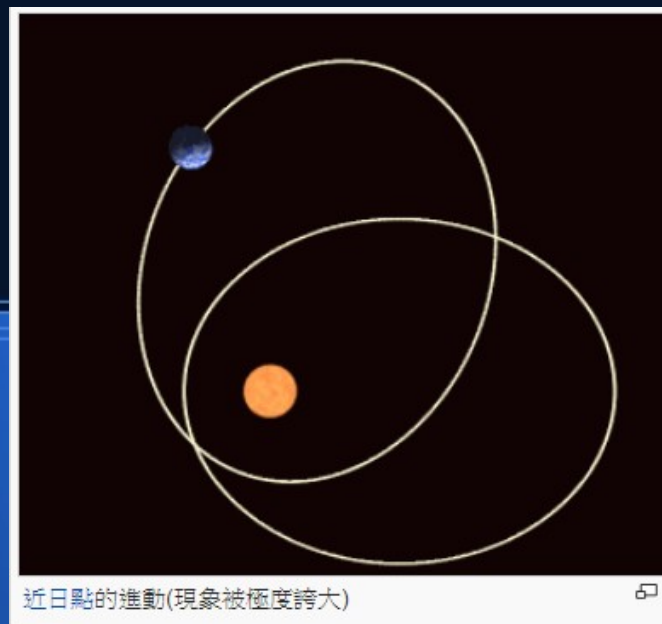
- 可以進行很多物理預測！

這些預測

- 主要是在超大尺度的天文學領域！

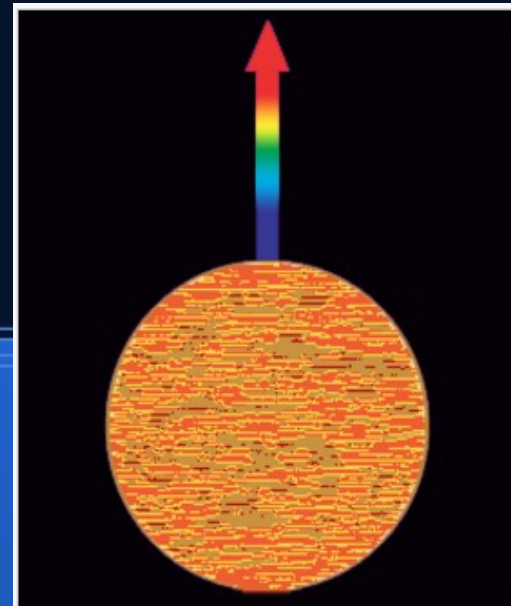
第一個實證案例

- 是《廣義相對論》很好的解釋了《水星》這顆特別靠近太陽的星球，會產生《進動》（precession）的現象。
- 傳統牛頓力學以為水星附近還有顆《火神星》但是卻一直找不到！
- 但是根據廣義相對論，很好的解釋了原本無法解釋的那個 43 秒角度的誤差！

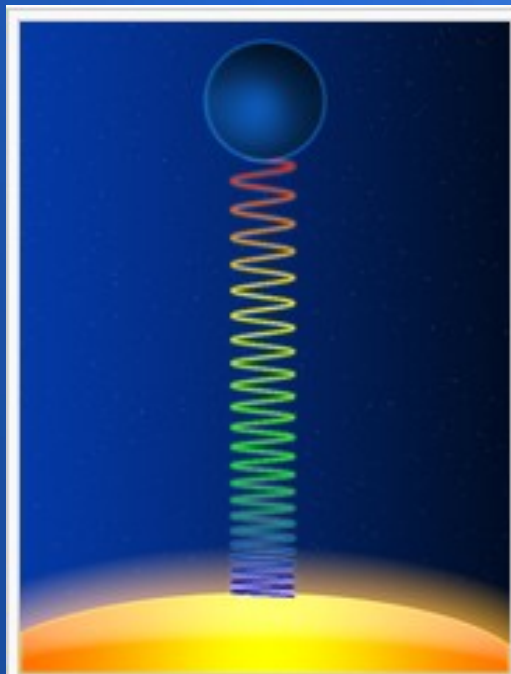


第二個實證案例

- 是引力的紅移現象！
- 也就是在強引力場中光譜會波長會變長（紅移）！
- 天文學家的觀測證實了這一點！



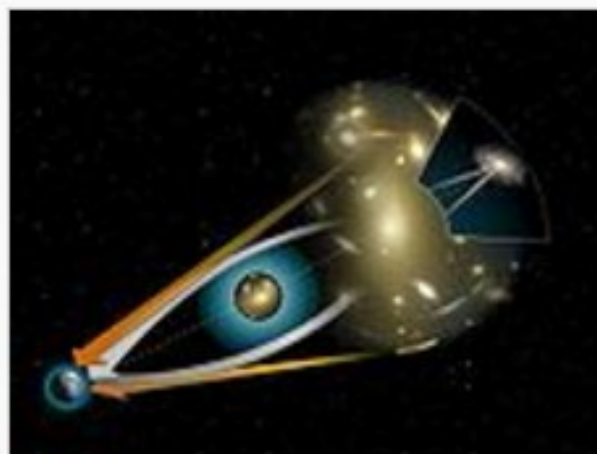
質量龐大的星球上所發出的光遠離星球時，會發生紅位移——從藍色偏到紅色。



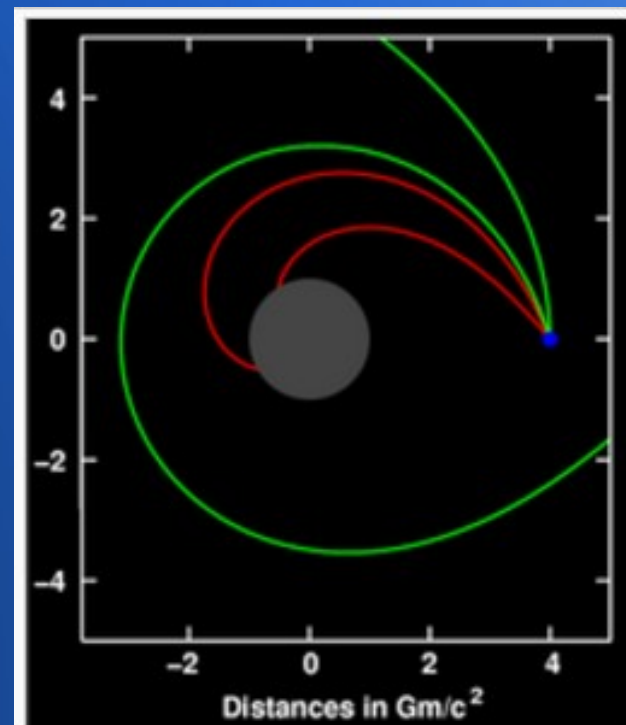
光波從一個大質量物體表面出射時頻率會發生紅移

第三個實證案例

- 是引力場使光線偏轉的預測



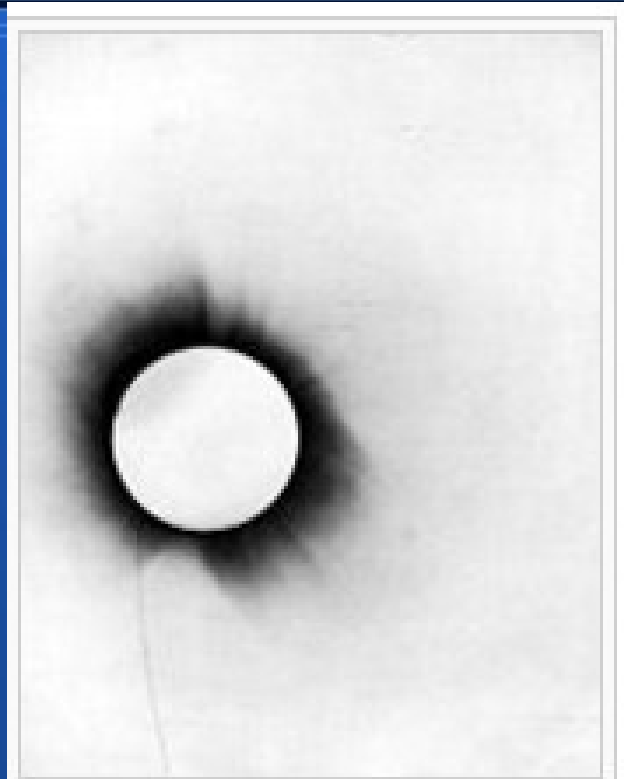
從遙遠光源發射出的光波，經過大質量天體附近時，會被其重力場偏折。橘色箭透露出光源的表觀位置；白色箭透露出光源的真實位置。



從光源（圖中藍點表示）發射出的光線在途徑一個緻密星體（圖中灰色區域表示）時發生的光線偏折

1919 年日全蝕的時候

- 英國愛丁頓和克勞姆林分別於非洲的《普林西比島》和南美的《索布拉爾島》拍攝
- 帶回的照片經過比對，發現經過太陽的星光，確實發生了《廣義相對論中預測的 1.7 秒（角度）的偏差》！



亞瑟·愛丁頓爵士拍攝的1919年日食照片，1920年刊登於他的論文當中，並且宣布日食實驗成功

另外還有《重力時間延遲》

重力時間延遲 [編輯]

1963年，**歐文·夏皮羅**（Irwin Shapiro）提出另一種可以在太陽系內進行的實驗，稱為**夏皮羅實驗**。這實驗不同於前述三種古典實驗，因此又稱為第四種檢驗廣義相對論的「古典實驗」。夏皮羅表明，被其它行星反射的雷達信號，其來回時間會出現相對論性時間延遲，這效應稱為**重力時間延遲效應**。^[29]與直線路徑相比較，光子在掠過太陽時彎曲路徑所產生的時間延遲微不足道，但是廣義相對論預測，在光子靠近太陽的**重力場**時，時間延遲效應會因**時間膨脹**而逐漸增加。對水星和金星被太陽掩食前後的觀測符合廣義相對論的預測，誤差為5%。^[30]更近期的**卡西尼-惠更斯號**進行類似實驗，結果與廣義相對論相符，誤差只有0.002%。^[31]甚長基線干涉測量也測量了木星^{[32][33]}和土星^[34]經重力磁性修正後的重力時間延遲效應。



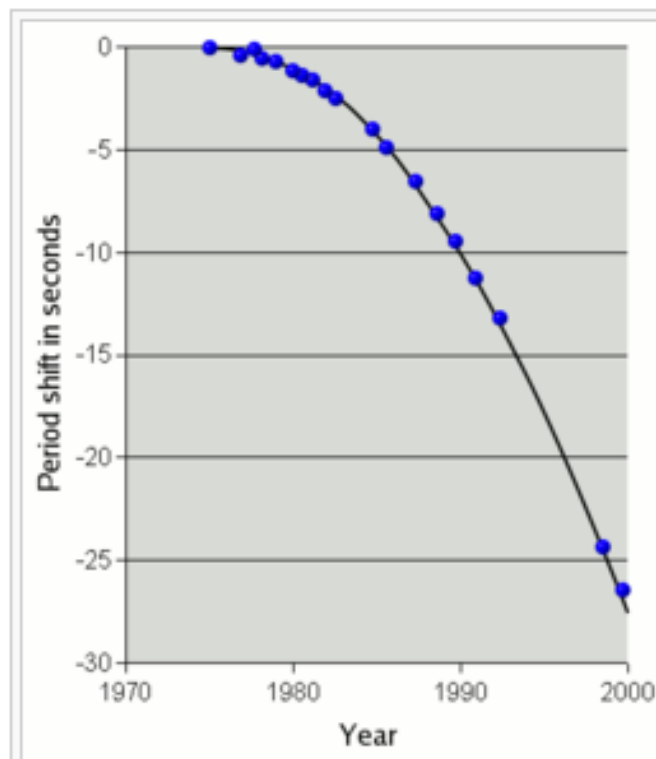
位於土星的**卡西尼號**向地球發送的信號在太陽的重力場中延遲

雙星系統的軌道衰減

軌道衰減 [編輯]

根據廣義相對論，一個雙星系統會通過重力輻射的形式損失能量。儘管這種能量損失一般相當緩慢，卻會使得雙星間的距離逐漸降低，同時降低的還有軌道周期。在太陽系內的兩體系統或者一般的雙星中，這種效應十分微弱因此難以觀測。然而對於一個密近脈衝雙星系統而言，在軌道運動中它們會發射極度規律的脈衝信號，地球上的接收者從而能夠將這個信號序列作為一個高度精確的時鐘。這個精確的時鐘是用來精確測量脈衝雙星軌道周期的最佳工具。並且由於組成脈衝雙星的恆星是中子星，其緻密性能導致有較多部分的能量以重力輻射的形式傳播出去^[74]。

最早觀測到這種因重力輻射導致的軌道周期衰減的實驗是由赫爾斯和泰勒完成的，他們所觀測的脈衝雙星是他們於1974年發現的PSR 1913+16。這也是人類首次在實驗上證實重力波的存在，儘管這只是一種間接觀測，這項工作因此獲得1993年的諾貝爾物理學獎^[75]。從那以後更多的脈衝雙星被發現，值得一提的是PSR J0737-3039，雙星系統的两个成員都是脈衝星^[76]。



對脈衝雙星PSR1913+16的周期變化長達三十年的觀測，其周期變化在秒量級內

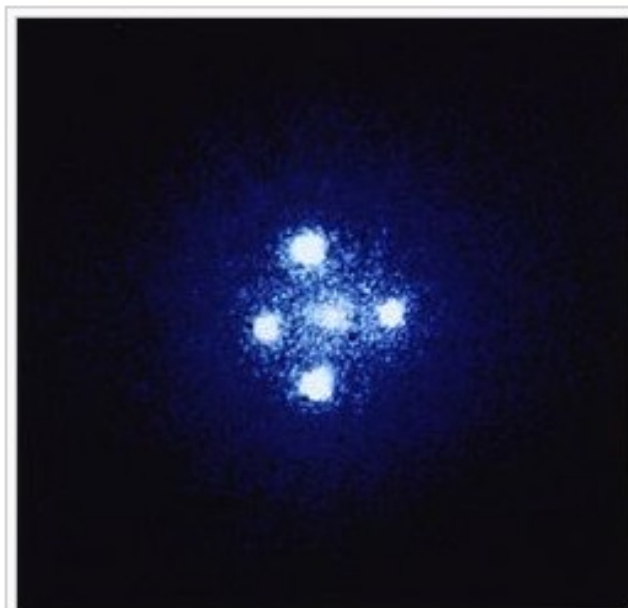
重力透鏡的現象

重力透鏡 〔編輯〕

主條目：[重力透鏡](#)

重力場中光線的偏折效應是一類新的天文現象的原因。當觀測者與遙遠的觀測天體之間還存在有一個大質量天體，當觀測天體的質量和相對距離合適時觀測者會看到多個扭曲的天體成像，這種效應被稱作[重力透鏡](#)^[87]。受系統結構、尺寸和質量分布的影響，成像可以是多個，甚至可以形成被稱作[愛因斯坦環](#)的圓環，或者圓環的一部分弧^[88]。最早的重力透鏡效應是在1979年發現的^[89]，至今已經發現了超過一百個重力透鏡^[90]。即使這些成像彼此非常接近以至於無法分辨——這種情形被稱作微重力透鏡——這種效應仍然可通過觀測總光強變化測量到，很多微重力透鏡也已經被發現^[91]。

重力透鏡已經發展成為觀測天文學的一個重要工具，它被用來探測宇宙間暗物質的存在和分布，並成為了用於觀測遙遠星系的天然望遠鏡，還可對哈伯常數做出獨立的估計。重力透鏡觀測數據的統計結果還對星繫結構演化的研究具有重要意義^[92]。

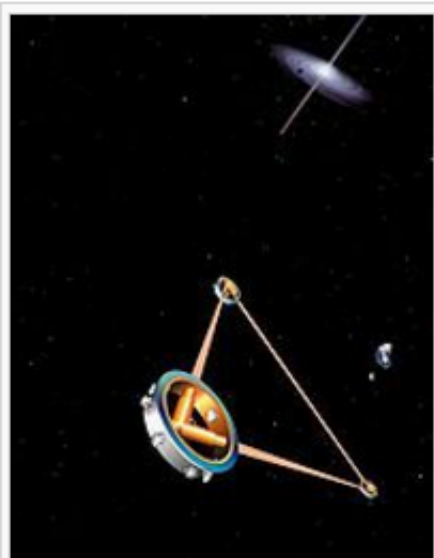


愛因斯坦十字：同一個天體在重力透鏡效應下的四個成像

以及偵測到《重力波》的證據等等

重力波天文學 [編輯]

主條目：[重力波 \(相對論\)](#)和[重力波天文學](#)



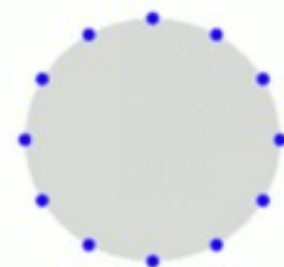
藝術家的構想圖：雷射空間干涉重力波探測器LISA

對脈衝雙星的觀測是間接證實重力波存在的有力證據（參見上文[軌道衰減](#)一節），對來自宇宙深處的重力波的直接觀測也實現了，這是相對論前沿研究的主要課題之一^[93]。現在已經有相當數量的地面重力波探測器持續投入運行，最值得注目的干涉重力波探測器是GEO600、雷射干涉重力波天文台（包括三架雷射干涉重力波探測器）、TAMA300和VIRGO^[94]歐洲獨立在太空中操作的雷射干涉探測器新重力波天文台現在正處於開發階段^[95]，其先行測試計劃LISA探路者（LISA Pathfinder）於2014年底之前正式發射升空^[96]。

對重力波的探測將在很大程度上擴展基於電磁波觀測的傳統觀測天文學的視野^[97]，人們能夠通過探測到的重力波信號了解到其波源的資訊。這些從未被真正了解過的資訊可能來自於黑洞、中子星或白矮星等緻密星體，可能來自於

某些超新星爆發，甚至可能來自宇宙誕生極早期的暴脹時代的某些烙印，例如假想的宇宙弦^[98]。

2016年2月11日，雷射干涉重力波天文台（LIGO）團隊於華盛頓舉行的一場記者會上宣布人類對於重力波的首個直接探測結果。所探測到的重力波來源於雙黑洞融合。兩個黑洞分別估計為29及36倍太陽質量，這次探測為物理學家史上首次由地面直接成功探測重力波。^{[99][100]}



懸浮在空間中的靜止粒子排列成的環



測試粒子受到重力波的作用

這些天文現象

- 都符合廣義相對論的描述！

因此

- 科學界現在已經認可，相對論是個優秀的科學理論！

於是廣義相對論

- 成了探索宇宙的理論利器！

像是黑洞的探索

黑洞和其它緻密星體 [編輯]

主條目：[黑洞](#)

廣義相對論預言了**黑洞**的存在，即當一個星體足夠緻密時，其重力使得時空中的一塊區域極端扭曲以至於光都無法逃出。在當前被廣為接受的**恆星演化**模型中，一般認為大質量恆星演化的最終階段的情形包括1.4倍左右太陽質量的恆星演化為**中子星**，而數倍至幾十倍太陽質量的恆星演化為**恆星質量黑洞**^[101]。具有幾百萬倍至幾十億倍太陽質量的**超大質量黑洞**被認為定律性地存在於每個**星系**的中心^[102]，一般認為它們的存在對於星系及更大的宇宙尺度結構的形成具有重要作用^[103]。

在天文學上緻密星體的最重要屬性之一是它們能夠極有效率地將重力能量轉換為電磁輻射^[104]。恆星質量黑洞或超大質量黑洞對星際氣體和塵埃的吸積過程被認為是某些非常明亮的天體的形成機制，著名且多樣的例子包括星系尺度的**活動星系核**以及恆星尺度的**微類星體**^[105]。在某些特定場合下吸積過程會在這些天體中激發強度極強的相對論性噴流，這是一種噴射速度可接近光速的^[106]且方向性極強的高能**電漿束**。在對這些現象進行建立模型的過程中廣義相對論都起到了關鍵作用^[107]，而實驗觀測也為支持黑洞的存在以及廣義相對論做出的種種預言提供了有力證據^[108]。

黑洞也是**重力波**探測的重要目標之一：黑洞雙星的合併過程可能會輻射出能夠被地球上的探測器接收到的某些最強的重力波信號，並且在雙星合併前的**啁啾**信號可以被當作一種「**標準燭光**」從而來推測合併時的距離，並進一步成為在大尺度上探測宇宙膨脹的一種手段^[109]。而恆星質量黑洞等小質量緻密星體落入超大質量黑洞的這一過程所輻射的重力波能夠直接並完整地還原超大質量黑洞周圍的時空幾何資訊^[110]。

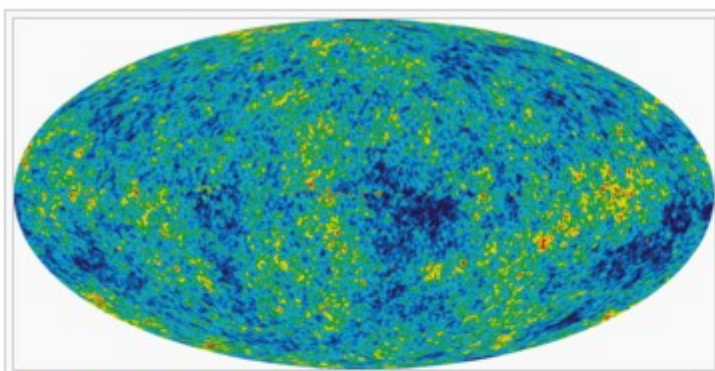


在600千米的距離上觀看十倍太陽質量的黑洞（模擬圖），背景為銀河系

以及宇宙的規律等等

宇宙學 [編輯]

主條目：[物理宇宙學](#)



威爾金森微波各向異性探測器（WMAP）拍攝的全天微波背景輻射的溫度漲落

現代的宇宙模型是基於帶有宇宙常數的愛因斯坦場方程式建立的，宇宙常數的值對大尺度的宇宙動力學有著重要影響。

$$R_{ab} - \frac{1}{2}R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = \kappa T_{ab}$$

這個經修改的愛因斯坦場方程式具有一個各向同性並均勻的解：弗里德曼-勒梅特-羅伯遜-沃爾克度規^[111]，在這個解的基礎上物理學家建立了從一百四十億年前熾熱的大爆炸中演化而來的宇宙模型^[112]。只要能夠將這個模型中為數不多的幾個參數（例如宇宙的物質平均密度）通過天文觀測加以確定^[113]，人們就能從進一步得到的實驗數據檢驗這個模型的正確性^[114]。這個模型的很多預言都是成功的，這包括太初核合成時期形成的化學元素初始豐度^[115]、宇宙的大尺度結構^[116]以及早期的宇宙溫度在今天留下的

的「回音」：宇宙微波背景輻射^[117]。

從天文學觀測得到的宇宙膨脹速率可以進一步估算出宇宙中存在的物質總量，不過有關宇宙中物質的本性還是一個有待解決的問題。現在估計宇宙中大約有90%以上的物質都屬於暗物質，它們具有質量（即參與重力交互作用），但不參與電磁交互作用，即它們無法（通過電磁波）直接觀測到^[118]。目前在已知的粒子物理^[119]或其他什麼理論^[120]的框架中還沒有辦法對這種物質做出令人滿意的描述。另外，對遙遠的超新星紅移的觀測以及對宇宙微波背景輻射的測量顯示，我們的宇宙的演化過程在很大程度上受宇宙常數值的影響，而正是宇宙常數的值決定了現在宇宙的加速膨脹。換句話說，宇宙的加速膨脹是由具有非通常意義下的狀態方程式的某種能量形式決定的，這種能量被稱作暗能量，其本性也仍然不為所知^[121]。

在所謂暴脹模型中，宇宙曾在誕生的極早期（ $\sim 10^{-33}$ 秒）經歷了劇烈的加速膨脹過程^[122]。這個在於1980年代提出的假說是由於某些令人困惑並且用古典宇宙學無法解釋的觀測結果而提出的，例如宇宙微波背景輻射的高度各向同性^[123]，而現在對微波背景輻射各向異性的觀測結果是支持暴脹模型的證據之一^[124]。然而，暴脹的可能的方式也是多樣的，現今的觀測還無法對此作出約束^[125]。一個更大的課題是關於極早期宇宙的物理學的，這涉及到發生在暴脹之前的、由古典宇宙學模型預言的大爆炸奇異點。對此比較有權威性的意見是這個問題需要由一個完備的量子重力理論來解答，而這個理論至今還沒有建立^[126]（參見下文量子重力）。

但是、相對論還是有弱點的

像是為了使宇宙能呈現為靜態

- 也就是《既不膨脹也不收縮》
- 於是愛因斯坦加入了一個《宇宙常數》

添加宇宙常數項 [編輯]

愛因斯坦為了使宇宙能呈現為靜態宇宙（不動態變化的宇宙，既不膨脹也不收縮），後來又嘗試加入了一個常數 Λ 相關的項 $\Lambda g_{\mu\nu}$ 於場方程式中，使得場方程式形式變為

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

可以注意到 $\Lambda g_{\mu\nu}$ 這一項正比於度規張量，而維持住守恆律：

$$\nabla_\nu(\Lambda g_{\mu\nu}) = \Lambda \nabla_\nu(g_{\mu\nu}) = 0$$

此一常數 Λ 被稱為宇宙常數。

這個嘗試後來因為兩個原因而顯得不正確且多此一舉：

1. 此一理論所描述的靜態宇宙是不穩定的。
2. 十年後，由愛德溫·哈伯對於遠處星系所作觀測的結果證實我們的宇宙正在膨脹，而非靜態。

因此， Λ 項在之後被捨棄掉，且愛因斯坦稱之為「一生中最大的錯誤」("biggest blunder [he] ever made")^[4]。之後許多年，學界普遍設宇宙常數為0。

但是十年後

- 由《愛德溫·哈伯》對於遠處星系所作觀測的結果證實我們的宇宙正在膨脹，而非靜態。
- 這種膨脹就像《氣球膨脹時表面所產生的效果》。

當然也還有不少現象難以解釋

ikipedia.org/wiki/廣義相對論



當前進展 〔編輯〕

在重力和宇宙學的研究中，廣義相對論已經成為了一個高度成功的模型，至今為止已經通過了每一次意義明確的觀測和實驗的檢驗。然而即便如此，仍然有證據顯示這個理論並不是那麼完善的^[180]：對量子重力的尋求以及時空奇異點的現實性問題依然有待解決^[181]；實驗觀測得到的支持暗物質和暗能量存在的數據結果也在暗暗呼喚著一種新物理學的建立^[182]；而從先驅者號觀測到的反常效應也許可以用已知的理論來解釋，也許則真的是一種新物理學來臨的預告^[183]。不過，廣義相對論之中仍然充滿了值得探索的可能性：數學相對論學家正在尋求理解奇異點的本性，以及愛因斯坦場方程式的基本屬性^[184]；不斷更新的電腦正在進行黑洞合併等更多的數值模擬^[185]；而第一次直接觀測到重力波之後，後續的競賽與發展應用也正在持續中^[186]，人類希望藉此能夠在比至今能達到的強得多的重力場中創造更多檢驗這個理論的正確性的機會^[187]。在愛因斯坦發表他的理論一百年之後，廣義相對論依然是一個高度活躍的研究領域。

另外、由於愛因斯坦認為

- 量子力學的機率模型與測不準原理違反他的物理想法
- 因為他認為《上帝不會創要一個需要擲骰子才能解決的宇宙》

於是沒有進入量子力學領域

- 並且常常在《索維爾會議》上和《波爾》辯論，提出很多想要駁倒量子力學的論點。
- 但是《量子力學》終究成為了繼《相對論》後最重要的物理革命。

不過愛因斯坦的相對論

- 預示了 $E=mc^2$ 這樣的質能轉換法則
- 由於光速 $c=3*10^8$ 非常的大
- 所以少許的質量就能釋放出非常龐大的能量。

後來在 1932 年

- 英國科學家詹姆斯·查德威克發現了中子
- 由於中子不帶電，所以可以長驅直入原子核，將原子核轟到分裂。

當原子核分裂成兩個粒子的時候

- 會釋放出 2 到 3 個中子，引起連鎖反應
- 而且分裂時喪失一些質量，這些質量會轉為強大的能量
- 這就是原子彈的原理！

1934 年

- 義大利物理學家費米（Fermi）以中子撞擊鈾元素，首次發現核分裂反應
- 幾經研究，科學家最初發現天然鈾含有鈾 238 及鈾 235 兩種同位素，只有後者受中子撞擊後，會發生分裂反應。

1933 年、愛因斯坦得知希特勒上台

- 於是決定不回德國
- 但是二次大戰開始後，很多科學家擔心德國納粹會先製造出原子彈，於是
由愛因斯坦寫信給羅斯福總統，建議
研製原子彈。

後來、美國的曼哈頓計畫

- 果真研製出了原子彈
- 那時德國已經投降，但原子彈還是被投到了日本。

原本就是和平主義者的愛因斯坦

- 很擔心核武器會造成更大的毀滅，於是發表了很多宣言，致力於反核武活動。

二次大戰後

- 愛因斯坦仍繼續研究擴充《廣義相對論》，希望能發展出《統一場論》
- 但是統一場論並沒有得到好的成果，愛因斯坦就於 1955 年去世！

現在

- 我們已經講解完關於相對論的那些事情了！

或許還沒辦法很詳細

但是

請恕筆者能力有限！

這已經是

我盡力理解的結果了！

希望您會喜歡

今天的十分鐘系列

我們下回見！

Bye Bye!