程式人《十分鐘系列》

那些我們都曾經學過
但是卻幾乎沒有人知道自己學過的
《歐氏幾何》

陳鍾誠

2016 年 8 月 24 日

還記得我國小的時候

- 大部分人的數學都九十幾分！

但是到了國一下學期

- 很多人就只剩三十幾分

而我

- 就是那個很多人之一！

國中的數學

- 比起國小的數學
  難了不少！

問題是

- 到底難在哪裡呢？

關於這個問題

是我經過很多很多年之後

才逐漸開始理解的

這些問題

- 對已經學會的人而言
  幾乎沒有任何困難！

但是

- 對那些還不會的國中生而言

很可能難如登天

還記得我國二的時候

完全不知道

- 聯立方程式到底是甚麼意思
- 我應該如何解這種問題！

而我們的學校

- 每次都必考聯立方程式

所以

- 我的數學就只剩三十幾分了！

直到二年級的某一天

- 數學老師請假！
- （數學老師也是我們的班導師）

結果來了一位代課老師

代課老師上了一堂數學之後

- 就發現我們很多人都不會《聯立方程式》

於是他很驚訝

他很努力地想把我們教會

但是好像沒那麼快

還好他一整天都上我們的課

所以不管是甚麼課程

他都拿來上數學

教我們解聯立方程式

但是整整過了一個上午

- 我還是不知道那些 X, Y 到底是甚麼意思！

直到下午

- 鄰近的同學們很多都學會了

但我還是學不會

後來隔壁的同學開始教我

突然間

我懂了那些

- X, Y 的意義

其實就是一個

- 代表某數值的符號而已！

就在那一瞬間

- 我學會了一整年來都沒學會的聯立方程式

經過很多年之後

我才知道

那位老師

- 對我的人生

有很大的影響

如果當年我沒學會

- 聯立方程式！

我應該考不上好高中

- 很難進好大學！

當天晚上

下課之前

代課老師告訴我們

他沒有甚麼錢可以吃晚餐

有沒有人

- 可以讓他到家裡吃個便飯！

我很想舉手

但是卻又不敢舉手

結果

我就這樣

錯過了

- 可以答謝那個老師的機會！

更糟的是

我已經忘了那個老師的名字

所以這件事情

- 成了我心裡的一個遺憾！

故事講完了！

不過好像離題了！

我們的題目是

那些我們都曾經學過

但是卻幾乎沒有人知道自己學過的

《歐氏幾何》

但是卻一直在講

聯立方程式的那些事情！

不過

這兩件事情

還是有關連的！

- （硬幺當中 …）

因為我認為

- 《聯立方程式》
- 和《歐氏幾何》
- 是國中數學裡兩個最容易卡關的地方！

一旦這兩個部分學會了

國中數學

就沒有甚麼可怕的了！

問題是

雖然代課老師

- 教會了我《聯立方程式》

但是

- 我始終沒學會過《歐氏幾何》

直到很多年之後

我開始看

- 《數學是甚麼？》

  這類的《非教科書》

我才知道

- 原來我們國中時教的那些三角、圓規之類的證明，稱為《歐氏幾何》！

但是

- 我國中的時候，一直不知道這個東西是《歐氏幾何》

只知道

- 我寫的那些證明題
  常常被老師打個大叉叉...

而我

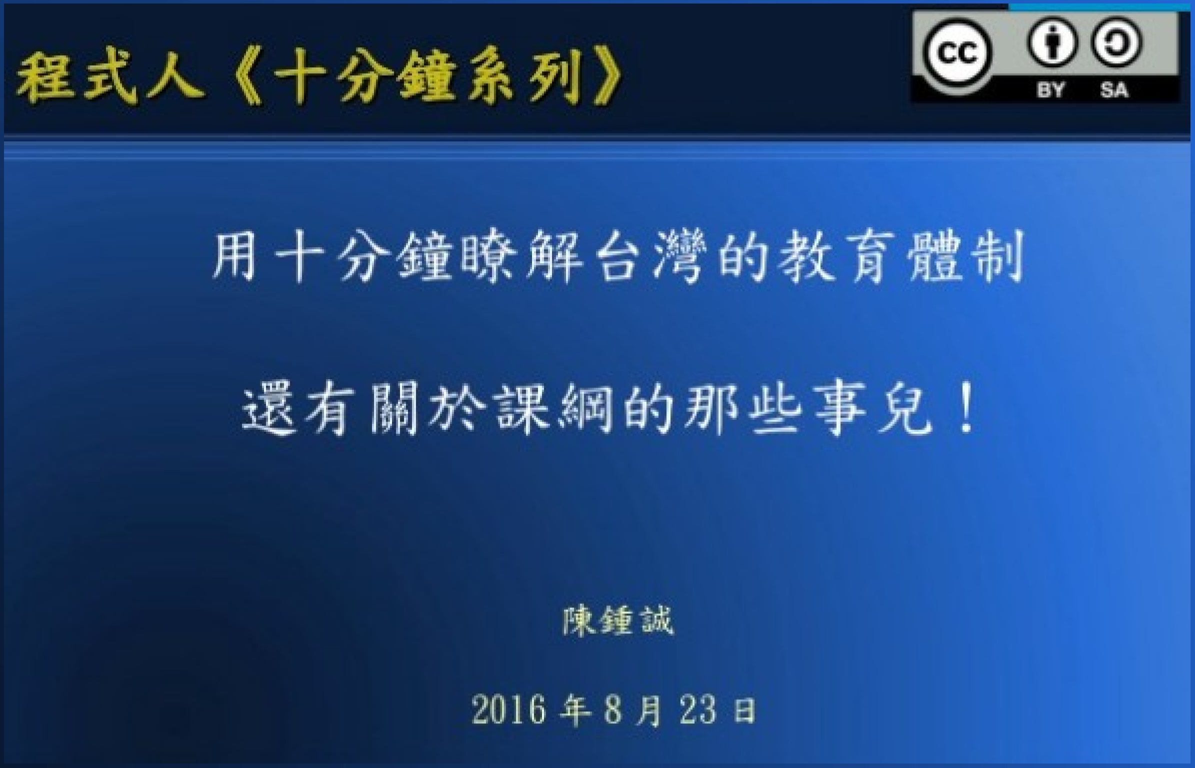
- 卻總不知道為甚麼被打叉叉

只能在心裡偷偷地

- 叉叉叉、叉叉叉、 …

昨天

- 我寫了下列這份投影片！



http://www.slideshare.net/ccckmit/ss-65258237

看到國中課綱裡的《幾何部分》

幾何	
S-4-01	能理解常用幾何形體之定義與性質。
S-4-02	能指出滿足給定幾何性質的形體。
S-4-03	能透過形體之刻畫性質，判斷不同形體之包含關係。
S-4-04	能利用形體的性質解決幾何問題。
S-4-05	能理解畢氏定理及其逆敘述，並用來解題。
S-4-06	能理解外角和定理與三角形、多邊形內角和定理的關係。
S-4-07	能理解平面上兩平行直線的各種幾何性質。
S-4-08	能理解線對稱圖形的幾何性質，並應用於解題和推理。
S-4-09	能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
S-4-10	能根據直尺、圓規操作過程的敘述，完成尺規作圖。
S-4-11	能理解一般三角形的幾何性質。
S-4-12	能理解特殊三角形(如正三角形、等腰三角形、直角三角形)的幾何性質。
S-4-13	能理解特殊四邊形(如正方形、矩形、平行四邊形、菱形、梯形)與正多邊形的幾何性質。
S-4-14	能理解圖形縮放前後不變的幾何性質。
S-4-15	能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。
S-4-16	能理解三角形內心、外心、重心的意義與性質。
S-4-17	能理解圓的幾何性質。
S-4-18	能用反例說明一敘述錯誤的原因，並能辨識一敘述及其逆敘述間的不同。(A-4-19)
S-4-19	能針對問題，利用幾何或代數性質做簡單證明。(A-4-20)

又讓我回想起

- 國中時面對《幾何證明》的心情！

現在

- 就讓我們一起回到國中

  重新體會一下當時學幾何的心境！

像是這題

103 學年度高中特招的幾何考題

—兼談 12 年國教國中的幾何教學

張海潮

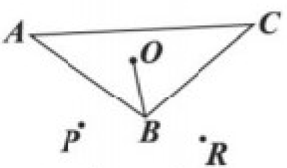
臺灣大學數學系退休教授

今年七月，第一屆高中入學特招結束之後，我把數學考題仔細「考」了一遍，發現這份考卷出得很用心，尤其是幾何部份，極有創意。我特別喜歡非選的第二題（題目如下，解答請見註一）：

第二題：如圖(十六)，O 為 ΔABC 內部一點，$\overline{OB}=3\frac{1}{2}$，$P$、$R$ 為 O 分別以直線 AB、直線 BC 為對稱軸的對稱點。

(1) 請指出 $\angle ABC$ 在什麼角度時，會使得 $\overline{PR}$ 的長度等於 7？並完整說明 $\overline{PR}$ 的長度為何在此時會等於 7 的理由。

(2) 承(1)小題，請判斷當 $\angle ABC$ 不是你指出的角度時，$\overline{PR}$ 的長度是小於 7 還是會大於 7？並完整說明你判斷的理由。

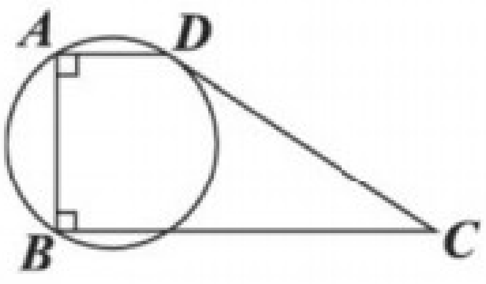


圖（十六）

資料來源： 103 學年度高中特招的幾何考題 — 兼談 12 年國教國中的幾何（張海潮）

這題

第 5 題：如圖(二)，有一圓通過四邊形 $ABCD$ 的三頂點 A、B、D，且此圓的半徑為10。若 $\angle A=\angle B=90°$，$\overline{AD}=12$，$\overline{BC}=35$，則四邊形 $ABCD$ 的面積為何？

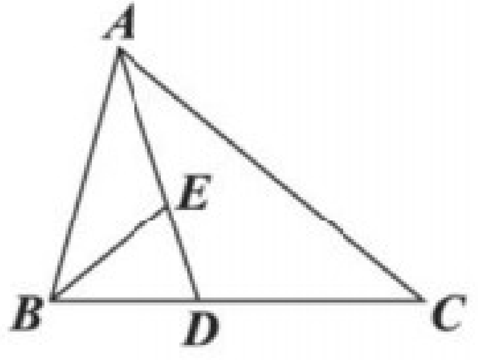


圖(二)

解題方法：(1)利用畢氏定理求 $\overline{AB}$；(2)梯形面積公式

這題

第 26 題：如圖(十二)ΔABC 中，D、E 兩點分別在 $\overline{BC}$、$\overline{AD}$ 上，且 $\overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線。若 $\angle ABE = \angle C$，$\overline{AE}:\overline{ED} = 2:1$，則 ΔBDE 與 ΔABC 的面積比為何?



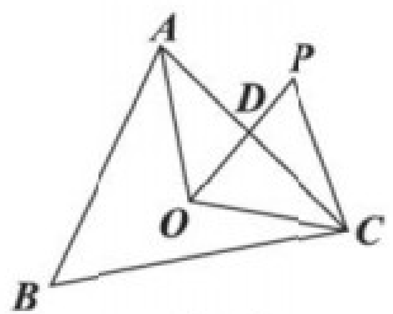
圖(十二)

解題方法：(1)相似形成比例定理；

(2)面積公式。

還有這題

第 12 題：如圖(六)，O 為 ΔABC 的外心，ΔOCP 為正三角形，$\overline{OP}$ 與 $\overline{AC}$ 相交於 D 點，連接 $\overline{OA}$。若 $\angle BAC = 70°$，$\overline{AB} = \overline{AC}$，則 $\angle ADP$ 的度數為何？



圖（六）

解題方法：(1)利用等腰三角形兩底角相等解 $\angle ABC$；

(2)利用圓心角等於兩倍圓周角解 $\angle AOC$；

(3)利用等腰三角形兩底角相等解 $\angle CAO$；

(4)利用外角等於兩內對角之和解 $\angle ADP$

現在

- 您應該可以體會，國中生們的心情了吧！

更糟的是

老師們特別愛考幾何題

www.chinatimes.com/newspapers/20160509000328-260114

國中會考》考生衝刺／死背沒用－數學幾何題占半數 社會考圖表是關鍵

2016年05月09日 04:10 林志成、余祥、吳泓勳 / 台北報導

點閱 6204　0　2/10　我要評比

分享至Facebook　分享至Google+　分享至Twitter　分享至Weibo

會考出題重點在哪？升學專家表示，幾何在國中數學比重不到1/3，但會考數學科卻有可能一半是幾何題；至於社會科，常結合觀念和圖表出題，「決勝關鍵落在圖表題」；自然科方面，化學反應與方程式必考。

台北市北投國中數學老師林柏嘉說，相較於以前的基測，現在的會考數學科更喜歡考幾何題，許多考生看到這類題目就害怕。他建議考生，考數學時記得帶圓規、直尺去，有了這些工具輔助，許多幾何題都可迎刃而解。

補教數學老師李添興說，國中數學幾何部分不到1/3，代數部分超過2/3，但過去2年會考數學科，幾何題幾乎占了一半，還會出現不少整合型的幾何題目，對考生確實是大挑戰。

雪特

- 雪特
- 雪特
- …

求解這些幾何題

- 真的有那麼重要嗎？

不會這些幾何題

真的會影響你

- 未來的工作或學術能力嗎？

如果不是

- 那為甚麼要學這些幾何

  又為甚麼要一直考幾何題呢？

當年

- 還身為國中生的我

  始終不明白為何要學幾何？

現在

- 我想我明白了，也可以理解要學幾何的原因了！

但是

- 那種一直解題，一直考試的做法
- 實在讓人倒盡胃口！

到底

- 為甚麼我們要學幾何呢？

而我們學的幾何

- 到底是哪種幾何呢？

關於這個問題

- 我們得回到兩千三百年前的古希臘時代
- 才能獲得解答！

很多人學西洋歷史的時候

- 都會從《古希臘》開始談起！

問題是

- 世界這麼大，為何《西洋文明》非得從《希臘》開始談呢？

關於這個問題

- 你得從西洋人的角度來看！

所謂的西洋人

- 其實是指《歐洲》人，與十五世紀《大航海時代》後移居世界各地的那些人！

這些歐洲人

- 經過《文藝復興》之後，開始發展出《近代科學》，並完成了《工業革命》！

文藝復興和工業革命

- 讓歐洲人成為主宰全世界的強權！

並且

- 將《歐洲文明》放射到全世界各地！

其他的地區

- 全都被捲入這一場史無前例的變化當中！

舉例而言

- 我們都知道中國經過《鴉片戰爭、八國聯軍》等等歷史

而台灣

- 也曾經被荷蘭和西班牙人統治
- 後來還在 1895 年甲午戰爭後從清朝割讓給日本！

事實上

- 日本也經歷過西洋文明的入侵！

1853 年美國海軍准將馬修・培理

- 進入日本，並於次年簽定《神奈川條約》強迫幕府開港
- 這個事件最後導致《幕府無法持續統治日本》，最後在《薩長土肥》四藩強逼下《大政奉還》給《明治天皇》的結果。

而東南亞

- 則因為香料、橡膠等等資源，早就是歐洲各國的必爭之地。

這一切事件

- 都和《歐洲的強勢崛起》有密切的關係！

問題是

- 歐洲為何強勢崛起呢？

這個問題

- 一個簡單的看法是，他們發展出了《強大的科學與工業》

但是為何

- 歐洲人能發展出強大的科學與工業呢？

關於這點

- 如果從歐洲人的角度而言
- 得追溯到希臘時代！

為何科學工業和希臘有關呢？

這個微妙的關聯性

- 關鍵在數學！

而歐洲數學的起源

- 正是希臘時代

希臘時代的數學

- 最輝煌的就是《幾何學》！

而希臘幾何學的集大成之作

- 就是《歐幾里得》所留下的《幾何原本》！

當初光緒百日維新時

- 很多人還在想

  《中學為體、西學為用》！

但是只學製造船艦大砲

- 卻沒有學背後的理論
- 結果是一仗輸給日本！

當然

- 甲午戰爭清朝輸給日本的原因
- 很難歸咎單一因素！

但是數學與科學

- 絕對是歐洲文明的精華！

所以

- 我們從國中開始就會學《幾何學》
- 而且是從《歐氏幾何》開始學起！

問題是

- 難道還有其他的《幾何學》嗎？

答案當然是有的

幾何學大致可以分為

- 歐氏幾何
- 解析幾何
- 非歐幾何

那些只能用

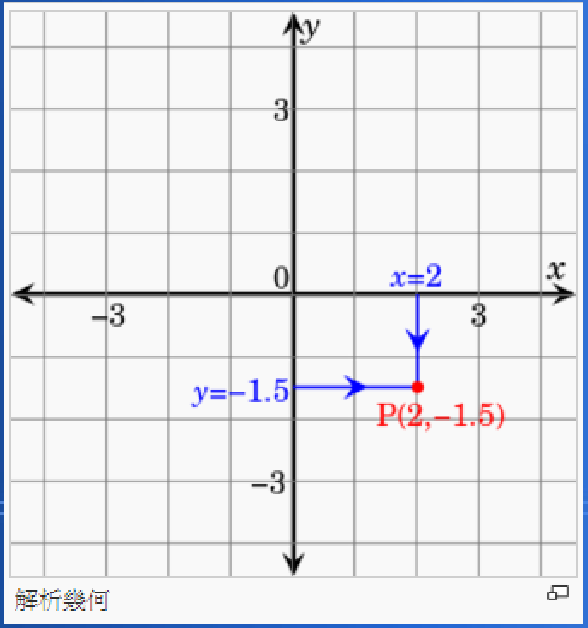
- 直尺、圓規、三角板作圖的幾何學，就是希臘時代發展出來的《歐氏幾何》！

歐幾里得

出生	公元前325年
居住地	埃及的亞歷山卓
研究領域	數學
知名於	歐幾里得幾何 幾何原本

而那些

- 可以用《座標》描述的幾何學，則稱為《解析幾何》
- 這是從 1637《笛卡兒》時代開始發展的，因此那些座標也稱為《笛卡兒》座標系統



而非歐幾何

- 則是從拿掉《歐氏幾何》五條公設中的《平行公設》後所發展出來的！

歐洲文明

- 從希臘時代到文藝復興
- 中間斷了長達一千五百年的時間。

這一千五百年

- 主要是《羅馬時代》與《基督教》時代！

直到歐洲文明

- 結合《大航海時代、新教改革、文藝復興、啟蒙運動》等等事件，逐漸開始發展出《工業革命》之後
- 產生了強大的力量，影響遍及全球！

於是其他的國家

- 也開始引入《歐洲的那些文化與制度》
- 甚至引進了《學校教育制度》，試圖讓國力能趕上歐洲的水準！

所以

- 我們現在和歐洲人一樣
- 都要學《幾何》！

只是我們很少會說

- 我們國中學的是《歐氏幾何》

而且我們也通常不會

- 直接去念《幾何原本》！

我們只是

- 不斷地想學會歐洲那一套
- 所以把這些知識，硬塞入學生的腦袋裡！

以為這樣

- 就能夠學會《歐洲人的科學與技術》，發展出和他們一樣強大的工業了！

但是這種學法

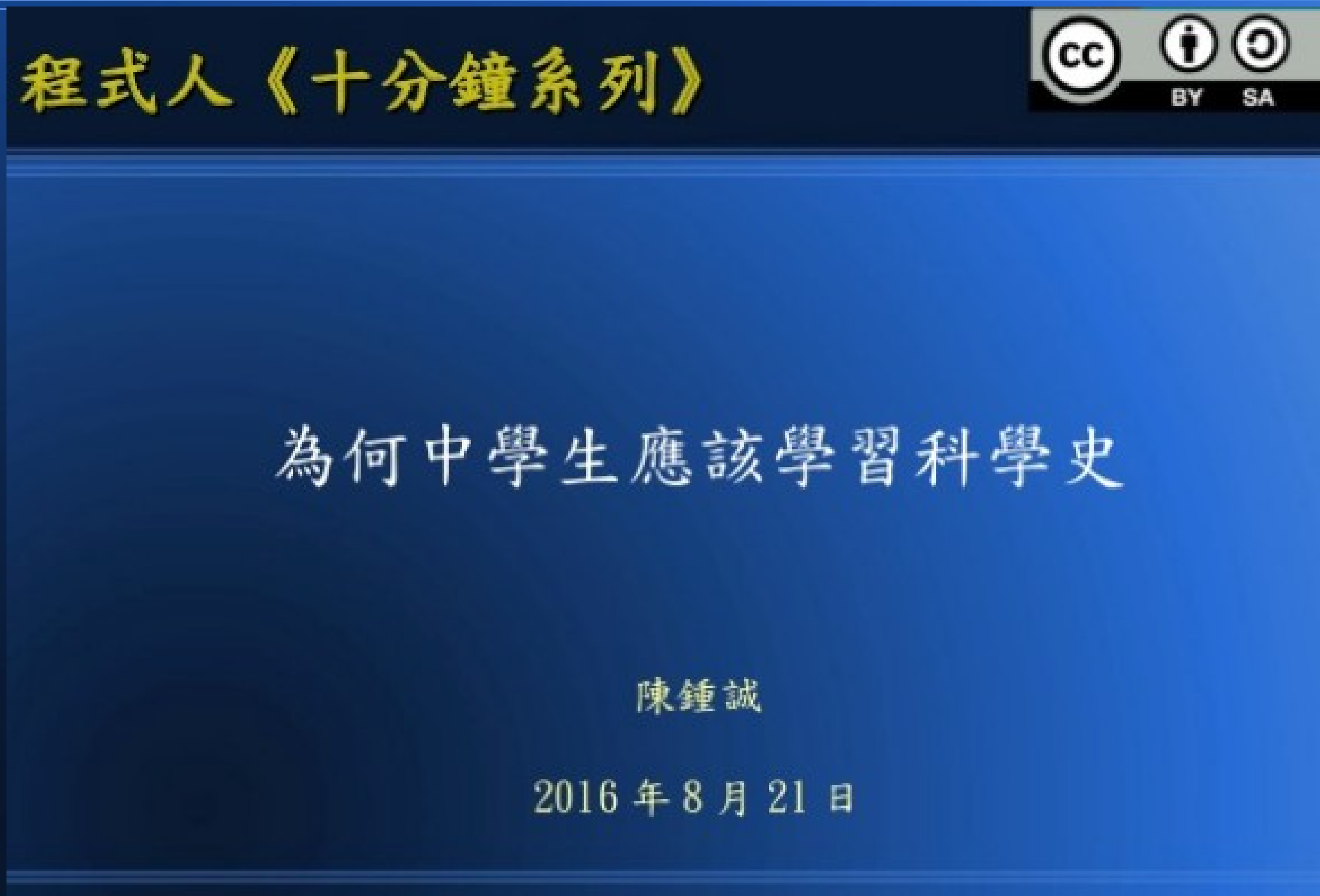
- 常常只是摧毀了學生對數學的興趣而已！

對於中學生

- 其實我強烈建議

  應該多閱讀科學史與數學史

就像我在這篇中提到的那樣



http://www.slideshare.net/ccckmit/ss-65198664

透過科學史

- 我們才能理解西洋文化發展的背景
- 還有歐洲文明的思維邏輯！

也才能理解

- 從希臘銜接文藝復興與工業革命的那些關鍵！

除此之外

- 我強烈建議中學生們
- 閱讀一下《幾何原本》！

為甚麼要讀《幾何原本》呢？

《幾何原本》

- 裡面有哪些是中學幾何沒講到的呢？

當然是有的

- 而且絕對是精華中的精華！

其中最精華的部分

- 就是《公理系統》！

幾何原本

- 是第一本從《公理系統》出發，透過嚴格的邏輯推論，推導出《豐富幾何定理》的《聖經》。

而且《幾何原本》

- 比《耶穌》還早降臨這個世界

《幾何原本》這本書

- 在西洋出版領域，是印行量僅次於《聖經》的一本書！

而《幾何原本》的重要性

- 則是非常清楚的闡釋了
透過《公理系統》推導出《完整數學體系》的一本《經典》！

現在、就讓我們來看看

- 幾何原本的內容吧！

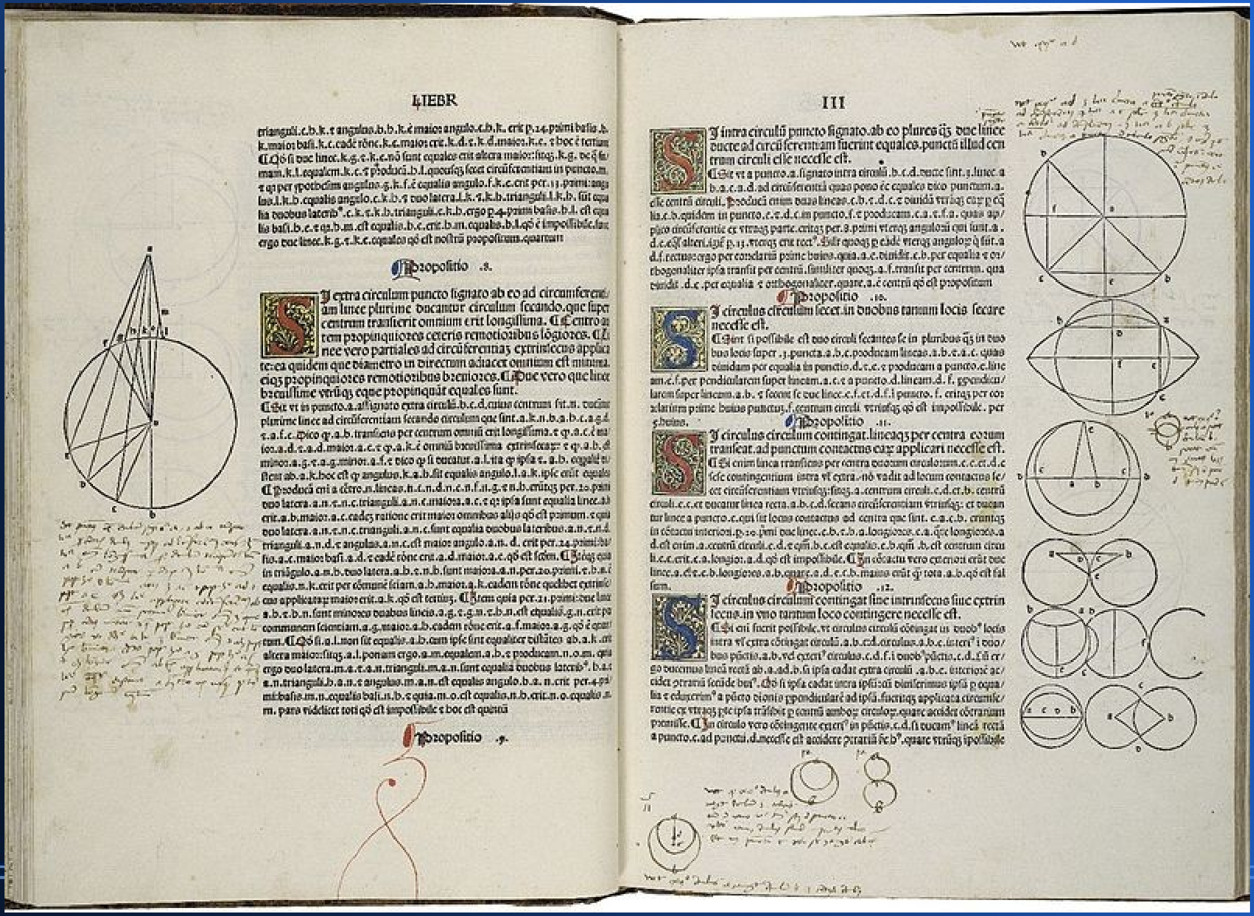
Elements

The frontispiece of Sir Henry Billingsley's first English version of Euclid's *Elements*, 1570

Author	Euclid, and translators
Language	Ancient Greek, translations
Subject	Euclidean geometry, elementary number theory
Genre	Mathematics
Publication date	c. 300 BC
Pages	13 books, or more in translation with scholia

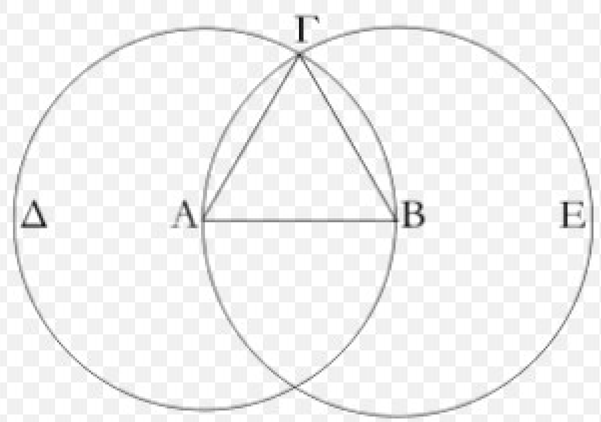
您可以看到

- 幾何原本裡有很多圖形



還有證明

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.
Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.
Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

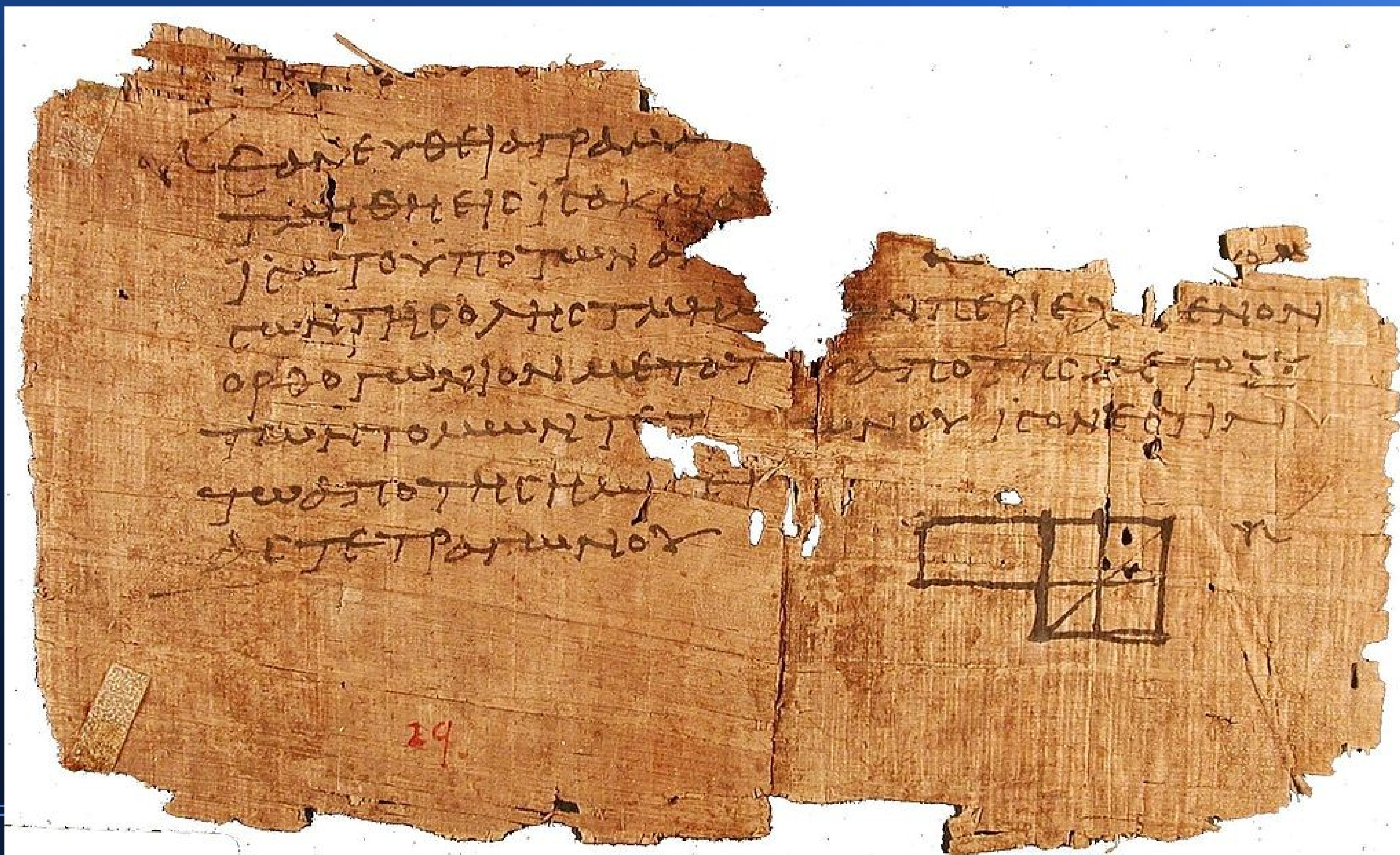


Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπί τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

當然、原稿我們看不懂



我手上的幾何原本是這版

几何原本

作者: 欧几里得

出版社: 重庆出版社

副标题: 建立空间秩序最久远的方案之书

出版年: 2005-10-1

页数: 631

定价: CNY 58.00

装帧: 平装

ISBN: 9787229071578

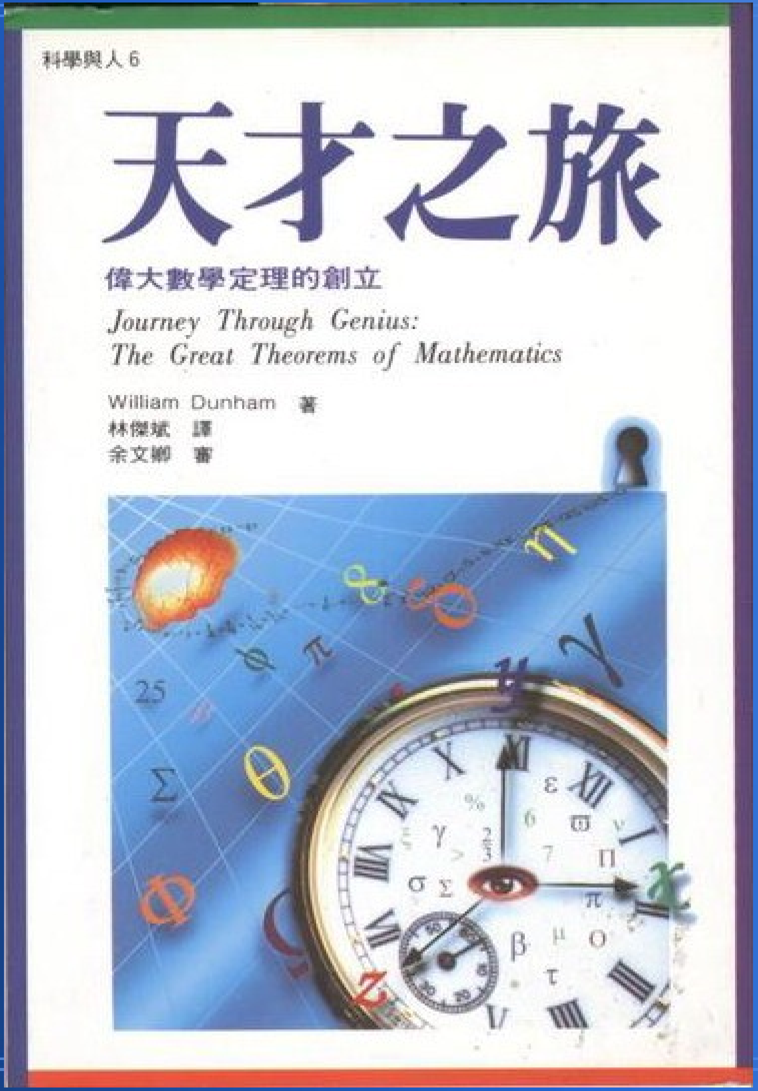
https://book.douban.com/subject/26181193/

這個版本有 631 頁

- 我當然沒有看完！
  只是偶爾翻翻欣賞而已！

但是我有另一本書

- 這本用不到 100 頁的篇幅，講完了幾何原本的重點。



現在、就讓我闡述一下

- 到底《幾何原本》裡的幾何學，和我們中學的幾何學有何不同？

以下是幾何原本各卷的內容

第一卷至第六卷的內容主要為平面幾何。

- 第一卷：幾何基礎。本卷確立了基本定義、公設和公理，還包括一些關於全等形、平行線和直線形的熟知的定理。
- 第二卷：幾何與代數。該卷主要討論的是畢達哥拉斯學派的幾何代數學，主要包括大量代數定理的幾何證明。
- 第三卷：圓與角。本卷闡述了圓、弦、割線、切線、圓心角、圓周角的一些定理。
- 第四卷：圓與正多邊形。本卷討論了已知圓的某些內接和外切正多邊形的尺規作圖問題。
- 第五卷：比例。本卷對歐多克索斯的比例理論進行闡述，
- 第六卷：相似。本卷闡述了比例的屬性，以及相似形的概念，包括了泰勒斯定理。

第七卷至第九卷主要闡述了數論。

- 第七卷：數論（一）。本卷內容包括整除性、質數、最大公約數、最小公倍數等初等數論內容。
- 第八卷：數論（二）。本卷繼續討論初等數論，包括歐幾里得輾轉相除法、各種數的關係（如質數、合數、平方數、立方數等）。
- 第九卷：數論（三）。本卷設計了比例、幾何級數，給出了許多重要的初等數論定理。

第十卷討論了無理數。

- 第十卷：無理數。本卷定義了無理量（即不可公約量），並蘊含了極限思想理解。

第11卷至第13卷主要討論立體幾何。

首先、讓我們看看

- 幾何原本的公理系統

幾何原本

- 用 23 個定義、五個公設與五個公理，構成了所有證明的基礎。

其中的五條公設如下

歐幾里得平面幾何的五條公理（公設）是：

1. 從一點向另一點可以引一條直線。
2. 任意線段能無限延伸成一條直線。
3. 給定任意線段，可以以其一個端點作為圓心，該線段作為半徑作一個圓。
4. 所有直角都相等。
5. 若兩條直線都與第三條直線相交，並且在同一邊的內角之和小於兩個直角，則這兩條直線在這一邊必定相交。

第五條公理稱為平行公理（平行公設），可以導出下述命題：

通過一個不在直線上的點，有且僅有一條不與該直線相交的直線。

註：公設的英文是 postulates（axioms）

而五條公理如下

1. 與同一事物相等的事物相等。
2. 相等的事物加上相等的事物仍然相等。
3. 相等的事物減去相等的事物仍然相等。
4. 一個事物與另一事物重合，則它們相等。
5. 整體大於局部。

註：幾何原本裡的公理，其實應該稱為《一般概念》（common notions），前面的公設才是幾何公理。

幾何原本的23個定義如下

1. 點：點不可以再分割成部分

2. 線：線是無寬度的長度

3. 線的兩端是點

4. 直線：直線是沿著一定方向與其相反方向的無限平鋪

5. 面：面只有長度和寬度

6. 一個面的邊是線

7. 平面：平面是直線自身的均勻分布

8. 平面角：平面角是兩條線在一個平面內相交所形成的傾斜度。

9. 直線角：含有角的兩條線成一直線時，其角稱為直線角(現代稱為平角)

10. 直角與垂線：一條直線與另一條直線相交所形成的兩鄰角相等，兩角皆稱為直角。

11. 鈍角：大於直角的角

12. 銳角：小於直角的角

13. 邊界：邊界是物體的邊緣

14. 圖形：由一個邊界或幾個邊界所圍成的。

15. 圓：由一條線包圍著的平面圖形，其內有一點與這條線上任一點所連成的線段都相等。

16. 上述圓內的那點稱為圓心。

17. 直徑是穿過圓心，端點在圓上的任意線段，該線段將圓分成兩等份。

18. 半圓：是直徑與被它切的圓弧圍成的圖形。半圓的圓心與原圓心相同。

19. 直線圖形是由線段首尾順次相接圍成的。三角形是由三條線段圍成的。四邊形是由四條線段圍成的。多邊形是由四條以上的線段圍成的。

20. 三角形中，三條邊相等的稱為等邊三角形。兩條邊相等的稱為等腰三角形。三個角都為銳角的稱為銳角三角形。

21. 三角形中，有一個角為直角者是直角三角形，有一個角是鈍角的稱為鈍角三角形。

22. 四邊形中，四條邊相等並且四個角為直角的稱為正方形，四角為直角，但邊不完全相等的為長方形(矩形)。兩邊相等，角不是直角的為菱形。兩組對邊，兩組隊角分別相等的為平行四邊形。一組對邊平行，另一組對邊不平行的稱為梯形。

23. 平行直線：在同一平面內向兩端無限延長不能相交的直線。

寫完這 23 定義、五條公理與公設之後

- 《幾何原本》就開始證明一個又一個的命題了。

（證明為正確命題就是我們所稱的定理）

為了避免重新畫圖

- 以及忠於原著，以下圖形均來自

EUCLID'S ELEMENTS OF GEOMETRY

The Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885)

from *Euclidis Elementa, edidit et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, in aedibus B.G. Teubneri, 1883–1885*

edited, and provided with a modern English translation, by

Richard Fitzpatrick

- 上述版本為希臘文與英文對照版。

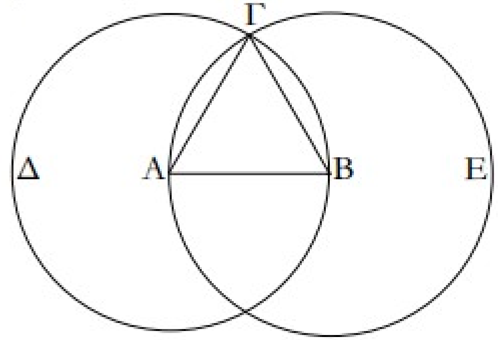
網址：http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf

命題 1.1　已知一線段可作一等邊三角形

- 這個證明用到定義 15 與公理 1

α΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.



Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

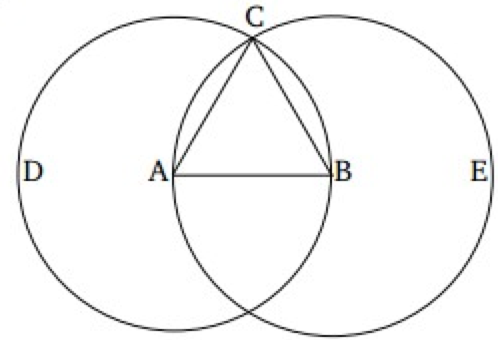
Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπί τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Proposition 1

To construct an equilateral triangle on a given finite straight-line.



Let *AB* be the given finite straight-line.

So it is required to construct an equilateral triangle on the straight-line *AB*.

Let the circle *BCD* with center *A* and radius *AB* have been drawn [Post. 3], and again let the circle *ACE* with center *B* and radius *BA* have been drawn [Post. 3]. And let the straight-lines *CA* and *CB* have been joined from the point *C*, where the circles cut one another,† to the points *A* and *B* (respectively) [Post. 1].

And since the point *A* is the center of the circle *CDB*, *AC* is equal to *AB* [Def. 1.15]. Again, since the point *B* is the center of the circle *CAE*, *BC* is equal to *BA* [Def. 1.15]. But *CA* was also shown (to be) equal to *AB*. Thus, *CA* and *CB* are each equal to *AB*. But things equal to the same thing are also equal to one another [C.N. 1]. Thus, *CA* is also equal to *CB*. Thus, the three (straight-lines) *CA*, *AB*, and *BC* are equal to one another.

Thus, the triangle *ABC* is equilateral, and has been constructed on the given finite straight-line *AB*. (Which is) the very thing it was required to do.

命題 1.2

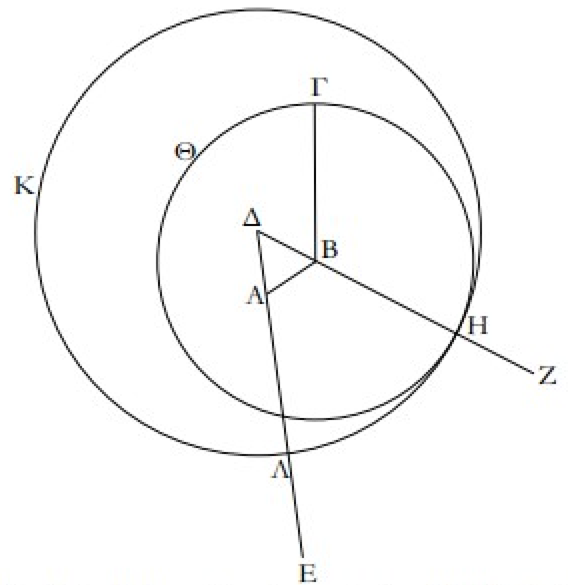
- 從一個給定的點可以引一條線段等於已知的線段。
- 這個證明用到前面的命題 1.1

β΄.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνεστάτω ἐπ᾽ αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔΗ, ὧν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΛ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση.

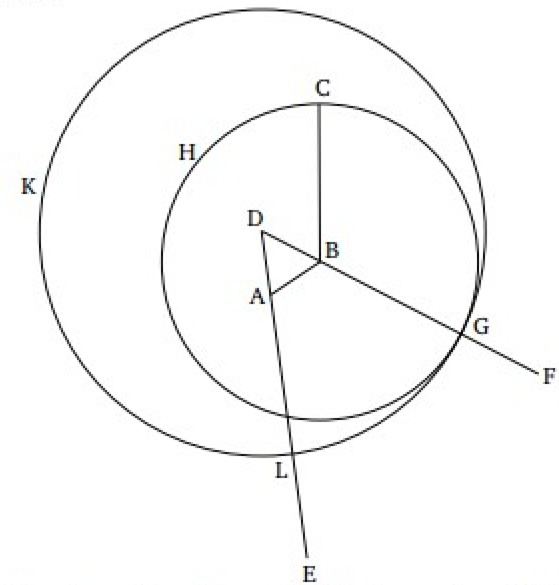
Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Proposition 2†

To place a straight-line equal to a given straight-line at a given point (as an extremity).

Let A be the given point, and BC the given straight-line. So it is required to place a straight-line at point A equal to the given straight-line BC.

For let the straight-line AB have been joined from point A to point B [Post. 1], and let the equilateral triangle DAB have been been constructed upon it [Prop. 1.1]. And let the straight-lines AE and BF have been produced in a straight-line with DA and DB (respectively) [Post. 2]. And let the circle CGH with center B and radius BC have been drawn [Post. 3], and again let the circle GKL with center D and radius DG have been drawn [Post. 3].



Therefore, since the point B is the center of (the circle) CGH, BC is equal to BG [Def. 1.15]. Again, since the point D is the center of the circle GKL, DL is equal to DG [Def. 1.15]. And within these, DA is equal to DB. Thus, the remainder AL is equal to the remainder BG [C.N. 3]. But BC was also shown (to be) equal to BG. Thus, AL and BC are each equal to BG. But things equal to the same thing are also equal to one another [C.N. 1]. Thus, AL is also equal to BC.

Thus, the straight-line AL, equal to the given straight-line BC, has been placed at the given point A. (Which is) the very thing it was required to do.

然後就

- 一個接著一個的證明
- 每個證明都只能使用
  - 定義、公理或公設
  - 或前面已經證明完畢的定理
- 這樣就會有很強的系統性

而且

- 不會有循環論證的問題！

甚麼是循環論證？

所謂的循環論證

- 就是用 A 來證明 B
- 然後又用 B 來證明 A

這種循環證法當然是不可靠的！

幾何原本當然不會有循環論證

- 否則就不夠經典了！

在第 1 卷末尾的命題 I. 47

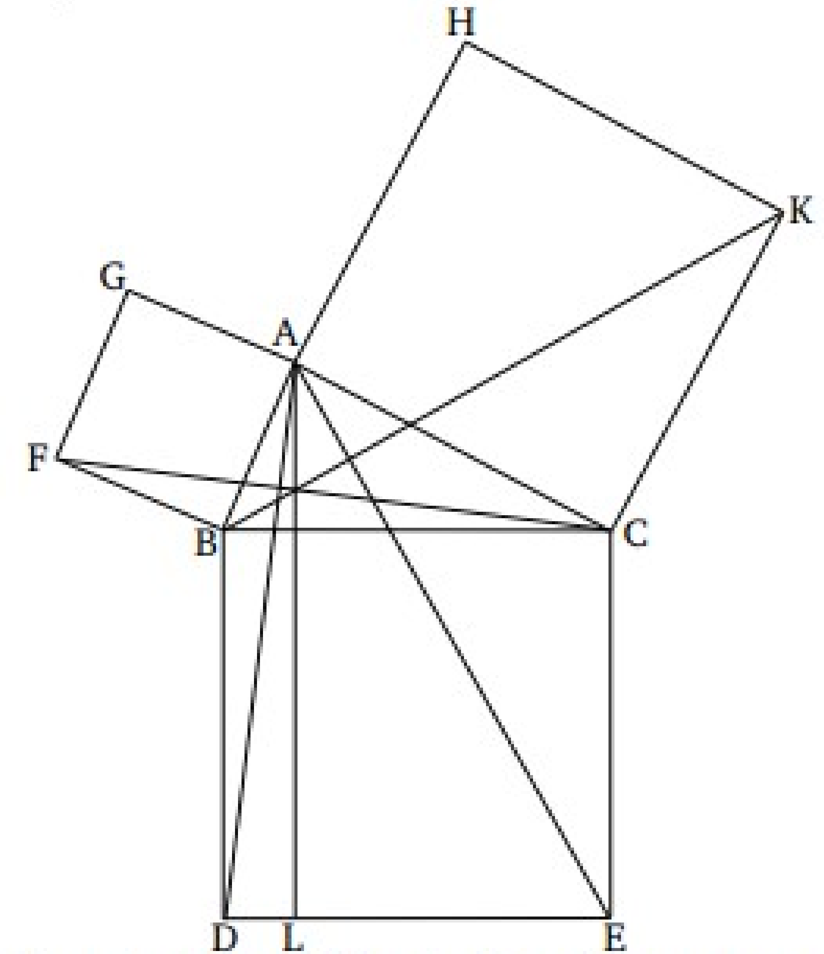
- 歐幾里得證明了畢氏定理

Proposition 47

In right-angled triangles, the square on the side subtending the right-angle is equal to the (sum of the) squares on the sides containing the right-angle.

Let ABC be a right-angled triangle having the angle BACa right-angle. I say that the square on BC is equal to the (sum of the) squares on BA and AC.

For let the square $BDEC$ have been described on BC, and (the squares) GB and HC on AB and AC (respectively) [Prop. 1.46]. And let AL have been drawn through point A parallel to either of BD or CE [Prop. 1.31]. And let AD and FC have been joined. And since angles BAC and BAG are each right-angles, then two straight-lines AC and AG, not lying on the same side, make the adjacent angles with some straight-line BA, at the point A on it, (whose sum is) equal to two right-angles. Thus, CA is straight-on to AG [Prop. 1.14]. So, for the same (reasons), BA is also straight-on to AH. And since angle DBC is equal to FBA, for (they are) both right-angles, let ABC have been added to both. Thus, the whole (angle) DBA is equal to the whole (angle) FBC. And since DB is equal to BC, and FB to BA, the two (straight-lines) DB, BA are equal to the two (straight-lines) CB, BF,† respectively. And angle DBA (is) equal to angle FBC. Thus, the base AD [is] equal to the base FC, and the triangle ABD is equal to the triangle FBC [Prop. 1.4]. And parallelogram BL [is] double (the area) of triangle ABD. For they have the same base, BD, and are between the same parallels, BD and AL [Prop. 1.41]. And square GB is double (the area) of triangle FBC. For again they have the same base, FB, and are between the same parallels, FB and GC [Prop. 1.41]. [And the doubles of equal things are equal to one another.]‡ Thus, the parallelogram BL is also equal to the square GB. So, similarly, AE and BK being joined, the parallelogram CL can be shown (to be) equal to the square HC. Thus, the whole square $BDEC$ is equal to the (sum of the) two squares GB and HC. And the square $BDEC$ is described on BC, and the (squares) GB and HC on BA and AC (respectively). Thus, the square on the side BC is equal to the (sum of the) squares on the sides BA and AC.



Thus, in right-angled triangles, the square on the side subtending the right-angle is equal to the (sum of the) squares on the sides surrounding the right-[angle]. (Which is) the very thing it was required to show.

就這樣、幾何原本

- 在第一卷中證明了 48 個命題（基礎）
- 在第二卷中證明了 14 個命題（幾何與代數）
- 在第三卷中證明了 37 個命題（圓與角）
- 在第四卷中證明了 16 個命題（圓與正多邊形）
- 在第五卷中證明了 25 個命題（比例）
- 在第六卷中證明了 33 個命題（相似）

但幾何原本總共有 13 卷

歐幾里得所著的《幾何原本》共分13卷。[2]

維基文庫中相關的原始文獻：
刻《幾何原本》序

維基文庫中相關的原始文獻：
幾何原本

第一卷至第六卷的內容主要為平面幾何。

- 第一卷：幾何基礎。本卷確立了基本定義、公設和公理，還包括一些關於全等形、平行線和直線形的熟知的定理。
- 第二卷：幾何與代數。該卷主要討論的是畢達哥拉斯學派的幾何代數學，主要包括大量代數定理的幾何證明。
- 第三卷：圓與角。本卷闡述了圓、弦、割線、切線、圓心角、圓周角的一些定理。
- 第四卷：圓與正多邊形。本卷討論了已知圓的某些內接和外切正多邊形的尺規作圖問題。
- 第五卷：比例。本卷對歐多克索斯的比例理論進行闡述，
- 第六卷：相似。本卷闡述了比例的屬性，以及相似形的概念，包括了泰勒斯定理。

第七卷至第九卷主要闡述了數論。

- 第七卷：數論（一）。本卷內容包括整除性、質數、最大公約數、最小公倍數等初等數論內容。
- 第八卷：數論（二）。本卷繼續討論初等數論，包括歐幾里得輾轉相除法、各種數的關係（如質數、合數、平方數、立方數等）。
- 第九卷：數論（三）。本卷設計了比例、幾何級數，給出了許多重要的初等數論定理。

第十卷討論了無理數。

- 第十卷：無理數。本卷定義了無理量（即不可公約量），並蘊含了極限思想（如窮舉法）。本卷篇幅最大，也較不易理解。

摘抄自徐光啟手書《刻〈幾何原本〉序》

第11卷至第13卷主要討論立體幾何。

- 第11卷：立體幾何。本卷論述立體幾何；將第一卷至第六卷的主要內容推廣至立體，如平行、垂直以及立體圖形的體積。
- 第12卷：立體的測量。本卷重在討論立體圖形的體積，例如稜柱、稜錐、圓柱、圓錐以至球體的體積。
- 第13卷：建正多面體。本卷重點研究正多面體的作圖。包含了五種正多面體的作圖，並證明了不存在更多的正多面體。

其中

- 第 1-6 卷為平面幾何
- 第 7-9 卷為數論
- 第 10 卷為無理數
- 第 11-13 卷為立體幾何

歐幾里得透過

- 定義、公理、公設的系統化方法
- 總結了《希臘時代》數學家們的成果，將數學打造成一個《具有堅實基礎》的《系統性學問》。

這就是

- 《幾何原本》的貢獻！

讀了幾何原本

- 還有一些科學史的書籍之後

解答了我很多的疑問

舉例而言

當我解證明題的時候

- 常常被老師打叉叉 ...

我心裡不免疑問

- 為甚麼老師和課本的證明就是對的
- 但我的證明就是錯的！

從小學到大學

- 從來沒有一個老師教我《數學公理系統》還有的甚麼是《嚴格證明》的那些事情！

於是每次的證明

- 就像是作文比賽一般！

這樣的數學訓練

- 我想是非常糟糕的！

但是為了要在 50 分鐘內

- 寫完 20 道考題！

又有誰會去在意

- 要從公理系統出發的這件事情！

但是缺了公理系統

- 整個數學的大廈，就彷彿是建築在沙地一般的不可靠！

學習歐氏幾何

- 最重要的事情，我想就是理解數學從《公理系統》出發，可以成為一門非常嚴格學問的這件事情！

透過像《幾何原本》這樣的作品

- 人們就可以領會《數學的優美》

而欣賞這樣的優美性

- 我想才是《數學教育》最重要的事情！

雖然並非

- 每個人都會想當數學家或科學家！

但是透過學習

- 領略各種學問的美麗之處

我想是不會太難的！

如果

- 在《考試》和《欣賞學問之美》兩者之間
- 現在我想我會選擇後者！
- 可惜當年的我沒辦法體會到這些！

這些數學

- 看起來並沒有甚麼用！

但是如果

- 我們把數學從科學當中抽掉

那麼

- 我們將不會有《牛頓定律、微積分、馬克士威方程組》等等物理領域的數學內容。

這樣的話

- 抽掉數學的科學，究竟會剩下些甚麼東西呢？

而這種抽掉數學的科學

- 是否足以支持現代社會，讓我們能發展出同樣水準的技術呢？

如果西洋的文化

- 像中國一樣注重實用
  而不去注重發展數學的話

那麼歐洲文明

- 還能發展到像今天這個地步嗎？

如果我又回到了13歲

- 再念一次中學的話

那麼我應該

- 不會將大部分時間

  投入在考試和解題上！

而是會廣泛的接觸各個領域

多看、多聽、多想、多實作

然後找出自己想做的事

- 還有自己的興趣和天賦之所在！

不過

- 我現在已經四十七歲了！

再也沒有機會

- 回到年輕的時候了！

但是現在的中學生們

你們和我不一樣

你們還很年輕

你們還有漫長的人生

我們已經浪費了的那些光陰

恐怕是再也回不來了！

而你們的青春

究竟是要放在哪裡？

這個決定權

目前還掌握在你們

自己的手上！

別浪費了光陰

别浪費了人生！

雖然我們不知道

- 未來會怎麼樣！

但是

- 學會欣賞各種學問與技能
- 我想是比考試更重要的事！

希望我們的教育

- 能夠給大家更多機會
- 還有留下更多的時間

讓大家去感受

學習之美！

這就是我們今天的

- 十分鐘系列！

我們下回見！

Bye Bye!