程式人《十分鐘系列》

那些我們幾乎都沒學過

但是也不太會想去學的

《非歐幾何學》

陳鍾誠

2016 年 8 月 25 日

昨天

- 為了彌補中學時沒學好的幾何學

我寫了這一篇

那些我們都曾經學過

但是卻幾乎沒有人知道自己學過的

《歐氏幾何》

陳鍾誠

2016 年 8 月 24 日

今天

- 我突發奇想，發了一個訊息

然後我開始認真看

- 相對論和量子力學！

看著看著

- 我想應該可以把《狹義相對論》寫出來！

但問題是

- 我還不懂《廣義相對論》！

但是當我

- 開始看《廣義相對論》的時候

卻發現

- 有用到《張量》（tensor）

我知道

- 張量和《幾何變換》有關！

但是

- 我覺得《張量》好難！

然後

- 我看到一個故事！

當初愛因斯坦

- 在 1905 年發表《狹義相對論》之後

整整沉寂了十年

- 才在 1916 年發表了廣義相對論！

而且

- 大數學家《希爾伯特》，似乎還比他更早發展出類似理論！

問題的關鍵

- 在於愛因斯坦，對非歐幾何學不夠瞭解！

所以整整花上十年

- 才能建構出廣義相對論！

所以

- 要理解廣義相對論之前
- 我想得先理解一下《非歐幾何學》

這樣

- 剛好可以銜接前一篇的《歐氏幾何》

形成

- 幾何二部曲！

現在

- 就讓我們看看
- 到底甚麼是非歐幾何學吧！

在此之前

- 先讓我們複習一下
- 昨天的歐氏幾何！

或許您還記得

- 歐氏幾何的幾何原本裏，有
  - 23 個定義 (Definition)
  - 5 個公設 (Axiom)
  - 5 個公理 (一般概念)

以下是幾何原本的23個定義

1. 點：點不可以再分割成部分

2. 線：線是無寬度的長度

3. 線的兩端是點

4. 直線：直線是沿著一定方向與其相反方向的無限平鋪

5. 面：面只有長度和寬度

6. 一個面的邊是線

7. 平面：平面是直線自身的均勻分布

8. 平面角：平面角是兩條線在一個平面內相交所形成的傾斜度。

9. 直線角：含有角的兩條線成一直線時，其角稱為直線角 (現代稱為平角)

10. 直角與垂線：一條直線與另一條直線相交所形成的兩鄰角相等，兩角皆稱為直角。

11. 鈍角：大於直角的角

12. 銳角：小於直角的角

13. 邊界：邊界是物體的邊緣

14. 圖形：由一個邊界或幾個邊界所圍成的。

15. 圓：由一條線包圍著的平面圖形，其內有一點與這條線上任一點所連成的線段都相等。

16. 上述圓內的那點稱為圓心。

17. 直徑是穿過圓心，端點在圓上的任意線段，該線段將圓分成兩等份。

18. 半圓：是直徑與被它切的圓弧圍成的圖形。半圓的圓心與原圓心相同。

19. 直線圖形是由線段首尾順次相接圍成的。三角形是由三條線段圍成的。四邊形是由四條線段圍成的。多邊形是由四條以上的線段圍成的。

20. 三角形中，三條邊相等的稱為等邊三角形。兩條邊相等的稱為等腰三角形。三個角都為銳角的稱為銳角三角形。

21. 三角形中，有一個角為直角者是直角三角形，有一個角是鈍角的稱為鈍角三角形。

22. 四邊形中，四條邊相等並且四個角為直角的稱為正方形，四角為直角，但邊不完全相等的為長方形 (矩形) 。兩邊相等，角不是直角的為菱形。兩組對邊，兩組隊角分別相等的為平行四邊形。一組對邊平行，另一組對邊不平行的稱為梯形。

23. 平行直線：在同一平面內向兩端無限延長不能相交的直線。

五條公理（一般概念）

1. 與同一事物相等的事物相等。
2. 相等的事物加上相等的事物仍然相等。
3. 相等的事物減去相等的事物仍然相等。
4. 一個事物與另一事物重合，則它們相等。
5. 整體大於局部。

另外還有最重要的是

- 五條公設(Axiom)

這五條重要的公設如下

1. 從一點向另一點可以引一條直線。
2. 任意線段能無限延伸成一條直線。
3. 給定任意線段，可以以其一個端點作為圓心，該線段作為半徑作一個圓。
4. 所有直角都相等。
5. 若兩條直線都與第三條直線相交，並且在同一邊的內角之和小於兩個直角，則這兩條直線在這一邊必定相交。

其中第五條

- 若兩條直線都與第三條直線相交，並且在同一邊的內角之和小於兩個直角，則這兩條直線在這一邊必定相交。
- 稱為《平行公設》，這條可以導出下述命題：
  - 通過一個不在直線上的點，有且僅有一條不與該直線相交的直線。

歐幾里得

- 在寫《幾何原本》的時候

  會盡量少用這第五條的平行公設！

因為這條寫起來特別長

- 而且看起來並非絕對必要！

可惜如果不用《平行公設》的話

- 就沒有辦法證明《畢氏定理》

  還有一些《平面幾何》上的定理！

一千多年來

- 很多數學家都試圖，想要由前面四條來導出《平行公設》！

但是

- 始終沒有人能夠做到！

像是俄國喀山大學的
《羅巴契夫斯基》教授

- 就想用前四條證明《平行公設》
- 但卻總是失敗！

於是、開始有人認為

- 根本不可能用前四條導出《平行公設》！

那麼、如果把平行公設拿掉

- 甚至反過來的話

  那麼會怎麼樣呢？

1820 年，羅巴切夫斯基

- 把《幾何原本》中的命題分為兩部份。
  - 一部分是有用到平行公設證明的命題
  - 另一部分是沒有用到平行公設證明的

那些沒有用到《平行公設》的命題

- 形成了一套幾何體系，稱為《絕對幾何》！

參考： http://210.243.8.14/%E5%81%89%E5%A4%A7%E7%9A%84%E6%95%B8%E5%AD%B8%E5%AE%B6/Document%20Library/%E7%BE%85%E5%B7%B4%E5%A5%91%E5%A4%AB%E6%96%AF%E5%9F%BA1792--1856.html

在《絕對幾何》中

- 可以證明下列命題：（證明完就是定理）

在一個平面上，過直線 AB 外一點，

《至少可作一條》直線與 AB 不相交

讓我們仔細看看這個定理

- 在一個平面上，過直線 AB 外一點，《至少可作一條》直線與 AB 不相交

那可不可以兩條以上呢？

於是《羅巴切夫斯基》就想

- 如果我把：
  - 可作《不只一條直線》與 AB 不相交

- 那會怎麼樣呢？

於是他就用這一條

- 和《平行公設》相反的公設，當作是《第五條公設》
- 並且開始推導出一個又一個的定理！

結果

- 竟然推導得很順手，

  完全沒有造成任何矛盾！

當然

- 他推出的定理，和歐氏幾何會有很多不同
- 不過也是符合公設的嚴謹定理阿！

他可能想不到的是

- 這些推導，形成了一門全新的幾何學，後來就稱為《羅氏幾何》
- 《羅氏幾何》又稱為《雙曲幾何》

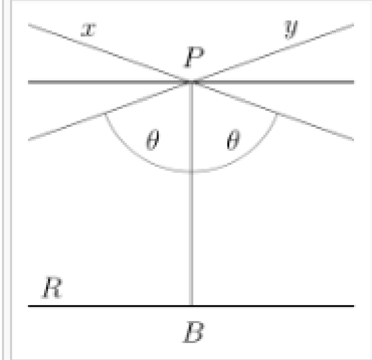
更詳細的內容

- 可以參考維基百科

雙曲幾何 [編輯]

維基百科，自由的百科全書
（已重新導向自 罗氏几何）

雙曲幾何又名**羅氏幾何**（羅巴切夫斯基幾何），是非歐幾里德幾何的一種特例。與歐幾里德幾何的差別在於第五條公理（公設）－平行公設。在歐幾里德幾何中，若平面上有一條直線R和線外的一點P，則存在唯一的一條線滿足通過P點且不與R相交（即R的平行線）。但在雙曲幾何中，至少可以找到兩條相異的直線，且都通過P點，並不與R相交，因此它違反了平行公設。然而，取代歐幾里德幾何中的平行公設的雙曲幾何本身並無矛盾之處，仍可以推得一系列屬於它的定理，這也說明了平行公設獨立於前四條公設，換句話說，無法由前四條公設推得平行公設。

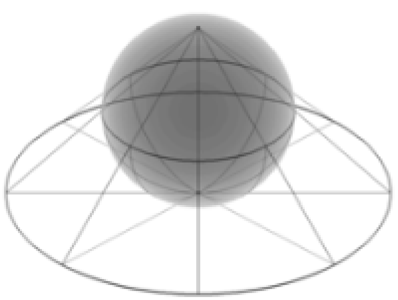


通過P點且漸漸趨近R（但不相交）的直線

到目前為止，數學家對雙曲幾何中平行線的定義尚未有共識，不同的作者會給予不同的定義。這裡定義兩條逐漸靠近的線為漸進線，它們互相漸進；兩條有共同垂直線的線為超平行線，它們互相超平行，並且兩條線為平行線代表它們互相漸進或互相超平行。雙曲幾何還有一項性質，就是三角形的內角和小於一個平角（180°）。在極端的情況，三角形的三邊長趨近於無限，而三內角趨近於0°，此時該三角形稱作理想三角形。

雙曲幾何專門研究當平面變成鞍馬型之後，平面幾何到底還有幾多可以適用，以及會有甚麼特別的現象產生。在雙曲幾何的環境裡，平面的曲率是負數。 通過兩個點可形成一個直線

幾何學



一個球面投射到一個平面。

綱要 · 歷史

目錄 [隱藏]

但是、慢著

- 這不是很違反直覺嗎？

要怎麼理解

- 在一個幾何體系中
  - 可作《不只一條直線》與 AB 不相交
- 這件事情呢？

關於這點

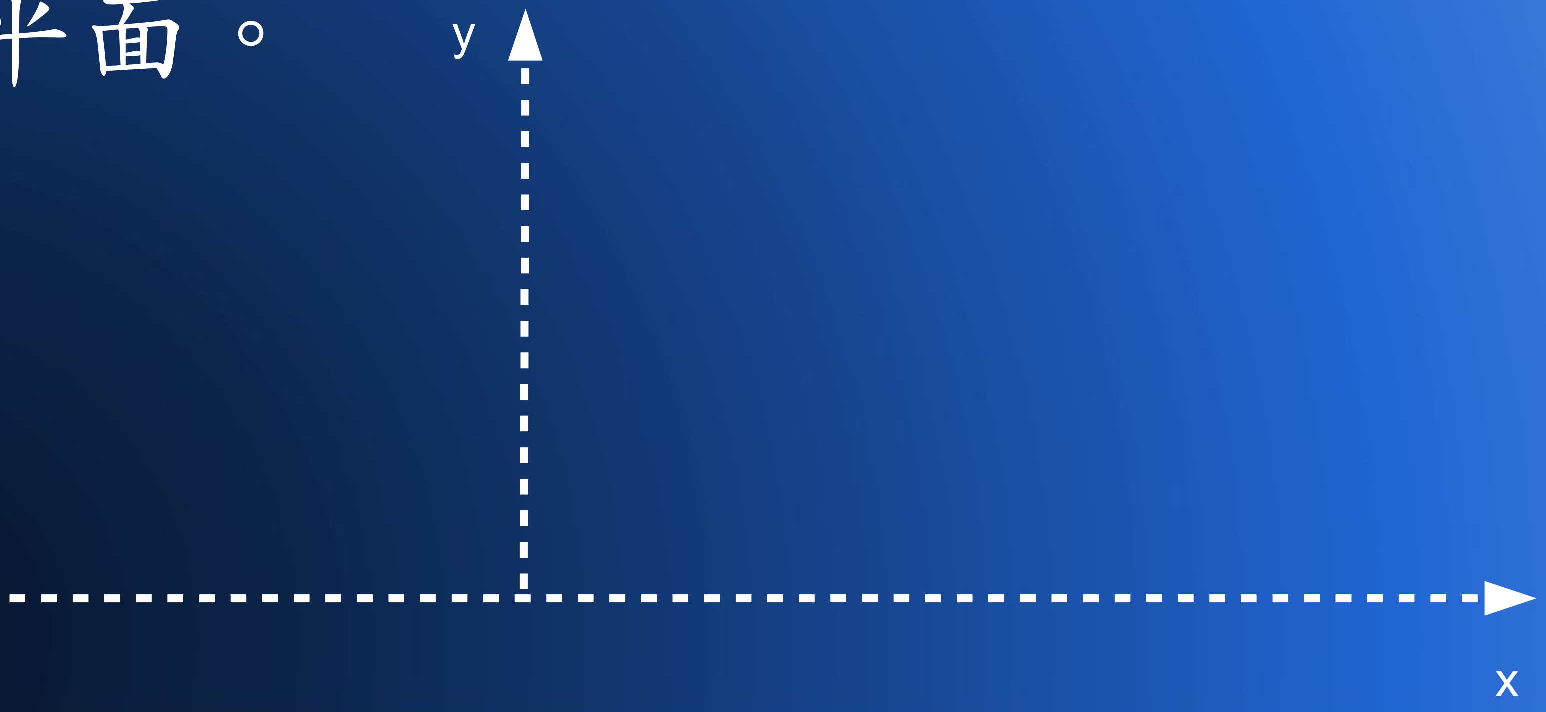
- 只要看一個範例就會懂了！

這個《羅氏幾何》的範例

- 是由龐加萊所提出的
- 稱為《龐加萊圓盤模型》
  （Poincaré disk model）
- 也有個變形是《半圓盤模型》

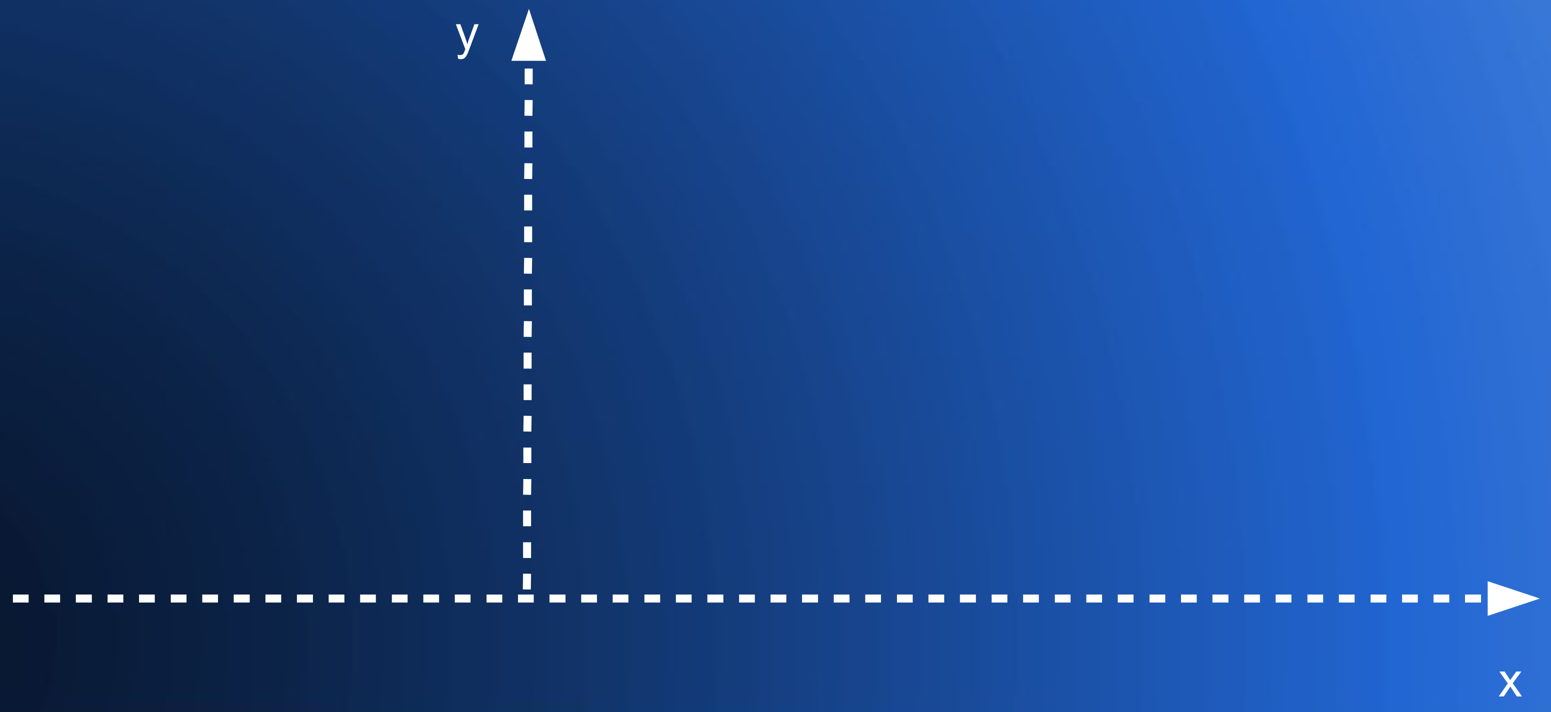
在《龐加萊半圓盤模型》當中

- 我們考慮一個《笛卡兒》坐標系上的半平面。



在這樣的半平面上

- 我們做幾個定義



前兩個定義是

- 1. 《點》為上半平面中經典的點 （ 這還好 ）
- 2. 《直線》為上半平面中的《半圓》（ 這太誇張了！ ）

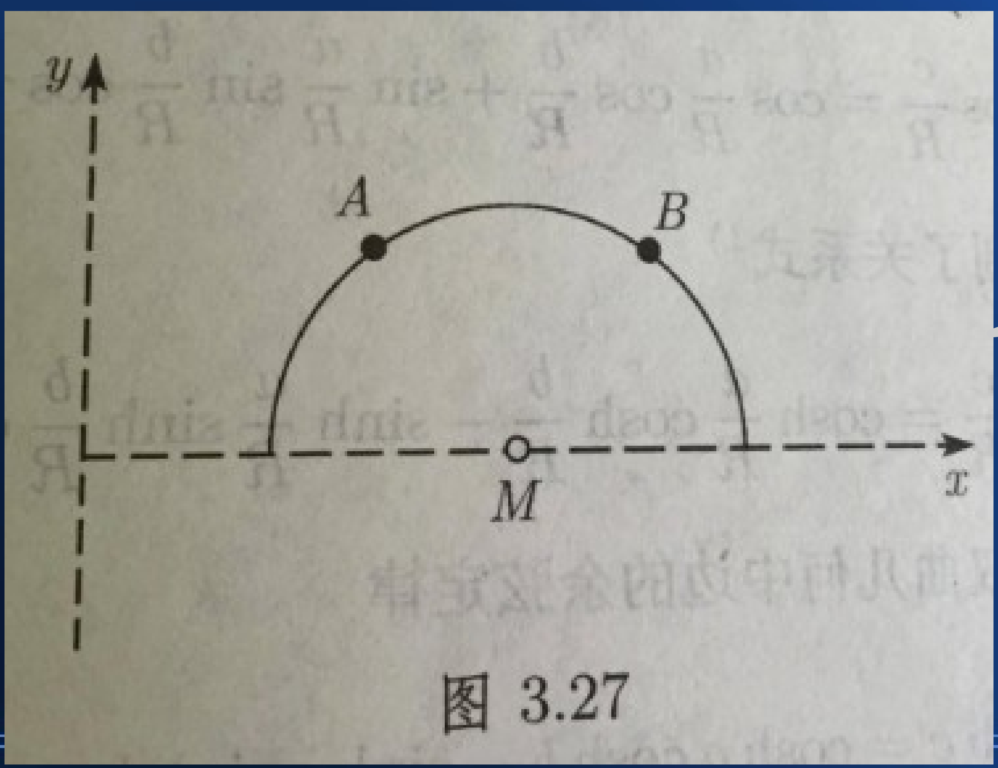


图 3.27

所以這是一個通過
A, B 兩點的直線

圖片來源： https://book.douban.com/subject/7061949/

然後在加上角和距離的定義

角 两条直线的夹“角”等于对相应圆弧间的角 (图 3.28(b)).

距离 在双曲平面 $\mathcal{H}$ 中一条曲线 $y = y(x), a \leqslant x \leqslant b$ 的长由积分

$$\boxed{L = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{y(x)} \mathrm{d}x}$$

给出. 对于这个距离, 直线是最短路径 (测地线).

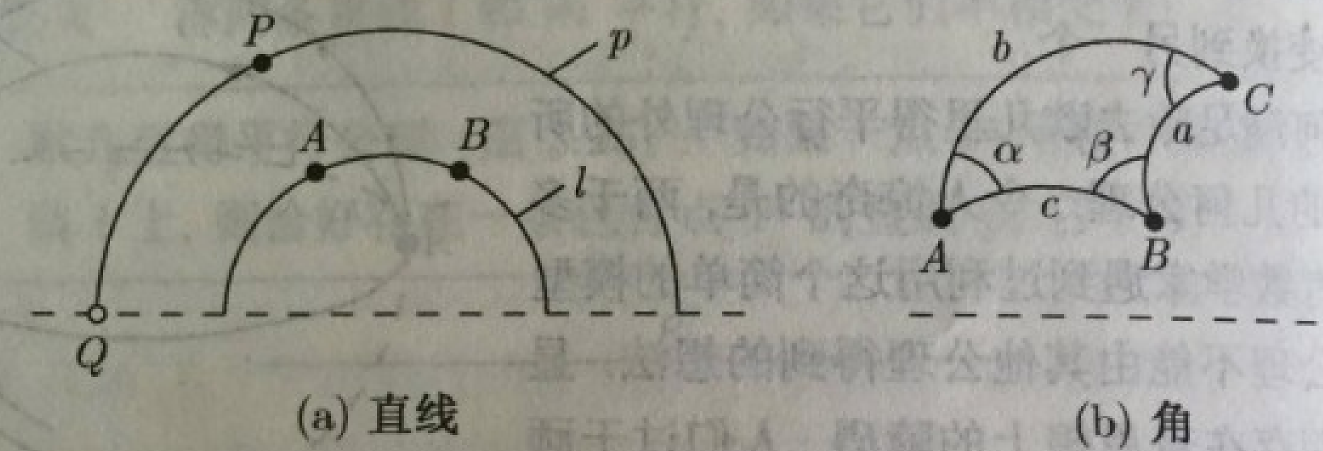


图 3.28 庞加莱平面的几何

圖片來源： https://book.douban.com/subject/7061949/

其中和 AB 平行的 p 線

- 就和 AB 所形成的線 l 不相交
- 而且我們可以輕易地作出很多條！

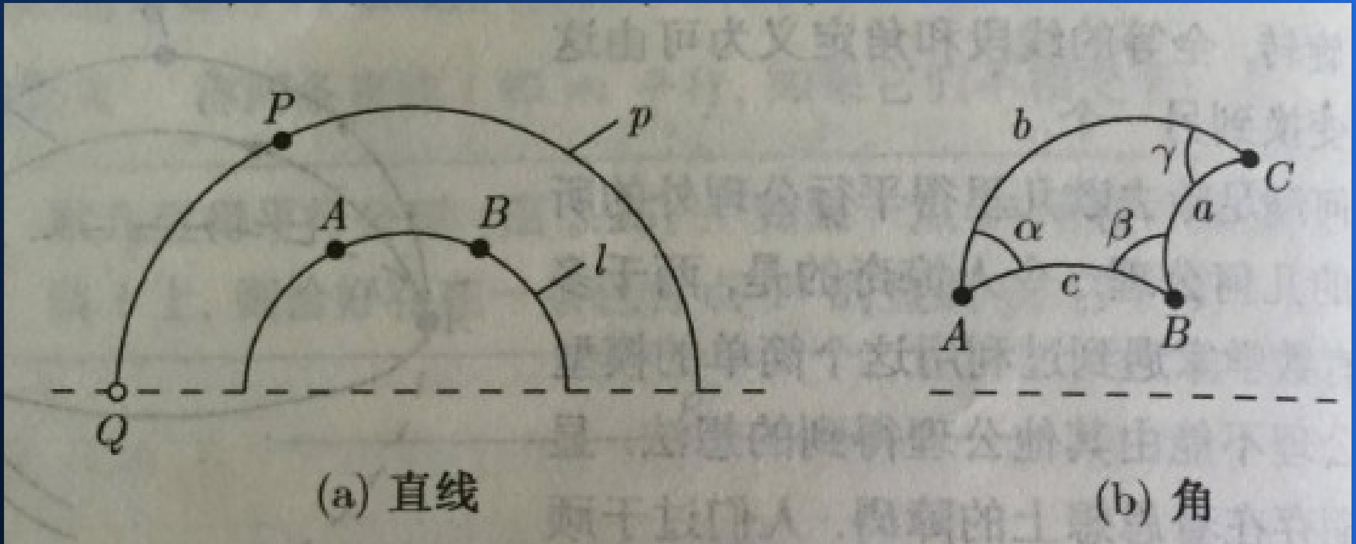


图 3.28　庞加莱平面的几何

圖片來源： https://book.douban.com/subject/7061949/

問題是

- 我們怎麼可以說《半圓》是直線
- 然後又擅自更改《距離》的定義呢？

其實、這就是數學當中

- 《公理系統化》的最大好處

一但公理化之後

- 我們就可以尋找符合《該公理系統》的模型！

任何符合該公理系統的模型

- 都可以直接套用該公理系統的定理
- 而不需要重新推導
- 也不會讓理論受限於模型本身

這就是

- 數學系統公理化後的威力！

龐加萊的半圓盤模型

- 只是《羅氏幾何》的一個《個案》

在非歐幾何體系中

- 還有很多各式各樣的模型！

像是橢圓幾何

- 就是一個用來理解《廣義相對論》的簡化版範例！

在橢圓幾何中，會從新定義

點：是半球面上的一點

(或者是赤道上邊緣的兩點，像A,B)

直線：是球面上的大圓

角：通常是大圓間的角

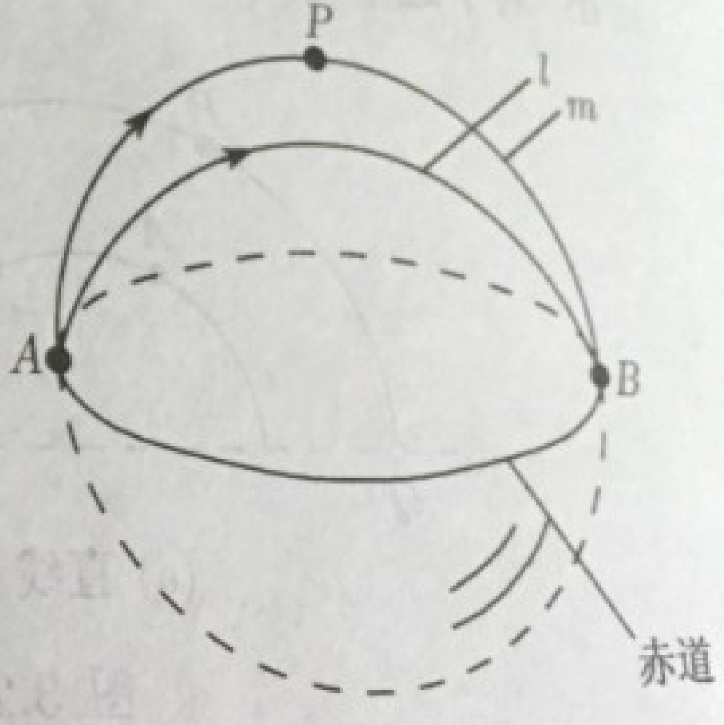


图 3.26

在橢圓幾何中

- 平行公設還是不成立。
- 因為兩平行線有交點！

在非歐幾何發展之前

- 人們過於頑固的想像直線必然是筆直的！

只要突破這個想法

- 一切按照公理公設的規定
- 任何符合公理公設的模型，都會是該門數學的一個範例！

而任何的模型

- 也都可以建構出一套符合該模型的公理系統！

這樣、數學就能變得更強大

- 更有彈性了！

愛因斯坦

- 在《狹義與廣義相對論淺說》這本書中

曾經提到過一個範例

假如球面上有一種扁平小蟲

- 這個小蟲絕對無法向上跳
- 那麼他們所看到的幾何學
  會是甚麼樣的幾何學呢？

對於我們人類而言

- 我們沒有辦法穿越時空
- 因此就像一種生活在三空間內的《扁平生物》，很難想像四維的時空扭曲到底是怎麼回事！

但是透過數學

- 我們就可以描述《相對論》當中的四維時空結構！

而這個描述

- 就是所謂的《廣義相對論》了！

關於相對論的議題

- 我們會在下一篇的《十分鐘系列》當中，有專門的探討！

我們下回見

Bye Bye!