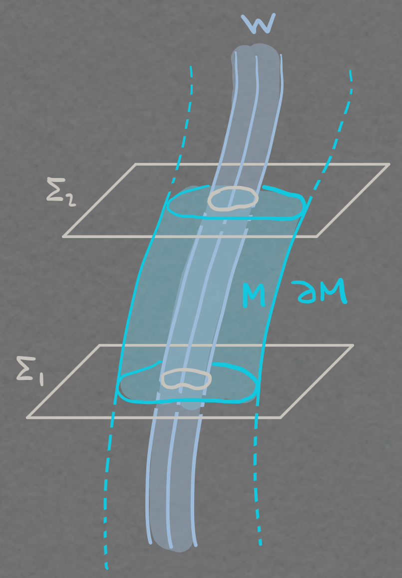
Momentum y momento angular

$T^{\alpha\beta}$: Tensor momento-energía para un cuerpo espacialmente acotado



$T^{\alpha\beta} \neq 0$ en W

$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$

ξ : Campo vectorial de killing.

$\nabla_{(\alpha} \xi_{\beta)} = 0$

M : Volumen que contiene parte de W
Superficies: ∂M (Timelike)
$\left.\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \Sigma_2\end{matrix}\right\}$ Spacelike

$$\nabla_\alpha(\xi_\beta T^{\alpha\beta}) = (\nabla_\alpha \xi_\beta) T^{\alpha\beta} + \xi_\beta \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

Por lo tanto,

$$\int_M \sqrt{-g}\, \nabla_\alpha(\xi_\beta T^{\alpha\beta})\, d^4x = 0$$

Para cualquier matriz M se tiene $\delta(\det M) = \det M \ \mathrm{Tr}[M^{-1}\delta M]$

Ya que $g = \det g_{\mu\nu}$, se tiene

$$\delta g = g\ \mathrm{Tr}[(g_{\alpha\beta})^{-1}\delta g_{\mu\nu}]$$

Sin embargo, $(g_{\alpha\beta})^{-1} = g^{\alpha\beta}$ y con ello

$$\delta g = g\ \mathrm{Tr}[g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}]$$

$$\delta g = g\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$$

lo cual implica que $\partial_\sigma g = g\, g^{\mu\nu}\partial_\sigma g_{\mu\nu}$

Por otra parte, de la definición de las conexiones,

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\left[\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right]$$

$$g_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\rho}\left[\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right]$$

$$g_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right]$$

Intercambiando $\rho \leftrightarrow \mu$

$$g_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu} = \frac{1}{2}\left[\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\mu g_{\rho\nu}\right]$$

y con ello

$$g_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu} = \frac{1}{2}\left[\cancel{\partial_\mu g_{\rho\nu}} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \cancel{\partial_\rho g_{\mu\nu}}\right] + \frac{1}{2}\left[\cancel{\partial_\rho g_{\mu\nu}} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \cancel{\partial_\mu g_{\rho\nu}}\right]$$

$$g_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu} = \partial_\nu g_{\mu\rho}$$

Multiplicando por $g\, g^{\mu\rho}$;

$$g\, g^{\mu\rho}\partial_\nu g_{\mu\rho} = g\, g^{\mu\rho}\left[g_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}\right]$$

$$\partial_\nu g = g\,\delta^{\mu}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + g\,\delta^{\rho}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}$$

$$\partial_\nu g = g\,\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} + g\,\Gamma^{\rho}_{\rho\nu}$$

$$\partial_\nu g = 2g\,\Gamma^{\mu}_{\mu\nu}$$

$$\frac{1}{2g}\partial_\nu g = \Gamma^{\mu}_{\mu\nu}$$

$$\boxed{\partial_\nu\left[\ln\sqrt{-g}\right] = \Gamma^{\mu}_{\mu\nu}}$$

Utilizando esta relación se puede calcular la divergencia de un vector A^μ como

$$\nabla_\mu A^\mu = \partial_\mu A^\mu + \Gamma^{\mu}_{\mu\nu}A^\nu$$

$$\nabla_\mu A^\mu = \partial_\mu A^\mu + A^\nu\partial_\nu\left(\ln\sqrt{-g}\right)$$

$$\nabla_\mu A^\mu = \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{\sqrt{-g}}A^\nu\partial_\nu\sqrt{-g}$$

$$\boxed{\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,A^\mu\right)}$$

Aplicando esta relacion al término $\sqrt{-g}\;\nabla_\alpha\left(\xi_\beta T^{\alpha\beta}\right)$ dentro de la integral se obtiene

$$\sqrt{-g}\;\nabla_\alpha\left(\xi_\beta T^{\alpha\beta}\right) = \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\,\xi_\beta T^{\alpha\beta}\right)$$

De esta forma,

$$\int_M \sqrt{-g}\, \nabla_\alpha \left(\xi_\beta T^{\alpha\beta} \right) d^4x = \int_M \partial_\alpha \left(\sqrt{-g}\, \xi_\beta T^{\alpha\beta} \right) d^4x = 0$$

Utilizando el teorema de Stokes, esta integral se reescribe en la forma

$$\int_S \xi_\beta T^{\alpha\beta}\, d\Sigma_\alpha = 0$$

Separando las diferentes contribuciones de la frontera de M,

$$\int_{\Sigma_2 \cap M} \xi_\beta T^{\alpha\beta}\, d\Sigma_\alpha + \int_{\Sigma_1 \cap M} \xi_\beta T^{\alpha\beta}\, d\Sigma_\alpha \quad \int_{\partial M} \xi_\beta T^{\alpha\beta}\, d\Sigma_\alpha = 0$$

Como $T^{\alpha\beta}=0$ fuera de W, la tercera integral desaparece y las dos integrales restantes se restringen a las superficies $\Sigma_2 \cap W$ y $\Sigma_1 \cap W$,

$$\int_{\Sigma_2 \cap W} \xi_\beta T^{\alpha\beta}\, d\Sigma_\alpha + \int_{\Sigma_1 \cap W} \xi_\beta T^{\alpha\beta}\, d\Sigma_\alpha = 0$$

$$\int_{\Sigma_2 \cap W} \xi_\beta T^{\alpha\beta}\, d\Sigma_\alpha = - \int_{\Sigma_1 \cap W} \xi_\beta T^{\alpha\beta}\, d\Sigma_\alpha$$

Tomando el límite $\Sigma_2 \to \Sigma_1$, esta relación implica que el valor de la integral es una constante de movimiento, independiente de la superficie elegida, es decir

$$\boxed{\int_\Sigma \xi_\beta T^{\alpha\beta}\, d\Sigma_\alpha = C_\xi}$$

Considerando dos puntos a lo largo de la línea de mundo (x_0, x), donde $x \in \Sigma$ y x_0 es un punto constante arbitrario, y utilizando la ecuación de Jacobi,

$$\xi_\beta(x) = K_\beta{}^\mu\, \xi_\mu(x_0) + H_\beta{}^\nu\, \nabla^\mu \sigma\, \nabla_{[\mu} \xi_{\nu]}(x_0)$$

con $\sigma(x_0, x_1)$ la función de mundo de Synge y

$$H^\rho{}_\alpha \equiv -(\nabla_\rho \nabla^\alpha \sigma)^{-1}$$

$$K^\rho{}_\beta \equiv -(\nabla_\rho \nabla^\alpha \sigma)^{-1} (\nabla_\beta \nabla^\alpha \sigma) = H^\rho{}_\alpha (\nabla_\beta \nabla^\alpha \sigma)$$

se puede escribir la integral como

$$\int_\Sigma \left[K_\beta{}^\mu \xi_\mu(x_0) + H_\beta{}^\nu \nabla^\mu \sigma \, \nabla_{[\mu} \xi_{\nu]}(x_0) \right] T^{\alpha\beta} \, d\Sigma_\alpha = C_\xi$$

A partir de esta relación se definen el momentum y el momento angular

$$\boxed{\begin{aligned} P^\mu(x_0,\Sigma) &\equiv \int_\Sigma K_\beta{}^\mu T^{\alpha\beta} \, d\Sigma_\alpha \\ S^{\mu\nu}(x_0,\Sigma) &\equiv 2\int_\Sigma \nabla^{[\mu}\sigma \, H_\beta{}^{\nu]} T^{\alpha\beta} \, d\Sigma_\alpha \end{aligned}}$$

y con ello la cantidad conservada asociada a ξ es

$$\boxed{C_\xi = P^\mu(x_0,\Sigma)\,\xi_\mu + \frac{1}{2} S^{\mu\nu}(x_0,\Sigma)\,\nabla_{[\mu}\xi_{\nu]}}$$

Nótese que las definiciones de P^μ y $S^{\mu\nu}$ no incluyen al vector de Killing por lo que son válidas en cualquier e-t.

En el límite de un e-t plano, la función de onda resulta ser

$$\sigma(x,x_0) = \frac{1}{2}(x-x_0)^\alpha (x-x_0)_\alpha$$

Con lo que $\quad \nabla^\mu \sigma = (x-x_0)^\mu \qquad \nabla_\mu \nabla_\nu \sigma = \delta_{\mu\nu}$

y además $\quad \lim_{x\to x_0} H^\rho{}_\alpha = \lim_{x \to x_0} K^\rho{}_\alpha = \delta^\rho_\alpha$

De esta forma, en el e-t plano

$$P^\mu = \int_\Sigma \delta_\beta{}^\mu T^{\alpha\beta} \, d\Sigma_\alpha = \int_\Sigma T^{\alpha\mu} \, d\Sigma_\alpha$$

$$S^{\mu\nu} = 2\int_\Sigma (x-x_0)^{[\mu} \delta_\beta^{\nu]} T^{\alpha\beta} \, d\Sigma_\alpha = 2\int_\Sigma (x-x_0)^{[\mu} T^{\nu]\alpha} \, d\Sigma_\alpha$$

lo cual concuerda con los resultados obtenidos a partir del teorema de Noether.

REFERENCIAS

[1] I. Burak Ilhan. "Dynamics of Extended Objects in General Relativity".
arXiv: 0911.3645 [gr-qc]