Conservacion de la Energia

La primera ley de la termodinámica (conservación de la energía), establece

$$dQ = p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) + de$$

donde dQ : Cambio en calor por unidad de masa
de : Cambio en energía por unidad de masa

El término dQ puede tener contribuciones como

$$\rho \frac{dQ}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{F}_{rad} - \vec{\nabla}\cdot\vec{q} + Q^{(vis)} + \eta_e J^2$$

* $\vec{f}\cdot\vec{v}$: Trabajo hecho por la densidad de fuerza $\vec{f}$.

$$\vec{F}_{rad} = \int d\nu \int d\Omega\, \hat{n}\, I_\nu(\hat{n},\vec{r})$$: Vector de flujo radiativo

$I_\nu(\hat{n},\vec{r})$: Intensidad específica de la radiación en el punto $\vec{r}$ y en dirección $\hat{n}$

* $-\vec{\nabla}\cdot\vec{F}_{rad}$: Razón con la que la energía de radiación se pierde por emisión (o aumentada por absorción) por unidad de volumen

$\vec{q}$: Flujo (conductivo) de calor a través de las fronteras del elemento.

* $-\vec{\nabla}\cdot\vec{q}$: Razón con la que los movimientos aleatorios (de los electrones principalmente) transportan la energía térmica dentro del gas.

Nota: Modelos especificos de $\vec{F}_{rad}$ y $\vec{q}$ se presentarán después.

* $Q^{(vis)} = \sigma : \vec{\nabla}\vec{v}$: Razón de Calentamiento volumétrico por viscosidad

* $\eta_e J^2$: Razón de calentamiento (volumétrico) Ohmico
Este término es $\vec{J}\cdot\vec{E}$ con $\vec{J}$: la densidad de corriente
$\vec{E}$: campo eléctrico
En el marco Lagrangiano $\vec{E} = \eta_e \vec{J}$ con η_e: resistividad eléctrica del fluido

Así, se puede escribir

$$\rho \frac{de}{dt} + \rho p \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \rho \frac{dQ}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{F}_{rad} - \vec{\nabla}\cdot\vec{q} + Q^{(vis)} + \eta_e J^2$$

Ya que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}$$

Utilizando la forma Lagrangiana de la ecuación de continuidad,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}(-\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

se obtiene la ecuación de energías en el enfoque Lagrangiano,

$$\boxed{\rho\frac{de}{dt} = -p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \vec{f}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{F}_{rad} + Q^{(vis)} + \eta_e J^2}$$

donde el término $-p\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ representa el trabajo hecho por la presión.

Utilizando la ecuación de continuidad en el sistema Euleriano,

$$\rho\frac{de}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho e) - e\frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho e) + e\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

y usando la derivada Lagrangiana $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}$

$$\rho\frac{de}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}(\rho e) + e\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

$$\rho\frac{de}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \vec{\nabla}\cdot(\rho e\vec{v})$$

Se obtiene así la ecuación de energias en el enfoque Euleriano,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \vec{\nabla}\cdot(\rho e\vec{v}) = -p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \vec{f}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{F}_{rad} + Q^{(vis)} + \eta_e J^2}$$