

Índice general

1. Preliminares	7
1.1. Geodésicas y Parametrización Afín	7
1.1.1. Partículas con Masa	7
1.1.2. Partículas sin Masa	7
1.2. Campos Vectoriales de Killing	9
1.2.1. Lema del Vector de Killing	10
1.2.2. Cargas Conservadas	12
1.3. Simetrías del Espacio-Tiempo	12
1.3.1. Espacio-Tiempo Estacionario	12
1.3.2. Espacio-Tiempo Estático	13
1.3.3. Espacio-Tiempo Axialmente Simétrico	13
1.3.4. Espacio-Tiempo Esféricamente Simétrico	13
1.4. Límite Newtoniano de la Relatividad General	14
1.4.1. Conexiones	15
1.4.2. Tensor de Riemann	15
1.4.3. Tensor de Ricci	16
1.4.4. Escalar de Curvatura	17
1.4.5. Ecuaciones de Campo Linealizadas	17
2. Agujero Negro de Schwarzschild,	19
2.1. La Métrica de Schwarzschild	19
2.1.1. Vectores de Killing y Cantidad Conservadas	21
2.1.2. Características de la Solución de Schwarzschild	22
2.1.3. Estructura Causal	23
2.1.4. Singularidades	24
2.2. Coordenadas de Eddington-Finkelstein	25
2.2.1. Coordenadas de E-F entrantes	26
2.2.2. Coordenadas de E-F salientes	28
2.3. Coordenadas de Kruskal	29

2.3.1. Vector de Killing como-de-tiempo en la Variedad de Kruskal	33
2.4. Coordenadas Isotrópicas	35
2.4.1. Agujeros de Gusano	37
2.5. Espacio-Tiempo de Rindler	39
2.6. Diagramas de Carter-Penrose	41
2.6.1. Espacio-Tiempo de Minkowski	41
2.6.2. Espacio-Tiempo de Rindler	45
2.6.3. Espacio-Tiempo de Kruskal	47
3. Hipersuperficies	51
3.1. Hipersuperficies Nulas	52
3.2. Horizontes de Killing	56
3.2.1. Gravedad Superficial	56
3.2.2. Horizonte de Killing Bifurcado	59
3.2.3. Horizontes de Aceleración	62
3.2.4. Horizontes de Aceleración y Gravedad Superficial	63
3.3. Horizontes de Eventos	64
3.3.1. Espacio-tiempo Asintóticamente Simple	64
3.3.2. Espacio-tiempo Débil Asintóticamente Simple	64
3.3.3. Espacio-tiempo Asintóticamente Vacío	64
3.3.4. Espacio-tiempo Asintóticamente Plano	64
3.3.5. Curva Causal	65
3.3.6. Pasado Causal	65
3.3.7. Futuro Causal	66
3.3.8. Horizonte de Eventos Futuro	66
3.3.9. Horizonte de Eventos Pasado	66
3.3.10. Teorema de Penrose	67
3.3.11. Teoremas de Rigidez	67
3.4. Horizontes de Cauchy	68
3.4.1. Superficie Parcial de Cauchy	68
3.4.2. Curva Causal Inextendible al Pasado	68
3.4.3. Curva Causal Inextendible al Futuro	68
3.4.4. Dominio Futuro de Dependencia	68
3.4.5. Dominio Pasado de Dependencia	68
3.4.6. Superficie de Cauchy	68
3.4.7. Globalidad Hiperbólica	69
3.4.8. Horizonte de Cauchy	70

ÍNDICE GENERAL	5
4. Formulación de Tétradas	71
4.1. Componentes de Vectores y Tensores	73
4.2. Derivada Intrínseca	74
4.3. Cálculo de los Coeficientes de Rotación de Ricci	76
4.4. Tensor de Riemann	78
4.5. Tetradas Nulas y Formalismo de Newman-Penrose	79
4.5.1. Ejemplo. Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes	81
5. Agujero Negro de Reissner-Nordström	83
5.1. Solucion de las Ecuaciones de Campo	83
5.2. Casos 1 de Reissner-Nordström: $M < Q $	86
5.3. Caso 2 de Reissner-Nordström: $M > Q $	87
5.3.1. Coordenadas de Eddington-Finkelstein	88
5.3.2. Horizontes de Killing	89
5.3.3. Coordenadas de Kruskal-Szekeres	91
5.3.4. Diagrama de Kruskal.	92
5.3.5. Diagrama de Carter-Penrose	94
5.3.6. Causalidad	97
5.3.7. Coordenadas Isotrópicas	98
5.4. Caso 3 de Reissner-Nordström: $M = Q $	99
5.4.1. Coordenadas de Eddington-Finkelstein	100
5.4.2. Horizonte de Killing	101
5.4.3. Diagrama de Kruskal	102
5.4.4. Diagrama de Carter-Penrose	104
6. Agujero Negro de Kerr	105
6.1. Transformación Compleja de la Solución de Schwarzschild	105
6.2. La familia de Kerr-Newman	108
6.3. Agujero Negro de Kerr	109
6.4. Caso 1 de Kerr: $M < a$	110
6.4.1. Coordenadas de Kerr-Schild	110
6.4.2. Diagrama de Carter-Penrose	112
6.4.3. Estructura Causal cerca de la Singularidad	113
6.5. Caso 2 de Kerr: $M > a$	114
6.5.1. Horizontes de Killing	115
6.5.2. Diagrama de Carter-Penrose	118
6.5.3. Velocidad Angular del Agujero Negro	118
6.5.4. La Ergosférica	121
6.5.5. Arrastre de Sistemas Iniciales	122

6.5.6. Cantidades Conservadas	123
6.5.7. El Proceso de Penrose	124
6.6. Caso 3 de Kerr: $M = a$	127
6.6.1. Horizonte de Killing	128
6.6.2. Diagrama de Carter-Penrose	129
7. Integrales de Komar y Condiciones de Energía	131
7.1. Formulación Covariante de las Integrales de Carga	131
7.2. Energía ADM	132
7.3. Integrales de Komar	136
7.3.1. Ejemplo. Masa en el espacio-tiempo de Schwarzschild.	138
7.3.2. Ejemplo. Momento angular en un espacio-tiempo axialmente simétrico . .	139
7.4. Condiciones de Energía	140
7.4.1. Condición de Energía Débil	141
7.4.2. Condición de Energía Nula	142
7.4.3. Condición de Energía Fuerte	143
7.4.4. Condición de Energía Dominante	144
8. Geodésicas	147
8.1. Congruencias de Geodésicas	147
8.2. Desviación Geodésica	148
8.3. Expansión, Corte y Torsión	152
8.4. Ecuación de Raychaduy para Congruencias de Geodésicas Nulas	154
8.4.1. Causticas	157
9. Mecánica de Agujeros Negros	159
9.1. Ley Cero	159
9.2. Fórmula de Smarr	162
9.3. Primera Ley	165
9.4. Segunda Ley	166
9.4.1. Consecuencias de la Segunda Ley	167

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Geodésicas y Parametrización Afín

1.1.1. Partículas con Masa

Considere una partícula con masa m que se mueve a lo largo de una curva como-de-tiempo \mathcal{C} con puntos extremos A y B . La acción que describe el movimiento de esta partícula está dada en términos de su tiempo propio τ mediante

$$S = -m \int_A^B d\tau. \quad (1.1)$$

Ya que el tiempo propio esta relacionado con el elemento de línea, podemos escribir

$$d\tau = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} \quad (1.2)$$

$$= \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda, \quad (1.3)$$

donde λ es un parámetro arbitrario para la curva \mathcal{C} . De esta forma, la acción será

$$S = -m \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda, \quad (1.4)$$

y la trayectoria de la partícula corresponde a lo que se denomina una *geodésica* y debe satisfacer el principio variacional

$$\frac{\delta S}{\delta x(\lambda)} = 0. \quad (1.5)$$

1.1.2. Partículas sin Masa

La acción presentada en (1.4) no es adecuada para describir partículas sin masa ya que se anula idénticamente. Sin embargo, es posible utilizar una acción equivalente,

$$S = \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \left[g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} e^{-1}(\lambda) - m^2 e(\lambda) \right] d\lambda, \quad (1.6)$$

donde $e(\lambda)$ es una función arbitraria denominada *einbein*. Nótese que para describir partículas sin masa se toma el límite $m \rightarrow 0$ en esta acción. Podemos identificar la lagrangiana en (1.6) como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} e^{-1}(\lambda) - m^2 e(\lambda) \right]. \quad (1.7)$$

Para probar que (1.6) es equivalente a la acción (1.4) debemos mostrar que el principio variacional lleva a las mismas ecuaciones de movimiento. Sin embargo, en este caso se tienen dos cantidades para realizar la variación. Al realizar la variación con respecto al einbein $e(\lambda)$ se tiene

$$\frac{\delta S}{\delta e} = \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \left[-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} e^{-2}(\lambda) - m^2 \right] d\lambda = 0, \quad (1.8)$$

es decir

$$e = \frac{1}{m} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} = \frac{1}{m} \frac{d\tau}{d\lambda}. \quad (1.9)$$

Por otro lado, al realizar una variación en x^μ se tiene

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + \delta x^\mu \quad (1.10)$$

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} + \delta x^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

y por lo tanto la acción transformará de acuerdo con

$$S \longrightarrow \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \left[(g_{\mu\nu} + \delta x^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \frac{d(x^\mu + \delta x^\mu)}{d\lambda} \frac{d(x^\nu + \delta x^\nu)}{d\lambda} e^{-1} - m^2 e \right] d\lambda \quad (1.12)$$

$$S \longrightarrow S + \delta S, \quad (1.13)$$

donde

$$\delta S = \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda e^{-1} \left[g_{\mu\nu} \left(2 \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda} + \frac{d(\delta x^\mu)}{d\lambda} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda} \right) \right. \quad (1.14)$$

$$\left. + \delta x^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + 2 \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda} \right) \right] + \text{t.o.s.} \quad (1.15)$$

Ejercicio

Mostrar que la condición $\delta S = 0$ implica

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = e^{-1} \frac{de}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (1.16)$$

donde

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \quad (1.17)$$

Ahora bien, la libertad de escoger el parámetro λ se convierte aquí en la libertad para escoger el einbein e . Si se desea una geodésica en parametrización afín se tomará $e(\lambda) = \text{constante}$. Con ello la ecuación (1.16) se convierte en

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (1.18)$$

1.2. Campos Vectoriales de Killing

Si se realiza la transformación

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + \alpha \xi^\mu, \quad (1.19)$$

el tensor métrico transformará mediante

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} + \delta x^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \alpha \xi^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu}. \quad (1.20)$$

De esta forma, la acción de la partícula transforma como

$$S \longrightarrow \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \left[(g_{\mu\nu} + \alpha \xi^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \frac{d(x^\mu + \alpha \xi^\mu)}{d\lambda} \frac{d(x^\nu + \alpha \xi^\nu)}{d\lambda} e^{-1} - m^2 e \right] d\lambda \quad (1.21)$$

$$S \longrightarrow S + \delta S, \quad (1.22)$$

donde

$$\delta S = \frac{\alpha}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda e^{-1} \left[g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d\xi}{d\lambda} + g_{\mu\nu} \frac{d\xi^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + \xi^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right] + O(\alpha^2). \quad (1.23)$$

Esta relación se puede escribir como

$$\delta S = \frac{\alpha}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda e^{-1} \left[g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d\xi^\nu}{dx^\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} + g_{\mu\nu} \frac{d\xi^\mu}{dx^\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + \xi^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right] + O(\alpha^2), \quad (1.24)$$

o renombrando algunos indices mudos,

$$\delta S = \frac{\alpha}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda e^{-1} \left[g_{\mu\sigma} \frac{d\xi^\sigma}{dx^\nu} + g_{\sigma\nu} \frac{d\xi^\sigma}{dx^\mu} + \xi^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right] \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + O(\alpha^2). \quad (1.25)$$

La cantidad entre paréntesis corresponde a la derivada de Lie del tensor métrico a lo largo del campo vectorial ξ

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} + g_{\mu\sigma} \frac{d\xi^\sigma}{dx^\nu} + g_{\sigma\nu} \frac{d\xi^\sigma}{dx^\mu}. \quad (1.26)$$

Si se utiliza la conexión compatible con la métrica, ($\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$), la anterior expresión se puede escribir de forma covariante como

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)}. \quad (1.27)$$

Por lo tanto, podemos asegurar que la acción de la partícula es invariante a primer orden bajo la transformación (1.19) si

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.28)$$

y en este caso, ξ^μ se denomina un *campo vectorial de Killing*. Nótese que la relación (1.27) implica que un vector de Killing satisface

$$\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} = 0. \quad (1.29)$$

Así, la parte simétrica de la derivada covariante de un vector de Killing es cero, y por ello podemos concluir que esta derivada es igual a su parte antisimétrica,

$$\nabla_\mu \xi_\nu = \nabla_{[\mu} \xi_{\nu]}. \quad (1.30)$$

1.2.1. Lema del Vector de Killing

La definición del tensor de Riemann implica que para cualquier vector A^ρ , en una variedad sin torisón, se satisface

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\rho = \nabla_\mu \nabla_\nu A^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} A^\sigma. \quad (1.31)$$

En particular, para un vector de Killing, se tiene

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \xi^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu \xi^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} \xi^\sigma, \quad (1.32)$$

o bajando el indice ρ ,

$$R_{\rho\sigma\mu\nu}\xi^\sigma = \nabla_\mu\nabla_\nu\xi_\rho - \nabla_\nu\nabla_\mu\xi_\rho. \quad (1.33)$$

Debido a la relación (1.30) tenemos

$$R_{\rho\sigma\mu\nu}\xi^\sigma = \nabla_\mu\nabla_{[\nu}\xi_{\rho]} - \nabla_\nu\nabla_{[\mu}\xi_{\rho]} \quad (1.34)$$

$$= (\nabla_\mu\nabla_\nu\xi_\rho - \nabla_\mu\nabla_\rho\xi_\nu) - (\nabla_\nu\nabla_\mu\xi_\rho - \nabla_\nu\nabla_\rho\xi_\mu) \quad (1.35)$$

$$= \nabla_\mu\nabla_\nu\xi_\rho - \nabla_\nu\nabla_\mu\xi_\rho - \nabla_\mu\nabla_\rho\xi_\nu + \nabla_\nu\nabla_\rho\xi_\mu \quad (1.36)$$

y utilizando de nuevo la definición del tensor de Riemann en los dos últimos términos,

$$R_{\rho\sigma\mu\nu}\xi^\sigma = \nabla_\mu\nabla_\nu\xi_\rho - \nabla_\nu\nabla_\mu\xi_\rho + R_{\nu\sigma\rho\mu}\xi^\sigma - \nabla_\rho\nabla_\mu\xi_\nu + R_{\mu\sigma\nu\rho}\xi^\sigma + \nabla_\rho\nabla_\nu\xi_\mu \quad (1.37)$$

$$= \nabla_\mu\nabla_\nu\xi_\rho - \nabla_\nu\nabla_\mu\xi_\rho + R_{\nu\sigma\rho\mu}\xi^\sigma + R_{\mu\sigma\nu\rho}\xi^\sigma + \nabla_\rho\nabla_{[\nu}\xi_{\mu]} \quad (1.38)$$

$$= [\nabla_\nu, \nabla_\mu]\xi_\rho + R_{\nu\sigma\rho\mu}\xi^\sigma + R_{\mu\sigma\nu\rho}\xi^\sigma + \nabla_\rho\nabla_\nu\xi_\mu \quad (1.39)$$

$$= R_{\rho\sigma\mu\nu}\xi^\sigma + R_{\nu\sigma\rho\mu}\xi^\sigma + R_{\mu\sigma\nu\rho}\xi^\sigma + \nabla_\rho\nabla_\nu\xi_\mu. \quad (1.40)$$

Es decir que

$$\nabla_\rho\nabla_\nu\xi_\mu = -R_{\nu\sigma\rho\mu}\xi^\sigma - R_{\mu\sigma\nu\rho}\xi^\sigma \quad (1.41)$$

Debido a las simetrías del tensor de Riemann tenemos

$$\nabla_\rho\nabla_\nu\xi_\mu = -R_{\rho\mu\nu\sigma}\xi^\sigma - R_{\rho\nu\sigma\mu}\xi^\sigma, \quad (1.42)$$

y utilizando la identidad

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0, \quad (1.43)$$

obtenemos finalmente la ecuación

$$\nabla_\rho\nabla_\nu\xi_\mu = R_{\rho\sigma\mu\nu}\xi^\sigma, \quad (1.44)$$

conocida como *Lema del Vector de Killing*. Contrayendo esta expresión se obtiene

$$g^{\rho\mu}\nabla_\rho\nabla_\nu\xi_\mu = g^{\rho\mu}R_{\rho\sigma\mu\nu}\xi^\sigma \quad (1.45)$$

$$\nabla_\rho\nabla_\nu\xi_\rho = R_{\sigma\nu}\xi^\sigma. \quad (1.46)$$

1.2.2. Cargas Conservadas

Como es conocido, el Teorema de Noether nos asegura que cada simetría de la acción tiene asociada una *carga conservada*. En este caso, la carga conservada corresponde a

$$Q = \xi^\mu p_\mu \quad (1.47)$$

donde el 4-momentum p^μ se puede encontrar en términos de la lagrangiana dada por (1.7) mediante

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)} \quad (1.48)$$

$$= e^{-1} \frac{dx^\nu}{d\lambda} g_{\mu\nu}, \quad (1.49)$$

o utilizando (1.9) para el caso de partículas con masa,

$$p_\mu = m \frac{dx^\nu}{d\tau} g_{\mu\nu}. \quad (1.50)$$

Ejercicio

Mostrar que las ecuaciones de Euler-Lagrange para la acción (1.6) implican la conservación de la carga Q , i.e.

$$\frac{dQ}{d\lambda} = 0. \quad (1.51)$$

1.3. Simetrías del Espacio-Tiempo

Los diferentes espacios-tiempo que se trabajarán pueden clasificarse de acuerdo con sus propiedades de simetría. Primero definiremos que un espacio-tiempo *asintóticamente plano* es aquel que se vuelve progresivamente Minkowskiano cuando nos acercamos al infinito, $r \rightarrow \infty$. Sin embargo, una definición más rigurosa de esta propiedad se dará en un capítulo posterior. Basándonos en esto, realizaremos las siguientes definiciones.

1.3.1. Espacio-Tiempo Estacionario

Se dice que un espacio-tiempo asintóticamente plano es *estacionario* si existe un campo vectorial de Killing ξ , que sea como-de-tiempo cerca de ∞ . Además, este vector puede ser normalizado naturalmente en el infinito, de tal forma que $\xi^2 \rightarrow -1$ para $r \rightarrow \infty$.

Si t es una coordenada temporal, el vector se puede escribir (fuera de un posible horizonte) como $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$. Así, la forma general para una métrica estacionaria en estas coordenadas es

$$ds^2 = g_{tt}(\vec{x}) dt^2 + 2g_{ti}(\vec{x}) dt dx^i + g_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j. \quad (1.52)$$

1.3.2. Espacio-Tiempo Estático

Un espacio-tiempo estacionario se denomina *estático* si además es invariante bajo inversión temporal. Para que el elemento de línea (1.52) sea invariante bajo la inversión temporal, se debe tener $g_{ti} = 0$, por lo que la métrica general para un espacio-tiempo estático, fuera de un posible horizonte, es

$$ds^2 = g_{tt}(\vec{x}) dt^2 + g_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j. \quad (1.53)$$

1.3.3. Espacio-Tiempo Axialmente Simétrico

Un espacio-tiempo asintóticamente plano se denomina *axialmente simétrico* si existe un campo vectorial de Killing ζ que sea como-de-espacio en el ∞ y tal que todas sus órbitas sean cerradas. Escogiendo apropiadamente las coordenadas, este vector se puede escribir como

$$\zeta = \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (1.54)$$

tal que la coordenada φ se identifique módulo 2π . Al igual que en el caso de los vectores de Killing como-de-tiempo, los vectores como-de-espacio normalizarse en el ∞ , exigiendo que $\frac{\zeta^2}{r^2} \rightarrow 1$ para $r \rightarrow \infty$.

1.3.4. Espacio-Tiempo Esféricamente Simétrico

Un espacio-tiempo se denomina esféricamente simétrico si posee tres vectores de Killing linealmente independientes como-de-espacio con órbitas cerradas ($\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$) que satisfacen las relaciones de commutación del grupo de rotaciones en tres dimensiones $SO(3)$, es decir

$$[\zeta_1, \zeta_2] = \zeta_3 \quad (1.55)$$

$$[\zeta_2, \zeta_3] = \zeta_1 \quad (1.56)$$

$$[\zeta_3, \zeta_1] = \zeta_2. \quad (1.57)$$

La existencia de estos tres vectores de Killing implica que la variedad pueda ser *foliada* en esferas. En el caso de un espacio-tiempo de 4 dimensiones, las sub-variedades que muestran la simetría esférica son 2-esferas, en las cuales se escogen usualmente las coordenadas típicas (θ, φ) y donde la métrica toma la forma

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi. \quad (1.58)$$

Así, la forma general de la métrica esféricamente simétrica es

$$ds^2 = g_{bb}(b, a) db^2 + 2g_{ba}(b, a) dbda + g_{aa}(b, a) da^2 + r^2(a, b) d\Omega^2, \quad (1.59)$$

donde r es una función no nula de las coordenadas (b, a) . Se utiliza este nombre sugestivo para la función, ya que se puede realizar un cambio de las coordenadas (b, a) a las coordenadas (b, r) para que el elemento de línea tome la forma

$$ds^2 = g_{bb}(b, r) db^2 + 2g_{br}(b, r) dbdr + g_{rr}(b, r) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.60)$$

Por último, podemos realizar un cambio de las coordenadas (b, r) a las coordenadas (t, r) para que no existan términos cruzados, definiendo una función $t(b, r)$. El diferencial de esta función es

$$dt = \frac{\partial t}{\partial b} db + \frac{\partial t}{\partial r} dr \quad (1.61)$$

y por ello

$$dt^2 = \left(\frac{\partial t}{\partial b} \right)^2 db^2 + 2 \frac{\partial t}{\partial b} \frac{\partial t}{\partial r} dbdr + \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)^2 dr^2. \quad (1.62)$$

Con ello, el elemento de línea se puede escribir en la forma más simple

$$ds^2 = \alpha(t, r) dt^2 + \beta(t, r) dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.63)$$

donde las funciones α y β están definidas por las relaciones

$$\alpha \left(\frac{\partial t}{\partial b} \right)^2 = g_{bb} \quad (1.64)$$

$$\alpha \frac{\partial t}{\partial b} \frac{\partial t}{\partial r} = g_{br} \quad (1.65)$$

$$\beta + \alpha \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)^2 = g_{rr}. \quad (1.66)$$

1.4. Límite Newtoniano de la Relatividad General

En un espacio asintóticamente plano la métrica $g_{\mu\nu}$ del espacio-tiempo tiende a la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$,

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} \text{ cuando } r \rightarrow \infty. \quad (1.67)$$

De esta forma, se pueden linealizar las ecuaciones de campo de Einstein en la región asintótica utilizando la cantidad

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad (1.68)$$

la cual es simétrica en su par de índices, es muy pequeña,

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (1.69)$$

y permitirá estudiar el límite Newtoniano de la Relatividad General. La métrica del espacio-tiempo se puede escribir como la métrica minkowskiana mas una pequeña corrección,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (1.70)$$

Ejercicio

Muestre que la condición $g^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\mu$ permite escribir la inversa de la métrica como

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (1.71)$$

donde $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$.

1.4.1. Conexiones

Las conexiones se obtienen a partir del tensor métrico mediante la expresión

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}[\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}]. \quad (1.72)$$

Al utilizar las expresiones (1.70) y (1.71) para el tensor métrico, y considerando únicamente contribuciones a primer orden en $h_{\mu\nu}$, se tiene

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\alpha}[\partial_\mu h_{\nu\alpha} + \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}]. \quad (1.73)$$

1.4.2. Tensor de Riemann

El tensor de Riemann está dado por la expresión

$$R_{\nu\rho\sigma}^\lambda = \partial_\rho\Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \partial_\sigma\Gamma_{\rho\nu}^\lambda + \Gamma_{\rho\alpha}^\lambda\Gamma_{\sigma\nu}^\alpha - \Gamma_{\sigma\alpha}^\lambda\Gamma_{\rho\nu}^\alpha, \quad (1.74)$$

o con todos sus índices covariantes

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\lambda}R_{\nu\rho\sigma}^\lambda = g_{\mu\lambda}\left[\partial_\rho\Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \partial_\sigma\Gamma_{\rho\nu}^\lambda + \Gamma_{\rho\alpha}^\lambda\Gamma_{\sigma\nu}^\alpha - \Gamma_{\sigma\alpha}^\lambda\Gamma_{\rho\nu}^\alpha\right]. \quad (1.75)$$

Ahora bien, la expresión (1.73) permite comprobar que las conexiones son cantidades a primer orden en $h_{\mu\nu}$, por lo que términos con Γ^2 son despreciables. De esta forma, el tensor de Riemann a primer orden en $h_{\mu\nu}$ tiene componentes

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\lambda} \left[\partial_\rho \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \partial_\sigma \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \right]. \quad (1.76)$$

Utilizando (1.73) para las conexiones se tiene

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\lambda} \left[\eta^{\lambda\alpha} \partial_\rho [\partial_\sigma h_{\nu\alpha} + \partial_\nu h_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha h_{\sigma\nu}] - \eta^{\lambda\alpha} \partial_\sigma [\partial_\rho h_{\nu\alpha} + \partial_\nu h_{\rho\alpha} - \partial_\alpha h_{\rho\nu}] \right] \quad (1.77)$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \delta_\mu^\alpha [\partial_\rho \partial_\sigma h_{\nu\alpha} + \partial_\rho \partial_\nu h_{\sigma\alpha} - \partial_\rho \partial_\alpha h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \partial_\rho h_{\nu\alpha} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\rho\alpha} + \partial_\sigma \partial_\alpha h_{\rho\nu}] \quad (1.78)$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \delta_\mu^\alpha [\partial_\rho \partial_\nu h_{\sigma\alpha} - \partial_\rho \partial_\alpha h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\rho\alpha} + \partial_\sigma \partial_\alpha h_{\rho\nu}] \quad (1.79)$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} [\partial_\rho \partial_\nu h_{\sigma\mu} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\rho\mu} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{\rho\nu}]. \quad (1.80)$$

1.4.3. Tensor de Ricci

El tensor de Ricci se obtiene contrayendo el tensor de Riemann,

$$R_{\nu\sigma} = g^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (1.81)$$

Ya que el tensor de Riemann tiene componentes a primer orden en $h_{\mu\nu}$, la expresión para Ricci se reduce a

$$R_{\nu\sigma} = h^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} h^{\mu\rho} [\partial_\rho \partial_\nu h_{\sigma\mu} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\rho\mu} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{\rho\nu}] \quad (1.82)$$

$$R_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} [\partial_\rho \partial_\nu h_\sigma^\rho - \partial^\mu \partial_\mu h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \partial_\nu h_\mu^\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h_\nu^\mu]. \quad (1.83)$$

Definiendo

$$h = h_\mu^\mu \quad (1.84)$$

y el operador D'Alambertiano

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu, \quad (1.85)$$

el tensor de Ricci resulta ser

$$R_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} [\partial_\rho \partial_\nu h_\sigma^\rho + \partial_\sigma \partial_\rho h_\nu^\rho - \partial_\sigma \partial_\nu h - \square h_{\sigma\nu}]. \quad (1.86)$$

1.4.4. Escalar de Curvatura

El escalar de curvatura es la contracción del tensor de Ricci,

$$R = R_\nu^\nu = g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma}. \quad (1.87)$$

A primer orden en $h_{\mu\nu}$ se tiene

$$R = \frac{1}{2} \eta^{\nu\sigma} [\partial_\rho \partial_\nu h_\sigma^\rho + \partial_\sigma \partial_\rho h_\nu^\rho - \partial_\sigma \partial_\nu h - \square h_{\sigma\nu}] \quad (1.88)$$

$$R = \frac{1}{2} [\partial_\rho \partial_\nu h^{\nu\rho} + \partial_\nu \partial_\rho h^{\nu\rho} - \square h - \square h] \quad (1.89)$$

$$R = \partial_\nu \partial_\rho h^{\nu\rho} - \square h. \quad (1.90)$$

1.4.5. Ecuaciones de Campo Linealizadas

Con la aproximación realizada, el tensor de Einstein resulta ser

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.91)$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\partial_\rho \partial_\mu h_\nu^\rho + \partial_\rho \partial_\nu h_\mu^\rho - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}] - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} [\partial_\sigma \partial_\rho h^{\sigma\rho} - \square h] \quad (1.92)$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\partial_\rho \partial_\mu h_\nu^\rho + \partial_\rho \partial_\nu h_\mu^\rho - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \partial_\rho h^{\sigma\rho} + \eta_{\mu\nu} \square h]. \quad (1.93)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein a primer orden en $h_{\mu\nu}$ son

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.94)$$

$$\frac{1}{2} [\partial_\rho \partial_\mu h_\nu^\rho + \partial_\rho \partial_\nu h_\mu^\rho - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \partial_\rho h^{\sigma\rho} + \eta_{\mu\nu} \square h] = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.95)$$

$$\partial_\rho \partial_\mu h_\nu^\rho + \partial_\rho \partial_\nu h_\mu^\rho - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \partial_\rho h^{\sigma\rho} + \eta_{\mu\nu} \square h = 16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.96)$$

Ahora bien, las ecuaciones de campo se pueden escribir de forma diferente tomando (1.94) y contrayendo indices,

$$R - \frac{1}{2} 4R = 8\pi G T \quad (1.97)$$

$$-R = 8\pi G T, \quad (1.98)$$

donde $T = T_\mu^\mu = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$. Reemplazando esta expresión en (1.94) se tiene la ecuación de campo

$$R_{\mu\nu} + 4\pi G g_{\mu\nu} T = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.99)$$

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right]. \quad (1.100)$$

De esta forma se puede escribir la ecuación linealizada como

$$\frac{1}{2} [\partial_\rho \partial_\nu h_\sigma^\rho + \partial_\sigma \partial_\rho h_\nu^\rho - \partial_\sigma \partial_\nu h - \square h_{\sigma\nu}] = 8\pi G \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right] \quad (1.101)$$

$$\partial_\rho \partial_\nu h_\mu^\rho + \partial_\mu \partial_\rho h_\nu^\rho - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} = 16\pi G \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right], \quad (1.102)$$

denominada *ecuación de Pauli-Fierz*.

En el límite de campo débil, independiente del tiempo y bajas velocidades la ecuación de campo se debe reducir a las ecuaciones newtonianas. En este límite la densidad de energía en reposo $\rho = T_{00}$ será más grande que las demás componentes del tensor momento-energía $T_{\mu\nu}$. De esta forma la traza de $T_{\mu\nu}$ se puede escribir a primer orden como $T = g^{00}T_{00}$. Además, para una métrica independiente del tiempo, la componente $(0, 0)$ de la ecuación de Pauli-Fierz se reduce a

$$-\partial^i \partial_i h_{00} = 16\pi G \left[T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right] = 16\pi G \left[T_{00} - \frac{1}{2} T_{00} \right] \quad (1.103)$$

$$\nabla^2 h_{00} = -8\pi G \rho \quad (1.104)$$

donde $\nabla^2 = \partial^i \partial_i$. La ecuación (18) corresponde a la ecuación de Poisson para el campo gravitacional y permite identificar la componente h_{00} del tensor métrico con el potencial gravitacional newtoniano,

$$h_{00} = -2\Phi = \frac{2GM}{r}, \quad (1.105)$$

o en unidades naturales, $G = 1$,

$$h_{00} = \frac{2M}{r}. \quad (1.106)$$

Capítulo 2

Agujero Negro de Schwarzschild,

2.1. La Métrica de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild es, tal vez, la más importante solución de las ecuaciones de campo de Einstein y representa el espacio-tiempo generado por una masa esféricamente simétrica en su exterior. Ya que el espacio-tiempo debe ser esféricamente simétrico se considera un elemento de línea de la forma (1.63), pero las funciones α y β serán reemplazadas por exponenciales,

$$ds^2 = -e^{\alpha(t,r)}dt^2 + e^{\beta(t,r)}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.1)$$

Al reemplazar el tensor métrico correspondiente en las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (2.2)$$

se obtienen cuatro ecuaciones diferenciales que permiten encontrar las funciones $\alpha(t, r)$ y $\beta(t, r)$. De esta forma, las componentes no nulas del tensor de Einstein son

$$G_t^t = e^{-\beta} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{e^\beta}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial r} \right] \quad (2.3)$$

$$G_t^r = \frac{e^{-\beta}}{r} \frac{\partial \beta}{\partial t} = e^{-\beta+\alpha} G_r^t \quad (2.4)$$

$$G_r^r = e^{-\beta} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{e^\beta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right] \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} G_\theta^\theta = G_\varphi^\varphi &= \frac{e^{-\alpha}}{4} \left[\frac{\partial \beta}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \right] \\ &\quad + \frac{e^{-\beta}}{4r} \left[2 \frac{\partial \alpha}{\partial r} + r \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial \beta}{\partial r} \left(2 + r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) + 2r \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ejercicio

Mostrar que si las componentes (2.3) - (2.5) son iguales a cero, entonces la identidad de Bianchi contraída,

$$\nabla_\mu G_\nu^\mu = 0, \quad (2.7)$$

implica que la ecuación (2.6) es cero.

De esta forma, las ecuaciones de Einstein en el vacío resultan ser solamente tres ecuaciones diferenciales independientes, correspondientes a las componentes G_t^t , G_t^r y G_r^r del tensor de Einstein. Estas pueden escribirse como

$$\frac{1}{r^2} - \frac{e^\beta}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial r} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{r^2} - \frac{e^\beta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = 0. \quad (2.10)$$

La última de estas ecuaciones muestra que la función β depende únicamente de la coordenada radial, es decir $\beta = \beta(r)$. De esta forma, la ecuación (2.8) es la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{1}{r^2} - \frac{e^\beta}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{d\beta}{dr} = 0, \quad (2.11)$$

que se puede escribir como

$$e^{-\beta} - r e^{-\beta} \frac{d\beta}{dr} = 1 \quad (2.12)$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{dr} \left(r e^{-\beta} \right) = 1. \quad (2.13)$$

Al solucionar se obtiene

$$r e^{-\beta} = r + C. \quad (2.14)$$

Escogiendo la constante de integración como $C = -2M$ se obtiene (la interpretación de esta constante se dará más adelante),

$$e^\beta = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1}. \quad (2.15)$$

Para obtener la función α se toma la diferencia entre las ecuaciones (2.8) y (2.9), lo que da como resultado

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{d\beta}{dr} = 0, \quad (2.16)$$

es decir

$$\alpha = -\beta + f(t) \quad (2.17)$$

con $f(t)$ una función arbitraria del tiempo. A partir de esta relación se obtiene

$$e^\alpha = e^{-\beta} e^{f(t)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) e^{f(t)} \quad (2.18)$$

y por lo tanto, el elemento de línea toma la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) e^{f(t)} dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.19)$$

Para finalizar, se realiza un re-escalamiento de la coordenada temporal mediante la relación

$$dt' = e^{\frac{f(t)}{2}} dt, \quad (2.20)$$

y con ello, luego de realizar un renombramiento de la variable temporal, se obtiene finalmente el elemento de línea del espacio-tiempo de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.21)$$

donde

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin \theta d\varphi^2 \quad (2.22)$$

es la métrica en la 2-esfera unitaria.

Para interpretar la constante de integración M que aparece en esta métrica se debe considerar el límite Newtoniano de esta teoría. Al tomar el límite de campo débil y bajas velocidades, la ecuación de campo se reduce a la ecuación de Poisson (18) y la componente g_{00} del tensor métrico se relaciona con el potencial gravitacional newtoniano $\Phi = -\frac{Gm}{r}$ de acuerdo con (18). De esta forma se tiene

$$g_{00} \simeq 1 + 2\Phi = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (2.23)$$

es decir que la constante de integración M se identifica con la masa del objeto central.

2.1.1. Vectores de Killing y Cantidad Conservadas

Al observar la métrica de Schwarzschild (2.21) se puede comprobar que el tensor métrico es independiente de las coordenadas t y φ . Por lo tanto, los vectores

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.24)$$

y

$$\zeta = \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.25)$$

son campos vectoriales de Killing.

Para encontrar las cantidades conservadas debido a la existencia de estos campos vectoriales de Killing consideramos una partícula con masa m que se mueve en este espacio-tiempo. De acuerdo con la ecuación (1.50), el 4-momentum asociado con la partícula viene dado por

$$p_\mu = mg_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (2.26)$$

De esta forma, la cantidad conservada asociada con el vector ξ es

$$E = \xi^\mu p_\mu = \xi^t p_t \quad (2.27)$$

$$= mg_{tt} \frac{dt}{d\tau} \quad (2.28)$$

$$= -m \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \quad (2.29)$$

$$= -m\varepsilon, \quad (2.30)$$

donde ε es la energía por unidad de masa, y por ello la cantidad conservada corresponde a la *energía* de la partícula.

Por otro lado, la cantidad conservada asociada con el vector ζ es

$$L = \zeta^\mu p_\mu = \zeta^\varphi p_\varphi \quad (2.31)$$

$$= mg_{\varphi\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (2.32)$$

$$= mr^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (2.33)$$

$$= ml, \quad (2.34)$$

donde la cantidad l tiene unidades de longitud al cuadrado por radian sobre tiempo. De esta forma, la cantidad conservada esta vez es el *momento angular* de la partícula.

2.1.2. Características de la Solución de Schwarzschild

Al tomar el límite cuando $r \rightarrow \infty$ en la métrica de Schwarzschild escrita en la forma (2.21) es inmediato obtener la métrica del espacio-tiempo plano de la relatividad especial en coordenadas esféricas,

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (2.35)$$

Esto muestra que el espacio-tiempo de Schwarzschild es *asintóticamente plano*. Ahora bien, es interesante notar que en la deducción de esta métrica solamente se supone que el espacio-tiempo es esféricamente simétrico. Con ello es posible concluir que todo espacio-tiempo vacío con simetría esférica es asintóticamente plano.

Por otro lado, ya se discutió que $\frac{\partial}{\partial t}$ es un campo vectorial de Killing. En la región $r > 2M$ este vector es como-de-tiempo y además es ortogonal a la familia de hipersuperficies $t = \text{constante}$. Por ello, y según la definición dada en el capítulo anterior, se puede decir que la solución de Schwarzschild es *estaciónaria*. Sin embargo, el elemento de línea (2.21) es invariante bajo inversión temporal (nótese que no existen términos cruzados de la forma $dtdr$ o $drdt$) y por ello se dice que esta solución es *estática*.

Por último, para dar una interpretación física de la constante de integración obtenida en esta solución, es necesario considerar el límite Newtoniano. En la teoría de Newton, una partícula puntual con masa M ubicada en el origen de un sistema de coordenadas genera un potencial gravitacional de la forma

$$\phi = -\frac{GM}{r}. \quad (2.36)$$

Al realizar una expansión del tensor métrico (límite de campo débil), se obtiene, para la componente temporal en términos del potencial Newtoniano,

$$g_{tt} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2} + O\left(\frac{v}{c}\right)\right). \quad (2.37)$$

De esta forma, el límite de campo débil da como resultado que la forma de la componente temporal de la métrica debe ser

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \quad (2.38)$$

o en unidades naturales ($G = c = 1$),

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (2.39)$$

Así, la constante de integración M se puede interpretar como la masa del objeto central que genera el espacio-tiempo de Schwarzschild.

2.1.3. Estructura Causal

Las geodésicas radiales nulas sirven para visualizar la estructura causal del espacio-tiempo de Schwarzschild. Si tomamos $ds = 0$ y $d\Omega = 0$, se tiene

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (2.40)$$

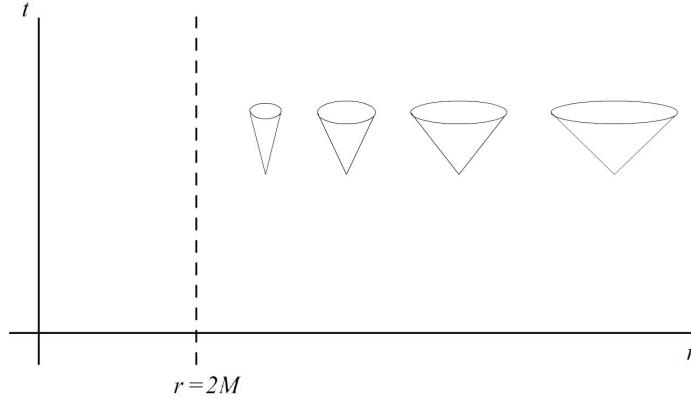


Figura 2.1: Conos de luz lejos y cerca de la superficie $r = 2M$ de Schwarzschild.

lo cual corresponde a la inclinación de los conos de luz. Como es de esperar, para valores de r muy grandes los conos de luz se encuentran a 45° como en el espacio-tiempo de Minkowski (para $r \rightarrow \infty$, $\frac{dt}{dr} = \pm 1$). Por otro lado, al acercarnos a la superficie $r = 2M$, los conos de luz tienen una pendiente cada vez más grande (para $r \rightarrow 2M$, $\frac{dt}{dr} = \pm\infty$). De esta forma, los conos de luz se cierran al acercarnos a $r = 2M$, tal como se muestra en la Figura 2.1.

2.1.4. Singularidades

Como se mostró en la sección anterior, los conos de luz se cierran al acercarse a la superficie $r = 2M$. Esto muestra que las coordenadas elegidas para describir la solución de Schwarzschild cubren solamente una porción de la variedad. Así, por ejemplo, es claro que las coordenadas (t, r, θ, φ) no cubren los ejes $\theta = 0$ ni $\theta = \pi$ ya que el elemento de línea se vuelve degenerado allí. Ahora bien, esta degeneración se puede remover si se utilizan coordenadas cartesianas definidas de la forma

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (2.41)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (2.42)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (2.43)$$

Por otro lado, el elemento de línea (2.21) presenta otra deficiencia de las coordenadas (t, r, θ, φ) en el valor $r = 2M$. Este radio se conoce como el *radio de Schwarzschild* y como se observa de (2.21), este define una hipersuperficie en la cual la métrica diverge. Por esta razón, este punto se conoce como una *singularidad* de la métrica. Ahora bien, como se mostrará en la siguiente sección, la divergencia de la métrica puede removese al realizar un cambio de coordenadas y por ello a este tipo de singularidades se les denomina *removibles* o simplemente *singularidades*

coordenadas.

Por otro lado, el punto $r = 0$ es también una singularidad de la métrica (2.21) ya que el elemento de línea diverge. Esta singularidad no puede removese con cambios de coordenadas y por ello se le denomina *intrínseca, física, real* o simplemente *singularidad esencial*.

El hecho de no poder removese con un cambio de coordenadas se puede evidenciar al calcular algunos escalares de curvatura. En este caso el escalar de Ricci, $R = R^\mu_\mu$, es idénticamente igual a cero y por ello no permite ninguna conclusión. Sin embargo, el escalar de Kretschman (contracción de Riemann con el mismo), resulta ser

$$K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6}. \quad (2.44)$$

Nótese que este escalar no presenta ningún problema en $r = 2M$, mostrando que esta es una singularidad coordinada; mientras que para $r = 0$ diverge, por lo cual ésta es una singularidad esencial.

Para la descripción de objetos como estrellas, la solución de Schwarzschild corresponde al espacio-tiempo exterior del cuerpo esférico con radio $R > 2M$. De esta forma, la métrica en la región interior de la estrella, $r < R$, corresponde a una solución de las ecuaciones de campo de Einstein con alguna distribución de materia diferente de vacío y que se une suavemente con la solución de Schwarzschild en $r = R$. Por esta razón, la supercie $r = 2M$ y la singularidad $r = 0$ no son consideradas en la descripción.

Sin embargo, cuando se considera el proceso de colapso gravitacional y la masa del objeto se concentra en $r = 0$, la superficie $r = 2M$ aparece como una división de la variedad en dos componentes. La región I, donde $2M < r < \infty$, las coordenadas t y r tienen un carácter temporal y espacial respectivamente mientras que en la región II, donde $0 < r < 2M$, las coordenadas t y r invierten su carácter. En el estudio de los agujeros negros, la hipersuperficie $r = 2M$ posee características muy importantes y definirá la frontera de estos objetos.

2.2. Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Si se consideran las geodésicas radiales nulas para el espacio-tiempo de Schwarzschild ($ds = 0, d\Omega = 0$), estas quedan definidas por la condición

$$dt^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2}. \quad (2.45)$$

Ahora bien, si se define una nueva coordenada radial

$$dr^* = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2}, \quad (2.46)$$

las geodésicas radiales nulas estarán definidas por la relación

$$d(t \pm r^*) = 0. \quad (2.47)$$

La nueva coordenada radial r^* es conocida como *coordenada de Regge-Wheeler*, y realizando la integración se puede escribir como

$$r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r - 2M}{2M} \right|. \quad (2.48)$$

Notese que debido a que la coordenada radial r toma valores en el rango $2M < r < \infty$, la coordenada de Regge-Wheeler tomará valores dentro del rango $-\infty < r^* < \infty$.

2.2.1. Coordenadas de E-F entrantes

Debido a la definición de las geodésicas radiales nulas mediante la ecuación (2.47), es natural definir una nueva coordenada mediante

$$v = t + r^*, \quad (2.49)$$

la cual tomará valores en el rango $-\infty < v < \infty$. Al escribir el elemento de línea para la métrica de Schwarzschild en las *coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes* (v, r, θ, φ) se obtiene

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.50)$$

Es importante notar que bajo este cambio de coordenadas, la superficie $r = 2M$ no es singular y además el inverso del tensor métrico existe para este punto, ya que el determinante de la métrica no se anula en él,

$$g = -r^4 \sin^2 \theta. \quad (2.51)$$

Por esta razón, se puede concluir que las coordenadas originales (t, r, θ, φ) no son buenas para cubrir toda la variedad, mientras que las nuevas coordenadas (v, r, θ, φ) permiten observar que al disminuir r a lo largo de una trayectoria radial nula no existe ningun problema cruzando el punto $r = 2M$, por lo que esta región puede ser incluida dentro del espacio-tiempo. Se dice entonces que es posible *continuar analíticamente* la coordenada radial para tomar valores en todo el rango $r > 0$.

Estructura Causal

Para comprender la estructura causal en las coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes, consideramos las geodésicas entrantes nulas para obtener la pendiente de los conos de luz,

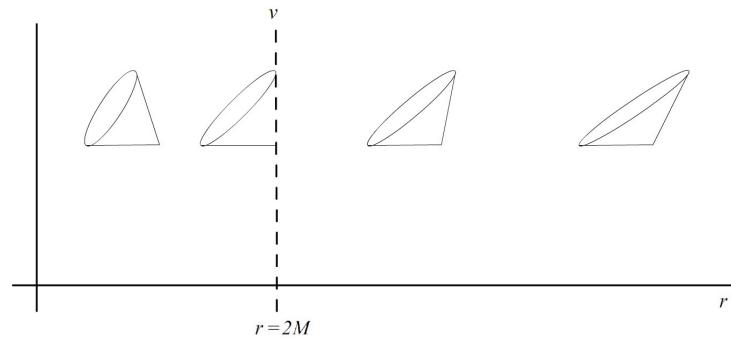


Figura 2.2: Conos de luz lejos y cerca de la superficie $r = 2M$ en coordenadas de

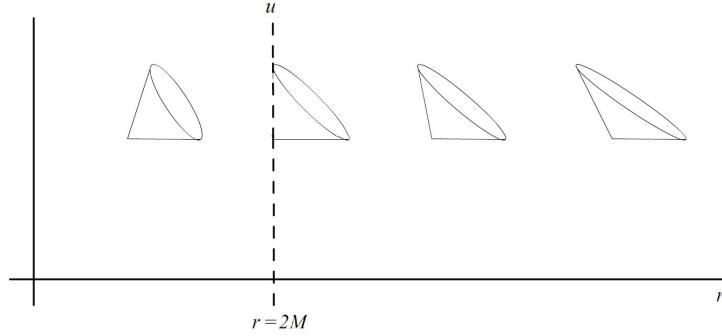


Figura 2.3: Conos de luz lejos y cerca de la superficie $r = 2M$ en coordenadas de Eddington-Finkelstein salientes.

2.2.2. Coordenadas de E-F salientes

La existencia del horizonte de eventos deja ver una posible simetría temporal en la solución de Schwarzschild ya que trayectorias dirigidas al futuro pueden cruzar la superficie $r = 2M$, mientras que las dirigidas al pasado no pueden. Por esta razón utilizaremos de nuevo la definición de las geodesicas radiales nulas (2.47), para definir otra coordenada nula de interés

$$u = t - r^*, \quad (2.55)$$

la cual también toma valores en el rango $-\infty < u < \infty$. El elemento de línea para la métrica de Schwarzschild en las *coordenadas de Eddington-Finkelstein salientes* (u, r, θ, φ) es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.56)$$

De nuevo, la superficie $r = 2M$ no es singular y el inverso del tensor métrico existe para este punto ya que el determinante de la métrica no se anula. Por esta razón, se puede realizar otra vez una continuación analítica para todo el rango $r > 0$. Sin embargo, en esta ocasión la región interna $r < 2M$ no es la misma que la analizada anteriormente. Para comprobar esto examinemos su estructura causal.

Estructura Causal

Para las coordenadas de Eddington-Finkelstein salientes, tenemos que las geodésicas nulas satisfacen

$$\frac{du}{dr} = \begin{cases} 0 \\ -\frac{2}{1-\frac{2M}{r}} \end{cases}. \quad (2.57)$$

En estas coordenadas, los conos de luz se inclinan hacia afuera, tal como se muestra en la Figura 2.3. Es decir que en este caso se puede cruzar el horizonte, pero solamente siguiendo trayectorias dirigidas al pasado, por lo que ninguna trayectoria como-de-luz o como-de-tiempo dirigida al futuro puede alcanzar $r < 2M$ comenzando en $r \geq 2M$. Para $r \leq 2M$ se tiene ahora

$$2dudr = -ds^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.58)$$

Si se consideran trayectorias como-de-luz o como-de-tiempo se tiene $ds^2 \leq 0$, es decir que

$$2dudr \geq 0. \quad (2.59)$$

Debido a la definición de la coordenada u , las trayectorias dirigidas al futuro tienen $du > 0$, y por lo tanto para satisfacer (2.59), debe tenerse $dr \geq 0$. Esto quiere decir que cualquier partícula en esta región $r < 2M$ inevitablemente se dirige a la región exterior. A este tipo de objeto se le denomina *agujero blanco*, y puede ser considerado como el inverso temporal del agujero negro. Los dos tipos de solución están permitidos por la Relatividad General, ya que esta teoría es invariantes bajo inversión temporal. Sin embargo, la existencia de un agujero blanco necesita de condiciones iniciales muy especiales y poco probables, por lo que su existencia en la naturaleza tiene una probabilidad muy baja.

Nótese que de las definiciones de las coordenadas de Eddington-Finkelstein, al mantener v constante y disminuir r , la coordenada temporal debe crecer ($t \rightarrow \infty$). Mientras que al mantener u constante y disminuir r , la coordenada temporal debe disminuir ($t \rightarrow -\infty$). Es decir que con estos dos cambios de coordenadas hemos extendido la variedad espacio-temporal en dos direcciones: hacia el futuro y hacia el pasado.

2.3. Coordenadas de Kruskal

Ya que nuestra región inicial $r > 2M$ se cubre tanto con las coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes como salientes, podemos escribir la métrica de Schwarzschild en las coordenadas (u, v, θ, φ) ,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dvdu + r^2 d\Omega^2 \quad (2.60)$$

donde r está definido implícitamente mediante

$$\frac{1}{2}(v - u) = r^* = r + 2M \ln \left| \frac{2M - r}{2M} \right|. \quad (2.61)$$

En este caso, la superficie $r = 2M$ esta de nuevo a una distancia "infinita", ya sea en $v = -\infty$ o en $u = \infty$. Por esta razón se realizará un cambio de coordenadas que traiga esta superficie a una distancia finita. Uno de los posibles cambios son las llamadas *coordenadas de Kruskal*,

$$V = e^{v/4M} \quad (2.62)$$

$$U = -e^{-u/4M} \quad (2.63)$$

o en términos de nuestras coordenadas originales,

$$V = \left[\frac{r - 2M}{2M} \right]^{1/2} e^{(r+t)/4M} \quad (2.64)$$

$$U = \left[\frac{r - 2M}{2M} \right]^{1/2} e^{(r-t)/4M}. \quad (2.65)$$

Ejercicio

Mostrar que en el sistema de coordenadas (V, U, θ, φ) el elemento de línea de Schwarzschild es

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dV dU + r^2 d\Omega^2 \quad (2.66)$$

donde r está definido implícitamente por

$$UV = -\left[\frac{r - 2M}{2M} \right] e^{r/2M}. \quad (2.67)$$

Debido a la definición de las coordenadas de Kruskal, la métrica inicial para la cual $r > 2M$, hace que el rango de las nuevas coordenadas sea $U < 0$ y $V > 0$. Como se puede observar de (2.66), no existe ningún problema con el tensor métrico en $r = 2M$, y por lo tanto podemos extender analíticamente la variedad para incluir las regiones $U > 0$ y $V < 0$. De esta forma, es posible realizar un diagrama de este espacio-tiempo y ya que U y V son coordenadas nulas (geodésicas radiales nulas entrantes o salientes) es conveniente dibujarlas a 45° .

Utilizando la ecuación (2.67) se puede observar que las curvas con r constante corresponden a las hipérbolas $UV = \text{constante}$, la superficie $r = 2M$ corresponde al conjunto $UV = 0$, es decir $\{U = 0\} \cup \{V = 0\}$, mientras que la singularidad $r = 0$ corresponde a las hipérbolas $UV = 1$.

En el *diagrama de Kruskal* de la Figura 2.4 se han suprimido las coordenadas θ, φ y por lo tanto, cada punto es en realidad una 2-esfera. Como se puede observar, este diagrama posee cuatro regiones. La región I corresponde a la variedad de Schwarzschild inicial ($r > 2M$), ya que corresponde a $U < 0$ y $V > 0$. La región II se adiciona al realizar la continuación analítica a valores de $U > 0$ y corresponde a seguir las trayectorias nulas dirigidas al futuro, por lo que esta cubierta por las coordenadas de E-F entrantes (v, r, θ, φ). por lo que es el interior de agujero negro. Nótese que una vez que se entra en la región II es imposible volver a la región I y el punto de no retorno, $U = 0$ ($r = 2M$), se denomina *horizonte de eventos futuro*. Además, se

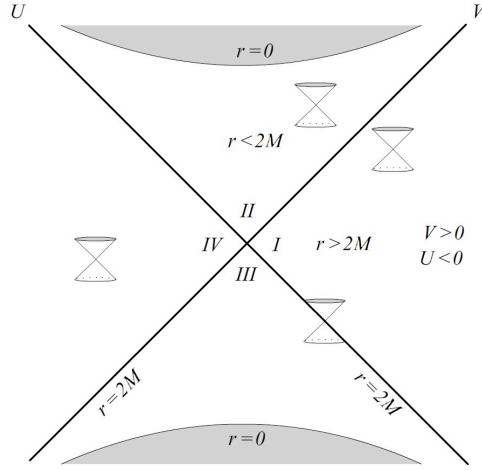
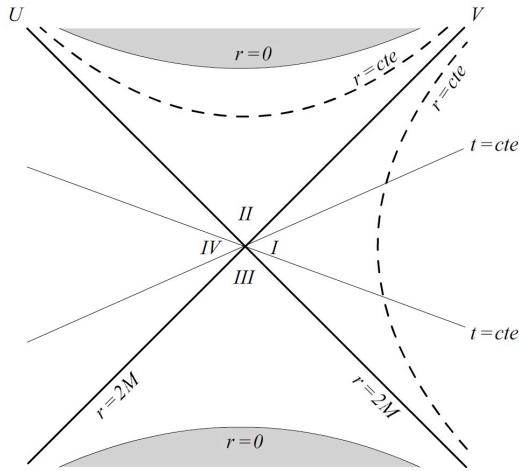


Figura 2.4: Diagrama de Kruskal.

Figura 2.5: Trayectorias con $r = \text{cte}$ y $t = \text{cte}$ en el diagrama de Kruskal.

puede observar que cualquier trayectoria como-de-tiempo dirigida hacia el futuro que entre en esta región, termina chocando con la singularidad $r = 0$.

Por otro lado, en el diagrama de Kruskal aparecen dos regiones adicionales al realizar la continuación analítica a valores de $V < 0$. La región III corresponde al inverso temporal de la región II y es el denominado agujero blanco, ya que como se puede observar, cualquier objeto puede escapar de esta región a nuestra región I, pero nosotros nunca podremos llegar allí. Ya que se obtiene al seguir las trayectorias nulas dirigidas al pasado, esta región está cubierta por las coordenadas de E-F salientes (u, r, θ, φ) , y en su interior aparece una singularidad ($r = 0$) en el pasado, de la cual todo parece provenir.

Por último, la región IV está desconectada causalmente de I y corresponde a su inverso temporal. Al igual que I, la región IV es asintóticamente plana y está cubierta por las coordenadas

de E-F salientes. La superficie $V = 0$ se denomina *horizonte de eventos pasado* y es los que nos separa del interior del agujero blanco.

La variedad de Kruskal es simétrica temporalmente, por lo que representa lo que llamariamos un *agujero negro eterno*, es decir un agujero que ha existido siempre y existirá para siempre. Sabemos que en la realidad, un agujero negro sería creado en un proceso de colapso gravitacional, y por ello solamente las regiones I y II tendrán sentido físico. Sin embargo es interesante analizar lo que sucede en el agujero negro eterno, ya que sus propiedades de simetría temporal le dan características muy interesantes. Por ejemplo, de las transformaciones (2.64) y (2.65) se tiene

$$\frac{V}{U} = e^{-t/2M}, \quad (2.68)$$

la cual permite definir las hipersuperficies de $t = \text{constante}$, las cuales corresponden a líneas rectas como se puede observar en la Figura 2.5. Estas hipersuperficies permiten observar que la variedad de Kruskal posee la isometría $(U, V) \rightarrow (-U, -V)$, es decir que la región IV corresponde al inverso temporal de la región I. Esta isometría posee un *punto fijo*, o en este caso, una *hipersuperficie fija* dada por $\{U = 0\} \cup \{V = 0\}$, es decir la hipersuperficie $r = 2M$.

El diagrama de Kruskal permite observar que se han adicionado por continuación analítica tres regiones a la región original descrita por la métrica de Schwarzschild. Ya que no es posible adicionar más regiones, se dice que Kruskal es la *extensión analítica maximal* de la solución de Schwarzschild.

Las coordenadas U y V de Kruskal son coordenadas nulas y la descripción de la variedad se puede realizar fácilmente, pero en algunas ocasiones es más conveniente trabajar con un sistema de coordenadas en las cuales una de ellas sea como-de-tiempo y las demás sean como-de-espacio. Por ello definiremos

$$T = \frac{1}{2}(V - U) \quad (2.69)$$

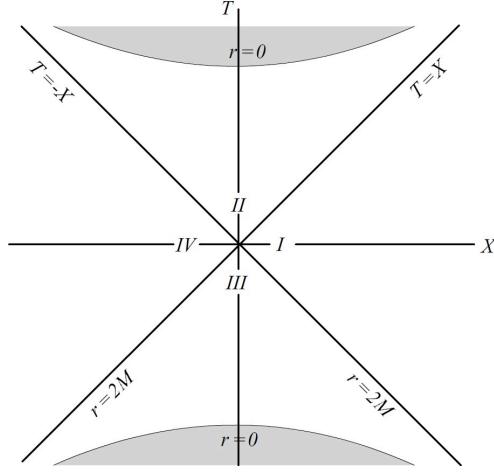
$$X = \frac{1}{2}(V + U), \quad (2.70)$$

o en términos de las coordenadas originales,

$$T = \left[\frac{r - 2M}{2M} \right]^{1/2} e^{r/4M} \cosh \left(\frac{t}{4M} \right) \quad (2.71)$$

$$X = \left[\frac{r - 2M}{2M} \right]^{1/2} e^{r/4M} \sinh \left(\frac{t}{4M} \right). \quad (2.72)$$

En las coordenadas (T, X, θ, φ) el elemento de línea es

Figura 2.6: Diagrama de Kruskal en coordenadas T, X .

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} [-dT^2 + dX^2] + r^2 d\Omega^2, \quad (2.73)$$

donde r está definido implícitamente por

$$X^2 - T^2 = \left[\frac{r - 2M}{2M} \right] e^{r/2M}. \quad (2.74)$$

En estas coordenadas, las curvas radiales nulas están dadas por la relación

$$T = \pm X + cte, \quad (2.75)$$

mientras que la superficie $r = 2M$ corresponde a

$$T = \pm X. \quad (2.76)$$

Ahora bien, las superficies de r constante corresponden a las hiperbolas

$$X^2 - T^2 = cte, \quad (2.77)$$

mientras que las superficies con t constante corresponden a líneas rectas,

$$\frac{X}{T} = \tanh \left(\frac{t}{4M} \right). \quad (2.78)$$

2.3.1. Vector de Killing como-de-tiempo en la Variedad de Kruskal

Del análisis de la variedad de Schwarzschild concluimos que $\frac{\partial}{\partial t}$ es un vector de Killing debido a la simetría de la métrica bajo translaciones temporales. Si ahora consideramos la variedad de Kruskal y una translación de la forma

$$t \longrightarrow t + k, \quad (2.79)$$

donde k es una constante, las coordenadas U y V transformaran de acuerdo con

$$U \longrightarrow U e^{-k/4M} \quad (2.80)$$

$$V \longrightarrow V e^{k/4M}. \quad (2.81)$$

Ejercicio

Mostrar que la métrica de Kruskal es invariante bajo esta translación temporal.

La versión infinitesimal de la translación temporal corresponde a

$$\delta U \longrightarrow -\frac{k}{4M}U \quad (2.82)$$

$$\delta V \longrightarrow \frac{k}{4M}V, \quad (2.83)$$

la cual puede verse como una transformación generada por el vector de Killing

$$\xi = \frac{1}{4M} \left[V \frac{\partial}{\partial V} - U \frac{\partial}{\partial U} \right]. \quad (2.84)$$

Ejercicio

Mostrar que la norma del vector de Killing ξ es

$$\xi^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right). \quad (2.85)$$

El valor de ξ^2 nos muestra queel vector ξ es como-de-tiempo en las regiones I y IV, como-de-espacio en las regiones II y III y es un vector nulo en la hipersuperficie $r = 2M$, es decir en el conjunto $\{U = 0\} \cup \{V = 0\}$. Además, se puede observar que $\{U = 0\}$ y $\{V = 0\}$ son conjuntos fijos de este vector de Killing, mientras que la 2-esfera $\{U = V = 0\}$ es un punto fijo denominado el *eje de Boyer-Kruskal*.

Por otro lado, en $\{U = 0\}$ el vector de Killing se puede expresar como

$$\xi = \frac{\partial}{\partial v}, \quad (2.86)$$

mientras que en $\{V = 0\}$ se expresa como

$$\xi = \frac{\partial}{\partial u}. \quad (2.87)$$

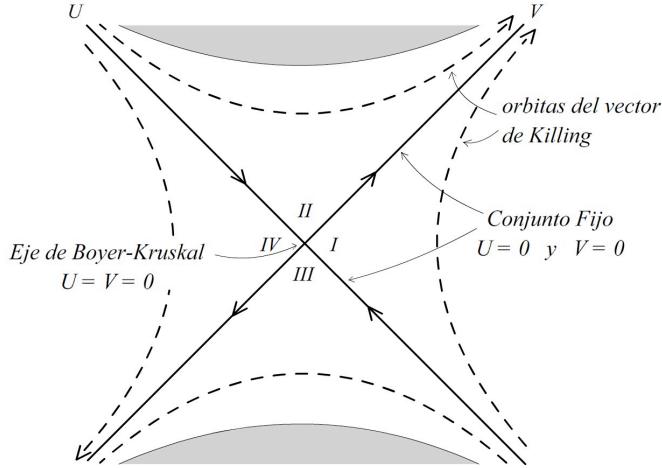


Figura 2.7: Diagrama de Kruskal y vectores de Killing

Esto implica que v es un parámetro de grupo natural para el conjunto $\{U = 0\}$ mientras que u es el parámetro natural para $\{V = 0\}$. En la Figura 2.7 podemos ubicar cada una de estas características del campo vectorial de Killing.

2.4. Coordenadas Isotrópicas

Se introducirá ahora un nuevo sistema de coordenadas de tal forma que las hipersuperficies de $t = \text{constante}$ sean lo más parecidas posible al espacio tridimensional Euclídeo. Para ello se considera una nueva coordenada radial ρ tal que el elemento de línea se convierta en

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \omega^2(\rho) [d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2]. \quad (2.88)$$

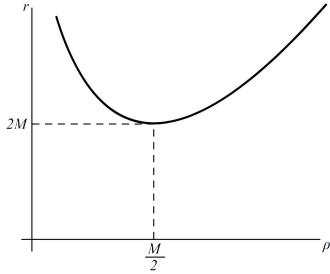
Nótese que la métrica tridimensional $d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2$ corresponde al espacio Euclídeo en coordenadas esféricas. Al comparar este elemento de línea con la ecuación (2.21), el coeficiente de la parte angular permite concluir que la coordenada ρ debe satisfacer

$$\omega^2(\rho) \rho^2 = r^2, \quad (2.89)$$

mientras que al igualar los dos elementos radiales se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}} &= \pm \omega d\rho = \pm \frac{r}{\rho} d\rho \\ \frac{dr}{(r^2 - 2Mr)^{1/2}} &= \pm \frac{d\rho}{\rho}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Si se exige que $\rho \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \infty$ se toma el signo $+$ en esta relación, y al integrar se obtiene finalmente

Figura 2.8: Relación entre las coordenadas radiales r y ρ .

$$r = \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^2 \rho. \quad (2.91)$$

Nótese que la coordenada ρ cubre las regiones I y IV de la variedad de Kruskal (i.e. las regiones con $r > 2M$).

Ejercicio

Mostrar que en el sistema de *coordenadas isotrópicas* $(t, \rho, \theta, \varphi)$ el elemento de línea de Schwarzschild es

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{M}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^4 [d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2]. \quad (2.92)$$

Notese que en coordenadas isotrópicas, las hipersuperficies de $t = \text{constante}$ son conformemente planas como se exigió inicialmente, ya que la parte espacial

$$d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2 \quad (2.93)$$

corresponde a la métrica usual del espacio tridimensional plano en coordenadas esféricas. Sin embargo, en este caso para cada uno de los valores de la coordenada radial r se tienen dos valores para la coordenada ρ , tal como puede observarse de la ecuación (2.91) y en la Figura 2.8.

La ecuación (2.91) permite comprobar además que los dos valores de ρ correspondientes a un valor dado de r se encuentran relacionados mediante la isometría

$$\rho \longrightarrow \frac{M^2}{4\rho}, \quad (2.94)$$

la cual tiene un punto fijo en $\rho = \frac{M}{2}$, el cual corresponde, precisamente, a la 2-esfera de radio $r = 2M$. Como se observa de la Figura 2.9, esta isometría relaciona las regiones I y IV, y por ello

corresponde en realidad a la isometría $(U, V) \rightarrow (-U, -V)$ de la variedad de Kruskal discutida anteriormente.

En coordenadas cartesianas, el elemento de línea se convierte en

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{M}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^4 [dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (2.95)$$

con

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^2. \quad (2.96)$$

Ejercicio

Mostrar que en el sistema de *coordenadas isotrópicas cartesianas* (t, x, y, z) el espacio-tiempo de Schwarzschild admite los vectores de Killing

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.97)$$

$$\zeta_1 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.98)$$

$$\zeta_2 = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.99)$$

$$\zeta_3 = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.100)$$

Encuentre todos los comutadores entre estos vectores. Ayuda: Utilize la simetría entre las coordenadas x, y y z .

2.4.1. Agujeros de Gusano

De la Figura 2.9 puede observarse que al acercarse a $\rho = 2M$ desde cualquiera de las regiones I o IV a lo largo de hipersuperficies $t = \text{constante}$ se obtienen 2-esferas de radios que disminuyen hasta $r = 2M$ ($\rho = \frac{M}{2}$), pero no menores. Por ello $\rho = \frac{M}{2}$ es el radio de la *2-esfera minimal* la cual puede visualizarse como la garganta de un *puente de Einstein-Rosen* o *agujero de gusano* que une dos regiones asintóticamente planas (regiones I y IV).

Si se imagina una serie de cortes de la variedad de Kruskal en superficies como-de-espacio con $T = \text{constante}$ se obtienen las imágenes de la Figura 2.10. Al dibujar cada una de estos cortes y recuperando una de las coordenadas angulares se obtiene la secuencia temporal que se observa en la Figura 2.11. Esto nos muestra que la variedad de Kruskal representa dos regiones asintóticamente planas (I y IV) que se acercan una a la otra, se unen mediante un agujero de gusano por un instante y luego se separan. Sin embargo, este proceso se lleva a cabo tan rápidamente que ningún observador como-de-tiempo alcanza a cruzar de una región asintóticamente plana a la otra (recuerde que las regiones I y IV están desconectadas causalmente).

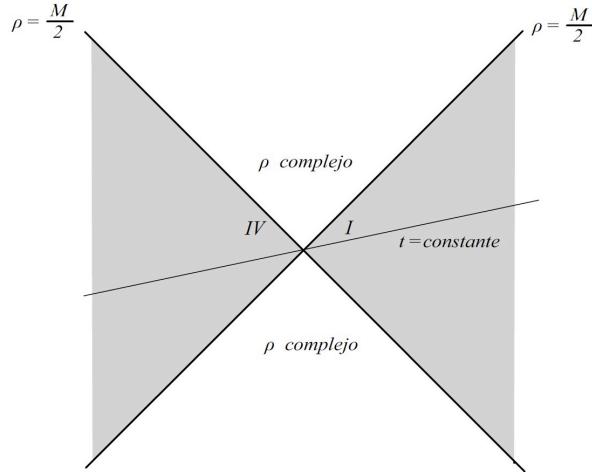


Figura 2.9: Región cubierta por las coordenadas isotrópicas $(t, \rho, \theta, \varphi)$.

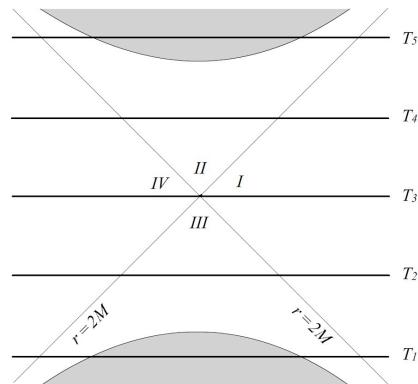


Figura 2.10: Cortes con T constante en el diagrama de Kruskal.

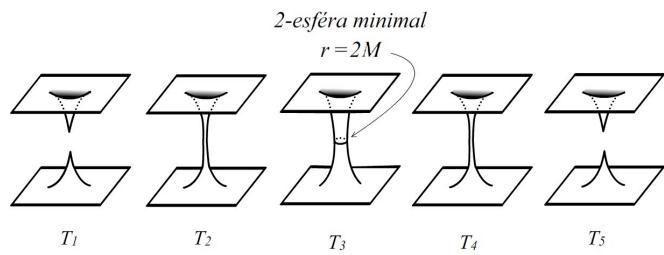


Figura 2.11: Cortes con T constante mostrando la dinámica del agujero de gusano.

2.5. Espacio-Tiempo de Rindler

Definiremos ahora una nueva coordenada espacial x mediante

$$r - 2M = \frac{x^2}{8M}. \quad (2.101)$$

Por lo tanto podemos hacer

$$dr^2 = \left(\frac{x}{4M}\right)^2 dx^2 \quad (2.102)$$

y cerca del horizonte de eventos ($r = 2M$; $x = 0$) tenemos

$$1 - \frac{2M}{r} = \frac{\left(\frac{x}{4M}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{4M}\right)^2} \approx \left(\frac{x}{4M}\right)^2. \quad (2.103)$$

De esta manera la métrica de Schwarzschild cerca del horizonte de eventos se puede escribir como

$$ds^2 \approx -\left(\frac{x}{4M}\right)^2 dt^2 + dx^2 + (2M)^2 d\Omega^2. \quad (2.104)$$

Nótese que el último término a la derecha corresponde a la métrica de una 2-esfera de radio $2M$, mientras que los dos primeros términos corresponden al *Espacio de Rindler bidimensional*,

$$ds_R^2 = -\left(\frac{x}{4M}\right)^2 dt^2 + dx^2. \quad (2.105)$$

Esta métrica posee una singularidad coordenada en $x = 0$, y por ello esta definida únicamente para valores $x > 0$. Si se introduce un conjunto de coordenadas similares a las de Kruskal,

$$V' = xe^{xt} \quad (2.106)$$

$$U' = -xe^{-xt}, \quad (2.107)$$

la métrica de Rindler se convierte en

$$ds_R^2 = -dV'dU', \quad (2.108)$$

donde los rangos de las nuevas coordenadas son

$$V' > 0 \quad (2.109)$$

$$U' < 0. \quad (2.110)$$

Es decir que la región cubierta por la métrica de Rindler corresponde a la región I de Kruskal (region sombreada en la Figura 2.12).

Si definimos una nueva coordenada temporal T' y una espacial X' mediante

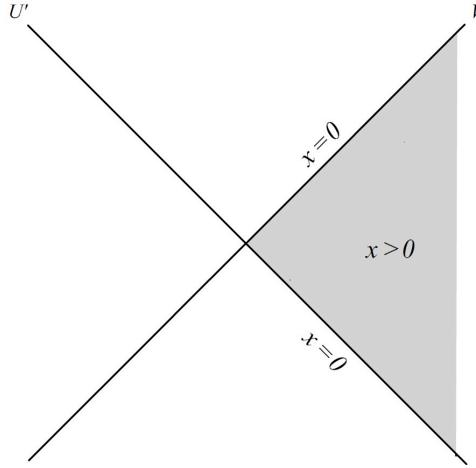


Figura 2.12: Región Cubierta por las coordenadas de Rindler con $x > 0$.

$$V' = T' + X' \quad (2.111)$$

$$U' = T' - X', \quad (2.112)$$

la métrica de Rindler se convierte en

$$ds_R^2 = -dT'^2 + dX'^2. \quad (2.113)$$

Esto muestra que el espacio-tiempo de Rindler es simplemente el espacio de Minkowski en unas coordenadas inusuales. De la forma del elemento de línea (2.105) se observa que la métrica no depende explícitamente de la coordenada t , por lo que el vector $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ es un vector de Killing.

Ejercicio

Mostrar que en el sistema de coordenadas (V', U') , el vector de Killing $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ es

$$\xi = \frac{1}{4M} \left(V' \frac{\partial}{\partial V'} - U' \frac{\partial}{\partial U'} \right) \quad (2.114)$$

y que su magnitud es

$$\xi^2 = -\kappa^2 x^2. \quad (2.115)$$

Las características similares entre Rindler y Schwarzschild nos permitirán más adelantes obtener propiedades que comparten ambas variedades.

2.6. Diagramas de Carter-Penrose

Como se ha observado, las coordenadas de Kruskal permiten analizar una gran cantidad de características de la solución de Schwarzschild. Con esta transformación se han agregado tres regiones a la región que cubre la métrica original. Sin embargo, el *infinito* sigue estando fuera de la variedad. Por ello, es útil realizar una transformación que traiga toda la variedad a una región compacta de tal forma que podamos verla completamente, adicionando los puntos del infinito. A este tipo de transformación se le denomina *compactificación conforme* y matemáticamente corresponde a realizar

$$ds^2 \longrightarrow d\tilde{s}^2 = \omega^2(x^\mu) ds^2, \quad (2.116)$$

donde la función $\omega(x^\mu) \neq 0$ se escoge de tal forma que todos los puntos del *infinito* se ubiquen a una distancia finita en la nueva métrica. Esta condición implica que ω debe satisfacer

$$\omega \longrightarrow 0 \quad (2.117)$$

cuando $x^i \longrightarrow \infty$ (infinito espacial) o cuando $x^0 = t \longrightarrow \infty$ (infinito temporal). Para comprender como funciona esta técnica tomaremos como primer ejemplo la variedad de Minkowski y la de Rindler, para luego realizar la compactificación de Kruskal.

2.6.1. Espacio-Tiempo de Minkowski

El espacio de Minkowski en coordenadas polares se puede escribir como

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.118)$$

donde las coordenadas t y r tienen los rangos

$$-\infty < t < \infty \quad (2.119)$$

$$0 \leq r < \infty. \quad (2.120)$$

Es importante notar que la singularidad en $r = 0$ es una singularidad coordinada como puede comprobarse al pasar a otro sistema (por ejemplo a coordenadas cartesianas). Si realizamos un cambio a coordenadas nulas,

$$v = t + r \quad (2.121)$$

$$u = t - r, \quad (2.122)$$

el elemento de línea se convierte en

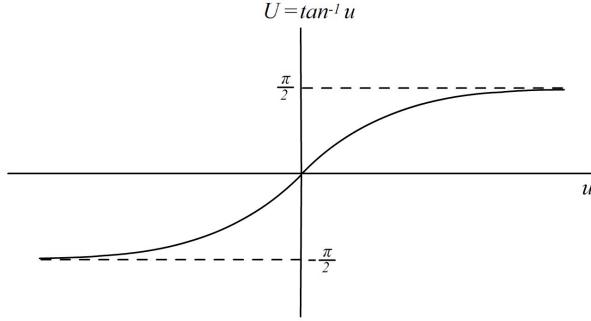


Figura 2.13: Relación entre las variables utilizadas para la compactificación conforme.

$$ds^2 = -dvdu + \frac{(u-v)^2}{4}d\Omega^2. \quad (2.123)$$

Los rangos de las nuevas coordenadas son

$$-\infty < v < \infty \quad (2.124)$$

$$-\infty < u < \infty, \quad (2.125)$$

y además $u \leq v$, ya que $r = \frac{1}{2}(v-u) \geq 0$.

El siguiente paso para realizar la compactificación conforme es un cambio de coordenadas que traiga el infinito a un valor finito en las nuevas coordenadas. La elección usual para este cambio es

$$v = \tan V \quad (2.126)$$

$$u = \tan U, \quad (2.127)$$

ya que estas funciones hacen que los infinitos de las coordenadas u, v queden ahora en los valores $\pm\frac{\pi}{2}$ de las nuevas coordenadas U, V , tal como se muestra en la Figura 2.13.

De esta forma, los rangos de las nuevas coordenadas serán

$$-\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2} \quad (2.128)$$

$$-\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2}, \quad (2.129)$$

sujeto a la condición $U \leq V$.

Ejercicio

Realizar la transformación para mostrar que el elemento de línea en coordenadas (U, V, θ, φ) se puede escribir como

$$ds^2 = \frac{1}{(2 \cos V \cos U)^2} [-4dVdU + \sin^2(V - U) d\Omega^2]. \quad (2.130)$$

Si escogemos la función

$$\omega = 2 \cos V \cos U, \quad (2.131)$$

se puede comprobar que

$$\omega \longrightarrow 0 \quad (2.132)$$

cuando $|V| \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ o cuando $|U| \longrightarrow \frac{\pi}{2}$, es decir cuando se va al infinito en las coordenadas originales (r, t, θ, φ) . Además, ya que esta función multiplica al resto de factores, podemos definir la métrica compactificada mediante

$$d\tilde{s}^2 = \omega^2 ds^2 = -4dVdU + \sin^2(V - U) d\Omega^2. \quad (2.133)$$

De esta forma, el espacio de Minkowski ha quedado inmerso conformemente dentro del espacio-tiempo definido por $d\tilde{s}$, el cual tiene una frontera definida por $\omega = 0$. Finalmente podemos realizar un último cambio a una coordenada temporal η y una coordenada radial χ definidas por

$$\eta = V + U \quad (2.134)$$

$$\chi = V - U, \quad (2.135)$$

cuyos rangos serán

$$-\pi < \eta < \pi \quad (2.136)$$

$$0 \leq \chi < \pi. \quad (2.137)$$

El elemento de línea es ahora

$$d\tilde{s}^2 = \omega^2 ds^2 = -d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2, \quad (2.138)$$

donde

$$\omega = 2 \cos V \cos U = \cos \eta + \cos \chi. \quad (2.139)$$

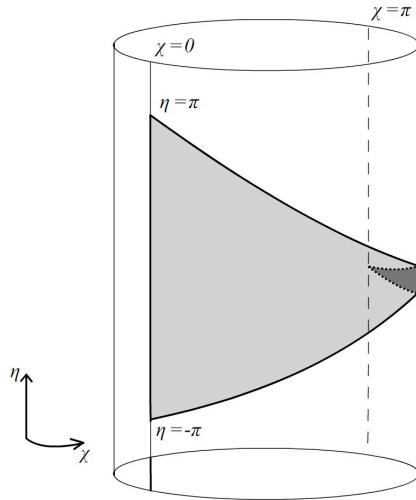


Figura 2.14: Compactificación conforme del espacio-tiempo de Minkowski.

La métrica $d\tilde{s}$ describe una variedad $\mathbb{R} \times S^3$, donde la 3-esfera es estática y maximalmente simétrica, y corresponde al denominado *Universo Estático de Einstein*. El cual es una solución de las ecuaciones de campo con un fluido perfecto y con constante cosmológica. La diferencia entre éste y Minkowski radica en que el Universo Estático de Einstein posee una variable temporal que toma valores en el rango $-\infty < \eta < \infty$ y una variable angular que toma valores en el rango $-\pi < \chi < \pi$. Por esta razón, la variedad de Minkowski es solamente un subespacio del Universo Estático de Einstein, definido por los rangos dados en (2.136) y (2.137).

Si suprimimos las coordenadas angulares, el Universo de Einstein se puede dibujar como un cilindro, en el cual cada punto corresponde a una 2-esfera. En la Figura 2.14 podemos observar el Universo de Einstein y en él, la región sombreada que representa el espacio de Minkowski. Si se desenrolla esta región, como se observa en la Figura 2.15, se obtiene el *Diagrama de Carter-Penrose* que consiste en un triángulo que representa la variedad de Minkowski junto con los puntos de su infinito conforme (frontera del diagrama) y en el cual cada punto es de nuevo una 2-esfera.

El infinito agregado al espacio de Minkowski mediante la compactificación conforme puede dividirse en cinco regiones, como se muestra en la siguiente tabla.

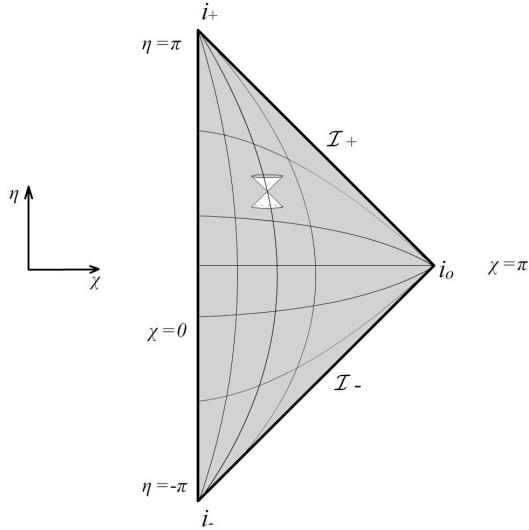


Figura 2.15: Diagrama de Carter Penrose para el espacio-tiempo de Minkowski.

	(η, χ)	(V, U)	(v, u)	(t, r)
i_o infinito espacial	$\begin{cases} \eta = 0 \\ \chi = \pi \end{cases}$	$\begin{cases} V = \frac{\pi}{2} \\ U = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} v \rightarrow \infty \\ u \rightarrow -\infty \end{cases}$	$\begin{cases} t \text{ finito} \\ r \rightarrow \infty \end{cases}$
i_+ infinito temporal futuro	$\begin{cases} \eta = \pi \\ \chi = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} V = \frac{\pi}{2} \\ U = \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} v \rightarrow \infty \\ u \rightarrow \infty \end{cases}$	$\begin{cases} t \rightarrow \infty \\ r \text{ finito} \end{cases}$
i_- infinito temporal pasado	$\begin{cases} \eta = -\pi \\ \chi = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} V = -\frac{\pi}{2} \\ U = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} v \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow -\infty \end{cases}$	$\begin{cases} t \rightarrow -\infty \\ r \text{ finito} \end{cases}$
I_+ infinito nulo futuro	$\begin{cases} \eta = \pi - \chi \\ 0 < \chi < \pi \end{cases}$	$\begin{cases} V = \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} v \rightarrow \infty \\ u \text{ finito} \end{cases}$	$\begin{cases} t \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty \\ r - t \text{ finito} \end{cases}$
I_- infinito nulo pasado	$\begin{cases} \eta = -\pi + \chi \\ 0 < \chi < \pi \end{cases}$	$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2} \\ U = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} v \text{ finito} \\ u \rightarrow -\infty \end{cases}$	$\begin{cases} t \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty \\ r + t \text{ finito} \end{cases}$

Es importante notar que i_o, i_+ e i_- no son 2-esferas sino puntos, ya que $\chi = 0$ y $\chi = \pi$ corresponden a los polos sur y norte de las esferas S^3 , y por otro lado I_+ y I_- son superficies nulas con topología $\mathbb{R} \times S^2$. En el diagrama de Penrose las geodésicas radiales nulas están a 45° . Todas las trayectorias como-de-tiempo comienzan en i_- y terminan en i_+ ; mientras que todas las geodésicas nulas comienzan en I_- y terminan en I_+ viajando a 45° . Por otro lado, todas las geodésicas como-de-espacio comienzan y terminan en i_o .

2.6.2. Espacio-Tiempo de Rindler

El espacio-tiempo de Rindler tiene el elemento de línea dado en la ecuación (2.108)

$$ds_R^2 = -dV'dU', \quad (2.140)$$

donde las coordenadas V' y U' tienen los rangos

$$V' > 0 \quad (2.141)$$

$$U' < 0. \quad (2.142)$$

Para traer el infinito a un valor finito de coordenadas realizamos una transformación similar a la realizada para Minkowski,

$$V' = \tan V \quad (2.143)$$

$$U' = \tan U, \quad (2.144)$$

donde el rango de las nuevas coordenadas puede ser extendido analíticamente a

$$-\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2} \quad (2.145)$$

$$-\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2}. \quad (2.146)$$

El elemento de línea es ahora

$$ds_R^2 = -\frac{1}{(\cos V \cos U)^2} dV dU, \quad (2.147)$$

de donde se puede identificar la función

$$\omega = \cos V \cos U \quad (2.148)$$

para construir la métrica conformemente compactificada

$$d\tilde{s}_R^2 = \omega^2 ds_R^2 = -dV dU. \quad (2.149)$$

La métrica compactificada tiene la misma forma que la dada en (2.140) pero las nuevas coordenadas U, V tienen un rango finito. Al igual que en el caso de Minkowski, los puntos del infinito son aquellos para los cuales $\omega = 0$, es decir los puntos donde $|V| = \frac{\pi}{2}$ o $|U| = \frac{\pi}{2}$. Al realizar el diagrama de Penrose (Figura 2.16) para esta métrica tenemos una forma similar a la de Minkowski, excepto que ahora el infinito espacial i_o tiene dos puntos, ya que por la continuación analítica existen dos posibilidades (notese que a diferencia de Minkowski, aquí no existe la condición $U \leq V$).

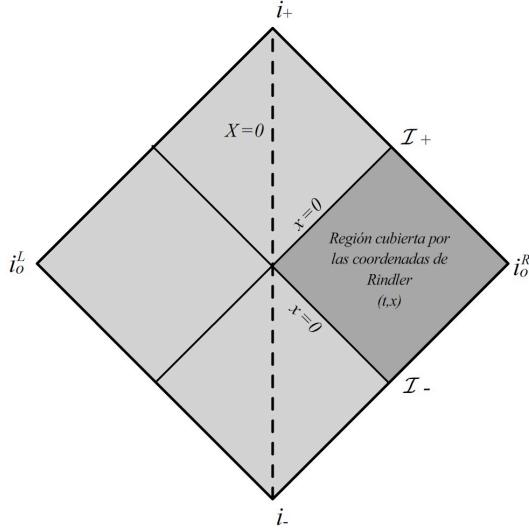


Figura 2.16: Diagrama de Carter Penrose para el espacio-tiempo de Rindler.

	(V, U)
i_o^R infinito espacial derecha	$\begin{cases} V = \frac{\pi}{2} \\ U = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$
i_o^L infinito espacial izquierda	$\begin{cases} V = -\frac{\pi}{2} \\ U = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

2.6.3. Espacio-Tiempo de Kruskal

En coordenadas de Eddington-Finkelstein, (v, u, θ, φ) , el elemento de línea de Schwarzschild es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dvdu + r^2 d\Omega^2, \quad (2.150)$$

donde las coordenadas v y u toman valores en los rangos

$$-\infty < v < \infty \quad (2.151)$$

$$-\infty < u < \infty. \quad (2.152)$$

Para realizar la compactificación, realizaremos el cambio usual,

$$v = \tan V \quad (2.153)$$

$$u = \tan U, \quad (2.154)$$

donde las nuevas variables tomarán valores en los rangos

$$-\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2} \quad (2.155)$$

$$-\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2}. \quad (2.156)$$

De esta forma, el nuevo elemento de línea es

$$ds^2 = \frac{1}{(2 \cos V \cos U)^2} \left[-4 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dVdU + 4r^2 \cos^2 V \cos^2 U d\Omega^2 \right]. \quad (2.157)$$

Ahora bien, debido a (2.61), la coordenada de Regge-Wheeler satisface

$$r^* = \frac{1}{2} (v - u) = \frac{\sin(V - U)}{2 \cos V \cos U}, \quad (2.158)$$

con lo que la métrica se puede escribir como

$$ds^2 = \frac{1}{(2 \cos V \cos U)^2} \left[-4 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dVdU + \left(\frac{r}{r^*} \right)^2 \sin^2(V - U) d\Omega^2 \right]. \quad (2.159)$$

Con ello, la métrica compactificada toma una forma similar a los casos anteriores,

$$d\tilde{s}^2 = \omega^2 ds^2 = -4 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dVdU + \left(\frac{r}{r^*} \right)^2 \sin^2(V - U) d\Omega^2, \quad (2.160)$$

donde

$$\omega = 2 \cos V \cos U. \quad (2.161)$$

Para dibujar el diagrama de Penrose correspondiente es útil notar que esta métrica es asintóticamente plana, es decir que en el infinito se convierte en el espacio de Minkowski. Por esta razón, las fronteras del diagrama, i.e. i_o y \mathcal{I}_{\pm} , son iguales a las del diagrama minkowskiano. Por otro lado, cerca al horizonte de eventos, $r = 2M$, el diagrama de Penrose para el espacio de Rindler nos muestra como es la estructura del espacio tiempo. Por ello, en el diagrama de Penrose para la variedad de Kruskal existen también cuatro regiones (dos de las cuales son asintóticamente planas y dos que poseen las singularidades $r = 0$), tal como se puede observar de la Figura 2.17.

Es importante resaltar que los puntos i_+ y i_- son diferentes de la singularidad y por ello existen muchas trayectorias como-de-tiempo que terminan en i_+ pero no en la singularidad.

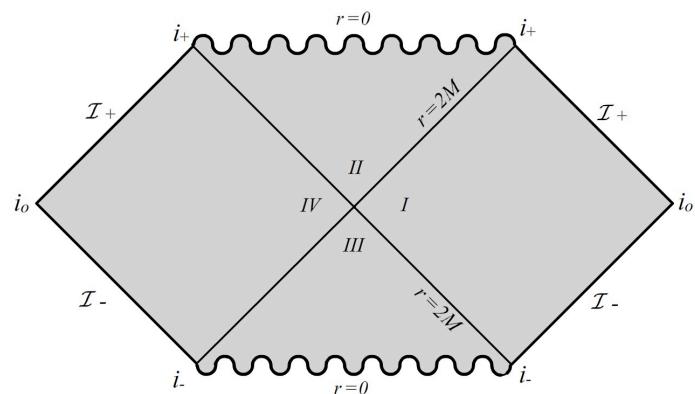


Figura 2.17: Diagrama de Carter Penrose para el espacio-tiempo de Kruskal.

Capítulo 3

Hipersuperficies

En el espacio-tiempo de 4 dimensiones de la Relatividad General, una hipersuperficie Σ es una sub-variedad tridimensional que puede ser como-de-tiempo, como-de-espacio o nula. Si $\Phi(x)$ es una función suave de las coordenadas x^μ , se puede construir una familia de hipersuperficies mediante la condición $\Phi(x) = \text{constante}$.

De esta manera, debemos notar que la derivada $\partial_\mu \Phi$ va en dirección normal de la hipersuperficie, ya que la única dirección en la que cambia la función Φ es ortogonalmente a Σ . Así, el vector normal se puede definir en la base coordenada como

$$\mathbf{n} = N(\partial_\mu \Phi) \partial^\mu = Ng^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu, \quad (3.1)$$

donde $N = N(x^\mu)$ es una función arbitraria que permite volver unitario el vector normal (si la hipersuperficie no es nula en cuyo caso $n^2 = 0$). De esta manera, la norma de \mathbf{n} puede tomar los valores

$$n^2 = n^\mu n_\mu = \begin{cases} 1 & \text{si } \Sigma \text{ es como-de-tiempo} \\ -1 & \text{si } \Sigma \text{ es como-de-espacio.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Además, se suele exigir que el vector normal apunte en la dirección que aumenta Φ , esto es

$$n^\mu \partial_\mu \Phi > 0. \quad (3.3)$$

Ejercicio

Mostrar que las componentes del vector unitario normal pueden escribirse

$$n_\mu = \frac{\partial_\mu \Phi}{[g^{\rho\nu} \partial_\nu \Phi \partial_\rho \Phi]^{1/2}}$$

para hipersuperficies como-de-tiempo y

$$n_\mu = \frac{i \partial_\mu \Phi}{[g^{\rho\nu} \partial_\nu \Phi \partial_\rho \Phi]^{1/2}}$$

para hipersuperficies como-de-espacio.

Cuál es el valor de la función N ?

3.1. Hipersuperficies Nulas

Si para una hipersuperficie \mathcal{N} el vector normal satisface

$$n^2 = 0, \quad (3.4)$$

se dice que \mathcal{N} es una *hipersuperficie nula*. Ya que el vector normal \mathbf{n} es ortogonal a sí mismo ($n^\mu n_\mu = 0$), entonces \mathbf{n} también es un vector tangente, y por ello podemos escribirlo como

$$n^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (3.5)$$

para alguna curva nula $x^\mu(\lambda)$ perteneciente a \mathcal{N} . Las curvas $x^\mu(\lambda)$ son geodésicas, y para comprobarlo calculamos

$$n^\sigma \nabla_\sigma n^\mu = N \partial^\sigma \Phi \nabla_\sigma (N \partial^\mu \Phi) \quad (3.6)$$

$$= N \partial^\sigma \Phi (\partial_\sigma N) (\partial^\mu \Phi) + N^2 \partial^\sigma \Phi \nabla_\sigma (\partial^\mu \Phi). \quad (3.7)$$

Si se trabaja con la conexión compatible con la métrica, tenemos

$$n^\sigma \nabla_\sigma n^\mu = N \partial^\sigma \Phi (\partial_\sigma N) (\partial^\mu \Phi) + N^2 g^{\mu\nu} \partial^\sigma \Phi \nabla_\sigma (\partial_\nu \Phi) \quad (3.8)$$

$$= n^\sigma \partial_\sigma (\ln N) n^\mu + N g^{\mu\nu} n^\sigma \nabla_\sigma (\partial_\nu \Phi). \quad (3.9)$$

Debido a la simetría de la conexión, $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$, tenemos

$$n^\sigma \nabla_\sigma n^\mu = n^\sigma \partial_\sigma (\ln N) n^\mu + N g^{\mu\nu} n^\sigma \nabla_\nu (\partial_\sigma \Phi) \quad (3.10)$$

$$= n^\sigma \partial_\sigma (\ln N) n^\mu + N n^\sigma \nabla^\mu (N^{-1} n_\sigma) \quad (3.11)$$

$$= n^\sigma \partial_\sigma (\ln N) n^\mu + N n^\sigma \partial^\mu (N^{-1}) n_\sigma + n^\sigma \nabla^\mu n_\sigma \quad (3.12)$$

$$= n^\sigma \partial_\sigma (\ln N) n^\mu - n^2 \partial^\mu (\ln N) + \frac{1}{2} \partial^\mu n^2. \quad (3.13)$$

El primer término del lado derecho es proporcional a n^μ , mientras que segundo término depende de n^2 , por lo que al evaluarlo en la hipersuperficie nula se cancela, $n^2|_{\mathcal{N}} = 0$,

$$n^\sigma \nabla_\sigma n^\mu|_{\mathcal{N}} = n^\sigma \partial_\sigma (\ln N) n^\mu|_{\mathcal{N}} + \frac{1}{2} \partial^\mu n^2 \Big|_{\mathcal{N}}. \quad (3.14)$$

Por otro lado, el último término de la derecha no es cero, ya que depende de la derivada $\partial^\mu n^2$ y esta no se anula necesariamente en la hipersuperficie. Sin embargo, ya que n^2 es constante sobre la hipersuperficie, se cumple que

$$t^\mu \partial^\mu n^2 = 0, \quad (3.15)$$

para cualquier vector tangente t^μ . Debido a esto, concluimos que $\partial^\mu n^2$ debe ser proporcional a t^μ , y debido a que el vector normal es también tangente, debe ser proporcional a n^μ ,

$$\partial^\mu n^2 \propto n^\mu. \quad (3.16)$$

De esta forma, al evaluar la ecuación (3.13) en la hipersuperficie tendremos

$$n^\sigma \nabla_\sigma n^\mu|_{\mathcal{N}} \propto n^\mu, \quad (3.17)$$

lo cual implica que la curva $x^\mu(\lambda)$ es una geodésica con vector tangente n^μ . En esta curva, λ puede ser escogido como el parámetro afín, pero en este caso esta libertad corresponde a poder escoger libremente la función N , de tal manera que la ecuación de la geodésica se convierta en

$$n^\sigma \nabla_\sigma n^\mu|_{\mathcal{N}} = 0. \quad (3.18)$$

Así, la hipersuperficie nula \mathcal{N} es generada por geodésicas nulas y el vector n^μ es tangente a estos generadores.

Ejemplo. Scharzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein

Consideramos el espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes (v, r, θ, φ) cuyo elemento de línea esta dado por (2.50). El tensor métrico tiene las componentes no nulas

$$g_{vv} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (3.19)$$

$$g_{vr} = g_{rv} = 1 \quad (3.20)$$

$$g_{\theta\theta} = r^2 \quad (3.21)$$

$$g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta. \quad (3.22)$$

Definimos una familia de hipersuperficies esféricas mediante la función $\Phi = r - 2M$, por lo cual, los vectores normales a estas hiper superficies se definen mediante

$$\mathbf{n} = Ng^{\mu\sigma}\partial_\mu\Phi\partial_\sigma \quad (3.23)$$

$$= N \left[g^{vr} \frac{\partial\Phi}{\partial r} \partial_v \right] \quad (3.24)$$

$$= N\partial_v. \quad (3.25)$$

La norma de este vector es

$$n^2 = g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \quad (3.26)$$

$$= g_{vv}NN \quad (3.27)$$

$$= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)N^2, \quad (3.28)$$

con lo que se puede observar fácilmente que el horizonte, $r = 2M$, es una hipersuperficie nula. Ahora bien, aún cuando n^2 se anula en $r = 2M$, el término $\partial^\mu n^2$ no es cero. Si suponemos que la función N depende de las coordenadas v y r , tenemos

$$\partial^v n^2 = g^{v\sigma}\partial_\sigma n^2 = g^{vr}\partial_r n^2 + g^{vv}\partial_v n^2 \quad (3.29)$$

$$= -\frac{2M}{r^2}N^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\partial_r N^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2\partial_v N^2 \quad (3.30)$$

$$\partial^r n^2 = g^{r\sigma}\partial_\sigma n^2 = g^{rv}\partial_v n^2 \quad (3.31)$$

$$= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\partial_v N^2 \quad (3.32)$$

$$\partial^\theta n^2 = \partial^\varphi n^2 = 0. \quad (3.33)$$

Al evaluar estas cantidades en la hipersuperficie $r = 2M$ la única componente no nula es

$$\partial^v n^2 = -\frac{1}{2M}N^2 = -\frac{1}{2M}Nn^v. \quad (3.34)$$

De esta forma, la ecuación (3.14) toma la forma

$$n^\sigma \nabla_\sigma n^\mu|_{\mathcal{N}} = n^\sigma \partial_\sigma (\ln N) n^\mu|_{\mathcal{N}} + \frac{1}{2} \partial^\mu n^2 \Big|_{\mathcal{N}} \quad (3.35)$$

$$= n^\sigma \partial_\sigma (\ln N) n^\mu|_{\mathcal{N}} - \frac{1}{4M} N n^\mu \quad (3.36)$$

$$= \left[n^v \partial_v (\ln N) - \frac{1}{4M} N \right] n^\mu \quad (3.37)$$

$$= \left[\partial_v (\ln N) - \frac{1}{4M} \right] N n^\mu. \quad (3.38)$$

Si escogemos la función N como

$$N = e^{v/4M} = V, \quad (3.39)$$

la ecuación de la geodésica se convierte en

$$n^\sigma \nabla_\sigma n^\mu|_{\mathcal{N}} = 0, \quad (3.40)$$

es decir que esta elección de la función N corresponde a la elegir un parámetro afín. Con este valor de N , el vector normal se convierte en

$$\mathbf{n} = e^{v/4M} \partial_v. \quad (3.41)$$

Ejemplo. Variedad de Kruskal

Si consideramos ahora la variedad de Kruskal (coordenadas (V, U, θ, φ)), el tensor métrico tiene componentes

$$g_{UV} = -\frac{16M^3}{r} e^{-r/2M} \quad (3.42)$$

$$g_{\theta\theta} = r^2 \quad (3.43)$$

$$g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta. \quad (3.44)$$

Consideraremos las hipersuperficies definidas por la función $\Phi = U$. La hipersuperficie nula $r = 2M$ corresponde a $\Phi = U = 0$. El vector normal a estas hipersuperficies está definido por

$$\mathbf{n} = N g^{U\sigma} \partial_U \Phi \partial_\sigma \quad (3.45)$$

$$= N g^{UV} \partial_V \quad (3.46)$$

$$= -N \frac{r}{16M^3} e^{r/2M} \partial_V. \quad (3.47)$$

En este caso, al evaluar el vector normal en la hipersuperficie nula $r = 2M$ se tiene

$$\mathbf{n} = -N \frac{e}{8M^2} \partial_V. \quad (3.48)$$

Por otro lado, la norma de este vector es

$$n^2 = g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = g_{VV} n^V n^V = 0, \quad (3.49)$$

y ya que es idénticamente igual a cero, entonces $\partial^\mu n^2 = 0$. Así, la ecuación (3.14) será

$$n^\sigma \nabla_\sigma n^\mu|_{\mathcal{N}} = n^\sigma \partial_\sigma (\ln N) n^\mu|_{\mathcal{N}}, \quad (3.50)$$

y al escoger una función N constante obtenemos la parametrización afín,

$$n^\sigma \nabla_\sigma n^\mu|_{\mathcal{N}} = 0. \quad (3.51)$$

Podemos tomar la constante

$$N = -\frac{8M^2}{e}, \quad (3.52)$$

y con ello el vector normal será simplemente

$$\mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial V}. \quad (3.53)$$

3.2. Horizontes de Killing

Definimos que una hipersuperficie nula \mathcal{N} se denomina *horizonte de Killing* si existe un vector de Killing ξ que sea normal a ella.

3.2.1. Gravedad Superficial

Si \mathbf{n} es el vector normal a una horizonte de Killing \mathcal{N} de un campo vectorial de Killing ξ , podemos asegurar que sobre el horizonte

$$\xi = f\mathbf{n}, \quad (3.54)$$

donde f es una función arbitraria no nula. Si el vector normal se elige de tal manera que

$$n^\sigma \nabla_\sigma n^\mu|_{\mathcal{N}} = 0, \quad (3.55)$$

es decir se utiliza una parametrización afín, entonces se tendrá

$$\xi^\sigma \nabla_\sigma \xi^\mu|_{\mathcal{N}} = \kappa \xi^\mu, \quad (3.56)$$

donde κ se denomina *gravedad superficial*.

Ejercicio

Muestre que la gravedad superficial κ se puede escribir como

$$\kappa = \xi^\sigma \partial_\sigma \ln f. \quad (3.57)$$

Ahora bien, el teorema de Frobenius nos da una condición suficiente y necesaria para que un campo vectorial, V , sea ortogonal a una hipersuperficie (ver sección 2.2.3 de (11)),

$$V_{[\mu} \nabla_\nu V_{\sigma]}|_{\mathcal{N}} = 0. \quad (3.58)$$

Al aplicarlo a un campo vectorial de Killing ξ , esta condición es

$$\xi_{[\mu} \nabla_\nu \xi_{\sigma]}|_{\mathcal{N}} = 0, \quad (3.59)$$

es decir,

$$\xi_\mu \nabla_{[\nu} \xi_{\sigma]}|_{\mathcal{N}} + \xi_\sigma \nabla_{[\mu} \xi_{\nu]}|_{\mathcal{N}} - \xi_\nu \nabla_{[\mu} \xi_{\sigma]}|_{\mathcal{N}} = 0. \quad (3.60)$$

Utilizando la ecuación (1.30) tenemos

$$\xi_\mu \nabla_\nu \xi_\sigma|_{\mathcal{N}} + \xi_\sigma \nabla_\mu \xi_\nu|_{\mathcal{N}} - \xi_\nu \nabla_\mu \xi_\sigma|_{\mathcal{N}} = 0, \quad (3.61)$$

y al multiplicar toda la ecuación por $\nabla^\mu \xi^\nu$ se obtiene

$$\xi_\sigma (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\mu \xi_\nu)|_{\mathcal{N}} = \xi_\nu (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\mu \xi_\sigma)|_{\mathcal{N}} - \xi_\mu (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\nu \xi_\sigma)|_{\mathcal{N}}. \quad (3.62)$$

Intercambiando los índices mudos en el primer término de la derecha se tiene

$$\xi_\sigma (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\mu \xi_\nu)|_{\mathcal{N}} = \xi_\mu (\nabla^\nu \xi^\mu) (\nabla_\nu \xi_\sigma)|_{\mathcal{N}} - \xi_\mu (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\nu \xi_\sigma)|_{\mathcal{N}}. \quad (3.63)$$

Ahora bien, para un vector de Killing se cumple

$$\nabla^\nu \xi^\mu = \nabla^{[\nu} \xi^{\mu]} = -\nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} = -\nabla^\mu \xi^\nu \quad (3.64)$$

y por ello

$$\xi_\sigma (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\mu \xi_\nu)|_{\mathcal{N}} = -\xi_\mu (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\nu \xi_\sigma)|_{\mathcal{N}} - \xi_\mu (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\nu \xi_\sigma)|_{\mathcal{N}} \quad (3.65)$$

es decir

$$\xi_\sigma (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\mu \xi_\nu)|_{\mathcal{N}} = -2 \xi_\mu (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\nu \xi_\sigma)|_{\mathcal{N}}. \quad (3.66)$$

Utilizando (3.56) tenemos

$$\xi_\sigma (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\mu \xi_\nu)|_{\mathcal{N}} = -2 \kappa \xi^\nu (\nabla_\nu \xi_\sigma)|_{\mathcal{N}} \quad (3.67)$$

$$= -2 \kappa^2 \xi_\sigma|_{\mathcal{N}}, \quad (3.68)$$

de donde obtenemos que la gravedad superficial se puede expresar como

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\mu \xi_\nu)|_{\mathcal{N}}, \quad (3.69)$$

para puntos en los cuales el vector de Killing no es cero, $\xi \neq 0$. Sin embargo, todos puntos en donde el vector de Killing se anula corresponden a puntos límites de orbitas de ξ no nulo, por lo que esta ecuación es válida para todos los puntos.

Por otro lado, si consideramos un vector \mathbf{t} tangente al horizonte de Killing \mathcal{N} , la ecuación (3.69) permite escribir

$$t^\sigma \partial_\sigma \kappa^2 = t^\sigma \nabla_\sigma \kappa^2 = -t^\sigma (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\sigma \nabla_\mu \xi_\nu)|_{\mathcal{N}}, \quad (3.70)$$

y utilizando el lemma de Killing (ecuación (1.44)) se tiene

$$t^\sigma \partial_\sigma \kappa^2 = -t^\sigma (\nabla^\mu \xi^\nu) \left(R_{\sigma \lambda \nu \mu} \xi^\lambda \right)|_{\mathcal{N}}. \quad (3.71)$$

Como ya se dijo antes, en un horizonte de Killing, el vector ξ es normal y también tangente a la hipersuperficie. Por ello, si escogemos $\mathbf{t} = \xi$, tenemos

$$\xi^\sigma \partial_\sigma \kappa^2 = -(\nabla^\mu \xi^\nu) \left(\xi^\sigma R_{\sigma \lambda \nu \mu} \xi^\lambda \right)|_{\mathcal{N}}, \quad (3.72)$$

y debido a la antisimetría del tensor de Riemann en su primer par de índices ($R_{\sigma \lambda \nu \mu} = -R_{\lambda \sigma \nu \mu}$) podemos asegurar que

$$\xi^\sigma R_{\sigma \lambda \nu \mu} \xi^\lambda = 0. \quad (3.73)$$

Por lo tanto,

$$\xi^\sigma \partial_\sigma \kappa^2 = 0, \quad (3.74)$$

es decir que la cantidad κ^2 es constante en las orbitas del vector de Killing ξ . En particular, κ^2 es constante en el horizonte de Killing.

Sin embargo, la definición de la gravedad superficial dada en (3.69) muestra que si se tiene un horizonte de Killing \mathcal{N} cuyo vector de Killing es ξ y tiene asociada una gravedad superficial

κ , esa misma hipersuperficie es un horizonte de Killing para el vector $c\xi$ y la gravedad superficial asociada es $c\kappa$.

Por esta razón es útil definir una normalización para el vector de Killing para asegurarnos que la gravedad superficial asociada a \mathcal{N} es única. Ya que el vector de Killing se anula en la hipersuperficie, es decir $\xi^2 = 0$ en \mathcal{N} , no podemos definir la normalización allí, pero lejos de la hipersuperficie es posible definir esta normalización. Por ejemplo, para el vector de Killing asociado con la variedad de Kruskal se exige que

$$\xi^2 \longrightarrow -1 \text{ cuando } r \longrightarrow \infty, \quad (3.75)$$

es decir, que este vector de Killing sea como-de-tiempo en el infinito espacial. Con esta condición no solamente se fija el vector de Killing del horizonte, sino que además se fija el valor de la gravedad superficial.

3.2.2. Horizonte de Killing Bifurcado

Un *horizonte de Killing bifurcado* es un par de hipersuperficies nulas \mathcal{N}_A y \mathcal{N}_B , que son horizontes de Killing del mismo campo vectorial de Killing ξ y las cuales se intersecan en una 2-superficie como-de-espacio, llamada la *esfera de bifurcación*. De esto se puede concluir que el vector de Killing ξ es nulo en la 2-esfera de bifurcación.

Esfera de Bifurcación

Si sobre un horizonte de Killing se escoge un sistema de coordenadas tal que el vector de Killing correspondiente se escriba en la forma

$$\xi = \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad (3.76)$$

y además se parametriza la coordenada α en una órbita de ξ mediante un parámetro afín λ , es decir $\alpha = \alpha(\lambda)$, entonces el vector de Killing sobre esa órbita se puede escribir como

$$\xi|_{\text{órbita}} = \frac{d\lambda}{d\alpha} \frac{\partial}{\partial \lambda} = f \mathbf{n}, \quad (3.77)$$

donde

$$f = \frac{d\lambda}{d\alpha} \quad (3.78)$$

y el vector normal se puede escribir en el sistema coordenado como

$$\mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu. \quad (3.79)$$

Ahora bien, la gravedad superficial se puede obtener de la ecuación (3.57), que en el sistema de coordenadas escogido será

$$\kappa = \frac{\partial \ln f}{\partial \alpha}. \quad (3.80)$$

Al evaluar esta expresión sobre una órbita de ξ la gravedad superficial es constante y por ello si $\kappa \neq 0$, podemos integrar para obtener

$$f = f_o e^{\kappa \alpha}, \quad (3.81)$$

donde f_o es una constante arbitraria. Ya que

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = f_o e^{\kappa \alpha}, \quad (3.82)$$

podemos escoger $f_o = \pm \kappa$, y con ello tendremos

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = \pm \kappa e^{\kappa \alpha}, \quad (3.83)$$

o integrando,

$$\lambda = \pm e^{\kappa \alpha} + C, \quad (3.84)$$

donde C es una nueva constante que podemos escoger arbitrariamente como cero. Con esto, cuando la coordenada α barre el rango $-\infty < \alpha < \infty$, estaremos cubriendo tanto los valores $\lambda > 0$ como los valores $\lambda < 0$. Ahora bien, el punto $\lambda = 0$ es un punto fijo del campo vectorial ξ . Este se denomina *2-esfera de bifurcación*, y en el caso de la variedad de Kruskal corresponde al eje de Boyer-Kruskal como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo.

Consideraremos el espacio-tiempo de Kruskal y la hipersuperficie nula $\mathcal{N} = \{U = 0\} \cup \{V = 0\}$. Ya hemos mostrado que el vector de Killing de esta variedad es $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$, el cual se puede escribir en las coordenadas de Kruskal como

$$\xi = \frac{1}{4M} \left[V \frac{\partial}{\partial V} - U \frac{\partial}{\partial U} \right]. \quad (3.85)$$

Este vector es normal a la hipersuperficie \mathcal{N} , lo que hace que esta sea un horizonte de Killing. Para comprobarlo, podemos notar que ξ se puede escribir como

$$\xi = \frac{V}{4M} \frac{\partial}{\partial V} \text{ en } \{U = 0\} \quad (3.86)$$

o como

$$\xi = -\frac{U}{4M} \frac{\partial}{\partial U} \text{ en } \{V = 0\}, \quad (3.87)$$

lo cual muestra explícitamente que ξ es ortogonal a \mathcal{N} . Debido a esto, podemos escribir el vector de Killing como

$$\xi = f\mathbf{n}, \quad (3.88)$$

definiendo

$$\mathbf{n} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial V} & \text{en } \{U = 0\} \\ \frac{\partial}{\partial U} & \text{en } \{V = 0\} \end{cases} \quad (3.89)$$

y además

$$f = \begin{cases} \frac{V}{4M} & \text{en } \{U = 0\} \\ -\frac{U}{4M} & \text{en } \{V = 0\} \end{cases}. \quad (3.90)$$

Al escoger de esta forma la función f y el vector \mathbf{n} , se satisface

$$n^\sigma \nabla_\sigma n^\mu = 0, \quad (3.91)$$

y por ello, la gravedad superficial se puede calcular fácilmente mediante la ecuación (3.57),

$$\kappa = \xi^\sigma \partial_\sigma \ln f, \quad (3.92)$$

con lo que obtenemos

$$\kappa = \begin{cases} \frac{1}{4M} & \text{en } \{U = 0\} \\ -\frac{1}{4M} & \text{en } \{V = 0\} \end{cases}. \quad (3.93)$$

Es importante notar que el valor de la gravedad superficial es diferente en cada una de las regiones, pero el valor

$$\kappa^2 = \left(\frac{1}{4M} \right)^2 \quad (3.94)$$

es constante en todo el horizonte de Killing, tal como se habia mostrado en la ecuación (3.74). Esto muestra también que las orbitas del vector de Killing ξ yacen completamente en la región $\{U = 0\}$, en la región $\{V = 0\}$ o corresponden a puntos fijos. En este caso el punto fijo de estas orbitas corresponde al eje de Boyer-Kruskal ($U = V = 0$), donde el vector de Killing se anula, como se puede observar de la ecuación (3.85). Nótese que la esfera de bifurcación existe en la variedad de Kruskal, pero no existe en el espacio-tiempo de Schwarzschild debido a que este punto es agregado como parte de la continuación analítica.

3.2.3. Horizontes de Aceleración

Para la métrica de Rindler descrita en el capítulo anterior existe una clase especial de horizonte. Para poder definirlo, notemos inicialmente que una partícula en una posición x constante del espacio-tiempo de Rindler posee una aceleración propia constante $a = \frac{1}{x}$. Esto se puede comprobar recordando que una partícula que se mueve en una órbita $X^\mu(\tau)$ como-de-tiempo de un vector de Killing ξ poseerá una 4-velocidad proporcional al vector de Killing, $u^\mu \propto \xi^\mu$, y además su norma debe ser $u^2 = -1$. Por ello podemos escribir

$$u^\mu = \frac{\xi^\mu}{\sqrt{-\xi^2}}. \quad (3.95)$$

La 4-aceleración propia se obtiene mediante

$$a^\mu = \frac{d}{d\tau} u^\mu = \frac{dX^\sigma}{d\tau} \nabla_\sigma u^\mu = u^\sigma \nabla_\sigma u^\mu, \quad (3.96)$$

donde utilizando la ecuación (3.95) para la 4-velocidad,

$$a^\mu = \frac{\xi^\sigma \nabla_\sigma \xi^\mu}{-\xi^2} + \frac{(\xi^\sigma \partial_\sigma \xi^2) \xi^\mu}{2\xi^2}. \quad (3.97)$$

Sin embargo, el segundo término se puede escribir como

$$\xi^\sigma \partial_\sigma \xi^2 = 2\xi^\rho \xi^\sigma \nabla_\sigma \xi_\rho = 0 \quad (3.98)$$

la cual se anula debido a la propiedad de los vectores de Killing (1.30). De esta forma, la 4-aceleración es

$$a^\mu = \frac{\xi^\sigma \nabla_\sigma \xi^\mu}{-\xi^2}. \quad (3.99)$$

Como se mostró antes, el vector de Killing del espacio-tiempo de Rindler en coordenadas (V', U') es

$$\xi = \frac{1}{4M} \left(V' \frac{\partial}{\partial V'} - U' \frac{\partial}{\partial U'} \right), \quad (3.100)$$

y por lo tanto

$$\xi^2 = g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu = -2g_{U'V'} \frac{V'U'}{(4M)^2} \quad (3.101)$$

$$= \frac{V'U'}{(4M)^2}, \quad (3.102)$$

y además

$$\xi^\sigma \nabla_\sigma \xi^{U'} = \xi^{U'} \nabla_{U'} \xi^{U'} + \xi^{V'} \nabla_{V'} \xi^{U'} = \frac{U'}{(4M)^2} \quad (3.103)$$

$$\xi^\sigma \nabla_\sigma \xi^{V'} = \xi^{U'} \nabla_{U'} \xi^{V'} + \xi^{V'} \nabla_{V'} \xi^{V'} = \frac{V'}{(4M)^2}. \quad (3.104)$$

De esta manera, la 4-aceleración es

$$a^\mu = -\frac{1}{U'} \frac{\partial}{\partial V'} - \frac{1}{V'} \frac{\partial}{\partial U'}. \quad (3.105)$$

La magnitud de la aceleración propia resulta ser

$$a^2 = g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = -\frac{1}{V' U'}, \quad (3.106)$$

y debido a las relaciones (2.106-2.107) se tiene $V' U' = -x^2$. Así, obtenemos la aceleración

$$a = \frac{1}{x}, \quad (3.107)$$

es decir que para partículas en órbitas del vector de Killing ξ , ($x = \text{constante}$), a es constante. Es importante notar que la aceleración propia crece sin límite cuando $x \rightarrow 0$. Por esta razón a la superficie $x = 0$ se le denomina un *Horizonte de Aceleración*.

3.2.4. Horizontes de Aceleración y Gravedad Superficial

Ahora bien, aún cuando la aceleración propia diverge al acercarse al horizonte $x = 0$, la aceleración medida por otro observador permanece finita. Para comprobar esto, recuerde que debido a (2.105), el tiempo propio τ satisface

$$d\tau^2 = \left(\frac{x}{4M}\right)^2 dt^2 = (\kappa x)^2 dt^2, \quad (3.108)$$

para trayectorias con $x = \text{constante}$, y donde $\kappa = \frac{1}{4M}$. La aceleración medida por un observador cuyo tiempo propio sea t y que también se mueva en trayectorias de x constante será

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right) a = (\kappa x) \frac{1}{x} = \kappa. \quad (3.109)$$

Notese que en este caso, la aceleración medida por este observador es finita incluso cuando $x \rightarrow 0$. Ahora bien, como ya se había discutido, la variedad de Rindler posee características similares a las de el espacio-tiempo de Schwarzschild, por lo cual podemos obtener una interpretación muy interesante a partir de ello. En el caso de Schwarzschild, los observadores cuyo tiempo propio es t son los ubicados en la región asintóticamente plana, es decir en el infinito espacial. Esto nos permite concluir que la *gravedad superficial* κ corresponde a la aceleración de una partícula estática cerca del horizonte de Killing, medida por un observador en el infinito espacial.

3.3. Horizontes de Eventos

Para definir lo que es un horizonte de eventos debemos realizar antes algunas definiciones que tienen que ver con el comportamiento asintótico de las variedades.

3.3.1. Espacio-tiempo Asintóticamente Simple

Un variedad $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ se denomina *asintóticamente simple* si existe una variedad $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathbf{g}})$ con frontera $\partial\tilde{\mathcal{M}}$ y existe una inmersión continua

$$f : \mathcal{M} \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}, \quad (3.110)$$

tal que satisface las condiciones

1. $f(\mathcal{M}) = \tilde{\mathcal{M}} - \partial\tilde{\mathcal{M}}$
2. Existe una función suave ω en la variedad $\tilde{\mathcal{M}}$ que cumple:
 - a) toma valores positivos, $\omega > 0$. en $f(\mathcal{M})$,
 - b) se anula en la frontera, $\omega = 0$ en $\partial\tilde{\mathcal{M}}$
 - c) $d\omega \neq 0$ en $\partial\tilde{\mathcal{M}}$
 - d) satisface $\tilde{\mathbf{g}} = \omega^2 \mathbf{g}$
3. Toda geodésica nula en \mathcal{M} tiene dos puntos extremos en $\partial\tilde{\mathcal{M}}$

3.3.2. Espacio-tiempo Débil Asintóticamente Simple

Un variedad $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ se denomina *débil asintóticamente simple* si existe un abierto $U \subset \mathcal{M}$ que sea isométrico a una vecindad abierta de $\partial\tilde{\mathcal{M}}$ donde $\tilde{\mathcal{M}}$ es la compactificación conforme de alguna variedad asintóticamente simple.

3.3.3. Espacio-tiempo Asintóticamente Vacío

Una variedad se denomina *asintóticamente vacía* si $R_{\mu\nu} = 0$ en una vecindad abierta de $\partial\tilde{\mathcal{M}}$ donde $\tilde{\mathcal{M}}$ es la compactificación conforme de alguna variedad asintóticamente simple.

3.3.4. Espacio-tiempo Asintóticamente Plano

Una variedad se denomina *asintóticamente plana* si es débil asintóticamente simple y además es asintóticamente vacía.

Esta definición hace que los espacios asintóticamente planos tengan en el infinito (\mathcal{I}_{\pm}, i_0) , la misma estructura del espacio-tiempo de Minkowski, es decir que la frontera del diagrama de Carter-Penrose tiene la forma que se observa en la Figura 3.1.

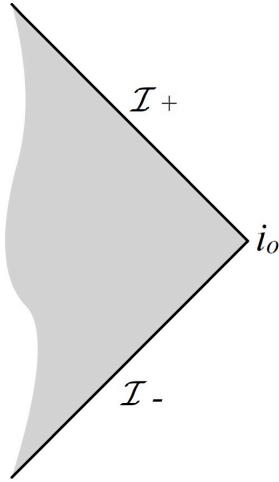


Figura 3.1: Frontera del diagrama de Carter-Penrose para un espacio-tiempo asintóticamente plano.

Ejemplos

- Si se toma \mathcal{M} como la variedad de Minkowski y $\tilde{\mathcal{M}}$ su compactificación conforme, se puede comprobar que se satisfacen las condiciones 1., 2. y 3. es decir que este espacio es asintóticamente simple. Sin embargo, la variedad de Minkowski además es un débil asintóticamente simple, vacía y asintóticamente plana.
- Si se toma \mathcal{M} como la variedad de Kruskal y $\tilde{\mathcal{M}}$ su compactificación conforme, se puede comprobar que no se satisface la condición 3. ya que existen geodésicas nulas que terminan en la singularidad y no en $\partial\tilde{\mathcal{M}}$. Por esta razón, Kruskal no es un espacio asintóticamente simple. Sin embargo, esta variedad si es débil asintóticamente simple, y además es vacía. Por ello concluimos que Kruskal es un espacio asintóticamente plano, tal como lo muestra la frontera de su diagrama de Carter-Penrose.

Ahora bien, si consideramos una variedad \mathcal{M} asintóticamente plana definimos

3.3.5. Curva Causal

Una *curva causal* $\mathcal{C}(\lambda)$ es cualquier curva suave que no es como-de-espacio en ningún punto, es decir que siempre es como-de-tiempo o nula.

3.3.6. Pasado Causal

El *pasado causal* $\mathcal{J}^-(p)$ del punto p se define como el conjunto de todos los eventos que preceden causalmente al punto p , es decir el conjunto de todos los puntos q para los cuales existe al menos una curva causal dirigida al futuro desde q hasta p .

Esta definición se puede extender al pasado causal $\mathcal{J}^-(U)$ de un conjunto de puntos $U \subset \mathcal{M}$, como el conjunto de todos los puntos que preceden causalmente al menos a un punto de U .

3.3.7. Futuro Causal

El *futuro causal* $\mathcal{J}^+(p)$ del punto p se define como el conjunto de todos los eventos que siguen causalmente al punto p , es decir el conjunto de todos los puntos q para los cuales existe al menos una curva causal dirigida al futuro desde p hasta q .

Esta definición se puede extender al futuro causal $\mathcal{J}^+(U)$ de un conjunto de puntos $U \subset \mathcal{M}$, como el conjunto de todos los puntos que siguen causalmente al menos a un punto de U .

Definimos además $\overline{\mathcal{J}}^-(U)$ y $\overline{\mathcal{J}}^+(U)$ como la clausura topológica del pasado causal y el futuro causal de U respectivamente. Por último, $j^-(U)$ y $j^+(U)$ corresponden a la frontera de estas clausuras topológicas, es decir

$$j^-(U) = \overline{\mathcal{J}}^-(U) - \mathcal{J}^-(U) \quad (3.111)$$

$$j^+(U) = \overline{\mathcal{J}}^+(U) - \mathcal{J}^+(U). \quad (3.112)$$

3.3.8. Horizonte de Eventos Futuro

El *horizonte de eventos futuro* \mathcal{H}^+ se define como la frontera de la clausura del pasado causal del infinito futuro nulo \mathcal{I}^+ , es decir

$$\mathcal{H}^+ = j^-(\mathcal{I}^+). \quad (3.113)$$

3.3.9. Horizonte de Eventos Pasado

De manera similar, se define el *horizonte de eventos pasado* \mathcal{H}^- como la frontera de la clausura del futuro causal del infinito pasado nulo \mathcal{I}^- , es decir

$$\mathcal{H}^- = j^+(\mathcal{I}^-). \quad (3.114)$$

Ejemplo

En la veriedad de Kruskal se pueden identificar fácilmente los horizontes de eventos pasado y futuro. Estos corresponden a la superficie $r = 2M$, tal como se muestra en la Figura 3.2.

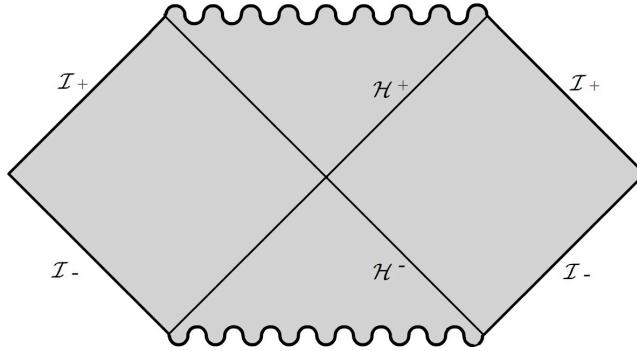


Figura 3.2: Horizontes de Eventos para la variedad de Kruskal.

En el estudio de agujeros negros, los horizontes de eventos futuros tienen una gran importancia debido a que son producidos en los procesos de colapso gravitacional, mientras que los horizontes de eventos pasados presentan un poco interés ya que estos deben tener un origen primordial, es decir que deben postularse como parte de la estructura inicial del universo y no existe una buena justificación para utilizarlos.

3.3.10. Teorema de Penrose

3.3.11. Teoremas de Rígidez

Existen dos resultados independientes, conocidos usualmente como *teoremas de rigidez*, que muestran que en la mayor parte de casos de interés, el horizonte de eventos de un agujero negro estacionario es un horizonte de Killing.

El primero de estos teoremas se debe a Carter (2) y muestra que para un agujero negro estático, el campo vectorial de Killing $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ debe ser ortogonal al horizonte, mientras que para un agujero negro estacionario el campo vectorial de Killing $\psi = \xi + \Omega\zeta = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega\frac{\partial}{\partial\varphi}$ es normal al horizonte de eventos, y la constante Ω se puede interpretar como la velocidad angular del horizonte (en un capítulo posterior se mostrará esto detalladamente). Este teorema no utiliza las ecuaciones de campo y deja abierta la posibilidad de la existencia de agujeros negros sin las simetrías anteriores cuyos horizontes de eventos no sean horizontes de Killing.

El segundo teorema de rigidez se debe a Hawking (3) y muestra que en el vacío o en presencia únicamente de campo electromagnético, el horizonte de eventos de cualquier agujero negro estacionario debe ser un horizonte de Killing, pero no necesariamente del campo vectorial $\frac{\partial}{\partial t}$. Este teorema solamente utiliza la suposición de ser estacionario pero si utiliza las propiedades de las ecuaciones de campo de la Relatividad General.

3.4. Horizontes de Cauchy

Otro de los conceptos importantes en el estudio de hipersuperficies asociadas con agujeros negros es el de *Horizonte de Cauchy*. Para poder elaborar esta clase de horizonte, debemos realizar algunas definiciones previas.

3.4.1. Superficie Parcial de Cauchy

Una hipersuperficie Σ se denomina *superficie parcial de Cauchy* para el espacio-tiempo \mathcal{M} si ninguna curva causal la atraviesa más de una vez.

3.4.2. Curva Causal Inextendible al Pasado

Una curva causal se dice *inextendible al pasado* si no posee puntos finales pasados dentro de \mathcal{M} .

3.4.3. Curva Causal Inextendible al Futuro

Una curva causal se dice *inextendible al futuro* si no posee puntos finales futuros dentro de \mathcal{M} .

3.4.4. Dominio Futuro de Dependencia

El *dominio futuro de dependencia* $D^+(\Sigma)$ de una superficie parcial de Cauchy Σ , es el conjunto de todos los puntos p para los cuales toda curva causal inextendible al pasado que pase por p intersecta Σ .

En la Figura 3.3 se puede observar una representación del dominio futuro de dependencia. Es importante notar que esta definición implica que el comportamiento de las soluciones de cualquier ecuación diferencial hiperbólica en los puntos pertenecientes a $D^+(\Sigma)$ queda determinado por las condiciones iniciales dadas en Σ .

3.4.5. Dominio Pasado de Dependencia

El *dominio pasado de dependencia* $D^-(\Sigma)$ de Σ , es el conjunto de todos los puntos p para los cuales toda curva causal inextendible al futuro que pase por p intersecta Σ .

3.4.6. Superficie de Cauchy

Se dice que Σ es una *hipersuperficie de Cauchy* de M si

$$D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma) = \mathcal{M}. \quad (3.115)$$

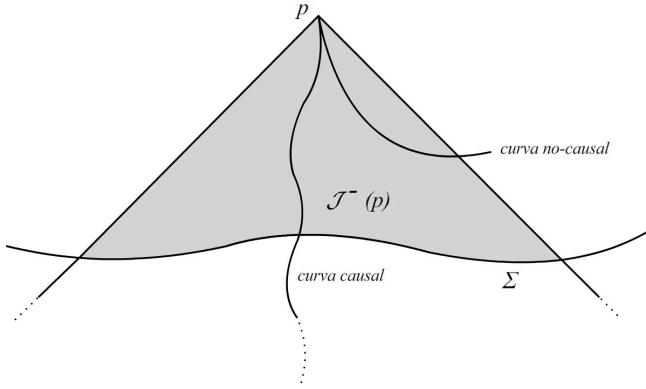


Figura 3.3: Superficies de Cauchy y causalidad.

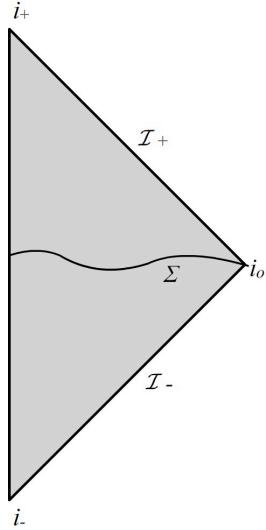


Figura 3.4: Superficie de Cauchy en la variedad de Minkowski.

3.4.7. Globalidad Hiperbólica

Si una variedad \mathcal{M} posee una hipersuperficie de Cauchy, se dice que \mathcal{M} es *globalmente hiperbólica*.

Ejemplos

- La variedad de Minkowski es globalmente hiperbólica. En la Figura 3.4 se observa el diagrama de Carter-Penrose y una superficie de Cauchy para este espacio-tiempo.
- La variedad de Kruskal tambien es globalmente hiperbólica. En la Figura 3.5 se puede observar el correspondiente diagrama de Carter-Penrose y una de las posibles superficies de Cauchy.

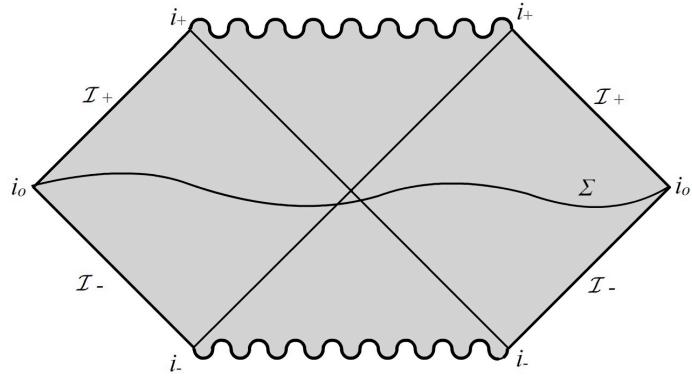


Figura 3.5: Superficie de Cauchy en la variedad de Kruskal.

3.4.8. Horizonte de Cauchy

Si una variedad \mathcal{M} no es globalmente hiperbólica, entonces $D^+(\Sigma)$ o $D^-(\Sigma)$ poseen una frontera en \mathcal{M} . A esta frontera se le da el nombre de *Horizonte de Cauchy*.

Capítulo 4

Formulación de Tétradas

La forma usual de resolver problemas en la Relatividad General es resolver las ecuaciones de campo en una base coordenada local. Sin embargo, debido a la libertad en la escogencia de la base utilizada para describir la física, es posible escoger un conjunto de cuatro campos vectoriales linealmente independientes llamados *tétradas*, que simplifiquen las cantidades relevantes para un cierto problema. De esta forma, se proyectan los objetos de interés (vectores, tensores, etc) para realizar los cálculos en la nueva base y luego es posible devolverse a la base coordinada original con una nueva proyección. La escogencia de la base de tétradas depende de las simetrías de la variedad considerada.

Para comenzar con el formalismo, supongamos que tenemos una variedad (\mathcal{M}, g) con una base coordinada ∂_μ utilizada para definir las componentes de los vectores y tensores. Definiremos en cada punto de la variedad el conjunto de vectores contravariantes

$$e_{(a)}^\mu, \quad (4.1)$$

en donde el índice griego $\mu = 1, 2, 3, 4$ representa las componentes del vector y el índice latino toma los valores $a = 1, 2, 3, 4$ y numera los cuatro vectores que se están definiendo, por lo cual está escrito dentro de paréntesis. A lo largo de este capítulo notaremos los índices tensoriales con letras griegas (μ, ν, ρ, \dots) y los índices de las tétradas con letras latinas en paréntesis (a, b, c, \dots). Ahora bien, los índices tensoriales se pueden bajar utilizando el tensor métrico g ,

$$e_{(a)\mu} = g_{\mu\nu} e_{(a)}^\nu. \quad (4.2)$$

Notese que cada uno de los vectores se expresa en la base coordinada como

$$\mathbf{e}_{(a)} = e_{(a)}^\mu \partial_\mu, \quad (4.3)$$

es decir que las componentes $e_{(a)}^\mu$ corresponden a la matriz que realiza el cambio de base. El inverso de estas matrices se define mediante

$$e_{(a)}^{\mu} e^{(a)}_{\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}, \quad (4.4)$$

y además podemos exigir que los cuatro vectores definidos sean ortonormales,

$$e_{(a)}^{\mu} e^{(b)}_{\mu} = \delta_{(a)}^{(b)}. \quad (4.5)$$

Por último, exigiremos que

$$e_{(a)}^{\mu} e_{(b)}^{\nu} g_{\mu\nu} = e_{(a)}^{\mu} e_{(b)\mu} = \eta_{(a)(b)}, \quad (4.6)$$

donde $\eta_{(a)(b)}$ es una matriz simétrica que puede ser constante o no. Para nuestro desarrollo, utilizaremos la formulación usual de las tetradas, en la cual $\eta_{(a)(b)}$ es constante. El inverso de esta matriz se define mediante la relación

$$\eta_{(a)(b)} \eta^{(b)(c)} = \delta_{(a)}^{(c)}. \quad (4.7)$$

Ahora bien, si se exige que las tétradas $e_{(a)}^{\mu}$ sean ortonormales, la matriz $\eta_{(a)(b)}$ corresponde al tensor métrico de Minkowski.

Ejercicio

Mostrar la siguientes propiedades de las tétradas

$$\eta_{(a)(b)} e^{(b)}_{\sigma} = e_{(a)\sigma} \quad (4.8)$$

$$\eta^{(c)(a)} e_{(a)\sigma} = e^{(c)}_{\sigma} \quad (4.9)$$

$$e_{(a)\mu} e^{(a)}_{\nu} = e^{(a)}_{\mu} e^{(b)}_{\nu} \eta_{(a)(b)} = g_{\mu\nu}. \quad (4.10)$$

En el resto de este capítulo asumiremos que la base de tétradas elegida es ortonormal, y por ello el tensor de Minkowski $\eta_{(a)(b)}$ permite subir y bajar los índices latinos. De esta manera la base de tetradas esta definiendo localmente una base minkowskiana y por esta razón los cálculos con vectores y tensores se pueden realizar mucho más fácilmente.

Ejercicio

Mostrar que las tétradas

$$e_{(t)}^\mu = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}(1, 0, 0, 0) \quad (4.11)$$

$$e_{(r)}^\mu = \sqrt{1-\frac{2M}{r}}(0, 1, 0, 0) \quad (4.12)$$

$$e_{(\theta)}^\mu = \frac{1}{r}(0, 0, 1, 0) \quad (4.13)$$

$$e_{(\varphi)}^\mu = \frac{1}{r \sin \theta}(0, 0, 0, 1) \quad (4.14)$$

definen una base ortonormal en el espacio-tiempo de Schwarzschild

4.1. Componentes de Vectores y Tensores

Las componentes de un vector \mathbf{A} en la base de las tétradas se obtienen a partir de sus componentes A^μ mediante

$$A^{(a)} = e^{(a)\mu} A^\mu = e^{(a)\mu} A_\mu \quad (4.15)$$

$$A_{(a)} = \eta_{(a)(b)} A^{(b)} = e_{(a)\mu} A^\mu = e_{(a)\mu} A_\mu. \quad (4.16)$$

De la misma forma, dadas las componentes en la base de las tétradas se pueden obtener las componentes tensoriales mediante

$$A^\mu = e_{(a)}^\mu A^{(a)} = e^{(a)\mu} A_{(a)} \quad (4.17)$$

$$A_\mu = e_{(a)\mu} A^{(a)} = e^{(a)}_\mu A_{(a)}. \quad (4.18)$$

Estas definiciones se pueden generalizar de inmediato para tensores de cualquier rango. Por ejemplo, para un tensor $T_{\mu\nu}$ tenemos

$$T_{(a)(b)} = e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu T_{\mu\nu} = e_{(a)}^\mu T_{\mu(b)} \quad (4.19)$$

$$T_{\mu\nu} = e^{(a)}_\mu e^{(b)}_\nu T_{(a)(b)} = e^{(a)}_\mu T_{(a)\nu}. \quad (4.20)$$

Como se puede observar, las tétradas no permiten pasar libremente de índices griegos a latinos y viceversa, y además, se pueden tener objetos con índices mixtos (es decir con índices grises y

latinos mezclados).

Ejercicio

Mostrar la contracción de índices es independiente de la base utilizada,

$$T_{(a)}^{(a)} = T_\mu{}^\mu. \quad (4.21)$$

4.2. Derivada Intrínseca

Debido a que cada una de las tetradas puede considerarse como un vector tangente, de acuerdo con la relación (4.3), es posible calcular la derivada de una función escalar f en dirección del vector $\mathbf{e}_{(a)}$,

$$f_{,(a)} = \mathbf{e}_{(a)} f = e_{(a)}^\mu \partial_\mu f = e_{(a)}^\mu f_{,\mu}. \quad (4.22)$$

Debido a la complejidad en la notación dentro de este capítulo es conveniente utilizar la coma (,) para indicar derivada parcial y el punto y coma (;) para indicar derivada covariante. Así, la derivada parcial de un vector $A_{(a)}$ será entonces

$$A_{(a),(b)} = e_{(b)}^\mu \partial_\mu A_{(a)}. \quad (4.23)$$

$$= e_{(b)}^\mu \partial_\mu (e_{(a)}^\nu A_\nu) \quad (4.24)$$

Notese que el lado izquierdo de la expresión está calculado en la base local de tetradas y en ella la derivada parcial equivale a la derivada covariante. Sin embargo, al lado derecho de la ecuación tenemos una derivada parcial de dos vectores. Para que esta expresión transforme adecuadamente, la derivada parcial debe reemplazarse por la derivada covariante,

$$A_{(a),(b)} = e_{(b)}^\mu \nabla_\mu (e_{(a)}^\nu A_\nu) \quad (4.25)$$

$$= e_{(b)}^\mu (e_{(a)}^\nu A_{\nu;\mu})_{;\mu}, \quad (4.26)$$

es decir

$$A_{(a),(b)} = e_{(b)}^\mu (e_{(a)}^\nu A_{\nu;\mu} + e_{(a)}^\nu{}_{;\mu} A_\nu) \quad (4.27)$$

$$= e_{(b)}^\mu e_{(a)}^\nu A_{\nu;\mu} + e_{(b)}^\mu e_{(a)}^\nu{}_{;\mu} A_\nu \quad (4.28)$$

$$= e_{(b)}^\mu e_{(a)}^\nu A_{\nu;\mu} + e_{(b)}^\mu e_{(a)}^\nu{}_{;\mu} e_{(c)v} A^{(c)}. \quad (4.29)$$

Ya que la contracción de indices commuta con la derivada covariante, tenemos

$$A_{(a),(b)} = e_{(b)}^{\mu} e_{(a)}^{\nu} A_{\nu;\mu} + e_{(b)}^{\mu} e_{(a)\nu;\mu} e_{(c)}^{\nu} A^{(c)}. \quad (4.30)$$

La última expresión nos muestra que las derivadas covariantes en las dos bases no son iguales debido a un término de corrección que es proporcional a $A^{(c)}$. Es usual escribir la derivada del vector $A_{(a)}$ como

$$A_{(a),(b)} = e_{(b)}^{\mu} e_{(a)}^{\nu} A_{\nu;\mu} + \gamma_{(c)(a)(b)} A^{(c)}. \quad (4.31)$$

donde se han definido los símbolos (no tensores)

$$\gamma_{(c)(a)(b)} = e_{(b)}^{\mu} e_{(a)\nu;\mu} e_{(c)}^{\nu}, \quad (4.32)$$

denominados *Coeficientes de Rotación de Ricci*. Multiplicando a ambos lados de la ecuación por las matrices inversas adecuadas se puede escribir

$$e_{(a)\nu;\mu} = e^{(b)}_{\mu} \gamma_{(c)(a)(b)} e^{(c)}_{\nu}. \quad (4.33)$$

Ejercicio

Utilizar la identidad

$$\left(e_{(a)\nu} e_{(b)}^{\nu} \right)_{;\mu} = \eta_{(a)(b);\mu} = 0 \quad (4.34)$$

para mostrar que

$$\gamma_{(c)(a)(b)} = -\gamma_{(a)(c)(b)}. \quad (4.35)$$

De esta forma, la ecuación (4.31) puede reescribirse como

$$e_{(b)}^{\mu} e_{(a)}^{\nu} A_{\nu;\mu} = A_{(a),(b)} - \gamma_{(c)(a)(b)} A^{(c)}. \quad (4.36)$$

El lado derecho de esta ecuación se define como *derivada intrínseca* del vector $A_{(a)}$ en dirección de $\mathbf{e}_{(b)}$,

$$A_{(a)|(b)} = A_{(a),(b)} - \gamma_{(c)(a)(b)} A^{(c)}, \quad (4.37)$$

Una forma equivalente de escribir esta derivada es

$$A_{(a)|(b)} = A_{(a);(b)} - \eta^{(c)(d)} \gamma_{(c)(a)(b)} A_{(d)}, \quad (4.38)$$

donde se ha reemplazado la derivada parcial por la covariante ya que en la base local de tétradas estas coinciden.

Con estas definiciones es claro que las tétradas permiten pasar de la derivada covariante a la intrínseca y vice-versa fácilmente,

$$A_{(a)|(b)} = e_{(b)}^{\mu} e_{(a)}^{\nu} A_{\nu;\mu} \quad (4.39)$$

$$A_{\nu;\mu} = e^{(a)}_{\nu} e^{(b)}_{\mu} A_{(a)|(b)}. \quad (4.40)$$

Ejercicio

Siguiendo el proceso descrito para el vector, muestre que la derivada intrínseca para un tensor $T_{(a)(b)}$ es

$$T_{(a)(b)|(c)} = T_{(a)(b);(c)} - \eta^{(d)(e)} [\gamma_{(d)(a)(c)} T_{(e)(b)} + \gamma_{(d)(b)(c)} T_{(a)(e)}]. \quad (4.41)$$

4.3. Cálculo de los Coeficientes de Rotación de Ricci

De la definición de los coeficientes de rotación de Ricci

$$\gamma_{(c)(a)(b)} = e_{(b)}^{\mu} e_{(a)\nu;\mu} e_{(c)}^{\nu}, \quad (4.42)$$

es claro que es necesario obtener la derivada covariante de las tétradas y por lo tanto es necesario calcular antes las conexiones. Sin embargo, es posible calcular los coeficientes de rotación de una manera mas sencilla definiendo antes los *pre-coeficientes de rotación*,

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = e_{(b)\mu,\nu} [e_{(a)}^{\mu} e_{(c)}^{\nu} - e_{(a)}^{\nu} e_{(c)}^{\mu}]. \quad (4.43)$$

Esta definición permite comprobar de inmediato que los pre-coeficientes de rotación son antisimétricos en su primer y último índices,

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = -\lambda_{(c)(b)(a)}. \quad (4.44)$$

Intercambiando indices mudos adecuadamente,los pre-coeficientes se pueden escribir como

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = [e_{(b)\mu,\nu} - e_{(b)\nu,\mu}] e_{(a)}^{\mu} e_{(c)}^{\nu}. \quad (4.45)$$

Ejercicio

Calcule los pre-coeficientes de rotación para la base de tetradas ortonormal para el espacio-tiempo de Schwarzschild dada en el ejercicio de la página 73. (Ayuda: Solamente cuatro de los pre-coeficientes son diferentes de cero, sin contar simetrías).

Ahora bien, la derivada covariante de cualquier vector A_μ está dada por

$$A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma \quad (4.46)$$

$$A_{\nu;\mu} = A_{\nu,\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma A_\sigma, \quad (4.47)$$

con lo que se tiene

$$A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \quad (4.48)$$

debido a la simetría de las conexiones. En particular, para las tétradas tendremos

$$e_{(b)\mu;\nu} - e_{(b)\nu;\mu} = e_{(b)\mu,\nu} - e_{(b)\nu,\mu} \quad (4.49)$$

y por ello, los pre-coeficientes de rotación se pueden escribir como

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = [e_{(b)\mu;\nu} - e_{(b)\nu;\mu}] e_{(a)}^\mu e_{(c)}^\nu. \quad (4.50)$$

Utilizando la ecuación (4.42) se obtiene

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = \gamma_{(a)(b)(c)} - \gamma_{(c)(b)(a)}. \quad (4.51)$$

Ejercicio

Realizando una permutación cíclica de índices en la ecuación (4.51) muestre que

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2} [\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(c)(a)(b)} - \lambda_{(b)(c)(a)}]. \quad (4.52)$$

Ejercicio

Calcule los coeficientes de rotación para la base de tetradas ortonormal para el espacio-tiempo de Schwarzschild dada en el ejercicio de la página 73. (Ayuda: Solamente cuatro de los coeficientes son diferentes de cero, sin contar simetrías).

4.4. Tensor de Riemann

La definición del tensor de Riemann implica que al calcular el conmutador de derivadas covariantes aplicado sobre un vector \mathbf{Z} se tiene

$$[\nabla_\rho, \nabla_\sigma] Z^\mu = \nabla_\rho \nabla_\sigma Z^\mu - \nabla_\sigma \nabla_\rho Z^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} Z^\nu + T^\nu_{\rho\sigma} \nabla_\nu Z^\mu, \quad (4.53)$$

donde $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ es el tensor de Riemann y $T^\nu_{\rho\sigma}$ es el tensor de torsión. Ahora bien, en universos sin torsión ($T^\nu_{\rho\sigma} = 0$) tenemos

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} Z^\nu = \nabla_\rho \nabla_\sigma Z_\nu - \nabla_\sigma \nabla_\rho Z_\nu. \quad (4.54)$$

Debido a la antisimetría del tensor de Riemann en su primer par de índices podemos hacer

$$R_{\nu\mu\rho\sigma} Z^\nu = \nabla_\sigma \nabla_\rho Z_\mu - \nabla_\rho \nabla_\sigma Z_\nu \quad (4.55)$$

$$= Z_{\mu;\rho;\sigma} - Z_{\mu;\sigma;\rho}. \quad (4.56)$$

Si aplicamos esta relación para uno de las tetradas tendremos

$$R_{\nu\mu\rho\sigma} e_{(a)}{}^\nu = e_{(a)\mu;\rho;\sigma} - e_{(a)\mu;\sigma;\rho}. \quad (4.57)$$

Ahora bien, sabemos que las componentes del tensor de Riemann en el sistema de tétradas se obtiene mediante

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = R_{\nu\mu\rho\sigma} e_{(a)}{}^\nu e_{(b)}{}^\mu e_{(c)}{}^\rho e_{(d)}{}^\sigma \quad (4.58)$$

$$= [e_{(a)\mu;\rho;\sigma} - e_{(a)\mu;\sigma;\rho}] e_{(b)}{}^\mu e_{(c)}{}^\rho e_{(d)}{}^\sigma. \quad (4.59)$$

Utilizando la relación (4.42) se tiene

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = \left[\left(e^{(f)}{}_\rho \gamma_{(g)(a)(f)} e^{(g)}{}_\mu \right)_{;\sigma} - \left(e^{(f)}{}_\sigma \gamma_{(g)(a)(f)} e^{(g)}{}_\mu \right)_{;\rho} \right] e_{(b)}{}^\mu e_{(c)}{}^\rho e_{(d)}{}^\sigma, \quad (4.60)$$

y expandiendo los términos con derivadas covariantes tenemos

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)} &= \left[e^{(f)}{}_{\rho;\sigma} \gamma_{(g)(a)(f)} e^{(g)}{}_\mu + e^{(f)}{}_\rho \gamma_{(g)(a)(f);\sigma} e^{(g)}{}_\mu \right. \\ &\quad + e^{(f)}{}_\rho \gamma_{(g)(a)(f)} e^{(g)}{}_{\mu;\sigma} - e^{(f)}{}_{\sigma;\rho} \gamma_{(g)(a)(f)} e^{(g)}{}_\mu \\ &\quad \left. - e^{(f)}{}_\sigma \gamma_{(g)(a)(f);\rho} e^{(g)}{}_\mu - e^{(f)}{}_\sigma \gamma_{(g)(a)(f)} e^{(g)}{}_{\mu;\rho} \right] e_{(b)}{}^\mu e_{(c)}{}^\rho e_{(d)}{}^\sigma. \end{aligned}$$

Utilizando de nuevo la ecuación (4.42) se obtiene

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)} &= \left[\gamma_{\rho}^{(f)}{}_{\sigma} \gamma_{(g)(a)(f)} e^{(g)}{}_{\mu} + e^{(f)}{}_{\rho} \gamma_{(g)(a)(f); \sigma} e^{(g)}{}_{\mu} \right. \\ &\quad + e^{(f)}{}_{\rho} \gamma_{(g)(a)(f)} \gamma_{\mu}^{(g)}{}_{\sigma} - \gamma_{\sigma}^{(f)}{}_{\rho} \gamma_{(g)(a)(f)} e^{(g)}{}_{\mu} \\ &\quad \left. - e^{(f)}{}_{\sigma} \gamma_{(g)(a)(f); \rho} e^{(g)}{}_{\mu} - e^{(f)}{}_{\sigma} \gamma_{(g)(a)(f)} \gamma_{\mu}^{(g)}{}_{\rho} \right] e_{(b)}{}^{\mu} e_{(c)}{}^{\rho} e_{(d)}{}^{\sigma}, \end{aligned}$$

de donde se tiene finalmente la expresión para el tensor de Riemann en términos de los coeficientes de rotación,

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)} &= \gamma_{(c)}^{(f)}{}_{(d)} \gamma_{(b)(a)(f)} + \gamma_{(b)(a)(c);(d)} + \gamma_{(g)(a)(c)} \gamma_{(b)}^{(g)}{}_{(d)} \\ &\quad - \gamma_{(d)}^{(f)}{}_{(c)} \gamma_{(b)(a)(f)} - \gamma_{(b)(a)(d);(c)} - \gamma_{(g)(a)(d)} \gamma_{(b)}^{(g)}{}_{(c)} \\ R_{(a)(b)(c)(d)} &= \gamma_{(b)(a)(c);(d)} - \gamma_{(b)(a)(d);(c)} + \left[\gamma_{(c)}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(d)}^{(f)}{}_{(c)} \right] \gamma_{(b)(a)(f)} \\ &\quad + \gamma_{(f)(a)(c)} \gamma_{(b)}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(f)(a)(d)} \gamma_{(b)}^{(f)}{}_{(c)}. \end{aligned}$$

4.5. Tetradas Nulas y Formalismo de Newman-Penrose

Un caso particular del formalismo de tetradas ocurre cuando los $e_{(a)}{}^{\mu}$ escogidos son vectores nulos. Este tratamiento se conoce en la literatura como el *formalismo de Newman-Penrose*, el cual ha sido utilizado bastante en diferentes tópicos de la relatividad general, y en particular en el estudio de la radiación gravitacional. La elección de una base nula fue motivada inicialmente al suponer que el elemento esencial del espacio-tiempo es la estructura de los conos de luz. La elección de las tetradas nulas l , n , m y \bar{m} se hace usualmente de tal forma que l y n son reales mientras que m y \bar{m} son complejos conjugados mutuos.

Para comprender la naturaleza de esta elección para las tetradas suponga que se toma inicialmente la tetrada consistente en un vector como-de-tiempo v^μ y tres vectores como-de-espacio $s_{(1)}^\mu$, $s_{(2)}^\mu$ y $s_{(3)}^\mu$ ortonormales. De esta forma, la métrica en la base de esta tetrada corresponde al tensor de Minkowski, como en la ecuación (4.6). A partir de estos vectores se definen los vectores nulos

$$e_{(0)}{}^{\mu} = l^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v^\mu + s_{(1)}^\mu \right) \quad (4.61)$$

$$e_{(1)}{}^{\mu} = n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v^\mu - s_{(1)}^\mu \right), \quad (4.62)$$

los cuales satisfacen claramente las condiciones

$$l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = 0 \quad (4.63)$$

$$l^\mu n_\mu = -1. \quad (4.64)$$

Los vectores m y \bar{m} se definen mediante

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(s_{(2)}^\mu + i s_{(3)}^\mu \right) \quad (4.65)$$

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(s_{(2)}^\mu - i s_{(3)}^\mu \right). \quad (4.66)$$

Ejercicio

Muestre que los elementos de la tetrada nula definidos satisfacen

$$l^\mu m_\mu = l^\mu \bar{m}_\mu = n^\mu m_\mu = n^\mu \bar{m}_\mu = 0 \quad (4.67)$$

$$m^\mu m_\mu = \bar{m}^\mu \bar{m}_\mu = 0 \quad (4.68)$$

$$m^\mu \bar{m}_\mu = 1. \quad (4.69)$$

Aún cuando las condiciones de normalización (4.64) y (4.69) pueden ser relajadas, en este trabajo se mantendrán con el fin de evitar que los coeficientes de rotación sean antisimétricos en su primer par de indices y para asegurar la permuitación de la operación de subir o bajar los indices de las tetradas con la operación de diferenciación direccional e intrínseca.

De esta forma al escoger la tetrada $(e_{(0)}^\mu, e_{(1)}^\mu, e_{(2)}^\mu, e_{(3)}^\mu) = (l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu)$, la ecuación (4.6) permite encontrar el tensor métrico en la base de las tetradas, el cual resulta tener la representación matricial

$$\eta_{(a)(b)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.70)$$

y además, el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ puede descomponerse en productos de los elementos de la tetrada como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{(a)(b)} e^{(a)}_\mu e^{(b)}_\nu \quad (4.71)$$

de donde

$$g_{\mu\nu} = -l_\mu n_\nu - l_\nu n_\mu + m_\mu \bar{m}_\nu + m_\nu \bar{m}_\mu \quad (4.72)$$

mientras que su inverso resulta ser

$$g^{\mu\nu} = -l^\mu n^\nu - l^\nu n^\mu + m^\mu \bar{m}^\nu + m^\nu \bar{m}^\mu. \quad (4.73)$$

4.5.1. Ejemplo. Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes

La solución de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes está dada por la ecuación (2.50),

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (4.74)$$

Las componentes no nulas del tensor métrico contravariante son

$$g^{vr} = 1 \quad (4.75)$$

$$g^{rr} = 1 - \frac{2M}{r} \quad (4.76)$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \quad (4.77)$$

$$g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.78)$$

Se define ahora la tetrada nula compuesta por los vectores l , n , m y \bar{m} definidos mediante

$$l^\mu = (0, 1, 0, 0) = \delta_r^\mu \quad (4.79)$$

$$n^\mu = \left(1, \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right), 0, 0\right) = \delta_v^\mu + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \delta_r^\mu \quad (4.80)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(0, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_\varphi^\mu\right). \quad (4.81)$$

donde \bar{m} y m son complejos conjugados uno del otro.

Ejercicio

Utilizando la ecuación (4.73),

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu - m^\nu \bar{m}^\mu, \quad (4.82)$$

muestre que la definición hecha para la tetrada nula da como resultado el tensor métrico contravariante de la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes.

Capítulo 5

Agujero Negro de Reissner-Nordström

En este capítulo comenzaremos el análisis de los agujeros negros cargados eléctricamente. Aún cuando desde el punto de vista de la astrofísica es poco probable tener objetos estelares con una carga eléctrica neta, físicamente es posible agregar carga a un agujero negro y estudiar el comportamiento del espacio-tiempo en su exterior. Para obtener las ecuaciones de campo correspondientes, tomamos la acción de Einstein-Hilbert,

$$S_H = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{|g|} R d^4x, \quad (5.1)$$

y agregamos la acción del campo electromagnético para obtener la acción total

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{|g|} [R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] d^4x, \quad (5.2)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético. Al realizar la variación de esta acción con respecto a los campos, obtenemos el conjunto de ecuaciones de Einstein-Maxwell,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} = 2 \left[F_{\mu\sigma} F_{\nu}^{\sigma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right] \quad (5.3)$$

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0. \quad (5.4)$$

5.1. Solución de las Ecuaciones de Campo en presencia de Campo Electromagnético

Para encontrar la métrica del agujero negro con carga supondremos un tensor métrico esféricamente simétrico que debe reducirse a Schwarzschild cuando la carga sea cero. Por ello, proponemos la siguiente forma para el elemento de línea,

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (5.5)$$

Sin embargo, la solución de las ecuaciones de campo se puede realizar más fácilmente en un sistema de tétradas definido por

$$e_{(t)t} = \sqrt{f} \quad (5.6)$$

$$e_{(r)r} = \frac{1}{\sqrt{f}} \quad (5.7)$$

$$e_{(\theta)\theta} = r \quad (5.8)$$

$$e_{(\varphi)\varphi} = r \sin \theta \quad (5.9)$$

con lo que el tensor métrico en esta base toma la forma Minkowskiana,

$$\eta_{(a)(b)} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (5.10)$$

Ejercicio

Muestre que en la base de tétradas definidas las componentes no-nulas del tensor de Einstein son

$$\begin{cases} G^{(t)(t)} = -G^{(r)(r)} = \frac{-1+f+rf'}{r^2} \\ G^{(\theta)(\theta)} = G^{(\varphi)(\varphi)} = \frac{f'}{r} + \frac{f''}{2}, \end{cases} \quad (5.11)$$

donde $f' = \frac{df}{dr}$.

Ahora bien, en este caso las ecuaciones de campo no se plantean en el vacío, sino que existirá un tensor momento-energía para el campo electromagnético como muestra la ecuación (5.3) y estos campos deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell (5.4). Nosotros estamos interesados en una solución que tenga simetría esférica y que posea un campo eléctrico. Por esta razón consideraremos un campo radial de la forma

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_{(r)}, \quad (5.12)$$

donde la constante Q será interpretada como la carga eléctrica. Con esta suposición, el tensor electromagnético toma la forma

$$F_{(a)(b)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{Q}{r^2} & 0 & 0 \\ -\frac{Q}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Ejercicio

Muestre que el tensor momento-energía en la base de tétradas,

$$T^{(a)(b)} = \frac{1}{4\pi} \left[F^{(a)}_{(c)} F^{(b)(c)} - \frac{1}{4} \eta^{(a)(b)} F_{(c)(d)} F^{(c)(d)} \right], \quad (5.14)$$

posee las componentes no nulas

$$\begin{cases} T^{(t)(t)} &= -T^{(r)(r)} = -\frac{Q^2}{r^4} \\ T^{(\theta)(\theta)} &= T^{(\varphi)(\varphi)} = \frac{Q^2}{r^4}. \end{cases} \quad (5.15)$$

De esta forma, a partir de (5.11) y (5.15), las ecuaciones de campo se reducen a

$$\begin{cases} \frac{-1+rf+rf'}{r^2} &= -\frac{Q^2}{r^4} \\ \frac{f'}{r} + \frac{f''}{2} &= \frac{Q^2}{r^4}. \end{cases} \quad (5.16)$$

La primera de estas ecuaciones da como resultado

$$rf' + f = 1 - \frac{Q^2}{r^2} \quad (5.17)$$

$$\frac{d}{dr}(rf) = 1 - \frac{Q^2}{r^2} \quad (5.18)$$

$$rf = \int \left[1 - \frac{Q^2}{r^2} \right] dr \quad (5.19)$$

$$rf = r + \frac{Q^2}{r} + C \quad (5.20)$$

$$f = 1 + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{C}{r}, \quad (5.21)$$

donde C es la constante de integración. Nótese que en el límite $Q = 0$ la función se convierte en $f = 1 + \frac{C}{r}$, y ya que en este límite la métrica debe corresponder a la solución de Schwarzschild, podemos concluir que la constante de integración corresponde a $C = -2M$, con M la masa del agujero. De esta forma, la función buscada es

$$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (5.22)$$

Ejercicio

Compruebe que la función f encontrada satisface también la segunda ecuación de campo,

$$\frac{f'}{r} + \frac{f''}{2} = \frac{Q^2}{r^4}. \quad (5.23)$$

Volviendo a la base coordenada original, el elemento de línea se convierte en

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (5.24)$$

que puede re-escribirse en la forma usual conocida como métrica de Reissner-Nordström,

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{\Delta}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (5.25)$$

donde

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2, \quad (5.26)$$

y el campo eléctrico asociado con el agujero es

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{r^2}\partial_r. \quad (5.27)$$

A partir de la métrica (5.25) se puede observar que existen tres singularidades. La primera corresponde al punto $r = 0$ y es una singularidad no-removible similar al caso $r = 0$ en Schwarzschild. Las otras dos singularidades se encuentran en los puntos donde $\Delta = 0$. Para ubicarlos exactamente podemos escribir

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-), \quad (5.28)$$

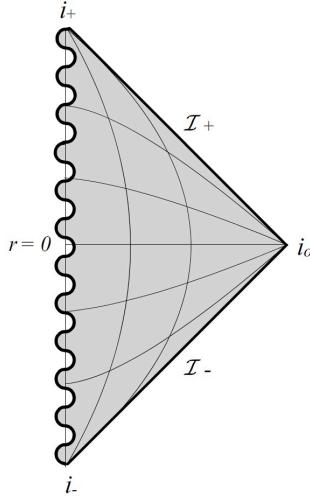
donde

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad (5.29)$$

por lo cual los valores r_{\pm} no son necesariamente reales. De esta forma podemos distinguir tres casos de interés.

5.2. Casos 1 de Reissner-Nordström: $M < |Q|$

Cuando $M < |Q|$ los valores de r_{\pm} no son reales. La función Δ es siempre positiva y la métrica no posee singularidades en $r = r_{\pm}$. Debido a esto, la coordenada t siempre es como-de-tiempo y la coordenada r siempre es como-de-espacio. Ya que no existen horizontes, la singularidad en

Figura 5.1: Diagrama de Carter-Penrose para el caso $M < |Q|$.

$r = 0$ esta desnuda. De acuerdo con la conjetura del censor cósmico, podemos considerar que este caso no se presenta físicamente.

Sin embargo, es posible dibujar el diagrama de Penrose para esta métrica. Para ello es importante notar que asintóticamente el espacio-tiempo es Minkowskiano y por ello la estructura del infinito es igual al de la Figura 3.1. La singularidad $r = 0$ es como-de-tiempo y por ello el diagrama de Penrose es el que se muestra en la Figura 5.1.

Notese que esta solución no es globalmente hiperbólica ya que no es posible definir una hipersuperficie de Cauchy debido a la presencia de la singularidad $r = 0$.

5.3. Caso 2 de Reissner-Nordström: $M > |Q|$

Cuando $M > |Q|$ los valores de r_{\pm} son reales y la función Δ se vuelve cero allí. De esta forma, Δ es positiva para $r > r_+$ y para $r < r_-$, y toma valores negativos para $r_- < r < r_+$. Por esta razón, la singularidad $r = 0$ es como-de-tiempo al igual que en el CASO 1, pero esta vez existen dos horizontes que la ocultan.

Ahora bien, las singularidades $r = r_{\pm}$ se pueden remover mediante un cambio de coordenadas. Para mostrar esto, definimos una coordenada radial de forma similar a la coordenada de Regge-Wheeler de Schwarzschild,

$$dr^* = \frac{r^2}{\Delta} dr = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)} dr. \quad (5.30)$$

Ejercicio

Integre la definición de la coordenada radial r^* para obtener

$$r^* = r + \frac{1}{2\kappa_+} \ln \left(\frac{|r - r_+|}{r_+} \right) + \frac{1}{2\kappa_-} \ln \left(\frac{|r - r_-|}{r_-} \right) + \text{constante}, \quad (5.31)$$

donde

$$\kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2r_{\pm}^2}. \quad (5.32)$$

Nótese que la coordenada r toma valores en el rango $r_+ < r < \infty$, y por ello la coordenada de Regge-Wheeler toma valores en el rango $-\infty < r^* < \infty$.

5.3.1. Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Utilizando la coordenada radial r^* definiremos dos coordenadas nulas al estilo de Eddington-Finkelstein,

$$v = t + r^* \quad (5.33)$$

$$u = t - r^*, \quad (5.34)$$

las cuales toman valores en los rangos $-\infty < v < \infty$ y $-\infty < u < \infty$. Para realizar el cambio a las coordenadas entrantes (v, r, θ, φ) , hacemos

$$dt = dv - dr^*, \quad (5.35)$$

y utilizando la definición (5.30) se tiene

$$dt = dv - \frac{r^2}{\Delta} dr \quad (5.36)$$

$$dt^2 = dv^2 - 2\frac{r^2}{\Delta} dv dr + \frac{r^4}{\Delta^2} dr^2. \quad (5.37)$$

Reemplazando en (5.25), el elemento de línea de Reissner-Nordström se convierte en

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (5.38)$$

Como se puede observar, las singularidades en $r = r_{\pm}$ ya no están presentes y además se identifica de inmediato que $\xi = \frac{\partial}{\partial v}$ es un vector de Killing.

5.3.2. Horizontes de Killing

Las hipersuperficies $r = r_{\pm}$ son horizontes de Killing del campo vectorial $\xi = \frac{\partial}{\partial v}$, el cual corresponde a $\frac{\partial}{\partial t}$ en la región asintóticamente plana. Para comprobar esto tomaremos las funciones $\Phi_{\pm} = r - r_{\pm}$ que definen dos familias de hipersuperficies. Los valores $\Phi_{\pm} = 0$ definen las hipersuperficies de interés, $r = r_{\pm}$. Calcularemos ahora los vectores normales a estas hipersuperficies mediante la expresión (3.1), con lo que se obtiene

$$\mathbf{n}_{\pm} = N_{\pm} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \Phi \partial_{\nu} \quad (5.39)$$

$$= N_{\pm} [g^{rr} \partial_r + g^{rv} \partial_v]. \quad (5.40)$$

A partir de la métrica (5.38) se tiene que

$$g^{vr} = 1 \quad (5.41)$$

$$g^{rr} = \frac{\Delta}{r^2} \quad (5.42)$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \quad (5.43)$$

$$g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (5.44)$$

y por ello, el vector normal toma la forma

$$\mathbf{n}_{\pm} = N_{\pm} \left[\frac{\Delta}{r^2} \partial_r + \partial_v \right]. \quad (5.45)$$

La magnitud de este vector es

$$\mathbf{n}_{\pm}^2 = g_{\mu\nu} n_{\pm}^{\mu} n_{\pm}^{\nu} \quad (5.46)$$

$$= g_{vv} n_{\pm}^v n_{\pm}^v + 2g_{vr} n_{\pm}^v n_{\pm}^r \quad (5.47)$$

$$= -\frac{\Delta}{r^2} N_{\pm}^2 + 2\frac{\Delta}{r^2} N_{\pm}^2 \quad (5.48)$$

$$= \frac{\Delta}{r^2} N_{\pm}^2, \quad (5.49)$$

y al evaluarla en las hipersuperficies $r = r_{\pm}$ se tiene

$$\mathbf{n}_{\pm}^2|_{r=r_{\pm}} = 0, \quad (5.50)$$

con lo cual se muestra que estas hipersuperficies son nulas. Ahora bien, al evaluar el vector normal en estas hipersuperficies tenemos

$$\mathbf{n}_{\pm}|_{r=r_{\pm}} = N_{\pm} \partial_v, \quad (5.51)$$

y como ya sabemos, es posible escoger las funciones N_{\pm} de tal manera que $n_{\pm}^{\sigma} \nabla_{\sigma} \mathbf{n} = 0$. De esta forma, podemos escribir para el vector de Killing como

$$\frac{\partial}{\partial v} = N_{\pm}^{-1} \mathbf{n}_{\pm}, \quad (5.52)$$

con lo cual demostramos que las hipersuperficies $r = r_{\pm}$ son horizontes de Killing. La gravedad superficial en estos horizontes puede ser calculada utilizando la expresión (3.56), para lo cual necesitamos la derivada covariante del vector ξ . Así, se tiene

$$\xi \cdot \nabla \xi^r = \xi^v \partial_v \xi^r + \xi^v \Gamma_{v\sigma}^r \xi^{\sigma} \quad (5.53)$$

$$= \Gamma_{v\sigma}^r \xi^{\sigma} \quad (5.54)$$

$$= \Gamma_{vv}^r \quad (5.55)$$

$$= -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{vv}, \quad (5.56)$$

y evaluando esta expresión en el horizonte,

$$\xi \cdot \nabla \xi^r|_{r=r_{\pm}} = 0. \quad (5.57)$$

Por otro lado,

$$\xi \cdot \nabla \xi^v = \xi^v \partial_v \xi^v + \xi^v \Gamma_{v\sigma}^v \xi^{\sigma} \quad (5.58)$$

$$= \Gamma_{v\sigma}^v \xi^{\sigma} \quad (5.59)$$

$$= \Gamma_{vv}^v \quad (5.60)$$

$$= -\frac{1}{2} g^{vr} \partial_r g_{vv} \quad (5.61)$$

$$= \frac{1}{2} \left[-2 \frac{\Delta}{r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \Delta \right] \quad (5.62)$$

y evaluando en el horizonte,

$$\xi \cdot \nabla \xi^v|_{r=r_{\pm}} = \frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} \Delta \Big|_{r=r_{\pm}} \quad (5.63)$$

$$= \frac{(r_{\pm} - r_{\mp})}{2r_{\pm}^2}. \quad (5.64)$$

Comparando con la expresión (3.56), $\xi \cdot \nabla \xi^{\mu}|_{\mathcal{N}} = \kappa \xi^{\mu}$, y recordando que el vector ξ corresponde a $\frac{\partial}{\partial t}$ en la región asintóticamente plana (y por ello puede ser normalizado mediante $\xi^2 \rightarrow -1$ para $r \rightarrow \infty$), podemos identificar la gravedad superficial de cada uno de los horizontes como

$$\kappa_{\pm} = \frac{(r_{\pm} - r_{\mp})}{2r_{\pm}^2}. \quad (5.65)$$

Ejercicio

Muestre que

$$\xi \cdot \nabla \xi^{\theta} \Big|_{r=r_{\pm}} = \xi \cdot \nabla \xi^{\varphi} \Big|_{r=r_{\pm}} = 0. \quad (5.66)$$

5.3.3. Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Al realizar el cambio a las coordenadas (v, u, θ, φ) utilizando las ecuaciones (5.33) y (5.34), el elemento de línea de Reissner-Nordström se convierte en

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dv du + r^2 d\Omega^2, \quad (5.67)$$

donde r esta definido implícitamente por la relación

$$r^* = \frac{v - u}{2} \quad (5.68)$$

y r^* viene dado por (5.31). Definiremos ahora un sistema de coordenadas similar al de Kruskal-Szekeres, sin embargo, en este caso tenemos dos horizontes y por lo tanto dos gravedades superficiales. Por ello definiremos dos conjuntos de coordenadas (signo + y signo -),

$$V^{\pm} = e^{\kappa_{\pm} v} \quad (5.69)$$

$$U^{\pm} = -e^{-\kappa_{\pm} u}. \quad (5.70)$$

Para el conjunto de coordenadas con el signo + se tiene

$$dV^+ = \kappa_+ e^{\kappa_+ v} dv = \kappa_+ V^+ dv \quad (5.71)$$

$$dU^+ = \kappa_+ e^{-\kappa_+ u} du = -\kappa_+ U^+ du, \quad (5.72)$$

y por ello el elemento de línea (5.67) toma la forma

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2} \frac{dV^+ dU^+}{\kappa_+^2 V^+ U^+} + r^2 d\Omega^2, \quad (5.73)$$

donde r esta definido implícitamente por la relación

$$V^+ U^+ = -e^{\kappa_+(v-u)} = -e^{2\kappa_+ r^*}, \quad (5.74)$$

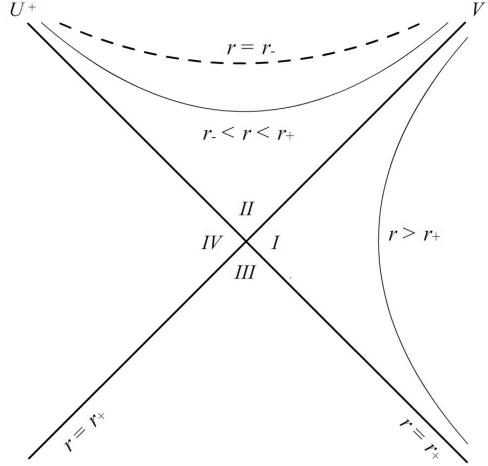


Figura 5.2: Primera parte del diagrama de Kruskal para el caso $M > |Q|$.

o utilizando la ecuación (5.31),

$$V^+ U^+ = -e^{2\kappa_+ r} \left(\frac{r - r_+}{r_+} \right) \left(\frac{r - r_-}{r_-} \right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-}}. \quad (5.75)$$

Reemplazando esta relación en el elemento de línea, se tiene

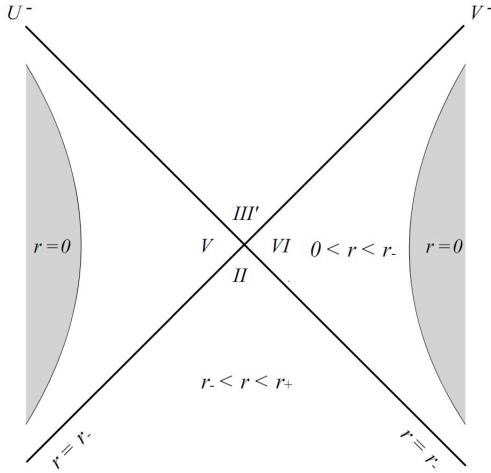
$$ds^2 = -\frac{r_+ r_-}{\kappa_+^2} \frac{e^{-2\kappa_+ r}}{r^2} \left(\frac{r_-}{r - r_-} \right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-} - 1} dV^+ dU^+ + r^2 d\Omega^2. \quad (5.76)$$

5.3.4. Diagrama de Kruskal.

Parte I

Para realizar el diagrama de Kruskal para la métrica dada en (5.76) observemos inicialmente que estas coordenadas no cubren la región $r < r_-$ ya que existe una singularidad en $r = r_-$. Por lo tanto, el diagrama de Kruskal con estas coordenadas es solo una parte del diagrama completo. Considerando la relación (5.75) se observa que las hipersuperficies de $r = \text{constante}$ son hipérbolas. Además, la hipersuperficie $r = r_+$ corresponde al conjunto $\{V^+ = 0\} \cup \{U^+ = 0\}$. De esta manera, la métrica (5.76) cubre cuatro regiones de la extensión analítica maximal de Reissner-Nordström, como se muestra en la Figura 5.2.

Nótese que $r = r_-$ es una superficie singular en este diagrama, pero esta singularidad no es esencial y por ello solo aparece punteada.

Figura 5.3: Segunda parte del diagrama de Kruskal para el caso $M > |Q|$.**Ejercicio**

Realice el cambio a las coordenadas (V^-, U^-) para mostrar que el elemento de línea se convierte en

$$ds^2 = -\frac{r_+ r_- e^{-2\kappa_- r}}{\kappa_-^2} \left(\frac{r_+}{r_+ - r}\right)^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1} dV^- dU^- + r^2 d\Omega^2, \quad (5.77)$$

donde r está definido implícitamente por

$$V^- U^- = -e^{2\kappa_- r} \left(\frac{r - r_-}{r_-}\right) \left(\frac{r_+ - r}{r_+}\right)^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}}. \quad (5.78)$$

Parte II

La segunda parte del diagrama de Kruskal para la extensión analítica maximal de Reissner-Nordström se encuentra utilizando la métrica (5.77). Notese que existe una singularidad en $r = r_+$ y otra en $r = 0$, por lo cual las coordenadas (V^-, U^-) cubren solamente la región $0 < r < r_+$. De la ecuación (5.78) se observa que las hipersuperficies de $r = \text{constante}$ son de nuevo hipérbolas y que la hipersuperficie $r = r_-$ corresponde al conjunto $\{V^- = 0\} \cup \{U^- = 0\}$. Así, la métrica (5.77) cubre también cuatro regiones de la extensión analítica maximal de Reissner-Nordström, como se muestra en la Figura 5.3.

Nótese que la región II de este diagrama corresponde a la misma región de la Figura 5.2, cubierta por las coordenadas con signo +, y además que la singularidad $r = 0$ es como-de tiempo, y se encuentra ubicada en las regiones V y VI.

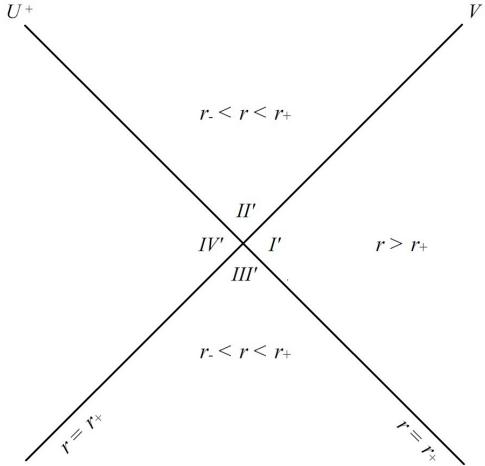


Figura 5.4: Tercera parte del diagrama de Kruskal para el caso $M > |Q|$.

Parte III

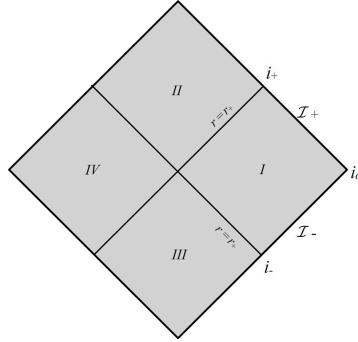
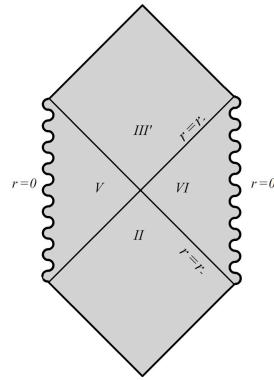
Como ya se mostró, las coordenadas (V^+, U^+) cubren cuatro regiones (I, II, III, IV) de la extensión analítica de Reissner-Nordström mientras que las coordenadas (V^-, U^-) agregan otras tres regiones (V, VI, III'). Ahora bien, de la primera parte del diagrama se observa que la región interior II se conecta en el pasado con las regiones exteriores I y IV y además con la región III. Ya que esta solución es invariante bajo inversión temporal, es de esperar que la región III' deba conectarse en su futuro con tres regiones isométricas a I, II y IV. Así, aparece una tercera parte del diagrama de Kruskal como se muestra en la Figura 5.4.

Las regiones exteriores I' y IV' son isométricas a I y IV y por ello son asintóticamente planas mientras que la región interna II' es isométrica a la región II.

Ahora bien, el análisis realizado se puede repetir de nuevo para estas regiones para obtener un cuarto diagrama. Por lo tanto, el diagrama de Kruskal completo para la extensión analítica maximal de Reissner-Nordström se compone de una secuencia infinita de diagramas similares a los tres mostrados.

5.3.5. Diagrama de Carter-Penrose

Ya que el diagrama de Kruskal para esta métrica tiene infinitas partes, el diagrama de Carter-Penrose también será una secuencia infinita. Por ello analizaremos cada una de las partes para luego unirlas dentro de un solo diagrama.

Figura 5.5: Primera parte del diagrama de Carter-Penrose para el caso $M > |Q|$.Figura 5.6: Segunda parte del diagrama de Carter-Penrose para el caso $M > |Q|$.

Parte I

Al traer todos los puntos del infinito mediante una transformación conforme, las regiones exteriores I y IV que son asintóticamente planas tendrán una frontera exáctamente igual a la de Minkowski como se muestra en la Figura 5.5. Por otro lado, la región II descrita por las coordenadas (V^+, U^+) se compactifica y debe unirse con la misma región descrita por las coordenadas (V^-, U^-) .

Parte II

Al realizar la compactificación de la región interior del agujero, las regiones V y VI contienen la singularidad esencial $r = 0$ que se convierte en una linea recta, Figura 5.6. La región II corresponde a la misma descrita en la primera parte, mientras que la región III se compactifica conectándose con el siguiente diagrama en la secuencia. Nótese que esta región no es asintóticamente plana y por ello su frontera no tiene la estructura minkowskiana.

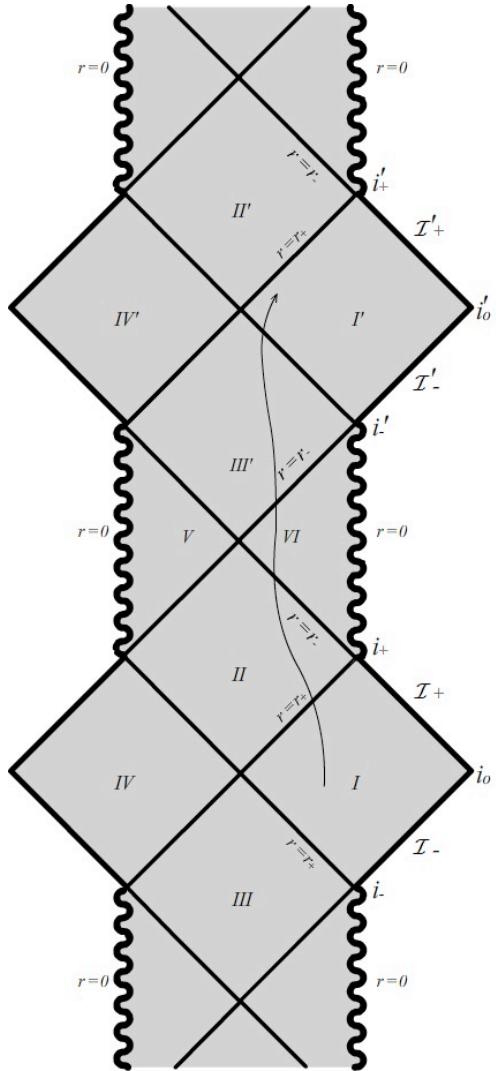


Figura 5.7: Diagrama de Carter-Penrose completo para la métrica de Reissner-Nordström en el caso $M > |Q|$.

Diagrama Completo

Finalmente, el diagrama completo de Carter-Penrose para la solución de Reissner-Nordström es la secuencia que se extiende infinitamente en ambas direcciones mostrado en la Figura 5.7.

Ahora bien, es conveniente aclarar que esta extensión analítica extendiéndose indefinidamente en ambas direcciones se realiza principalmente con el fin de asegurar que la variedad sea geodésicamente completa, es decir que todas las geodésicas que no terminen en la singularidad tengan una longitud afín infinita tanto en la dirección del futuro como del pasado.

5.3.6. Causalidad

Como se dijo antes, la singularidad $r = 0$ en Reissner-Nordström es como-de-tiempo, al contrario de la singularidad de Schwarzschild que es como-de-espacio; lo cual trae interesantes consecuencias. Considere por ejemplo un observador que cae desde la región I hacia el horizonte $r = r_+$ a lo largo de la trayectoria que se observa en la Figura 5.7. Cuando este observador cruza el horizonte, la coordenada temporal se vuelve como-de-espacio y la coordenada espacial se vuelve como-de-tiempo, es decir que una vez en la región II, el observador sigue cayendo inevitablemente en dirección de $r = 0$.

Sin embargo, cuando el observador cruza el segundo horizonte, $r = r_-$, las coordenadas temporal y espacial vuelven a intercambiar su carácter y la caída hacia $r = 0$ puede evitarse. Así, nuestro observador puede moverse en dirección opuesta para salir, evitando la singularidad, y cruzando de nuevo el horizonte $r = r_-$. Al cruzar esta superficie, la coordenada r es otra vez como-de-tiempo y el observador es forzado a moverse, esta vez hacia afuera para cruzar finalmente el horizonte $r = r_+$ y llegar a la región exterior I', saliendo del agujero blanco III'. De esta manera, la solución de Reissner-Nordström se puede interpretar como un infinito número de regiones asintóticamente planas conectadas por muchos agujeros de gusano.

Asegurar que este viaje sea posible no es cierto, ya que existen varios inconvenientes que se pueden observar claramente a partir del diagrama de Carter-Penrose. Tal vez la razón más importante es que en su viaje, el observador debe cruzar un horizonte de Cauchy. En la Figura 5.8 se muestra como es posible definir una hipersuperficie de Cauchy en las regiones asintóticamente planas exteriores, pero debido a la presencia de la singularidad $r = 0$ en las regiones V y VI, la superficie $r = r_-$ es un horizonte de Cauchy, con lo cual se pierde la predictibilidad de las ecuaciones de campo para las regiones interiores.

Además, se nota que la historia completa (e infinitamente larga) de las regiones exteriores está en el pasado causal del horizonte de Cauchy futuro. De esta manera, un observador en este punto ve toda la infinita historia del universo en un tiempo finito, y por ello cualquier señal que llegue a él estará infinitamente corrida al azul. Esto hace razonable creer que cualquier perturbación,

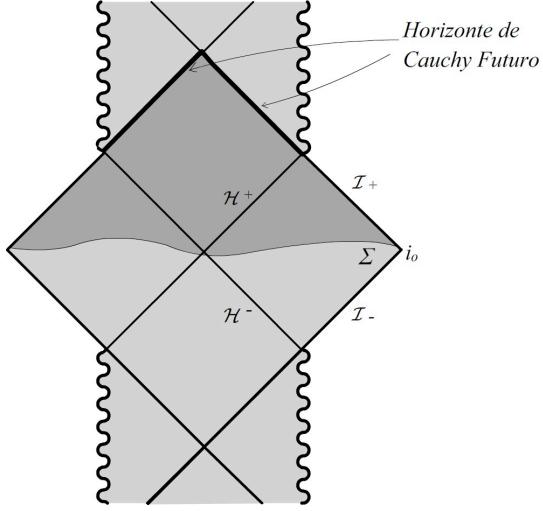


Figura 5.8: Horizonte de Cauchy para la métrica de Reissner-Nordström en el caso $M > |Q|$.

sin importar lo pequeña que sea, provoque un cambio violento en la geometría del horizonte y de las regiones interiores, por lo que no es posible asegurar que en la realidad existen las infinitas regiones asintóticamente planas descritas.

5.3.7. Coordenadas Isotrópicas

Aún cuando es improbable la existencia de los agujeros de gusano que conectan las infinitas regiones asintóticamente planas, es interesante analizar su geometría. Para ello se realizará un cambio de coordenadas similar al utilizado para Schwarzschild. Así, definimos una nueva coordenada radial ρ mediante

$$r = \rho + M + \frac{M^2 - Q^2}{4\rho}. \quad (5.79)$$

De esta manera tenemos

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 \quad (5.80)$$

$$= \left(\rho + M + \frac{M^2 - Q^2}{4\rho} \right)^2 - 2M \left(\rho + M + \frac{M^2 - Q^2}{4\rho} \right) + Q^2 \quad (5.81)$$

$$= \rho^2 - \frac{M^2 - Q^2}{2} + \left(\frac{M^2 - Q^2}{4\rho} \right)^2 \quad (5.82)$$

$$= \left[\rho - \frac{M^2 - Q^2}{4\rho} \right]^2. \quad (5.83)$$

Además,

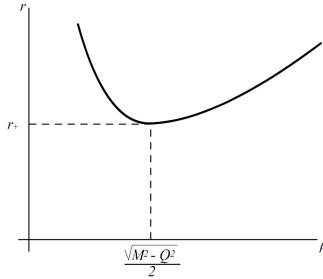


Figura 5.9: Relación entre las coordenadas radiales r y ρ para la métrica de Reissner-Nordström.

$$dr = \left[1 - \frac{M^2 - Q^2}{4\rho^2} \right] d\rho \quad (5.84)$$

$$= \left[\rho - \frac{M^2 - Q^2}{4\rho} \right] \frac{d\rho}{\rho}, \quad (5.85)$$

es decir

$$dr^2 = \Delta \frac{d\rho^2}{\rho^2}. \quad (5.86)$$

Así, el elemento de línea (5.25) en coordenadas isotrópicas $(t, \rho, \theta, \varphi)$ es

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{\rho^2} [d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2]. \quad (5.87)$$

Al graficar r vs. ρ de la ecuación (5.79) se observa que para cada valor de $r > r_+$ se tiene dos valores de ρ . Estos dos valores están conectados por la isometría

$$\rho \longrightarrow \frac{M^2 - Q^2}{4\rho}, \quad (5.88)$$

la cual corresponde a la isometría entre las regiones I y IV del diagrama de Penrose. Además, de la Figura 5.9 se puede observar que existe un punto fijo correspondiente a

$$\rho = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2}, \quad (5.89)$$

es decir a $r = r_+$. Este punto es la 2-esfera minimal que define la garganta del agujero de gusano o puente de Einstein-Rosen formado, de manera similar a lo que ocurre para la métrica de Schwarzschild.

5.4. Caso 3 de Reissner-Nordström: $M = |Q|$

En el caso extremo en el cual $M = |Q|$ se tiene $r_+ = r_- = M$. De esta forma, se tiene

$$\Delta = (r - r_+) (r - r_-) \quad (5.90)$$

$$= (r - M)^2, \quad (5.91)$$

por lo cual la métrica (5.25) se convierte en

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2} + r^2 d\Omega^2. \quad (5.92)$$

Notese que existe una singularidad en $r = M$, pero esta puede ser eliminada con un cambio de variable. Para ello se define la coordenada radial de Regge-Wheeler,

$$dr^* = \frac{dr}{\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2}. \quad (5.93)$$

Ejercicio

Integre la definición de la coordenada radial r^* para obtener

$$r^* = r + 2M \ln \left(\frac{|r - M|}{M} \right) - \frac{M^2}{r - M}, \quad (5.94)$$

Ya que la coordenada r toma valores en el rango $M < r < \infty$, la coordenada de Regge-Wheeler toma nuevamente valores en el rango $-\infty < r^* < \infty$.

5.4.1. Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Definiendo coordenadas de Eddington-Finkelstein al igual que en el caso anterior,

$$v = t + r^* \quad (5.95)$$

$$u = t - r^*, \quad (5.96)$$

las cuales toman valores en los rangos $-\infty < v < \infty$ y $-\infty < u < \infty$, se puede realizar el cambio a las coordenadas entrantes (v, r, θ, φ) . Para ello hacemos

$$dt = dv - dr^*, \quad (5.97)$$

y utilizando (5.93),

$$dt = dv - \frac{dr}{\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2} \quad (5.98)$$

$$dt^2 = dv^2 - 2\frac{1}{\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2} dv dr + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{M}{r}\right)^4}. \quad (5.99)$$

Así, el elemento de línea de Reissner-Nordström extremo se convierte en

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dv^2 + 2dv dr + r^2 d\Omega^2. \quad (5.100)$$

Se puede observar que en estas coordenadas no existe singularidad en $r = M$ y además, que $\xi = \frac{\partial}{\partial v}$ es un vector de Killing.

5.4.2. Horizonte de Killing

La hipersuperficie $r = M$ es un horizonte de Killing "degenerado" del campo vectorial $\xi = \frac{\partial}{\partial v}$, es decir que su gravedad superficial es $\kappa = 0$. Para probarlo, tomaremos la función $\Phi = r - M$ para definir la familia de hipersuperficies. A partir del tensor métrico (5.100) se encuentra que

$$g^{vr} = 1 \quad (5.101)$$

$$g^{rr} = \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 \quad (5.102)$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \quad (5.103)$$

$$g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (5.104)$$

y con ello el vector normal a las hipersuperficies es

$$\mathbf{n} = Ng^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu \quad (5.105)$$

$$= N[g^{rr}\partial_r + g^{rv}\partial_v] \quad (5.106)$$

$$= N\left[\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 \partial_r + \partial_v\right]. \quad (5.107)$$

Su magnitud viene dada por

$$\mathbf{n}^2 = g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \quad (5.108)$$

$$= g_{vv}n^v n^v + 2g_{vr}n^v n^r \quad (5.109)$$

$$= -\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 N^2 + 2\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 N^2 \quad (5.110)$$

$$= \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 N^2, \quad (5.111)$$

y al evaluarla en la hipersuperficie $r = M$, se tiene

$$\mathbf{n}^2|_{r=M} = 0, \quad (5.112)$$

es decir que esta hipersuperficie es nula. Por otro lado, el vector normal en $r = M$ es

$$\mathbf{n}|_{r=M} = N\partial_v, \quad (5.113)$$

y ya que $\frac{\partial}{\partial v}$ es un vector de Killing, la hipersuperficie $r = M$ es un horizonte de Killing de este campo vectorial.

Ejercicio

Muestre que para $\xi = \frac{\partial}{\partial v}$ se tiene

$$\xi \cdot \nabla \xi^\mu|_{r=M} = 0, \quad (5.114)$$

es decir que la gravedad superficial para el horizonte $r = M$ es cero ($\kappa = 0$).

5.4.3. Diagrama de Kruskal

Al pasar a las coordenadas (v, u, θ, φ) , el elemento de línea se convierte en

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dvdu + r^2 d\Omega^2, \quad (5.115)$$

donde r está definido implícitamente por

$$r^* = \frac{v-u}{2} = r + 2M \ln\left(\frac{|r-M|}{M}\right) - \frac{M^2}{r-M}. \quad (5.116)$$

Si definimos las coordenadas

$$V = e^{v/M} \quad (5.117)$$

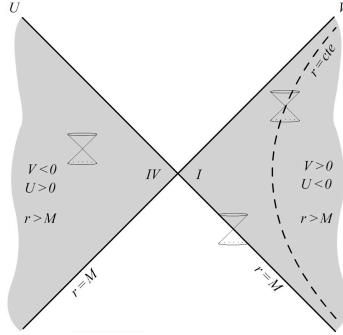
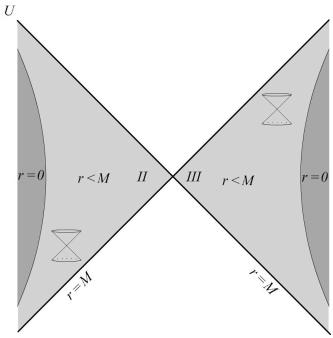
$$U = -e^{-u/M}, \quad (5.118)$$

se tiene

$$dV = \frac{V}{M} dv \quad (5.119)$$

$$dU = -\frac{U}{M} du, \quad (5.120)$$

y por ello la métrica se convierte en

Figura 5.10: Región $r > M$ en el diagrama de Kruskal para el caso $M < |Q|$.Figura 5.11: Región $r < M$ en el diagrama de Kruskal para el caso $M < |Q|$.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 \frac{M^2 dV dU}{VU} + r^2 d\Omega^2, \quad (5.121)$$

con r definido por

$$VU = -e^{\frac{v-u}{M}} \quad (5.122)$$

$$VU = -\left(\frac{r-M}{M}\right)^4 e^{\frac{2r}{M}} e^{-\frac{2M}{r-M}}. \quad (5.123)$$

De esta última relación se observa que tanto para la región $r > M$ como para la región $r < M$, se tiene $VU < 0$. Esto quiere decir que tendremos dos partes para el diagrama de Kruskal. Nótese que la hipersuperficie $r = M$ corresponde a la condición $UV = 0$, es decir al conjunto $\{U = 0\} \cup \{V = 0\}$. Las hipersuperficies de $r = \text{constante}$ corresponden a las hiperbolas $VU = \text{constante}$. De esta forma, para $r > M$ tenemos el diagrama que se muestra en la Figura 5.10.

Por último, la singularidad $r = 0$ queda definida por la hiperbola $VU = -e^2$. Es importante notar que en este caso las coordenadas t y r siempre tienen un carácter temporal y espacial respectivamente. Por esta razón, la singularidad $r = 0$ es como-de-tiempo y la región $r < M$ del

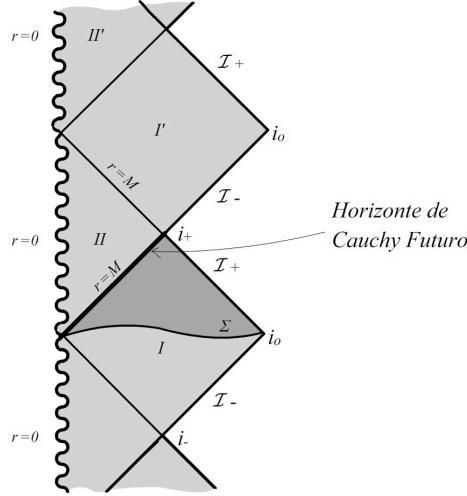


Figura 5.12: Diagrama de Carter-Penrose para el caso $M < |Q|$.

diagrama de Kruskal para el caso extremo de Reissner-Nordström resulta ser el que se observa en la Figura 5.11.

5.4.4. Diagrama de Carter-Penrose

Como se puede observar del diagrama de Kruskal, el vector de Killing $\xi = \frac{\partial}{\partial v}$ es nulo en la hipersuperficie $r = M$, pero es como-de-tiempo en cualquier otro punto. De esta forma, el diagrama de Penrose para el caso extremo de Reissner-Nordström es similar al obtenido para el Caso 2 analizado antes, pero la región II de ese diagrama desaparece. Por ello, la región asintóticamente plana exterior (región I) se conecta directamente con la región interior que contiene la singularidad. De nuevo, es importante notar que la singularidad $r = 0$ es como-de-tiempo, y por ello el horizonte de eventos $r = M$ es también un horizonte de Cauchy, tal como se puede observar en la Figura 5.12.

Capítulo 6

Agujero Negro de Kerr

En el contexto astrofísico es conocido que la mayoría de los objetos estelares rotan pero no tiene carga eléctrica neta apreciable. El espacio-tiempo que describe el comportamiento exterior de uno de estos objetos corresponde a la solución de Kerr, la cual posee masa y momento angular. El proceso de solución de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío es bastante largo y por esta razón se utilizará en su lugar el procedimiento desarrollado por Janis y Newman para obtener la solución de Kerr a partir de la solución de Schwarzschild escrita en términos de una tetrada nula.

6.1. Transformación Compleja de la Solución de Schwarzschild

Como se mostró en un capítulo anterior, la solución de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein puede representarse con la tetrada nula compuesta por los vectores l , n , m y \bar{m} definidos mediante

$$l^\mu = (0, 1, 0, 0) = \delta_r^\mu \quad (6.1)$$

$$n^\mu = \left(1, \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right), 0, 0\right) = \delta_v^\mu + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \delta_r^\mu \quad (6.2)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(0, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_\varphi^\mu\right). \quad (6.3)$$

donde \bar{m} y m son complejos conjugados uno del otro. Ahora, se permitirá que las coordenadas v y r tomen valores complejos. Sin embargo, para asegurar que los vectores \bar{m} y m continúen siendo complejos conjugados uno del otro y que el vector n sea real, la tetrada se puede escribir como

$$l^\mu = \delta_r^\mu \quad (6.4)$$

$$n^\mu = \delta_v^\mu + \frac{1}{2} \left(1 - M \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} \right) \right) \delta_r^\mu \quad (6.5)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\bar{r}} \left(\delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_\varphi^\mu \right). \quad (6.6)$$

Con el fin de obtener la solución de Kerr, se realizará la siguiente transformación compleja para las coordenadas,

$$v \rightarrow v + ia \cos \theta \quad (6.7)$$

$$r \rightarrow r + ia \cos \theta \quad (6.8)$$

$$\theta \rightarrow \theta \quad (6.9)$$

$$\varphi \rightarrow \chi. \quad (6.10)$$

De esta forma, la tetrada nula se convierte en

$$l^\mu = \delta_r^\mu \quad (6.11)$$

$$n^\mu = \delta_v^\mu + \frac{1}{2} \left(1 - M \left(\frac{1}{r+ia \cos \theta} + \frac{1}{\bar{r}-ia \cos \theta} \right) \right) \delta_r^\mu \quad (6.12)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(\bar{r}-ia \cos \theta)} \left(\delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_\chi^\mu \right). \quad (6.13)$$

Restringiendo nuevamente las coordenadas v y r a tomar valores reales, los vectores nulos se escriben

$$l^\mu = \delta_r^\mu \quad (6.14)$$

$$n^\mu = \delta_v^\mu + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \delta_r^\mu \quad (6.15)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r+ia \cos \theta)} \left(ia \sin \theta (\delta_v^\mu + \delta_r^\mu) + \delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_\chi^\mu \right). \quad (6.16)$$

Ejercicio

Muestre que el término $-ia \sin \theta (\delta_v^\mu + \delta_r^\mu)$ introducido en la ecuación (6.16) asegura que la coordenada v sea real.

Ejercicio

Muestre que la tetrada nula obtenida con la transformación compleja, ecuaciones (6.14)-(6.16), representa el tensor métrico contravariante

$$g^{vv} = \frac{a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad (6.17)$$

$$g^{vr} = \frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad (6.18)$$

$$g^{v\chi} = \frac{a}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} = g^{r\chi} \quad (6.19)$$

$$g^{rr} = \frac{r^2 - 2Mr + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad (6.20)$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} = g^{\chi\chi} \sin^2 \theta. \quad (6.21)$$

La métrica obtenida mediante esta transformación compleja se denomina solución de Kerr en coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes.

Ejercicio

Muestre que la tetrada nula dada por las ecuaciones (6.14)-(6.16), representa el elemento de línea de la métrica de Kerr en coordenadas de Eddington-Finkelstein, (v, r, θ, χ) ,

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\varrho} dv^2 + 2dvdr - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\varrho} dv d\chi \\ & - 2a \sin^2 \theta dr d\chi + \varrho d\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\varrho} \sin^2 \theta d\chi^2. \end{aligned} \quad (6.22)$$

donde se ha definido

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (6.23)$$

$$\varrho = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (6.24)$$

Ahora bien, para escribir la solución de Kerr en forma analoga a la solución de Schwarzschild se realiza el cambio de a las coordenadas de Boyer-Lindquist, (t, r, θ, φ) , definidas por

$$dv = dt + \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} dr \quad (6.25)$$

$$d\chi = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr. \quad (6.26)$$

Ejercicio

Muestre que la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist es

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\varrho} dt^2 - \left(\frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\varrho} \right) 2a \sin^2 \theta dt d\varphi \\ & + \frac{\varrho}{\Delta} dr^2 + \varrho d\theta^2 + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\varrho} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2. \end{aligned} \quad (6.27)$$

6.2. La familia de Kerr-Newman

Cualquier espacio-tiempo estacionario que sea solución de las ecuaciones de campo de Einstein y Maxwell y que represente un agujero negro debe pertenecer a la familia de Kerr-Newman que se identifica por 3 parámetros (M, e, a) . El elemento de línea general para esta familia se puede obtener utilizando el mismo truco de la transformación compleja aplicandola ahora a la métrica de Reissner-Nordström. En coordenadas de Boyer-Lindquist la métrica general de la familia de Kerr-Newman toma la forma

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\varrho} dt^2 - \left(\frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\varrho} \right) 2a \sin^2 \theta dt d\varphi \\ & + \frac{\varrho}{\Delta} dr^2 + \varrho d\theta^2 + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\varrho} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \end{aligned} \quad (6.28)$$

donde

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + e^2 \quad (6.29)$$

$$\varrho = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (6.30)$$

Los parámetros que identifican la familia son la masa M , el momento angular por unidad de masa

$$a = \frac{J}{M}, \quad (6.31)$$

con J el momento angular total, y el parámetro de carga

$$e = \sqrt{Q^2 + P^2}, \quad (6.32)$$

con Q la carga eléctrica y P la carga de monopolo magnético. El 4-potencial correspondiente a esta solución toma la forma

$$A = \frac{Qr [dt - a \sin^2 \theta d\varphi] - P \cos \theta [adt - (r^2 + a^2) d\varphi]}{\varrho}. \quad (6.33)$$

Nótese que para $a = 0$ y $P = 0$, la solución se reduce a la métrica de Reissner-Nordström.

La solución de Kerr-Newman posee la isometría

$$t \rightarrow -t \quad (6.34)$$

$$\varphi \rightarrow -\varphi. \quad (6.35)$$

Por otro lado, si se cambia el signo de la coordenada angular φ (es decir $\varphi \rightarrow -\varphi$), el signo del parámetro a cambia. Por esta razón, es posible tomar $a \geq 0$ sin perdida de generalidad. Nótese que la solución de Kerr (6.27) se obtiene tomando $e = 0$.

6.3. Agujero Negro de Kerr

Ahora se presentarán las principales características de la métrica de Kerr. Del elemento de línea (6.27) se observa que esta solución posee dos vectores de Killing, el vector asintóticamente como-de-tiempo

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (6.36)$$

y el vector asintóticamente como-de-espacio

$$\zeta = \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (6.37)$$

El elemento de línea posee una singularidad escencial en $\varrho = 0$, es decir

$$r = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad (6.38)$$

y dos singularidades coordinadas en

$$\Delta = 0. \quad (6.39)$$

Esta última condición se puede reescribir como

$$\Delta = (r - r_+) (r - r_-) = 0, \quad (6.40)$$

donde

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (6.41)$$

lo cual nos permite considerar, al igual que en el caso de Reissner-Nordstrom, tres casos de interés.

6.4. Caso 1 de Kerr: $M < a$

En este caso los dos valores r_{\pm} son complejos, es decir que Δ no tiene ceros reales y por ello no existen las dos singularidades coordenadas. Sin embargo, la singularidad escencial $\varrho = 0$ si existe.

6.4.1. Coordenadas de Kerr-Schild

Para estudiar el comportamiento de la singularidad escencial realizamos el cambio a las coordenadas de Kerr-Schild (\tilde{t}, x, y, z) definidas por

$$\tilde{t} = \int \left[dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr \right] - r \quad (6.42)$$

$$x + iy = (r + ia) \sin \theta e^{i \int [d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr]} \quad (6.43)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (6.44)$$

Ejercicio

Muestre que la métrica de Kerr en coordenadas de Kerr-Schild es

$$\begin{aligned} ds^2 = & -d\tilde{t}^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ & + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2z^2} \left[\frac{r(xdx + ydy) - a(xdx - ydy)}{r^2 + a^2} + \frac{zdz}{r} + d\tilde{t}^2 \right]^2. \end{aligned} \quad (6.45)$$

A partir del elemento de línea (6.45) se puede observar que para $M = 0$ la métrica de Kerr

se reduce al espacio-tiempo de Minkowski. Ahora bien, la coordenada radial se puede escribir en términos de las coordenadas (x, y, z) al notar que a partir de la ecuación (6.43) se tiene

$$x^2 + y^2 = (r^2 + a^2) \sin^2 \theta, \quad (6.46)$$

mientras que utilizando (6.44)

$$z^2 = r^2 \cos^2 \theta = r^2 - r^2 \sin^2 \theta \quad (6.47)$$

$$r^2 \sin^2 \theta = r^2 - z^2. \quad (6.48)$$

Por lo tanto, combinando (6.46) y (6.48),

$$r^2 (x^2 + y^2) = (r^2 + a^2) (r^2 - z^2), \quad (6.49)$$

es decir

$$r^4 - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2) r^2 - a^2 z^2 = 0. \quad (6.50)$$

Para valores de $r = \text{constante} \neq 0$, la ecuación (6.50) se puede reescribir como

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{z^2}{r^2} = 1 + \frac{a^2}{r^2}, \quad (6.51)$$

la cual define elipsoides con focos en $x = \pm a$. Estos elipsoides se degeneran para convertirse en el disco $\{z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ para $r = 0$.

Singularidad $\varrho = 0$

La singularidad esencial de la métrica de Kerr se ubica en $r = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$, por lo cual la ecuación (6.46) implica

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad (6.52)$$

Esto quiere decir que la singularidad $\varrho = 0$ corresponde a un anillo de radio a , como se observa en la Figura 6.1.

Ahora bien, la métrica (6.45) no es singular en $r = 0$, y por ello el rango de la coordenada radial puede extenderse analíticamente a valores negativos

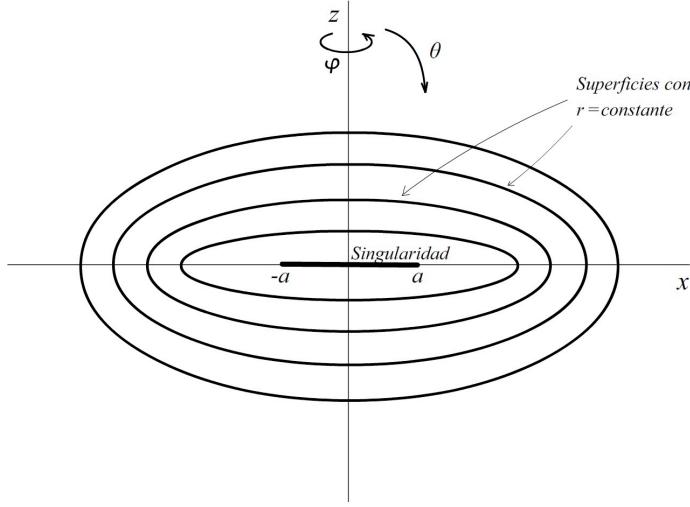


Figura 6.1: Superficies de $r = \text{constante}$ y la singularidad esencial $\varrho = 0$ para la métrica de Kerr.

6.4.2. Diagrama de Carter-Penrose

En los diagramas de Carter-Penrose para las métricas de Schwarzschild y Reissner-Nordström cada punto representa una 2-esfera, pero en el caso de la métrica de Kerr la simetría no es esférica sino axial y por ello el diagrama de Carter-Penrose no se puede visualizar en dos dimensiones. Sin embargo, si se pueden realizar varios cortes para obtener una idea de la forma del diagrama tridimensional completo.

Al realizar cortes angulares se nota que las subvariedades $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$ son geodésicamente completas, en el sentido de que cualquier geodésica que inicialmente sea tangente a la subvariedad, permanecerá siempre tangente a ella.

Diagrama de la Subvariedad $\theta = \frac{\pi}{2}$

En la subvariedad que se obtiene al realizar el corte $\theta = \frac{\pi}{2}$ se encuentra la singularidad esencial $\varrho = 0$ (ubicada en $r = 0$), la cual tiene un carácter como-de-tiempo. Además, la variedad es asintóticamente plana, por lo que la frontera del diagrama tiene la estructura del diagrama de Minkowski, como se observa en la Figura 6.2. Nótese que en este diagrama, cada punto corresponde a una 1-esfera (circulo correspondiente a $0 \leq \varphi < 2\pi$). Ya que no existe ningún horizonte, la singularidad $\varrho = 0$ se encuentra desnuda y toda geodésica radial entrante termina en ella.

Diagrama de la Subvariedad $\theta = 0$

El corte $\theta = 0$ corresponde al eje de simetría de la variedad. Esta subvariedad NO contiene la singularidad $\varrho = 0$, por lo que la coordenada radial puede ser extendida analíticamente a

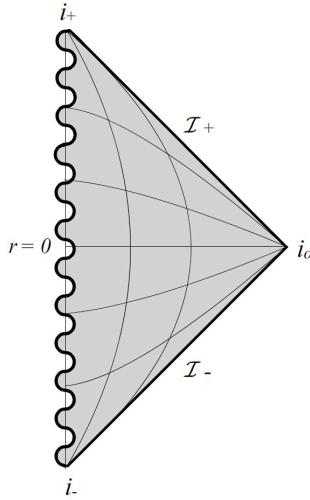


Figura 6.2: Corte equatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$ y la singularidad esencial $\varrho = 0$ para la métrica de Kerr.

valores negativos (atravesando la singularidad en forma de anillo). Además, la subvariedad es asintóticamente plana (tanto para valores $r > 0$ como $r < 0$) y por ello la forma del diagrama de Carter-Penrose para este corte es el que se observa en la Figura 6.3. De nuevo, cada punto en el diagrama corresponde a un círculo, y ya que $r = 0$ no es una singularidad, aparece como una línea punteada.

6.4.3. Estructura Causal cerca de la Singularidad

Aún cuando la hipótesis del censor cósmico permite desechar esta solución por tener una singularidad desnuda, existe una razón extra para no considerarla como físicamente posible. Ya que la métrica de Kerr es axialmente simétrica, posee un vector de Killing asintóticamente como-de-espacio

$$\zeta = \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (6.53)$$

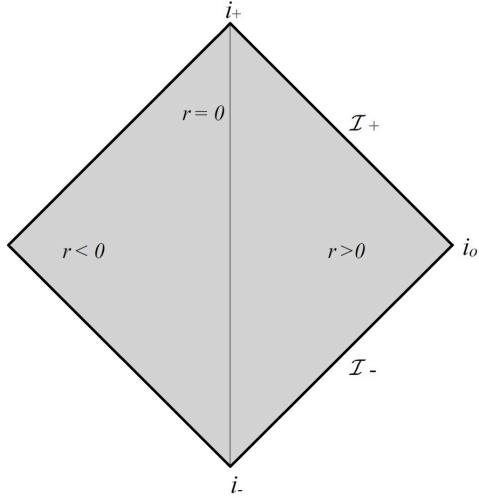
con órbitas cerradas. Ahora bien, la norma de este vector es

$$\zeta^2 = g_{\mu\nu} \zeta^\mu \zeta^\nu = g_{\varphi\varphi}. \quad (6.54)$$

Utilizando la métrica (6.27) se tiene

$$\zeta^2 = \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\varrho} \right) \sin^2 \theta, \quad (6.55)$$

o reemplazando Δ y ϱ de las ecuaciones (6.23) y (6.24),

Figura 6.3: Corte axial $\theta = 0$ para la métrica de Kerr.

$$\zeta^2 = a^2 \sin^2 \theta \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right) + \frac{Ma^2}{r} \left(\frac{2 \sin^4 \theta}{1 + \frac{a^2}{r^2} \cos^2 \theta} \right). \quad (6.56)$$

En la vecindad del anillo correspondiente a la singularidad, $\frac{r}{a} = \delta \ll 1$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$, se tiene

$$\zeta^2 = a^2 + \frac{Ma}{\delta} + O(\delta^2). \quad (6.57)$$

Nótese que para puntos muy cercanos a la singularidad, $|\delta| \ll 1$, pero en la región de r negativo, $\delta < 0$, el vector de Killing tendría norma negativa,

$$\zeta^2 < 0, \quad (6.58)$$

es decir que su carácter es como-de-tiempo. Ya que todas las órbitas de ξ son cerradas, esta relación admite curvas cerradas como-de-tiempo cerca de la singularidad, lo cual produce una violación directa de la causalidad.

6.5. Caso 2 de Kerr: $M > a$

En este caso, la singularidad esencial $\varrho = 0$ con forma de anillo existe, pero además, los valores de r_{\pm} son reales y por lo tanto existen dos singularidades coordinadas en $\Delta = 0$. Se puede observar que la función Δ es positiva para $r > r_+$ y para $r < r_-$, mientras que toma valores negativos para $r_- < r < r_+$. Por esta razón, la singularidad $r = 0$ es como-de-tiempo al igual que en el CASO 1.

6.5.1. Horizontes de Killing

A partir de la métrica de Kerr en coordenadas de Eddington-Finkelstein (6.22), se observa que r_{\pm} son singularidades coordinadas, ya que en las coordenadas (v, r, θ, χ) no existen $\Delta = 0$. Además, se puede observar que tanto $\frac{\partial}{\partial v}$ como $\frac{\partial}{\partial \chi}$ son vectores de Killing.

Las hipersuperficies $r = r_{\pm}$ son horizontes de Killing de los campos vectoriales

$$\psi_{\pm} = \frac{\partial}{\partial v} + \left(\frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2} \right) \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad (6.59)$$

el cual equivale al vector $\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}$, en la región asintóticamente plana. Para comprobar esto, tomaremos las funciones $\Phi_{\pm} = r - r_{\pm}$ que definen dos familias de hipersuperficies, ya que los valores $\Phi_{\pm} = 0$ definen las hipersuperficies de interés, $r = r_{\pm}$. Calcularemos ahora los vectores normales a estas hipersuperficies mediante la expresión (3.1) ,

$$\mathbf{n}_{\pm} = N_{\pm} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \Phi \partial_{\nu} \quad (6.60)$$

$$= N_{\pm} [g^{rr} \partial_r + g^{rv} \partial_v + g^{r\chi} \partial_{\chi}]. \quad (6.61)$$

A partir de la métrica (6.22) se tiene

$$\begin{aligned} g^{vv} &= \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\varrho} & g^{vr} &= \frac{a^2 + r^2}{\varrho} \\ g^{v\chi} &= \frac{a}{\varrho} & g^{r\chi} &= \frac{a}{\varrho} \\ g^{rr} &= \frac{\Delta}{\varrho} & g^{\theta\theta} &= \frac{1}{\varrho} \\ g^{\chi\chi} &= \frac{\csc^2 \theta}{\varrho} \end{aligned} \quad (6.62)$$

y por ello, el vector normal toma la forma

$$\mathbf{n}_{\pm} = N_{\pm} \left[\frac{\Delta}{\varrho} \partial_r + \left(\frac{a^2 + r^2}{\varrho} \right) \partial_v + \frac{a}{\varrho} \partial_{\chi} \right] \quad (6.63)$$

$$= \frac{N_{\pm}}{\varrho} [\Delta \partial_r + (a^2 + r^2) \partial_v + a \partial_{\chi}]. \quad (6.64)$$

La magnitud de este vector es

$$\mathbf{n}_{\pm}^2 = g_{\mu\nu} n_{\pm}^{\mu} n_{\pm}^{\nu} \quad (6.65)$$

$$= g_{vv} n_{\pm}^v n_{\pm}^v + g_{\chi\chi} n_{\pm}^{\chi} n_{\pm}^{\chi} + 2g_{vr} n_{\pm}^v n_{\pm}^r + 2g_{v\chi} n_{\pm}^v n_{\pm}^{\chi} + 2g_{r\chi} n_{\pm}^r n_{\pm}^{\chi} \quad (6.66)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\pm}^2 &= \frac{N_{\pm}^2}{\varrho^2} \left[- \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\varrho} \right) (a^2 + r^2)^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\varrho} a^2 \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + 2\Delta (a^2 + r^2) - \frac{2a^2 \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\varrho} (a^2 + r^2) - 2a^2 \Delta \sin^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (6.67)$$

y al evaluarla en las hipersuperficies $r = r_{\pm}$, es decir $\Delta = 0$, se tiene

$$\mathbf{n}_{\pm}^2|_{r=r_{\pm}} = 0, \quad (6.68)$$

con lo cual se muestra que estas hipersuperficies son nulas. Ahora bien, al evaluar el vector normal en $r = r_{\pm}$ se obtiene

$$\mathbf{n}_{\pm}|_{r=r_{\pm}} = \frac{N_{\pm}}{r_{\pm}^2 + a^2 \cos^2 \theta} [(a^2 + r_{\pm}^2) \partial_v + a \partial_{\chi}] \quad (6.69)$$

$$= N_{\pm} \left(\frac{a^2 + r_{\pm}^2}{r_{\pm}^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \left[\partial_v + \frac{a}{a^2 + r_{\pm}^2} \partial_{\chi} \right], \quad (6.70)$$

es decir

$$\mathbf{n}_{\pm}|_{r=r_{\pm}} = N_{\pm} \left(\frac{a^2 + r_{\pm}^2}{r_{\pm}^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \psi_{\pm} \quad (6.71)$$

y como ya sabemos, es posible escoger las funciones N_{\pm} de tal manera que $n_{\pm}^{\sigma} \nabla_{\sigma} \mathbf{n} = 0$. De esta forma, se demostró que el vector normal es el vector de Killing y con ello, las hipersuperficies $r = r_{\pm}$ son horizontes de Killing.

La gravedad superficial en estos horizontes puede ser calculada utilizando la expresión (3.56), para lo cual necesitamos la derivada covariante del vector ψ_{\pm} . Así, se tiene

$$\psi \cdot \nabla \psi^v = \nabla_v \psi^v + \frac{a}{a^2 + r_{\pm}^2} \nabla_{\chi} \psi^v \quad (6.72)$$

$$= \partial_v \psi^v + \Gamma_{v\sigma}^v \psi^{\sigma} + \frac{a}{a^2 + r_{\pm}^2} [\partial_{\chi} \psi^v + \Gamma_{\chi\sigma}^v \psi^{\sigma}] \quad (6.73)$$

$$= \Gamma_{vv}^v \psi^v + \Gamma_{v\chi}^v \psi^{\chi} + \frac{a}{a^2 + r_{\pm}^2} [\Gamma_{\chi v}^v \psi^v + \Gamma_{\chi\chi}^v \psi^{\chi}] \quad (6.74)$$

$$= \Gamma_{vv}^v \psi^v + 2 \left(\frac{a}{a^2 + r_{\pm}^2} \right) \Gamma_{\chi v}^v + \left(\frac{a}{a^2 + r_{\pm}^2} \right)^2 \Gamma_{\chi\chi}^v. \quad (6.75)$$

Al reemplazar las conexiones correspondientes y evaluando en la hipersuperficie $r = r_{\pm}$, se tiene

$$\psi \cdot \nabla \psi^v|_{r=r_{\pm}} = \frac{[a^2 + 2r_{\pm}^2 + a^2 \cos(2\theta)]}{4(a^2 + r_{\pm}^2)} \left[\frac{\varrho \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \Delta \frac{\partial \varrho}{\partial r}}{\varrho^2} \right]_{r=r_{\pm}} \quad (6.76)$$

$$= \frac{[a^2 + 2r_{\pm}^2 + a^2 \cos(2\theta)]}{4(a^2 + r_{\pm}^2)} \left[\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right]_{r=r_{\pm}}. \quad (6.77)$$

Ahora bien, el numerador de esta expresión se puede escribir como

$$a^2 + 2r_{\pm}^2 + a^2 \cos(2\theta) = a^2 + 2r_{\pm}^2 + a^2 (1 - 2 \sin^2 \theta) \quad (6.78)$$

$$= 2a^2 + 2r_{\pm}^2 - 2a^2 \sin^2 \theta \quad (6.79)$$

$$= 2a^2 \cos^2 \theta + 2r_{\pm}^2 \quad (6.80)$$

$$= 2 \varrho|_{r=r_{\pm}}, \quad (6.81)$$

por lo cual se tiene

$$\psi \cdot \nabla \psi^v|_{r=r_{\pm}} = \frac{1}{2(a^2 + r_{\pm}^2)} \left[\frac{\partial \Delta}{\partial r} \right]_{r=r_{\pm}}. \quad (6.82)$$

Por otro lado, a partir de la función $\Delta = (r - r_+) (r - r_-)$ se calcula la derivada

$$\frac{\partial \Delta}{\partial r} = 2r - r_+ - r_-, \quad (6.83)$$

y por ello, al evaluar en el horizonte,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial r} \Big|_{r=r_{\pm}} = r_{\pm} - r_{\mp}. \quad (6.84)$$

De esta forma se tiene finalmente

$$\psi \cdot \nabla \psi^v|_{r=r_{\pm}} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2(a^2 + r_{\pm}^2)}. \quad (6.85)$$

Comparando con la expresión (3.56), $\xi \cdot \nabla \xi^{\mu}|_{\mathcal{N}} = \kappa \xi^{\mu}$, podemos identificar la gravedad superficial de cada uno de los horizontes como

$$\kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2(a^2 + r_{\pm}^2)}. \quad (6.86)$$

Ejercicio

Muestre que

$$\xi \cdot \nabla \xi^r|_{r=r_{\pm}} = \xi \cdot \nabla \xi^{\theta}|_{r=r_{\pm}} = 0 \quad (6.87)$$

y

$$\xi \cdot \nabla \xi^r|_{r=r_{\pm}} = \kappa_{\pm} \left(\frac{a}{a^2 + r_{\pm}^2} \right). \quad (6.88)$$

6.5.2. Diagrama de Carter-Penrose

Al igual que en el Caso I, en el agujero negro de Kerr con $M > a$ existe la singularidad esencial $\varrho = 0$, la cual tiene forma de anillo, $x^2 + y^2 = a$ en coordenadas de Kerr-Schild, pero esta vez aparecen los dos horizontes $r = r_{\pm}$ que la ocultan. De igual manera, debido a la simetría axial de la variedad, el diagrama de Penrose debe realizarse en cortes asintóticamente planos. De esta forma, la singularidad $\varrho = 0$ aparece en el corte ecuatorial, $\theta = \frac{\pi}{2}$, pero no existe en el corte axial, $\theta = 0$. Debido a ello, la variedad puede extenderse analíticamente a valores de $r < 0$ como en el Caso I. Aún cuando es posible comprobar que en este caso también existen curvas cerradas como-de-tiempo en la cercanía de la singularidad, lo cual viola la causalidad, los horizontes de eventos ocultan su efecto sobre las regiones asintóticamente planas.

Al unir los diagramas en una sola representación, se obtiene la Figura 6.4, donde la línea punteada representa la singularidad $\varrho = 0$. Nótese que el diagrama se extiende infinitamente en ambas direcciones, al igual que en el caso del agujero negro de Reissner-Nordström, y además la presencia del horizonte de Cauchy que hace que esta extensión analítica maximal no sea globalmente hiperbólica, en la Figura 6.5.

Finalmente, es importante notar que, al igual que para Reissner-Nordström, la existencia de las infinitas regiones asintóticamente planas es poco probable en la realidad y además, la existencia del horizonte de Cauchy no permite predecir lo que sucedería a un observador que intente viajar entre ellas.

6.5.3. Velocidad Angular del Agujero Negro

El vector de Killing ψ_+ se puede escribir en las coordenadas de Boyer-Lindquist como

$$\psi_+ = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (6.89)$$

donde se ha definido

$$\Omega = \frac{a}{a^2 + r_+^2}. \quad (6.90)$$

Si se utilizan las expresiones (6.31) y (6.41) se tiene

$$\Omega = \frac{\frac{J}{M}}{\left(\frac{J}{M}\right)^2 + \left(M + \sqrt{M^2 - \left(\frac{J}{M}\right)^2}\right)^2} \quad (6.91)$$

$$= \frac{J}{2M \left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2}\right)}. \quad (6.92)$$

Ahora comprobaremos que Ω es la velocidad angular del horizonte de eventos $r = r_+$.

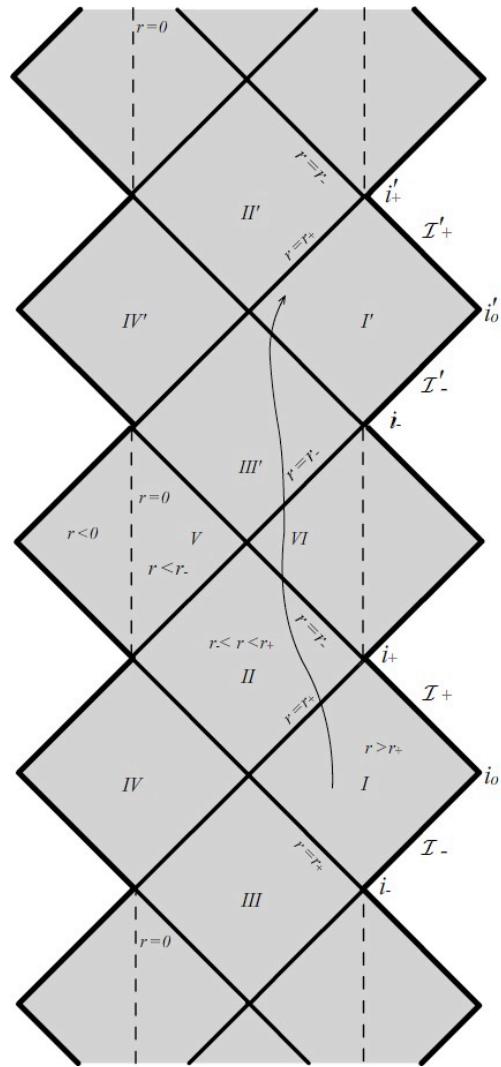


Figura 6.4: Diagrama de Carter-Penrose para la métrica de Kerr con $M > a$. La línea punteada indica que la singularidad esencial $\rho = 0$ se encuentra ubicada en el corte ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$ pero no en el corte axial $\theta = 0$. Cada punto del diagrama corresponde a una 1-esfera.

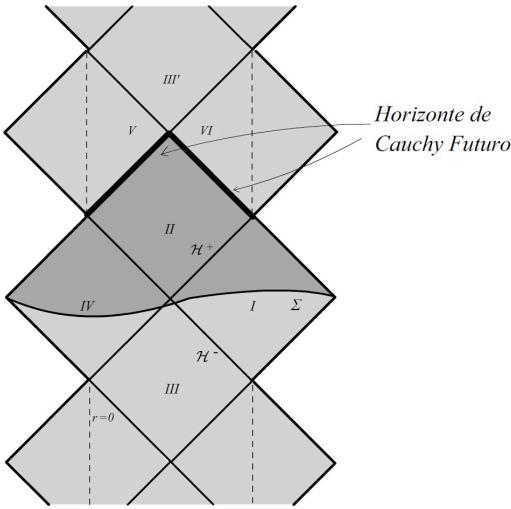


Figura 6.5: Diagrama de Carter-Penrose para la métrica de Kerr con $M > a$. La línea sombreada corresponde al horizonte de Cauchy.

Ejercicio

Compruebe que en las coordenadas de Boyer-Lindquist

$$\psi_+^\mu \partial_\mu [\varphi - \Omega t] = 0. \quad (6.93)$$

La ecuación (6.93) define las órbitas del vector de Killing ψ_+ , las cuales quedan determinadas por

$$\varphi - \Omega t = \text{constante}, \quad (6.94)$$

es decir

$$\varphi = \Omega t + \text{constante}. \quad (6.95)$$

Por lo tanto, las partículas que se mueven en órbitas de ψ_+ se encuentran rotando con velocidad angular Ω con respecto a un observador asintótico que se encuentre en reposo, es decir observadores en órbitas del vector $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$. Es decir que estas partículas rotan con respecto a un sistema estacionario en el ∞ . Ahora bien, ya que los generadores del horizonte se encuentran en órbitas del vector de Killing ψ_+ , podemos concluir que tanto el horizonte como el agujero negro rota con velocidad angular Ω .

6.5.4. La Ergosférica

Como se demostró en la sección anterior, las superficies $r = r_{\pm}$ son horizontes de Killing de los vectores ψ_{\pm} , pero no del vector de Killing $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ ni de $\frac{\partial}{\partial v}$. Esto se debe a que estos dos vectores no son nulos en la hipersuperficie. Por ejemplo, para ξ se tiene

$$\xi^2 = g_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu} = g_{tt} = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\varrho}\right). \quad (6.96)$$

Al evaluar en los horizontes $r = r_{\pm}$, se tiene

$$\xi^2|_{r=r_{\pm}} = \frac{a^2 \sin^2 \theta}{r_{\pm}^2 + a^2 \cos^2 \theta} \neq 0, \quad (6.97)$$

lo cual muestra que el vector ξ no es nulo sobre los horizontes, excepto en los polos, $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Algo similar ocurre con el vector $\frac{\partial}{\partial v}$ y por ello los horizontes de Killing estudiados se toman con respecto a los vectores ψ_{\pm} .

Ahora bien, reemplazando (6.23) y (6.24) en la expresión (6.96) se tiene

$$\xi^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right), \quad (6.98)$$

con lo que se puede observar que la norma de ξ puede ser positiva, negativa o cero. De esta forma, ξ es como de tiempo para

$$1 > \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad (6.99)$$

$$r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta > 0, \quad (6.100)$$

es decir para valores de r que cumplan

$$r > M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (6.101)$$

De esta forma, el vector ξ es nulo en la hipersuperficie denominada *ergosférica*, la cual está definida por

$$r = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (6.102)$$

Esta superficie coincide con el horizonte $r = r_+$ únicamente en los polos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, como se puede observar de la Figura 6.6. La región comprendida entre la ergosférica y el horizonte se denomina *ergoregión*, y tiene una gran importancia en el Proceso de Penrose, que se estudiará más adelante.

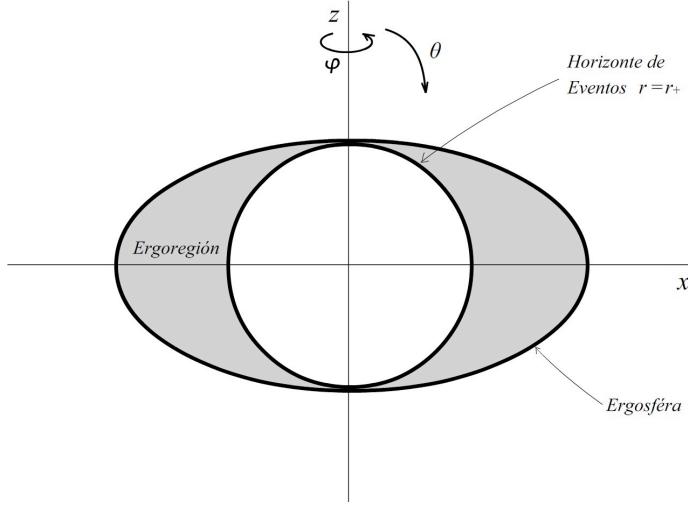


Figura 6.6: Ergosfera y Horizonte de eventos exterior para la métrica de Kerr con $M > a$.

6.5.5. Arrastre de Sistemas Inerciales

Ya que el agujero negro de Kerr se encuentra rotando, su movimiento produce un arrastre del espacio-tiempo a su alrededor. Para comprender como ocurre esto, consideraremos un fotón que es emitido a una distancia r en el plano ecuatorial, $\theta = \frac{\pi}{2}$, y en la dirección φ . El elemento de línea general que describe el comportamiento de este fotón es

$$ds^2 = 0 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2, \quad (6.103)$$

que se puede escribir como la ecuación diferencial

$$g_{\varphi\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 2g_{t\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) + g_{tt} = 0. \quad (6.104)$$

Con ello se obtiene la velocidad del fotón en dirección φ ,

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}}. \quad (6.105)$$

Si se considera un fotón que inicialmente está en la ergosfera, $r_e = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$, y se toma la métrica de Kerr (6.27), se tiene

$$g_{tt}|_{r=r_e} = 0 \quad (6.106)$$

$$g_{t\varphi}|_{r=r_e} = -a \sin^2 \theta \quad (6.107)$$

$$g_{\varphi\varphi}|_{r=r_e} = 2 \sin^2 \theta [Mr_e + a^2 \sin^2 \theta], \quad (6.108)$$

y con ello, la velocidad del fotón resulta ser

$$\left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{r=r_e} = \begin{cases} \frac{a}{Mr_e + a^2 \sin^2 \theta} & \\ 0 & \end{cases}. \quad (6.109)$$

La primera solución corresponde a un fotón que se mueve inicialmente en la misma dirección de la rotación del agujero (ya que tiene el mismo signo de a), mientras que la segunda solución corresponde a un fotón que inicialmente se mueve en la dirección opuesta, y como se puede observar, este fotón no se mueve. Por esta razón podemos concluir que ninguna partícula con masa puede escapar de la rotación del agujero negro a partir de la ergosfera y por lo tanto es obligada a moverse en la misma dirección. A este efecto se le denomina *arrastre de los sistemas inerciales*.

6.5.6. Cantidades Conservadas

Como ya se dijo, en la variedad de Kerr existen dos vectores de Killing, ξ y ζ , y por lo tanto existirán dos cantidades conservadas. Para encontrar estas cantidades, recordamos que para una partícula masiva, el 4-momentum viene dado por (1.50),

$$p_\mu = m \frac{dx^\nu}{d\tau} g_{\mu\nu}. \quad (6.110)$$

Al tomar el vector de Killing $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$, la cantidad conservada asociada corresponde a la energía por unidad de masa,

$$E = -\xi^\mu p_\mu = -\xi^t p_t = -m \frac{dx^\nu}{d\tau} g_{t\nu}. \quad (6.111)$$

Utilizando la métrica de Kerr, (6.27), se tiene

$$E = -m \frac{dt}{d\tau} g_{tt} - m \frac{d\varphi}{d\tau} g_{t\varphi} \quad (6.112)$$

$$E = \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\varrho} \right) m \frac{dt}{d\tau} + \left[\frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\varrho} \right] m \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (6.113)$$

Ejercicio

Muestre que al tomar el vector de Killing, la cantidad conservada asociada es el momento angular por unidad masa,

$$L = - \left[\frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\varrho} \right] m \frac{dt}{d\tau} + \left[\frac{(r^2 + a^2) - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\varrho} \right] \sin^2 \theta m \frac{d\varphi}{d\tau}. \quad (6.114)$$

6.5.7. El Proceso de Penrose

En la definición de la energía en la ecuación (6.111) se utiliza un signo menos debido a que en la región asintóticamente plana, tanto el vector de Killing ξ como el 4-momentum son vectores como-de-tiempo y por ello su producto interno es negativo. Sin embargo, ya se ha demostrado que dentro de la ergosfera el vector ξ cambia su carácter para convertirse en un vector como-de-espacio. De esta forma, en la ergoregión se tiene una energía negativa,

$$E = -\xi^\mu p_\mu < 0. \quad (6.115)$$

Este cambio de signo en E permite definir un proceso de extracción de energía del agujero negro de Kerr, el cual se denomina *proceso de Penrose*. Para comprenderlo, consideremos un sistema compuesto de dos partículas que se dirigen hacia el agujero negro partiendo de la región exterior de la ergosfera. Si p_μ es el 4-momentum inicial del sistema, la energía inicial es positiva y viene dada por

$$E^o = -\xi^\mu p_\mu^o. \quad (6.116)$$

Cuando el sistema está cerca de la ergosfera, las dos partículas se separan, de tal manera que una de ellas cae a la ergoregión mientras que la otra escapa al infinito. La conservación del 4-momentum da como resultado

$$p_\mu^o = p_\mu^1 + p_\mu^2, \quad (6.117)$$

donde p_μ^1 es el 4-momentum de la partícula que entra en la ergoregión mientras que p_μ^2 es el 4-momentum de la partícula que escapa. Contrayendo esta ecuación con el vector de Killing ξ se obtiene

$$E^o = E^1 + E^2, \quad (6.118)$$

donde la energía de la partícula que entra es negativa, $E^1 < 0$. Por ello, podemos concluir que la energía de la partícula que escapa es mayor que la energía inicial del sistema,

$$E^2 > E^o,$$

es decir que se ha extraído energía del agujero negro.

Origen de la Energía Extraída

La energía obtenida a partir del proceso de Penrose proviene del momento angular del agujero negro. Para comprobarlo, consideramos el vector de Killing

$$\psi_+ = \xi + \Omega\zeta, \quad (6.119)$$

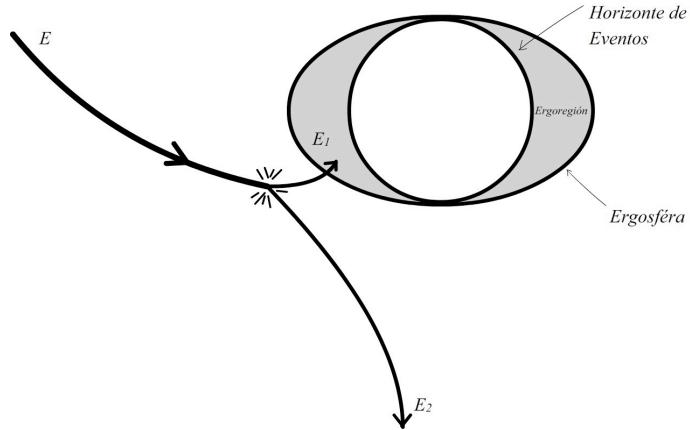


Figura 6.7: Proceso de Penrose para la extracción de energía a partir de un agujero negro de Kerr.

el cual es nulo (dirigido al futuro) en el horizonte de eventos $r = r_+$, el cual está ubicado dentro de la ergosfera. En este horizonte, el 4-momentum de la partícula que entra es como-de-tiempo o nulo (dirigido al futuro), y por ello el producto interno $\psi_+^\mu p_\mu$ debe ser negativo o nulo,

$$-\psi_+^\mu p_\mu \geq 0. \quad (6.120)$$

Reemplazando el vector ψ_+ y realizando la contracción se obtiene la condición

$$E - \Omega L \geq 0, \quad (6.121)$$

es decir

$$L \leq \frac{E}{\Omega}. \quad (6.122)$$

Para la partícula que entra en la ergoregión se tiene entonces

$$L^1 \leq \frac{E^1}{\Omega}, \quad (6.123)$$

y debido a que $E^1 < 0$, podemos concluir que su momento angular debe ser negativo,

$$L^1 < 0. \quad (6.124)$$

Por esta razón, cuando la partícula entra, el momento angular total del agujero negro disminuye, de tal forma que se provee la energía extraída en el proceso de Penrose.

Ahora bien, una vez se extrae una cantidad de energía E^1 , el agujero negro alcanza un nuevo estado de equilibrio en el cual su masa es $M + \delta M$ y su momento angular será $J + \delta J$, donde

$$\delta M = E^1 \quad (6.125)$$

$$\delta J = L^1. \quad (6.126)$$

De esta forma, la ecuación (6.123) será

$$\delta J \leq \frac{\delta M}{\Omega}. \quad (6.127)$$

Utilizando la ecuación (6.92) para la velocidad angular del agujero, se obtiene

$$\delta J \leq \frac{2M \left[M^2 + \sqrt{M^4 - J^2} \right] \delta M}{J}. \quad (6.128)$$

Ejercicio

Compruebe que la ecuación (6.128) es equivalente a la condición

$$\delta \left[M^2 + \sqrt{M^4 - J^2} \right] \geq 0. \quad (6.129)$$

La ecuación (6.129) muestra que la extracción de energía por el proceso de Penrose solo es posible mientras que la cantidad $M^2 + \sqrt{M^4 - J^2}$ no disminuya. Ahora bien, esta cantidad está relacionada con el horizonte de eventos, como se comprueba mas adelante.

Área del horizonte de eventos

Para calcular el área del horizonte de eventos debemos recordar que el elemento de volumen generalizado se obtiene mediante

$$dV = \sqrt{|g|} d^n x, \quad (6.130)$$

donde g es el determinante de la métrica y n es la dimensión de la variedad. Si se considera una hipersuperficie de la variedad de Kerr, en coordenadas de Boyer-Lindquist, con $t = \text{constante}$ y $r = r_+$, el volumen generalizado depende únicamente de las coordenadas θ y φ , y corresponde al área del horizonte de eventos,

$$A = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\sqrt{|g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}|} \right]_{r=r_+} d\theta d\varphi \quad (6.131)$$

$$A = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r_+^2 + a^2) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (6.132)$$

$$A = 4\pi (r_+^2 + a^2). \quad (6.133)$$

Utilizando el valor de r_+ se obtiene finalmente el área del horizonte de eventos,

$$A = 8\pi \left[M^2 + \sqrt{M^4 - J^2} \right]. \quad (6.134)$$

De esta forma, la ecuación (6.129), que limita la extracción de energía se puede escribir como

$$\delta A \geq 0, \quad (6.135)$$

es decir que el proceso de Penrose solo permite obtener energía mientras que el área del horizonte de eventos del agujero negro no disminuya. Como se comprobará más adelante, la ecuación (6.135) es un caso especial de la segunda ley de la mecánica de agujeros negros.

6.6. Caso 3 de Kerr: $M = a$

Para la métrica de Kerr extrema, $M = a$, se tiene $r_+ = r_- = M$ y por ello

$$\Delta = (r - M)^2. \quad (6.136)$$

Con el fin de estudiar la estructura de esta variedad, se definen las coordenadas de Eddington-Finkelstein,

$$dv = dt + \frac{(r^2 + M^2)}{(r - M)^2} dr \quad (6.137)$$

$$d\chi = d\varphi + \frac{M}{(r - M)^2} dr. \quad (6.138)$$

Ejercicio

Compruebe que la métrica extrema de Kerr en coordenadas de Eddington-Finkelstein $(v, \chi, \theta, \varphi)$ es

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{r^2 - 2Mr + M^2 \cos^2 \theta}{\varrho} dv^2 + 2dvdr - \frac{4M^2 r \sin^2 \theta}{\varrho} dv d\chi \\ & - 2M \sin^2 \theta dr d\chi + \varrho d\theta^2 + \frac{(r^2 + M^2)^2 - (r - M)^2 M^2 \sin^2 \theta}{\varrho} \sin^2 \theta d\chi^2. \end{aligned} \quad (6.139)$$

De esta expresión se observa que los vectores $\xi = \frac{\partial}{\partial v}$ y $\zeta = \frac{\partial}{\partial \chi}$ son vectores de Killing.

6.6.1. Horizonte de Killing

La hipersuperficie $r = M$ en la métrica de Kerr extrema es un horizonte de Killing degenerado, $\kappa = 0$, correspondiente al vector

$$\psi = \xi + \Omega \zeta, \quad (6.140)$$

donde la velocidad angular es esta vez

$$\Omega = \frac{a}{2M^2} = \frac{1}{2M}. \quad (6.141)$$

Para comprobarlo consideramos la familia de hipersuperficies $\Phi = r - M$, cuyo vector normal está dado por

$$\mathbf{n} = N g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \quad (6.142)$$

$$= N [g^{rr} \partial_r + g^{rv} \partial_v + g^{r\chi} \partial_\chi]. \quad (6.143)$$

A partir de la métrica (6.139) se tiene que

$$\begin{aligned} g^{vv} &= \frac{M^2 \sin^2 \theta}{\varrho} & g^{vr} &= \frac{M^2 + r^2}{\varrho} \\ g^{v\chi} &= \frac{M}{\varrho} & g^{r\chi} &= \frac{M}{\varrho} \\ g^{rr} &= \frac{(r-M)^2}{\varrho} & g^{\theta\theta} &= \frac{1}{\varrho} \\ g^{\chi\chi} &= \frac{\csc^2 \theta}{\varrho} \end{aligned} \quad (6.144)$$

y por ello, el vector normal toma la forma

$$\mathbf{n} = N \left[\frac{(r-M)^2}{\varrho} \partial_r + \left(\frac{r^2 + M^2}{\varrho} \right) \partial_v + \frac{M}{\varrho} \partial_\chi \right] \quad (6.145)$$

$$= \frac{N}{\varrho} \left[(r-M)^2 \partial_r + (r^2 + M^2) \partial_v + M \partial_\chi \right]. \quad (6.146)$$

La magnitud de este vector es

$$\mathbf{n}^2 = g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \quad (6.147)$$

$$= g_{vv} n^v n^v + g_{\chi\chi} n^\chi n^\chi + 2g_{vr} n^v n^r + 2g_{v\chi} n^v n^\chi + 2g_{r\chi} n^r n^\chi \quad (6.148)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^2 &= \frac{N^2}{\varrho^2} \left[- \left(\frac{r^2 - 2Mr + M^2 \cos^2 \theta}{\varrho} \right) (r^2 + M^2)^2 + \frac{(r^2 + M^2)^2 - (r - M)^2 M^2 \sin^2 \theta}{\varrho} M^2 \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + 2(r - M)^2 (r^2 + M^2) - \frac{4M^2 r \sin^2 \theta}{\varrho} (r^2 + M^2) M - 2M^2 (r - M)^2 \sin^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (6.149)$$

y al evaluarla en la hipersuperficie $r = M$, es decir $\Delta = 0$, se tiene

$$\mathbf{n}^2|_{r=M} = 0, \quad (6.150)$$

con lo cual se muestra que esta hipersuperficie es nula. Ahora bien, al evaluar el vector normal en $r = M$ se obtiene

$$\mathbf{n}|_{r=M} = \frac{N}{M^2 + a^2 \cos^2 \theta} [2M^2 \partial_v + M \partial_\chi] \quad (6.151)$$

$$= N \left(\frac{2M^2}{M^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \left[\partial_v + \frac{1}{2M} \partial_\chi \right], \quad (6.152)$$

es decir

$$\mathbf{n}|_{r=M} = N \left(\frac{2M^2}{M^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \psi \quad (6.153)$$

y como ya sabemos, es posible escoger la función N de tal manera que $n^\sigma \nabla_\sigma \mathbf{n} = 0$. De esta forma, se demostró que el vector normal es el vector de Killing ψ y con ello, las hipersuperficies $r = M$ son horizontes de Killing.

Ejercicio

Muestre que para el vector de Killing $\psi = \xi + \Omega\zeta$ se tiene

$$\psi^\sigma \nabla_\sigma \psi^\mu|_{r=M} = 0, \quad (6.154)$$

es decir que la gravedad superficial para el horizonte $r = M$ es cero ($\kappa = 0$).

6.6.2. Diagrama de Carter-Penrose

El diagrama de Carter-Penrose para el caso extremo de Kerr es similar al obtenido para el Caso 2 analizado antes, pero la región II de ese diagrama desaparece ya que solamente existe un horizonte. Por ello, la región asintóticamente plana exterior (región I) se conecta directamente con la región interior que contiene la singularidad esencial $\varrho = 0$, la cual tiene forma de anillo, $x^2 + y^2 = a$ en coordenadas de Kerr-Schild. De esta forma, la singularidad $\varrho = 0$ aparece en el corte ecuatorial, $\theta = \frac{\pi}{2}$, pero no existe en el corte axial, $\theta = 0$. Es importante notar que esta singularidad es como-de-tiempo, por lo cual el horizonte de eventos $r = M$ es también un horizonte de Cauchy y por lo tanto esta extensión analítica maximal no sea globalmente hiperbólica..

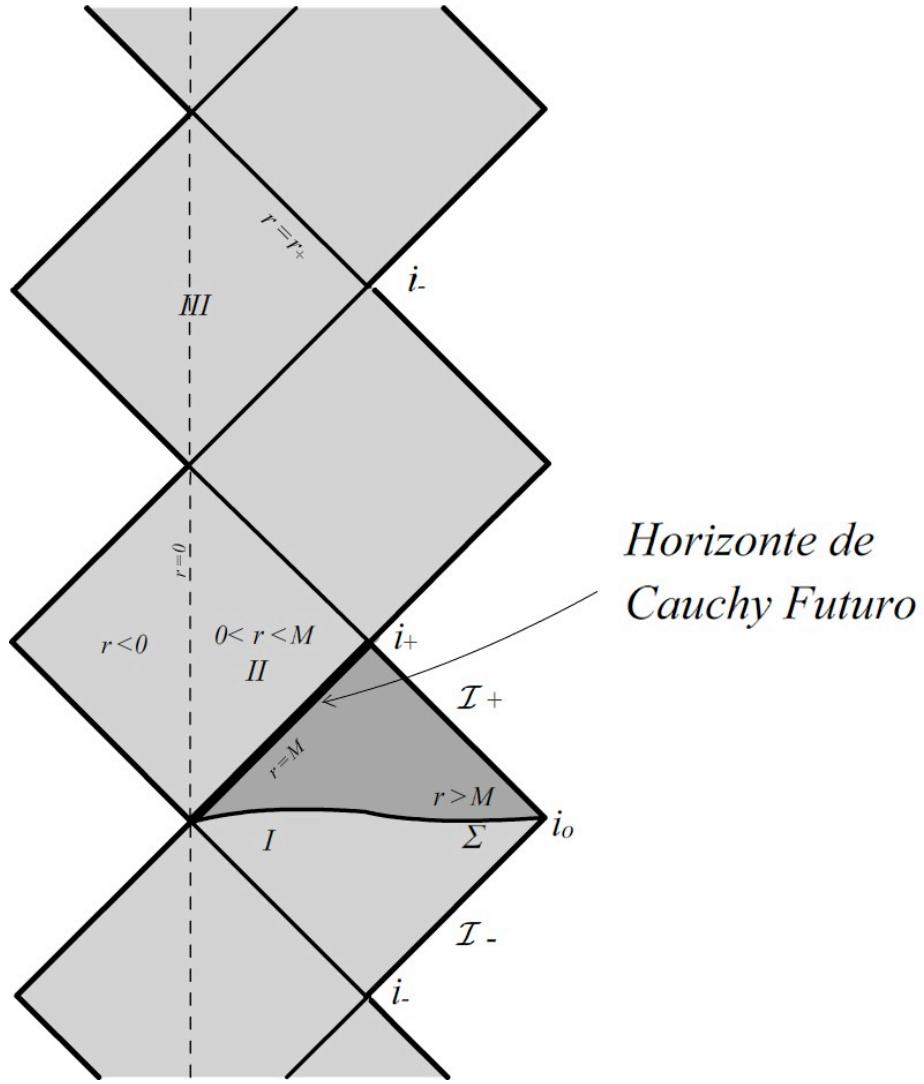


Figura 6.8: Diagrama de Carter-Penrose para la variedad de Kerr con $M = a$.

Al unir los diagramas correspondientes a cada corte angular en una sola representación, se obtiene la Figura 6.8, donde la línea punteada representa la singularidad $\varrho = 0$. Nótese que el diagrama se extiende infinitamente en ambas direcciones.

Capítulo 7

Integrales de Komar y Condiciones de Energía

7.1. Formulación Covariante de las Integrales de Carga

Al trabajar en el espacio-tiempo de Minkowski, la carga contenida en un volumen V se expresa en términos de la densidad de carga $\rho(x^\mu)$ mediante

$$Q = \int_V \rho dV \quad (7.1)$$

y utilizando las ecuaciones de Maxwell se tiene

$$Q = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV. \quad (7.2)$$

La ley de Gauss permite expresar esta integral de volumen como una integral de superficie evaluada en la frontera de V ,

$$Q = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = \oint_{\partial V} E^i dS_i, \quad (7.3)$$

donde el índice i toma los valores 1, 2, 3.

Ahora bien, en la formulación covariante debe utilizarse el tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$ y el volumen tridimensional V se reemplaza por una hipersuperficie arbitraria Σ que corresponda a una superficie parcial de Cauchy y que posea una frontera $\partial\Sigma$. Si se denota el elemento de volumen en Σ mediante la forma $d\Sigma_\mu$ (de carácter no-espacial) y $j^\mu(x)$ es la densidad de corriente, la carga se puede escribir como

$$Q = \int_{\Sigma} j^\mu d\Sigma_\mu. \quad (7.4)$$

La hipersuperficie Σ puede escogerse, al menos localmente, como un corte de $t = \text{constante}$, en cuyo caso, el elemento de volumen corresponde a la forma $d\Sigma_\mu = (dV, 0, 0, 0)$ y ya que la

componente temporal de la densidad de corriente corresponde a la densidad de carga, $j^0 = \rho$, la ecuación (7.4) equivale a (7.1).

En la formulación covariante, las ecuaciones de Maxwell se escriben

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu, \quad (7.5)$$

por lo que la ecuación covariante para la carga se puede escribir como

$$Q = \int_{\Sigma} \nabla_\nu F^{\mu\nu} d\Sigma_\mu, \quad (7.6)$$

o utilizando la ley de Gauss,

$$Q = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Sigma} F^{\mu\nu} d\Sigma_{\mu\nu}, \quad (7.7)$$

donde $d\Sigma_{\mu\nu}$ es el elemento de área en la frontera $\partial\Sigma$ y el factor $\frac{1}{2}$ surge debido a la antisimetría del tensor electromagnético y del elemento de área.. Nótese que cuando se escoge Σ como una hipersuperficie de $t = \text{constante}$, las componentes de $d\Sigma_{\mu\nu}$ diferentes de cero son

$$d\Sigma_{0i} = -d\Sigma_{i0} = dS_i, \quad (7.8)$$

las cuales corresponden al elemento de área tridimensional en la frontera del volumen V . En este caso, la integral (7.7) resulta ser

$$Q = \oint_{\partial\Sigma} F^{0i} d\Sigma_{0i} = \oint_{\partial\Sigma} F^{0i} dS_i \quad (7.9)$$

y ya que el campo eléctrico corresponde a las componentes del tensor electromagnético

$$E^i = F^{0i} = -F^{i0}, \quad (7.10)$$

esta relación coincide con la ecuación (7.3).

7.2. Energía ADM

La energía no puede definirse de una manera similar a la utilizada en el capítulo anterior para la definición de la carga eléctrica debido a que la energía se asocia con el tensor simétrico de momento-energía $T^{\mu\nu}$ y no con un vector.

Sin embargo, si es posible definir la energía total en espacios asintóticamente planos como una integral de superficie en el infinito ya que existe un vector $\frac{\partial}{\partial t}$ que es asintóticamente de Killing. Para realizar esta definición se utilizarán las ecuaciones de campo linealizadas en la región asintótica. Tomando la ecuación de Pauli-Fierz (1.102),

$$\partial_\rho \partial_\nu h_\mu^\rho + \partial_\mu \partial_\rho h_\nu^\rho - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} = 16\pi G \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right], \quad (7.11)$$

y contrayendo indices se obtiene

$$2\partial_\rho\partial_\sigma h^{\rho\sigma} - 2\Box h = 16\pi G \left[T - \frac{1}{2}4T \right] \quad (7.12)$$

$$\Box h - \partial_\rho\partial_\sigma h^{\rho\sigma} = 8\pi GT. \quad (7.13)$$

Con el fin de deducir la forma de la integral de energía, se considerará el tensor momento-energía de *polvo estático débil*. El polvo se caracteriza por tener presión cero, por lo que el tensor momento-energía tiene únicamente la componente correspondiente a la densidad,

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

mientras que se dice estático si

$$\dot{\rho} = 0 \quad (7.15)$$

y débil si cumple las condiciones

$$8\pi G\rho \ll 1 \quad (7.16)$$

y

$$T_{0i} = 0. \quad (7.17)$$

Ahora bien, ya que el tensor momento-energía es estático, se puede asumir que $h_{\mu\nu}$ es independiente del tiempo. De esta forma, la componente $(0, 0)$ de la ecuación de Pauli-Fierz (7.11) resulta ser

$$\partial_\rho\partial_0 h_0^\rho + \partial_0\partial_\rho h_0^\rho - \partial_0\partial_0 h - \Box h_{00} = 16\pi G \left[T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T \right] \quad (7.18)$$

y ya que $T = \eta^{00}T_{00} = -\rho = -T_{00}$ y $\Box h_{00} = \partial^\sigma\partial_\sigma h_{00} = \partial^i\partial_i h_{00} = \nabla^2 h_{00}$ se tiene

$$-\nabla^2 h_{00} = 16\pi G \left[T_{00} + \frac{1}{2}\eta_{00}T_{00} \right] \quad (7.19)$$

$$-\nabla^2 h_{00} = 16\pi G \left[T_{00} - \frac{1}{2}T_{00} \right] \quad (7.20)$$

$$\nabla^2 h_{00} = -8\pi GT_{00}. \quad (7.21)$$

Por otro lado, la ecuación de Pauli-Fierz contraída (7.13) se convierte en

$$\nabla^2 h - \partial_i \partial_j h^{ij} = 8\pi G T = -8\pi G T_{00}, \quad (7.22)$$

pero en coordenadas cartesianas se tiene

$$\nabla^2 h = \nabla^2 h_\sigma^\sigma = \eta^{\sigma\rho} \nabla^2 h_{\sigma\rho} = \eta^{00} \nabla^2 h_{00} + \eta^{ij} \nabla^2 h_{ij} \quad (7.23)$$

$$\nabla^2 h = -\nabla^2 h_{00} + \nabla^2 h_{jj}, \quad (7.24)$$

y por ello

$$-\nabla^2 h_{00} + \nabla^2 h_{jj} - \partial_i \partial_j h_{ij} = -8\pi G T_{00}, \quad (7.25)$$

en donde se ha utilizado $\eta_{\mu\nu}$ para bajar los índices en el tercer término. Esta expresión se puede re-escribir como

$$-\nabla^2 h_{00} + \partial_i \partial_i h_{jj} - \partial_i \partial_j h_{ij} = -8\pi G T_{00} \quad (7.26)$$

$$-\nabla^2 h_{00} + \partial_i (\partial_i h_{jj} - \partial_j h_{ij}) = -8\pi G T_{00}. \quad (7.27)$$

Utilizando (7.21) se tiene

$$8\pi G T_{00} + \partial_i (\partial_i h_{jj} - \partial_j h_{ij}) = -8\pi G T_{00}, \quad (7.28)$$

es decir

$$T_{00} = -\frac{1}{16\pi G} \partial_i (\partial_i h_{jj} - \partial_j h_{ij}). \quad (7.29)$$

Ahora bien, ya que se está asumiendo que la fuente es débil y el espacio-tiempo es casi minkowskiano, podemos expresar la energía total como la integral de la densidad T_{00} en todo el espacio para un tiempo constante, es decir

$$E = \int T_{00} d^3x \quad (7.30)$$

$$E = -\frac{1}{16\pi G} \int \partial_i (\partial_i h_{jj} - \partial_j h_{ij}) d^3x. \quad (7.31)$$

Utilizando la ley de Gauss se puede cambiar esta integral sobre el volumen por una integral de superficie sobre la frontera,

$$E = -\frac{1}{16\pi G} \oint_\infty (\partial_i h_{jj} - \partial_j h_{ij}) dS_i. \quad (7.32)$$

Nótese que esta expresión depende únicamente de los valores de h_{ij} en la región asintótica y por esta razón es posible cambiar la forma del tensor momento-energía sin tener que cambiar la expresión para la energía total si este cambio no afecta la métrica en la región asintótica. Por ello podemos concluir que esta forma de obtener la energía total, conocida como *energía ADM*, es válida en general para espacios-tiempo asintóticamente planos.

Ahora bien, restando la ecuación (7.27) de (7.21) se tiene

$$2\nabla^2 h_{00} - \partial_i(\partial_i h_{jj} - \partial_j h_{ij}) = 0, \quad (7.33)$$

es decir

$$\partial_i(\partial_i h_{jj} - \partial_j h_{ij}) = 2\nabla^2 h_{00} = 2\partial_i\partial_i h_{00} \quad (7.34)$$

$$\partial_i h_{jj} - \partial_j h_{ij} = 2\partial_i h_{00}. \quad (7.35)$$

De esta forma, la integral de la energía total se puede escribir como

$$E = -\frac{1}{8\pi G} \oint_{\infty} \partial_i h_{00} dS_i. \quad (7.36)$$

Ejercicio

Muestre que

$$g^{ij}\Gamma_{0j}^0 = -\frac{1}{2}\partial_i h_{00} + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (7.37)$$

Utilizando (7.37) la energía se convierte en

$$E = \frac{1}{4\pi G} \oint_{\infty} g^{ij}\Gamma_{0j}^0 dS_i. \quad (7.38)$$

Si el espacio-tiempo considerado tiene un campo vectorial que asintóticamente sea de Killing como-de-tiempo, $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$, podemos escribir

$$\nabla_{\mu}\xi^0 = \partial_{\mu}\xi^0 + \Gamma_{\mu\sigma}^0\xi^{\sigma} \quad (7.39)$$

$$= \Gamma_{\mu 0}^0 \xi^0 \quad (7.40)$$

$$= \Gamma_{\mu 0}^0, \quad (7.41)$$

es decir que

$$\Gamma_{0j}^0 = \nabla_j \xi^0, \quad (7.42)$$

o multiplicando por g^{ij} ,

$$g^{ij}\Gamma_{0j}^0 = \nabla^i\xi^0. \quad (7.43)$$

De esta forma, E será

$$E = \frac{1}{4\pi G} \oint_{\infty} \nabla^i \xi^0 dS_i, \quad (7.44)$$

y utilizando la definición $dS_i = d\Sigma_{0i} = -d\Sigma_{i0}$ para el elemento de superficie

$$E = \frac{1}{4\pi G} \oint_{\infty} \nabla^i \xi^0 d\Sigma_{0i} \quad (7.45)$$

$$E = -\frac{1}{4\pi G} \oint_{\infty} \nabla^i \xi^0 d\Sigma_{i0}. \quad (7.46)$$

En la región asintótica, el vector ξ es de Killing, y por ello satisface

$$\nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu = 0 \quad (7.47)$$

y por ello se puede escribir

$$E = -\frac{1}{8\pi G} \oint_{\infty} \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_{\mu\nu}, \quad (7.48)$$

donde se ha introducido un factor de $\frac{1}{2}$ debido a la antisimetría del integrando y del $d\Sigma_{\mu\nu}$.

7.3. Integrales de Komar

Con las consideraciones de la sección anterior, es posible definir ahora las integrales de Komar. Para ello se considera un volumen espacial V en una hipersuperficie como-de-espacio Σ , con frontera ∂V . A cada campo vectorial de Killing ξ existente se le asocia la integral de Komar

$$Q_\xi(V) = \frac{c}{16\pi G} \oint_{\partial V} \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_{\mu\nu} \quad (7.49)$$

para alguna constante c . Utilizando la ley de Gauss, la integral de Komar se puede escribir como una integral de volumen,

$$Q_\xi(V) = \frac{c}{8\pi G} \oint_V \nabla_\nu \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_\mu, \quad (7.50)$$

donde se ha introducido un factor de 2 debido a la simetría del integrando.

Utilizando el lema del vector de Killing contraido (1.46) se puede escribir

$$Q_\xi(V) = \frac{c}{8\pi G} \oint_V R_\nu^\mu \xi^\nu d\Sigma_\mu. \quad (7.51)$$

Por las ecuaciones de campo se tiene

$$R_\nu^\mu = 8\pi G \left[T_\nu^\mu - \frac{1}{2} g_\nu^\mu T \right], \quad (7.52)$$

y por ello

$$Q_\xi(V) = c \oint_V \left[T_\nu^\mu - \frac{1}{2} g_\nu^\mu T \right] \xi^\nu d\Sigma_\mu \quad (7.53)$$

$$Q_\xi(V) = \oint_V j^\mu(\xi) d\Sigma_\mu, \quad (7.54)$$

donde

$$j^\mu(\xi) = c \left[T_\nu^\mu \xi^\nu - \frac{1}{2} T \xi^\mu \right]. \quad (7.55)$$

Esta cantidad es una *corriente conservada* y para mostrarlo se considera

$$\nabla_\mu j^\mu = c \nabla_\mu \left[T_\nu^\mu \xi^\nu - \frac{1}{2} T \xi^\mu \right] \quad (7.56)$$

$$\nabla_\mu j^\mu = c \left[(\nabla_\mu T_\nu^\mu) \xi^\nu + T_\nu^\mu \nabla_\mu \xi^\nu - \frac{1}{2} (\nabla_\mu T) \xi^\mu - \frac{1}{2} T \nabla_\mu \xi^\mu \right]. \quad (7.57)$$

Para el tensor momento-energía se cumple $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$, mientras que $\nabla_\mu T = \partial_\mu T$, por lo que

$$\nabla_\mu j^\mu = c \left[T^{\mu\nu} \nabla_\mu \xi_\nu - \frac{1}{2} \xi^\mu \partial_\mu T - \frac{1}{2} T \nabla_\mu \xi^\mu \right]. \quad (7.58)$$

Para los vectores de Killin se tiene $\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} = 0$ y por ello $\nabla_\mu \xi^\mu = 0$. Además, debido a la simetría del tensor electromagnético $T^{\mu\nu} \nabla_\mu \xi_\nu = 0$. De esta forma solamente sobrevive el segundo término del lado derecho,

$$\nabla_\mu j^\mu = -c \frac{1}{2} \xi^\mu \partial_\mu T. \quad (7.59)$$

Las ecuaciones de campo permiten escribir

$$R = -8\pi G T \quad (7.60)$$

y por ello

$$\nabla_\mu j^\mu = 4\pi G c \xi^\mu \partial_\mu R. \quad (7.61)$$

Ahora bien, si se escogen coordenadas para las cuales el campo vectorial de Killing sea

$$\xi = \frac{\partial}{\partial \alpha} \quad (7.62)$$

con α una de las coordenadas, la métrica será independiente de esta cantidad, $\partial_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ y por lo tanto, el escalar de Ricci también lo es, $\partial_\alpha R = 0$. De esta forma, se tiene

$$\nabla_\mu j^\mu = 0, \quad (7.63)$$

es decir que j^μ es una corriente conservada y por lo tanto, la carga asociada, $Q_\xi(V)$, se conserva si la corriente se anula en la frontera ∂V .

7.3.1. Ejemplo. Masa en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

Si se considera el espacio-tiempo de Schwarzschild y se escoge el volumen V como la 2-esfera en el infinito espacial la integral de Komar para la energía debe tener la forma

$$E(V) = \frac{c}{16\pi G} \oint_{\partial V} \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_{\mu\nu} \quad (7.64)$$

donde el vector de Killing correspondiente es $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$. Por comparación con la energía ADM, (7.48), se deduce que la constante que aparece en la integral de Komar debe ser $c = -2$, y por ello se tiene

$$E(V) = -\frac{1}{8\pi G} \oint_{\infty} \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_{\mu\nu}. \quad (7.65)$$

Ya que el vector de Killing solamente posee componente temporal se tiene

$$E(V) = -\frac{2}{8\pi G} \oint_{\infty} \nabla^\mu \xi^t d\Sigma_{\mu t}, \quad (7.66)$$

donde el factor 2 aparece debido a la simetría del integrando. Utilizando la ecuación (7.41) se tiene

$$E(V) = -\frac{1}{4\pi G} \oint_{\infty} g^{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma\rho}^t \xi^\rho d\Sigma_{\mu t} \quad (7.67)$$

$$E(V) = -\frac{1}{4\pi G} \oint_{\infty} g^{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma t}^t d\Sigma_{\mu t}. \quad (7.68)$$

Para la métrica de Schwarzschild se tiene

$$\Gamma_{rt}^t = \frac{GM}{r(r-2GM)} \quad (7.69)$$

$$\Gamma_{tt}^t = \Gamma_{\theta t}^t = \Gamma_{\varphi t}^t = 0, \quad (7.70)$$

por lo que la energía resulta ser

$$E(V) = -\frac{1}{4\pi G} \oint_{\infty} g^{rr} \Gamma_{rt}^t d\Sigma_{rt} \quad (7.71)$$

$$= -\frac{1}{4\pi G} \oint_{\infty} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{GM}{r(r-2GM)} d\Sigma_{rt} \quad (7.72)$$

$$= -\frac{1}{4\pi G} \oint_{\infty} \frac{GM}{r^2} d\Sigma_{rt}. \quad (7.73)$$

Ahora bien, el elemento de superficie corresponde a

$$d\Sigma_{rt} = -d\Sigma_{tr} = -dS_r = -r^2 \sin^2 \theta d\theta d\varphi. \quad (7.74)$$

De esta forma la energía es

$$E(V) = \frac{M}{4\pi} \oint_{\infty} \frac{r^2 \sin^2 \theta d\theta d\varphi}{r^2} \quad (7.75)$$

$$E(V) = \frac{M}{4\pi} 4\pi \quad (7.76)$$

$$E(V) = M. \quad (7.77)$$

Es decir que la energía en la métrica de Schwarzschild corresponde a la masa M .

7.3.2. Ejemplo. Momento angular en un espacio-tiempo axialmente simétrico

La integral de Komar que define el momento angular es

$$J(V) = \frac{c}{16\pi G} \oint_{\partial V} \nabla^\mu \zeta^\nu d\Sigma_{\mu\nu} \quad (7.78)$$

donde el vector de Killing corresponde a $\zeta = \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Para escoger la constante c se comparará con lo conocido en coordenadas cartesianas. Para ello se utiliza la ley de Gauss para escribir esta integral en la forma (7.54)

$$J(V) = \oint_V j^\mu(\zeta) d\Sigma_\mu \quad (7.79)$$

donde la densidad de corriente está dada por la expresión (7.91)

$$j^\mu(\xi) = c \left[T_\nu^\mu \zeta^\nu - \frac{1}{2} T \zeta^\mu \right]. \quad (7.80)$$

Ahora bien, si el volumen V se escoge como una hipersuperficie de $t = \text{constante}$, se tiene

$$\zeta^\mu d\Sigma_\mu = \zeta^\varphi d\Sigma_\varphi = 0 \quad (7.81)$$

y por esta razón

$$j^\mu(\xi) = c T_\nu^\mu \zeta^\nu, \quad (7.82)$$

y la integral del momento angular se reduce a

$$J(V) = c \int_V T_\nu^\mu \zeta^\nu d\Sigma_\mu \quad (7.83)$$

$$= c \int_V T_\nu^0 \zeta^\nu d\Sigma_0 \quad (7.84)$$

$$= c \int_V T_\nu^0 \zeta^\nu dV. \quad (7.85)$$

En coordenadas cartesianas (x^1, x^2, x^3) , el vector de Killing se escribe

$$\zeta = x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} \quad (7.86)$$

y por ello

$$J(V) = c \int_V [T_2^0 x^1 - T_1^0 x^2] d^3x. \quad (7.87)$$

Si la fuente es débil, la métrica es aproximadamente minkowskiana, $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$, y por ello esta relación se convierte en

$$J(V) \approx c \varepsilon_{3jk} \int_V x^j T^{k0} d^3x, \quad (7.88)$$

que corresponde a la tercera componente del momento angular de un campo con tensor momento energía $T_{\mu\nu}$ en el espacio de Minkoski si la constante que aparece es $c = 1$. Así, el momento angular total en un espacio-tiempo asintóticamente plano corresponde a la integral de Komar

$$J(V) = \frac{1}{16\pi G} \oint_\infty \nabla^\mu \zeta^\nu d\Sigma_{\mu\nu}, \quad (7.89)$$

donde se ha tomado como volumen de integración la 2-esfera en el infinito espacial.

7.4. Condiciones de Energía

Las ecuaciones de campo de Einstein imponen algunas condiciones acerca de la forma que puede tener el tensor momento-energía debido a la estructura geométrica del espacio-tiempo. Sin embargo, la Relatividad General permite algunos casos que desde el punto de vista físico no son razonables. El conocimiento actual muestra que el tensor momento-energía debe cumplir ciertos requerimientos como la positividad de la densidad de energía, el dominio de la densidad de energía sobre la presión o que la rapidez de la propagación de energía no supere la velocidad de la luz. Estos requerimientos se conocen como *condiciones de energía*, y se definen a continuación.

7.4.1. Condición de Energía Débil

Un tensor momento-energía $T_{\mu\nu}$ satisface la *condición de energía débil* si para todo campo vectorial w como-de-tiempo dirigido al futuro, se cumple que

$$w^\mu w^\nu T_{\mu\nu} \geq 0. \quad (7.90)$$

Esta condición de energía implica que la densidad de energía de cualquier distribución de materia, medida por cualquier observador, debe ser no-negativa. Para comprobar esta afirmación se considerará el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Tensor momento-energía para un fluido perfecto

El tensor momento-energía puede escribirse en una base de tetradas $e_{(a)}^\mu$ ortonormales como

$$T^{\mu\nu} = \rho e_{(0)}^\mu e_{(0)}^\nu + p_1 e_{(1)}^\mu e_{(1)}^\nu + p_2 e_{(2)}^\mu e_{(2)}^\nu + p_3 e_{(3)}^\mu e_{(3)}^\nu. \quad (7.91)$$

Para un fluido perfecto la presión es isotrópica, es decir que $p_1 = p_2 = p_3 = p$, y el tensor momento-energía se convierte en

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) e_{(0)}^\mu e_{(0)}^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (7.92)$$

y el vector $e_{(0)}^\mu = u^\mu$ se identifica con la 4-velocidad del fluido perfecto.

Ahora bien, cualquier vector normalizado como-de-tiempo dirigido al futuro w^μ se puede escribir en una base ortonormal como

$$w^\mu = W \left(e_{(0)}^\mu + ae_{(1)}^\mu + be_{(2)}^\mu + ce_{(3)}^\mu \right) \quad (7.93)$$

donde

$$W^2 = [1 - a^2 - b^2 - c^2]^{-1} \quad (7.94)$$

con a, b y c funciones arbitrarias de las coordenadas tales que

$$a^2 + b^2 + c^2 < 1. \quad (7.95)$$

Si se considera el vector w y el tensor momento-energía dado por (7.91), la condición de energía débil (7.90) es

$$\rho + a^2 p_1 + b^2 p_2 + c^2 p_3 \geq 0. \quad (7.96)$$

Ya que las funciones a, b y c son arbitrarias, es posible escoger $a = b = c = 0$, en cuyo caso la condición de energía débil resulta ser $\rho \geq 0$. Sin embargo, también es posible escoger estas funciones como $b = c = 0$, y la condición de energía débil es $\rho + a^2 p_1 \geq 0$. Ahora bien, la

condición (7.93) hace que $0 \leq \rho + a^2 p_1 < \rho + p_1$, por lo que se concluye que la condición de energía débil implica $\rho + p_1 > 0$. Se pueden obtener expresiones similares para p_2 y p_3 , es decir que la condición de energía nula es $\rho + p_i > 0$.

Para un fluido perfecto, la condición de energía débil implica

$$\rho \geq 0 \text{ y } \rho + p > 0. \quad (7.97)$$

7.4.2. Condición de Energía Nula

Un tensor momento-energía $T_{\mu\nu}$ satisface la *condición de energía nula* si para todo campo vectorial k nulo dirigido al futuro, se cumple que

$$k^\mu k^\nu T_{\mu\nu} \geq 0. \quad (7.98)$$

Ya que los vectores nulos son límite de los vectores como-de-tiempo, si un tensor satisface la condición débil, también satisface la condición nula.

Ejemplo. Tensor momento-energía para un fluido perfecto

Cualquier vector nulo dirigido al futuro k^μ se puede escribir en una base ortonormal como

$$k^\mu = e_{(0)}^\mu + a' e_{(1)}^\mu + b' e_{(2)}^\mu + c' e_{(3)}^\mu \quad (7.99)$$

con a, b y c funciones arbitrarias de las coordenadas tales que

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1. \quad (7.100)$$

Si se considera el vector k y el tensor momento-energía dado por (7.91), la condición de energía nula (7.98) es

$$\rho + a'^2 p_1 + b'^2 p_2 + c'^2 p_3 \geq 0. \quad (7.101)$$

Si escoge $a = 1$ y $b = c = 0$, esta condición se reduce a

$$\rho + p_1 \geq 0. \quad (7.102)$$

Ya que expresiones similares se obtienen para p_2 y p_3 , la condición de energía nula se puede escribir en general como

$$\rho + p_i \geq 0. \quad (7.103)$$

En el caso de un fluido perfecto esta condición corresponde a

$$\rho + p \geq 0. \quad (7.104)$$

7.4.3. Condición de Energía Fuerte

Un tensor momento-energía $T_{\mu\nu}$ satisface la *condición de energía fuerte* si para todo campo vectorial w como-de-tiempo dirigido al futuro, se cumple que

$$w^\mu w^\nu \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \geq 0. \quad (7.105)$$

Las ecuaciones de campo implican

$$T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T = \frac{R_{\mu\nu}}{8\pi G}, \quad (7.106)$$

por lo cual la condición de energía es, en realidad, una condición sobre el tensor de Ricci. Es importante notar que si un tensor de momento-energía satisface la condición de energía fuerte, esto *no* implica que cumpla con la condición de energía débil.

Ejemplo. Tensor momento-energía para un fluido perfecto

Utilizando la forma (7.91) para el tensor momento-energía y (7.93) para el vector w , la condición de energía fuerte resulta ser

$$W^2 (\rho + a^2 p_1 + b^2 p_2 + c^2 p_3) \geq \frac{1}{2} w^2 (-\rho + p_1 + p_2 + p_3). \quad (7.107)$$

Si se escoge $a = b = c = 0$ se tiene $W^2 = 1$ y la condición se convierte en

$$\rho \geq \frac{1}{2} (\rho - p_1 - p_2 - p_3) \quad (7.108)$$

$$\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq 0. \quad (7.109)$$

Ejercicio

Muestre que al escoger $b = c = 0$, es decir $K^2 = (1 - a^2)^{-1}$, la condición de energía fuerte se convierte en

$$\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq a^2 (p_2 + p_3 - \rho - p_1) \quad (7.110)$$

y que ya que esta expresión es válida para cualquier $a^2 < 1$ esto implica

$$\rho + p_1 \geq 0. \quad (7.111)$$

Nótese que relaciones similares a la ecuación (7.111) se pueden obtener para p_2 y p_3 . Por esta razón, se puede concluir que la condición de energía fuerte implica

$$\rho + p_i \geq 0. \quad (7.112)$$

En el caso de un fluido perfecto, la condición de energía fuerte impone las condiciones

$$\rho + 3p \geq 0 \text{ y } \rho + p \geq 0. \quad (7.113)$$

7.4.4. Condición de Energía Dominante

Un tensor momento-energía $T_{\mu\nu}$ satisface la *condición de energía dominante* si para todos los campos vectoriales como-de-tiempo dirigidos al futuro w , se cumple que el campo el campo vectorial

$$j(w) = -w^\mu T_\mu^\nu \partial_\nu \quad (7.114)$$

es nulo o como-de-tiempo dirigido al futuro. Nótese que todo tensor momento-energía que satisface la condición dominante también satisface la condición débil y por lo tanto también la condición nula.

Ejemplo. Tensor momento-energía para un fluido perfecto

Utilizando la forma (7.91) para el tensor momento-energía y (7.93) para el vector w , la condición de energía dominante resulta ser

$$-j^2 = \rho^2 - a^2 p_1^2 - b^2 p_2^2 - c^2 p_3^2 \geq 0. \quad (7.115)$$

Si se escoge $a = b = c = 0$ se tiene

$$\rho^2 \geq 0, \quad (7.116)$$

y al exigir que $j(w)$ sea dirigido al futuro se escoge

$$\rho \geq 0. \quad (7.117)$$

Por otro lado, si se toma $b = c = 0$, la condición se convierte en

$$\rho^2 \geq a^2 p_1^2 \quad (7.118)$$

y ya que esto debe cumplirse para cualquier $a^2 < 1$, y además $j(v)$ debe estar dirigido al futuro, se tiene

$$\rho \geq |p_1|. \quad (7.119)$$

Como siempre, esta relación se extiende a p_2 y p_3 , por lo que se puede escribir en general,

$$\rho \geq |p_i|. \quad (7.120)$$

Para el tensor momento-energía de un fluido perfecto, la condición de energía dominante resulta ser

$$\rho \geq 0 \text{ y } \rho \geq |p|. \quad (7.121)$$

Ejemplo. Tensor momento-energía para un campo escalar sin masa

Para el caso de un campo escalar sin masa se tiene un tensor materia-energía dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi \quad (7.122)$$

y por ello se tiene

$$j^\mu (w) = -w^\sigma \partial^\mu \phi \partial_\sigma \phi + \frac{1}{2} w^\mu \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi. \quad (7.123)$$

La magnitud de este vector es

$$j^2 = g_{\mu\nu} j^\mu j^\nu \quad (7.124)$$

$$= g_{\mu\nu} \left(-w^\sigma \partial^\mu \phi \partial_\sigma \phi + \frac{1}{2} w^\mu \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi \right) \left(-w^\nu \partial^\nu \phi \partial_\sigma \phi + \frac{1}{2} w^\nu \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi \right) \quad (7.125)$$

$$= (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi) (w^\sigma \partial_\sigma \phi)^2 - (w^\mu \partial_\mu \phi)^2 (\partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi) + \frac{1}{4} w^2 (\partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi)^2 \quad (7.126)$$

$$j^2 = \frac{1}{4} w^2 (\partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi)^2. \quad (7.127)$$

Ahora bien, el vector w es como-de-tiempo, $w^2 < 0$, mientras que $(\partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi)^2 \geq 0$, por lo tanto el vector j es como-de-tiempo o nulo,

$$j^2 \leq 0. \quad (7.128)$$

Para comprobar que este vector está dirigido al futuro se toma el producto

$$-w_\mu j^\mu = w_\mu w^\sigma \partial^\mu \phi \partial_\sigma \phi - \frac{1}{2} w_\mu w^\mu \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi \quad (7.129)$$

$$= (w^\sigma \partial_\sigma \phi)^2 - \frac{1}{2} w^2 (\partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi). \quad (7.130)$$

Esta última expresión se puede re-escribir como

$$-w_\mu j^\mu = \frac{1}{2} (w^\sigma \partial_\sigma \phi)^2 + \frac{1}{2} (-w^2) \left(\partial_\sigma \phi - \frac{w_\sigma}{w^2} w^\rho \partial_\rho \phi \right)^2. \quad (7.131)$$

Nótese que

$$(w^\sigma \partial_\sigma \phi)^2 \geq 0 \quad (7.132)$$

y $-w^2 > 0$ para vectores w como-de-tiempo. Por otro lado, se tiene

$$w^\sigma \left(\partial_\sigma \phi - \frac{w_\sigma}{w^2} w^\rho \partial_\rho \phi \right) = w^\sigma \partial_\sigma \phi - \frac{w^2}{w^2} w^\rho \partial_\rho \phi = 0, \quad (7.133)$$

es decir que $\left(\partial_\sigma \phi - \frac{w_\sigma}{w^2} w^\rho \partial_\rho \phi \right)$ no es como-de-tiempo, y por lo tanto podemos escribir

$$\left(\partial_\sigma \phi - \frac{w_\sigma}{w^2} w^\rho \partial_\rho \phi \right)^2 \geq 0. \quad (7.134)$$

Con este resultado concluimos que

$$-w_\mu j^\mu \geq 0, \quad (7.135)$$

es decir que si w está dirigido al futuro, el vector j^μ también lo está.

Las condiciones de energía pueden resumirse como se muestra en la Tabla 1.

Nombre	Condición General	Condición para ρ y p
Débil	$T_{\mu\nu} w^\mu w^\nu \geq 0$	$\rho \geq 0, \rho + p_i \geq 0$
Nula	$T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0$	$\rho + p_i \geq 0$
Fuerte	$(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) w^\mu w^\nu \geq 0$	$\rho + \sum_i p_i \geq 0, \rho + p_i \geq 0$
Dominante	$-T_\mu^\nu w^\mu$ como de tiempo o nulo, dirigido al futuro	$\rho \geq 0, \rho \geq p_i $

Tabla 1. Condiciones de Energía

Capítulo 8

Geodésicas

8.1. Congruencias de Geodésicas

Una congruencia en una variedad se define como una familia de curvas tal que solamente una curva de la familia pasa por cada uno de los puntos de la variedad. Si las curvas de la familia son geodésicas, a este conjunto se le denomina *congruencia de geodésicas*.

La ecuación de una geodésica perteneciente a la congruencia puede escribirse como

$$x^\mu = x^\mu(y^\alpha, \lambda), \quad (8.1)$$

donde los parámetros y^α etiquetan la geodésica ($\alpha = 0, 1, 2$) y λ es el parámetro afín de la geodésica. De esta forma, el vector tangente es

$$t = \frac{d}{d\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} \partial_\mu, \quad (8.2)$$

y satisface la condición

$$t^\sigma \nabla_\sigma t^\mu = 0. \quad (8.3)$$

Ahora bien, ya que el parámetro λ es afín, el vector tangente estará normalizado como $t^2 = -1$ para geodésicas como-de-tiempo, o como $t^2 = 0$ para geodésicas nulas.

Por otro lado, los vectores

$$\varsigma_\alpha = \frac{d}{dy^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \partial_\mu \quad (8.4)$$

corresponden a una base de vectores de *desplazamiento* a través de la congruencia que me permiten ir de una geodésica a otra, como se observa en la Figura 8.1.

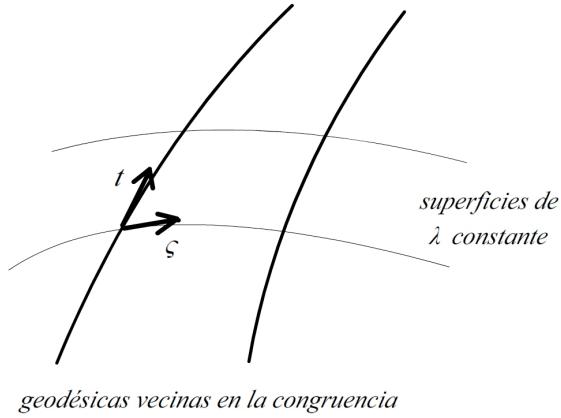


Figura 8.1: Dos geodésicas en la congruencia mostrando el vector tangente y el vector de desplazamiento.

8.2. Desviación Geodésica

Nótese que los vectores t y ς comutan ya que las coordenadas x^μ se pueden escoger de tal forma que $t = \frac{d}{d\lambda}$ y $\varsigma_\alpha = \frac{d}{dy^\alpha}$ y los parámetros λ y y^α son independientes. De esta manera se tiene

$$t^\nu \partial_\nu \varsigma_\alpha^\mu = \varsigma_\alpha^\nu \partial_\nu t^\mu \quad (8.5)$$

$$t^\nu (\partial_\nu \varsigma_\alpha^\mu + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \varsigma_\alpha^\sigma) = \varsigma_\alpha^\nu (\partial_\nu t^\mu + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu t^\sigma) \quad (8.6)$$

$$t^\nu \nabla_\nu \varsigma_\alpha^\mu = \varsigma_\alpha^\nu \nabla_\nu t^\mu, \quad (8.7)$$

es decir

$$t^\nu \nabla_\nu \varsigma_\alpha^\mu = B_\nu^\mu \varsigma_\alpha^\nu, \quad (8.8)$$

donde se ha definido la cantidad

$$B_\nu^\mu = \nabla_\nu t^\mu \quad (8.9)$$

que mide la desviación de los vectores ς_α al ser transportados paralelamente a lo largo de las geodésicas. Por esta razón se dice que la cantidad B_ν^μ mide la *desviación geodésica*.

Por otro lado, cuando se considera una geodésica, se puede especificar otra geodésica vecina mediante un vector de desplazamiento ς . Sin embargo esta especificación no es única debido a que el vector $\varsigma' = \varsigma + at$, con $a = \text{constante}$ va a la misma geodésica vecina, como se puede observar en la Figura 8.2.

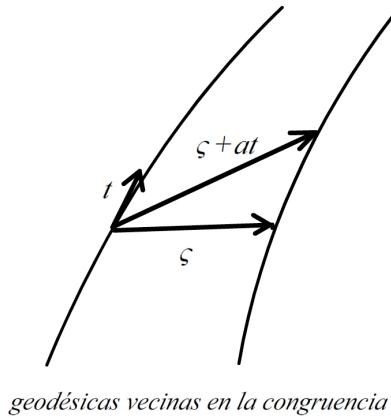


Figura 8.2: El vector de desplazamiento entre dos geodésicas vecinas en la congruencia .

Para evitar esta ambigüedad en el caso de geodésicas como-de-tiempo, se puede exigir que el vector de desplazamiento sea ortogonal a la geodésica,

$$\varsigma^\mu t_\mu = 0. \quad (8.10)$$

Esta condición debe imponerse para un valor dado del parámetro λ , sin embargo, nótese que

$$\frac{d}{d\lambda} (\varsigma^\mu t_\mu) = t^\sigma \nabla_\sigma (\varsigma^\mu t_\mu) \quad (8.11)$$

$$= t_\mu t^\sigma \nabla_\sigma (\varsigma^\mu) + \varsigma^\mu t^\sigma \nabla_\sigma t_\mu, \quad (8.12)$$

pero $t^\sigma \nabla_\sigma t_\mu = 0$, por lo que

$$\frac{d}{d\lambda} (\varsigma^\mu t_\mu) = t_\mu t^\sigma \nabla_\sigma (\varsigma^\mu) \quad (8.13)$$

$$= t_\mu B_\nu^\mu \varsigma^\nu \quad (8.14)$$

$$= t_\mu (\nabla_\nu t^\mu) \varsigma^\nu \quad (8.15)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \partial_\nu t^2 \right) \varsigma^\nu. \quad (8.16)$$

Para geodésicas como-de-tiempo se tiene $t^2 = -1$ y por ello

$$\frac{d}{d\lambda} (\varsigma^\mu t_\mu) = 0, \quad (8.17)$$

es decir que si se impone la condición $\varsigma^\mu t_\mu = 0$ para un cierto valor de λ , la condición es válida para cualquier otro valor del parámetro.

Por otro lado, en el caso de geodésicas nulas, la condición $\varsigma^\mu t_\mu = 0$ no es suficiente ya que al redefinir el vector ς se tiene

$$\varsigma'^\mu t_\mu = (\varsigma^\mu + at^\mu) t_\mu = \varsigma^\mu t_\mu + at^\mu t_\mu = \varsigma^\mu t_\mu, \quad (8.18)$$

ya que en una geodésica nula el vector tangente tiene $t^2 = 0$. De esta forma, si se impone la condición $\varsigma^\mu t_\mu = 0$, se tiene también $\varsigma'^\mu t_\mu = 0$. Esto se debe a que en el caso de las geodésicas nulas, el espacio 3-dimensional de vectores ς ortogonales al vector tangente incluye también a t . De esta forma, los vectores de desplazamiento ortogonales especifican solamente algunas de las geodésicas (en realidad solamente una familia de geodésicas de dos parámetros). Para poder llegar al resto de geodésicas en la congruencia debe utilizarse un vector ϑ que no sea ortogonal a t . La elección de ϑ es arbitraria, pero es conveniente escogerlo de tal forma que

$$\vartheta^2 = 0 \quad (8.19)$$

y

$$\vartheta^\mu t_\mu = -1, \quad (8.20)$$

es decir que si t es tangente a una geodésica radial nula saliente, entonces ϑ sea tangente a una geodésica radial entrante (ver Figura 8.3). Además, para lograr que esta definición sea consistente, se requiere que el vector ϑ sea transportado paralelamente a lo largo de las geodésicas, y por ello sea independiente del parámetro λ . Por esta razón se exige además

$$t^\nu \nabla_\nu \vartheta^\mu = 0. \quad (8.21)$$

De esta forma, podemos imponer la condición sobre el vector de desplazamiento ς de tal manera que sea ortogonal a t y que además cumpla

$$\varsigma^\mu \vartheta_\mu = 0. \quad (8.22)$$

Así, se han escogido los vectores de desplazamiento ς de tal manera que generan un subespacio 2-dimensional del espacio tangente, el cual se denominará T_\perp y que es perpendicular a t y a ϑ .

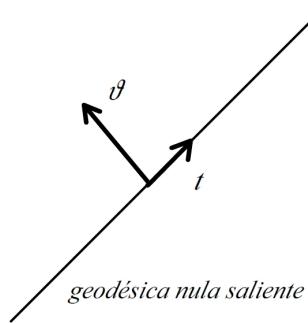
Si se define P como el proyector al espacio T_\perp ,

$$P^\mu{}_\nu = \delta_\nu^\mu + \vartheta^\mu t_\nu + t^\mu \vartheta_\nu, \quad (8.23)$$

el vector de desplazamiento vive en T_\perp , y por ello

$$P^\mu{}_\nu \varsigma^\nu = \varsigma^\mu. \quad (8.24)$$

Ahora bien, si esta condición se cumple, se puede escribir

Figura 8.3: Vectores t y ϑ en una geodésica nula saliente.

$$t^\sigma \nabla_\sigma \varsigma^\mu = t^\sigma \nabla_\sigma (P^\mu{}_\nu \varsigma^\nu) \quad (8.25)$$

$$= \varsigma^\nu t^\sigma \nabla_\sigma (P^\mu{}_\nu) + P^\mu{}_\nu t^\sigma \nabla_\sigma \varsigma^\nu. \quad (8.26)$$

Pero ya que

$$t^\sigma \nabla_\sigma \varsigma^\mu = t^\sigma \nabla_\sigma t^\mu = 0, \quad (8.27)$$

se tiene $t^\sigma \nabla_\sigma P^\mu{}_\nu = 0$, y por lo tanto el primer término del lado derecho en (8.26) desaparece,

$$t^\sigma \nabla_\sigma \varsigma^\mu = P^\mu{}_\nu t^\sigma \nabla_\sigma \varsigma^\nu. \quad (8.28)$$

Ahora bien, la relación (8.8) permite escribir

$$t^\sigma \nabla_\sigma \varsigma^\mu = P^\mu{}_\nu B_\rho^\nu \varsigma^\rho \quad (8.29)$$

y debido a (8.24),

$$t^\sigma \nabla_\sigma \varsigma^\mu = P^\mu{}_\nu B_\rho^\nu P^\rho{}_\sigma \varsigma^\sigma. \quad (8.30)$$

Si se define la matriz 2×2

$$\hat{B}_\sigma^\mu = P^\mu{}_\nu B_\rho^\nu P^\rho{}_\sigma, \quad (8.31)$$

se tiene

$$t^\sigma \nabla_\sigma \varsigma^\mu = \hat{B}_\sigma^\mu \varsigma^\sigma. \quad (8.32)$$

Esta expresión nos muestra que si el vector desplazamiento pertenece inicialmente al subespacio T_{\perp} , al realizar un transporte paralelo este vector sigue perteneciendo al mismo subespacio.

8.3. Expansión, Corte y Torsión

La matriz \hat{B}_{ν}^{μ} puede descomponerse en partes irreducibles como

$$\hat{B}_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{2}\theta P^{\mu}_{\nu} + \hat{\sigma}_{\nu}^{\mu} + \hat{\omega}_{\nu}^{\mu}, \quad (8.33)$$

donde los diferentes términos representan cambios en la congruencia. De esta forma,

$$\theta = \hat{B}_{\mu}^{\mu} \quad (8.34)$$

es la *traza* y representa la *expansión*, mientras que

$$\hat{\sigma}_{\mu\nu} = \hat{B}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}P_{\mu\nu}\hat{B}_{\sigma}^{\sigma} \quad (8.35)$$

es la contribución simétrica y sin traza y representa el *corte*. Por último,

$$\hat{\omega}_{\mu\nu} = \hat{B}_{[\mu\nu]} \quad (8.36)$$

es la contribución antisimétrica y representa la *torsión*.

Ejercicio

Muestre que

$$t_{[\mu}\hat{B}_{\nu\rho]} = t_{[\mu}B_{\nu\rho]} \quad (8.37)$$

Por último, se mostrará que el vector tangente a las geodésicas, t , es normal a una familia de hipersuperficies nulas si y solo si $\hat{\omega} = 0$. Para ello nótese que

$$t_{[\mu}\hat{B}_{\nu\rho]} = t_{[\mu}\hat{\omega}_{\nu\rho]}. \quad (8.38)$$

Si se considera $\hat{\omega} = 0$ se tiene

$$t_{[\mu}\hat{B}_{\nu\rho]} = 0, \quad (8.39)$$

mientras que la ecuación (8.37) permite escribir

$$t_{[\mu}B_{\nu\rho]} = 0, \quad (8.40)$$

y la definición de $B_{\nu\rho}$ hace que

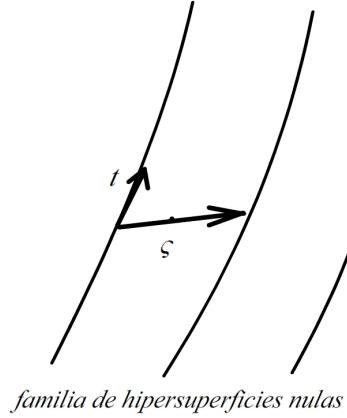


Figura 8.4: Vectores t y ς en una familia de hipersuperficies nulas. Nótese que ς sirve como parámetro para diferenciar las hipersuperficies.

$$t_{[\mu} \nabla_{\nu} t_{\rho]} = 0. \quad (8.41)$$

Al evaluar esta cantidad en una hipersuperficie nula, el teorema de Frobenius, (3.58), permite concluir que el vector t es normal a dicha hipersuperficie.

Por otro lado, si se considera que t es normal a una familia de hipersuperficies nulas, el teorema de Frobenius implica que $t_{[\mu} \nabla_{\nu} t_{\rho]}|_{\mathcal{N}} = 0$ y por ello, al invertir los pasos descritos anteriormente se obtiene

$$0 = t_{[\mu} \hat{\omega}_{\nu\rho]} = \frac{1}{3} (t_{\mu} \hat{\omega}_{\nu\rho} + t_{\nu} \hat{\omega}_{\rho\mu} + t_{\rho} \hat{\omega}_{\mu\nu}). \quad (8.42)$$

Si se contrae esta expresión con el vector ϑ^{μ} se tiene

$$t_{\mu} \vartheta^{\mu} \hat{\omega}_{\nu\rho} + t_{\nu} \hat{\omega}_{\rho\mu} \vartheta^{\mu} + t_{\rho} \hat{\omega}_{\mu\nu} \vartheta^{\mu} = 0, \quad (8.43)$$

pero ya que $\vartheta^{\mu} t_{\mu} = -1$, (8.82),

$$-\hat{\omega}_{\nu\rho} + t_{\nu} \hat{\omega}_{\rho\mu} \vartheta^{\mu} + t_{\rho} \hat{\omega}_{\mu\nu} \vartheta^{\mu} = 0. \quad (8.44)$$

Por otro lado, $\hat{\omega}$ contiene el operador de proyección P y ya que se ha considerado $\vartheta^{\mu} \varsigma_{\mu} = 0$, ecuación (9.9), los dos últimos términos del lado izquierdo desaparecen y por ello se concluye que $\hat{\omega} = 0$ cuando t es normal a una hipersuperficie nula.

Este resultado puede interpretarse al observar la Figura 8.4, donde se nota que si $\hat{\omega} = 0$ se tiene una familia de hipersuperficies nulas parametrizadas por el desplazamiento a lo largo de ϑ .

8.4. Ecuación de Raychaduy para Congruencias de Geodésicas Nulas

Dos vectores $\varsigma^{(1)}$ y $\varsigma^{(2)}$ linealmente independientes y ortogonales a ϑ y a t determinan un cierto elemento de área en T_\perp . La magnitud de este elemento de área está definido por

$$a = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} t_\mu \varsigma_\nu \varsigma_\rho^{(1)} \varsigma_\sigma^{(2)}. \quad (8.45)$$

El corte, $\hat{\sigma}$, determina el cambio en la *forma* de este elemento de área cuando λ se incrementa. Ahora bien, ya que $t^\sigma \nabla_\sigma \varsigma^\mu = t^\sigma \nabla_\sigma t^\mu = 0$, se tiene

$$\frac{da}{d\lambda} = t^\tau \partial_\tau a = t^\tau \nabla_\tau a \quad (8.46)$$

$$\frac{da}{d\lambda} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} t_\mu \varsigma_\nu \left[\varsigma_\sigma^{(2)} t^\tau \nabla_\tau \varsigma_\rho^{(1)} + \varsigma_\rho^{(1)} t^\tau \nabla_\tau \varsigma_\sigma^{(2)} \right]. \quad (8.47)$$

Utilizando (8.51) se obtiene

$$\frac{da}{d\lambda} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} t_\mu \varsigma_\nu \left[\varsigma_\sigma^{(2)} \hat{B}_\rho^\tau \varsigma_\tau^{(1)} + \varsigma_\rho^{(1)} \hat{B}_\sigma^\tau \varsigma_\tau^{(2)} \right], \quad (8.48)$$

y por las propiedades de $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, esta expresión se puede reescribir como

$$\frac{da}{d\lambda} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} t_\mu \varsigma_\nu \hat{B}_\rho^\tau \left[\varsigma_\tau^{(1)} \varsigma_\sigma^{(2)} - \varsigma_\sigma^{(1)} \varsigma_\tau^{(2)} \right] \quad (8.49)$$

$$\frac{da}{d\lambda} = 2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} t_\mu \varsigma_\nu \hat{B}_\rho^\tau \varsigma_{[\tau}^{(1)} \varsigma_{\sigma]}^{(2)} \quad (8.50)$$

Ejercicio

Muestre que

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} t_\mu \varsigma_\nu \hat{B}_\rho^\tau \left[\varsigma_\tau^{(1)} \varsigma_\sigma^{(2)} - \varsigma_\sigma^{(1)} \varsigma_\tau^{(2)} \right] = \theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} t_\mu \varsigma_\nu \varsigma_\rho^{(1)} \varsigma_\sigma^{(2)} \quad (8.51)$$

donde $\theta = \hat{B}_\tau^\tau$.

La ecuación (8.51) permite escribir el cambio de área de la congruencia como

$$\frac{da}{d\lambda} = \theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} t_\mu \varsigma_\nu \varsigma_\rho^{(1)} \varsigma_\sigma^{(2)} \quad (8.52)$$

$$\frac{da}{d\lambda} = \theta a, \quad (8.53)$$

es decir que la cantidad θ mide la razón de cambio en la magnitud del elemento de área. De esta forma, si en alguna región $\theta > 0$ las geodésicas son *divergentes*, mientras que si $\theta < 0$ son *convergentes*.

Ahora bien, de acuerdo con la ecuación (8.31) se tiene

$$\theta = \hat{B}_\tau^\tau = B_\nu^\mu P^\nu{}_\mu, \quad (8.54)$$

y con ello

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = t^\sigma \nabla_\sigma (B_\nu^\mu P^\nu{}_\mu). \quad (8.55)$$

Ya que $t^\sigma \nabla_\sigma \zeta^\mu = t^\sigma \nabla_\sigma t^\mu = 0$, se tiene

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = P^\nu{}_\mu t^\sigma \nabla_\sigma B_\nu^\mu \quad (8.56)$$

y debido a la definición de B_ν^μ , ecuación (8.9),

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = P^\nu{}_\mu t^\sigma \nabla_\sigma \nabla_\nu t^\mu \quad (8.57)$$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = P^\nu{}_\mu t^\sigma \nabla_\nu \nabla_\sigma t^\mu + P^\nu{}_\mu t^\sigma [\nabla_\sigma, \nabla_\nu] t^\mu \quad (8.58)$$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = P^\nu{}_\mu \nabla_\nu (t^\sigma \nabla_\sigma t^\mu) - P^\nu{}_\mu (\nabla_\nu t^\sigma) (\nabla_\sigma t^\mu) + P^\nu{}_\mu t^\sigma [\nabla_\sigma, \nabla_\nu] t^\mu. \quad (8.59)$$

Ya que las curvas consideradas son geodésicas se tiene $\nabla_\nu (t^\sigma \nabla_\sigma t^\mu) = 0$, y por ello el primer término del lado derecho desaparece, mientras que el tercer término corresponde a la definición del tensor de Riemann,

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -P^\nu{}_\mu (\nabla_\nu t^\sigma) (\nabla_\sigma t^\mu) + P^\nu{}_\mu t^\sigma R_{\sigma\nu}{}^\mu{}_\tau t^\tau. \quad (8.60)$$

Utilizando de nuevo la definición de B_ν^μ ,

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -P^\nu{}_\mu B_\nu^\sigma B_\sigma^\mu + P^\nu{}_\mu t^\sigma R_{\sigma\nu}{}^\mu{}_\tau t^\tau. \quad (8.61)$$

Ahora bien, nótese que

$$P^\nu{}_\mu R_{\sigma\nu}{}^\mu{}_\tau = (\delta_\mu^\nu + \vartheta^\nu t_\mu + t^\nu \vartheta_\mu) R_{\sigma\nu}{}^\mu{}_\tau \quad (8.62)$$

$$= \delta_\mu^\nu R_{\sigma\nu}{}^\mu{}_\tau + \vartheta^\nu t_\mu R_{\sigma\nu}{}^\mu{}_\tau + t^\nu \vartheta_\mu R_{\sigma\nu}{}^\mu{}_\tau \quad (8.63)$$

y debido a las simetrías del tensor de Riemann,

$$P^\nu{}_\mu R_{\sigma\nu}{}^\mu{}_\tau = -\delta_\mu^\nu R_{\nu\sigma}{}^\mu{}_\tau + \vartheta^\nu t^\lambda R_{\sigma\nu\lambda\tau} + \vartheta^\lambda t^\nu R_{\sigma\nu\lambda\tau} \quad (8.64)$$

$$= -R_{\sigma\tau} + \vartheta^\nu t^\lambda R_{\sigma\nu\lambda\tau} + \vartheta^\nu t^\lambda R_{\sigma\lambda\nu\tau} \quad (8.65)$$

$$= -R_{\sigma\tau} - \vartheta^\nu t^\lambda R_{\nu\sigma\lambda\tau} + \vartheta^\nu t^\lambda R_{\nu\tau\sigma\lambda}. \quad (8.66)$$

De esta forma, el cambio del área resulta ser

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -P^\nu{}_\mu B^\sigma_\nu B^\mu_\sigma - R_{\sigma\tau} t^\sigma t^\tau - \vartheta^\nu t^\lambda t^\sigma t^\tau R_{\nu\sigma\lambda\tau} + \vartheta^\nu t^\lambda t^\sigma t^\tau R_{\nu\tau\sigma\lambda} \quad (8.67)$$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -P^\nu{}_\mu B^\sigma_\nu B^\mu_\sigma - R_{\sigma\tau} t^\sigma t^\tau. \quad (8.68)$$

La definición de $P^\rho{}_\sigma$ nos permite escribir

$$\delta_\sigma^\rho = P^\rho{}_\sigma - \vartheta^\rho t_\sigma - t^\rho \vartheta_\sigma \quad (8.69)$$

y por ello se tiene

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -P^\nu{}_\mu B^\sigma_\nu B^\mu_\rho \delta_\sigma^\rho - R_{\sigma\tau} t^\sigma t^\tau \quad (8.70)$$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -P^\nu{}_\mu B^\sigma_\nu B^\mu_\rho (P^\rho{}_\sigma - \vartheta^\rho t_\sigma - t^\rho \vartheta_\sigma) - R_{\sigma\tau} t^\sigma t^\tau \quad (8.71)$$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -P^\nu{}_\mu B^\sigma_\nu B^\mu_\rho P^\rho{}_\sigma + P^\nu{}_\mu B^\mu_\rho \vartheta^\rho t_\sigma B^\sigma_\nu + P^\nu{}_\mu B^\sigma_\nu t^\rho B^\mu_\rho \vartheta_\sigma - R_{\sigma\tau} t^\sigma t^\tau. \quad (8.72)$$

Sin embargo, $t^\rho B_\rho^\mu = t^\rho \nabla_\rho t^\mu = 0$ y además $t_\sigma B_\nu^\sigma = t_\sigma \nabla_\nu t^\sigma = \frac{1}{2} \partial_\nu t^2 = 0$, por lo cual el segundo y tercer términos del lado derecho desaparecen,

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -P^\nu{}_\mu B^\sigma_\nu B^\mu_\rho P^\rho{}_\sigma - R_{\sigma\tau} t^\sigma t^\tau. \quad (8.73)$$

Finalmente, la definición (8.31) permite escribir

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\hat{B}_\mu^\nu \hat{B}_\nu^\mu - R_{\mu\nu} t^\mu t^\nu. \quad (8.74)$$

Si la matriz \hat{B}_ν^μ se escribe en términos de sus componentes irreducibles como en la ecuación (8.33) se tiene la ecuación de Raychaudhuri para congruencia de geodésicas nulas,

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2} \theta^2 - \hat{\sigma}^{\mu\nu} \hat{\sigma}_{\mu\nu} + \hat{\omega}^{\mu\nu} \hat{\omega}_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} t^\mu t^\nu. \quad (8.75)$$

La ecuación de Raychaudhuri tiene algunas consecuencias interesantes. Por ejemplo, si se considera un horizonte de Killing \mathcal{N} , se tiene que $\hat{B}_{\mu\nu} = 0$ y además $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$. Para mostrar esto considere un vector de Killing ξ que se puede escribir en términos del vector normal al horizonte de Killing, $n = t$, mediante $\xi = f n$ para alguna función no-nula f .

Como se mostró en la sección anterior, para una familia de hipersuperficies nulas se tiene $\hat{\omega} = 0$, es decir que la parte antisimétrica de $\hat{B}_{\mu\nu}$ es nula y por ello

$$\hat{B}_{\mu\nu} = \hat{B}_{(\mu\nu)} \quad (8.76)$$

$$= P_\mu^\rho B_{(\rho\sigma)} P^\sigma{}_\nu \quad (8.77)$$

$$= P_\mu^\rho \nabla_{(\rho} n_{\sigma)} P^\sigma{}_\nu, \quad (8.78)$$

o en términos del vector de Killing,

$$\hat{B}_{\mu\nu} = P_\mu^\rho \nabla_{(\rho} (f^{-1} \xi_{\sigma)}) P^\sigma{}_\nu \quad (8.79)$$

$$= f^{-1} P_\mu^\rho \nabla_{(\rho} \xi_{\sigma)} P^\sigma{}_\nu + P_\mu^\rho \partial_{(\rho} (f^{-1}) \xi_{\sigma)} P^\sigma{}_\nu. \quad (8.80)$$

Ya que $\nabla_{(\rho} \xi_{\sigma)} = 0$, se tiene

$$\hat{B}_{\mu\nu} = P_\mu^\rho \partial_{(\rho} (f^{-1}) \xi_{\sigma)} P^\sigma{}_\nu. \quad (8.81)$$

Por último, la proyección del vector de Killing es $P_\mu^\rho \xi_\rho = \xi_\sigma P^\sigma{}_\nu = 0$ debido a que $\vartheta^\mu t_\mu = 0$. De esta forma se concluye que

$$\hat{B}_{\mu\nu} = 0 \quad (8.82)$$

y en particular $\hat{B}_\mu^\mu = \theta = 0$ en cualquier punto de la hipersuperficie \mathcal{N} . Con ello concluimos que

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = 0. \quad (8.83)$$

Si se utiliza los últimos dos resultados, (8.82) y (8.83), en la ecuación de Raychaudhuri se obtiene finalmente

$$R_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu |_{\mathcal{N}} = 0. \quad (8.84)$$

8.4.1. Causticas

Si se considera una hipersuperficie nula \mathcal{N} , el corte $\hat{\sigma}^2 \geq 0$ ya que la métrica en el subespacio T_\perp es definida positiva. Por otro lado, la torsión es $\hat{\omega}^2 \geq 0$, pero en la hipersuperficie nula se tiene $\hat{\omega} = 0$. De esta forma, la ecuación de Raychaudhuri, (8.75), implica que la expansión para los generadores geodésicos nulos de la hipersuperficie \mathcal{N} satisface la desigualdad

$$\frac{d\theta}{d\lambda} \leq -\frac{1}{2} \theta^2 - R_{\mu\nu} t^\mu t^\nu. \quad (8.85)$$

Utilizando las ecuaciones de campo se tiene

$$\frac{d\theta}{d\lambda} \leq -\frac{1}{2} \theta^2 - 8\pi G T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \quad (8.86)$$

ya que el término que involucra el escalar de curvatura resulta ser $Rg_{\mu\nu}t^\mu t^\nu = Rt^2 = 0$. Si el tensor momento-energía satisface la condición de energía nula, $t^\mu t^\nu T_{\mu\nu} \geq 0$, ya que t^μ es un vector nulo. De esta forma se tiene finalmente

$$\frac{d\theta}{d\lambda} \leq -\frac{1}{2}\theta^2. \quad (8.87)$$

Esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\theta} \right) \geq \frac{1}{2}, \quad (8.88)$$

o integrando,

$$\frac{1}{\theta} \geq \frac{1}{2}\lambda + \text{constante}. \quad (8.89)$$

Ahora bien, si se considera un generador geodésico nulo γ y la expansión toma el valor $\theta = \theta_0 < 0$ en algún punto p con parámetro afín $\lambda = 0$, entonces la constante de integración en (8.89) no puede exceder el valor $\frac{1}{\theta_0}$. De esta forma,

$$\frac{1}{\theta} \geq \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{\theta_0} \quad (8.90)$$

$$\theta \leq \frac{\theta_0}{1 + \frac{1}{2}\lambda\theta_0}. \quad (8.91)$$

Si $\theta_0 < 0$, el lado derecho de la desigualdad tiende a $-\infty$ cuando $\lambda \rightarrow \frac{2}{|\theta_0|}$. es decir que la expansión $\theta \rightarrow -\infty$ para un valor finito del parámetro afín. Desde el punto de vista físico, un valor negativo de la expansión muestra que las geodésicas vecinas convergen, lo cual es resultado del carácter atractivo de la gravedad y este último resultado implica que estas geodésicas continúan acercándose hasta que se cruzan en un punto denominado *foco* o *caustica*.

Capítulo 9

Mecánica de Agujeros Negros

Desde el punto de vista clásico, los agujeros negros de la Relatividad General obedecen ciertas leyes geométricas que poseen una gran similitud en su forma matemática con las leyes usuales de la termodinámica. Sin embargo, como es conocido, desde el punto de vista clásico los agujeros negros poseen una absorción perfecta pero no emiten nada y por ello su temperatura física debe ser el cero absoluto. Por esta razón, desde el punto de vista clásico, las leyes de la mecánica de agujeros negros solamente se parecen a las leyes de la termodinámica, pero no existe una conexión directa entre ellas. Solo después del estudio de las propiedades cuánticas de los campos cerca del horizonte de eventos puede asegurarse que los agujeros negros en realidad emiten una radiación conespectro térmico y solo entonces las leyes de la mecánica de agujeros negros adquieren una interpretación termodinámica real.

9.1. Ley Cero

Si $T_{\mu\nu}$ obedece la condición de energía dominante, entonces, la gravedad superficial κ es constante en el horizonte de eventos futuro, \mathcal{H}^+ .

En un capítulo anterior se mostró que la cantidad κ^2 es constante en un horizonte de Killing bifurcado, pero cuando no existe una esfera de bifurcación no se puede asegurar esto. Por ello, para probar la ley cero de la mecánica de agujeros negros se considerará un vector de Killing ξ normal al horizonte \mathcal{H}^+ y se utilizará el teorema de Hawking que asegura que el horizonte de eventos futuro en un espacio-tiempo estacionario y asintóticamente plano es un horizonte de Killing.

La ecuación de Raychaudhuri en este horizonte resulta ser, (8.84),

$$R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu|_{\mathcal{H}^+} = 0 \quad (9.1)$$

y además, en el horizonte se tiene $\xi^2|_{\mathcal{H}^+} = 0$. De esta forma, las ecuaciones de campo de Einstein implican que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (9.2)$$

$$R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu R = 8\pi GT_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \quad (9.3)$$

y al evaluarlas en el horizonte,

$$T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu|_{\mathcal{H}^+} = 0. \quad (9.4)$$

Si se define el vector $J = -T_{\mu\nu}\xi^\mu\partial_\nu$, las ecuaciones de campo resultan ser

$$J_\nu\xi^\nu|_{\mathcal{H}^+} = 0, \quad (9.5)$$

es decir que J es tangente a \mathcal{H}^+ . Por lo tanto, este vector puede ser escrito en términos de una base de vectores tangentes al horizonte,

$$J = a\xi + b_1\xi^{(1)} + b_2\xi^{(2)}. \quad (9.6)$$

La condición de energía dominante exige que el vector J sea como-de-tiempo o nulo, sin embargo las propiedades $\xi^\mu\xi_\mu^{(1)} = \xi^\mu\xi_\mu^{(2)} = 0$ implican que J puede ser como-de-espacio o nulo (cuando $b_1 = b_2 = 0$). Es decir que para que la condición de energía dominante se cumpla se debe tener $J \propto \xi$.

Ahora bien, si J es proporcional a ξ , estos vectores conmutan, es decir

$$\xi_{[\rho}J_{\sigma]}|_{\mathcal{H}^+} = 0 \quad (9.7)$$

$$-\xi_{[\rho}T_{\sigma]}^\lambda\xi_\lambda|_{\mathcal{H}^+} = 0. \quad (9.8)$$

Las ecuaciones de campo permiten escribir

$$-\xi_{[\rho}R_{\sigma]}^\lambda\xi_\lambda|_{\mathcal{H}^+} = 0. \quad (9.9)$$

Ejercicio

Explique por qué el escalar $\Psi = A^{\mu\nu\rho}\xi_\mu\nabla_\nu\xi_\rho$ es cero al evaluarlo en el horizonte de Killing \mathcal{N} del campo vectorial ξ , para cualquier tensor de tercer orden totalmente antisimétrico A .

Utilice este resultado para mostrar que al evaluar en \mathcal{N} se cumple

$$(\xi_{[\rho}\nabla_{\sigma]}\xi_{\nu}) (\nabla^\nu\xi^\mu) = \kappa\xi_{[\rho}\nabla_{\sigma]}\xi^\mu. \quad (9.10)$$

Ejercicio

Ya que el escalar $\Psi = A^{\mu\nu\rho} \xi_\mu \nabla_\nu \xi_\rho$ es cero en \mathcal{N} , su derivada es normal a esta hipersuperficie, y esto implica que $\xi_{[\mu} \partial_{\nu]} \Psi = 0$ en \mathcal{N} . Utilice este resultado y el lema del vector de Killing para mostrar que en la hipersuperficie \mathcal{N} se cumple

$$\left[\xi_\nu R_{\sigma\beta[\rho} {}^\lambda \xi_{\alpha]} + \xi_\beta R_{\nu\sigma[\rho} {}^\lambda \xi_{\alpha]} + \xi_\sigma R_{\beta\nu[\rho} {}^\lambda \xi_{\alpha]} \right] \xi_\lambda = 0. \quad (9.11)$$

Contraiga en esta expresión los índices α y β y tenga en cuenta que $\xi^2 = 0$ en \mathcal{N} , para obtener

$$\xi^\nu \xi_{[\rho} R_{\sigma]\nu\mu} {}^\lambda \xi_\lambda = -\xi_\mu \xi_{[\rho} R_{\sigma]} {}^\lambda \xi_\lambda. \quad (9.12)$$

Ejercicio

Para cualquier vector V , el escalar $\Phi = (\xi^\sigma \nabla_\sigma \xi^\rho - \kappa \xi^\rho) V_\rho$ es cero en \mathcal{N} . Esto implica que $\xi_{[\mu} \partial_{\nu]} \Phi|_{\mathcal{N}} = 0$. Utilice la ecuación (9.9) junto con el lema del vector de Killing para mostrar que en la hipersuperficie \mathcal{N} se cumple

$$\xi^\mu \xi_{[\rho} \partial_{\sigma]} \kappa = \xi^\nu R_{\mu\nu[\sigma} {}^\lambda \xi_{\rho]} \xi_\lambda = \xi^\nu \xi_{[\rho} R_{\sigma]\nu\mu} {}^\lambda \xi_\lambda. \quad (9.13)$$

(La segunda igualdad se obtiene con la propiedad cíclica del tensor de Riemann).

Finalmente, utilice la ecuación (9.9) para mostrar que en \mathcal{N} ,

$$\xi^\mu \xi_{[\rho} \partial_{\sigma]} \kappa = \xi_{[\rho} R_{\sigma]} {}^\lambda \xi_\lambda. \quad (9.14)$$

Utilizando el resultado (9.14) de los ejercicios, la ecuación (9.9) puede escribirse como

$$-\xi_{[\sigma} R_{\rho]} {}^\lambda \xi_\lambda|_{\mathcal{H}^+} = -\xi_{[\rho} \partial_{\sigma]} \kappa|_{\mathcal{H}^+} = 0. \quad (9.15)$$

Esta relación muestra que los vectores ξ y $\partial\kappa$ comutan y por ello se tiene

$$\partial_\sigma \kappa \propto \xi_\sigma, \quad (9.16)$$

es decir que para cualquier vector tangente t a la hipersuperficie \mathcal{H}^+ se cumple

$$t^\sigma \partial_\sigma \kappa = 0 \quad (9.17)$$

y por ello se puede concluir que la gravedad superficial κ es constante en el horizonte \mathcal{H}^+ .

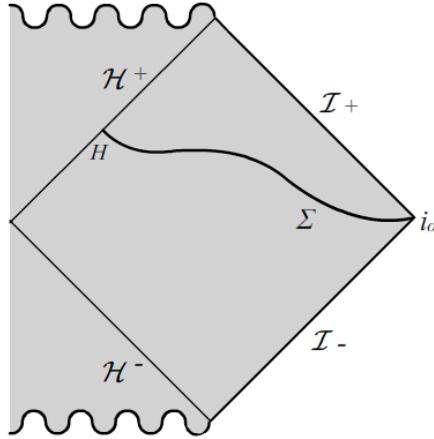


Figura 9.1: Hipersuperficie como-de-espacio Σ con frontera en i_0 y en H .

9.2. Fórmula de Smarr

Considere una hipersuperficie como-de-espacio Σ en el espacio-tiempo de un agujero negro estacionario, la cual posee una frontera en i_0 y otra frontera interior H en el horizonte de eventos futuro. La superficie H corresponde a una 2-esfera que puede ser considerada como la *frontera* del agujero negro (vease Figura 9.1).

Utilizando la ley de Gauss, la integral de Komar para el momento angular en la región exterior se puede escribir como la suma de dos contribuciones, una en la hipersuperficie Σ y otra calculada en la frontera H ,

$$J = \frac{1}{8\pi G} \int_{\Sigma} \nabla_{\nu} \nabla^{\mu} \zeta^{\nu} d\Sigma_{\mu} + \frac{1}{16\pi G} \oint_H \nabla^{\mu} \zeta^{\nu} d\Sigma_{\mu\nu} \quad (9.18)$$

$$J = \frac{1}{8\pi G} \int_{\Sigma} \nabla_{\nu} \nabla^{\mu} \zeta^{\nu} d\Sigma_{\mu} + J_H, \quad (9.19)$$

donde J_H corresponde a la integral sobre la 2-esfera H y $\zeta = \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Utilizando el lema del vector de Killing (1.46) se tiene

$$J = \frac{1}{8\pi G} \int_{\Sigma} R_{\nu}^{\mu} \zeta^{\nu} d\Sigma_{\mu} + J_H \quad (9.20)$$

y al utilizar las ecuaciones de campo,

$$J = \int_{\Sigma} \left[T_{\nu}^{\mu} \zeta^{\nu} - \frac{1}{2} T \zeta^{\mu} \right] d\Sigma_{\mu} + J_H. \quad (9.21)$$

Ahora bien, si se considera que la única fuente de momento-energía es el campo electromagnético se tiene

$$T^{(EM)} = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{(EM)} = 0 \quad (9.22)$$

y por ello la integral de Komar será

$$J = \int_{\Sigma} T_{\nu}^{\mu} \zeta^{\nu} d\Sigma_{\mu} + J_H, \quad (9.23)$$

donde $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(F)$ con F el tensor electromagnético.

Por otra parte, la integral de Komar para la energía total se puede escribir de una manera similar

$$E = M = -\frac{1}{4\pi G} \int_{\Sigma} \nabla_{\nu} \nabla^{\mu} \xi^{\nu} d\Sigma_{\mu} - \frac{1}{8\pi G} \oint_H \nabla^{\mu} \xi^{\nu} d\Sigma_{\mu\nu}, \quad (9.24)$$

con $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$. Utilizando el lemma del vector de Killing

$$M = -\frac{1}{4\pi G} \int_{\Sigma} R_{\nu}^{\mu} \xi^{\nu} d\Sigma_{\mu} - \frac{1}{8\pi G} \oint_H \nabla^{\mu} \xi^{\nu} d\Sigma_{\mu\nu} \quad (9.25)$$

y las ecuaciones de campo,

$$M = -2 \int_{\Sigma} \left[T_{\nu}^{\mu} \xi^{\nu} - \frac{1}{2} T \xi^{\mu} \right] d\Sigma_{\mu} - \frac{1}{8\pi G} \oint_H \nabla^{\mu} \xi^{\nu} d\Sigma_{\mu\nu}. \quad (9.26)$$

Al igual que en el caso anterior, si se considera que solo existe campo electromagnético, esta expresión se convierte en

$$M = -2 \int_{\Sigma} T_{\nu}^{\mu} \xi^{\nu} d\Sigma_{\mu} - \frac{1}{8\pi G} \oint_H \nabla^{\mu} \xi^{\nu} d\Sigma_{\mu\nu}. \quad (9.27)$$

Ahora bien, para la métrica de Kerr, el vector de Killing relevante en el horizonte de eventos es $\psi_+ = \xi + \Omega_H \zeta$ y por ello, al reemplazar esta expresión en la integral de Komar se obtiene

$$M = -2 \int_{\Sigma} T_{\nu}^{\mu} \psi_+^{\nu} d\Sigma_{\mu} + 2\Omega_H \int_{\Sigma} T_{\nu}^{\mu} \zeta^{\nu} d\Sigma_{\mu} - \frac{1}{8\pi G} \oint_H \nabla^{\mu} \psi_+^{\nu} d\Sigma_{\mu\nu} + \frac{\Omega_H}{8\pi G} \oint_H \nabla^{\mu} \zeta^{\nu} d\Sigma_{\mu\nu}. \quad (9.28)$$

Nótese que, de acuerdo con la ecuación (9.23), el segundo y el cuarto término del lado derecho corresponden a $2\Omega_H J$ y por ello

$$M = -2 \int_{\Sigma} T_{\nu}^{\mu} \psi_+^{\nu} d\Sigma_{\mu} + 2\Omega_H J - \frac{1}{8\pi G} \oint_H \nabla^{\mu} \psi_+^{\nu} d\Sigma_{\mu\nu}. \quad (9.29)$$

Ejercicio

Muestre que en la 2-esfera H , el elemento de superficie puede escribirse como

$$d\Sigma_{\mu\nu} = (\psi_{+\mu} n_{\nu} - \psi_{+\nu} n_{\mu}) dA \quad (9.30)$$

con A el elemento de área del horizonte y n un vector normal tal que $n_{\sigma} \psi_+^{\sigma} = -1$.

Utilizando la ecuación (4.64), el último del lado derecho de (8.89) se puede escribir como

$$-\frac{1}{8\pi G} \oint_H \nabla^\mu \psi_+^\nu d\Sigma_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G} \oint_H \nabla^\mu \psi_+^\nu (\psi_{+\mu} n_\nu - \psi_{+\nu} n_\mu) dA \quad (9.31)$$

$$-\frac{1}{8\pi G} \oint_H \nabla^\mu \psi_+^\nu d\Sigma_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi G} \oint_H n_\nu \psi_{+\mu} \nabla^\mu \psi_+^\nu dA. \quad (9.32)$$

La definición de la gravedad superficial implica que $\psi_{+\mu} \nabla^\mu \psi_+^\nu = \kappa \psi_+^\nu$, es decir que

$$-\frac{1}{8\pi G} \oint_H \nabla^\mu \psi_+^\nu d\Sigma_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi G} \oint_H n_\nu \kappa \psi_+^\nu dA. \quad (9.33)$$

La ley cero dice que κ es constante en el horizonte y por ello

$$-\frac{1}{8\pi G} \oint_H \nabla^\mu \psi_+^\nu d\Sigma_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{4\pi G} \oint_H n_\nu \psi_+^\nu dA. \quad (9.34)$$

Finalmente, ya que $n_\nu \psi_+^\nu = -1$, se tiene

$$-\frac{1}{8\pi G} \oint_H \nabla^\mu \psi_+^\nu d\Sigma_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{4\pi G} \oint_H dA = \frac{\kappa A}{4\pi G} \quad (9.35)$$

donde A es el *area del horizonte* H . De esta forma, la integral de Komar (8.89) resulta ser

$$M = \frac{\kappa A}{4\pi G} + 2\Omega_H J - 2 \int_{\Sigma} T_{\nu}^{\mu} \psi_+^{\nu} d\Sigma_{\mu}. \quad (9.36)$$

Para el agujero negro de Kerr la carga eléctrica es $Q = 0$, y por ello esta ecuación se transforma en la fórmula de Smarr,

$$M = \frac{\kappa A}{4\pi G} + 2\Omega_H J. \quad (9.37)$$

Ejercicio

El potencial eléctrico co-rotante se define como

$$\Phi = \psi_+^\mu A_\mu \quad (9.38)$$

con A_μ el potencial electromagnético. Utilizando el resultado $R_{\mu\nu} \psi_+^\mu \psi_+^\nu = 0$ en un horizonte de Killing, muestre que Φ es constante en el horizonte H .

Muestre que escogiendo un gauge para el cual $\Phi = 0$ en el infinito, el potencial eléctrico en el horizonte se puede escribir como

$$\Phi_H = \frac{Q r_+}{r_+^2 + a^2}. \quad (9.39)$$

Ejercicio

Muestre que

$$-2 \int_{\Sigma} T_{\nu}^{\mu} \psi_{+}^{\nu} d\Sigma_{\mu} = \Phi_H Q, \quad (9.40)$$

donde Φ_H es el potencial eléctrico co-rotante en el horizonte.

Utilizando el resultado (4.64) de los ejercicios, la fórmula de Smarr (9.36) para el agujero de Kerr-Newman ($Q \neq 0$) se generaliza a

$$M = \frac{\kappa A}{4\pi G} + 2\Omega_H J + \Phi_H Q. \quad (9.41)$$

9.3. Primera Ley

Si un agujero negro estacionario de masa M , carga Q y momento angular J , con un horizonte de eventos futuro con gravedad superficial κ , potencial eléctrico Φ_H en el horizonte y velocidad angular Ω_H , es perturbado de tal forma que se estabiliza en otro agujero negro con mas $M + \delta M$, carga $Q + \delta Q$ y momento angular $J + \delta J$, entonces

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ. \quad (9.42)$$

Nótese que la ecuación de Smarr (??) nos dice que en el caso $Q = 0$, la masa del agujero (energía) es una función del área del horizonte y del momento angular, es decir

$$M = M(A, J). \quad (9.43)$$

Ahora bien, las cantidades A y J tienen dimensiones de M^2 (en unidades con $G = c = 1$), por lo que la función $M(A, J)$ es *homogénea de grado $\frac{1}{2}$* . De esta forma, el teorema de Euler para funciones homogéneas permite asegurar que

$$A \frac{\partial M}{\partial A} + J \frac{\partial M}{\partial J} = \frac{1}{2} M. \quad (9.44)$$

Utilizando la fórmula de Smarr, (9.36), se tiene

$$A \frac{\partial M}{\partial A} + J \frac{\partial M}{\partial J} = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{4\pi} A + 2\Omega_H J \right) \quad (9.45)$$

$$A \left(\frac{\partial M}{\partial A} - \frac{\kappa}{8\pi} A \right) + J \left(\frac{\partial M}{\partial J} - \Omega_H J \right) = 0. \quad (9.46)$$

Ya que A y J son parámetros libres, se concluye que

$$\frac{\partial M}{\partial A} = \frac{\kappa}{8\pi} A \quad (9.47)$$

$$\frac{\partial M}{\partial J} = \Omega_H J, \quad (9.48)$$

con lo que se obtiene la primera ley (9.42) en el caso $Q = 0$.

Ejercicio

Utilizando la ecuación de Smarr (9.41), muestre que

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ. \quad (9.49)$$

Ayuda: $\mathcal{L}_\xi (F^{\mu\nu} A_\nu) = 0$, donde A_ν es el potencial electromagnético.

La derivación original de la primera ley utilizaba perturbaciones estacionarias (1) y utilizaba las ecuaciones de campo. Sin embargo, esta deducción ha sido generalizada para incluir perturbaciones no-estacionarias (6). Además, se ha mostrado que la primera ley se cumple bajo ciertas condiciones muy generales para las ecuaciones de campo. Por ejemplo, Iyer y Wald (4) mostraron como la primera ley se cumple para cualquier conjunto de ecuaciones de campo derivadas de un lagrangiano covariante bajo difeomorfismos, el cual puede escribirse de forma general como

$$L = L(g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\rho\sigma}, \nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma}, \dots, \psi, \nabla_\mu \psi, \dots), \quad (9.50)$$

es decir que dependa de la métrica, el tensor de Riemann, sus derivadas covariantes y campos de materia ψ y sus derivadas. En este lagrangiano se permite un número arbitrario (pero finito) de derivadas de $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ y ψ .

9.4. Segunda Ley

Si $T_{\mu\nu}$ satisface la condición de energía débil, y asumiendo que la hipótesis del censor cósmico es verdadera, entonces el área del horizonte de eventos futuro en un espacio-tiempo asintóticamente plano es una función no-decreciente del tiempo.

La hipótesis del censor cósmico corresponde a asumir que el espacio-tiempo es *fuertemente previsible asintóticamente*. Esto requiere la existencia de una subvariedad globalmente hiperbólica que contenga al exterior del agujero negro y al horizonte. Suponga que existe una familia de hipersuperficies de Cauchy $\Sigma(\lambda)$ tales que $\Sigma(\lambda') \subset D^+(\Sigma(\lambda))$ si $\lambda' > \lambda$. El parámetro λ puede ser escogido de tal forma que corresponda con el parámetro afín en una geodésica nula generadora de \mathcal{H}^+ . El *área del horizonte* $A(\lambda)$ corresponde entonces a la intersección de $\Sigma(\lambda)$ con \mathcal{H}^+ , y la segunda ley se puede reescribir como

$$A(\lambda') \geq A(\lambda) \text{ si } \lambda' > \lambda. \quad (9.51)$$

Para mostrar que $A(\lambda)$ no decrece cuando se incremente λ es suficiente mostrar que cada elemento de área a en el horizonte H posee esta propiedad. La ecuación (8.53) dice que el cambio en el elemento de área se puede calcular como

$$\frac{da}{d\lambda} = \theta a, \quad (9.52)$$

es decir que la segunda ley se cumple si $\theta \geq 0$ en todo el horizonte de eventos futuro \mathcal{H}^+ . Para comprobar que esto sucede en realidad, recuerde que si la expansión es $\theta < 0$, las geodésicas deben converger a un *foco* o *cáustica*, como se mostró al final del capítulo anterior. Esto implica que geodésicas vecinas a uno de los generadores γ del horizonte y que pasen por un cierto punto p intersecan a γ otro punto a una distancia afín finita. El primer punto q de intersección para el cual esto ocurra se denomina *punto conjugado de p sobre γ* (ver FIGURA***).

Ahora bien, la existencia de un punto conjugado en el futuro de un generador geodésico nulo en \mathcal{H}^+ implica que este generador posee un punto final a una distancia finita, en contradicción con el teorema de Penrose. Por esta razón, el punto conjugado no puede existir, es decir que la expansión debe ser $\theta \geq 0$ en cualquier punto sobre el horizonte, siendo válida la segunda ley (el caso $\theta = 0$ solo es válido para espacios-tiempo estacionarios).

9.4.1. Consecuencias de la Segunda Ley

La segunda ley limita la eficiencia de la conversión masa-energía en las colisiones de agujeros negros. Por ejemplo, si se considera el diagrama de la Figura 9.2, el cual muestra dos agujeros negros en colisión, la energía radiada en el proceso es $M_1 + M_2 - M_3$. La eficiencia ϵ de este proceso se define como

$$\epsilon = \frac{M_1 + M_2 - M_3}{M_1 + M_2} = 1 - \frac{M_3}{M_1 + M_2}. \quad (9.53)$$

Si se supone que los dos agujeros iniciales son aproximadamente estacionarios, $A_1 = 4\pi M_1^2$ y $A_2 = 4\pi M_2^2$. La segunda ley afirma que

$$A_3 \geq A_1 + A_2 \quad (9.54)$$

$$A_3 \geq 4\pi (M_1^2 + M_2^2). \quad (9.55)$$

Pero el área del agujero resultante es $A_3 \leq 4\pi M_3^2$, con la igualdad para tiempos grandes, con lo cual se obtiene

$$M_3 \geq \sqrt{M_1^2 + M_2^2}. \quad (9.56)$$

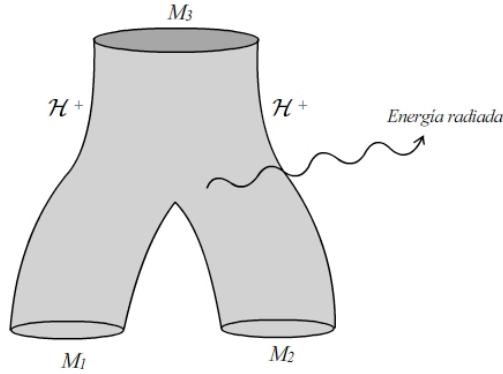


Figura 9.2: Diagrama mostrando la colisión de dos agujeros negros de masas M_1 y M_2 para formar un agujero de masa M_3 .

De esta manera, la eficiencia del proceso está limitada por

$$\epsilon \leq 1 - \frac{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}}{M_1 + M_2} \quad (9.57)$$

$$\epsilon \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (9.58)$$

Al igual que en el caso de la segunda ley de la termodinámica, la cual límita la eficiencia de las máquinas térmicas; la segunda ley de los agujeros negros limita la energía extraída en el proceso.

Por otro lado, si se considera un proceso de bifurcación (en el cual un agujero se divide en dos) se debe tener $M_3 \rightarrow M_1 + M_2$. En este caso, la segunda ley exige que

$$M_3 \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \leq M_1 + M_2, \quad (9.59)$$

pero la conservación de la energía requiere que

$$M_3 \geq M_1 + M_2, \quad (9.60)$$

donde $M_3 - M_1 - M_2$ es la energía radiada por el proceso. Ya que la segunda ley contradice esta expresión, esta clase de procesos no puede ocurrir.

Índice alfabético

- ADM, 132
agujero blanco, 29
agujero de gusano, 37
arrastre de sistemas inerciales, 122
asintóticamente plano, 12, 23, 64

Boyer-Lindquist, 107

campo electromagnético, 83
cantidades conservadas, 21, 123
carga conservada, 12
Carter-Penrose, diagrama de, 41, 94, 104, 112, 118, 129
causticas, 157
coeficientes de rotación, 75

derivada intrínseca, 75

Eddington-Finkelstein, 25, 53, 81, 88, 100, 107, 115
einbein, 8
Einstein-Rosen, puente de, 37
electromagnético, campo, 83
Energía, condiciones de, 140
ergosférica, 121
esfera de bifurcación, 59
estático, 13
estacionario, 12
estructura causal, 23
extensión analítica maximal, 32

geodésica, 7
geodésicas, 147
gravedad superficial, 56, 63

hipersuperficie nula, 52
horizonte de aceleración, 62
horizonte de Cauchy, 68
horizonte de eventos, 30, 64, 66, 126
horizonte de Killing, 56, 89, 101, 115, 128

isotrópicas, coordenadas, 35, 98

Kerr, 105
Kerr-Newman, 108
Kerr-Shild, coordenadas de, 110
Killing, campo de, 9, 10, 13, 21, 33, 37, 56, 109
Killing, horizonte de, 56, 89, 101, 115, 128
Killing, Lema de, 10
Komar, integrales de, 131, 136
Kruskal, 47, 55, 60, 65
Kruskal, coordenadas de, 29
Kruskal, diagrama de, 92, 102
Kruskal, coordenadas de, 91

límite newtoniano, 14

Minkowski, 41, 65

Newman-Penrose, formalismo de, 79

Pauli-Fierz, ecuación de, 18, 132
Penrose, proceso de, 124
Poisson, ecuación de, 18
pre-coeficientes de rotación, 76

Raychaduy, ecuación de, 154
Reissner-Nordström, 83
Rindler, 39, 45

Schwarzschild, 19, 53, 73, 77, 81, 105, 138

simetrías, 12

singularidad, 24, 113

Smarr, formula de, 162

tétradas, 71

Bibliografía

- [1] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, *The four laws of black hole mechanics*, Commun. Math. Phys., 31, 161–170, (1973).
- [2] B. Carter, *Black Hole Equilibrium States*, in DeWitt, C., and DeWitt, B.S., eds., Black Holes, Based on lectures given at the 23rd session of the Summer School of Les Houches, 1972, pp. 57–214, (Gordon and Breach, New York, 1973).
- [3] S.W. Hawking, and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [4] V. Iyer and R. M. Wald, *Some properties of Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy*, Phys. Rev. D, 50, 846–864, (1994).
- [5] C. Misner, K. Thorne and J. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman and Co. San Francisco. 1973
- [6] D. Sudarsky and R. M. Wald, *Extrema of mass, stationarity, and staticity, and solutions to the Einstein–Yang–Mills equations*, Phys. Rev. D, 46, 1453–1474, (1992).
- [7] P.K. Townsend. *Black Holes*. Lecture Notes. Cambridge University. U.K. 1997.
- [8] R. M. Wald, *General Relativity*, (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [9] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, Chicago Lectures in Physics, (University of Chicago Press, Chicago, 1994).
- [10] R. M. Wald, *The Thermodynamics of Black Holes*, Living Rev. Relativity 4, (2001), 6. Disponible en <http://www.livingreviews.org/lrr-2001-6>
- [11] S. Winitzki. *Advanced General Relativity*. Disponible en <http://www.theorie.physik.uni-muenchen.de/~serge/T7/>