Métrica Estacionaria Axialmente Simétrica

Consideramos ahora un e-t estacionario con simetría axial, con un elemento de línea general en la forma

$$ds^2 = g_{tt}\,dt^2 + 2g_{t\phi}\,dt\,d\phi + g_{rr}\,dr^2 + g_{\theta\theta}\,d\theta^2 + g_{\phi\phi}\,d\phi^2 \qquad \text{signatura}: (-+++)$$

con $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(r,\theta)$. Ya que la métrica NO depende de t ni de ϕ, existen dos vectores de Killing: $\frac{\partial}{\partial t}$ y $\frac{\partial}{\partial \phi}$, respectivamente.

De esta forma, a partir del Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \qquad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

se tienen dos cantidades conservadas

$$P_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = g_{tt}\,\dot{t} + g_{t\phi}\,\dot{\phi} \equiv -\mathcal{E} \qquad \text{(Energía específica)}$$

$$P_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = g_{t\phi}\,\dot{t} + g_{\phi\phi}\,\dot{\phi} \equiv \ell_z \qquad \text{(Momento angular - z específico)}$$

Despejando de este sistema se obtiene

$$\dot{t} = \frac{\mathcal{E} g_{\phi\phi} + \ell_z g_{t\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\mathcal{E} g_{t\phi} + \ell_z g_{tt}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}$$

Del elemento de línea se tiene que

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu$$

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 2\mathcal{L}$$

Para partículas con masa : $\lambda = \tau \rightarrow \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = -1$

Para partículas sin masa : $\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = 0$

Así, se puede escribir

$$2\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = \delta \qquad \text{con} \qquad \delta = \begin{cases} 0 & \text{partículas sin masa} \\ -1 & \text{partículas con masa} \end{cases}$$

Esta relación se puede re-escribir en términos de ε y l_z,

$$g_{tt}\dot{t}^2 + 2g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 = \delta$$

$$g_{tt}\left(\frac{\varepsilon g_{\phi\phi} + l_z g_{t\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}\right)^2 + 2g_{t\phi}\left(\frac{\varepsilon g_{\phi\phi} + l_z g_{t\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}\right)\left(-\frac{\varepsilon g_{t\phi} + l_z g_{tt}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}\right) + g_{rr}\dot{r}^2$$

$$+ g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + g_{\phi\phi}\left(-\frac{\varepsilon g_{t\phi} + l_z g_{tt}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}\right)^2 = \delta$$

$$\frac{\varepsilon^2 g_{\phi\phi}^2 g_{tt} + l_z^2 g_{t\phi}^2 g_{tt} + 2\varepsilon l_z g_{tt}g_{t\phi}g_{\phi\phi}}{(g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi})^2} + \frac{\varepsilon^2 g_{t\phi}^2 g_{\phi\phi} + l_z^2 g_{tt}^2 g_{\phi\phi} + 2\varepsilon l_z g_{tt}g_{t\phi}g_{\phi\phi}}{(g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi})^2}$$

$$- \frac{2\varepsilon^2 g_{t\phi}^2 g_{\phi\phi} + 2l_z^2 g_{t\phi}^2 g_{tt} + 2\varepsilon l_z g_{tt}g_{t\phi}g_{\phi\phi} + 2\varepsilon l_z g_{t\phi}^3}{(g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi})^2} + g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 = \delta$$

$$\frac{\varepsilon^2 g_{\phi\phi}(g_{\phi\phi}g_{tt} - g_{t\phi}^2) + l_z^2 g_{tt}(g_{\phi\phi}g_{tt} - g_{t\phi}^2) + 2\varepsilon l_z g_{t\phi}(g_{\phi\phi}g_{tt} - g_{t\phi}^2)}{(g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi})^2}$$

$$+ g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 = \delta$$

$$-\frac{\varepsilon^2 g_{\phi\phi} + l_z^2 g_{tt} + 2\varepsilon l_z g_{t\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}} + g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 = \delta$$

$$g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 = \frac{\varepsilon^2 g_{\phi\phi} + l_z^2 g_{tt} + 2\varepsilon l_z g_{t\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}} + \delta$$

$$\boxed{\dot{r}^2 + \frac{g_{\theta\theta}}{g_{rr}}\dot{\theta}^2 = V_{eff}(r,\theta)}$$

$$\boxed{V_{eff}(r,\theta) = \frac{\varepsilon^2 g_{\phi\phi} + l_z^2 g_{tt} + 2\varepsilon l_z g_{t\phi}}{g_{rr}(g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi})} + \frac{\delta}{g_{rr}}}$$

Órbitas Circulares

Para obtener las características físicas correspondientes a las órbitas circulares se escribe la ecuación de la geodésica en la forma

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu\right) = \frac{1}{2}\partial_\mu g_{\nu\rho}\,\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho$$

La componente radial, $\mu = r$, es

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{r\nu}\dot{x}^\nu\right) = \frac{1}{2}\partial_r g_{\nu\rho}\,\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{rr}\dot{r}\right) = \frac{1}{2}\partial_r g_{\nu\rho}\,\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho$$

$$2\frac{d}{d\lambda}\left(g_{rr}\dot{r}\right) = \partial_r g_{tt}\dot{t}^2 + 2\partial_r g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + \partial_r g_{rr}\dot{r}^2 + \partial_r g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + \partial_r g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2$$

Las órbitas circulares ecuatoriales tienen
$$\dot{r} = 0$$
$$\ddot{r} = 0$$
$$\dot{\theta} = 0$$

Con ello

$$\partial_r g_{tt}\dot{t}^2 + 2\partial_r g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + \partial_r g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 = 0$$

$$\partial_r g_{tt} + 2\partial_r g_{t\phi}\left(\frac{\dot{\phi}}{\dot{t}}\right) + \partial_r g_{\phi\phi}\left(\frac{\dot{\phi}}{\dot{t}}\right)^2 = 0$$

La cantidad $\Omega = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}}$ corresponde a la velocidad angular de la partícula en la órbita circular. Así

$$\partial_r g_{tt} + 2\partial_r g_{t\phi}\Omega + \partial_r g_{\phi\phi}\Omega^2 = 0$$

de donde

$$\boxed{\Omega_\pm = \frac{-\partial_r g_{t\phi} \pm \sqrt{(\partial_r g_{t\phi})^2 - (\partial_r g_{tt})(\partial_r g_{\phi\phi})}}{\partial_r g_{\phi\phi}}}$$

$+$: órbita co-rotante
$-$: órbita contra-rotante
} con respecto a la rotación del objeto compacto.

- Para partículas sin masa ($\delta = 0$)

De la condición $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \delta$ se tiene

$$g_{tt}\dot{t}^2 + 2g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 = 0$$

Para órbitas circulares ecuatoriales se tiene

$$g_{tt}\dot{t}^2 + 2g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 = 0$$

$$g_{tt} + 2g_{t\phi}\frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} + g_{\phi\phi}\left(\frac{\dot{\phi}}{\dot{t}}\right)^2 = 0$$

$$g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega + g_{\phi\phi}\Omega^2 = 0 \longrightarrow r_{ps}$$

La solución de esta ecuación algebráica da como resultado el radio de la trayectoria circular para partículas sin masa. La superficie que forman estas trayectorias se conoce como esfera de fotones.

- Para partículas con masa ($\delta = -1$)

De la condición $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \delta$ se tiene

$$g_{tt}\dot{t}^2 + 2g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 = -1$$

Para orbitas circulares ecuatoriales, esta relación se reduce a

$$g_{tt}\dot{t}^2 + 2g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 = -1$$

$$\dot{t}^2\left(g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega + g_{\phi\phi}\Omega^2\right) = -1$$

$$\boxed{\dot{t} = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}}$$

De la definición del momento angular,

$$l_z = g_{t\phi}\dot{t} + g_{\phi\phi}\dot{\phi}$$

$$l_z = \dot{t}\left(g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega\right)$$

$$\boxed{l_z = \frac{\left(g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega\right)}{\sqrt{-g_{tt} - 2\Omega g_{t\phi} - \Omega^2 g_{\phi\phi}}}}$$

De la definición de energía se tiene

$$\mathcal{E} = -g_{tt}\dot{t} - g_{t\phi}\dot{\phi}$$

$$\mathcal{E} = -\dot{t}\,(g_{tt} + g_{t\phi}\Omega)$$

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{g_{tt} + g_{t\phi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2\Omega g_{t\phi} - \Omega^2 g_{\phi\phi}}}}$$

A partir de la energía de la partícula, es posible definir dos orbitas de interés:

- La orbita marginalmente acotada se define por la condición

$$\mathcal{E}_{mb} = -\frac{g_{tt} + g_{t\phi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2\Omega g_{t\phi} - \Omega^2 g_{\phi\phi}}} = 1 \longrightarrow r_{mb}$$

Esta orbita se caracterita porque en ella, la partícula tiene la energía crítica para escapar (si $\mathcal{E}<1$ la partícula está atrapada ; si $\mathcal{E}>1$ la partícula puede escapar y llegar al infinito con una velocidad finita)

- La órbita marginalmente estable, también llamada órbita circular estable más interna (ISCO) se define con las condiciones

$$\begin{cases} \partial_r^2 V_{eff} = 0 \\ \partial_\theta^2 V_{eff} = 0 \end{cases} \longrightarrow r_{isco}$$

De esta forma, en la región $r < r_{isco}$ no existen trayectorias circulares estables. Por ello, en casi todos los modelos de discos de acreción se considera que la ISCO define el borde interno del disco.