En la descripción Newtoniana de la gravedad, solamente la masa es la responsable del campo gravitacional.
En la RG, el momento angular también modifica la geometría del espacio-tiempo, con lo que produce efectos gravitacionales.

La cantidad conservada ℓ_z es el momento angular (específico) de la partícula de prueba medida por un observador asintótico.
Sin embargo, aún si $\ell_z = 0$, una partícula puede poseer velocidad angular. Ésta es definida por

$$\Omega = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}}$$

Utilizando el momentum P_ϕ se tiene

$$P_\phi = g_{t\phi}\dot{t} + g_{\phi\phi}\dot{\phi} = \ell_z$$

y si $\ell_z = 0$, entonces

$$g_{t\phi}\dot{t} + g_{\phi\phi}\dot{\phi} = 0$$

$$\Omega = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}$$

Este resultado se debe a que el agujero negro rotante genera una fuerza gravitacional que obliga a la partícula a orbitar con esta velocidad angular.

Para la métrica de Kerr,

$$g_{t\phi} = -\frac{2aMr\sin^2\theta}{\Sigma} \qquad g_{\phi\phi} = \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2Mr\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta$$

$$\boxed{\Omega = \frac{2aMr}{(r^2+a^2)\Sigma + 2a^2Mr\sin^2\theta}}$$

La velocidad angular del horizonte de eventos se define como la velocidad angular de una partícula de prueba ubicada en el horizonte de eventos y con un momento angular $\ell_z = 0$ (visto en el infinito),

$$\Omega_H = -\left.\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right|_{r=r_+}$$

Para la métrica de Kerr,

$$\Omega_H = \left.\frac{2aMr}{(r^2+a^2)\Sigma + 2a^2Mr\sin^2\theta}\right|_{r=r_+}$$

porque $\Delta(r_+) = r_+^2 + a^2 - 2Mr_+ = 0$

$$\Omega_H = \frac{2aMr_+}{(2Mr_+)\Sigma_+ + 2a^2Mr_+\sin^2\theta}$$

$$\Omega_H = \frac{a}{\Sigma_+ + a^2\sin^2\theta}$$

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}$$

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2}$$

$$\boxed{\Omega_H = \frac{a}{2Mr_+}}$$

Límite estático y la ergosfera

Considere el vector de killing $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$. Su norma es

$$\xi^2 = g_{\mu\nu}\xi^\mu \xi^\nu = g_{tt}$$

Para la métrica de Kerr,

$$\xi^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)$$

Para $r \to \infty$, $\xi^2 < 0$ (como-de-tiempo)
Sin embargo, existe un valor de r en el que $\xi^2 = 0$ (nulo):

$$\xi^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) = 0$$

$$\frac{2Mr_{sl}}{r_{sl}^2 + a^2\cos^2\theta} = 1$$

$$r_{sl}^2 - 2Mr_{sl} + a^2\cos^2\theta = 0$$

$$\boxed{r_{sl} = M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}}$$

Este valor se conoce como el límite estático (se ha tomado el signo + de la raíz para que $r_{sl} > r_+$).

Para comprender las implicaciones de esta superficie, consideremos el movimiento de un fotón en orbita circular en el plano ecuatorial ($dr = 0$; $d\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$)

$$ds^2 = 0 = g_{tt}\, dt^2 + 2g_{t\phi}\, dt\, d\phi + g_{\phi\phi}\, d\phi^2$$

$$0 = g_{tt}\, \dot{t}^2 + 2g_{t\phi}\, \dot{t}\dot{\phi} + g_{\phi\phi}\, \dot{\phi}^2$$

$$g_{\phi\phi}\Omega^2 + 2g_{t\phi}\Omega + g_{tt} = 0$$

$$\Omega_\pm = \frac{-g_{t\phi} \pm \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}}{g_{\phi\phi}}$$

$$\Omega_\pm = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}$$

En el límite estático, $r = r_{sl}$, se tiene

$$g_{tt}\Big|_{sl} = 0$$

$$g_{t\phi}\Big|_{sl} = -\frac{2aMr_{sl}\sin^2\theta}{\Sigma_{sl}} = -\frac{2aMr_{sl}\sin^2\theta}{r_{sl}^2 + a^2\cos^2\theta} = -\frac{2aMr_{sl}\sin^2\theta}{2Mr_{sl}} = -a\sin^2\theta$$

$$g_{\phi\phi}\Big|_{sl} = \left(r_{sl}^2 + a^2 + \frac{2a^2Mr_{sl}\sin^2\theta}{\Sigma_{sl}}\right)\sin^2\theta = \left(2Mr_{sl} - a^2\cos^2\theta + a^2 + \frac{2a^2Mr_{sl}\sin^2\theta}{2Mr_{sl}}\right)\sin^2\theta$$

$$= \left(2Mr_{sl} + a^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\theta\right)\sin^2\theta = 2\left(Mr_{sl} + a^2\sin^2\theta\right)\sin^2\theta$$

De esta forma, el fotón ubicado en el límite estático puede tener dos velocidades angulares:

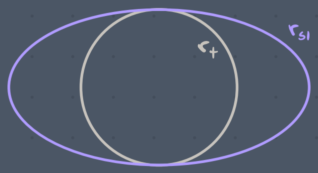
$$\Omega_- = \left(-\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} - \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)\Bigg|_{sl} = -2\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\Bigg|_{sl} = -\frac{2(-a\sin^2\theta)}{2(Mr_{sl} + a^2\sin^2\theta)\sin^2\theta}$$

$$\Omega_- = \frac{a}{Mr_{sl} + a^2\sin^2\theta}$$

$$\Omega_+ = \left(-\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} + \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)\Bigg|_{sl}$$

$$\Omega_+ = 0$$

La velocidad Ω_- representa un fotón que se mueve en la misma dirección del agujero negro (co-rotante).
La velocidad Ω_+ representa un fotón que se mueve en dirección contraria al agujero negro (contra-rotante).



La región $r_+ < r < r_{s1}$ se denomina la ergoregion.
Allí, el arrastre de sistemas es tan fuerte que ninguna partícula, ni siquiera los fotones, pueden oponerse a moverse junto con el agujero negro. Esto i

Proceso de Penrose

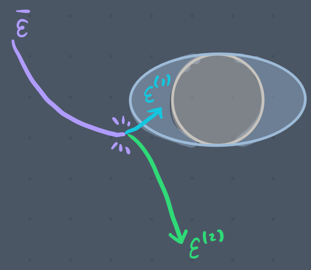
La energía asociada a una partícula de prueba cuyo momentum es P_μ estará dada por

$$\mathcal{E} = -\xi^\mu P_\mu \qquad \text{con} \qquad \xi = \frac{\partial}{\partial t}$$

Considere un sistema de dos partículas que inicialmente se encuentran en la región asintótica y se mueve hacia el agujero negro.
Si el momentum del sistema compuesto es $\bar{P}_\mu$, la energía asociada será

$$\bar{\mathcal{E}} = -\xi^\mu \bar{P}_\mu$$

Suponga que cuando el sistema esta cerca del límite estático, se divide de tal forma que una de las partículas ingresa a la ergoregión mientras que la otra escapa al infinito



Debido a la conservación del momentum:

$$\bar{P}_\mu = P_\mu^{(1)} + P_\mu^{(2)}$$

y por lo tanto

$$\xi^\mu \bar{P}_\mu = \xi^\mu P_\mu^{(1)} + \xi^\mu P_\mu^{(2)}$$

$$\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^{(1)} + \mathcal{E}^{(2)}$$

Sin embargo, la energía de la partícula que ingresa a la ergoregión es negativa (porque ξ es como-de-espacio):

$$\mathcal{E}^{(1)} = -\xi^\mu P_\mu^{(1)} < 0$$

y por ello

$$\mathcal{E}^{(2)} > \bar{\mathcal{E}}$$

es decir que el proceso extrae energía del agujero negro.