FORMULACION DE HAMILTON-JACOBI

Hasta este momento se han encontrado tres constantes de movimiento relacionadas con el movimiento de una particula en el espaciotiempo de Schwarzschild

$p_0 = -\mathcal{E}$: energia
$p_1 = l_z$: momento angular
$m_0\mathcal{H} = \frac{1}{2}m_0c^2\delta$: energía propia (masa propia) de la particula.

Para iniciar con el tratamiento de Hamilton-Jacobi introducimos la función principal de Hamilton, $S = S(x^\mu, p_\mu, \tau)$, a través de

$$p_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \qquad \text{con } p_\mu \text{ el momento canónicamente conjugado a } x^\mu$$

De esta forma, la ecuación de Hamilton-Jacobi para el movimiento geodesico de la partícula es

$$2\frac{\partial S}{\partial \tau} = g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\nu}$$

La métrica con simetría esférica que hemos considerado es tal que

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2$$

La inversa de esta métrica se puede escribir como

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = g^{00}\partial_0^2 + g^{11}\partial_1^2 + g^{22}\partial_2^2 + g^{33}\partial_3^2$$
$$= \frac{1}{g_{00}}\partial_0^2 + \frac{1}{g_{11}}\partial_1^2 + \frac{1}{g_{22}}\partial_2^2 + \frac{1}{g_{33}}\partial_3^2$$

Así, la ecuación de H-J será

$$2\frac{\partial S}{\partial \tau} = g^{00}(\partial_0 S)^2 + g^{11}(\partial_1 S)^2 + g^{22}(\partial_2 S)^2 + g^{33}(\partial_3 S)^2$$

Debido a la existencia de las cantidades conservadas, podemos separar la función S en la forma

$$S = \frac{1}{2}\delta\tau - \mathcal{E}t + l_z\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta)$$

Al reemplazar en la ecuación de H-J se obtiene

$$\delta = g^{00}(-\mathcal{E})^2 + g^{11}\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + g^{33}(\ell)^2$$

$$\boxed{\delta = g^{00}\mathcal{E}^2 + g^{11}\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + g^{33}\ell^2}$$

ESPACIO-TIEMPO DE SCHWARSCHILD

$$g_{00} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right) \qquad g^{00} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

$$g_{11} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} \qquad g^{11} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)$$

$$g_{22} = r^2 \qquad g^{22} = r^{-2}$$

$$g_{33} = r^2 \sin^2\theta \qquad g^{33} = \left(r^2 \sin^2\theta\right)^{-1}$$

La ecuación de H-J será

$$\delta = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathcal{E}^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + r^{-2}\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \left(r^2\sin^2\theta\right)^{-1}\ell_z^2$$

$$\delta r^2 = -\frac{r^2\mathcal{E}^2}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} + r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{\ell_z^2}{\sin^2\theta}$$

$$\delta r^2 + \frac{r^2\mathcal{E}^2}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} - r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{\ell_z^2}{\sin^2\theta} = C$$

La ecuación se separa introduciendo la constante C. De esta forma se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dS_r}{dr}\right)^2 (r^2-2Mr) = \dfrac{r^4\mathcal{E}^2}{(r^2-2Mr)} + \delta r^2 - C = \dfrac{1}{(r^2-2Mr)}\left[r^4\mathcal{E}^2 + (r^2-2Mr)(\delta r^2 - C)\right] \\[2ex] \left(\dfrac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 = C - \dfrac{\ell_z^2}{\sin^2\theta} \end{cases}$$

Definiendo las funciones

$$\Delta(r) = r^2 - 2Mr$$

$$R(r) = \left[r^4 \mathcal{E}^2 + \Delta(\delta r^2 - C) \right]$$

$$\Theta(\theta) = C - \frac{l_z^2}{\sin^2\theta}$$

El sistema se lleva a cuadraturas en la forma

$$\begin{cases} S_r(r) = \int dr \, \frac{\sqrt{R(r)}}{\Delta} \\ S_\theta(\theta) = \int d\theta \, \sqrt{\Theta} \end{cases}$$

y con ello, el problema queda formalmente solucionado. Para interpretar la constante de separación C, nótese que

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 = C - \frac{l_z^2}{\sin^2\theta}$$

$$P_\theta^2 = C - \frac{P_\phi^2}{\sin^2\theta}$$

$$C = P_\theta^2 + \frac{P_\phi^2}{\sin^2\theta} \equiv l^2$$: Momento Angular Total

Ecuaciones de Movimiento

Las ecuaciones de movimiento para la particula se obtienen al considerar las derivadas de S con respecto a las constantes de movimiento $(\delta, \varepsilon, l_z, \mathcal{C})$ e igualar a cero. De esta forma se tiene

- $$\frac{\partial S}{\partial \mathcal{C}} = \frac{\partial S_r}{\partial \mathcal{C}} + \frac{\partial S_\theta}{\partial \mathcal{C}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{C}} \int \frac{\sqrt{R}}{\Delta} dr + \frac{\partial}{\partial \mathcal{C}} \int \sqrt{\Theta}\, d\theta = 0$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{-\Delta}{\sqrt{R}\,\Delta} dr + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\Theta}} d\theta = 0$$

$$\int \frac{dr}{\sqrt{R}} = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}}$$

- $$\frac{\partial S}{\partial \delta} = \frac{\tau}{2} + \frac{\partial}{\partial \delta} \int \frac{\sqrt{R}}{\Delta} dr = 0$$

$$\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{\Delta r^2}{2\sqrt{R}\,\Delta} dr = 0$$

$$\tau = -\int \frac{r^2}{\sqrt{R}} dr$$

- $$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = -t + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int \frac{\sqrt{R}}{\Delta} dr = 0$$

$$-t + \frac{1}{2} \int \frac{2r^4 \varepsilon}{\sqrt{R}\,\Delta} dr = 0$$

$$t = \varepsilon \int \frac{r^4}{\sqrt{R}\,\Delta} dr$$

- $$\frac{\partial S}{\partial l_z} = \phi + \frac{\partial}{\partial l_z} \int \sqrt{\Theta}\, d\theta = 0$$

$$\phi + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\Theta}} \left(-\frac{2 l_z}{\sin^2\theta} \right) d\theta = 0$$

$$\phi = l_z \int \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}\, \sin^2\theta}$$

Ecuaciones Diferenciales de Movimiento

Ya que $\dot{x}^\mu = p^\mu = g^{\mu\nu} p_\nu$ se tiene

$$\dot{x}^0 = \dot{t} = g^{00} p_0 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}(-\varepsilon)$$

$$\dot{t} = \frac{r^2 \varepsilon}{(r^2-2Mr)}$$

$$\dot{x}^1 = \dot{r} = g^{11} p_1 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\partial S}{\partial r}$$

$$\dot{r} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\sqrt{R}}{\Delta}$$

$$\dot{r} = \frac{1}{r^2}(r^2-2Mr)\frac{\sqrt{R}}{\Delta}$$

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{R}}{r^2}$$

$$\dot{x}^2 = \dot{\theta} = g^{22} p_2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial S}{\partial \theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{\Theta}}{r^2}$$

$$\dot{x}^3 = \dot{\phi} = g^{33} p_3$$

$$\dot{\phi} = \frac{l_z}{r^2 \sin^2\theta}$$