Plano de la Imagen para un Observador Lejano

Siguiendo la disposición considerada en la figura, consideraremos un objeto compacto (BH ó NS) localizado en el origen de un sistema de coordenadas (x,y,z) y un disco de acreción localizado a su alrededor en el plano $(x\text{-}y)$.
El observador lejano define un sistema de coordenadas (X,Y,Z) de tal forma que el plano donde se formará la imagen es el plano $(Y\text{-}Z)$.

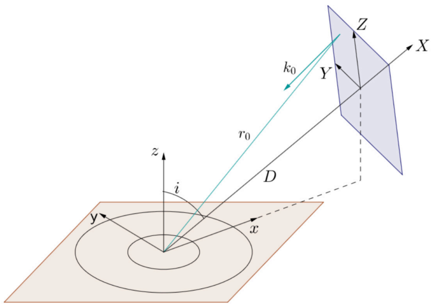


Figure 1.1: Coordinate Transformation relating the observer's system with the black hole's system.

D: Distancia entre observador y objeto compacto

ι: Angulo de observación.

La relación entre los dos sistemas de coordenadas se da con una rotación y una translación,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_Y(\alpha)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D\sin\iota \\ 0 \\ D\cos\iota \end{pmatrix}$$

con $\alpha = \frac{\pi}{2} - \iota$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D\sin\iota \\ 0 \\ D\cos\iota \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\iota\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\iota + \sin\frac{\pi}{2}\sin\iota = \sin\iota$$

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\iota\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\iota - \sin\iota\cos\frac{\pi}{2} = \cos\iota$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\iota & 0 & -\cos\iota \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\iota & 0 & \sin\iota \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D\sin\iota \\ 0 \\ D\cos\iota \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X\sin\iota - Z\cos\iota \\ Y \\ X\cos\iota + Z\sin\iota \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D\sin\iota \\ 0 \\ D\cos\iota \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X+D)\sin\iota - Z\cos\iota \\ Y \\ (X+D)\cos\iota + Z\sin\iota \end{pmatrix}}$$

Si se introducen coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) para describir el espacio alrededor del objeto compacto (Schwarzschild), estas se relacionaran con el sistema (t, x, y, z) en la región lejana en la forma usual,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Se tiene entonces

$$r^2 = [(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2 + Y^2 + [(X+D)\cos\iota + Z\sin\iota]^2$$

$$r^2 = (X+D)^2\sin^2\iota + Z^2\cos^2\iota - 2(X+D)Z\sin\iota\cos\iota + Y^2 + (X+D)^2\cos^2\iota + Z^2\sin^2\iota + 2(X+D)Z\sin\iota\cos\iota$$

$$r^2 = (X+D)^2 + Y^2 + Z^2$$

$$r = \sqrt{(X+D)^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{(X+D)\cos\iota + Z\sin\iota}{r}\right)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{Y}{(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota}\right)$$

Un Fotón en el plano del observador

Consideramos ahora un fotón en el plano de la imagen en la posición

$$(0, Y_0, Z_0) = (0, \alpha, \beta)$$

y con un momentum $\vec{K}_0 = K_0 \hat{X}$ (i.e. perpendicular al plano).

Utilizando la transformación encontrada podemos encontrar las coordenadas iniciales, (x_0, y_0, z_0), del fotón,

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X_0+D)\sin\iota - Z_0\cos\iota \\ Y_0 \\ (X_0+D)\cos\iota + Z_0\sin\iota \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D\sin\iota - \beta\cos\iota \\ \alpha \\ D\cos\iota + \beta\sin\iota \end{pmatrix}$$

De esta forma, las coordenadas iniciales $(t_0, r_0, \theta_0, \phi_0)$ del fotón serán

$$t_0 = 0$$

$$r_0 = \sqrt{D^2 + \alpha^2 + \beta^2}$$

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{D\cos\iota + \beta\sin\iota}{\sqrt{D^2+\alpha^2+\beta^2}}\right)$$

$$\phi_0 = \arctan\left(\frac{\alpha}{D\sin\iota - \beta\cos\iota}\right)$$

Las componentes del vector momentum $\vec{K} = K_0 \hat{X}$ en otro sistema de coordenadas se encuentran con la transformación

$$K^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^j} K^j$$

Así se tiene

$$K^r = \frac{\partial r}{\partial X} K^X = \left(\frac{2(X+D)}{2r}\right) K^X = \frac{X+D}{r} K^X$$

$$K^r_0 = \left(\frac{X+D}{r}\right)\Bigg|_{(0,\alpha,\beta)} K_0$$

$$K^r_0 = \frac{D}{r_0} K_0$$

$$k^\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x} K^x \qquad\qquad \frac{d}{d\alpha}(\arccos\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$k^\theta = -\left(1-\frac{[(x+D)\cos\iota + Z\sin\iota]^2}{r^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{\cos\iota}{r} - \frac{(x+D)\cos\iota+Z\sin\iota}{r^2}\,\frac{(x+D)}{r}\right)K^x$$

$$k^\theta = -\frac{1}{\sqrt{r^2-[(x+D)\cos\iota+Z\sin\iota]^2}}\left(\cos\iota - \frac{(x+D)\cos\iota+Z\sin\iota}{r^2}(x+D)\right)K^x$$

$$K_o^\theta = -\frac{1}{\sqrt{r_o^2-(D\cos\iota+\beta\sin\iota)^2}}\left(\cos\iota - \frac{D}{r_o^2}(D\cos\iota+Z\sin\iota)\right)K_o$$

$$K^\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} K^x \qquad\qquad \frac{d}{d\alpha}\arctan\alpha = \frac{1}{1+\alpha^2}$$

$$K^\phi = \left(1+\frac{Y^2}{[(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2}\right)^{-1}\left(-\frac{Y\sin\iota}{[(X+D)\sin\iota-Z\cos\iota]^2}\right)K^x$$

$$K^\phi = -\left(\frac{[(X+D)\sin\iota-Z\cos\iota]^2+Y^2}{[(X+D)\sin\iota-Z\cos\iota]^2}\right)^{-1}\frac{Y\sin\iota}{[(X+D)\sin\iota-Z\cos\iota]^2}\,K^x$$

$$K^\phi = -\frac{Y\sin\iota\, K^x}{[(X+D)\sin\iota-Z\cos\iota]^2+Y^2}$$

$$K_o^\phi = -\frac{\alpha\sin\iota\, K_o}{\alpha^2+(D\sin\iota-\beta\cos\iota)^2}$$

Condiciones del Fotón en la Pantalla

$$t_o = 0$$

$$r_o = \sqrt{D^2+\alpha^2+\beta^2}$$

$$\theta_o = \arccos\left(\frac{D\cos\iota+\beta\sin\iota}{\sqrt{D^2+\alpha^2+\beta^2}}\right)$$

$$\phi_o = \arctan\left(\frac{\alpha}{D\sin\iota-\beta\cos\iota}\right)$$

$$K_o^r = \frac{D}{r_o}K_o$$

$$K_o^\theta = -\frac{K_o}{\sqrt{r_o^2-(D\cos\iota+\beta\sin\iota)^2}}\left(\cos\iota - \frac{D}{r_o^2}(D\cos\iota+Z\sin\iota)\right)$$

$$K_o^\phi = -\frac{\alpha\sin\iota\, K_o}{\alpha^2+(D\sin\iota-\beta\cos\iota)^2}$$

$$K_o^t = \sqrt{(K_o^r)^2 + r_o^2(K_o^\theta)^2 + r_o^2\sin^2\theta_o(K_o^\phi)^2}$$

La expresión para K_0^t se obtuvo a partir de la condición

$$g_{\mu\nu} K_0^\mu K_0^\nu = 0$$

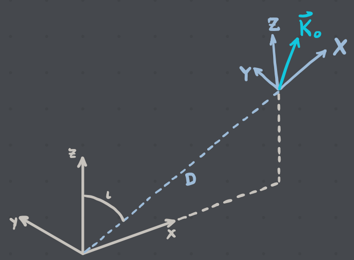
$$g_{00} (K_0^t)^2 + g_{11} (K_0^r)^2 + g_{22} (K_0^\theta)^2 + g_{33} (K_0^\phi)^2 = 0$$

con
$$g_{00} \longrightarrow -1$$
$$g_{11} \longrightarrow 1$$
$$g_{22} \longrightarrow r_0^2$$
$$g_{33} \longrightarrow r_0^2 \sin^2\theta_0$$

cuando $r \to \infty$

Camara Puntual

Otra opción que se puede utilizar para modelar la formación de la imágen de un objeto compacto es proyectar los fotones que llegan a una cámara puntual. Debido a que la cámara es un punto geométrico, la posición inicial de todos los fotones será la misma



$$(X_o, Y_o, Z_o) = (0,0,0)$$

Las coordenadas esféricas correspondientes son

$$r_o = \sqrt{(X_o+D)^2 + Y_o^2 + Z_o^2}$$

$$\theta_o = \arccos\left(\frac{(X_o+D)\cos\iota + Z_o \sin\iota}{r_o}\right)$$

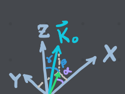
$$\phi_o = \arctan\left(\frac{Y_o}{(X_o+D)\sin\iota - Z_o\cos\iota}\right)$$

$$r_o = \sqrt{D^2} \longrightarrow r_o = D$$

$$\theta_o = \arccos\left(\frac{D\cos\iota}{D}\right) \longrightarrow \theta_o = \iota$$

$$\phi_o = \arctan\left(\frac{0}{D\sin\iota}\right) \longrightarrow \phi_o = 0$$

En este caso, se parametrizarán los compenentes del vector momentum utilizando dos parámetros angulares α y β,



β: ángulo entre $\vec{K}$ y el plano xy ($\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta$ es el angulo entre $\vec{K}$ y $\hat{z}$)
α: ángulo entre la proyección $\vec{K}\cos\beta$ y $\hat{x}$ en el plano xy

FoV : Field of View

FoV en dirección y : $(-\alpha, \alpha)$
FoV en dirección z : $(-\beta, \beta)$

$$\vec{K} = K_o \cos\beta\cos\alpha\ \hat{X} + K_o\cos\beta\sin\alpha\ \hat{Y} + K_o \sin\beta\ \hat{Z}$$

Las componentes del vector momentum $\vec{K}$ en otro sistema de coordenadas se encuentran con la transformación

$$K^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} K^j$$

$$K^r = \frac{\partial r}{\partial X} K^X + \frac{\partial r}{\partial Y} K^Y + \frac{\partial r}{\partial Z} K^Z$$

$$\frac{\partial r}{\partial X} = \frac{2(X+D)}{2r} = \frac{X+D}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial Y} = \frac{Y}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial Z} = \frac{Z}{r}$$

$$\left.\frac{\partial r}{\partial X}\right|_{(0,0,0)} = \frac{D}{r_0} = \frac{D}{D} = 1 \qquad \left.\frac{\partial r}{\partial Y}\right|_{(0,0,0)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial r}{\partial Z}\right|_{(0,0,0)} = 0$$

$$K^r_0 = K^X_0 = K_0 \cos\beta \cos\alpha$$

$$K^\theta = \frac{\partial \theta}{\partial X} K^X + \frac{\partial \theta}{\partial Y} K^Y + \frac{\partial \theta}{\partial Z} K^Z$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = -\left(1 - \frac{[(x+D)\cos\iota + Z\sin\iota]^2}{r^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{\cos\iota}{r} - \frac{(x+D)\cos\iota + Z\sin\iota}{r^2} \frac{(x+D)}{r} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = -\frac{1}{\sqrt{r^2 - [(x+D)\cos\iota + Z\sin\iota]^2}} \left(\cos\iota - \frac{(x+D)\cos\iota + Z\sin\iota}{r^2} (x+D) \right)$$

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial X}\right|_{(0,0,0)} = -\frac{1}{\sqrt{D^2 - [D\cos\iota]^2}} \left(\cos\iota - \frac{D\cos\iota}{D^2} D \right)$$

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial X}\right|_{(0,0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = -\left(1 - \frac{[(x+D)\cos\iota + Z\sin\iota]^2}{r^2}\right)^{-1/2} \left(- \frac{(x+D)\cos\iota + Z\sin\iota}{r^2} \frac{Y}{r} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{Y}{\sqrt{r^2 - [(x+D)\cos\iota + Z\sin\iota]^2}} \frac{(x+D)\cos\iota + Z\sin\iota}{r^2}$$

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right|_{(0,0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial Z} = -\left(1 - \frac{[(x+D)\cos\iota + Z\sin\iota]^2}{r^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{\sin\iota}{r} - \frac{(x+D)\cos\iota + Z\sin\iota}{r^2}\,\frac{Z}{r}\right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial Z} = -\frac{1}{\sqrt{r^2 - [(x+D)\cos\iota + Z\sin\iota]^2}}\left(\sin\iota - \frac{(x+D)\cos\iota + Z\sin\iota}{r^2}\,Z\right)$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial Z}\right|_{(0,0,0)} = -\frac{\sin\iota}{\sqrt{D^2 - [D\cos\iota]^2}} = -\frac{\sin\iota}{D\sqrt{1-\cos^2\iota}}$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial Z}\right|_{(0,0,0)} = -\frac{1}{D}$$

$$K_0^\theta = -\frac{1}{D}K_0^z = -\frac{K_0\sin\beta}{D}$$

$$K^\phi = \frac{\partial\phi}{\partial X}K^X + \frac{\partial\phi}{\partial Y}K^Y + \frac{\partial\phi}{\partial Z}K^z$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial X} = \left(1 + \frac{Y^2}{[(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2}\right)^{-1}\left(-\frac{Y\sin\iota}{[(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2}\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial X} = -\left(\frac{[(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2 + Y^2}{[(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2}\right)^{-1}\frac{Y\sin\iota}{[(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial X} = -\frac{Y\sin\iota}{[(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2 + Y^2}$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial X}\right|_{(0,0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial Y} = \left(1 + \frac{Y^2}{[(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota}\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial Y} = \left(\frac{[(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2 + Y^2}{[(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2}\right)^{-1}\frac{1}{(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial Y} = \frac{(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota}{[(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2 + Y^2}$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial Y}\right|_{(0,0,0)} = \frac{D\sin\iota}{[D\sin\iota]^2} = \frac{1}{D\sin\iota}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Z} = \left(1 + \frac{Y^2}{[(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2}\right)^{-1}\left(-\frac{Y(-\cos\iota)}{[(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2}\right)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Z} = \left(\frac{[(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2 + Y^2}{[(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2}\right)^{-1} \frac{Y\cos\iota}{[(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Z} = \frac{Y\cos\iota}{[(X+D)\sin\iota - Z\cos\iota]^2 + Y^2}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial Z}\right|_{(0,0,0)} = 0$$

$$k_0^{\phi} = \frac{1}{D\sin\iota} K^Y = \frac{K_0\cos\beta\sin\alpha}{D\sin\iota}$$

Condiciones del fotón en la Camara Puntual

$t_0 = 0$

$r_0 = D$

$\theta_0 = \iota$

$\phi_0 = 0$

$$k_0^r = K_0\cos\beta\cos\alpha$$

$$k_0^{\theta} = -\frac{K_0\sin\beta}{D}$$

$$k_0^{\phi} = \frac{K_0\cos\beta\sin\alpha}{D\sin\iota}$$

$$k_0^t = \sqrt{(k_0^r)^2 + r_0^2(k_0^{\theta})^2 + r_0^2\sin^2\theta_0\,(k_0^{\phi})^2}$$