Tetradas

Dada una métrica estacionaria, axialmente simétrica general con la forma

$$ds^2 = -e^{2\psi}dt^2 + e^{2\gamma}dr^2 + e^{2P_1}d\theta + e^{2P_2}(d\phi - \omega dt)^2$$

donde ,B,C y D son funciones independientes de t y ϕ, se define la base ortonormal (tetrada)

$$e^{\mu}{}_{(t)} = (e^{-\psi}, 0, 0, \omega e^{-\psi})$$

$$e^{\mu}{}_{(r)} = (0, e^{-\gamma}, 0, 0)$$

$$e^{\mu}{}_{(\theta)} = (0, 0, e^{-P_1})$$

$$e^{\mu}{}_{(\phi)} = (0, 0, 0, e^{-P_2})$$

Estos elementos satisfacen que

$$\eta_{(\alpha)(\beta)} = g_{\mu\nu}\, e^{\mu}{}_{(\alpha)} e^{\nu}{}_{(\beta)}$$

Ejemplo:

$$\eta_{(t)(t)} = g_{\mu\nu}\, e^{\mu}{}_{(t)} e^{\nu}{}_{(t)} = g_{t\nu}\, e^{t}{}_{(t)} e^{\nu}{}_{(t)} + g_{\phi\nu}\, e^{\phi}{}_{(t)} e^{\nu}{}_{(t)}$$

$$\eta_{(t)(t)} = g_{tt}\, e^{t}{}_{(t)} e^{t}{}_{(t)} + 2 g_{t\phi}\, e^{t}{}_{(t)} e^{\phi}{}_{(t)} + g_{\phi\phi}\, e^{\phi}{}_{(t)} e^{\phi}{}_{(t)}$$

$$\eta_{(t)(t)} = (-e^{2\psi} + \underline{\omega^2 e^{2P_2}})\, e^{-2\psi} - \underline{2\omega e^{2P_2} \omega e^{-2\psi}} + \underline{e^{2P_2}\omega^2 e^{-2\psi}}$$

$$\eta_{(t)(t)} = -1$$

De forma similar, la tetrada inversa será

$$e^{(t)}{}_{\mu} = (e^{\psi}, 0, 0, 0)$$

$$e^{(r)}{}_{\mu} = (0, e^{\gamma}, 0, 0)$$

$$e^{(\theta)}{}_{\mu} = (0, 0, e^{P_1}, 0)$$

$$e^{(\phi)}{}_{\mu} = (-\omega e^{P_2}, 0, 0, e^{P_2})$$

Las siguientes identidades se satisfacen

$$g_{\mu\nu} = \eta_{(\alpha)(\beta)}\, e^{(\alpha)}_{\ \mu}\, e^{(\beta)}_{\ \nu}$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{(\alpha)(\beta)}\, e^{\ \mu}_{(\alpha)}\, e^{\ \nu}_{(\beta)}$$

$$\eta^{(\alpha)(\beta)} = g^{\mu\nu}\, e^{(\alpha)}_{\ \mu}\, e^{(\beta)}_{\ \nu}$$

Para la métrica de Kerr se tiene

$$e^{\ \mu}_{(t)} = \left(\sqrt{\frac{A}{\Sigma\Delta}}, 0, 0, \frac{2Mar}{\sqrt{A\Sigma\Delta}} \right) \qquad e^{(t)}_{\ \mu} = \left(\sqrt{\frac{\Sigma\Delta}{A}}, 0, 0, 0 \right)$$

$$e^{\ \mu}_{(r)} = \left(0, \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}, 0, 0 \right) \qquad e^{(r)}_{\ \mu} = \left(0, \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}}, 0, 0 \right)$$

$$e^{\ \mu}_{(\theta)} = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}, 0 \right) \qquad e^{(\theta)}_{\ \mu} = \left(0, 0, \sqrt{\Sigma}, 0 \right)$$

$$e^{\ \mu}_{(\phi)} = \left(0, 0, 0, \frac{1}{\sin\theta} \sqrt{\frac{\Sigma}{A}} \right) \qquad e^{(\phi)}_{\ \mu} = \left(-\frac{2Mar\sin\theta}{\sqrt{\Sigma A}}, 0, 0, \sin\theta \sqrt{\frac{A}{\Sigma}} \right)$$

con $\quad A = (r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta$

EL MOMENTUM

Las componentes del momentum en el sistema ortonormal son

$$p^{(\alpha)} = e^{(\alpha)}_{\ \mu}\, p^{\mu} = \eta^{(\alpha)(\beta)} p_{(\beta)} = \eta^{(\alpha)(\beta)} e^{\ \mu}_{(\beta)}\, p_{\mu}$$

Así, se tiene

$$p^{(t)} = \eta^{(t)(\beta)}\, e^{\ \mu}_{(\beta)}\, p_{\mu} = \eta^{(t)(t)} e^{\ \mu}_{(t)}\, p_{\mu}$$

$$p^{(t)} = -e^{\ t}_{(t)} p_t - e^{\ \phi}_{(t)} p_\phi$$

$$p^{(t)} = -\sqrt{\frac{A}{\Sigma\Delta}}\, P_t - \frac{2Mar}{\sqrt{A\Sigma\Delta}}\, P_\phi$$

$$p^{(t)} = \sqrt{\frac{A}{\Sigma\Delta}}\, \mathcal{E} - \frac{2Mar}{\sqrt{A\Sigma\Delta}}\, l_z$$

$$p^{(\theta)} = e^{(\theta)}{}_{\mu}\, p^{\mu} = e^{(\theta)}{}_{\theta}\, p^{\theta}$$

$$p^{(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}\, p^{\theta} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}\sqrt{\Theta}$$

A partir de la formulación de Hamilton-Jacobi con $\delta = 0$

$$p^{(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}\sqrt{C - \left(\frac{l_z^2}{\sin^2\theta} - a^2\mathcal{E}^2\right)\cos^2\theta}$$

$$p^{(\phi)} = \eta^{(\phi)(\beta)}\, e^{\mu}{}_{(\beta)}\, P_\mu = \eta^{(\phi)(\phi)}\, e^{\phi}{}_{(\phi)}\, P_\phi$$

$$p^{(\phi)} = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{\Sigma}{A}}\, P_\phi$$

$$p^{(\phi)} = \frac{l_z}{\sin\theta}\sqrt{\frac{\Sigma}{A}}$$

Coordenadas Celestes

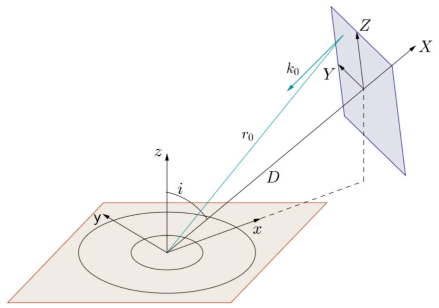

Figure 1.1: Coordinate Transformation relating the observer's system with the black hole's system.

$$\alpha = Y_0 = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{r\,p^{(\phi)}}{p^{(t)}}\right) = \lim_{r\to\infty}\left\{\frac{r\,\frac{l_z}{\sin\theta}\sqrt{\frac{\Sigma}{A}}}{\sqrt{\frac{A}{\Sigma\Delta}}\,\mathcal{E} - \frac{2Mar}{\sqrt{A\Sigma\Delta}}\,l_z}\right\}$$

$$\alpha = \lim_{r\to\infty}\left\{\frac{\frac{l_z}{\sin\theta}}{\frac{A}{\Sigma r\sqrt{\Delta}}\,\mathcal{E} - \frac{2Ma}{\Sigma\sqrt{\Delta}}\,l_z}\right\}$$

Nótese que

$$\lim_{r\to\infty}\frac{2Ma}{\Sigma\sqrt{\Delta}} = \lim_{r\to\infty}\frac{2Ma}{(r^2+a^2\cos^2\theta)\sqrt{r^2-2Mr+a^2}} \to \frac{2Ma}{r^2\sqrt{r^2}} \to \frac{2Ma}{r^3} \to 0$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{A\,\mathcal{E}}{\Sigma r\sqrt{\Delta}} = \lim_{r\to\infty}\frac{[(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta]\,\mathcal{E}}{(r^2+a^2\cos^2\theta)\,r\sqrt{r^2-2Mr+a^2}} \to \frac{r^4\,\mathcal{E}}{r^2\cdot r\cdot\sqrt{r^2}} \to \mathcal{E}$$

Entonces,

$$\alpha \longrightarrow \frac{\frac{l_z}{\sin\theta_0}}{\mathcal{E}} = \frac{l_z}{\mathcal{E}\sin\theta_0}$$

donde $\theta_0 = i$ (inclinación). Definiendo el parámetro

$$\boxed{\lambda = \frac{l_z}{\mathcal{E}}}$$

se tiene $$\boxed{\alpha = \frac{\lambda}{\sin i}}$$

$$\beta = Z_0 = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{r\,p(\theta)}{p(t)}\right) = \lim_{r\to\infty}\left\{\frac{r\frac{1}{\sqrt{\Sigma}}\sqrt{C-\left(\frac{l_z^2}{\sin^2\theta}-a^2\varepsilon^2\right)\cos^2\theta}}{\sqrt{\frac{A}{\Sigma\Delta}}\,\varepsilon-\frac{2Mar}{\sqrt{A\Sigma\Delta}}\,l_z}\right\}$$

$$\beta = \lim_{r\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{C-\left(\frac{l_z^2}{\sin^2\theta}-a^2\varepsilon^2\right)\cos^2\theta}}{\frac{1}{r}\sqrt{\frac{A}{\Delta}}\,\varepsilon-\frac{2Ma}{\sqrt{A\Delta}}\,l_z}\right\}$$

En este caso,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\sqrt{\frac{A}{\Delta}}\,\varepsilon = \lim_{r\to\infty}\frac{\sqrt{(r^2+a^2)^2-a^2\Delta\sin^2\theta}}{r\sqrt{r^2-2Mr+a^2}}\,\varepsilon \to \frac{\sqrt{r^4}\,\varepsilon}{r\sqrt{r^2}} \to \frac{r^2\varepsilon}{r^2}\to\varepsilon$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{2Ma\,l_z}{\sqrt{A\Delta}} = \lim_{r\to\infty}\frac{2Ma\,l_z}{\sqrt{[(r^2+a^2)^2-a^2\Delta\sin^2\theta](r^2-2Mr+a^2)}}\to\frac{2Ma\,l_z}{\sqrt{r^4\cdot r^2}}\to 0$$

y con ello

$$\beta \to \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{C-\left(\frac{l_z^2}{\sin^2\theta_0}-a^2\varepsilon^2\right)\cos^2\theta_0}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{C}{\varepsilon^2}-\frac{l_z^2}{\varepsilon^2}\frac{\cos^2 i}{\sin^2 i}+a^2\cos^2 i}$$

Definiendo

$$\boxed{q^2 = \frac{C}{\varepsilon^2}}$$

se obtiene

$$\boxed{\beta = \sqrt{q^2-\lambda^2\cot^2 i + a^2\cos^2 i}}$$

Sobre el Parámetro de Impacto

- Mecánica Clásica

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,\vec{r} \times \vec{v}$$

$$\ell = m|\vec{r} \times \vec{v}| = mrv\sin\alpha$$

$$\ell = mbv \qquad\qquad E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{para } r \to \infty)$$

$$\ell = mb\sqrt{\frac{2E}{m}} \qquad\qquad v^2 = \frac{2E}{m}$$

$$\boxed{b = \frac{\ell}{\sqrt{2mE}}}$$

- Espacio de Scharzschild

Fotónes se mueven a lo largo de la trayectoria $ds^2 = 0$
En el plano ecuatorial:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2}\left[g_{tt}\dot{t}^2 + g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = P_t = -\mathcal{E} = g_{tt}\dot{t}$$

$$-\mathcal{E} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}$$

$$\boxed{\frac{dt}{d\lambda} = \frac{\mathcal{E}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = P_\phi = l_z = g_{\phi\phi}\dot{\phi}$$

$$l_z = r^2\dot{\phi}$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{l_z}{r^2}}$$

Ecuación radial de movimiento:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[g_{tt}\dot{t}^2 + g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 \right] = 0$$

$$\frac{\mathcal{E}^2}{g_{tt}} + g_{rr}\dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{g_{\phi\phi}} = 0$$

$$g_{rr}\dot{r}^2 = -\frac{\mathcal{E}^2}{g_{tt}} - \frac{l_z^2}{g_{\phi\phi}}$$

$$\dot{r}^2 = -\frac{\mathcal{E}^2}{g_{tt}g_{rr}} - \frac{l_z^2}{g_{rr}g_{\phi\phi}}$$

$$\dot{r}^2 = \mathcal{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{l_z^2}{r^2}$$

$$\boxed{\frac{dr}{d\lambda} = \pm\sqrt{\mathcal{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{l_z^2}{r^2}}}$$

La velocidad radial del fotón puede calcularse mediante

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dr}{d\lambda}}{\frac{dt}{d\lambda}}$$

$$v_r = \pm\frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{\mathcal{E}}\sqrt{\mathcal{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{l_z^2}{r^2}}$$

$$\boxed{v_r = \pm\left(1-\frac{2M}{r}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{1}{r^2}\left(\frac{\ell_z}{\mathcal{E}}\right)^2}}$$

La velocidad tangencial es

$$v_\phi = r\frac{d\phi}{dt} = r\frac{\frac{d\phi}{d\lambda}}{\frac{dt}{d\lambda}} = r\frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} \longrightarrow \boxed{v_\phi = r\frac{p^\phi}{p^t}}$$

$$v_\phi = r\frac{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}{\mathcal{E}}\frac{\ell_z}{r^2}$$

$$\boxed{v_\phi = \frac{1}{r}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\ell_z}{\mathcal{E}}} \qquad (\mathrm{I})$$

Parametro de Impacto:

Lejos de la fuente, se tiene

$$\vec{\ell}_z = \vec{r}\times\vec{p}$$

$$\ell_z = r|\vec{p}|\sin\alpha = b|\vec{p}|$$

$$b = \frac{\ell_z}{|\vec{p}|}$$

Para fotones, en la región asintótica, se tiene

$$p^2 = p_\mu p^\mu = -p_0^2 + |\vec{p}|^2 = 0$$

$$|\vec{p}|^2 = p_0^2 = \mathcal{E}^2$$

$$|\vec{p}| = \mathcal{E}$$

y por ello:

$$\boxed{b = \frac{\ell_z}{\mathcal{E}}}$$

Ahora bien, utilizando la tetrada ortonormal para la métrica de Schwarzschild,

$$e^{\mu}{}_{(t)} = \left(\frac{r}{\sqrt{\Delta}}, 0, 0, 0 \right) \qquad e^{(t)}{}_{\mu} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{r}, 0, 0, 0 \right)$$

$$e^{\mu}{}_{(r)} = \left(0, \frac{\sqrt{\Delta}}{r}, 0, 0 \right) \qquad e^{(r)}{}_{\mu} = \left(0, \frac{r}{\sqrt{\Delta}}, 0, 0 \right)$$

$$e^{\mu}{}_{(\theta)} = \left(0, 0, \frac{1}{r}, 0 \right) \qquad e^{(\theta)}{}_{\mu} = (0, 0, r, 0)$$

$$e^{\mu}{}_{(\phi)} = \left(0, 0, 0, \frac{1}{r\sin\theta} \right) \qquad e^{(\phi)}{}_{\mu} = (0, 0, 0, r\sin\theta)$$

Las componentes del momentum en el sistema ortonormal son

$$p^{(\alpha)} = \eta^{(\alpha)(\beta)} e^{\mu}_{(\beta)} P_{\mu}$$

Así, se tiene

$$p^{(t)} = \eta^{(t)(\beta)} e^{\mu}_{(\beta)} P_{\mu} = \eta^{(t)(t)} e^{\mu}_{(t)} P_{\mu}$$

$$p^{(t)} = -e^{t}_{(t)} P_t$$

$$p^{(t)} = -\frac{r}{\sqrt{\Delta}} P_t$$

$$p^{(t)} = \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \mathcal{E}$$

$$p^{(\phi)} = \eta^{(\phi)(\beta)} e^{\mu}_{(\beta)} P_{\mu} = \eta^{(\phi)(\phi)} e^{\phi}_{(\phi)} P_{\phi}$$

$$p^{(\phi)} = \frac{1}{r\sin\theta} P_{\phi}$$

$$p^{(\phi)} = \frac{l_z}{r\sin\theta}$$

De esta forma, en el plano ecuatorial $\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$ y en la región asintótica se tiene

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ \theta\to\frac{\pi}{2}}}\left[\frac{p^{(\phi)}}{p^{(t)}}\right]=\lim_{\substack{r\to\infty\\ \theta\to\frac{\pi}{2}}}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r^2\sin\theta}\,\frac{l_z}{\mathcal{E}}\right]=\lim_{r\to\infty}\left[\frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{2M}{r}}\,\frac{l_z}{\mathcal{E}}\right]$$

Esto muestra que la cantidad $\frac{p^{(\phi)}}{p^{(t)}}$ escala con $\frac{1}{r}$ en la región asintótica.

Así, el parámetro de impacto se definirá mediante la cantidad $r\frac{p^{(\phi)}}{p^{(t)}}$, con lo que se evitará la dependencia con $\frac{1}{r}$:

$$b=\lim_{\substack{r\to\infty\\ \theta\to\frac{\pi}{2}}}\left[r\frac{p^{(\phi)}}{p^{(t)}}\right]=\lim_{\substack{r\to\infty\\ \theta\to\frac{\pi}{2}}}\left[\frac{r\sqrt{\Delta}}{r^2\sin\theta}\,\frac{l_z}{\mathcal{E}}\right]=\lim_{r\to\infty}\left[\frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{2M}{r}}\,\frac{l_z}{\mathcal{E}}\right]=\frac{l_z}{\mathcal{E}}$$

Si no se considera el plano ecuatorial, sino cualquier otro angulo de inclinación, $\rightarrow \theta=i$. Finalmente, la imágen de este parámetro de impacto en el plano del observador es la misma debido a la simetría esférica de la solución.
Así, cualquier plano que pase por el origen puede considerarse como ecuatorial y tomando dos direcciones perpendiculares, correspondientes a las coordenadas Y y Z del plano del observador, se tendrán las coordenadas de la proyección, α y β, definidas por

$$\alpha=Y_0=\beta=Z_0=\lim_{\substack{r\to\infty\\ \theta\to\frac{\pi}{2}}}\left[r\frac{p^{(\phi)}}{p^{(t)}}\right]=\frac{l_z}{\mathcal{E}}$$

Es decir que la imagen de la esfera de fotones, es decir la frontera de la sombra, será una circunferencia de radio $\frac{l_z}{\mathcal{E}}$

- Espacio de Kerr

Debido a que el espacio-tiempo de Kerr no es esféricamente simétrico, el tamaño de la sombra (i.e. el parametro de impacto de la esfera de fotones) es diferente en cada dirección.
Para definir la imagen en el plano del observador, se definiran coordenadas en dos direcciones perpendiculares:

- Plano ecuatorial utilizando el ángulo ϕ (azimutal)

$$\alpha = Y_0 = \lim_{\substack{r \to \infty \\ \theta \to i}} \left[r \frac{p^{(\phi)}}{p^{(t)}} \right]$$

- Plano perpendicular al ecuador (contiene la dirección del spin del agujero negro) utilizando el angulo θ de Boyer-Linquist:

$$\beta = Z_0 = \lim_{\substack{r \to \infty \\ \theta \to i}} \left[r \frac{p^{(\theta)}}{p^{(t)}} \right]$$