Ecuaciones de Cierre.

Hasta este momento, la descripción presentada utiliza 9 ecuaciones,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \qquad (1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\sigma + \vec{f} + \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \vec{\nabla}\cdot(\rho e\vec{v}) = -p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \vec{f}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{F}_{rad} + \sigma:\vec{\nabla}\vec{v} + \eta_e J^2 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{v}\times\vec{B} - \frac{\eta_e}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) \qquad (3)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad (1)$$

para encontrar 22 variables.

e	(1)	σ	(6)
ρ	(1)	$\vec{q}$	(3)
p	(1)	η_e	(1)
$\vec{v}$	(3)	$\vec{F}_{rad}$	(3)
$\vec{B}$	(3)		

Esto quiere decir que hacen falta 13 ecuaciones para cerrar el sistema.

El vector de flujo radiativo se puede expresar como

$$\vec{F}_{rad} = \int d\nu \int d\Omega\, \hat{n}\, I_\nu(\hat{n},\vec{r})$$

donde

$I_\nu(\hat{n},\vec{r})$: Intensidad específica de la radiación en el punto $\vec{r}$ y en dirección $\hat{n}$

Esta intensidad específica está dada por la ecuación de conservación para el campo de radiación. Como se mostrará más adelante, el flujo radiativo puede escribirse, en casi todos los casos de interés, como una función de ρ y T (temperatura del gas), i.e. se tiene una ecuación de cierre en la forma

$$\vec{F}_{rad} = \vec{F}_{rad}(\rho,p) \quad \text{ó} \quad \vec{F}_{rad} = \vec{F}_{rad}(\rho,T) \qquad (3)$$

Por otro lado, el flujo (conductivo) de calor a través de las fronteras del elemento, $\vec{q}$, mide la razón con la que los movimientos aleatorios (principalmente de los electrones), transportan energía dentro del gas, suavizando los gradientes de temperatura. Así, a partir de la teoría cinética de los gases se puede obtener la ecuación de cierre para $\vec{q}$,

$$\vec{q} = \vec{q}(\rho, p, \vec{B}) \qquad ó \qquad \vec{q} = \vec{q}(T, \vec{B}) \qquad (3)$$

Más adelante se planteará un modelo específico para esta relación.

En general, el tensor de esfuerzos σ puede construirse a partir de la viscosidad o de interacciones con los campos electromagnéticos. Por ello, la relación de cierre para σ tendrá, en general, la forma

$$\sigma = \sigma(\rho, \vec{v}, \vec{B}) \qquad (6)$$

Por ejemplo, en el caso de un fluido desmagnetizado (i.e. Hidrodinámica) y considerando solamente la fricción interna, las componentes de σ están dadas por

$$\sigma_{ij} = 2\eta\, \tau_{ij}$$

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3}\partial_k v_k\, \delta_{ij}\right)$$

donde $\eta = \eta(p, \rho)$ es una propiedad del medio denominada coeficiente de viscosidad dinámica.

Hasta este momento se han considerado un total de $(3)+(3)+(6)=(12)$ ecuaciones de cierre. La relación restante es la Ecuación de Estado, que es una relación escalar que liga presión y densidad,

$$P = P(\rho)$$

Consideraremos ahora una relación general en la que la energía es proporcional a la presión,

$$\rho e = n p \qquad n: \text{constante}$$

Se tiene entonces

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} = n\frac{\partial p}{\partial t}$$

y

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho e\vec{v}) = n\vec{\nabla}\cdot(p\vec{v}) = np\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + n\vec{v}\cdot\vec{\nabla}p$$

Reemplazando en la ecuación de energías,

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho e\vec{v}) = -p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \vec{f}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{F}_{rad} + \sigma:\vec{\nabla}\vec{v} + \eta_e J^2$$

$$n\frac{\partial p}{\partial t} + np\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + n\vec{v}\cdot\vec{\nabla}p = -p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \vec{f}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{F}_{rad} + \sigma:\vec{\nabla}\vec{v} + \eta_e J^2$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}p = -\left(1+\frac{1}{n}\right)p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \frac{1}{n}\left[-\vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \vec{f}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{F}_{rad} + \sigma:\vec{\nabla}\vec{v} + \eta_e J^2\right]}$$

o en el sistema Lagrangiano,

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = -\left(1+\frac{1}{n}\right)p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \frac{1}{n}\left[-\vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \vec{f}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{F}_{rad} + \sigma:\vec{\nabla}\vec{v} + \eta_e J^2\right]}$$

El término proporcional a $p\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ representa el trabajo pV reversible.
Los términos restantes en el lado derecho representan procesos irreversibles de calentamiento. Si no existen los términos irreversibles, se dice que este es un fluido ideal y podemos utilizar la ecuación de continidad para obtener

$$\frac{dp}{dt} = -\left(1+\frac{1}{n}\right)p\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{dp}{dt} = \left(1+\frac{1}{n}\right)p\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{d \ln p}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln \rho\right]$$

$$\frac{d \ln p}{dt} = \frac{d \ln \rho^{\gamma}}{dt} \qquad \gamma = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\frac{d \ln p}{dt} - \frac{d \ln \rho^{\gamma}}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\ln \frac{p}{\rho^{\gamma}}\right) = 0$$

$$\frac{\rho^{\gamma}}{p}\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right) = 0$$

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = K : \text{constante}$$

$$\boxed{p = K\rho^{\gamma}}$$

Ecuación Politrópica

$\gamma = 1 + \frac{1}{n}$: índice adiabático ó razón de calores específicos

ECUACION DE ESTADO PARA UN GAS IDEAL

Para construir un caso particular consideramos que el fluido es un gas compuesto por elementos (moleculas, partículas, etc.) y cada uno de ellos posee

- Energía cinética por unidad de volumen: $\frac{1}{2}\rho v^2$
- Energía interna (térmica) por unidad de volumen: $\rho\mathcal{E}$

$\mathcal{E}$: energía interna por unidad de masa
Depende de la temperatura

Utilizando la equipartición de la energía, cada grado de libertad de cada particula tiene una energía $\frac{1}{2}kT$.

Para un gas monoatómico, cada particula tiene 3 grados de libertad (movimiento traslacional)
Así, se tiene

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2}\frac{kT}{\mu m_H}$$

K : Constante de Boltzmann
$m_H \sim m_p$: masa del atomo de H
μ : peso molecular medio
i.e. masa promedio por particula de gas medida en unidades de m_H
i.e. inverso del número de particulas en una masa m_H del gas.

→ $\mu = 1$ para H neutro
→ $\mu = \frac{1}{2}$ para H completamente ionizado
$\frac{1}{2} \leq \mu \leq 1$ mezcla de gases dependiendo del estado de ionización.

Para un gas molecular → grados de libertad internos (vibración o rotación) el factor $\frac{3}{2}$ cambiará

En general, $\mathcal{E} = \frac{\beta}{2}\frac{kT}{\mu m_H}$

$\beta = 3$ Monoatómico
$\beta = 5$ Diatómico
$\beta = 6$ Multiatómico

La ecuación de estado más común es la Ley de los gases ideales:

$$\boxed{P = \frac{kT}{\mu m_H}\rho}$$

Flujo Isotermo

Flujo isotermo: T constante en la región de interés

La ecuación de energía se reemplaza por $T = \text{constante}$

De la ecuación del gas ideal se tiene

$$p = \frac{kT}{\mu m_H}\rho$$

$$\frac{p}{\rho} = \text{constante}$$

$$\boxed{P \propto \rho}$$

Flujo isotermo : $\gamma = 1$

Flujo Adiabático

Para un flujo adiabático, $dQ = 0$, la primera establecerá

$$d\mathcal{E} = d\left(\frac{\beta}{2}\frac{kT}{\mu m_H}\right) = -p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\frac{\beta}{2}\frac{K}{\mu m_H}dT = \frac{p}{\rho^2}d\rho$$

Utilizando $p = \frac{kT}{\mu m_H}\rho$ se obtiene

$$\frac{\beta}{2}\frac{K}{\mu m_H}dT = \frac{kT}{\mu m_H}\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{\beta}{2}\frac{dT}{T} = \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{\beta}{2}\frac{dT}{T} - \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$\frac{\beta}{2}\ln T - \ln\rho = \text{Const.}$$

$$\ln\left[T^{\beta/2}\rho^{-1}\right] = \text{Const}$$

$$T^{\beta/2} \rho^{-1} = \text{Const.}$$

Utilizando de nuevo $p = \frac{kT}{\mu m_H} \rho$

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)^{\beta/2} \rho^{-1} = \text{Const.}$$

$$p^{\beta/2} \rho^{-1} \rho^{-\beta/2} = \text{Const}$$

$$p^{\beta/2} \rho^{-(2+\beta)/2} = \text{Const.}$$

$$p \, \rho^{-(2+\beta)/\beta} = \text{Const.}$$

$$p \propto \rho^{(2+\beta)/\beta}$$

Para un gas monoatómico, $\beta = 3$, se tiene

$$\boxed{P \propto \rho^{5/3}}$$

Recuerde que se supuso un flujo adiabático (también llamado isentrópico)

Nótese que el exponente $5/3$ surge debido al coeficiente $\frac{3}{2}$ en la energía interna.
Si el gas no es monoatómico se obtendría otro exponente

Ecuación Politrópica $P \propto \rho^{\gamma}$
Gas Ideal

γ: indice adiabático

Usualmente $1 \leq \gamma \leq \frac{5}{3}$

$\gamma = 1$: Flujo isotermo

$\gamma = \frac{5}{3}$: Flujo adiabático

GAS DOMINADO POR PRESIÓN DE RADIACION

La presión de radiación toma la forma $p = \frac{1}{3} a T^4$
y la energia interna del gas obedece

$$\varepsilon \rho = 3p = aT^4$$

Considerando de nuevo un flujo adiabático, $dQ=0$, la primera ley será

$$d\varepsilon = d\left(\frac{aT^4}{\rho}\right) = -p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\frac{4aT^3}{\rho}dT - \frac{aT^4}{\rho^2}d\rho = \frac{p}{\rho^2}d\rho$$

y ya que $dp = \frac{4a}{3}T^3 dT$ se tiene

$$\frac{3}{\rho}dp = \frac{p}{\rho^2}d\rho + \frac{aT^4}{\rho^2}d\rho$$

$$\frac{3}{\rho}dp = \frac{p}{\rho^2}d\rho + \frac{3p}{\rho^2}d\rho$$

$$\frac{3}{p}dp = \frac{4}{\rho}d\rho$$

$$d(\ln p) = d(\ln \rho^{4/3})$$

$$\boxed{p \propto \rho^{4/3}}$$

$\gamma = \frac{4}{3}$: Gas dominado por presión de radiación

Gas Degenerado

En este caso, la presión del gas no se debe por un gas ideal (movimiento de las partículas) ni por la radiación sino por la presión de degeneración (e.g. degeneración electrónica en una enana blanca o la degeneración neutrónica en una estrella de neutrones).

En este caso se modela

$$P \propto \rho E_F$$

donde la energía de Fermi, E_F, en el caso no-relativista es

$$E_F = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \qquad \text{(No-relativista)}$$

Si el gas está completamente degenerado, la longitud de onda de las partículas es igual al espacio promedio entre ellas,

$$\lambda = n^{-1/3} \propto \rho^{-1/3}$$

Así, se tiene

$$P \propto \rho E_F \propto \rho\,(\rho^{1/3})^{-2} \propto \rho\,\rho^{2/3}$$

$$\boxed{P \propto \rho^{5/3}} \quad \gamma = \frac{5}{3} : \text{ Gas no-relativista completamente degenerado}$$

En el caso relativista, la energía de Fermi es

$$E_F \sim pc = c\left(\frac{h}{\lambda}\right)$$

Por lo tanto, para un gas completamente degenerado,

$$P \propto \rho E_F \propto \rho\,(\rho^{1/3})^{-1} \propto \rho\,\rho^{1/3}$$

$$\boxed{P \propto \rho^{4/3}} \quad \gamma = \frac{4}{3} : \text{ Gas relativista completamente degenerado}$$