

A. El Límite de Difracción para un Telescopio

Como es bien conocido, la habilidad para resolver detalles en una observación astronómica esta limitada (entre otros muchos factores) por la difrección de la luz en el telescopio. Para modelar este efecto, se puede asumir que la luz de una estrella es emitida a partir de un punto localizado en el infinito. Cuando esta radiación de longitud de onda λ pasa a través de la apertura circular de un telescopio (con un radio unitario) y se enfoca en el plano focal, no se produce un solo punto luminoso, sino que se registra un patrón circular de difracción que consiste de una región central luminosa rodeada de una serie de anillos concéntricos. La intensidad de la luz en el patrón de difracción esta dada por la función

$$I(r) = \left(\frac{2J_1(kr)}{kr} \right)^2, \quad (1)$$

donde r es la distancia en el plano focal medida desde el centro del patrón, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y $J_1(x)$ es una función de Bessel. Estas fuciones están definidas por la relación general

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m\theta - x \sin \theta) d\theta, \quad (2)$$

con m un entero no-negativo y $x \geq 0$.

1. Escriba una función que calcule las funciones de Bessel $J_m(x)$ utilizando la regla de Simpson con 1000 puntos en el intervalo de integración.
2. Utilice esta función para obtener un gráfico de densidad para la intensidad del patrón de difracción circular para una fuente puntual con $\lambda = 500$ nm en la región $0 \leq r \leq 1$ μm .

Nota: Para el calculo del patrón, puede ser útil saber que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_1(x)}{x} = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

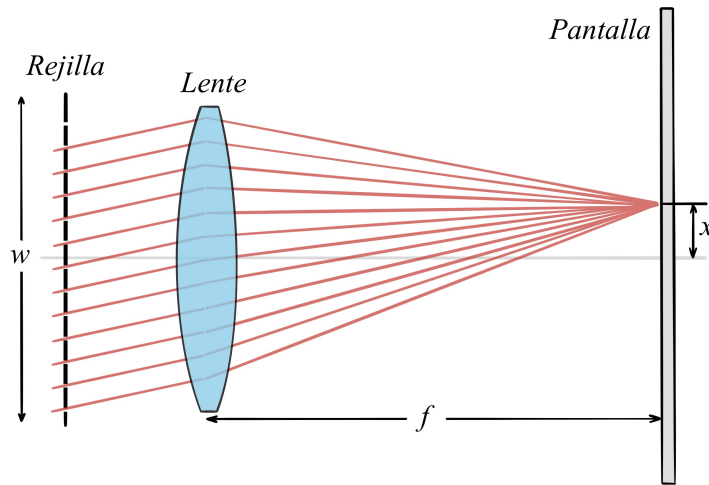
B. Rejillas de Difracción

Considere radiación electromagnética con longitud de onda λ incidente en una rejilla de difracción con ancho total w . Luego de ser difractada, la luz es enfocada por una lente de longitud focal f y es registrada en una pantalla (ver Figura).

El patrón de difracción en la pantalla estará descrito por la relación

$$I(x) = \left| \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \sqrt{q(u)} \exp \left(\frac{2\pi i x u}{\lambda f} \right) du \right|^2, \quad (4)$$

donde x es la distancia sobre la pantalla desde el eje central del sistema y $q(u)$ es la función de transmisión de intensidad de la rejilla a una distancia u del eje central (esta función representa la fracción de luz incidente que la rejilla deja atravesar).



1. Suponga que la función de transmisión de una rejilla es $q(u) = \sin^2(\alpha u)$ donde α es un parámetro constante. Encuentre la relación entre α y la separación entre los "slits" de la rejilla.
2. Escriba una función que calcule la función de transmisión $q(u) = \sin^2(\alpha u)$ para una rejilla con una separación de $20 \mu\text{m}$ entre slits.
3. Implemente un código que calcule y grafique la intensidad del patrón de intensidad producido por la rejilla descrita en el punto anterior si esta tiene un total de 10 slits y la longitud de onda de la radiación incidente es $\lambda = 500 \text{ nm}$. Además, asuma que la longitud focal del lente es $f = 1 \text{ m}$ y que el ancho de la pantalla es de 10 cm .
4. Generalice el código para graficar los siguientes casos:

- Una rejilla con una función de transmisión

$$q(u) = \sin^2(\alpha u) \sin^2(\beta u) \quad (5)$$

donde α está definido como en el punto anterior y $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

- La rejilla está compuesta de dos slits 'cuadrados' con 100% de transmisión a través de los slits y 0% de transmisión en otros puntos. En este caso debe calcular el patrón de difracción cuando uno de los slits tiene un tamaño de $10 \mu\text{m}$ de ancho, el otro slit tiene $20 \mu\text{m}$ de ancho y la separación entre los dos slits es de $60 \mu\text{m}$.